MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES ORIENTATION GÉNÉRALE À FINALITÉ SPÉCIALISÉE

Comparaison des critères de choix en gestion des stocks

Henricot, Jean-Marie

Award date:
1973

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX - NAMUR
FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES ET SOCIALES

ANNEE ACADEMIQUE 1972-1973

COMPARAISON DES CRITERES DE CHOIX EN GESTION DES STOCKS

Jean-Marie HENRICOT

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Licencié et Maître en Sciences Economiques et Sociales.
Option : Entreprise.

JURY DU MEMOIRE :

MM. F. BODART
M. GUILLAUME

A ma mère,
en témoignage de
ma reconnaissance.

Je voudrais que tous ceux qui m'ont permis de réaliser ce mémoire trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie tout d'abord Monsieur le Professeur François BODART de m'avoir proposé un sujet répondant à mes aspirations, et pour la compétence avec laquelle il a dirigé ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur Maurice GUILLAUME pour l'accueil qu'il m'a réservé et pour la précision de ses critiques.

Je tiens également à exprimer à Monsieur le Professeur Marcel BOURGEOIS toute ma reconnaissance pour ses encouragements et pour ses précieux conseils qui guidèrent ma réflexion lors des premiers pas de ce mémoire, ainsi que pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'avancement de mes travaux durant le fructueux séjour que j'ai effectué à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Jouy-en-Josas.

Je remercie enfin tous ceux que je ne puis citer et qui, à quelque titre que ce soit, m'ont apporté leur aide dans ce travail.

J.M. HENRICOT.

TABLE DES MATIERES.

INTRODUCTION

La gestion des stocks peut être définie comme la régulation d'un flux d'entrée, par l'intermédiaire d'un stock, afin de répondre à un flux de sortie (1). Les problèmes traités concernent donc la détermination d'une politique optimale d'approvisionnement d'un stock de produits, en vue de satisfaire la demande future (2).

Choisir implique toujours le recours, au moins implicite, à un critère. Ce critère de choix est un point de vue particulier que l'on adopte, permettant d'examiner plusieurs alternatives en présence et de les classer suivant une échelle de préférence, afin de pouvoir les comparer et d'opérer un choix optimum ou satisfaisant (3).

Le propos de ce mémoire est une réflexion sur le choix d'un critère en liaison avec une politique optimale d'approvisionnement. Cette réflexion sera limitée à des problèmes dans lesquels la décision concerne le flux d'entrée et exclut ceux pour lesquels la nature du produit à stocker, l'implantation du dépôt, la capacité d'entreposage, ou le flux d'écoulement, constituent un élément décisionnel.

---

(1) Voir F. BODART, Notes du cours de Théorie de la Production, Réf. /07/.

(2) Voir STARR & MILLER, La gestion des stocks, Réf. /55/, p. 3.

(3) Voir LATIERE, Analyse de système et techniques décisionnelles, Réf. /44/, pp. 34 et 91.

Dans ce cadre, la double question qui se pose au responsable des approvisionnements est alors : "Quand et quelle quantité commander ?" Les variables de décision seront donc la quantité à commander ou à lancer en fabrication (appelée aussi quantité économique, lot, série de fabrication, rafale économique), et la date de passation de commande (qui devra, entre autres choses, tenir compte des délais de livraison).

La plupart des modèles de gestion des stocks que l'on trouve dans la littérature retiennent le coût minimum comme critère de décision.

"Les coûts et l'établissement d'un compromis entre des coûts opposés se trouvent au coeur même de tous les problèmes de contrôle de la production et des stocks" (1).

"L'objectif habituel des problèmes de stocks est de minimiser le total des coût impliqués" (2).

Cette méthode généralement employée détermine une quantité économique de commande, et est inspirée de la "Formule de la rafale économique", souvent appelée "Formule de Wilson"(3).

Il nous a semblé intéressant de creuser cette question du choix d'une règle de décision et d'explorer d'autres critères que le coût minimu. Parmi ceux qui peuvent être adoptés pour assurer une régulation efficace du flux d'approvisionnement nous avons retenu les critères de profit, de rendement et taux de rendement des investissements, ainsi que de rendement et taux

---

(1) J.F. MAGEE, Le planning de la production et le contrôle des stocks, Réf. /45/, P. 27.

(2) STARR & MILLER, Op. Cit., Réf. /55/, p.8.

(3) La formule de la rafale économique fut trouvée par Ford HARRIS, de la Société Westinghouse, en 1915. Voir Réf. /39/.

de rendement des stocks. (Une définition précise de ces critè-est donnée au début du premier chapitre.) Dans le cadre de ce travail, il ne s'agit pas d'une comparaison exhaustive, mais bien du développement d'une approche.

Dans une première étape, nous étudierons un cas de base simple aux hypothèses strictement définies. Ce cas de base servira à la fois de point de départ à notre réflexion et de tremplin vers diverses explorations possibles.

Dans ce cas d'école, nous chercherons les quantités et date de commande d'un produit pour acquérir et conserver celui-ci de façon à optimiser le critère choisi. Nous examinerons alors l'influence du critère retenu sur le niveau des stocks. Pour cela, nous comparerons les valeurs que prend la quantité économique de commande lorsque l'on adopte d'autres règles de décision que celle du coût minimum.

Nous rechercherons ensuite les éventuelles plages de recouvrement, c'est-à-dire les zones de variation des paramètres, pour lesquelles un résultat serait commun à plusieurs critères. Dans les limites du cas de base, nous examinerons si certains critères surpassent les autres, et dans quelles conditions.

Dans le but d'enrichir notre étude et de mieux comprendre la réalité, nous abandonnerons certaines restrictions du modèle initial afin d'effectuer la comparaison dans différentes situations. C'est là l'objet de notre second chapitre.

Nous introduirons ainsi successivement un délai de livraison, un taux d'approvisionnement, une possibilité de différer les ventes, un prix de vente variable, la gestion de plusieurs produits, et un univers aléatoire.

Ces modifications des hypothèses de départ se feront par rayonnement à partir du cas de base ; ceci veut dire que, sauf indication contraire, chaque nouvelle extension se fait indépendamment de la situation précédente. Il va de soi que l'on peut cumuler les extensions afin de se rapprocher davantage encore de la réalité. Notons cependant que le but de ce chapitre n'est pas d'étudier un problème complexe, (Les situations réelles sont souvent d'une telle complexité que nous sommes amenés à introduire des simplifications et approximations pour obtenir un modèle maniable, dont on puisse se servir.), mais bien de tracer dans diverses directions, des pistes de réflexion.

La gestion des approvisionnements n'est cependant pas indépendante de son environnement. Comme le fait apparaître la définition citée plus haut, le stock est un service pour l'ensemble de la firme, un outil permettant à la production de répondre aux ventes. Nous ne pouvons donc nous contenter d'une étude de la gestion des stocks autonome par rapport au reste de l'entreprise ; le problème est plus vaste que la seule recherche de la taille omptimale du lot à commander ou à lancer en fabrication.

C'est pourquoi, dans un troisème chapitre, nous tenterons de dégager la signification des critères lorsque la gestion des stocks est replacée dans son contexte : les autres départements, la situation courante et les objectifs de la firme.

Pour cela, nous nous référerons à l'approche système c'est-à-dire à la dimension spatiale et temporelle donnée au sous-système de la gestion des approvisionnements. Nous nous efforcerons de dégager quelques-unes des nombreuses influences qui, provenant d'origines diverses, de préoccupations parfois contradictoires, et à différents niveaux, s'exercent sur les stocks au sein même de la firme.

Cette conception plus large de la gestion des stocks faisant apparaître de nombreux objectifs, dont certains sont peu compatibles, nous proposerons dans le dernier chapitre une approche multicritère. Celle-ci consiste essentiellement en un processus de décision qui, compte tenu des contraintes et pondérations, minimise les écarts relatifs à la situation optimale de chaque critère initial.

Bien qu'elle n'apporte aucun élément nouveau dans la comparaison proprement dite des critères de choix, cette approche, selon les circonstances, accordera plus de poids à certains objectifs, durcira ou assouplira les contraintes, et déterminera les priorités éventuelles. Elle offrira une plus grande liberté d'action et permettra le dialogue entre les responsables des différentes fonctions. Ceux-ci, par la modification des pondérations et des seuils critiques à respecter, pourront mieux adapter leurs décisions aux diverses situations.

LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS.

B_L	Ecart-type de la demande (aléatoire) pendant le délai de livraison.
CT	Coût total, (pour tout l'horizon de gestion).
$\overline{CT}$	Coût total moyen.
Cu	Coût unitaire d'acquisition.
CC	Coût de commande (par commande, par lot).
Ct	Coût total par unité de temps.
Cq	Coût total par série (par lot).
c_L	Coefficient, dont la valeur est $\frac{B_L}{D_L}$
$\overline{CR}$	Coût moyen de rupture pendant la période globale.
D	Demande totale (pour tout l'horizon de gestion).
d	Taux de demande (Demande par unité de temps).
D_L	Demande pendant le délai de livraison.
$\overline{D}$, $\overline{d}$, $\overline{D_L}$	sont les moyennes.
E_i	Ecarts relatifs à l'optimum.
$F_L(D_L)$	Fonction de la demande pendant le délai de livraison.
F_r	Facteur de rupture $= \frac{\overline{R_L}}{B_L}$
F_s	Facteur dont la valeur est : $\frac{SS}{B_L}$
G	Fonction multicritère.

h_i	Coefficients de pondération (approche multicritère).
I	Coût de détention des stocks.
L	Délai de livraison.
M	Niveau de recomplètement des stocks.
N	Nombre de séries (de lots) pendant l'horizon.
PT	Profit total (pour tout l'horizon de gestion).
Pt	Profit par unité de temps.
Pu	Profit par pièce, par article.
Pq	Profit par lot, par série.
p	Taux de production.
P	Point de commande.
Q	Quantité économique de commande, lot, rafale.
R	Rendement économique (ou interne), défini comme le profit par unité monétaire dépensée.
r	Coût de rupture unitaire (par pièce).
Rpm	Rupture moyenne.
$\overline{R_L}$	Rupture moyenne pendant le délai de livraison.
$\overline{R_T}$	Rupture moyenne pendant la période globale.
S	Rendement des stocks, ou profit par unité monétaire immobilisée en stocks.
Stm	Stock moyen.

SS	Stock de sécurité.
T	Horizon de temps de gestion.
tc	Temps de consommation d'une série, d'un lot.
tc_i	Temps de consommation d'un lot de l'article i.
tp	Temps de production.
ts	Temps de préparation (d'une série).
tr	Durée du risque de rupture.
TR	Taux de rendement économique (ou interne).
TS	Taux de rendement des stocks.
U	Contrainte de stockage.
V	Prix de vente unitaire.
W_i	Limites des écarts relatifs E_i (approche multicritère).
w	Risque de rupture (probabilité qu'il y ait une rupture) pendant le délai de livraison.
X	Outil de travail qui, à travers tout le mémoire, aura la même valeur : $X = \sqrt{\frac{2\ CC.Cu.I}{d}}$
Y	Coût total unitaire (par pièce).
Z	Niveau de service global (pour tout l'horizon).
Z_L	Niveau de service moyen pendant le délai de livraison.

qqch* ou qqch$_*$ = qqch standard (voir chap.I).

$...^o$	... optimum
$\overline{...}$	... moyen.

Chapitre 1.

CAS DE BASE

Section 1 - INTRODUCTION.

Nous partirons d'un cas de base simple, avec des hypothèses restrictives, et comparerons à ce niveau différents critères. Par la suite, nous relâcherons certaines hypothèses et examinerons les conséquences.

Cette étude porte sur la gestion des stocks dans une entreprise manufacturière. Les raisonnements resteront cependant valables dans d'autres situations (par exemple une entreprise de distribution), moyennant certaines nuances ou modifications éventuelles.

Il s'agit en outre du stockage des produits finis. La discussion du choix des critères pourrait être différente dans le cas des matières premières ou des produits en cours de fabrication, et se situer dans un autre contexte, celui de l'ordonnancement.

Nous ne considérons ici que le "stock-outil" d'exploitation, nécessaire à l'activité courante de l'entreprise. Nous excluons donc toute autre forme de stockage, par exemple le stock spéculatif, ou encore le stock destiné à répondre aux variations du potentiel de production.

Plusieurs critères de choix peuvent être retenus comme règle de décision pour déterminer "Quand et combien commander". Dans l'analyse du cas de base, nous retiendrons les critères suivants :

- le coût minimum,
- le profit maximum,
- le rendement économique, défini comme le profit par unité monétaire dépensée,
- le taux de rendement interne, c'est-à-dire le taux de profit par unité monétaire dépensée,
- le rendement des stocks, ou profit par unité monétaire immobilisée en stocks,
- le taux de rendement des stocks.

En ce qui concerne les critères de coût et de profit, nous ferons des distinctions suivant qu'il s'agit du coût (ou du profit) par pièce, par unité de temps, par série, ou pour tout l'horizon de temps.

Cette liste de critères est loin d'être exhaustive ; il est en effet possible de définir un grand nombre de ratios économiques susceptibles de servir de norme pour optimiser la gestion des stocks.

Le niveau moyen des stocks, dépendant directement de la quantité économique (1), sera influencé par le choix du critère. Il serait donc intéressant de comparer les différentes valeurs prises par la taille optimale des lots, selon le critère retenu.

---

(1) avec les hypothèses de départ, le stock moyen est égal à la moitié de la quantité économique ($Stm = Q/2$).

Section 2. - HYPOTHESES.

Le cas de base est un modèle stationnaire, dynamique, en univers déterministe, avec une politique à point de commande.

Les autres hypothèses de départ sont les suivantes : nous ne considérons qu'un seul produit, avec un seul lieu de stockage et un seul poste de transformation ; les paramètres sont fixes (prix de vente, coûts de lancement, d'acquisition et de détention), le prix de vente étant supposé supérieur au prix de revient ; la demande est continue, à un taux constant et connu ; la production est instantanée et sans délai de livraison ; l'horizon de gestion est connu et court, il n'y a pas d'actualisation ; les produits entreposés sont valorisés au coût d'acquisition ; on n'admet pas de rupture des stocks.

Section 3. - RECHERCHE DES QUANTITES ECONOMIQUES OPTIMALES POUR CHAQUE CRITERE.

Dans le cadre des hypothèses de départ, le problème qui se pose est de déterminer la quantité économique, c'est-à-dire la taille optimale des lots à commander ou des séries à lancer en fabrication.(1)

---

(1) Remarquons que la seconde question "Quand commander ?" est entièrement résolue par la réponse à la question "Quelle quantité commander ?". En effet, le nombre de commandes (N) pendant l'horizon de temps (T) est défini par le rapport demande globale/rafale ($N = D/Q$). Dès lors, le temps qui s'écoule entre chaque commande sera $tc = T/N$ (ou encore $tc = Q/d$). Les commandes seront donc passées toutes les "tc" unités de temps.

Chaque taille de lot devant optimer la fonction économique du critère choisi, la quantité économique sera obtenue par dérivation de cette fonction.

3.1. CRITERES DE COUT MINIMUM.

Ces critères consistent à obtenir au moindre coût les produits finis. Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous distinguerons les coûts suivants : pour tout l'horizon de temps (coût total), par unité de temps, par pièce, et par série.

Que l'entreprise produise l'article elle-même ou qu'elle fasse appel à un fournisseur extérieur, le coût total d'obtention du produit se compose de :

- Cu, un coût d'approvisionnement ou d'acquisition ;
- CC, un coût associé à la commande (coût de lancement du lot ou de passation de commande, selon le cas) ;
- Cu.I, un coût de détention, pénalisant le maintien de l'article en stock ; nous adoptons un coût de stockage exprimé sous la forme d'un pourcentage (I) de la valeur d'acquisition (Cu) de l'article (1).

---

(1) Pour une discussion des composantes du coût total, et pour le coût de détention en particulier, voir :
STARR & MILLER, La gestion des stocks, Réf. [55], Chap. I.
F. BODART, Cours de Théorie de la Production, Réf. [07].
HADLEY & WHITIN, Etude et pratique des modèles de stocks, Réf. [36], Chap. I.

31. A. COUT TOTAL MINIMUM. (min CT)

Le coût total des (D) produits finis de l'horizon de gestion (T) se compose de :

- coût total d'acquisition : Cu.D
- coût total de commande : $CC.N = CC.\frac{D}{Q}$
  car N étant le nombre de commandes pendant l'horizon de gestion, vaut N = D/Q.
- coût total de détention : $Cu.I.\frac{D}{d}$
  En effet : le stock moyen est Stm = Q/2
  Ce stock moyen est conservé pendant T
  et aussi D = d.T (d = taux de demande)

Ainsi donc, le coût total devient :

$$CT = Cu.D + CC.\frac{D}{Q} + Cu.I.\frac{Q}{2}.\frac{D}{d}$$

On obtient alors le minimum de la fonction de coût total par annulation de sa dérivée première, pour des valeurs positives de sa dérivée seconde, par rapport à la variable Q.

$$\frac{\delta CT}{\delta Q} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 CT}{\delta Q^2} > 0$$

On trouve alors l'optimum suivant (1) :

$$\boxed{Q^{\circ}_{CT} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

Cette taille optimale (Q^{*}) de la série conduit au coût total minimum suivant :

$$CT^{\circ} = (Cu + X).D \qquad \text{avec } X = \sqrt{\frac{2\ Cu.I.CC}{d}}$$

(1) Voir le détail en annexe 1.

31. B. COUT MINIMUM PAR UNITE DE TEMPS. (Min Ct)

Ce critère se ramène au précédent : la seule différence est la période durant laquelle s'accumulent les coûts. Au lieu de l'horizon de gestion (T), on considère l'unité de temps (t = 1).

Il vient donc $Ct = CT/T$, ou encore

$$Ct = Cu.d + CC.\frac{d}{Q} + Cu.I.\frac{Q}{2}$$

Etant donné que $Ct = CT/T$, et que Q et T sont indépendants, nous aurons la même taille optimale du lot :

$$\boxed{Q^{\circ}_{Ct} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

et le coût minimum par unité de temps sera :

$$Ct^{\circ} = (Cu + X).d = CT^{\circ}/T$$

31. C. COUT MINIMUM PAR PIECE. (Min Y)

Ce critère fournit également le même résultat. En effet, $Y = CT/D$ (avec D indépendant de Q), ou encore

$$Y = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I.Q}{2\ d}$$

et nous obtenons encore la même valeur de la rafale optimale :

$$\boxed{Q^{\circ}_{Y} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

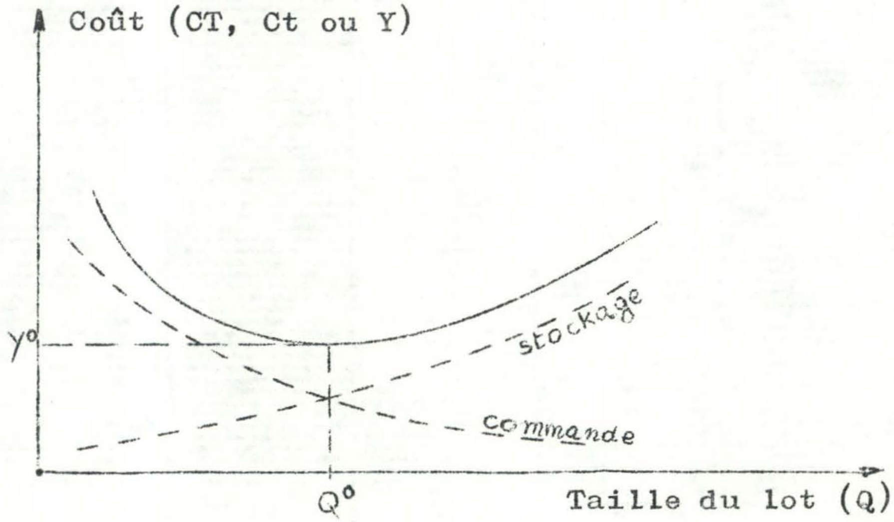
Le coût minimum par pièce sera :

$$Y^{\circ} = Cu + X = CT^{\circ}/D = Ct^{\circ}/d$$

Nous remarquons donc que ces trois premiers critères de coût minimum aboutissent au même résultat Q^*. Ceci est normal, puisque les trois fonctions sont identiques, à un facteur multiplicatif (D ou d) près, et ce facteur est indépendant de la taille du lot.

CT = Y.D   et Ct = Y.d avec D et d indépendants de Q

De même, la courbe des coûts sera de même allure dans les trois cas (à un facteur multiplicatif près).



31. D. <u>COUT MINIMUM PAR SERIE.</u> (Min Cq)

Le coût d'une série de produits s'écrit :

Cq = Y.Q ou encore :

$$Cq = Cu.Q + CC + \frac{Cu.I.Q^2}{2\ d}$$

Ce coût Cq par série est fonction croissante de Q pour les valeurs positives de cette variable.

Le minimum sera donc atteint pour la plus petite valeur positive (pour avoir une solution cohérente) de la variable Q, c'est-à-dire pour Q = 1.

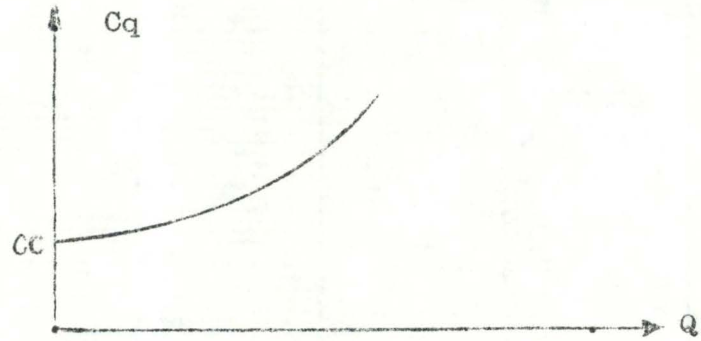
Ainsi donc, nous aurions l'optimum :

$$Q^{o}_{Cq} = 1 \qquad (1)$$

et le coût minimum par série (mais peut-on encore parler de séries ?) serait

$$Cq^{o} = Cu + CC + \frac{Cu.I}{2\ d}$$

La courbe du coût par série a l'allure suivante :



Ce critère conduit donc à l'absence de série, car il considère le coût de commande comme inévitable et n'en tient pas compte. En fait, avec nos hypothèses de départ, il ne correspond pas à une situation réelle et, par son expression fonction croissante de la quantité économique, il aboutira nécessairement à la plus petite solution possible pour la taille du lot. Tout au plus pourrait-on dire qu'il reflète une situation statique déterministe : on a besoin de Q unités, alors, il faut en commander Q, ni plus ni moins.

---

(1) Voir annexe 2.

3.2. CRITERES DE PROFIT MAXIMUM.

Le terme "profit" est à entendre ici dans le sens de bénéfice brut, c'est-à-dire comme la différence entre les recettes (au prix de vente unitaire V) et les coûts (coût unitaire Y). Rappelons encore que le prix de vente (V) est supposé supérieur au coût ($V > Y$) et indépendant de la demande.

Comme pour les critères de coût minimum, nous ferons plusieurs dinstinctions pour le profit : total, par unité de temps, par pièce, ou par série.

32. A. PROFIT TOTAL MAXIMUM. (Max PT)

Le profit total des (D) produits finis de l'horizon de gestion (T) se compose de :

- recettes totales : V.D.
- dépenses totales : CT ou encore Y.D.

$$\begin{aligned} \text{Donc, } PT &= V.D - CT \\ &= V.D - Cu.D - \frac{CC.D}{Q} - Cu.I.\frac{Q}{2}.\frac{D}{d} \end{aligned}$$

Le maximum de la fonction PT de profit total sera atteint par l'annulation de la dérivée première, pour des valeurs négatives de la dérivée seconde, par rapport à la variable Q.

Ou autrement, étant donné que V est indépendant de Q, PT sera maximum au point qui minimise CT.

$$\boxed{Q^\circ_{PT} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}} \qquad (1)$$

Q^{*} est donc la rafale optimale, qui procure le profit total maximum :

$$PT^\circ = (V-Cu-X).D = V.D - CT^\circ = (V - Y^\circ).D$$

(1) Voir annexe 3.

32. B. PROFIT MAXIMUM PAR UNITE DE TEMPS. (Max Pt)

Ce critère est semblable au précédent, et l'on aboutit au même résultat, en remplaçant l'horizon de gestion (T) par l'unité de temps ($t = 1$).

Dès lors, $Pt = PT/T$ ou encore

$$Pt = V.d - Cu.d - \frac{CC.d}{Q} - \frac{Cu.I.Q}{2}$$

Et nous obtenons la même valeur de la taille du lot :

$$\boxed{Q^{\circ}_{Pt} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

Le profit maximum par unité de temps sera :

$$\begin{aligned} Pt^{\circ} &= (V-Cu-X).d \\ &= PT^{\circ}/T \\ &= V.d - Ct \\ &= (V - Y^{\circ}).d \end{aligned}$$

32. C. PROFIT MAXIMUM PAR PIECE. (Max Pu)

Ce critère fournit encore le même résultat Q^{*}. En effet, $Pu = V - Y$ et comme le prix de vente est indépendant de la variable Q, nous aurons le profit unitaire maximum là où le coût unitaire est minimum : Max Pu pour Min Y.

$$\boxed{Q^{\circ}_{Pu} = \sqrt{\frac{2CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

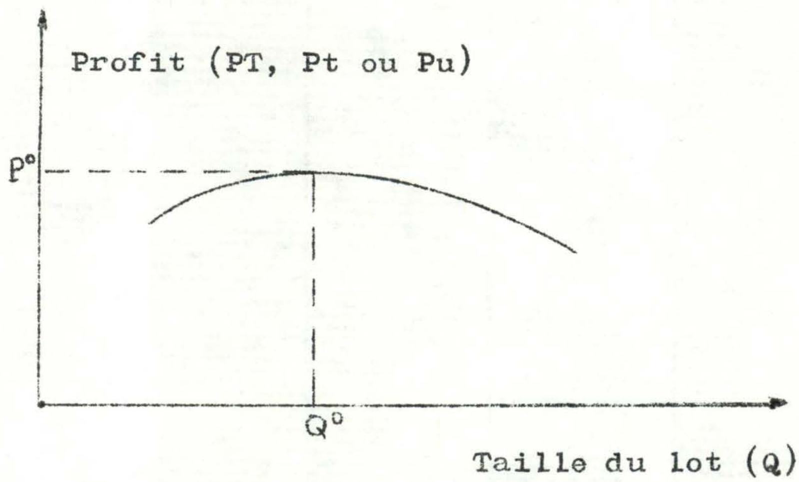
A l'optimum, le profit unitaire sera :

$$\begin{aligned} Pu^{\circ} &= V - Y^{\circ} \\ &= V - Cu - X \\ &= PT^{\circ}/D \\ &= Pt^{\circ}/d \end{aligned}$$

Comme dans le cas des critères de coût, nous remarquons que ces trois premiers critères de profit maximum aboutissent au même résultat Q^*. Ce résultat est d'ailleurs le même que celui des critères de coût.

Ceci découle du fait que toutes ces fonctions à optimiser sont semblables, à un facteur multiplicatif ou additif indépendant près.

De même, les courbes des profits seront de même allure, à un factaur multiplicatif près, dans les trois cas.



32. D. PROFIT MAXIMUM PAR SERIE. (Max Pq).

Le profit engendré par une série d'articles est :

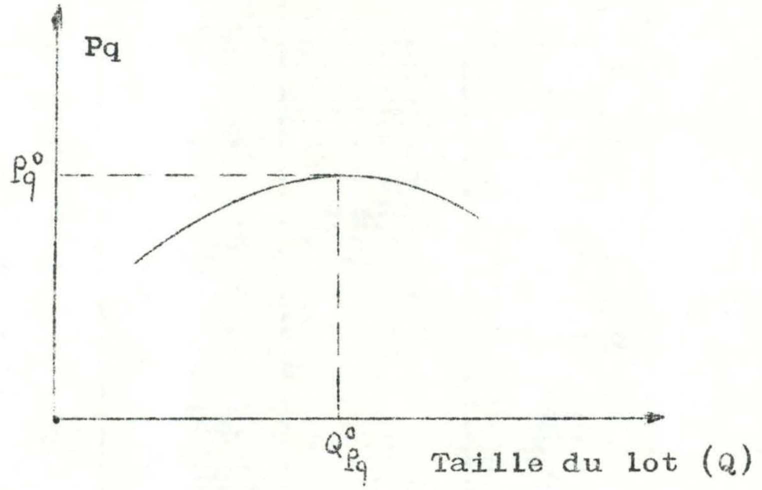
$Pq = V.Q - Cq$

Après annulation de la dérivée première de cette fonction, pour les valeurs négatives de la dérivée seconde, il vient :

$$\boxed{Q^{o}_{Pq} = \frac{(V-Cu).d}{Cu.I} = \frac{(V-Cu)}{X} .Q^{*}} \qquad (1)$$

(1) Voir annexe 4.

La courbe du profit par série sera du type suivant :



Lorsque la rafale sera optimale (Q^o_{Pq}), le profit par série sera optimal : (1)

$$Pq^o = \frac{d}{2\ Cu.I}.\left[(V-Cu)^2 - X^2 \right]$$
$$= \frac{Q^*}{2\ X}.\left[(V-Cu)^2 - X^2 \right]$$

3.3. CRITERES DE RENDEMENT ECONOMIQUE.

Rappelons que le rendement économique (R) est défini comme le profit par unité monétaire dépensée ; et le taux de rendement économique (ou interne), TR, comme le taux de profit par unité monétaire dépensée.

33. A. RENDEMENT ECONOMIQUE MAXIMUM PAR SERIE.

Par définition, nous pouvons exprimer le rendement économique comme le rapport du profit par série sur les coûts par série.

---

(1) Voir annexe 4.

$$R = Pq/Cq$$
$$= \frac{(V-Y).Q}{Y.Q}$$
$$= \frac{V}{Y} - 1$$

Le rendement économique maximum est obtenu par dérivation de la fonction R, relativement à la variable Q.

$$\frac{\delta R}{\delta Q} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta^2 R}{\delta Q^2} < 0$$

Par ailleurs, en vertu de l'hypothèse d'indépendance du prix de vente (V) par rapport à la taille du lot (Q), on constate que l'on aura le rendement économique maximum (R°) là où le coût unitaire est minimum (Y°) :

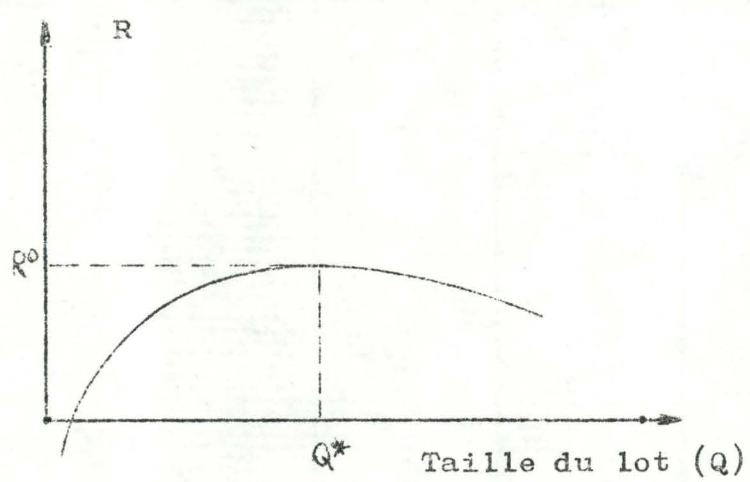
$$\text{Max } R = \text{Max } \left(\frac{V}{Y} - 1\right)$$
$$= \text{Min } Y$$

Donc $$\boxed{Q^{\circ}_{R} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^{*}}$$

A l'optimum Q^{*}, le rendement économique vaut :

$$R^{\circ} = \frac{V}{Y^{\circ}} - 1$$
$$= \frac{(V-Cu-X)}{(Cu+X)}$$

Et la courbe de rendement économique aura l'allure suivante :



33. B. TAUX DE RENDEMENT INTERNE MAXIMUM PAR SERIE. (Max TR)

Par définition, nous avons :

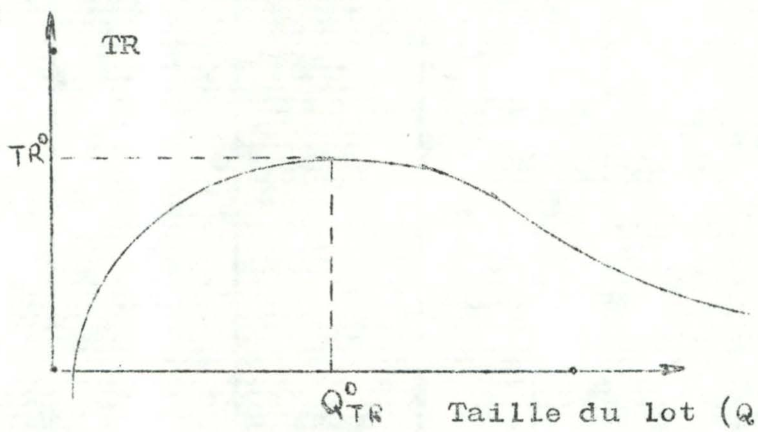
$TR = R/tc$ avec tc = temps d'une série, d'un cycle.

$= R.\frac{N}{T}$

$= \frac{(V-Y).d}{Y \ . \ Q}$

L'optimum Q^{o}_{TR} ne peut être calculé analytiquement de manière simple, mais on obtient cette valeur optimale par approximations successives. (1)

La courbe du taux de rendement interne sera du type suivant :



D'autre part, à partir de la condition d'optimalité $\frac{\delta TR}{\delta Q} = 0$, (annulation de la dérivée première), on peut montrer que :

$$\boxed{Q^{o}_{TR} < Q^{*}}$$ (2)

---

(1) Voir procédure en annexe 5.

(2) Voir démonstration en annexe 6.

3.4. CRITERES DE RENDEMENT DES STOCKS.

Rappelons que le rendement des stocks (S) et le taux de rendement des stocks (TS) sont définis respectivement comme le profit et le taux de profit, par unité monétaire immobilisée en stocks.

34. A. RENDEMENT MAXIMUM DES STOCKS. (Max S)

Par définition, le rendement des stocks est égal au rapport du profit sur la valeur du stock moyen (en prenant le cycle comme base de temps). Nous avons donc :

$$S = \frac{\text{Profit (d'un cycle)}}{\text{Valeur Stock Moyen}}$$

$$= \frac{Pq}{Cu.\frac{Q}{2}.tc}$$

$$= \frac{2.(V-Y).d}{Cu.Q}$$

Car le stock moyen est de Stm = Q/2, et, par hypothèse de départ, les stocks sont valorisés au coût d'acquisition (Cu). Par ailleurs, nous avons vu précédemment (1) que la durée d'une série, tc = T/N ou = Q/d.

Après dérivation de la fonction S de rendement des stocks, il vient (2) :

$$\boxed{Q^{\circ}_{S} = \frac{2\ CC}{(V-Cu)} = \frac{X}{(V-Cu)}\ .Q^{*}}$$

A l'optimum Q°_{S}, le rendement des stocks vaut :

$$S^{\circ} = \frac{(V-Cu)^{2}.d}{2\ CC.Cu} - I$$

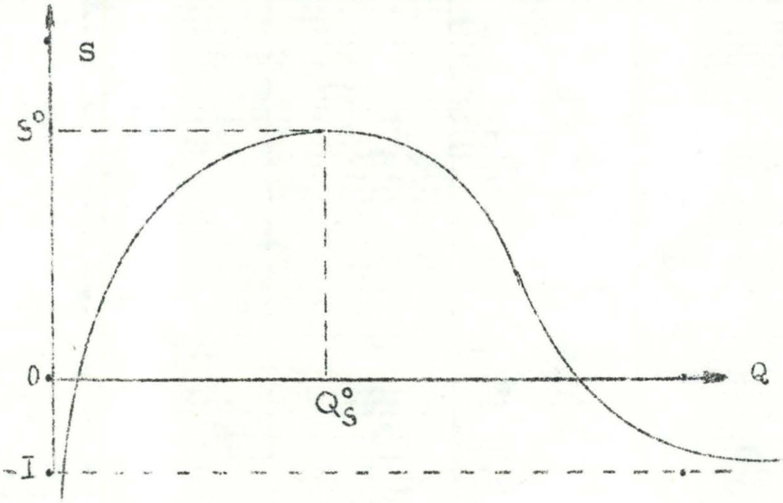
---

(1) Voir annexe 2.

(2) Voir annexe 7.

$$S^{\circ} = I.\left[\frac{(V-Cu)^2}{X^2} - 1\right] \qquad (1)$$

La courbe de rendement des stocks aura l'allure suivante :



34. B. TAUX MAXIMUM DE RENDEMENT DES STOCKS. (Max TS)

Par définition, nous avons :

$$TS = S/tc$$

$$= S.\frac{d}{Q}$$

$$= \frac{2\,d^2.(V-Y)}{Cu.Q^2}$$

Les conditions d'optimalité fournissent la solution suivante :

$$\boxed{Q^{\circ}_{TS} = \frac{2\,d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}\right]} \qquad (2)$$

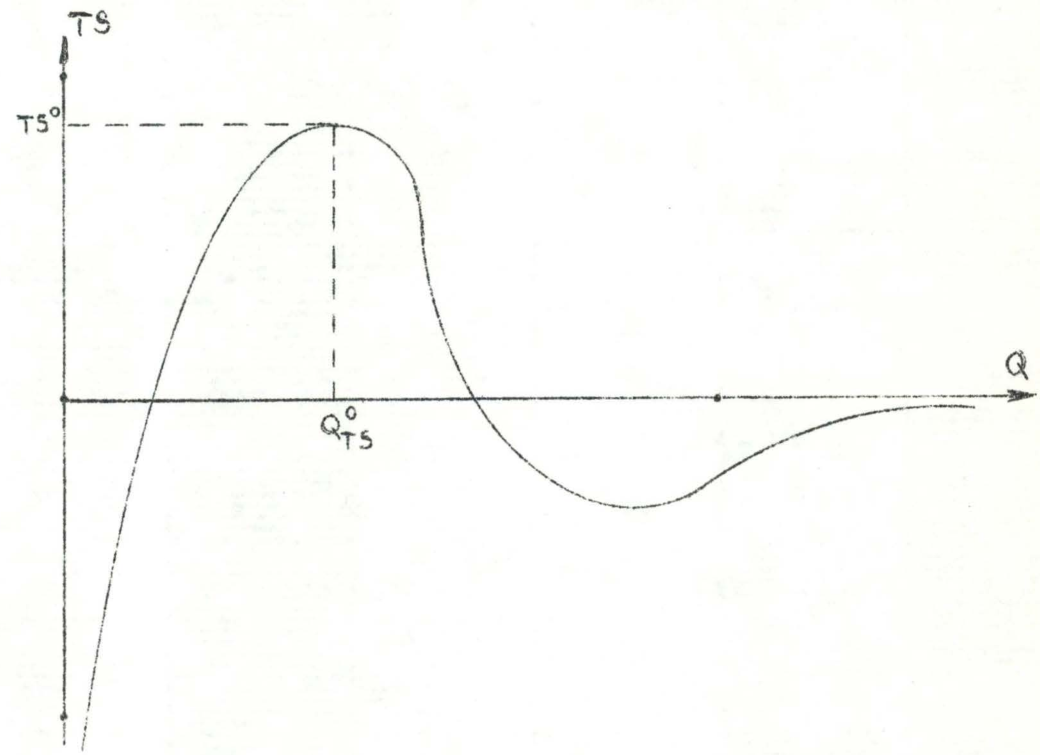
L'équation $\frac{\delta TS}{\delta Q} = 0$ (annulation de la dérivée première) fournit deux valeurs réelles distinctes positives pour Q_{TS}.
La condition du second ordre détermine laquelle de ces deux valeurs est un maximum (l'autre étant un minimum).

---

(1) Voir annexe 7.

(2) Voir annexe 8.

La courbe de taux de rendement des stocks sera la suivante :



On peut également montrer (1) que la taille du lot déterminée par ce critère de taux de rendement des stocks est inférieure à celle que détermine le critère de rendement maximum des stocks.

$$\boxed{Q_{TS} < Q_S < Q^*}$$

---

(1) Voir démonstration en annexe 9.

Section 4. - EXEMPLE.

Nous proposons d'illustrer par un exemple chiffré les différences entre les quantités économiques déterminées par les divers critères.

En plus des hypothèses de départ, du cas de base (1), nous avons les données suivantes :

Horizon de gestion : 1 an	$T = 1$
Taux de demande (et demande annuelle)	$D = d = 10.000$
Coût de commande	$CC = 5.000$
Coût unitaire d'approvisionnement	$Cu = 80$
Coût de stockage (20% de la valeur)	$I = 0,2$
Prix de vente unitaire	$V = 100$

De ces données, nous déduisons :

Coût de détention = $Cu.I = 0,2.80 = 16$.

Le symbole X a pour valeur : $X = \sqrt{\frac{2\ CC.Cu.I}{d}} = \sqrt{\frac{2.5.10^3.16}{10^4}} = 4.$

La fonction de coût unitaire s'écrira :

$$Y = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I.Q}{2\ d}$$
$$= 80 + \frac{5.10^3}{Q} + \frac{8\ Q}{10^4}$$

Les différents critères nous donnent les résultats suivants :

Coût minimum $\left\{\begin{array}{l}\text{total}\\ \text{par an}\end{array}\right\}$: $Q^\circ_{CT} = Q^\circ_{Ct} = 2.500 = Q^*$

$CT^\circ = Ct^\circ = 840.000$

Coût minimum par pièce : $Q^\circ_Y = 2.500 = Q^*$

$Y^\circ = Cu + X = 84$

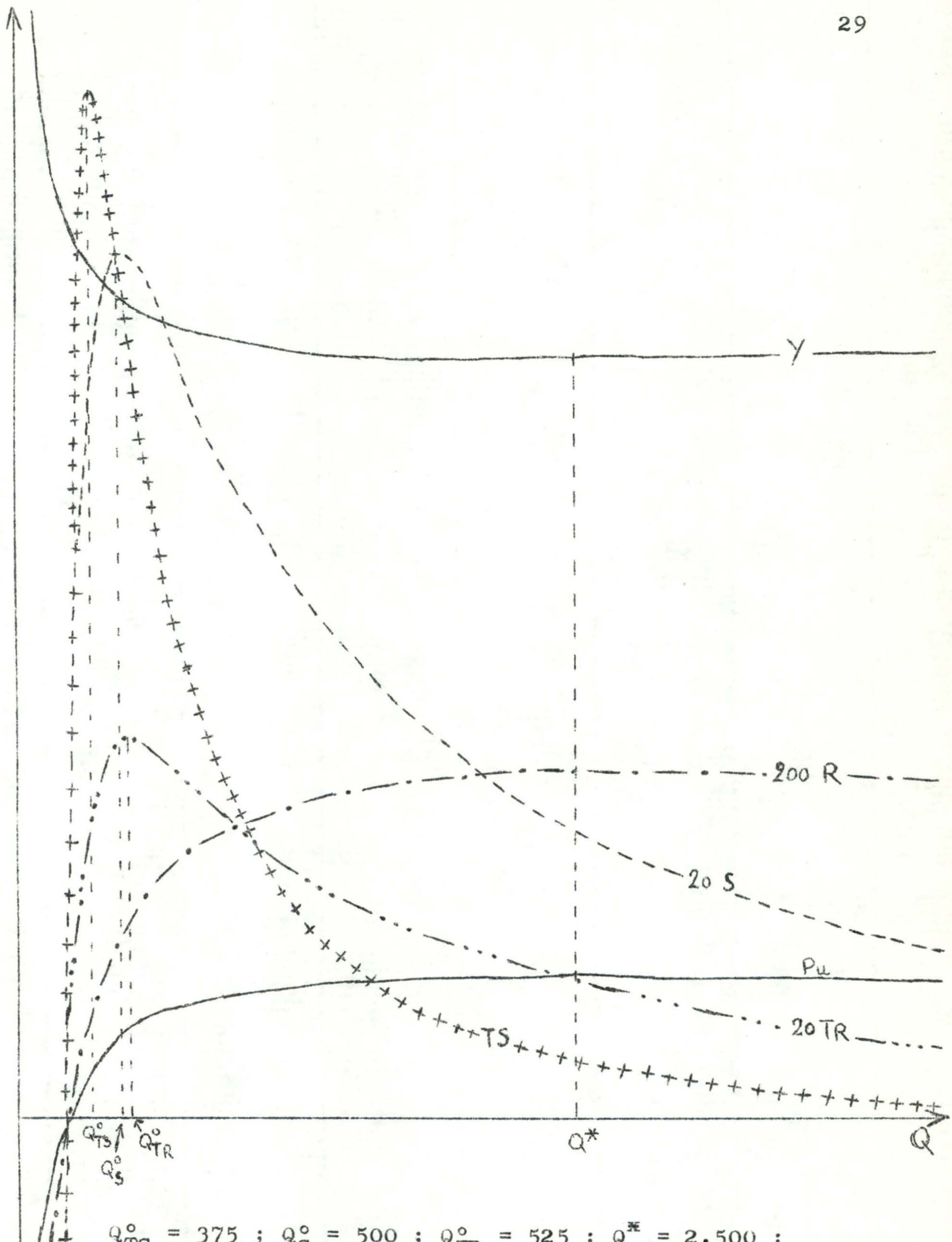
(1) Voir hypothèses, page 11.

Profit maximum $\left\{\begin{matrix}\text{total}\\ \text{par an}\end{matrix}\right\}$	: $Q^{o}_{PT} = Q^{o}_{Pt} = 2.500 = Q^{*}$ $PT^{o} = Pt^{o} = (V-Y^{o}).d = 160.000$
Profit maximum par pièce	: $Q^{o}_{Pu} = 2.500 = Q^{*}$ $Pu^{o} = (V-Y^{o}) = 16$
Profit maximum par série	: $Q^{o}_{Pq} = 12.500 = 5 . Q^{*}$ $Pq^{o} = 120.000$
Rendement économique maximum	: $Q^{o}_{R} = 2.500 = Q^{*}$ $R^{o} = 16/84 = 0,19$
Taux maximum de rendement économique	: $Q^{o}_{TR} = 525 < Q^{*}$ $TR^{o} = 2,13$
Rendement maximum des stocks	: $Q^{o}_{S} = 500 = \frac{1}{5} . Q^{*}$ $S^{o} = 4,8$
Taux maximum de rendement des stocks	: $Q^{o}_{TS} = 375 < Q^{*}$ $TS^{o} = 113$

On voit dans notre exemple, que

$$Q^{o}_{TS} < Q^{o}_{S} < Q^{o}_{TR} < Q^{*} < Q^{o}_{Pq}$$

	Q	Y	Pu	Pq	R	TR	S	TS
	100	130	-30	-3.000	-0,23	-23	-75	-7.500
	200	105	- 5	-1.000	-0,047	- 2,35	- 6,25	- 312,5
	300	97	3	900	0,031	1,03	2,50	83
Q_{TS}=	375	93,6	6,4				4,27	113
	400	93,	7	2.800	0,075	1,87	4,37	109
Q_S =	500	90,4	9,6	4.800	0,106	2,12	4,80	96
Q_{TR}=	525	89,94	10,06			2,13		
	600	88,8	11,2	6.720	0,126	2,10	4,66	77
	700	87,7	12,3	8.610	0,140	2,00	4,39	62
	800	86,9	13,1	10.480	0,151	1,89	4,09	51
	900	86,3	13,7	12.330	0,159	1,77	3,81	42
	1.000	85,8	14,2	14.200	o,165	1,65	3;55	36
	1.100	85,4	14,6	16.060	0,171	1,55	3,32	30
	1.200	85,1	14,9	17.880	0,175	1,46	3,10	26
	1.300	84,9	15,1	19.630	0,178	1,37	2,90	22
	1.400	84,7	15,3	21.420	0,181	1,29	2,73	19
	1.500	84,53	15,47	23.205	0,183	1,22	2,58	17
	1.600	84,41	15,59	24.944	0,185	1,16	2,43	15
	1.700	84,30	15,70	26.690	0,186	1,09	2,31	13,6
	1.800	84,22	15,78	28.404	0,187	1,04	2,19	12
	1.900	84,15	15,85	30.115	0,188	0,99	2,08	11
	2.000	84,10	15,90	31.800	0,189	0,95	1,99	9,9
	2.100	84,06	15,94	33.474	0,1896	0,90	1,89	9
	2.200	84,03	15,97	35.174	0,1901	0,86	1,82	8,3
	2.300	84,01	15,99	36.777	0,1903	0,83	1,74	7,6
	2.400	84,...	15,99.	38.400	0,1904	0,79	1,67	6,9
Q^* =	2.500	84,-	16,-	40.000	0,1905	0,76	1,60	6,4
	2.600	84,...	15,99.	41.600	0,1904	0,73	1,54	5,9
	3.000	84,07	15,93	47.790	0,1895	0,63	1,33	4,4
	5.000	85,-	15,-	75.000	0,176	0,35	0,75	1,5
	10.000	88,50	11,50	115.000	0,130	0,13	0,29	0,29
Q_{Pq}=	12.500	90,4	9,6	120.000	0,106	0,08	0,19	0,15
	15.000	92,33	7,67	115.050	0,083	0,05	0,13	0,08



$Q^o_{TS} = 375$; $Q^o_S = 500$; $Q^o_{TR} = 525$; $Q^* = 2.500$;

($Q^o_{Pq} = 12.500$)

Section 5. - COMPARAISON DES QUANTITES ECONOMIQUES DETERMINEES PAR LES DIFFERENTS CRITERES.

Nous pouvons regrouper les résultats fournis par les différents critères dans le tableau suivant :

Critère utilisé	Rafale optimale	Comparaison avec le standard (Q^*)
Critères de coût		
CT Coût total minimum	$Q^o_{CT} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{CT} = Q^*$
Ct Coût min. par unité de temps	$Q^o_{Ct} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Ct} = Q^*$
Y Coût minimum par pièce	$Q^o_{Y} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Y} = Q^*$
Cq Coût minimum par série	$Q^o_{Cq} = 1$	
Critères de profit		
PT Profit total maximum	$Q^o_{PT} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{PT} = Q^*$
Pt Profit maxi. par unité de temps	$Q^o_{Pt} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Pt} = Q^*$
Pu Profit unitaire maximum	$Q^o_{Pu} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Pu} = Q^*$
Pq Profit maximum par série	$Q^o_{Pq} = \frac{(V-Cu).d}{Cu.I}$	$Q^o_{Pq} = \frac{V-Cu}{X} . Q^*$
Critères de rendement économique		
R Rendement écon. maximum	$Q^o_{R} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{R} = Q^*$
TR Taux de rendement écon. maximum	Q^o_{TR}	$Q^o_{TR} < Q^*$

Critère utilisé	Rafale optimale	Comparaison avec le standard (Q^{*}).
Critères de rendement des stocks		
S Rendement maxi. des stocks	$Q^{o}_{S} = \frac{2\ CC}{(V-Cu)}$	$Q^{o}_{S} = \frac{X}{(V-Cu)} \cdot Q^{*}$
TS Taux maxi. de rend. des stocks	$Q^{o}_{TS} = \frac{2 \cdot d}{Cu.I} \left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} \cdot X^2} \right]$	$Q^{o}_{TS} < Q^{*}$

Dans le cadre des hypothèses formulées au départ, nous pouvons établir le classement et les comparaisons suivantes :

$$(Q^{o}_{Cq}) < Q^{o}_{TS} < Q^{o}_{S} < Q^{*} < Q^{o}_{Pq} \qquad \text{et} \qquad Q^{o}_{TR} < Q^{*}$$

$$\text{avec } Q^{*} = Q^{o}_{CT} = Q^{o}_{Ct} = Q^{o}_{Y} = Q^{o}_{PT} = Q^{o}_{Pt} = Q^{o}_{Pu} = Q^{o}_{R}$$

La quantité économique optimale prend la même valeur Q^{*} (que nous appelons "standard") lorsque l'on recherche le coût minimum total, par unité de temps ou par pièce, le profit maximum total, par unité de temps ou par pièce, ou encore le rendement maximum.

Cette situation découle des hypothèses relatives au prix de vente (exogène) : rechercher le meilleur rendement interne ou le plus grand profit revient à minimiser les coûts ; par ailleurs, la similitude des fonctions de coûts entre elles, ainsi que celle des fonctions de profit, (sauf les critères "par série"), conduit inévitablement au même résultat.

Cet optimum, ou quantité économique "standard", est fonction croissante du coût de commande (CC) et du taux de la demande (d), et fonction décroissante du coût de détention. Cette expression de la taille optimale du lot reflète la minimisation des coûts par recherche d'un équilibre entre d'une part le coût de commande, et d'autre part le coût de stockage.

Le critère de coût minimum par série conduit à une production par lots les plus petits possible.

Le critère de profit maximum par série donne à la quantité économique une valeur supérieure au standard trouvé plus haut. L'écart sera d'autant plus important que le prix de vente est élevé, la demande forte, et le coût de lancement faible.

Les critères de taux de rendement (économique et des stocks) conduisent à des quantités optimales inférieures à la quantité standard.

La quantité économique fournie par le critère de rendement maximum du capital investi en stocks est fonction croissante du coût de lancement, et fonction décroissante de la différence entre le prix de vente unitaire et le coût unitaire d'acquisition (de fabrication). Cette quantité est inférieure au standard mais supérieure à la valeur du lot fourni par le taux maximum de rendement des stocks.

On peut à présent se demander s'il y a des plages de recouvrement, c'est-à-dire s'il existe des lieux (zones ou points) où, pour certaines valeurs des paramètres, les quantités optimales déterminées par différents critères prennent la même valeur.

Si l'on écarte les critères de coût minimum par série Cq (car production sans lot) et de taux de rendement économique maximum TR (pour lequel on ne dispose pas d'une expression analytique de la taille idéale du lot), on constate qu'il n'existe aucun lieu commun aux critères fournissant des résultats différents. (1)

Les différentes valeurs optimales Q° seront toutes égales au standard Q^{*} (à l'exception des deux critères écartés ci-avant) si et seulement si $V - Cu = X$, ou encore si $V = Cu + X$, c'est-à-dire si le prix de vente est égal au coût minimum. Cela voudrait dire que le profit, le rendement économique et le rendement des stocks sont tous nuls. Cette situation de prix de vente égal au coût étant exclue par les hypothèses de départ, nous pouvons donc dire qu'il n'existe aucune plage de recouvrement.

---

(1) Voir annexe 10.

Section 6. - CONCLUSIONS.

Nous remarquons que les critères de taux de rendement (interne ou des stocks) conduisent à de plus petites séries de fabrication que le critère de minimisation des coûts ; il en résulte un plus faible niveau du stock moyen.

Cette différence provient essentiellement du fait que l'approche "coût minimum" ne tient pas compte du temps d'attente: mobilisation du capital, rotation des stocks ....

Mais la seule comparaison des tailles de lots peut-elle suffire pour opérer un choix parmi les critères en présence? Selon les hypothèses -relatives aux paramètres, aux objectifs de la firme, au contexte, et même aux définitions des termes, - un critère peut être préféré à un autre. Les avis divergents des auteurs qui se sont penchés sur la question sont éloquents :

STARR & MILLER (1), HADLEY & WHITIN (2), et aussi MAGEE (3) adoptent l'objectif habituel de minimisation des coûts.

TATE (4) montre que l'optimisation d'autres fonctions critères est équivalente, voire inférieure, à la minimisation des coûts.

---

(1) STARR & MILLER, La Gestion des stocks, Réf.[55], p.8.

(2) HADLEY & WHITIN, Etude et pratique des modèles de stocks, Réf. [36], Chap. I.

(3) J.F. MAGEE, Le Planning de la production et le contrôle des stocks, Réf. [45], p.27.

(4) TATE, In Defence of the Economic Bath Quantity, Réf. [56].

EILON (1) suggère d'adopter le profit maximum par série et le rendement des sommes investies comme critères les plus raisonnables. Ailleurs (2), il affirme que le critère de taux de rendement (défini comme le rapport du profit unitaire au coût de production d'une pièce, divisé par le temps de consommation du lot) apparaît être un bon choix, mais qu'il peut en exister un meilleur.

BURBIDGE (3) avance que l'objectif d'une entreprise est la maximisation du taux de rendement des investissements, et non pas la minimisation des coûts.

DUCKWORTH (4 & 5) propose un modèle de maximisation du rendement marginal.

On constate même une remise en question (6) de l'utilité de rechercher une taille optimale de la série de fabrication. BURBIDGE remet en cause l'intérêt du calcul d'optimisation en invoquant la fixité (ou quasi-fixité) des coûts. Il affirme également que le bénéfice maximum de l'entreprise est obtenu lorsque la rotation des stocks s'effectue à la vitesse maximale, et non au point où le prix de revient par pièce est minimum.

---

(1) EILON, Scheduling for Batch Production, Réf. [29].

(2) EILON, Dragons in Pursuit of the EBQ, Réf. [30].

(3) BURBIDGE, A New Approach to Production Control, Réf. [14].

(4) DUCKWORTH, Stock Control Problems, Réf. [23].

(5) DUCKWORTH, Stock Control Problems : Some fallacies in their current treatment, Réf. [24].

(6) Voir dans Productivity Management Review, les échanges entre BURBIDGE et WHITIN, Réf. [15], [58] et [16].
Voir également BESSIERE, Réf. [05] ; MONGON, Réf. [50]
BOWMAN & FETTER, Réf. [11].

Analysant tous les coûts afférents à la série lancée (lancement, entreposage, occasion manquées ...), BURBIDGE en conclut que ces coûts ne sont que très peu variables avec l'importance du lot et que, par conséquent, la recherche d'un optimum ne s'impose pas car les économies réalisées alors ne seraient que peu significatives. Puisque le bénéfice maximum ne peut être obtenu en réduisant le prix de revient, l'auteur pense qu'il faut abandonner cette voie et tirer un plus grand profit en augmentant la vitesse de rotation des stocks ; de cette manière, on dégage des capitaux investis sous forme de stocks, et l'on peut alors investir de façon plus rentable ailleurs. Il propose donc des lancements plus fréquents (des séries plus courtes), mais après avoir réduit les frais de préparation (lancement) par des investissements appropriés.

A travers toutes ces divergences et controverses, un point cependant semble admis par les auteurs : la variation des coûts résultant d'une modification de la taille du lot est généralement insignifiante lorsqu'on la rapporte au coût variable total (1) :

"Pour une cadence de production constante, la variation des prix de revient avec les changements d'importance des lots n'a, relativement au coût global, qu'une importance généralement négligeable pour la plus grande partie de la gamme des lots" (2).

"Réduire tous les lots de moitié n'accroîtrait les coûts variables totaux que de 0,1 % environ" (3).

---

(1) Coût variable total : CVT = (Y-Cu).D

(2) BURBIDGE, Réf. [15], et cette affirmation ne rencontre pas de contradiction dans la critique de WHITIN, Réf. [58].

(3) TATE, op. cit. Réf. [56] , Appendix C.

Cet accroissement des coûts, consécutif à des lancements plus fréquents, sera couvert par des avantages de deux types :

- souplesse de la production et réduction des délais de livraison, et par conséquent amélioration de la satisfaction du client.

- meilleure rentabilité du capital immobilisé en stocks, que l'on pourra investir ailleurs.

Avant de poursuivre plus avant l'analyse comparée des différents critères, nous proposons d'examiner leurs comportements dans diverses situations résultant de modifications des hypothèses de départ.

Chapitre II.

EXTENSIONS.

Dans ce chapitre, nous abandonnerons certaines hypothèses de départ et examinerons les conséquences de ces élargissements du cas de base.

Nombreuses sont les modifications possibles, et dans chaque situation nouvelle, différentes nuances peuvent encore être envisagées. Nous limiterons notre réflexion aux extensions suivantes :

1. Introduction d'un délai de livraison.
2. Approvisionnement à taux constant.
3. Possibilité de rupture des stocks, dans le cas des ventes différées.
4. Prix de vente variable.
5. Gestion de plusieurs produits.
6. Univers aléatoire.

D'autres changements importants du cas de base pourraient encore être envisagés. Citons par exemple : stockage de produits en cours de fabrication, délai de livraison aléatoire, paramètres variables, plusieurs postes de transformation, approvisionnement à taux variable, rendements d'échelle, stocks valorisés au prix de revient, politique de réapprovisionnement périodique ....

Selon l'importance des modifications apportées et selon la complexité analytique des problèmes traités, nous tenterons de dégager l'influence de ces extensions sur les principes de raisonnement de gestion des stocks et sur la comparaison des critères de choix.

Ces divers élargissements des restrictions de départ sont autant de pistes, partant du modèle initial. Chaque cas envisagé est indépendant de la situation précédente. Le cumul des extensions étudiées est possible, mais il rendrait le problème lourd à manier et n'apporterait que peu d'éléments nouveaux dans notre réflexion.

Section 1. INTRODUCTION D'UN DELAI DE LIVRAISON.

Rappelons que, dans le cas de base, la production était supposée instantanée et sans délai de livraison. Cela veut dire que dès que les produits étaient épuisés, on passait commande d'une nouvelle quantité, que l'on recevait immédiatement. Pareille hypothèse réduisait à zéro le temps nécessaire à la commande pour parvenir au secteur fournisseur, et aux produits livrés pour arriver à destination.

Si la production, tout en demeurant instantanée, (la quantité économique Q est livrée en un seul bloc), s'effectue après un certain délai de livraison (L), connu et constant, les raisonnements tenus lors de l'étude du cas de base restent valables, mais on commandera plus tôt : la commande sera passée lorsque le stock atteindra un certain niveau (P), tel que la quantité résiduelle corresponde à la demande pendant le délai de livraison.

Ainsi donc, <u>$P = d.L$</u>

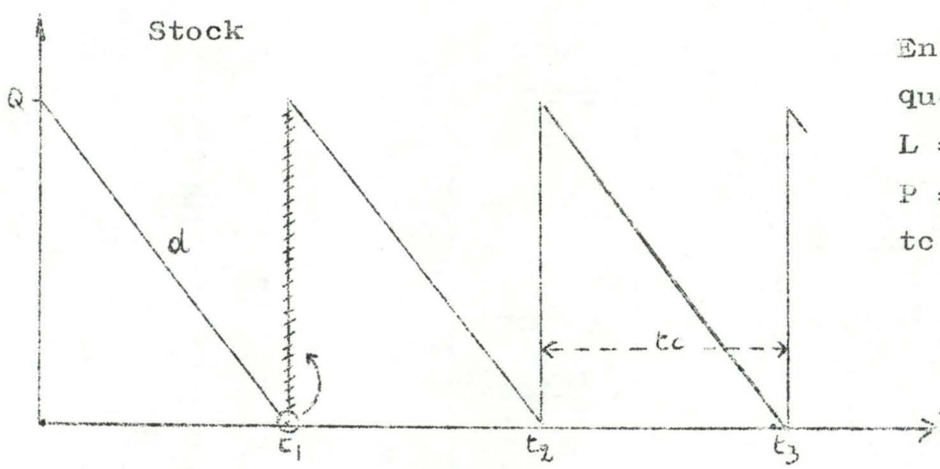
Remarquons que le problème demeure inchangé lorsque le délai de livraison est supérieur au temps nécessaire à épuiser la quantité commandée Q ($L > tc$), ou encore lorsque le délai de livraison n'est pas constant (mais reste connu).

Ces différentes nuances apparaissent mieux sur les graphiques suivants. Rappelons quelques notations :

d = taux de la demande

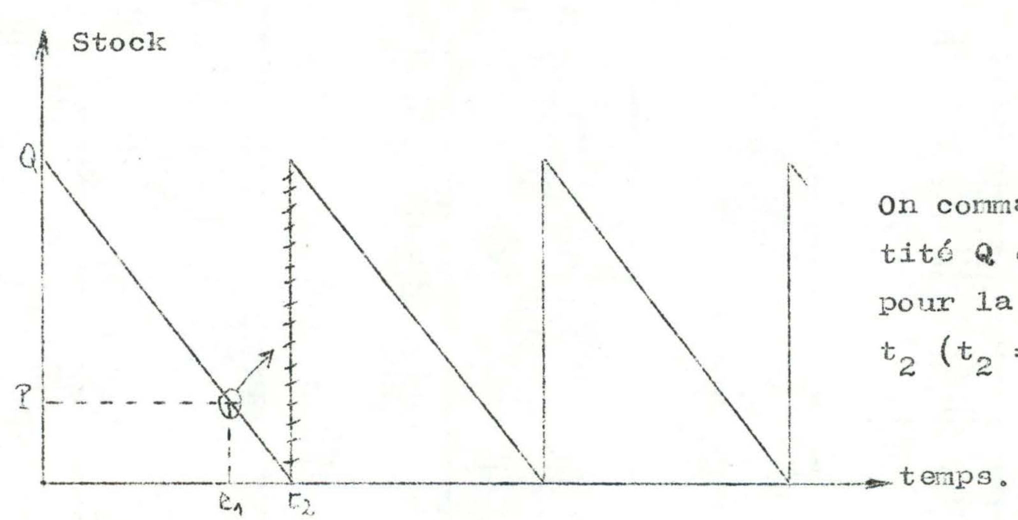
tc = temps d'un cycle (temps nécessaire à consommer Q)

<u>1er cas : pas de délai de livraison</u> (cas de base)



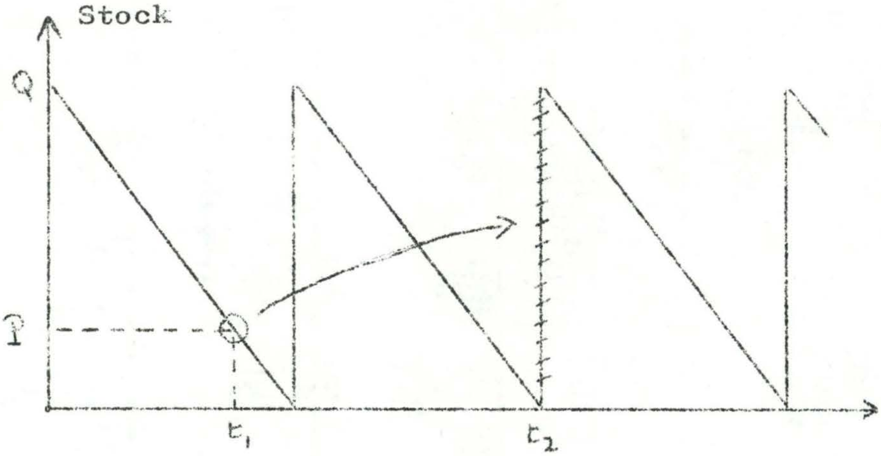
En t_1, on commande Q, que l'on reçoit en t_1.
$L = 0$
$P = 0$
$tc = 8$

<u>$2^{ème}$ cas : avec un délai de livraison connu et constant, $L < tc$.</u>



$tc = 8$
$L = 3$
$P = \frac{3}{8}.Q$
On commande la quantité Q en t_1 ($t_1 = 5$) pour la recevoir en t_2 ($t_2 = 8$)

$3^{ème}$ cas : avec un délai de livraison connu et constant, $L > tc$.

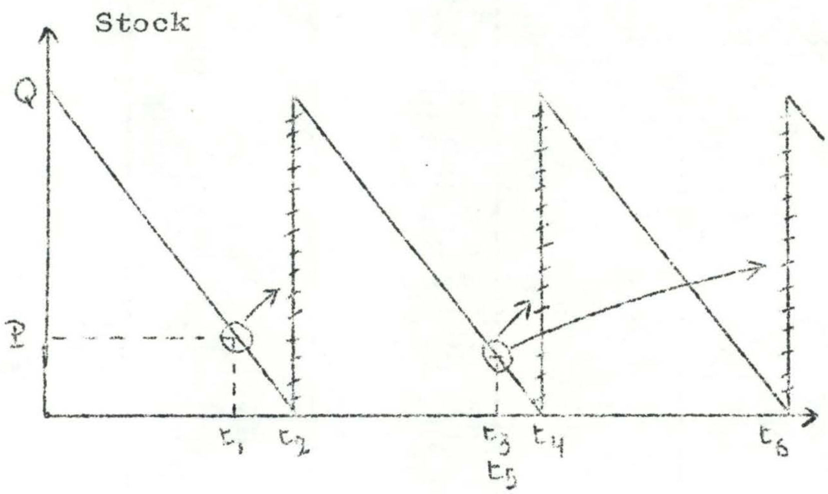


$tc = 8 \qquad L = 10$

$P = \frac{2}{8}.Q$

On commande Q en t_1 ($t_1 = 6$) pour la recevoir en t_2 ($t_2 = 16$)

$4^{ème}$ cas : avec un délai de livraison connu et variable.



$tc = 8$

$L_1 = 3$; $L_2 = 2$;

$L_3 = 10$

On commande en t_1(=5) pour recevoir en t_2 (=8), puis commande en t_3 (14)

temps.

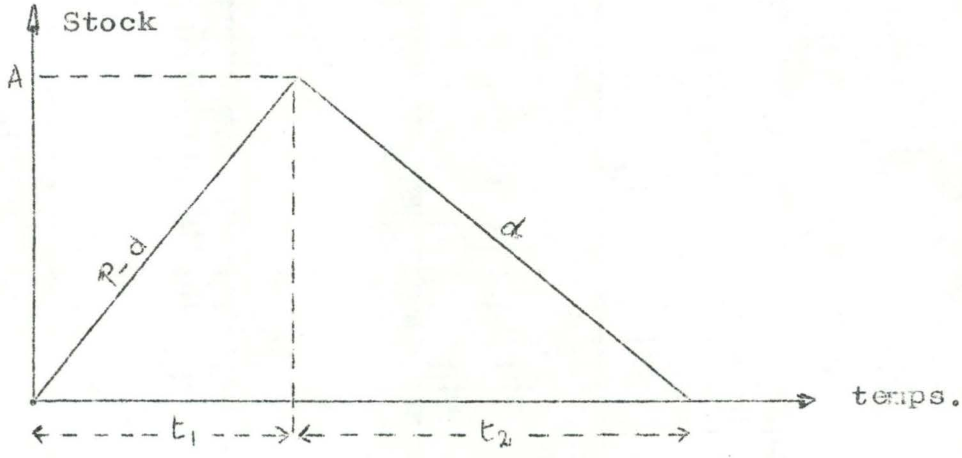
pr recevoir en t_4(=16), et commande en t_5(=14) pr recevoir en t_6(24).

En règle générale, nous dirons que, pour recevoir la quantité Q au moment voulu (au temps t), il faut commander en t-L, lorsque le niveau des stocks potentiels (1) est de P = (d.L).

Section 2. APPROVISIONNEMENT A TAUX CONSTANT.

Dans le cas de base, l'approvisionnement se faisait par blocs : on commandait Q et on recevait Q en un seul envoi. Dans une optique de gestion des stocks de produits finis, si la production se fait par séries Q, les livraisons pourraient avoir lieu au fur et à mesure que les produits sont fabriqués.

Si l'approvisionnement n'est plus instantané mais s'effectue à un taux constant (p), supérieur au taux de la demande (d), le stock moyen par cycle prendra une autre valeur :



(1) Par "Stocks potentiels", nous entendons les stocks physiques, augmentés des commandes livrables avant le temps t.

Pendant une première partie du cycle tc, (pendant t_1), le stock reçoit la production et libère les quantités consommées ; après ce temps t_1, la production est terminée et on passe à une seconde partie t_2, durant laquelle le stock décroît, étant livré à la seule influence de la demande.

Le stock moyen pendant un cycle est de

$$Stm = \frac{(p - d).t_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{2.p}.(p-d) \quad \text{car } t_1.p = Q$$

$$\text{ou encore } \frac{Q}{2}.(1 - \frac{d}{p})$$

Pour simplifier les écritures, posons $s = (1- \frac{d}{p})$, avec $0 < s < 1$ (car $0 < d < p$ par hypothèse).

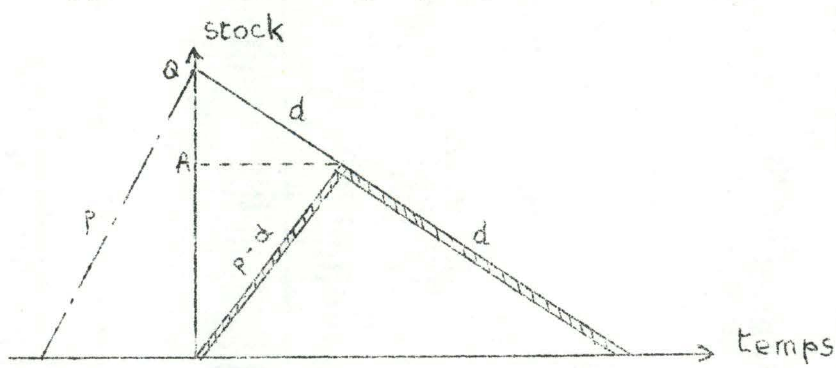
Le stock moyen devient donc $\frac{Q}{2}.s$

Dans le cas de la production à taux constant p, le coût unitaire total devient, suite à la modification du stock moyen, $Y_2 = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I}{2\ d}.Q.(1-\frac{d}{p})$.

Une optimisation des différents critères fournirait les résultats présentés dans le tableau de la page 44. (Voir note (1) page suivante).

On constate que les raisonnements du cas de base restent valables, après substitution de Q_2^* à Q^* et de X_2 à X.

La comparaison avec la situation de production instantanée apparaît sur le graphique suivant :



On remarquera que le cas de base n'est qu'une situation particulière, avec un taux de production $p = \infty$

Les limites de variation de p et de s sont les suivantes :

$p = \infty$	$d/p = 0$	$s = 1$
$p = d$	$d/p = 1$	$s = 0$

La première limite correspond, comme nous l'avons dit, à un approvisionnement instantané ; la seconde limite (p=d) reflète une situation de production continue, la demande étant adaptée à la production, et dans ce cas, $Q = \infty$ et la présence de stock n'est plus nécessaire.

---

(1) Avec $0 < s = 1 - \frac{d}{p} < 1$; $X_2 = \sqrt{s}.X$; l'indice "2" étant caractéristique du cas d'approvisionnement à taux constant.

On trouvera les développements dans les annexes 11 à 13.

Critères.	Q optimal en cas de taux cst d'approv.	Comparaison $Q^o_2 \gtrless Q^*_2$	Comparaison $Q^o_2 \gtrless Q^o$	Valeur optimale du critère.	Comparaison Opt.2 $\gtrless$ Opt.
Coût Minimum Y	$Q^o_{Y2} = \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I.s}}$	$Q^o_{Y2} = Q^*_2$	$Q^*_2 = \frac{1}{\sqrt{s}}.Q^*$ $Q^*_2 > Q^*$	$Y^o_2 = Cu + X_2$	$Y^o_2 < Y^o$
Profit par pièce Pu	$Q^o_{Pu2} = \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I.s}}$	$Q^o_{Pu2} = Q^*_2$	$Q^o_{Pu2} = \frac{1}{\sqrt{s}}.Q^o_{Pu}$ $Q^o_{Pu2} > Q^o_{Pu}$	$Pu^o_2 = V - (Cu+X_2)$	$Pu^o_2 > Pu^o$
Profit par série P_q	$Q^o_{Pq2} = \frac{(V-Cu).d}{Cu.I.s}$	$Q^o_{Pq2} = \frac{(V-Cu)}{X_2}.Q^*_2$ $Q^o_{Pq2} > Q^*_2$	$Q^o_{Pq2} = \frac{1}{s}.Q^o_{Pq}$ $Q^o_{Pq2} > Q^o_{Pq}$	$P^o_{q2} = \frac{d}{2Cu.I.s}\left[(V-Cu)^2 - X_2^2\right]$	$P^o_{q2} > P^o_q$
Rendement des stocks S	$Q^o_{S2} = \frac{2.CC}{(V-Cu)}$	$Q^o_{S2} = \frac{X_2}{(V-Cu)}.Q^*_2$ $Q^o_{S2} < Q^*_2$	$Q^o_{S2} = Q^o_S$	$S^o_2 = I.\left[\frac{(V-Cu)^2}{X_2^2} - 1\right]$	$S^o_2 > S^o$

L'introduction d'un approvisionnement à taux constant tendra donc à réduite le stock moyen (relatif à Q) et, par conséquent, le coût de détention. Cette réduction va déplacer l'équilibre "coût de stockage - coût de commande" et tendra à allonger les séries de fabrication.

Notons cependant que l'allongement des séries aura un effet rétroactif sur le stock moyen : sa réduction absolue sera moins importante que relativement à Q.

$$\frac{Stm2}{Q_2} = \frac{s}{2} < \frac{1}{2} = \frac{Stm1}{Q_1}$$

$$Stm2 = \frac{Q_2}{2}.s \text{ (dans le cas du critère de coût minimum)}$$

$$= \frac{Q}{2}.\sqrt{s} < \frac{Q}{2}$$

$$< Stm\ 1.$$

Section 3. POSSIBILITE DE RUPTURE DE STOCK.

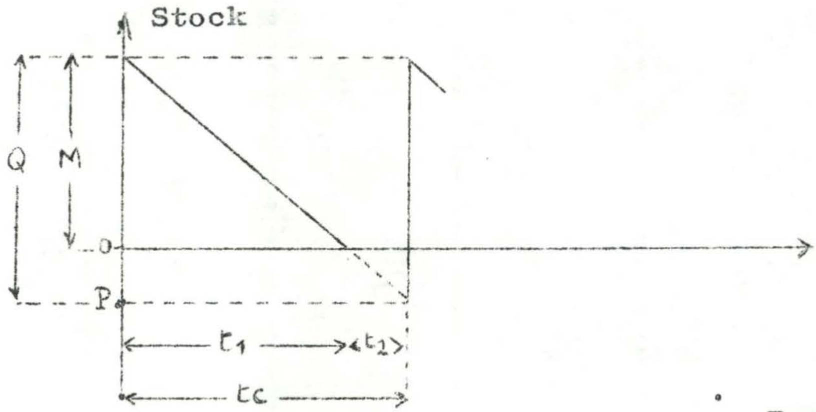
Toute rupture de stock était jusqu'à présent interdite ; cette attitude revenait en fait à fixer un coût de rupture infiniment élevé.

Que se passe-t-il si l'on admet des ruptures ? Nous envisagerons le cas des ventes différées, avec un coût de rupture proportionnel à la durée de la rupture. Les autres hypothèses restent identiques à celles du cas de base.

Appelons "r" le coût unitaire de rupture par unité de temps. Comme précédemment, le seuil de réapprovisionnement sera représenté par le point P. Etant donné que nous sommes dans le cas d'un approvisionnement instantané, et sans délai de livraison, ce point P est également le point de commande.

Si l'on admet des ruptures, lorsque la commande Q sera reçue, il faudra tout d'abord en prélever une partie afin de satisfaire les ventes différées de la période précédente. Le stock initial, après ce prélèvement, ne sera donc plus Q comme auparavant, mais bien M, que nous appelons niveau de recomplètement du stock.

Ces différentes notions apparaissent sur le graphique suivant ; on y constate que les ventes retardées sont représentées par (Q-M), et le niveau de recomplètement par M = P + Q.



L'introduction d'un coût de non-livraison aboutit à ajouter une variable décisionnelle : outre la quantité à commander, nous devons savoir quand commander. Cette seconde inconnue se traduit successivement comme suit :"Quelle rupture admettre ?" ou "Quelle est la valeur idéale de P ?" ou encore "Quelle sera la valeur optimale de M ?" (car M =P+Q). Nous aurons dès lors deux variables indépendantes (Q et M) à déterminer pour établir l'optimum.

Si t_1 et t_2 sont respectivement les temps sans et avec rupture, pendant la période tc, nous pouvons calculer le stock moyen. Il sera de M/2 pendant t_1 et de 0 pendant t_2. Globalement, il sera donc de $Stm = \frac{M.t_1}{2.tc}$. Et comme $t_1/tc = M/Q$ (triangles semblables), il vient :

$$Stm = \frac{M^2}{2.Q}$$

La rupture moyenne étant de 0 pendant t1 et de $(Q-M)/2$ durant t2, elle sera globalement : $Rpm = \frac{Q-M}{2} \cdot \frac{t2}{tc}$ avec $t2/tc = (Q-M)/Q$

$$\text{Donc } Rpm = \frac{(Q-M)^2}{2.Q}$$

La fonction de coût comprendra donc un coût d'acquisition, un coût de commande, un coût de détention, et, ceci est nouveau, un coût de rupture.

La fonction de coût total par pièce s'écrira donc :

$$Y_3 = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I}{d} \cdot \frac{M^2}{2.Q} + \frac{r}{d} \cdot \frac{(Q-M)^2}{2.Q}$$

La recherche de l'optimum des différents critères fournira, par dérivation par rapport à Q et M, les résultats repris dans le tableau de la page suivante. (1)

---

(1) Les développements se trouvent dans les annexes 14 à 16.

N.B. $0 < k = \sqrt{\frac{r}{Cu.I+r}} < 1$; $X_3 = k.X$; l'indice "3" est caractéristique du cas où la rupture est admise.

Critères.	Q optimal en cas de rupture. Q^o_3, M^o	Comparaison. $Q^o_3 \gtrless Q^*_3$ $M^o \gtrless M^*$
Coût minimum Y	$Q^o_{Y_3} = \frac{1}{k}.\sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Y_3} = Q^*_3$
	$M^o_Y = k.\sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$	$M^o_Y = M^*$
Profit par pièce Pu	$Q^o_{Pu3} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$	$Q^o_{Pu3} = Q^*_3$
	$M^o_{Pu} = k.\sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$	$M^o_{Pu} = M^*$
Profit par série Pq	$Q^o_{Pq3} = \frac{d.(V-Cu)}{Cu.I}.\frac{1}{k^2}$	$Q^o_{Pq3} = \frac{V-Cu}{X_3}.Q^*_3$ $Q^o_{Pq3} > Q^*_3$
	$M^o_{Pq} = \frac{d.(V-Cu)}{Cu.I}$	$M^o_{Pq} = \frac{V-Cu}{X_3}.M^*$ $M^o_{Pq} > M^*$
Rendement des stocks S	$Q^o_{S3} = \frac{2.CC}{(V-Cu)}$	$Q^o_{S3} = \frac{X_3}{V-Cu}.Q^*_3$ $Q^o_{S3} < Q^*_3$
	$M^o_S = \frac{2.CC}{(V-Cu)} - \frac{d(V-Cu)}{r}$	

Critères.	Comparaison $Q_3^\circ \gtrless Q^\circ$ $M^\circ \gtrless Q^\circ$	Valeur du critère à l'optimum.
Coût minimum	$Q_3^* = \frac{1}{k} . Q^*$ $Q_3^* > Q^*$	$Y_3^\circ = Cu + X_3$
Y	$M^* = k . Q^*$ $M^* < Q^*$	$Y_3^\circ < Y^\circ$
Profit par pièce	$Q_{Pu3}^\circ = \frac{1}{k} . Q_{Pu}^\circ$ $Q_{Pu3}^\circ > Q_{Pu}^\circ$	$Pu_3^\circ = V - (Cu + X_3)$
Pu	$M_{Pu}^\circ = k . Q_{Pu}^\circ$ $M_{Pu}^\circ < Q_{Pu}^\circ$	$Pu_3^\circ > Pu^\circ$
Profit par série	$Q_{Pq3}^\circ = \frac{1}{k^2} \; Q_{Pq}^\circ$ $Q_{Pq3}^\circ > Q_{Pq}^\circ$	$P_{q3}^\circ = \frac{Q_3^*}{2 . X_3} \left[(V - Cu)^2 - X_3^2 \right]$
Pq	$M_{Pq}^\circ = Q_{Pq}^\circ$	$P_{q3}^\circ > P_q^\circ$
Rendement des stocks	$Q_{S3}^\circ = Q_S^\circ$	$S_3^\circ = \frac{d(V - Cu)}{Cu . M} - I$
S	$M_S^\circ < Q_S^\circ$	$(S_3^\circ - S^\circ)$ sera du signe de M_S°

Nous constatons donc que l'admission de ruptures des stocks tend à augmenter la taille des séries et, par conséquent, à réduire la fréquence des commandes.

En ce qui concerne la comparaison des différents critères, nous observons un comportement similaire à celui du cas de base.

Remarquons encore que d'autres hypothèses pourraient être émises, notamment en ce qui concerne la rupture. Par exemple : introduction d'une contrainte de niveau maximum de rupture permise ; coûts de rupture proportionnels aux quantités différées, ou à la valeur des articles différés, ou encore au nombre de clients non satisfaits.

Par ailleurs, une étude similaire pourrait être faite dans une situation de ventes perdues. Dans ce cas, les raisonnements restent valables, après substitution de "d.tc" à Q et de Q à M. (1)

---

(1) Voir explications dans l'annexe 17.

Section 4. PRIX DE VENTE VARIABLE (1)

Alors que nous l'avions jusqu'à présent considéré comme un paramètre fixe, nous émettons maintenant l'hypothèse d'un prix de vente (V) variable. Pour simplifier le problème, nous supposons que la demande est une fonction linéaire du prix de vente. (Cette hypothèse de linéarité peut être modifiée sans affecter l'analyse.)

Remarquons que l'introduction d'un prix de vente variable viendra perturber les raisonnements du cas de base : les critères de coût minimum ne pourront être retenus car ils aboutissent à établir le prix de vente minimum ; les critères de profit se différencieront. (2)

La résolution analytique de ce problème n'étant pas aisément calculable, nous nous bornerons à en énoncer les grandes lignes, avec le critère de profit maximum par unité de temps.

Ainsi, nous avons :

$d = a.V + b$ avec $a < 0$ et $b > 0$, connus et constants.

$$Y = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I}{2.d}.Q$$

$$Pt = (V-Y).d$$

Il vient alors :

$$Pt = V.(a.V+b) - Cu.(a.V+b) - \frac{CC\ (a.V+b)}{Q} - \frac{Cu.I.Q}{2}$$

---

(1) Voir WHITIN, Inventory Control and Price Theory, Réf./59/, pp. 61 à 68.

(2) $Pu = V - Y$; $PT = D.(V-Y)$; et D est fonction de V.

Par annulation des dérivées premières, (par rapport aux variables Q et V), on obtient (1) :

$Q = \sqrt{\frac{2.CC.(a.V+b)}{Cu.I}}$, expression de Q en fonction de V

et une équation, dont la résolution fournira la valeur optimale du prix de vente V.

Section 5. GESTION DE PLUSIEURS PRODUITS.

Nous n'avons jusqu'à présent considéré qu'un seul article, dont il fallait déterminer la quantité économique de commande. Mais que peut-il se passer si l'on introduit d'autres produits ? Nous pouvons avoir des contraintes de stockage (en quantité ou en valeur), de production, de commande, de marché ...

Nous relâcherons certaines hypothèses, en donnant les grande lignes des modifications apportées.

5.1. PLUSIEURS PRODUITS INDEPENDANTS.

Nous avons n articles, gérés de manière absolument indépendante, à tous les points de vue.

Dans ce cas, les raisonnements du cas de base seront appliqués séparément pour chaque article. Ainsi, la recherche du coût total minimum conduira au coût minimum par article et fournira le même résultat.

$$\text{Min } (CT = \sum_i CT_i) = \sum_i (\text{Min } CT_i)$$

$$\text{et } Q^o_i = \sqrt{\frac{2.CC_i.d_i}{Cu_i.I}}$$

Il en sera de même pour les autres critères.

(1) Voir annexe 18.

5.2. GROUPAGE DES COMMANDES.

Les n articles sont indépendants, sauf en ce qui concerne les approvisionnements : il y a groupage des commandes.

Chaque commande regroupera plusieurs articles, en quantités Q_i distinctes. L'élément commun aux différents produits sera le nombre de commandes (N).

Ainsi, si l'on adopte le critère de coût minimum total, on aura :

$$CT = \sum_i Cu_i.D_i + \sum_i CC_i . \frac{D_i}{Q_i} + \sum_i \frac{Cu_i.I.Q_i.T}{2}$$

$$\text{or,} \quad Q_i = \frac{D_i}{N}$$

$$CT = \sum_i Cu_i.D_i + N \sum_i CC_i + \frac{1}{2N} \sum_i Cu_i.I.D_i.T$$

A l'optimum (dérivation par rapport à N), on aura :

$$N^\circ = \sqrt{\frac{\sum_i Cu_i.I.D_i.T}{2.\sum_i CC_i}} \qquad\qquad Q_i^\circ = \frac{D_i}{N^\circ}$$

$$CT^\circ = \sum_i Cu_i.D_i + \sum_i CC_i.N^\circ + \frac{1}{2N^\circ} \sum_i Cu_i.I.D_i.T$$

$$= \sum_i .Cu_i.D_i + \sqrt{2\ (\sum_i CC_i).\ (\sum_i Cu_i.I.D_i.T)}$$

Cette approche suppose que l'on puisse commander chaque article lors de chaque réapprovisionnement. En fait, il se pourrait que certains articles ne soient réapprovisionnés que toutes les deux ou trois commandes, et d'autres plus fréquemment. Nous examinerons cette situation ultérieurement.

5.3. CONTRAINTES DE STOCKAGE.

Nous émettons l'hypothèse d'une seule contrainte, financière : l'engagement financier en stocks ne peut dépasser un certain seuil maximum U.

$$\sum_i Cu_i . Q_i \leq U$$

En fait, il est possible et même probable que toutes les commandes ne rentrent pas en même temps. On peut en tenir compte en corrigeant la contrainte par un facteur k, tel que $0 < k \leq 1$ (k=1 signifiant que tous les approvisionnements sont simultanés) :

$$k . \sum_i Cu_i . Q_i \leq U$$

Le critère de coût total minimum s'écrirait alors :

$$CT = \sum_i Cu_i . D_i + \sum_i \frac{CC_i . D_i}{Q_i} + \sum_i \frac{Cu_i . I . Q_i . D_i}{2 . d_i}$$

sous contrainte

$$k . \sum_i Cu_i . Q_i - U \leq 0$$

ou encore: $$CT' = \sum_i Cu_i . D_i + \sum_i \frac{CC_i . D_i}{Q_i} + \sum_i \frac{Cu_i . I . Q_i . D_i}{2 . d_i} + \lambda (k . \sum_i Cu_i . Q_i - U)$$

La contrainte, si elle joue, nous éloignera de l'optimum et accroîtra le coût ($\lambda > 0$)

Résolution :

(1) calculer la quantité économique de manière indépendante pour chaque article :

$$Q_i^\circ = \sqrt{\frac{2 . CC_i . d_i}{Cu_i . I}}$$

(2) la contrainte est-elle vérifiée ?

Si oui, l'optimum est la solution qui vient d'être présentée.

Si non, passer en (3)

(3) calculer le minimum de CT' (λ étant un paramètre)

$$\frac{\partial CT}{\partial Q} = 0 \Longrightarrow \frac{-CC_i . D_i}{Q_i^2} + \frac{Cu_i . I . D_i}{2.d_i} + \lambda\, k.Cu_i = 0$$

$$\Longrightarrow Q_i' = \sqrt{\frac{2.CC_i . d_i}{Cu_i . (I + \frac{2.\lambda.k}{T})}}$$

(4) choisir une valeur de λ et la porter en Q_i'

(5) porter ce Q_i' dans la contrainte.

Si elle est violée, il faut un λ plus grand.

Sinon, un λ plus petit.

.... et ainsi de suite.

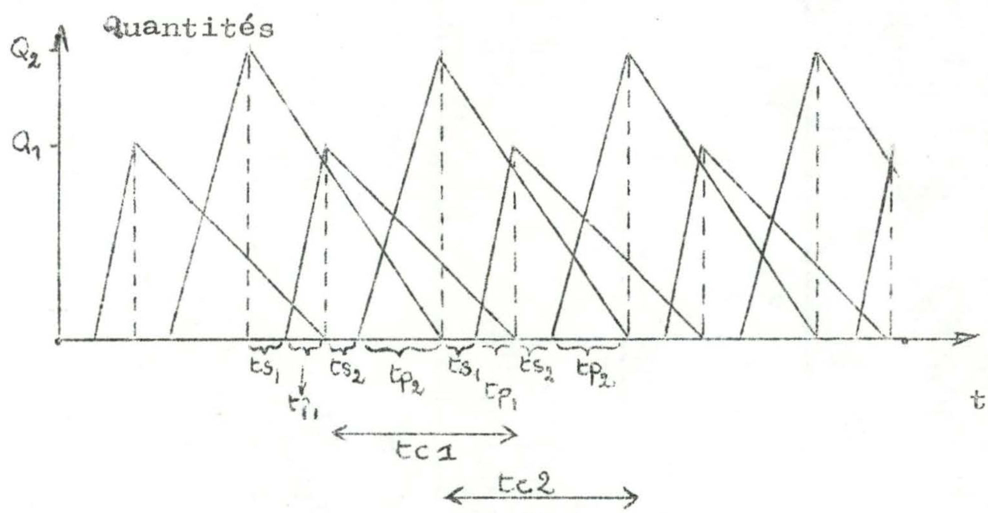
On voit que cette méthode de résolution pourra être appliquée pour les autres critères. L'introduction de la contrainte de stockage n'apporte pas de modification essentielle dans les raisonnements de comparaison des critères.

Elle aura cependant une certaine influence dans la mesure où, son seuil maximum (U) étant relativement bas, elle exigera de faibles quantités économiques de commande, qui seront peut-être plus proches de l'optimum selon un critère de rendement des stocks que d'un critère de profit par série, par exemple.

5.4. ETUDE D'UNE GAMME DE PRODUCTION. (1)

Si les n articles étaient complètement indépendants, leurs quantités économiques optimales de commande seraient celles du cas de base. Mais l'intégration du produit dans une gamme impose certaines conditions sur les quantités individuelles.
Par exemple : Avons-nous terminé la production de la quantité Q_1 du produit 1 lorsqu'il est temps de lancer la fabrication de Q_2 du produit 2 ?

Une autre contrainte introduite par la gamme sera par exemple de réaliser avec les n articles le plein-emploi de la capacité de production. Une des manières d'y parvenir est l'égalité des temps de consommation (tc) des différents articles. Exemple graphique pour deux articles :



avec ts = temps de préparation

tp = temps de production (au taux p)

tc = temps de consommation (au taux d)

---

(1) voir EILON, Batch Production Scheduling, in Réf. /27/.

N.B. On pourrait introduire les hypothèses de délai de livraison et d'approvisionnement à taux constant. Dans ce cas, ts correspondrait au délai L, et (tp+tc) serait le temps de consommation. Les taux de variation du stock seraient alors (p-d) pendant tp et (-d) pendant ts et tc.

L'égalité des temps de consommation s'exprimerait comme suit :

$$tc_1 = tc_2 = ts_1 + ts_2 + tp_1 + tp_2$$

Or, $tc = Q/d$.

Il faudrait donc : $\dfrac{Q_1}{d_1} = \dfrac{Q_2}{d_2}$

De manière plus générale :

$$tc_1 = tc_2 = \ldots = tc_i = \ldots = ts_1 + ts_2 + \ldots + ts_i + \ldots + tp_1 + tp_2 + \ldots + tp_i + \ldots$$

$$\frac{Q_1}{d_1} = \frac{Q_2}{d_2} = \ldots = \frac{Q_i}{d_i} = \ldots$$

ou $Q_i = g_i . Q_1$ avec $g_i = \dfrac{d_i}{d_1}$

La solution idéale serait que, pour chaque article,

$$Q_i^\circ = g_i . Q_1^\circ ,$$

les Q_i° étant les quantités optimales déterminées de manière indépendante par le critère choisi.

EILON calcule d'abord une quantité économique pour chaque lot et la compare à ce qu'on peut appeler un optimum global, qui est en fait une enveloppe de contraintes. Pour permettre cet ajustement, il recherche le critère autorisant la variation la plus grande pour une tolérance déterminée. Ses critères sont relatifs aux coûts, avec des variantes possibles.

Chaque fois, l'expression de la quantité optimale Q_1^o sera semblable à celle du cas de base, et on aura $Q_i^o = g_i . Q_1^o$. Les seules modifications seront la présence de g_i, introduite lors de la substitution de Q_i par $g_i . Q_1$. A titre d'exemple, on trouvera les quantités optimales de quelques critères en annexe. (1).

La solution optimale fournie lorsque l'on considère chaque article séparément et la solution idéale pour toute la gamme ne seront pas nécessairement compatibles, car il existe entre les quantités économiques Q_i des relations rigides, déterminées par les différents taux de demande.

S'il est dangereux de considérer le produit individuel, sans relation avec la gamme (possibilité de temps creux, moment opportun pour lancer la fabrication...), il est également risqué de ne considérer que la gamme, sans tenir compte de l'article individuel (nécessité d'un coût de production raisonnable pour être compétitif sur le marché). Il est évident que certains écarts par rapport à la quantité optimale sont inévitables.

Pour aboutir à une solution réelle, EILON propose la procédure suivante :

N.B. Les coûts totaux maxima de production sont fixés par la direction (par exemple, les coûts variables de production ne peuvent dépasser de plus de 10% les coûts variables minima). Ces conditions fixeront les limites de l'étendue de variation de la quantité économique.

1) Calculer ce domaine de variation de la production pour chaque article.

---

(1) Voir Annexe 19.

2) Trouver la solution idéale pour toute la gamme.

3) Tester cette solution :

a) le "p test" : les lots ainsi déterminés respectent-ils les limites fixées pour la production de chaque article ?

b) le "cycle test" : comparaison des temps de production et de consommation de la gamme entière.

4) Si les deux tests sont réussis, il y a compatibilité entre les deux approches et l'on peut adopter la solution trouvée en 2. Sinon :

a) Echec au "p test":

Quand la taille du lot d'un produit sort des limites fixées à l'étendue de la production, deux possibilités se présentent :

- le lot est trop grand ; on le divise alors en deux ou plusieurs sous-lots et l'article sera produit plus d'une fois dans le cycle.
- le lot est trop petit ; on le multiplie par deux (ou plus) et l'article ne sera produit que tous les deux (ou plus) cycles.

Nous nous trouvons alors devant des cycles de production non identiques : d'une part des "cycles longs" durant lesquels tous les articles de la gamme sont produits, et d'autre part des "cycles courts" comprenant certains articles seulement.

b) Echec au "cycle-test" :

La comparaison des temps de consommation et de production de la gamme entière peut aboutir aux situations alternatives suivantes :

- Si le cycle de production est inférieur au cycle de consommation, c'est-à-dire en présence de temps creux, on peut soit augmenter certains taux de demande, ce qui aura pour effet l'augmentation du temps de production et la diminution du temps de consommation, soit considérer l'introduction de nouveaux produits dans la gamme.

- Si le cycle de consommation est inférieur au cycle de production, on peut soit augmenter la capacité de production (par exemple en admettant des heures supplémentaires), soit envisager l'abandon de certains articles, soit relâcher les contraintes (par exemple modifier les conditions selon lesquelles tous les articles doivent toujours être disponibles en stocks, ou encore admettre de dépasser les limites de l'étendue de production dans un cycle si cela réduit les coûts pour l'ensemble de deux cycles....). (1)

---

(1) On trouvera un exemple détaillé, pour une gamme de six produits, dans EILON, Op. Cit., Réf./27/.

Section 6. UNIVERS ALEATOIRE.

Alors que nous étions précédemment en univers déterministe, nous considérons maintenant que la demande (Doud) est une variable aléatoire, dont la distribution est connue (de moyenne $\overline{D}$ ou $\overline{d}$, et d'écart type B_L). Le délai de livraison sera supposé constant.

Le niveau de service (Z) est défini comme le rapport entre le nombre d'unités livrées directement et le nombre d'unités demandées.(1). Nous appellerons w le risque de rupture.

Le stock se composera de deux parties : d'une part le stock cyclique, dont le rôle est celui que nous avons étudié jusqu'à présent, à savoir celui d'intermédiaire entre la production et la vente, considérées comme déterminées ; d'autre part, le stock de sécurité, réserve nécessaire à éponger les fluctuations aléatoires de la demande, pendant le délai de livraison.

A titre d'exemple, nous comparerons, dans ces nouvelles hypothèses, les critères de coût minimum (Y) et de rendement maximum des stocks.(S).

6.1. DETERMINATION DU STOCK CYCLIQUE.

La détermination du stock cyclique est semblable à ce qui a été dit dans le cas de base avec délai de livraison (2).

Lorsque le point de commande (P) sera atteint, on procèdera à un réapprovisionnement calculé sur la base de la demande moyenne $\overline{D}$ (ou $\overline{d}$).

---

(1) Il existe d'autres définitions possibles du niveau de service. Par exemple le nombre de clients servis directement sur le nombre de clients demandeurs.
Par ailleurs, notons que le niveau de service (tel que nous l'avions défini) est indépendant de la taille du lot.

(2) Voir section 1 de ce chapitre.

Les formules d'obtention de la quantité économique établies en univers déterministe s'appliqueront, après substitution de $\overline{D}$ à D (ou de $\overline{d}$ à d).

Coût minimum : $Q_Y = \sqrt{\dfrac{2.CC.\overline{d}}{Cu.I}}$

Rendement des stocks : $Q_S = \dfrac{2.CC}{(V-Cu)}$

6.2. DETERMINATION DU STOCK DE SECURITE.

6.2. 1. Détermination à postériori du niveau de service.

Examinons tout d'abord la durée du risque de rupture (tr). Il y aura possibilité de rupture pendant le délai de livraison (L), ce qui se produira N fois : chaque fois que l'on passera une commande.

Ainsi donc, $tr = L.N = \dfrac{L.\overline{D}}{Q}$

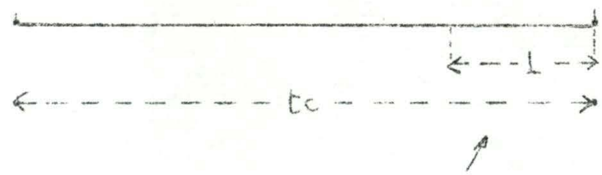
Nous voyons donc que le rapport des durées du risque de rupture est l'inverse du rapport des quantités économiques, et que, par conséquent, le risque de rupture se prolongera davantage dans le cas où l'on retient le critère de rendement des stocks.

En effet : $tr_Y = \dfrac{L.\overline{D}}{Q_Y}$ et $tr_S = \dfrac{L.\overline{D}}{Q_S}$

$$\frac{tr_Y}{tr_S} = \frac{Q_S}{Q_Y}$$

$$Q_S < Q_Y \Longrightarrow tr_Y < tr_S$$

Etudions à présent le niveau de service global Z (pour tout l'horizon de temps) lorsque l'on admet un risque de rupture w donné.



0   w   → risque de rupture

1   1-w → probabilité de servir le client.

$$Z = 1 . \left(\frac{T-L.N}{T}\right) + (1-w) . \frac{L.N}{T}$$

$$= 1- w . \frac{L.N}{T} = 1- w . \frac{L.\overline{D}}{Q.T} = 1- \frac{w.L.\overline{d}}{Q}$$

Donc, pour un risque de rupture w donné, nous aurons un meilleur niveau de service en employant le critère de coût minimum.

En effet : $Z_S = 1- \frac{w.L.\overline{d}}{Q_S}$ et $Z_Y = 1- \frac{w.L.\overline{d}}{Q_Y}$

$$Q_Y > Q_S \implies Z_Y > Z_S$$

Inversément, on peut montrer que pour un niveau de service global Z donné, le risque de rupture sera plus faible dans le cas du critère de coût minimum. Ceci revient à dire que le stock de sécurité devra être plus important dans le cas du critère de rendement des stocks si l'on veut assurer un même niveau de service, avec le même risque de rupture.

6.2. 2. Détermination du stock de sécurité (SS) en fonction du niveau de service (Z).

Nous définissons les symboles suivants :

D_L = demande pendant le délai de livraison L ($\overline{D}_L$ = moyenne)

B_L = écart type de D_L.

$F_L(D_L)$ = fonction de demande pendant L.
P = point de commande.
$\overline{R}_L$ = rupture moyenne pendant L.
F_r = facteur de rupture, défini comme suit : $F_r = \dfrac{\overline{R}_L}{B_L}$
C_L = Coefficient $\dfrac{B_L}{\overline{D}_L}$
F_s = facteur $\dfrac{SS}{B_L}$
Z_L = niveau de service moyen pendant L.

Remarquons que :

$$w = \text{proba}\left[D_L > P\right]$$
$$= \text{proba}\left[D_L > \overline{D}_L + SS\right]$$
$$= \text{proba}\left[D_L > \overline{D}_L + F_s . B_L\right]$$

$$Z_L = \frac{\overline{D}_L - \overline{R}_L}{\overline{D}_L} = 1 - \frac{F_r . B_L}{\overline{D}_L} = 1 - C_L . F_r$$

$$\overline{R}_L = \int_P^{\infty} (D_L - P) .\ dF_L(D_L)$$

<u>Application au cas d'une distribution rectangulaire de la demande.</u>

Dans ce cas,

$$d\,F_L(D_L) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} \text{ si } \overline{D}_L - h \leq D_L \leq \overline{D}_L + h \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

avec $h = \sqrt{3} . B_L$

Il vient alors (1) :

---

(1) Voir annexe 20.

$$Z_L = 1 - c_L . \frac{(\sqrt{3}-F_s)^2}{4. \sqrt{3}}$$

$$SS = h. \left[1 - 2 \sqrt{\frac{\overline{D}_L}{h}. (1-Z). \frac{T}{L.N}}\right]$$

$$= h. \left[1 - 2 \sqrt{\frac{\overline{D}_L}{h}. (1-Z). \frac{Q}{L.\overline{d}}}\right]$$

Dans cette expression du stock de sécurité, seul N dépend de la quantité économique de commande. Et puisque $Q_S < Q_Y$, on voit que $SS_S > SS_Y$, c'est-à-dire que le stock de sécurité devra être plus important si l'on retient le critère de rendement des stocks.

Si pour simplifier les écritures, nous posons

$$A = 2h. \sqrt{\frac{\overline{D}_L}{h}. (1-Z). \frac{T}{L.\overline{D}}}$$

Alors, $SS = h - A. \sqrt{Q}$

$$SS_S - SS_Y = (h-A. \sqrt{Q_S}) - (h-A. \sqrt{Q_Y})$$

$$= A.(\sqrt{Q_Y} - \sqrt{Q_S})$$

6.3. DETERMINATION CONJOINTE DE LA QUANTITE ECONOMIQUE DE COMMANDE (Q), DU POINT DE COMMANDE (P) ET DU STOCK DE SECURITE (SS).

Nous supposons que le coût unitaire de rupture (r) est connu et fixe.

La rupture moyenne pendant le délai de livraison étant $\overline{R}_L$ (et nous avons dit en 6.2. 2. : $\overline{R}_L = F_r.B_L$), elle sera, pour la période globale (T), N fois plus grande :

$$\overline{R}_T = \overline{R}_L.N = F_r.B_L.\frac{\overline{D}}{Q}$$

Le coût moyen de rupture pendant la période globale T sera donc :

$$\overline{CR} = r.\ \overline{R}_T = r.F_r.B_L.\frac{\overline{D}}{Q}$$

Le stock moyen, devant tenir compte d'un stock de sécurité permanent, est devenu : $Stm = \frac{Q}{2} + SS$, ou encore, puisque $SS = P - \overline{D}_L$

$$Stm = \frac{Q}{2} + P - \overline{D}_L$$

Le coût total comprenant l'acquisition, la commande, le stockage et la rupture, peut donc s'exprimer comme suit :

$$\overline{CT} = Cu.\overline{D} + CC.N + Cu.I.T.Stm + \overline{CR}$$

Après substitutions et dérivations par rapport aux variables P et Q, on trouve (1) pour le critère de coût minimum et avec une distribution rectangulaire de demande :

$$Q_Y = \sqrt{\frac{2.CC.\overline{d}}{Cu.I}}\ .\sqrt{\frac{r.\overline{d}}{r.\overline{d}-2.\sqrt{3}.B_L.Cu.I}}$$

$$= k.Q^{*} \qquad \text{si l'on pose } k = \sqrt{\frac{r.\overline{d}}{r.\overline{d}-2\sqrt{3}.B_L.Cu.I}}$$

(1) Voir détails en annexe 21.

CONCLUSIONS.

Certaines extensions apportent des modifications dans les raisonnements, mais agissent de manière similaire pour tous les critères. On peut donc dire que, sur le plan de la comparaison des critères de choix, elles n'exercent pas ou peu (indirectement) d'influence.

C'est le cas des hypothèses de délai de livraison, de taux d'approvisionnement constant, de rupture des stocks, avec ventes différées, et même de certains aspects de la gestion de plusieurs produits. Il faudra, selon le cas, commander plus tôt, en plus grande quantité, ou plus souvent, ou en tenant compte de contraintes, mais la taille du lot subira la même influence du choix du critère.

La variation du prix de vente engendre des perturbations parmi les formulations des critères et va différencier des fonctions qui, précédemment, conduisaient au même résultat.

En univers aléatoire, la détermination du stock cyclique sera identique au cas de base ; cependant, des séries plus petites entraineront un plus grand risque de rupture et, par conséquent, un stock de sécurité plus important.

Ces extensions sont des pistes de réflexion, davantage sur les raisonnements de la gestion des approvisionnements que sur la comparaison proprement dite des critères de choix.

Chapitre III.

SIGNIFICATION DES CRITERES.

Section 1. ANALYSE DES SYSTEMES.

Pour dégager la signification de chaque critère, et afin de restituer la gestion des stocks dans son contexte (le stock, vu comme un outil permettant à la production de répondre aux ventes), nous adopterons une approche "systèmes", dont nous ne donnons ici que les grandes lignes (1).

L'entreprise est définie comme un "système social humain, contrôlé par un centre de décision situé à l'intérieur du système, porteur d'un projet ayant pour but le maintien de la structure de l'ensemble par le moyen de la séquence fonctionnelle stable : production, répartition des revenus, aménagement de la source des revenus" (2).

Ce système-entreprise est alors décomposé en sous-systèmes : sous-système physique (opations physiques et administratives, hommes, équipements, locaux...), sous-système de gestion (qui fournit les directives de comportement), sous-système informatique (relatif aux flux d'informations entre les sous-systèmes et à l'intérieur de ceux-ci, et sous-système environnement. Ces sous-systèmes fondamentaux seront structurés et hiérarchisés.

---

(1) Pour plus de détails, voir F. BODART, cours d'Analyse de Systèmes Informatiques de Gestion, Réf./08/.

(2) Définition d'après R. SENCUILLET, citée dans F. BODART, Op. Cit. ci-dessus.

Nous ne nous occuperons seulement que du sous-système de gestion, hiérarchisé en plusieurs niveaux, parallèlement à la hiérarchisation des objectifs, et structuré en "modules" (activités homogènes) à chaque niveau.

Nous distinguerons (1) quatre niveaux de gestion :

1. Le niveau d'analyse, qui définira les politiques générales de la firme. A ce niveau sont associés les objectifs fondamentaux, qui définissent les conditions qualitatives de la survie de l'entreprise.

2. Le niveau de croissance, chargé d'analyser les chemins de croissance de l'entreprise en fonction des objectifs à long terme et de l'état courant de l'entreprise. Ce niveau correspond aux objectifs déduits globaux (qui associent des valeurs particulières aux objectifs fondamentaux) et aux objectifs fonctionnels (spécialisation des objectifs déduits globaux, par chacune des directions fonctionnelles de l'entreprise).

3. Le niveau central de gestion, qui relève du moyen terme et correspond aux objectifs de gestion (en fonction d'une capacité donnée et d'un marché potentiel estimé, chaque direction fonctionnelle définit son programme et ses budgets). A ce niveau, on procède à la détermination du plan d'activité et des prévisions relatives aux offres de ressources et aux demandes de produits et services.

---

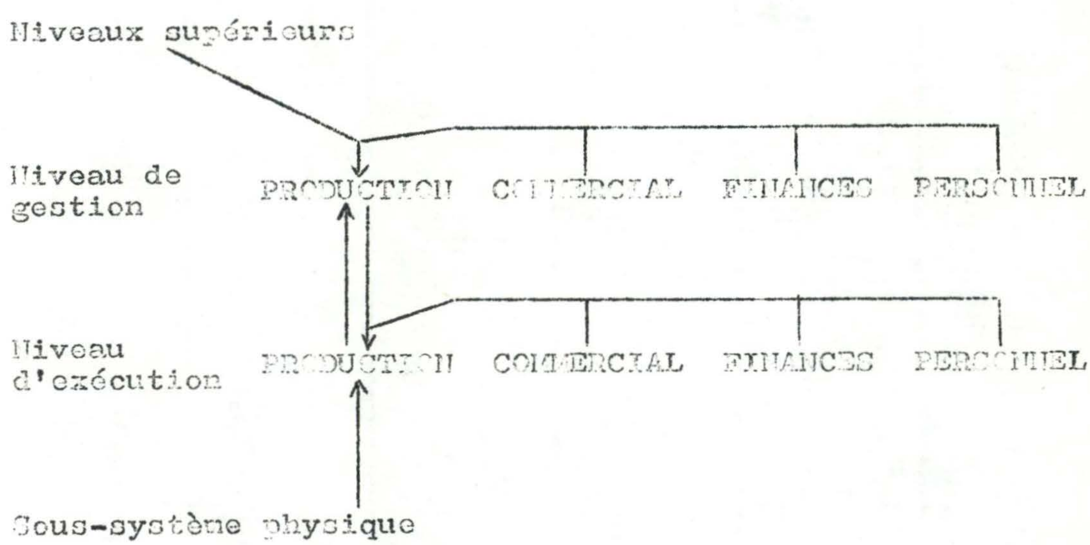
(1) Voir F. BODART, Cours d'Analyse de Systèmes Informatiques de Gestion, Réf./08/, pp. 60 et sq.

4. Le niveau opératoire, qui relève du court terme, et correspond aux objectifs d'exécution (directives de comportement des cellules d'activité du sous-système physique). Ce niveau est chargé de la mise en oeuvre permanente des ressources de l'organisation en fonction des normes de comportement définies au niveau central de gestion. Les problèmes qui s'y posent concernent essentiellement l'adaptation aux perturbations internes et externes à l'organisation.

Section 2. SIGNIFICATION DES CRITERES.

Afin de mieux percevoir les interactions entre les différentes fonctions et entre les niveaux, nous présentons une hiérarchisation simplifiée dans le schéma suivant.

Nous nous préoccuperons des niveaux de gestion et d'exécution, en concentrant notre attention sur la gestion des stocks (comprise dans le terme production).



Les flèches indiquent les influences (directives, contraintes ou informations) exercés sur la gestion des stocks.

Nous ne considérons que les quatre fonctions : Production, Commercial, Finances, Personnel. Ces dénominations sont des agrégats et doivent être prises dans un sens très large. Le terme Finances, par exemple, englobe le financement à long terme aussi bien que la trésorerie ; le Commercial recouvre les ventes et le marketing.

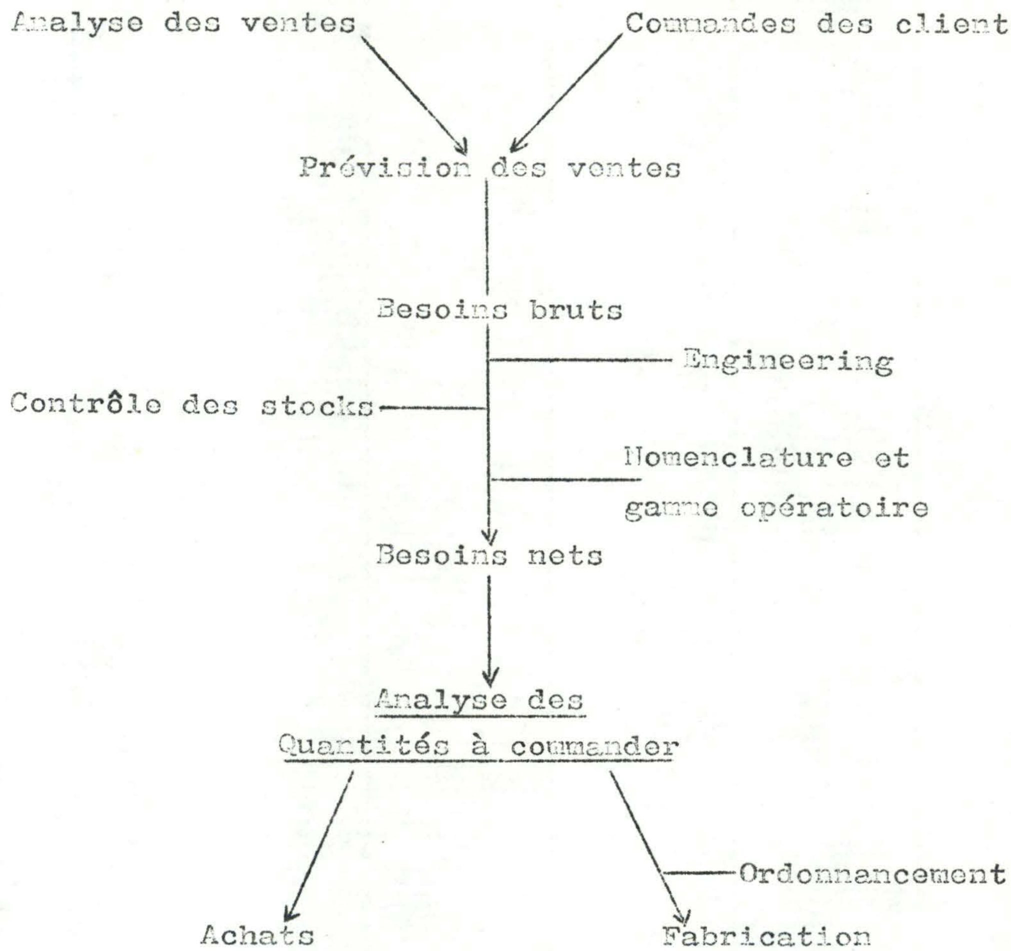
De même, le terme Production sera divisé en plusieurs sections : gestion des approvisionnements (compte tenu des délais de livraison et autres paramètres, commander les fournitures, matières premières, pièces de rechange...), gestion de l'ordonnancement (délais de livraison, produits en cours, charges des équipements...), gestion des stocks (matières premières, produits semi-finis et composants, produits finis, pièces et matériel), et production proprement dite.

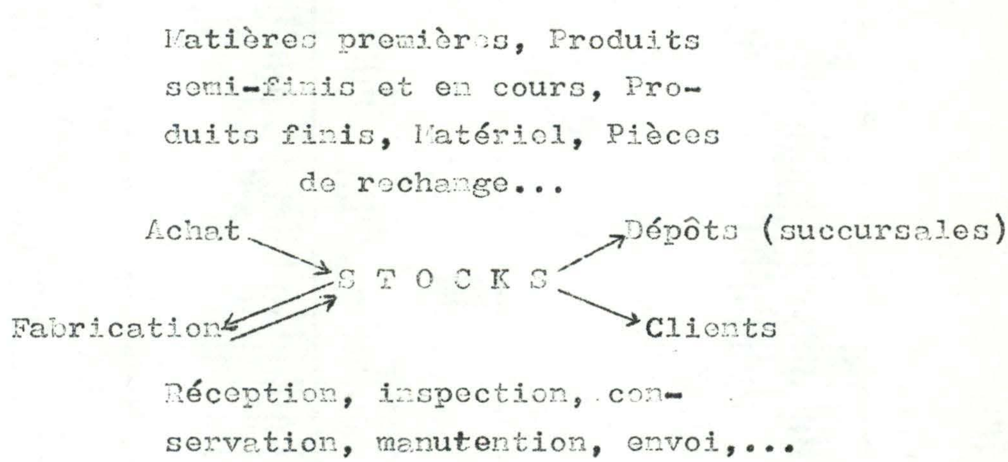
Ces diverses sections, outre leurs relations avec les autres fonctions et les autres niveaux, sont étroitement liées entre elles. On comprend par exemple que la gestion des stocks des produits en cours de fabrication ne peut s'effectuer indépendamment de l'ordonnancement.

Pour illustrer ces interactions (relatives aux stocks et à la production), nous présentons à la page suivante deux schémas (1). Le premier résume dans ses grandes lignes une gestion de la production ; le second donne une idée de ce qui se passe dans le sous-système physique, en ce qui concerne la gestion des stocks.

---

(1) Voir (I.B.M.), The Production Information and Control System, Réf./60/, Chap. I.


Analyse des ventes
Commandes des clients
Prévision des ventes
Besoins bruts
Engineering
Contrôle des stocks
Nomenclature et gamme opératoire
Besoins nets
Analyse des Quantités à commander
Ordonnancement
Achats
Fabrication


Matières premières, Produits semi-finis et en cours, Produits finis, Matériel, Pièces de rechange...
Achat
S T O C K S
Dépôts (succursales)
Fabrication
Clients
Réception, inspection, conservation, manutention, envoi,...

Le secteur production du niveau de gestion reçoit du niveau supérieur certaines directives et informations. (Par exemple : taux de croissance des capacités de production et de la productivité, renouvellement des équipements, rentabilité des investissements, croissance attendue des marchés, etc...)

En fonction de ces directives émanant du niveau supérieur, ainsi que des informations provenant des autres secteurs et de la situation courante de la firme, le secteur production (ou plus exactement chacune des sections qu'il renferme) élaborera un plan d'activité qui optimise les budgets de la firme. On déterminera (1) sucessivement :

a) les budgets physiques, exprimant l'activité de l'entreprise, par exemple en termes de produits finis, produits en cours, matières premières, unités d'oeuvre,...

b) les budgets en valeur, qui, par la détermination des coûts attachés aux différents stades du processus de fabrication, valoriseront les budgets physiques.

c) des normes, déduites des budgets prévisionnels physiques et en valeur, et destinées au niveau d'exécution. Par exemple, des normes relatives au potentiel productif (niveau de rendement, productivité), à l'immobilisation en stocks (niveau des stocks, taux de rotation, coût de stockage), contraintes budgétaires, etc...

A son tour, la section gestion des stocks du niveau opératoire émettra des normes de comportement destinées aux sous-

---

(1) Voir F. BODART, Op. cit., Réf./08/, p. 69.

-système physique. Ces normes seraient, par exemple, de lancer une commande de Q unités lorsque le niveau des stocks atteint un seuil P de réapprovisionnement. Ces directives ainsi émises, tiennent compte d'informations (ou normes) provenant de trois types de sources :

1. Le niveau de gestion du secteur. Par exemple : normes de coût de production à ne pas dépasser, ou encore, niveau de stocks tel que l'emploi des équipements ne tombe pas sous un certain seuil...
2. Les autres secteurs du niveau d'exécution. Par exemple : délais de livraison (ordonnancement), service à la clientèle (commercial), engagements financiers à ne pas dépasser (finances).
3. L'état du sous-système physique et l'environnement. Par exemple : réception d'une commande urgente ou exceptionnelle, modification des paramètres, panne d'un équipement...

Nous constatons donc des influences d'origines diverses et de directions parfois contradictoires, qui s'exercent sur la gestion des stocks. Selon les objectifs assignés et les contraintes imposées, tant par les niveaux supérieurs que par la situation présente, tel critère pourra être plus pertinent que tel autre.

Dans une optique de gestion indépendante des stocks, la tâche du responsable serait par exemple de maintenir le niveau des stocks entre des limites prédéterminées. Son rôle se bornerait alors à une régulation du flux d'entrée, régulation qui pourra avoir lieu selon de multiples méthodes. Par exemple : Lorsque le niveau des stocks atteint le seuil minimum , recompléter ce stock de manière à atteindre la borne supérieure. Ou encore : recommander de manière continue, au fur et à mesure que le niveau baisse (ceci reviendrait à adapter parfaitement le flux d'entrée au flux de sortie). Entre ces deux solutions, il existe toute une gamme de manières possibles de gérer les stocks, notamment de réapprovisionnement périodique.

Dans le strict point de vue du sous-système de gestion des stocks, autonome par rapport au reste de l'entreprise, nous pouvons dire que le responsable cherchera à réduire ses frais de fonctionnement; ce qui reviendrait à adopter le critère de coût minimum pour déterminer la quantité économique et la fréquence des commandes.

Si la gestion des stocks est intégrée dans une planification de la production, des stocks et de l'emploi, le responsable choisira le critère d'ensemble réalisant le mieux les objectifs assignés au sous-système considéré. A ce sujet, Holt, Modigliani, Muth et Simon (1) présentent un modèle permettant d'ajuster la production et l'emploi pour, au moindre coût, répondre aux fluctuations de la demande. Les trois stratégies proposées sont : a) ajustement du niveau d'emploi par engagement ou licenciement de personnel en fonction du niveau des commandes, b) heures supplémentaires ou sous-emploi, et c) variation des stocks et différés. Les variables de décision sont la production et l'emploi. L'optimisation se fait par recherche du coût total minimum. Ce coût total est la somme des composantes suivantes : coût du travail régulier, coût d'embauche ou

---

(1) Voir HOLT, MODIGLIANI, MUTH & SIMON, Planification de la Production, des stocks, de l'emploi. Réf./40/. Notons aussi le modèle de dynamique industrielle, réalisé par FEY, intégrant les objectifs de stabilité de l'emploi et de profit maximum, et traitant la demande comme résultant de la manière dont est régulée la production.

de licenciement, coût en heures supplémentaires ou en sous-emploi, coût de variation des stocks.

La règle de décision à laquelle aboutit ce modèle fournit le niveau de production et le niveau d'emploi pour la période. Ces deux variables décisionnelles dépendent des demandes pour les périodes ultérieures, mais de manière décroissante dans le temps; elles sont en outre fonctions des niveaux des stocks et de l'emploi de la période précédente. Cette règle fait réagir la production avec un retard d'une période sur l'emploi et les stocks. Elle est en outre sujette aux erreurs de prévision (surtout à long terme) et d'estimation des paramètres. On pourrait peut-être améliorer la qualité des estimations en travaillant directement sur les paramètres de la règle de décision elle-même, plutôt que sur les paramètres de départ (les coûts).

Remarquons que le critère de coût minimum d'ensemble, adopté dans ce modèle, satisfait un objectif de réponse à la demande au moindre coût. Pour satisfaire un objectif de rentabilité du potentiel de production, par exemple, nous utiliserions un critère du type : maximum du rapport "Profit/Immobilisation en potentiel de production", cette immobilisation comprenant personnel, matériel et stocks.

Cette approche met cependant en évidence les interactions existant entre les stocks et les autres sections. Nous constatons en effet qu'une gestion efficace des stocks peut réduire les frais de main d'oeuvre (heures supplémentaires ou sous-emploi), de personnel (engagement, formation, ou licenciement) et de biens d'équipement (réduction des immobilisations), c'est-à-dire accroître la productivité.

Pour le directeur commercial, le niveau des stocks devrait être élevé, de manière à donner entière satisfaction au client. Ceci se traduirait par un haut niveau de service et par de petits délais de livraison. Quel que soit le critère choisi, seule la présence des produits demandés préoccupera le commercial.

Nous choisirions, dans cette optique, un critère qui fasse intervenir la satisfaction de la clientèle. C'est ce qui a été fait en partie par exemple lorsque nous avons introduit un coût de rupture (voir la troisième extension), ou lorsque nous avons déterminé le stock de sécurité en fonction d'un niveau de service donné (voir la sixième extension).

Pour le responsable de la trésorerie, les stocks seront une immobilisation de capitaux à court terme, capitaux qui pourraient éventuellement être avantageusement transformés en liquidités.

En cas de manque de liquidités, il faudra emprunter à court terme, à un certain taux i_1 . L'immobilisation en stocks devrait donc avoir un taux de rentabilité S supérieur à i_1.

En cas d'abondance de liquidités, celles-ci seront en partie placées à court terme et les stocks pourraient constituer un bon placement dans la mesure où leur taux de rentabilité S serait supérieur au taux i_2 du marché.

Pour tenir compte de cette immobilisation des capitaux à court terme, nous pourrions introduire dans la fonction de coût total une sorte de coût d'opportunité, proportionnel à l'écart entre le rendement souhaité et le rendement effectif et adopter un critère de rendement des stocks.

Le stock étant pour lui un investissement dans un outil nécessaire à la fabrication, le financier sera préoccupé par un financement de l'activité au moindre coût. Les stocks seront intéressants dans la mesure où leur présence permet une réduction des immobilisations et valorise les équipements.

Les stocks constituent donc financièrement un investissement parmi d'autres, dont on souhaite obtenir une rentabilité maximum, et ils devront concourir efficacement aux objectifs généraux de la firme, par exemple contribuer à l'accroissement du taux de rentabilité des fonds propres.

Pour intégrer cette optique financière dans la gestion de la production, des stocks et de l'emploi, nous pourrions adopter un critère de rendement ou de taux de rendement interne.

Si nous voulons tenir compte de ces nombreux et différents aspects, nous ne pouvons nous contenter d'une gestion des stocks autonome par rapport au reste de l'entreprise. C'est pourquoi nous suggérons une approche multicritère qui, selon les circonstances, accordera plus de poids à certains objectifs, durcira ou élargira les contraintes, et donnera la priorité à certains secteurs ou aux urgences. En fait, cette nouvelle approche permet de réunir les différents critères envisagés précédemment, et d'en ajouter d'autres, pour répondre aux éventualités.

Chapitre IV.

APPROCHE MULTICRITERE.

Section 1. INTRODUCTION - SIGNIFICATION DU CONTROLE.

Nous avons vu que chaque critère aboutit à établir une valeur propre de la quantité économique de commande (Q). Dans le cadre des hypothèses de départ, seuls, les trois critères de coût minimum, profit maximum (1) et rendement interne fournissent le même résultat : Q^*.

Les autres critères ne sont cependant pas indépendants. Par exemple, si la fonction objectif du critère de coût minimum est Y, la fonction objectif S du critère de rendement des stocks sera fonction de Y. (2)

Un contrôle parfait s'exerçant simultanément sur tous les critères n'est donc pas possible, car la contrôlabilité est soumise aux interdépendances entre les critères (3). Un contrôle optimal strict n'est possible que sur les trois premiers critères (coût minimum, profit maximum, et rendement économique).

---

(1) Pour simplifier l'étude, nous regroupons (avec les hypothèses du cas de base) les critères de coût minimum total, par unité de temps, et par pièce, sous le nom "coût minimum" ; ceux de profit maximum total, par unité de temps, et par pièce, sous le terme "profit maximum".

(2) Nous avons vu en effet (cfr annexe 7), que $S = f(Y)$.

(3) Vouloir un coût minimum (ou inférieur à une certaine norme), sera (peut-être) en contradiction avec la recherche d'un rendement des stocks maximum (ou supérieur à un certain niveau).

On peut essayer d'opérer un contrôle approché sur l'ensemble complet des critères en cherchant une quantité économique de commande (Q) qui, sans pour autant satisfaire chaque critère pris séparément, puisse répondre à une nouvelle règle, combinaison linéaire (pondérée) des critères initiaux.

Nous proposons un nouveau critère, construit de manière à minimiser les écarts relatifs à la situation optimale de chaque critère initial. Les coefficients linéaires (h_i) de cette nouvelle fonction objectif, sont des coefficients de pondération.

Selon les circonstances (situation courante de la firme, priorité à certains objectifs, urgences, etc...), les responsables (1) pourront faire varier les coefficients de pondération, ou les seuils critiques à respecter.

Nous chercherons donc une valeur de la taille du lot (Q) qui, si elle existe (2), ne s'éloigne pas trop (seuils à respecter) des valeurs particulières déterminées par les critères initiaux. Le problème peut se formuler différemment comme suit : quelle est la valeur de Q qui, si elle existe, optimise un nouveau critère, combinaison linéaire (3) des critères de départ ?

---

(1) Les responsables du "niveau central de gestion" (voir chapitre III).

(2) Existe-il un domaine de variation de Q qui permette l'application d'un tel critère ? (Les seuils critiques à respecter sont-ils compatibles ?).

(3) La linéarité n'est pas essentielle, mais elle simplifie le problème.

Section 2. OPTIMUM MULTICRITERE.

Nous travaillerons avec les critères de coût unitaire (Y), profit par pièce (Pu), profit par série (Pq) et rendement des stocks (S).

Le nouveau critère sera de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min G = \sum h_i . E_i \\ \text{sous contraintes } E_i \leqslant W_i \end{array}}$$

où les E_i sont les écarts relatifs à la situation optimale unicritères, ($Y°$, $Pu°$, $Pq°$ et $S°$ calculés au chapitre premier), et les W_i sont les contraintes exprimant certains seuils critiques qu'on souhaite ne pas dépasser : le coût unitaire ne peut excéder un certain niveau Y', le profit par pièce ne peut descendre en-dessous de Pu', le profit par série doit être supérieur à Pq', et le rendement des stocks ne peut être inférieur à S'.

Explicitons ces E_i et W_i :

$$E_1 = \frac{Y - Y°}{Y°} \qquad E_2 = \frac{Pu° - Pu}{Pu°}$$

$$E_3 = \frac{S° - S}{S°} \qquad E_4 = \frac{Pq° - Pq}{Pq°}$$

$$G = h_1 . E_1 + h_2 . E_2 + h_3 . E_3 + h_4 . E_4$$

Contraintes (les W_i sont des nombres) :

$$Y \leqslant Y' \Rightarrow \frac{Y - Y^\circ}{Y^\circ} \leqslant \frac{Y' - Y^\circ}{Y^\circ} \quad \text{ou} \quad E_1 \leqslant W_1$$

$$Pu \geqslant Pu' \Rightarrow \frac{Pu^\circ - Pu}{Pu^\circ} \leqslant \frac{Pu^\circ - Pu'}{Pu^\circ} \quad \text{ou} \quad E_2 \leqslant W_2$$

$$S \geqslant S' \Rightarrow \frac{S^\circ - S}{S^\circ} \leqslant \frac{S^\circ - S'}{S^\circ} \quad \text{ou} \quad E_3 \leqslant W_3$$

$$Pq \geqslant Pq' \Rightarrow \frac{Pq^\circ - Pq}{Pq^\circ} \leqslant \frac{Pq^\circ - Pq'}{Pq^\circ} \quad \text{ou} \quad E_4 \leqslant W_4$$

2. 1. PROCEDURE.

Les écarts relatifs (E_i) peuvent être exprimés en fonction de la quantité économique. Par conséquent, la fonction objectif $G = \Sigma\, h_i . E_i$, sera aussi fonction de la taille du lot : $G = G(Q)$.

Chaque contrainte $E_i \leqslant W_i$ entraîne des limites à la variation de Q :

$$(E_i \leqslant W_i) \Rightarrow (l_i \leqslant Q \leqslant m_i)$$

(avec les limites l_i et m_i qui sont des nombres).

L'ensemble des contraintes pourra se ramener à une seule contrainte : $L \leqslant Q \leqslant M$.

Il faudra donc d'abord rechercher l'intervalle $[L,M]$ des variations possibles de la quantité économique. Si cet intervalle existe, chercher alors l'optimum. Si l'intervalle est réduit à un seul point, ce point est la seule solution. S'il n'y a pas d'intervalle commun, voir si l'on peut modifier les contraintes et/ou les coefficients de pondération.

Les grandes lignes de la procédure peuvent être résumées dans le schéma suivant :

Recherche de l'intervalle

L'intervalle existe

Recherche du minimum

L'intervalle n'existe pas

Modification(s) des contraintes et pondérations

Recherche de l'intervalle

Recherche du minimum

2. 2. EXPRESSION DES ECARTS RELATIFS EN FONCTION DE LA QUANTITE ECONOMIQUE DE COMMANDE.

$$\underline{E_i = f(Q)} \qquad (1)$$

Coût unitaire, Y ; (E_1)

$$E_1 = \frac{Cu.I}{2d.Y°} \cdot \frac{(Q - Q^*)^2}{Q}$$

---

(1) voir développements dans l'annexe 22.

Profit unitaire, Pu ; (E_2)

$$E_2 = \frac{Cu.I}{2\ d.Pu^{\circ}} \cdot \frac{(Q - Q^{*})^2}{Q}$$

Rendement des stocks, S ; (E_3)

$$E_3 = 1 + \frac{1}{Cu.S^{\circ}.Q^2} \cdot \left[Cu.I.(Q-Q^{*})^2 - 2.d.Pu^{\circ}.Q \right]$$

Profit par série, Pq ; (E_4)

$$E_4 = 1 - \frac{2.Cu.I. \left[(V-Cu).Q - CC - \frac{Cu.I}{2d}.Q^2 \right]}{d.\left[(V-Cu)^2 - X^2 \right]}$$

2. 3. CONSEQUENCES, POUR LE DOMAINE DE VARIATION DE LA QUANTITE ECONOMIQUE, DES CONTRAINTES SUR LES ECARTS RELATIFS.

$$(E_i \leqslant W_i) \Longrightarrow (l_i \leqslant Q \leqslant m_i) \qquad (1)$$

Coût unitaire : $E_1 \leqslant W_1$.

Q sera compris entre les deux valeurs :

$$Q^{*} + \frac{d.Y^{\circ}.W_1}{Cu.I} \pm \sqrt{\left(\frac{d.Y^{\circ}.W_1}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2.Q^{*}.d.Y^{\circ}.W_1}{Cu.I}}$$

Profit unitaire : $E_2 \leqslant W_2$.

Q compris entre les deux valeurs :

$$Q^{*} + \frac{d.Pu^{\circ}.W_2}{Cu.I} \pm \sqrt{\left(\frac{d.Pu^{\circ}.W_2}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2.Q^{*}.d.Pu^{\circ}.W_2}{Cu.I}}$$

(1) Voir détails dans l'annexe 23.

<u>Rendement des stocks : $E_3 \leq W_3$.</u>

Q sera compris entre les deux valeurs :

$$\frac{Q_S^o}{1 \pm \sqrt{W_3 . \left[1 - \frac{X^2}{(V-Cu)^2}\right]}}$$

<u>Profit par série : $E_4 \leq W_4$.</u>

Q compris entre les deux valeurs :

$$Q_{Pq}^o \pm \frac{d}{Cu.I} . \sqrt{\left[(V-Cu)^2 - X^2\right] . W_4}$$

2. 4. RECHERCHE DE LA PLAGE DES VARIATIONS POSSIBLES DE LA QUANTITE ECONOMIQUE.

$$L \leq Q \leq M$$

Chaque contrainte du type $E_i \leq W_i$ implique des limites de variation de Q : $l_i \leq Q \leq m_i$

Les limites inférieures l_i et supérieures m_i sont des nombres, et sont données au paragraphe précédent (2.3.). Ainsi, à titre d'exemple,

$$l_1 = Q^* + \frac{d.Y^o.W_1}{Cu.I} - \sqrt{\left(\frac{d.Y^o.W_1}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2.d.Y^o.W_1.Q^*}{Cu.I}}$$

$$m_3 = \frac{Q_S^o}{1 - \sqrt{W_3 . \left[1 - \frac{X^2}{(V-Cu)^2}\right]}}$$

L'ensemble des contraintes ainsi exprimées sur Q peut se ramener à une seule contrainte : $L \leq Q \leq M$,

avec $\begin{cases} L = \text{Max } \{l_i\} \\ M = \text{Min } \{m_i\} \end{cases}$

On a ainsi déterminé l'intervalle $[L,M]$ des variations possibles de la quantité économique.

Cet intervalle pourra être une zone (si $L<M$), être réduit à un point (dans le cas où $L = M$), ou encore ne pas réellement exister (dans le cas où $L>M$: il faut $L \leqslant Q$ et $Q \leqslant M$, ce qui est alors impossible).

2. 5. RECHERCHE DE LA QUANTITE ECONIMIQUE OPTIMALE.

Le problème, ainsi exprimé en fonction de la variable Q, devient donc : Min $G = G(Q)$

sous contrainte : $L \leqslant Q \leqslant M$.

Rechercher le minimum de la fonction G fournira une ou plusieurs valeurs de Q, qui, après élimination des solutions non valables (complexes, négatives,..), seront les valeurs optimales possibles. Soient $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$, ... ces valeurs minimales. Trois cas peuvent se présenter :

Cas où $L<M$

Le domaine de variation de la quantité économique est donc une zone. Un ou plusieurs des minima retenus $(\overline{Q}_i)$ tombent-ils dans cet intervalle $[L,M]$?

- Si OUI, l'optimum est le minimum absolu, c'est-à-dire que

$$Q^{opt} = \text{Min}^{*} \{\overline{Q}_i, L, M\} \quad (1)$$

- Si NON, l'optimum se trouve alors à l'une des bornes de la zone :

$$Q^{opt} = \text{Min}^{*} \{L, M\} \quad (1)$$

---

(1) $\text{Min}^{*} \{x_1, x_2, x3\}$ est à interpréter comme $= x_j$ tel que $G(x_j) = \min_i \{G(x_i)\}$.

Cas où L = M.

L'intervalle de variation se réduit donc à un point. Dans ce cas, il n'y a pas de choix possible :

$$Q^{opt} = L = M.$$

Cas où L > M.

On se trouve alors devant une incompatibilité : d'une part, $L \leqslant Q \leqslant M$, et d'autre part, $M < L$.

Il n'y a alors pas de solution avec ces hypothèses. Il faut donc relâcher les contraintes W_i et/ou modifier les pondérations h_i.

2. 6. MODIFICATION DES SEUILS MAXIMA DE VARIATION ET DES PONDERATIONS.

Il s'agit de revoir les contraintes et d'augmenter éventuellement les W_i (tous ou certains seulement). Les limites W_i sont un maximum qu'il est souhaitable de ne pas dépasser. Toutefois, si la nécessité s'en fait sentir, ces limites pourraient être élargies, pas à pas, jusqu'à une certaine borne absolument infranchissable.

Ces élargissements successifs des contraintes vont élargir progressivement le domaine de variation de la quantité économique.

Cependant, chaque élargissement des contraintes pourra entraîner une modification des coefficients h_i de pondération, modification qui nécessitera peut-être un changement d'ordre de préférence parmi les critères (modification cardinale et ordinale).

CRITERES \ CONTRAINTES	Contraintes initiales ↓		.....		Ultime concession ↘
$i =$ ↙ \ $j =$ →	1	2	3	...	J
1 (Coût unitaire)	W_1^1	W_1^2	W_1^3	...	W_1^J
2 (Profit par pièce)	W_2^1	W_2^2	W_2^3	...	W_2^J
3 (Rendement des stocks)	W_3^1	W_3^2	W_3^3	...	W_3^J
4 (Profit par série)	W_4^1	W_4^2	W_4^3	...	W_4^J

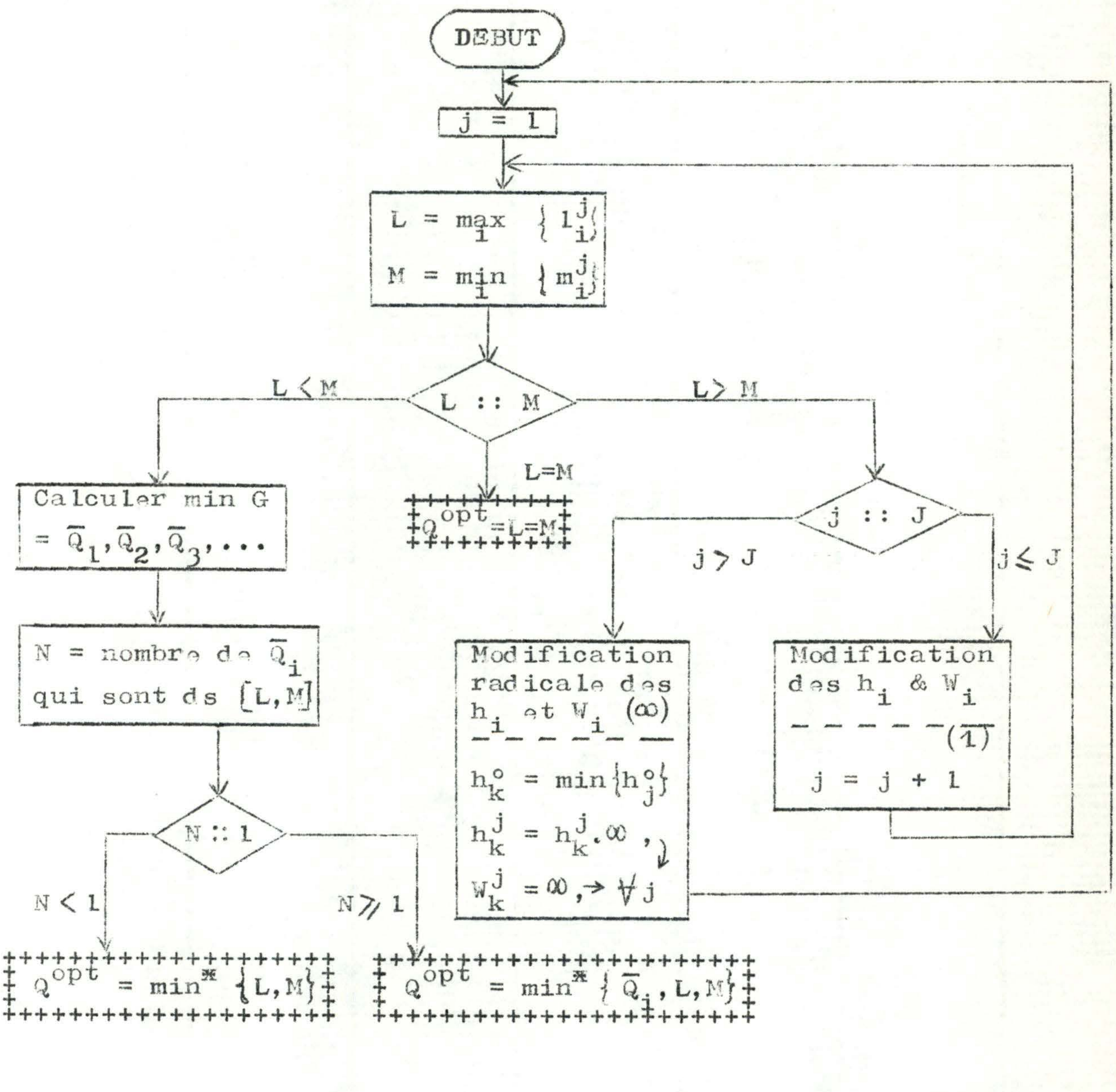
Si, dans les limites des variations autorisées, après élargissement des contraintes (jusqu'à l'ultime concession), il n'existe aucun intervalle commun, il va falloir opérer un choix parmi les critères pour obtenir une solution : nous proposons de supprimer la contrainte portant sur le critère dont la pondération initiale est la plus faible,

$$W_k = \infty , \forall k \; / \; h_k = \min \{ h_i \text{ initiaux} \} .$$

Pour éviter cependant un "gaspillage" de la valeur envisagée par ce critère, on lui accordera une pondération infinie : $h_k = \infty$.

On reprend alors les différentes situations de contraintes et si aucune solution n'est encore possible, on agit de même avec un second critère (deux contraintes supprimées, deux pondérations infinies), et ainsi de suite ...

Section 3. ORGANIGRAMME DE L'HEURISTIQUE SUIVIE ET CONCLUSIONS.



---

(1) = passer à la modification suivante.

Remarquons que ce processus de décision fournira toujours une solution. En effet, à la limite, une seule contrainte sera conservée, privilégiant ainsi le critère préféré. Le résultat sera voisin (à E_i près) de la solution unicritère correspondante.

Cette approche multicritère, si elle ne résout pas le problème du choix théorique (1) d'un critère, a l'avantage de présenter une règle de décision adaptable selon les circonstances.

Notons encore qu'il est possible de remplacer momentanément certains critères par d'autres, et même d'incorporer d'autres critères que ceux que nous avons envisagés.

Offrant une meilleure souplesse et une plus grande liberté d'action, cette approche permettra, en ce qui concerne les objectifs de la firme, un dialogue entre les responsables des différentes fonctions.

De plus, il est possible de répondre à la situation courante (évolution dans le temps et dans l'espace) de la firme. Citons par exemple : urgence d'une commande, réaction à la concurrence, priorités momentanées à certaines fabrications ou à certains objectifs, etc...

---

(1) Nous disons "théorique" car cette approche résout en fait la question puisqu'elle conduit toujours à une solution. Dans le cas limite, il faudra nécessairement que les responsables s'accordent (ou se soumettent) pour privilégier un critère unique. Ceci apporterait une solution de fait, bien spécifique (à l'instant présent, compte tenu de la situation actuelle, et attendu que...) au problème du choix d'un critère.

CONCLUSION.

La comparaison des quantités économiques fournies par les divers critères envisagés fait apparaître des différences entre les tailles des lots à commander ou à lancer en fabrication (et par conséquent entre les niveaux des stocks moyens). Les écarts sont surtout sensibles entre d'une part l'approche traditionnelle du coût minimum, et d'autre part les critères de rendement ou de taux de rendement.

Mais la seule comparaison des tailles optimales des lots est-elle suffisante pour établir une hiérarchie et opérer un ch oix parmi les critères en présence ? Nous ne pensons pas qu'il soit possible de trancher aussi nettement.

Le critère de coût minimum a l'avantage d'être clair, simple, compréhensif, maniable, de demander moins d'information que les autres critères, et surtout d'exister, d'être opérationnel.

Cependant, l'adoption de ce critère de minimisation des coûts nous paraît être une attitude passive et ne nous satisfait guère. Cette approche ne tient compte que des coûts de stockage et de commande, sans se préoccuper de la rotation des stocks.

Etant donné la faible sensibilité de la fonction de coût total à une variation de la taille du lot, et d'autre part, vu les avantages en rentabilité, souplesse de production, délais de livraison et satisfaction de la clientèle, offerts par les critères de rendement ou de taux de rendement, nous aurions tendance à préférer ceux-ci. Peut-être pourrait-on envisager une amélioration de l'approche coût minimum par l'introduction de contraintes relatives au service à la clientèle, au taux de rotation des stocks,....

Répétons-le, rien ne nous permet de trancher nettement la question et d'adopter une position catégorique. Les auteurs eux-mêmes émettent des avis divergents et parfois se contredisent, non seulement sur le choix d'un critère qui surpasse les autres, mais aussi sur les définitions des termes.

Ces problèmes montrent les difficultés qui surviennent lorsque l'on essaie de représenter un système ; on ne perçoit pas d'emblée toutes les relations existant entre les variables ; on les suppose fixes alors qu'elles sont variables, on les considère comme externes pour remarquer par la suite qu'elles influent les unes sur les autres...

Dans cette étude, nous avons cherché à optimiser le traitement d'un flux particulier, les approvisionnements ; mais les stocks ne représentent qu'une partie des ressources de l'entreprise ; optimiser la valeur d'un flux particulier ne peut se faire indépendamment des autres flux de ressources.

En d'autres termes, il nous faut un critère de niveau supérieur, qui permette de comparer les différents critères et d'effectuer un choix : une sorte de "super-critère" ou "critère de critère".

Il apparaît surtout que nous ne pouvons nous concentrer sur une gestion des stocks autonome par rapport au reste de l'entreprise, pour décider d'une politique d'approvisionnement. En effet,

"Loin de ne faire réaliser aucun profit, les stocks remplissent des fonctions bien déterminées, et s'ils sont gérés efficacement, ils sont aussi rentables que les autres investissements (rentabilité qui s'exprime finalement en termes de productivité humaine accrue). Les stocks peuvent avoir pour effet une réduction des frais de main d'oeuvre et de formation du personnel, une réduction des besoins en immobilisations telles que les biens d'équipement, ou une plus grande capacité à répondre aux besoins du consommateur ; dans la plupart des cas, le stock est aussi essentiel au fonctionnement d'un système prodution-distribution que le sont l'usine, les machines et le matériel de transport. Cependant, la gestion des investissements et les prévisions financières qui concernent les stocks sont aussi importantes que les autres prévisions financières d'immobilisations si elles doivent contribuer pleinement à la productivité humaine". (1)

Toute la question se résume au problème de la sélection d'un critère qui soit compatible avec les objectifs de la firme, tout en tenant compte de sa situation courante.

Mais recherche-t-on vraiment un optimum global ? Quels sont les objectifs fondamentaux de la firme ? Que faut-il optimiser ?. Le profit...? La croissance...? Autant de questions essentielles, longuement discutées et discutables, mais donc nous ne débattrons pas ici (2). Ces différentes questions font néanmoins prendre conscience du problème qui se pose alors, à savoir celui de définir le système de valeur auquel les décideurs se référeront pour effectuer leur choix.

Il est cependant très difficile de fixer la frontière de la question : trop étroite, elle simplifie trop et ne donne pas une image valable de la réalité ; trop large, elle se rapproche du réel mais les problèmes se compliquent et deviennent insolubles tels quels. Si les problèmes sont locaux, ils sont

---

(1) J.F. MAGEE, Le planning de la production et le contrôle des stocks, Réf./45/, p. 5.

(2) A ce sujet, voir par exemple JANTSCH, Réf./42/ ; CYERT & MARCH, Réf./19/ & /20/ ; ainsi que STARBUCK, Réf./54/.

simples d'emblée ; s'ils sont plus globaux, ils peuvent être simplifiés en agrégeant les phénomènes ; mais cette agrégation qui permet le contrôle du système de représentation par le décideur, ne doit pas lui faire perdre le contrôle du réel.

Comme nous l'avons déjà souligné, de nombreuses interrelations existent au sein de la firme, qui exercent une influence sur la gestion des stocks.

C'est pourquoi il nous a semblé utile de tenter une approche multicritère qui, sans pour autant prendre position dans la comparaison des critères, ouvre la porte à une optique plus large.

Cette approche présente en effet l'avantage de pouvoir s'adapter aux circonstances, de tenir compte de l'évolution de la situation courante de la firme et de répondre à une gamme d'objectifs variés et variables. Elle permet en outre le dialogue entre les responsables des différentes fonctions de l'entreprise, en les forçant à sortir de leur "micro-environnement" pour prendre conscience d'une gestion plus intégrée.

Cette étude n'apporte pas de solution à la gestion des stocks d'une entreprise, mais est une approche méthodologique, une base de réflexion qui demande à être exploitée et poursuivie par d'autres développements.

Un étude théorique plus poussée, avec d'autres hypothèses, moins strictes, cumulant les extensions et envisageant des situations plus complexes, ferait peut-être apparaître des nuances intéressantes.

Cependant, nous pensons qu'avant de continuer dans cette voie, une poursuite de l'étude par une analyse de "ce qui se fait" serait plus utile et apporterait davantage de satisfaction à son auteur.

Cette analyse chercherait non seulement à montrer comment et selon quels critères les entreprises décident leurs approvisionnements, mais surtout à comprendre le cheminement qui, à partir des objectifs globaux de la firme et en fonction de sa situation courante, conduit les responsables à adopter tel critère ou tel comportement.

"-"-"-"-"-"-"-"-"-"-"

A N N E X E S.

ANNEXES.

A.1 Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût total.

A.2 Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût par série.

A.3 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit total.

A.4 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit par série.

A.5 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le taux de rendement économique.

A.6 La taille du lot déterminée par le critère de taux de rendement maximum est inférieure à la quantité standard.

A.7 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le rendement des stocks.

A.8 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le taux de rendement des stocks.

A.9 La taille du lot déterminée par le critère de rendement des stocks est supérieure à celle du critère de taux de rendement des stocks, et inférieure à la quantité économique standard.

A.10 Recherche des zones de recouvrement.

A.11 Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût unitaire, en cas d'approvisionnement à taux constant.

A.12 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit par série, en cas d'approvisionnement à taux constant.

A.13 Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le rendement des stocks, en cas d'approvisionnement à taux constant.

A.14 Recherche de la quantité économique optimale et du niveau de recomplètement, répondant au critère de coût minimum par pièce, en cas de rupture des stocks.

A.15 Recherche de la quantité économique optimale et du niveau de recomplètement, qui répondent au critère de profit maximum par série, en cas de rupture des stocks.

A.16 Recherche du rendement maximum des stocks, en cas de rupture admise.

A.17 Extension rupture des stocks permise, cas des ventes perdues.

A.18 Extension "prix de vente variable".

A.19 Spécification de la taille des lots, dans le cas d'une gamme de plusieurs articles.

A.20 Recherche du stock de sécurité, dans le cas d'une distribution rectangulaire de la demande.

A.21 Recherche de la quantité économique, du point de commande et du stock de sécurité, dans le cas d'une demande aléatoire (distribution rectangulaire), pour le critère de coût minimum.

A.22 Expression des écarts relatifs, en fonction de la quantité économique.

A.23 Conséquences, pour le domaine de variation possible de la quantité économique, des contraintes sur les écarts relatifs.

ANNEXE 1. Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût total.

$$CT = Cu.D + CC.\frac{D}{Q} + Cu.I.\frac{Q}{2}.\frac{D}{d}$$

$$= D.(Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I.Q}{2\ d})$$

Annulation de la dérivée première : $\frac{\delta CT}{\delta Q} = 0$

$$D.(-\frac{CC}{Q^2} + \frac{Cu.I}{2\ d}) = 0$$

$$\Longrightarrow Q^2 = \frac{2\ CC.d}{Cu.I}$$

$$\Longrightarrow Q^\circ_{CT} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} = Q^*$$

Condition du second ordre : $\frac{\delta^2 CT}{\delta Q^2} > 0$

$\frac{2\ CC.D}{Q^3} > 0$ Sera vrai pour tout $Q > 0$.

Valeur du coût total optimum :

$$CT^\circ = Cu.D + CC.\frac{D}{Q^\circ} + \frac{Cu.I.Q^\circ.D}{2\ d}$$

$$= Cu.D + CC.D.\sqrt{\frac{Cu.I}{2\ CC.D}} + \frac{Cu.I.D}{2\ d}.\sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}$$

$$= Cu.D + D.\sqrt{\frac{Cu.I.CC}{2\ d}} + D.\sqrt{\frac{Cu.I.CC}{2\ d}}$$

$$= Cu.D + D.\sqrt{\frac{2\ Cu.I.CC}{d}}$$

$$= (Cu + X).D.$$

ANNEXE 2. Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût par série.

$$C_q = Cu.Q + CC + \frac{Cu.I.Q}{2}.\ tc$$

(tc = temps que dure une série, un cycle).

$$tc = \frac{T}{N} = T.\ \frac{Q}{D} = \frac{Q}{d}$$

car $N = \frac{D}{Q}$ et $d = \frac{D}{T}$

$$C_q = Cu.Q + CC + \frac{Cu.I.Q^2}{2.d}$$

Annulation de la dérivée première : $\dfrac{\delta C_q}{\delta Q} = 0$

$$Cu + \frac{Cu.I.Q}{d} = 0$$

Optimum théorique = $Q^{\circ}_{Cq} = \dfrac{-d}{I}$

Condition du second ordre : $\dfrac{\delta^2 C_q}{\delta Q} > 0$

$\dfrac{Cu.I}{d} > 0$ Toujours vrai.

La fonction, ne devant être considérée que pour des valeurs positives de Q, est croissante ; on aura donc C_q minimum pour Q minimum.

ANNEXE 3. Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit total.

$$PT = V.D - CT$$

V et D étant indépendants de Q, nous aurons

Max (PT) là où Min (CT)

$$\Longrightarrow Q^{o}_{PT} = Q^{o}_{CT}$$

ANNEXE 4. Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit par série.

$$P_q = V.Q - C_q$$

Annulation de la dérivée première : $\frac{\delta P_q}{\delta Q} = 0$

$$V - Cu - \frac{Cu.I}{d}.Q = 0$$

$$\Longrightarrow Q^o_{P_q} = \frac{(V-Cu).d}{Cu.I}$$

$$= \frac{(V-Cu).d}{Cu.I} \sqrt{\frac{Cu.I}{2.CC.d}} .Q^*$$

$$= (V-Cu). \sqrt{\frac{d}{2.CC.Cu.I}} . Q^*$$

$$= \frac{(V-Cu)}{X} . Q^*$$

Condition du second ordre : $\frac{\delta^2 P_q}{\delta Q^2} < 0$

$-\frac{Cu.I}{d} < 0$ Toujours vrai.

Valeur du profit maximum par série :

$$P^o_q = \frac{V.(V-Cu).d}{Cu.I} - \frac{Cu.(V-Cu).d}{Cu.I} - CC - \frac{Cu.I.d^2.(V-Cu)^2}{2\ d.Cu^2.I^2}$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{Cu.I} - CC - \frac{(V-Cu)^2.d}{2.Cu.I}$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{2.Cu.I} - CC$$

$$= \frac{d}{2.Cu.I}. \left[(V-Cu)^2 - \frac{2.CC.Cu.I}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2.Cu.I}.\left[(V-Cu)^2 - X^2\right]$$

$$= \frac{d.\ \sqrt{2.CC}}{2.Cu.I.\ \sqrt{2.CC}}.\ \left[(V-Cu)^2 - X^2\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}\ .\ \sqrt{\frac{d}{2.Cu.I.CC}}.\ \frac{1}{2}.\ \left[(V-Cu)^2 - X^2\right]$$

$$= \frac{Q^{*}}{2.X}\ \left[(V-Cu)^2 - X^2\right]$$

ANNEXE 5. Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le taux de rendement économique.

$$TR = \frac{d}{Q} \cdot \frac{(V-Y)}{Y} = \frac{d}{Q} \cdot \left(\frac{V}{Y} - 1\right) = d \cdot \left(\frac{V}{Y.Q} - \frac{1}{Q}\right)$$

Annulation de la dérivée première : $\frac{\delta TR}{\delta Q} = 0$

$$d \cdot \left[\frac{1}{Q^2} - \frac{V}{Y^2 . Q^2} \cdot \left(Cu + \frac{Cu.I}{d}.Q\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y^2 - V\left(Cu + \frac{Cu.I}{d}.Q\right) = 0$$

car $Y > 0, \; Q > 0$

Or, $Y = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I}{2.d}.Q$ (pout tout Q)

$$\Rightarrow \quad \left(Cu + \frac{CC}{Q_{TR}} + \frac{Cu.I}{2.d} . Q_{TR}\right)^2 - V\left(Cu + \frac{Cu.I}{d}.Q_{TR}\right) = 0$$

posons $\frac{Cu.I}{2.d} = K$

$$\Rightarrow \quad Cu^2 + \frac{CC^2}{Q^2_{TR}} + K^2.Q^2_{TR} + \frac{2.Cu.CC}{Q_{TR}} + 2.Cu.K.Q_{TR} + 2.CC.K - V.Cu - 2.V.K.Q_{TR} = 0$$

Multiplions par $Q^2_{TR} \neq 0$

$$\Rightarrow \quad Cu^2.Q^2_{TR} + CC^2 + K^2.Q^4_{TR} + 2.Cu.CC.Q_{TR} + 2.Cu.K.Q^3_{TR} + 2.CC.K.Q^2_{TR} - V.Cu.Q^2_{TR} - 2.V.K.Q^3_{TR} = 0$$

$$\Rightarrow \quad K^2.Q^4_{TR} - 2.K.(V-Cu).Q^3_{TR} + (Cu^2+2.CC.K-V.Cu).Q^2_{TR} + 2.Cu.CC.Q_{TR} + CC^2 = 0.$$

Or, $Y° = Cu + X = Cu + 2.K.Q^{*}$

posons $b = \dfrac{V-Cu}{Y°-Cu}$

$$V-Cu = b.(Y°-Cu) = 2.K.Q^{*}.b$$

posons $q = \dfrac{Q_{TR}}{Q^{*}} \qquad \Longrightarrow Q_{TR} = q.Q^{*}$

L'équation en Q_{TR} devient alors :

$$K^2.q^4.Q_{*}^4 - 2.K.(b.2.K.Q_{*}).q^3.Q_{*}^3 + (2.CC.K - 2.Cu.b.K.Q_{*}).q^2.Q_{*}^2$$

$$+ \quad 2.Cu.CC.q.Q_{*} + CC^2 \quad = \quad 0$$

$$K^2.Q_{*}^4.q^4 - 4.b.K^2.Q_{*}^4.q^3 + 2.K.Q_{*}^2\ (CC-Cu.b.Q^{*}).q^2 + 2.Cu.CC.Q_{*}.q$$

$$+ \ CC^2 \quad = \quad 0$$

Divisons par $K^2.Q_{*}^4 \quad \neq \quad 0$

$$q^4 - 4.b.q^3 + \left(2\ \frac{CC}{K.Q_{*}^2} - \frac{2.b.Cu}{K.Q^{*}}\right).q^2 + 2.\frac{Cu}{K.Q_{*}}.\ \frac{CC}{K.Q_{*}^2}.q$$

$$+ \left(\frac{CC}{K.Q_{*}^2}\right)^2 \quad = \quad 0$$

Or, $\dfrac{CC}{K.Q_{*}^2} = \dfrac{2.CC.d.Cu.I}{Cu.I.2.CC.d} = 1$

$$\Longrightarrow K = \frac{CC}{Q_{*}^2}$$

Posons $u = \dfrac{Cu}{K.Q_{*}} = \dfrac{Cu.Q_{*}}{CC}$

$$\Longrightarrow Cu = u.K.Q_{*}$$

L'équation devient alors :

$$q^4 - 4.b.q^3 + 2\,(1-b.u).q^2 + 2.u.q + 1 \quad = \quad 0$$

$$b\,(4.q^3 + 2.u.q^2) = q^4 + 2\,q^2 + 2.u.q + 1$$

$$b \quad = \frac{q^4 + 2.q^2 + 2.u.q + 1}{4\,q^3 + 2.u.q^2} \quad = \quad \frac{(q^2+1)^2 + 2.u.q}{2.q^2.(2q+u)}$$

$$= \frac{1}{2.\;(2q+u)} \;.\; \left[(q+\frac{1}{q})^2 + \frac{u.2}{q}\right]$$

$$= \frac{2}{2\,q + u}. \;\left[\frac{1}{4}.(q+\frac{1}{q})^2 + \frac{u}{2.q}\right]$$

Posons $p = \frac{1}{2}.\;(q+\frac{1}{q})$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{2}{2\,q\,+u}.\;(p^2 + \frac{u}{2.q})$$

$$\Longrightarrow \quad b.(2q+u) = 2p^2 + \frac{u}{q}$$

$$2\,q^2.b + u.b.q - 2\,p^2.q - u \quad = \quad 0$$

$$2\,b.q^2 + (b.u - 2p^2).q - u \quad = \quad 0$$ équation quadratique (5-1)

Avec : $p \rightarrow$ paramètre à déterminer ; $p = f(q)$

$q \rightarrow$ paramètre à déterminer ; $q = Q_{TR}/Q_{*}$

$u \rightarrow$ paramètre donné ; $u = \dfrac{Cu.Q^*}{CC}$

$b \rightarrow$ paramètre donné ; $b = \dfrac{V-Cu}{Y^{\circ}-Cu} = \dfrac{V-Cu}{2.K.Q^*}$

Si $u \to 0 \Rightarrow (5\text{-}1) : 2b.q^2 - 2p^2.q = 0$

$$\Rightarrow q = \frac{p^2}{b} \qquad (5\text{-}2)$$

Si $u \to \infty \Rightarrow (5\text{-}1)$, après division par u : $b.q-1 = 0$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{b} \qquad (5\text{-}3)$$

Donc $u \in \left]0, \infty\right[\Rightarrow q \quad \left]\frac{p^2}{b}, \frac{1}{b}\right[$

Par approximations successives, on peut obtenir une valeur approchée de q, qui vérifie l'équation (5-1) :

- Pour une valeur donnée de b, calculer par (5-3)

$$q = \frac{1}{b}$$

- Reporter cette valeur de q dans la définition de p :

$$p = \frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)$$

- Par (5-2), calculer $q = \frac{p^2}{b}$

- Reporter cette valeur de q dans la définition de p :

$$p = \frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)$$

- Itérer la procédure jusqu'au moment où l'on obtient une valeur convergente de p.

Ayant p, on peut obtenir $q = \frac{p^2}{b}$

et donc $Q_{TR} = q.Q^{*}$

ANNEXE 6. **La taille du lot déterminée par le critère de taux de rendement maximum, est inférieure à la quantité économique standard : $Q^{o}_{TR} < Q^{*}$**

$$TR = \frac{R}{tc} = \frac{(V-Y)}{Y} \cdot \frac{d}{Q} = d \cdot \left(\frac{V}{Y \cdot Q} - \frac{1}{Q}\right)$$

car $R = \frac{V-Y}{Y}$, et $tc = \frac{Q}{d}$ (voir annexe 2)

A l'optimum Q^{o}_{TR}, nous avons $\frac{\delta_{TR}}{\delta Q} = 0$ (condition du premier ordre : annulation de la dérivée première)

$$d \cdot \left[\frac{-V}{Y^{2} \cdot Q^{2}} \cdot \left(Cu + \frac{Cu \cdot I}{d} \cdot Q\right) + \frac{1}{Q^{2}}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad V \cdot \left(Cu + \frac{Cu \cdot I}{d} \cdot Q_{TR}\right) = Y^{2}$$

car $Y \neq 0$ et $Q \neq 0$

Or, $Y = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu \cdot I}{2 \cdot d} \cdot Q$ (pour tout Q)

$$\Longrightarrow \quad Cu + \frac{Cu \cdot I}{d} \cdot Q_{TR} = Y - \frac{CC}{Q_{TR}} + \frac{Cu \cdot I}{2 \cdot d} \cdot Q_{TR}$$

On a donc $V \cdot \left(Y - \frac{CC}{Q_{TR}} + \frac{Cu \cdot I}{2 \cdot d} \cdot Q_{TR}\right) = Y^{2}$

ou

$$\left[\frac{\frac{CC}{Q_{TR}} - \frac{Cu \cdot I}{2 \cdot d} \cdot Q_{TR}}{Y}\right] = 1 - \frac{Y}{V}$$

car $Y \neq 0$ et $V \neq 0$

Or, $Y < V \Rightarrow \frac{Y}{V} < 1$ (par hypothèse)

ou $1 - \frac{Y}{V} > 0$

Donc $$\frac{\frac{CC}{Q_{TR}} - \frac{Cu.I}{2.d}.\, Q_{TR}}{Y} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{CC}{Q_{TR}} - \frac{Cu.I}{2.d}.Q_{TR} > 0$$

$$\Rightarrow Q_{TR}^2 < \frac{2.CC.d}{Cu.I} \qquad (Q > 0)$$

$$\Rightarrow Q_{TR} < Q^*$$

ANNEXE 7. Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le rendement des stocks.

$$S = \frac{2\ d.(V-Y)}{Cu.Q}$$

$$= \frac{2.d}{Cu.Q}.\ (V-Cu - \frac{CC}{Q} - \frac{Cu.I.Q}{2.d})$$

$$= \frac{2.d}{Cu}.(\frac{V-Cu}{Q} - \frac{CC}{Q^2}) - I$$

Annulation de la dérivée première : $\frac{\delta S}{\delta Q} = 0$

$$\frac{2\ d}{Cu}\left[\frac{2.CC}{Q_S^3} - \frac{(V-Cu)}{Q_S^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2.CC}{Q_S} = (V-Cu) \qquad \text{car } Q > 0$$

$$\Rightarrow Q_S^{\circ} = \frac{2.CC}{V-Cu}$$

Condition du second ordre : $\frac{\delta^2 S}{\delta Q^2} < 0$

$$\frac{2.d}{Cu}\left[\frac{2.(V-Cu)}{Q^3} - \frac{6.CC}{Q^4}\right] < 0$$

$$\Rightarrow 2\ (V-Cu).Q - 6.CC < 0$$

$$\Rightarrow Q_S < \frac{3.CC}{(V-Cu)}$$

toujours vrai, puisque $Q_S = \frac{2.CC}{V-Cu}$

Valeur du rendement maximum des stocks :

$$S^\circ = \frac{2.d}{Cu} . \left[\frac{2(V-Cu)^2}{4.CC} - \frac{(V-Cu)^2}{4.CC} \right] - I$$

$$= \frac{2.d}{Cu} . \frac{(V-Cu)^2}{4.CC} - I$$

$$= I . \left[\frac{(V-Cu)^2 .d}{2.CC.Cu.I} - 1 \right]$$

$$= I . \left[\frac{(V-Cu)^2}{X^2} - 1 \right]$$

Expression de l'optimum Q_S° en fonction du standard Q^*.

$$\frac{Q_S^\circ}{Q^*} = \frac{2.CC}{(V-Cu)} . \sqrt{\frac{Cu.I}{2.CC.d}} = \sqrt{\frac{2.CC.Cu.I}{d}} . \frac{1}{(V-Cu)}$$

$$= \frac{X}{V-Cu}$$

$$\Longrightarrow \quad Q_S^\circ = \frac{X}{V-Cu} . Q^*$$

ANNEXE 8. Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le taux de rendement des stocks.

$$TS = \frac{2.d^2.(V-Y)}{Cu.Q^2} = \frac{2.d^2}{Cu}.\left[\frac{(V-Cu)}{Q^2} - \frac{CC}{Q^3} - \frac{Cu.I}{2.d.Q}\right]$$

Annulation de l a dérivée première : $\dfrac{\delta TS}{\delta Q} = 0$

$$\frac{2.d^2}{Cu}.\left[\frac{3.CC}{Q^4} + \frac{Cu.I}{2.d.Q^2} - \frac{2(V-Cu)}{Q^3}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Cu.I}{2.d}.Q^2 - 2.(V-Cu).Q + 3.CC = 0 \qquad (Q \neq 0)$$

$$\Rightarrow Q_{TS} = \frac{(V-Cu) \pm \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3.CC.Cu.I}{2.d}}}{\frac{Cu.I}{2.d}}$$

$$= \frac{2.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) \pm \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right]$$

Q_{TS} prendra une de ces deux valeurs, qui sont deux racines réelles positives. En effet :

$$V > Y \Rightarrow V > Y° \Rightarrow V > Cu+X$$

$$\Rightarrow V - Cu > X$$

$$\Rightarrow V - Cu > \frac{\sqrt{3}}{2}.X \Rightarrow (V-Cu)^2 > \frac{3}{4}.X^2$$

et $(V-Cu) > \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}$

La condition du second ordre détermine laquelle de ces deux valeurs de Q_{TS} est acceptable.

En effet : $\dfrac{\delta^2 TS}{\delta Q^2} < 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2.d^2}{Cu}.\left[\frac{6.(V-Cu)}{Q^4} - \frac{12.CC}{Q^5} - \frac{Cu.I}{d.Q^3}\right] < 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6.\,(V-Cu).Q - 12.CC - \frac{Cu.I.Q^2}{d} < 0 \qquad (Q > 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{Cu.I}{3.d}.Q^2 - 2.(V-Cu).Q + 4.CC \quad > 0$$

Cette inéquation sera positive (du signe de $\frac{Cu.I}{3.d}$) pour les valeurs de Q extérieures aux racines.

Ces racines sont :

$$L = \frac{(V-Cu) \pm \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{4.CC.Cu.I}{3.d}}}{\frac{Cu.I}{3.d}}$$

$$= \frac{3.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) \pm \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \cdot\ 2 \text{ valeurs de } Q_{TS} : Q_1 \text{ et } Q_2 \qquad (Q_1 < Q_2) \\ \cdot\ 2 \text{ valeurs limites: } L_1 \text{ et } L_2 \qquad (L_1 < L_2) \end{cases}$$

Ce sont :

$$Q_1 = \frac{2.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right]$$

$$Q_2 = \frac{2.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) + \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right]$$

$$L_1 = \frac{3.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

$$L_2 = \frac{3.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) + \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

Le seul Q_{TS} admis sera celui qui est inférieur à L_1 ou supérieur à L_2.

En fait, on a la situation $Q_1 < L_1 < Q_2 < L_2$ et donc seul Q_1 est acceptable.

En effet : (posons $V - Cu = A$)

$\underline{Q_1 < L_1}$

$$\frac{2.d}{Cu.I}.\left[A - \sqrt{A^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right] < \frac{3.d}{Cu.I}.\left[A - \sqrt{A^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

$$2\,A - \sqrt{4A^2 - 3X^2} < 3\,A - \sqrt{9A^2 - 6X^2}$$

$$\underbrace{-\,A + \sqrt{9A^2 - 6X^2}}_{> 0} < \sqrt{4A^2 - 3X^2}$$

> 0 car $V > Y° \Rightarrow V > Cu + X$

$\Rightarrow V - Cu > X \Rightarrow A > X$

$\Rightarrow A^2 > X^2 \Rightarrow 6A^2 - 6X^2 > 0$

$\Rightarrow 3A^2 + 6A^2 - 6X^2 > 3A^2$

$\Rightarrow \sqrt{9A^2 - 6X^2} > \sqrt{3}.\,A$

$\Rightarrow -\,A + \sqrt{9A^2 - 6X^2} > (\sqrt{3}-1)A > 0$

Nous pouvons donc élever au carré

$$\Longrightarrow \quad 4\,A^2 - 3\,X^2 > A^2 + 9\,A^2 - 6\,X^2 - 2.A.\sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2}$$

$$2.A.\sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2} > \underbrace{6\,A^2 - 3\,X^2}_{> 0}$$

> 0 car $A > X$

Elevons au carré :

$$4.A^2.(9A^2 - 6X^2) > 36.A^4 + 9.X^4 - 36.A^2.X^2$$

$$36.A^4 - 24.A^2.X^2 > 36.A^4 + 9.X^4 - 36.A^2.X^2$$

$$9.X^4 - 12.A^2.X^2 < 0$$

$3X^2 < 4A^2$? oui, car $A > X$

$$\Rightarrow Q_1 < L_1.$$

$\underline{Q_2 > L_1}$

$$\frac{2.d}{Cu.I}.\left[A - \sqrt{A^2 - \frac{3}{4}X^2}\right] > \frac{3.d}{Cu.I}.\left[A - \sqrt{A^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

$$2A + \sqrt{4A^2 - 3X^2} > 3A - \sqrt{9A^2 - 6X^2}$$

$$\sqrt{4A^2 - 3X^2} > A - \sqrt{9A^2 - 6X^2}$$

$$\sqrt{4A^2 - 3X^2} + \sqrt{9A^2 - 6X^2} > A$$

2 membres positifs ; nous pouvons élever au carré.

$$4A^2 - 3X^2 + 9A^2 - 6X^2 + 2.\sqrt{4A^2 - 3X^2}.\sqrt{9A^2 - 6X^2} > A^2$$

$$\underbrace{12.A^2 - 9X^2}_{>0 \quad \text{car } A > X} + 2.\sqrt{4A^2 - 3X^2}.\sqrt{9A^2 - 6X^2} > 0$$

$$\Longrightarrow L_1 < Q_2$$

Jusqu'à présent, nous avons donc $Q_1 < L_1 < Q_2$

$\underline{Q_2 < L_2}$

$$\frac{2.d}{Cu.I}.\left[A - \sqrt{A^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right] < \frac{3.d}{Cu.I}.\left[A + \sqrt{A^2 - \frac{2}{3}.X^2}\right]$$

$$2\,A - \sqrt{4\,A^2 - 3\,X^2} < 3\,A + \sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2}$$

$$\sqrt{4\,A^2 - 3\,X^2} < A + \sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2}$$

2 membres positifs ; élévation au carré.

$$4\,A^2 - 3\,X^2 < A^2 + 9\,A^2 - 6\,X^2 + 2\,A.\sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2}$$

$$\underbrace{6\,A^2 - 3\,X^2}_{>0 \quad \text{car } A > X} + 2\,A.\sqrt{9\,A^2 - 6\,X^2} > 0$$

$$\Rightarrow Q_2 < L_2$$

Ainsi donc, au total, $Q_1 < L_1 < Q_2 < L_2$

Et Q_1 est la seule valeur acceptable.

$$\Rightarrow \quad Q_{TS} = \frac{2.d}{Cu.I}.\left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2}\right]$$

ANNEXE 9. La taille du lot déterminée par le critère de rendement des stocks est supérieure à celle du critère de taux de rendement des stocks, et inférieure au standard : $Q_{TS} < Q_S < Q_*$

$Q_{TS} < Q^*$

$$\frac{2.d}{Cu.I} . \left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2} \right] < \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$$

$$(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2} < \sqrt{\frac{2.CC.Cu.I}{d}} . \quad \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{(V-Cu) - \frac{X}{2}}_{>0 \quad \text{car} \quad V > Cu + X} < \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}.X^2}$$

Elevons au carré.

$$(V-Cu)^2 + \frac{X^2}{4} - X.(V-Cu) < (V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2$$

$$X^2 - X.(V-Cu) < 0$$

$X < V-Cu$ $\longrightarrow$ toujours vrai par hypothèse.

$Q_{TS} < Q_S$

$$Q_{TS} < \frac{2.CC}{(V-Cu)}$$

$$(V-Cu).Q_{TS} < 2.CC$$

$$4.CC - 2.(V-Cu).Q_{TS} > 0$$

Or, $\frac{\delta_{TS}}{\delta Q} = 0 \Rightarrow \frac{Cu.I}{2.d} . Q_{TS}^2 - 2.(V-Cu).Q_{TS} + 3.CC = 0$
(voir annexe 8)

$$\Rightarrow 4.CC - 2.(V-Cu).Q_{TS} = CC - \frac{Cu.I}{2.d} . Q_{TS}^2$$

Il faut donc que :

$$CC - \frac{Cu.I}{2.d} . Q_{TS}^2 > 0$$

ou $\frac{2.CC.D}{Cu.I} > Q_{TS}^2$

ou $Q_M^2 > Q_{TS}^2$, ce qui est vrai et a été démontré ci-avant.

ANNEXE 10. Recherche des zones de recouvrement, par comparaison deux à deux, des quantités économiques.

Q^* et $Q^o_{P_q}$

$$Q^o_{P_q} = \frac{(V-Cu)}{X} . Q^*$$

$$Q^o_{P_q} = Q^* \implies V-Cu = X$$

c'est-à-dire $V = Cu + X = Y^o$

or, $V > Y$ par hypothèse.

Donc pas de recouvrement.

Q^* et Q^o_S

$$Q^o_S = \frac{X}{(V-Cu)} . Q^*$$

$Q^o_S = Q^*$ si et seulement si $V - Cu = X$, ce qui est impossible.

Donc pas de recouvrement.

Q^* et Q^o_{TS}

$Q^o_{TS} = Q^*$

si et seulement si $\sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}} = \frac{2.d}{Cu.I} . \left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2} \right]$

ou $\frac{1}{2} . \sqrt{\frac{2.CC.Cu.I}{d}} = (V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2}$

ou $(V-Cu) - \frac{X}{2} = \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2}$

Elevons au carré ; il faudrait donc que

$$(V-Cu)^2 + \frac{X^2}{4} - X(V-Cu) = (V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2$$

$$X^2 - X(V-Cu) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{soit } X = 0 \quad (\Rightarrow Q = 0 \text{ ou } \infty), \text{ impossible} \\ \text{soit } X = V-Cu, \text{ impossible par hypothèse.} \end{cases}$$

Donc pas de recouvrement.

$Q^o_{P_q}$ et Q^o_S

Pour que $Q^o_{P_q} = Q^o_S$, il faut que

$$\frac{(V-Cu)}{X} . Q^* = \frac{X}{(V-Cu)} . Q^*$$

$$\Rightarrow V-Cu = X \text{ , impossible}$$

Donc pas de recouvrement.

$Q^o_{P_q}$ et Q^o_{TS}

Pour que $Q^o_{P_q} = Q^o_{TS}$, il faut que

$$\frac{(V-Cu)}{Cu.I} . d = \frac{2.d}{Cu.I} . \left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2} \right]$$

$$\Rightarrow V-Cu = 2 \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4} X^2}$$

Elevons au carré :

$$\Rightarrow (V-Cu)^2 = 4(V-Cu)^2 - 3\,X^2$$

$$\Rightarrow 3\,(V-Cu)^2 = 3\,X^2$$

$$\Rightarrow V-Cu = \pm X \quad \text{impossible.}$$

Pas de recouvrement.

<u>Q^o_S et Q^o_{TS}</u>

Pour que $Q^o_S = Q^o_{TS}$, il faut :

$$\frac{2.CC}{(V-Cu)} = \frac{2.d}{Cu.I}\left[(V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}\right]$$

$$\frac{2.CC.Cu.I}{d} \cdot \frac{1}{2.(V-Cu)} = (V-Cu) - \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}$$

$$\frac{X^2}{2.(V-Cu)} - (V-Cu) = -\sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}$$

$$2.(V-Cu)^2 - X^2 = 2(V-Cu)\sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2}$$

Elevons au carré :

$$4.\,(V-Cu)^4 + X^4 - 4.(V-Cu)^2.X^2 = 4.(V-Cu)^2.\left[(V-Cu)^2 - \frac{3}{4}X^2\right]$$

$$X^4 - 4.(V-Cu)^2.X^2 = -3.(V-Cu)^2.X^2$$

$$X^4 = (V-Cu)^2.X^2$$

$$X^2 = (V-Cu)^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = 0 \quad ou \\ (V-Cu) = \pm X \end{array}\right\} \rightarrow \text{impossible.}$$

Donc pas de recouvrement.

ANNEXE 11.

Recherche de la quantité économique optimale, qui minimise le coût unitaire, en cas d'approvisionnement à taux constant.

$$Y_2 = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.\ I.\ s.\ Q}{2.d}$$

Annulation de la dérivée première et dérivée seconde positive (cfr. annexe 1) sont les conditions qui fournissent l'optimum :

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I.s}} = \frac{Q^*}{\sqrt{s}} \qquad Q_2^* > Q^* \quad (\text{car } s < 1)$$

$$Y_2^o = Cu + X_2 \quad \text{avec } X_2 = \sqrt{\frac{2.CC.Cu.I.s}{d}} = \sqrt{s}.X$$

$$X_2 < X$$

Donc $Y_2^o < Y^o$

La différence est de $Y^o - Y_2^o = X - X_2$

$$= X(1-\sqrt{s})$$

N.B. Le détail des calculs de cette annexe et des suivantes n'est pas repris lorsqu'il est identique (à "s" près) à celui d'annexes précédentes.

Annexe 12.

Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le profit par série, en cas d'approvisionnement à taux constant.

$$Pq_2 = (V-Y_2).\ Q$$

$$= (V-Cu).Q - CC - \frac{Cu.I.s}{2.d}.\ Q^2$$

L'optimum est (voir annexe 4) :

$$Q^o_{Pq2} = \frac{(V-Cu).d}{Cu.I.s} = \frac{(V-Cu)}{X_2}\ .\ Q^{*}_{2}$$

$$= \frac{1}{s}.Q^o_{Pq} > Q^o_{Pq}$$

Valeur du profit maximum par série (Cfr annexe 4)

$$Pq^o_2 = \frac{d}{2.Cu.I.s}\ .\left[(V-Cu)^2 - \frac{2.CC.Cu.I.s}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2.Cu.I.s}\ .\left[(V-Cu)^2 - X_2^2\right]$$

$$= \frac{Q^{*2}_{2}}{2.X_2}\cdot\left[(V-Cu)^2 - X_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{s}\ .\ Pq^o \Rightarrow Pq^o_2 > Pq^o$$

L'écart relatif est $E_{Pq} = \frac{Pq^o_2 - Pq^o}{Pq^o} = \frac{1}{s} - 1 = \frac{p}{p-d} - 1 = \frac{d}{p-d}.$

ANNEXE 13.

Recherche de la quantité économique optimale, qui maximise le rendement des stocks, en cas d'approvisionnement à taux constant. (cfr annexe 7).

$$S_2 = \frac{2.d}{Cu.s} \cdot \left(\frac{V-Cu}{Q} - \frac{CC}{Q^2}\right) - I$$

$$Q^o_{S2} = \frac{2.CC}{V-Cu} = Q^o_S$$

$$S^o_2 = \frac{2d}{Cu.s} \cdot \frac{(V-Cu)^2}{4\ CC} - I = I.\left[\frac{(V-Cu)^2}{X_2^2} - 1\right]$$

La différence ($S^o_2 > S^o$) est de :

$$S^o_2 - S^o = \frac{(V-Cu)^2.I}{s.X^2} - I - \frac{(V-Cu)^2.I}{X^2} + I$$

$$= \frac{I.(V-Cu)^2}{X^2} \cdot \left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

$$= \frac{I.(V-Cu)^2}{X^2} \cdot \frac{d}{(p-d)}$$

On a également $Q^o_{S2} = \frac{X_2}{(V-Cu)} \cdot Q^*_2$

ANNEXE 14.

Recherche de la quantité économique optimale, et du niveau de recomplètement, répondant au critère de coût minimum par pièce, en cas de rupture des stocks.

$$Y_3 = Cu + \frac{CC}{Q} + \frac{Cu.I}{d}.\frac{M^2}{2Q} + \frac{r}{d}.\frac{(Q-M)^2}{2Q}$$

Annulation des dérivées premières : $\frac{\partial Y_3}{\partial Q} = 0$ et $\frac{\partial Y_3}{\partial M} = 0$

a) $$\frac{\partial Y_3}{\partial Q} = -\frac{CC}{Q^2} - \frac{Cu.I.M^2}{2Q^2.d} + \frac{2\,r.Q.(Q-M) - r.(Q-M)^2}{2\,d.Q^2}$$

$$\equiv \frac{1}{2\,d.Q^2}.\left[-2\,CC.d - Cu.I.M^2 + r.(Q-M).(Q+M)\right]$$

$$= \frac{1}{2\,d.Q^2}.\left[-2\,CC.d - Cu.I.M^2 + r.Q^2 - r.M^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\,d.Q^2}.\left[r.Q^2 - 2\,CC.d - (Cu.I+r).M^2\right]$$

Annulons cette dérivée

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2\,CC.d}{r} - \frac{(Cu.I+r).M^2}{r}$$

b) $$\frac{\partial Y_3}{\partial M} = \frac{Cu.I.M}{d.Q} - \frac{r.(Q-M)}{d.Q}$$

$$= \frac{1}{d.Q}.(Cu.I.M - r.Q + r.M)$$

$$= \frac{1}{d.Q}.\left[(Cu.I+r).M - r.Q\right]$$

Annulons cette dérivée

$$\Longrightarrow M^o = \frac{r}{Cu.I+r}.Q^o$$

c) Reportons cette valeur de M^o dans l'expression de Q, trouvée en (a). Il vient alors :

$$Q^2 = \frac{2.CC.d}{r} + \frac{(Cu.I+r)}{r} . \frac{r^2}{(Cu.I+r)^2} . Q^2$$

$$Q^2 . (1 - \frac{r}{Cu.I+r}) = \frac{2.CC.d}{r}$$

$$Q^2 = \frac{2.CC.d}{r} . \frac{(Cu.I+r)}{Cu.I}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2.CC.d.(Cu.I+r)}{Cu.I.r}} = \frac{1}{k} . \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}} = \frac{Q^*}{k}$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2.CC.d.r}{Cu.I.(Cu.I+r)}} = k . \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}} = k.Q^*$$

$$\text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{r}{Cu.I+r}} \quad ; \quad 0 < k < 1$$

N.B. $$M^* . Q_3^* = \frac{2.CC.d}{Cu.I}$$

$$M^* / Q_3^* = k^2 = \frac{r}{Cu.I+r}$$

d) Les <u>conditions du second ordre</u> sont vérifiées. En effet :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial Q^2} = \frac{2.CC}{Q^3} + \frac{2.(Cu.I+r).M^2}{Q^3} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial M^2} = \frac{Cu.I + r}{d.Q} > 0$$

e) <u>A l'optimum (Q_3^o, M^o), le coût minimum sera</u> :

$$Y_3^o = Cu + \frac{1}{2d.Q_3^o} . \left[2.CC.d + (Cu.I+r).M^{*2} + r.Q^{*2} - 2r.M^*.Q^* \right]$$

$$Y_3^{*} = Cu + \frac{1}{2d.Q_3^o}.\left[2\,CC.d + \frac{2\,CC.d.r}{Cu.I} + \frac{2\,CC.d.(Cu.I+r)}{Cu.I} - \frac{2.r.2.CC.d}{Cu.I}\right]$$

$$= Cu + \frac{CC}{Q_3^o}.\left[1 + \frac{Cu.I}{Cu.I}\right]$$

$$= Cu + 2\,CC.\sqrt{\frac{Cu.I.r}{2\,CC.d.(Cu.I+r)}}$$

$$= Cu + \sqrt{\frac{2\,CC.Cu.I.r}{d.(Cu.I+r)}}$$

$$= Cu + k.X$$

$$= Cu + X_3 \qquad \text{avec } X_3 = k.X$$

ANNEXE 15.

Recherche de la quantité économique et du niveau de recomplètement qui répondent au critère de profit maximum par série, en cas de rupture des stocks.

$$Pq_3 = (V-Y).Q$$

$$= (V-Cu).Q - CC - \frac{Cu.I}{2d}.M^2 - \frac{r}{2\ d}.(Q-M)^2$$

$$= (V-Cu).Q - CC - \frac{(Cu.I+r)}{2d}.M^2 - \frac{r}{2\ d}.Q^2 + \frac{r}{d}.Q.M$$

Annulation des dérivées premières :

a) $$\frac{\partial Pq}{\partial Q} = (V-Cu) - \frac{r}{d}.(Q-M) = 0$$

$$\Rightarrow (Q-M) = \frac{(V-Cu).d}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{d}.Q = (V-Cu) + \frac{r}{d}.M$$

b) $$\frac{\partial Pq}{\partial M} = \frac{r}{d}.Q - \frac{(Cu.I+r)}{d}.M = 0$$

Par (a), il vient alors :

$$(V-Cu) + \frac{r}{d}.M - \frac{(Cu.I+r)}{d}.M = 0$$

$$\Longrightarrow M^o_{Pq} = \frac{d.(V-Cu)}{Cu.I}$$

et $$Q^o_{Pq3} = \frac{(V-Cu).d}{r} + \frac{(V-Cu).d}{Cu.I}$$

$$= \frac{d.(V-Cu)}{Cu.I}.\frac{(Cu.I+r)}{r}$$

c) Remarquons que $M^o_{Pq} = Q^o_{Pq}$

$$Q^o_{Pq3} = \frac{1}{k^2}.Q^o_{Pq} > Q^o_{Pq}$$

$$M^o_{Pq}/Q^o_{Pq3} = k^2 = \frac{r}{Cu.I+r}$$

d) Les conditions du second ordre sont vérifiées. En effet :

$$\frac{\partial^2 Pq}{\partial Q^2} = -\frac{r}{d} < 0$$

$$\frac{\partial^2 Pq}{\partial K^2} = -\frac{Cu.I+r}{d} < 0$$

e) Valeur optimale du profit par série :

$$Pq_3^o = (V-Cu).Q - CC - \frac{(Cu.I+r)}{2d}.M^2 - \frac{r}{2\ d}.Q^2 + \frac{r}{d}.Q.M$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{Cu.I}.\frac{1}{k^2} - CC - \left[\frac{r^2}{2d.(Cu.I+r)} + \frac{r}{2d} - \frac{r}{d}.k^2\right].Q^2$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{Cu.I}.\frac{1}{k^2} - CC - \frac{r}{2d}.\left[\frac{r}{Cu.I+r} + 1 - \frac{2r}{Cu.I+r}\right].Q^2$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{Cu.I}.\frac{1}{k^2} - CC - \frac{r}{2d}.\frac{Cu.I}{(Cu.I+r)}.\frac{d^2.(V-Cu)^2}{(Cu.I)^2.k^4}$$

$$= \frac{(V-Cu)^2.d}{Cu.I}.\frac{1}{k^2}.(1 - \frac{1}{2}) - CC$$

$$= \frac{d}{2\ Cu.I.k^2}.\left[(V-Cu)^2 - \frac{2\ CC.Cu.I.k^2}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2\ Cu.I.k^2}.\left[(V-Cu)^2 - k^2.X^2\right]$$

$$= \frac{Q_3^*}{2.X_3}.\left[(V-Cu)^2 - X_3^2\right]$$

f) $Pq_3^o > Pq^o$; en effet :

$$1 > k$$

$$\Longrightarrow (V-Cu)^2 > k^2.(V-Cu)^2$$

$$\Longrightarrow (V-Cu)^2 - k^2.x^2 > k^2.\left[(V-Cu)^2 - x^2\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k^2}.\left[(V-Cu)^2 - k^2.x^2\right] > \left[(V-Cu)^2 - x^2\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{2\ Cu.I.k^2}.\left[(V-Cu)^2 - k^2.x^2\right] > \frac{d}{2\ Cu.I}.\left[(V-Cu)^2 - x^2\right]$$

Donc, $Pq_3^o > Pq^o$.

ANNEXE 16.

Recherche du rendement maximum des stocks en cas de rupture des stocks

$$S_3 = \frac{Pq_3}{\text{Valeur Stm}} = \frac{(V-Y).Q.2.Q}{Cu.M^2.\ tc}$$

$$= \frac{2.d.(V-Y).Q}{Cu.M^2} \qquad \left(\text{Rappel : } tc = \frac{T}{N} = \frac{Q}{d}\right)$$

$$= \frac{2.d}{Cu}.\left[\frac{(V-Cu).Q}{M^2} - \frac{CC}{M^2} - \frac{Cu.I.}{2.d} - \frac{r.(Q-M)^2}{2.d.M^2}\right]$$

$$= \frac{2.d}{Cu}.\left[\frac{(V-Cu).Q}{M^2} - \frac{CC}{M^2} - \frac{Cu.I}{2.d} - \frac{r.Q^2}{2.d.M^2} - \frac{r}{2.d} + \frac{r.Q}{d.M}\right]$$

$$= \frac{2.d}{Cu}.\left[\frac{(V-Cu).Q}{M^2} - \frac{CC}{M^2} - \frac{(Cu.I+r)}{2.d} - \frac{r.Q^2}{2.d.M^2} + \frac{r.Q}{d.M}\right]$$

Annulation des dérivées premières.

a) $$\frac{\partial S_3}{\partial Q} = \frac{2.d}{Cu}.\left[\frac{(V-Cu)}{M^2} - \frac{r.Q}{d.M^2} - \frac{r}{d.M}\right]$$

$$= \frac{2.}{Cu.M^2}\left[d.(V-Cu) - r(Q-M)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad (Q-M) = \frac{d.(V-Cu)}{r}$$

b) $$\frac{\partial S^3}{\partial M} = \frac{2.d}{Cu.M^3}\left[- 2(V-Cu).Q+2.CC+ \frac{r.Q}{d}.(Q-M)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{d}.(Q-M).Q + 2\ CC - 2.(V-Cu).Q = 0$$

Remplaçons (Q-M) par sa valeur trouvée en (a) :

$$\Longrightarrow (V-Cu).Q + 2.CC - 2.(V-Cu).Q = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Q^o_{S3} = \dfrac{2.CC}{(V-Cu)} \quad \text{et} \\ M^o_S = \dfrac{2.CC}{(V-Cu)} - \dfrac{d.(V-Cu)}{r} \end{cases}$$

c) Les conditions du second ordre sont remplies. En effet :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} = - \frac{2\ r}{Cu.M^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial M^2} = \frac{2\ d}{Cu.M^4}.\left[6.(V-Cu).Q - 6\ CC - \frac{3r.Q^2}{d} + \frac{2\ r.Q.M}{d}\right]$$

$$= \frac{2\ d}{Cu.M^4}.\left[6.(V-Cu).Q - 6.CC - \frac{2r.Q}{d}.(Q-M) - \frac{r.Q^2}{d}\right]$$

$$= \frac{2\ d}{Cu.M^4}.\left[12.CC - 6.CC - 2.Q.(V-Cu) - \frac{r.4.CC^2}{d.(V-Cu)^2}\right]$$

$$= \frac{4\ d}{Cu.M^4}.\left[CC - \frac{2\ r.CC^2}{d.(V-Cu)^2}\right]$$

$$= \frac{4\ CC.d}{Cu.M^4}.\left[1 - \frac{2\ CC}{(V-Cu).(Q-M)}\right]$$

$$= \frac{4.CC.d}{Cu.M^4} . \left[1 - \frac{Q}{Q-M} \right]$$

$$= \frac{4.CC.d}{Cu.M^4} . \left(\frac{-M}{Q-M} \right) < 0$$

d) Valeur du rendement des stocks à l'optimum :

$$S_3° = \frac{2.d}{Cu} . \frac{1}{M^2} . \left[(V-Cu).Q° - CC - \frac{r(Q°-M°)^2}{2r} \right] - I$$

$$= \frac{2.d}{Cu} . \frac{1}{M^2} . \left[CC - \frac{d(V-Cu)^2}{2r} \right] - I$$

$$= \frac{2.d}{Cu} . \frac{1}{M^2} . \frac{(V-Cu)}{2} . \left[\frac{2.CC}{(V-Cu)} - \frac{d(V-Cu)}{r} \right] - I$$

$$= \frac{d(V-Cu)}{Cu} . \frac{1}{M} - I$$

$$= \frac{r.d.(V-Cu)^2}{Cu. \left[2.CC.r-d.(V-Cu)^2 \right]} - I$$

e) Comparaison entre $S_3°$ et $S°$

$$S° = \frac{2d}{Cu} . \frac{(V-Cu)^2}{4\ CC} - I$$

$$S_3^o \gtrless S^o \quad ?$$

$$\frac{2d}{Cu} \cdot \frac{(V-Cu)}{2} \cdot \frac{1}{M} - I \gtrless \frac{2d}{Cu} \cdot \frac{(V-Cu)^2}{4\ CC} - I$$

$$\frac{(V-Cu)}{2M} \gtrless \frac{(V-Cu)^2}{4\ CC}$$

$$\frac{2\ CC}{(V-Cu)} \cdot \frac{1}{M} \gtrless 0$$

Donc $S_3^o > S^o$ si et seulement si $M^o > 0$

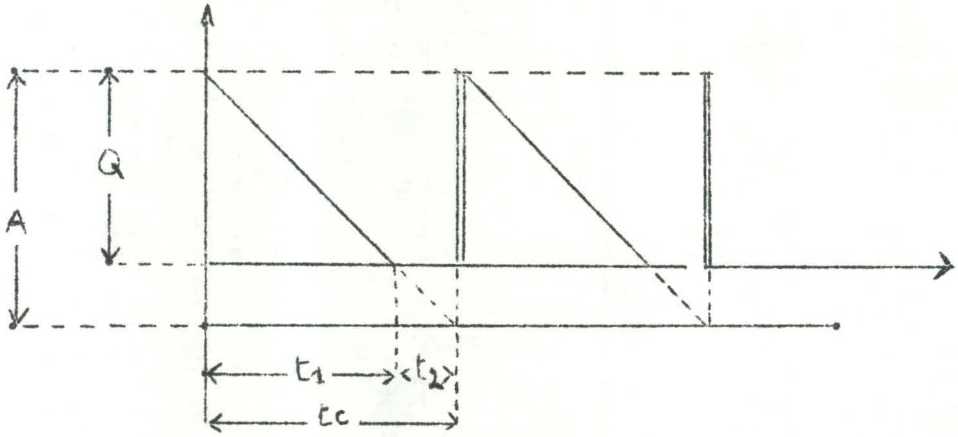
C'est-à-dire si $r < \frac{d.(V-Cu)^2}{2\ CC}$

N.B. Il faut $M > 0$, sinon $S^o < 0$.

ANNEXE 17.

Extension rupture permise des stocks ; cas des ventes perdues.

Les différences avec le cas des ventes différées apparaissent sur le graphique suivant :



$$Stm = \frac{Q.t1}{2.tc} = \frac{Q}{2}.\frac{Q}{A} = \frac{Q^2}{2A}$$

$$Rpm = \frac{(A-Q)}{2}.\frac{t2}{tc} = \frac{(A-Q)}{2}.\frac{(A-Q)}{A} = \frac{(A-Q)^2}{2A}$$

or, A est la demande durant un cycle $\Rightarrow A = d.tc$

$$Y = Cu + \frac{CC}{d.tc} + \frac{Cu.I}{d}.\frac{Q^2}{2d.tc} + \frac{r}{d}.\frac{(d.tc - Q)^2}{2\ d.tc}$$

Les raisonnements sont analogues à ceux des ventes différées

$$Q_3^* = k.\sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} \quad ; \quad Q_3^* = k.Q^* < Q^*$$

$$d.tc = \frac{1}{k}.\sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}} \Rightarrow tc = \frac{1}{k}.\sqrt{\frac{2\ CC}{Cu.I.d}}$$

N.B. Le coût de rupture sera cependant différent : il ne renfermera plus, par exemple, les frais d'envoi rapide, mais devra tenir compte du manque à gagner.

ANNEXE 18.

Prix de vente non fixé.

$$Pt = (V-Y).d$$

$$= V.d - Cu.d - \frac{CC.d}{Q} - \frac{Cu.I}{2}.Q$$

$$\frac{\partial Pt}{\partial Q} = 0$$

$$\Longrightarrow Q = \sqrt{\frac{2.CC.d}{Cu.I}}$$

Reportons cette valeur de Q dans l'expression de Pt :

$$Pt = V.d - Cu.d - \sqrt{\frac{CC.Cu.I.d}{2}} - \sqrt{\frac{CC.Cu.I.d}{2}}$$

$$= V.d - Cu.d - \sqrt{2.CC.Cu.I.d}$$

Or, $d = a.V + b$

$$Pt = (a.V+b).V - Cu.(a.V+b) - \sqrt{2.CC.Cu.I.(a.V+b)}$$

$$\frac{\partial Pt}{\partial V} = 0$$

$$\Longrightarrow 2a.V+b - Cu.a-a\sqrt{\frac{CC.Cu.I}{2.(a.V+b)}} = 0$$

$$\Longrightarrow 2a.V+b - Cu.a = a\sqrt{\frac{CC.Cu.I}{2(a.V+b)}}$$

après élévation au carré, on a :

$$4\,a^2\,V^2 + b^2 + Cu^2\,a^2 + 4\,a\,b\,V - 4\,Cu\,a^2\,V - 2\,Cu\,a\,b$$

$$= \frac{a^2\,CC\,Cu\,I}{2\,(a.V+b)}$$

ou encore

$$8\,a^3\,V^3 + 2\,a\,V^2\,Y + 2\,Cu^2\,a^3\,V + 8\,a^2\,b\,V^2 - 8\,Cu\,a^3 V^2$$
$$- 4\,Cu\,a^2\,V + 8\,a^2\,b\,V^2 + 2\,b^3 + 2\,Cu^2\,a^2\,b$$
$$+ 8\,a\,b^2\,V - 8\,Cu\,a^2\,b\,V - 4\,Cu\,a\,b^2$$
$$- a^2\,CC\,Cu\,I = 0$$

Donc

$$8\,a^3\,V^3 + (16\,a^2\,b - 8\,Cu\,a^3).V^2 + (10\,a\,b^2 - 12\,Cu\,a^2 b$$
$$+ 2\,Cu^2\,a^3).V + (2\,b^3 - 4\,Cu\,a\,b^2 + 2\,Cu^2\,a^2 b$$
$$- CC\,Cu\,I\,a^2) = 0$$

La résolution de cette équation du troisième degré en V fournira la valeur optimale V° du prix de vente.

$$\Longrightarrow d^o = a.V^o + b$$

$$\text{et} \quad Q^o = \sqrt{\frac{2\,CC.d^o}{Cu.I}}$$

ANNEXE 19.

Spécification de la taille des lots, dans le cas d'une gamme de n articles.

L'équation du coût unitaire est :

$$Y_i = Cu_i + \frac{CC_i}{Q_i} + \frac{Cu_i . I.}{2.d_i} . Q_i$$

$$Y = \sum_i (Y_i)$$

N.B. On suppose que I est le même pour tous les articles. Cette hypothèse ne change rien à l'analyse.

Critère de coût unitaire minimum.

$$Y = \sum_i (Y_i) = \sum_i Cu_i + \sum_i \frac{CC_i}{Q_i} + \sum_i \left(\frac{Cu_i . I . Q_i}{2\, d_i} \right)$$

Or, on désire que pour tout i, $Q_i = g_i . Q_1$

$$Y = \sum_i Cu_i + \frac{1}{Q_1} . \sum_i \left(\frac{CC_i}{g_i} \right) + Q_1 \sum_i \left(\frac{Cu_i . I . g_i}{2 . d_i} \right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Q_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial Q_1^2} > 0$$

$$\Longrightarrow Q_1 = \sqrt{\frac{\sum_i \left(\frac{CC_i}{g_i} \right)}{\sum_i \left(\frac{Cu_i . I . g_i}{2\, d_i} \right)}}$$

Critère de profit maximum par gamme.

$$Pq = \sum_i Q_i.(V_i - Y_i)$$

$$= Q_1 . \sum_i g_i.(V_i - Cu_i) - \sum_i CC_i - Q_1^2 . \sum_i \frac{Cu_i . I . g_i}{2\, d_i}$$

$$\frac{\delta Pq}{\delta Q_1} = 0 \qquad \frac{\delta^2 Pq}{\delta Q_1^2} < 0$$

$$\Longrightarrow Q_1^o = \frac{\sum_i g_i . (V_i - Cu_i)}{\sum_i \frac{Cu_i . I . g_i}{2\, d_i}} \quad \text{et } Q_i^o = g_i . Q_1^o$$

Critère de rendement maximum de la gamme :

$$R = \frac{\sum_i Q_i (V_i - Y_i)}{\sum_i Q_i Y_i} = \frac{\sum_i Q_i V_i}{\sum_i Q_i Y_i} - 1$$

$$= \frac{Q_1}{Q_1} \left[\frac{\sum_i g_i V_i}{\sum_i g_i Y_i} \right] - 1 = \frac{\sum_i g_i V_i}{\sum_i g_i Y_i} - 1$$

R maximum $\Rightarrow \sum_i g_i . Y_i$ minimum.

$$\frac{\delta\, g_i Y_i}{\delta\, Q_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2\, g_i Y_i}{\delta\, Q_1^2} > 0$$

$$Q_1^o = \sqrt{\frac{\sum CC_i}{\sum \left(\frac{Cu_i . I}{2\, d_i} . g_i^2 \right)}} \qquad \text{et} \quad Q_i^o = g_i . Q_1^o$$

Critère de rendement des stocks pour toute la gamme.

$$S = \sum_i \left(\frac{2 . d_i (V_i - Y_i)}{Cu_i . Q_i} \right)$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{2\ d_i}{Cu_i} . \left[\frac{(V_i - Cu_i)}{Q_i} - \frac{CC_i}{Q_i^2} \right] - I \right\}$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{2\ d_i}{Cu_i} . \left[\frac{(V_i - Cu_i)}{g_i . Q_1} - \frac{CC_i}{g_i^2 . Q_1^2} \right] - I \right\}$$

$$\frac{\delta S}{\delta Q_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum \left\{ \frac{2\ d_i}{Cu_i} . \left[\frac{2\ CC_i}{g_i^2 . Q_1^3} - \frac{(V_i - Cu_i)}{g_i . Q_1^2} \right] \right\} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_i \frac{2\ CC_i . d_i}{Cu_i . g_i^2} - Q_1 \sum_i \frac{d_i . (V_i - Cu_i)}{Cu_i . g_i} = 0$$

$$Q_1 = \frac{\displaystyle\sum_i \frac{2\ CC_i\ d_i}{Cu_i . g_i^2}}{\displaystyle\sum_i \frac{d_i (V_i - Cu_i)}{Cu_i . g_i}}$$

ANNEXE 20.

Recherche du stock de sécurité (dans le cas d'une distribution rectangulaire de la demande).

$$\overline{R_L} = \int_P^{\infty} (D_L - P) . \, dF_L(D_L)$$

$$= \int_P^{\overline{D_L}+h} \frac{1}{2h} . (D_L - P) . d(D_L) + \int_{\overline{D_L}+h}^{\infty} 0 . d(D_L)$$

$$= \frac{1}{2h} . \int_P^{\overline{D_L}+h} (D_L - P) . d(D_L) = \frac{1}{2h} . \left[\frac{(D_L - P)^2}{2} \right]_P^{\overline{D_L}+h}$$

$$= \frac{1}{2h} . \left[\frac{(\overline{D_L}+h-P)^2}{2} \right]$$

or, $\overline{D_L} - P = - F_s . B_L$

et $h = \sqrt{3} . B_L$

$$\overline{R_L} = \frac{1}{4 . \sqrt{3} . B_L} . \left[(\sqrt{3} . B_L - F_s . B_L)^2 \right]$$

$$= \frac{B_L}{4 \sqrt{3}} . (\sqrt{3} - F_s)^2 \qquad \text{or, } F_r = \frac{\overline{R_L}}{B_L}$$

Donc $F_r = \dfrac{(\sqrt{3} - F_s)^2}{4 . \sqrt{3}}$ or, $\hat{Z}_L = 1 - c_L . F_r$

Donc $\hat{Z}_L = 1 - c_L . \dfrac{(\sqrt{3} - F_s)^2}{4 . \sqrt{3}}$

Par ailleurs, $Z = 1 - (1 - Z_L) . \dfrac{L . N}{T}$

(Z étant fixé, niveau de service souhaité).

Donc $(1-Z_L) = (1-Z).\frac{T}{L.N}$

$$(\sqrt{3}-F_s)^2 = (1-Z).\frac{T}{L.N}.\frac{4\sqrt{3}}{c_L}$$

$$\sqrt{3}-F_s = 2.\sqrt{(1-Z).\frac{T}{L.N}.\frac{\sqrt{3}.\overline{D}_L}{B_L}}$$

$$F_s = \sqrt{3}.\left[1-2\sqrt{(1-Z).\frac{T}{L.N}.\frac{\overline{D}_L}{\sqrt{3}.B_L}}\right]$$

et comme $SS = F_s . B_L$, on a :

$$SS = \sqrt{3}.B_L\left[1-2\sqrt{(1-Z).\frac{T}{L.N}.\frac{\overline{D}_L}{\sqrt{3}.B_L}}\right]$$

Or, $h = \sqrt{3}. B_L$

Donc $SS = h.\left[1-2\sqrt{\frac{\overline{D}_L}{h}.(1-Z).\frac{T}{L.N}}\right]$

ANNEXE 21.

Recherche de Q, P et SS avec D aléatoire.
(Critère de coût minimum et distribution rectangulaire).

$$\overline{CT} = Cu.\overline{D} + CC.N = Cu.I.T.Stm + \overline{CR}$$

$$= Cu.\overline{D} + CC.\frac{\overline{D}}{Q} + Cu.I.\frac{\overline{D}}{\overline{d}}.\frac{Q}{2} + Cu.I.\frac{\overline{D}}{\overline{d}}.P - Cu.I.\frac{\overline{D}}{\overline{d}}.\overline{D}_L$$

$$+ r.F_r.B_L.\frac{\overline{D}}{Q}$$

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial Q} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{CC.\overline{D}}{Q^2} + \frac{Cu.I.\overline{D}}{2.\overline{d}} - \frac{r.F_r.B_L.\overline{D}}{Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2.\overline{d}.(CC+r.F_r.B_L)}{Cu.I.}$$

Or, (cfr annexe 20) $F_r = \dfrac{(\sqrt{3}-F_s)^2}{4.\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2.\overline{d}}{Cu.I}.\left[CC+r.B_L.\frac{(\sqrt{3}-F_s)^2}{4.\sqrt{3}}\right]$$

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial P} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Cu.I.\overline{D}}{\overline{d}} + \frac{r.B_L.\overline{D}}{Q}.\left(\frac{\partial F_r}{\partial P}\right) = 0$$

Or (cfr annexe 20), $F_r = \dfrac{(\sqrt{3}-F_s)^2}{4.\sqrt{3}}$ et $F_s = \dfrac{SS}{B_L} = \dfrac{P-\overline{D_L}}{B_L}$

donc $\dfrac{\partial F_r}{\partial P} = \dfrac{\partial F_r}{\partial F_s} \cdot \dfrac{\partial F_s}{\partial P} = \dfrac{-(\sqrt{3}-F_s)}{2.\sqrt{3}.B_L}$

et $\dfrac{\partial \overline{CT}}{\partial P} = 0$

$$\Rightarrow \frac{Cu.I.\overline{D}}{\overline{d}} - \frac{r.B_L.\overline{D}.(\sqrt{3}-F_s)}{Q.2.\sqrt{3}.B_L} = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-F_s) = \frac{2.Cu.I.Q.\sqrt{3}}{r.\overline{d}}$$

Reportons cette valeur dans Q^2

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2\ \overline{d}}{Cu.I} \cdot \left[CC + \frac{r.B_L}{4.\sqrt{3}} \cdot \frac{4\ Cu^2.I^2.Q^2.3}{r^2.\overline{d}^2} \right]$$

$$= \frac{2\ CC.\overline{d}}{Cu.I} + \frac{2\sqrt{3}.B_L.Cu.I.Q^2}{r.\overline{d}}$$

$$\Rightarrow Q^2.\left[\frac{r.\overline{d} - 2.\sqrt{3}.B_L.Cu.I}{r.\overline{d}}\right] = \frac{2\ CC.\overline{d}}{Cu.I}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2\ CC.\overline{d}}{Cu.I}} \cdot \sqrt{\frac{r.\overline{d}}{r.\overline{d} - 2\sqrt{3}\ B_L.Cu.I}} = Q^{*}.k$$

et puisque $F_s = \sqrt{3}.(1 - \dfrac{2\ Cu.I.Q}{r.\overline{d}})$, on a :

$$F_s = \sqrt{3}.(1 - \frac{2\ Cu.I.\sqrt{2\ CC.\overline{d}}}{r.\overline{d}.\sqrt{Cu.I}}.k)$$

$$= \sqrt{3}.\left(1 - \frac{2}{r}.\sqrt{\frac{2\ CC.Cu.I}{\overline{d}}}.k\right)$$

$$F_s = \sqrt{3}.\left[1 - \frac{2.X.k}{r}\right]$$

Nous retrouvons le $X = \sqrt{\frac{2.CC.Cu.I}{\bar{d}}}$ du cas de base.

$$SS = B_L.F_s = F_s.\frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$= h.\left[1 - \frac{2.X.k}{r}\right]$$

et $P = \bar{D}_L + SS$

$$= \bar{D}_L + h.\left[1 - \frac{2.X.k}{r}\right]$$

ANNEXE 22.

Expression des écarts relatifs (E_i), en fonction de la quantité économique (Q).

a) Calculs préliminaires. $Q = n.Q^{*} \Longrightarrow E(Y) = ?$

$$Q = n.Q^{*} \Rightarrow Y = Cu + \frac{CC}{n.Q^{*}} + \frac{Cu.I}{2.d}.n.Q^{*}$$

$$Y-Cu = \frac{CC}{n.Q^{*}} + \frac{Cu.I}{2.d}.n.Q^{*}$$

$$\text{or, } \frac{CC}{Q^{*}} = \frac{CC.\sqrt{Cu.I}}{\sqrt{2.CC.d}} = \frac{X}{2}$$

$$\text{et } \frac{Cu.I}{2d}.Q^{*} = \frac{Cu.I.\sqrt{2.CC.d}}{2.d.\sqrt{Cu.I}} = \frac{X}{2}$$

$$\text{Donc, } Y-Cu = \frac{X}{2}.(\frac{1}{n} + n)$$

$$E(Y) = \frac{Y-Y°}{Y°} \qquad \text{avec } Y° = Cu+X$$

$$Y-Y° = (Y-Cu) - (Y°-Cu)$$

$$= \frac{X}{2}.(\frac{1}{n} + n) - X$$

$$= X.\left[\frac{n^2-2n+1}{2n}\right] = X.\frac{(n-1)^2}{2n}$$

$$\text{Donc } E_Y = \frac{X}{Y°}.\frac{(n-1)^2}{2n} \qquad \text{quand } Q = n.Q^{*}$$

b) Coût unitaire Y ; (E_1)

Nous venons de voir que

$$Q = n.Q^{*} \Rightarrow E(Y) = \frac{X}{Y°}.\frac{(n-1)^2}{2.n}$$

$$n = \frac{Q}{Q^{*}}$$

$$\Longrightarrow \quad E_1 = \frac{X}{Y°} \cdot \frac{\left(\frac{Q}{Q^*} - 1\right)^2}{2 \cdot \frac{Q}{Q^*}}$$

$$= \frac{X}{Y°} \cdot \frac{(Q-Q^*)^2}{2\ Q \cdot Q^*}$$

$$= \frac{X}{Q^*} \cdot \frac{(Q-Q^*)^2}{2 \cdot Y° \cdot Q}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ CC.Cu.I}{d}} \cdot \sqrt{\frac{Cu.I}{2CC.d}} \cdot \frac{(Q-Q^*)^2}{2\ Y° \cdot Q}$$

$$= \frac{Cu.I}{2d \cdot Y°} \cdot \frac{(Q-Q^*)^2}{Q}$$

c) <u>Profit unitaire, Pu ; (E_2).</u>

$$E_2 = \frac{Pu° - Pu}{Pu°}$$

or, $Pu° = V - Y°$ et $Pu = V - Y$

$\Rightarrow Pu° - Pu = (V - Y°) - (V - Y)$

$$= Y - Y° = \left(\frac{Y - Y°}{Y°}\right) \cdot Y° = E_1 \cdot Y°$$

Donc $E_2 = \dfrac{E_1 \cdot Y°}{Pu°} = \dfrac{Cu.I}{2d \cdot Pu°} \cdot \dfrac{(Q-Q^*)^2}{Q}$

d) <u>Rendement des stocks, S ; (E_3)</u>

$E_3 = \dfrac{S° - S}{S°} = 1 - \dfrac{S}{S°}$ et $S = S° \cdot (1 - E_3)$

et $S = \dfrac{2.d}{Cu.Q} \cdot (V - Y) = \dfrac{2.d}{Cu.Q} \cdot Pu = \dfrac{2.d}{Cu.Q} \cdot (1 - E_2) \cdot Pu°$

(cfr annexe 22,c)

$$E_3 = 1 + \frac{2.d.Pu°}{Cu.Q.S°}\,(E_2 - 1)$$

$$\Longrightarrow E_3 = 1 + \frac{2.d.Pu^\circ}{Cu.Q.S^\circ}.\left[\frac{Cu.I.(Q-Q^*)^2}{2\,d.Pu^\circ.Q} - 1\right] \quad \text{(cfr annexe 22,c)}$$

$$= 1 + \frac{2.d.Pu^\circ}{Cu.Q.S^\circ}.\left[\frac{Cu.I.(Q-Q^*)^2-2.d.Pu^\circ.Q}{2.d.Pu^\circ.Q}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{Cu.S^\circ.Q^2}.\left[Cu.I.(Q-Q^*)^2-2.d.Pu^\circ.Q\right]$$

e) Profit par série, Pq ; (E_4).

$$E_4 = \frac{Pq^\circ-Pq}{Pq^\circ} = 1 - \frac{Pq}{Pq^\circ} \text{ et } Pq = (1-E_4).Pq^\circ$$

$$Pq = (V-Y).Q = (V-Cu).Q - CC - \frac{Cu.I}{2d}.Q^2 \quad \text{(cfr annexe 2)}$$

$$Pq^\circ = \frac{Q^*}{2X}.\left[(V-Cu)^2 - X^2\right] \quad \text{(cfr annexe 4)}$$

$$= \frac{d}{2Cu.I}.\left[(V-Cu)^2 - X^2\right]$$

$$E_4 = 1 - \frac{\left[(V-Cu).Q-CC-\frac{Cu.I}{2d}.Q^2\right]}{\frac{d}{2Cu.I}.\left[(V-Cu)^2 - X^2\right]}$$

ANNEXE 23.

Conséquences, pour le domaine de variation de Q, des contraintes $E_i \leq W_i$.

a) $E_1 \leq W_1$

Par l'annexe 22,b, on a :

$$\frac{Cu.I}{2d.Y^\circ} \cdot \frac{(Q-Q^*)^2}{Q} \leq W_1$$

ou $(Q-Q^*)^2 - \dfrac{2d.Y^\circ.W_1.Q}{Cu.I} \leq 0$ (car $Q > 0$)

c'est-à-dire $Q^2 - 2.\left[Q^* + \dfrac{d.Y^\circ.W_1}{Cu.I}\right] + Q_*^2 \leq 0$

Cette inéquation sera vérifiée pour les valeurs de Q comprises entre les racines. Ces racines sont :

$$Q^* + \frac{d.Y^\circ.W_1}{Cu.I} \pm \sqrt{\left(\frac{d.Y^\circ.W_1}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2d.Y^\circ.W_1.Q^*}{Cu.I}}$$

N.B. 1. Il faut en outre que le radicand soit positif ou nul. C'est le cas, car tous les paramètres sont positifs (y compris W_1, puisque $E_1 \leq W_1$ et E_1 positif).

N.B. 2. Ces deux racines sont positives car elles sont de la forme :

$$Q^* + A \pm \sqrt{A^2 + 2.A.Q^*} \quad \text{avec } A = \frac{2d.Y^\circ.W_1}{Cu.I}$$

$$Q^* + A \pm \sqrt{(A+Q^*)^2 - Q_*^2}$$

et la plus petite des deux racines vaut :

$$(Q^* + A) - \left[(Q^* + A) - \text{quelquechose}\right] > 0$$

b) $\underline{E_2 \leq W_2}$

Par l'annexe 22-c, on a :

$$\frac{Cu.I}{2d.Pu^o}.\frac{(Q-Q^*)^2}{Q} \leq W_2$$

Par le même raisonnement qu'en 23-a, nous avons Q compris entre les deux racines positives

$$Q^* + \frac{d.Pu^o.W_2}{Cu.I} \pm \sqrt{\left(\frac{d.Pu^o.W_2}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2d.Pu^o.W_2.Q^*}{Cu.I}}$$

c) $\underline{E_3 \leq W_3}$

Par l'annexe 22-d, on obtient :

$$1 + \frac{1}{Cu.S^o.Q^2}.\left[Cu.I.(Q-Q^*)^2 - 2d.Pu^o.Q\right] \leq W_3$$

ou $\quad Cu.I.(Q-Q^*)^2 - 2d.Pu^o.Q + (1-W_3).Cu.S^o.Q^2 \leq 0$

$$Q^2 + Q_*^2 - 2.Q.Q_* - \frac{2d.Pu^o.Q}{Cu.I} + (1-W_3).\frac{S^o}{I}.Q^2 \leq 0$$

$$\left[1 + (1-W_3).\frac{S^o}{I}\right].Q^2 - 2.\left[Q^* + \frac{d.Pu^o}{Cu.I}\right].Q + Q_*^2 \leq 0$$

Posons $\begin{cases} A = 1 + (1-W_3).\frac{S^o}{I} \\ B = Q^* + \frac{d.Pu^o}{Cu.I} \end{cases}$

Il vient alors : $\quad A.Q^2 - 2.B.Q + Q_*^2 \leq 0$

N.B. $\quad A > 0$ car $W_3 < 1$

en effet : $S^o - S < S^o$ car $S > 0$ par hypothèse.

L'inéquation sera donc vérifiée pour les valeurs de Q comprises entre les racines :

$$\frac{B \pm \sqrt{B^2 - A.Q_*^2}}{A}$$

$$B^2 - A.Q_*^2 = Q_*^2 + \left(\frac{d.Pu^\circ}{Cu.I}\right)^2 + 2.\frac{d.Pu^\circ.Q^*}{Cu.I} - Q_*^2 - (1-W_3).\frac{S^\circ}{I}.Q_*^2$$

$$= \left(\frac{d.Pu^\circ}{Cu.I}\right)^2 + \frac{2d.Pu^\circ.Q^*}{Cu.I} - (1-W_3).\frac{S^\circ}{I}.Q_*^2$$

or, $\frac{d}{Cu.I} = \sqrt{\frac{2\ CC.d}{Cu.I}}.\sqrt{\frac{d}{2\ CC.Cu.I}} = \frac{Q^*}{X}$

et par l'annexe 7, on a d'autre part :

$$\frac{S^\circ}{I} = \frac{(V-Cu)^2 - X^2}{X^2}$$

Il vient alors :

$$B^2 - A.Q_*^2 = \left(\frac{Pu^\circ.Q^*}{X}\right)^2 + \frac{2.Pu^\circ.Q_*^2}{X} - (1-W_3).\frac{\left[(V-Cu)^2-X^2\right]}{X^2}.Q_*^2$$

$$= \frac{Q_*^2}{X^2}.\left\{(Pu^\circ)^2 + 2.Pu^\circ.X - (1-W_3).\left[(V-Cu)^2-X^2\right]\right\}$$

$$= \frac{Q_*^2}{X^2}.\left\{Pu^\circ.(Pu^\circ+2X) - (1-W_3).\left[(V-Cu)^2-X^2\right]\right\}$$

or, $Pu^\circ = V-X^\circ = (V-Cu)-X$

$$B^2 - A.Q_*^2 = \frac{Q_*^2}{X^2}.\left\{\left[(V-Cu)-X\right].\left[(V-Cu)+X\right] - (1-W_3).\left[(V-Cu)^2-X^2\right]\right\}$$

$$= \frac{Q_*^2}{X^2}.\left[(V-Cu)^2-X^2\right].W_3$$

$$= \frac{S^\circ}{I}.W_3.Q_*^2$$

Le radicand est positif puisque $W_3 \geqslant 0$

Les limites de variation de Q sont les deux valeurs positives :

$$\frac{Q^* + \frac{d.Pu^\circ}{Cu.I} \pm Q^*.\sqrt{\frac{S^\circ}{I}.W_3}}{1 + \frac{S^\circ}{I} - \frac{S^\circ}{I}.W_3}$$

et comme
$$\begin{cases} \dfrac{d}{Cu.I} = \dfrac{Q^{*}}{X} \\ 1 + \dfrac{S^{\circ}}{I} = \dfrac{(V-Cu)^2}{X^2} \end{cases} \quad \text{(cfr annexe 7)}$$

les deux valeurs limites deviennent :

$$\frac{Q^{*}.\left[1 + \dfrac{Pu^{\circ}}{X} \pm \sqrt{\dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3}\right]}{\dfrac{(V-Cu)^2}{X^2} - \dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3}$$

or, $1 + \dfrac{Pu^{\circ}}{X} = \dfrac{X+Pu^{\circ}}{X} = \dfrac{V-Cu}{X}$

d'où nouvelles valeurs des limites :

$$\frac{Q^{*}.\left[\dfrac{(V-Cu)}{X} \pm \sqrt{\dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3}\right]}{\dfrac{(V-Cu)^2}{X^2} - \dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3}$$

$$= \frac{Q^{*}}{\dfrac{(V-Cu)}{X} \pm \sqrt{\dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3}}$$

$$= \frac{Q^{*}.X}{(V-Cu)} . \frac{1}{\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{S^{\circ}}{I}.W_3.\dfrac{X^2}{(V-Cu)^2}}\right)}$$

Or,
$$\begin{cases} \dfrac{S^{\circ}.X^2}{I.(V-Cu)^2} = 1 - \dfrac{X^2}{(V-Cu)^2} \\ Q_S^{\circ} = \dfrac{X}{(V-Cu)}.Q^{*} \end{cases} \quad \text{(cfr annexe 7)}$$

Les limites sont donc : $$\frac{1}{1 \pm \sqrt{W_3.\left[1 - \dfrac{X^2}{(V-Cu)^2}\right]}}$$

d) $\underline{E_4 \leq W_4}$

Par l'annexe 22-e, il vient :

$$1 - \frac{2\ Cu.I.\left[(V-Cu).Q - CC - \frac{Cu.I}{2d}.Q^2\right]}{d.\left[(V-Cu)^2 - X^2\right]} \leq W_4$$

ou $$\frac{Cu.I}{2d}.Q^2 - (V-Cu).Q + CC \leq - \frac{(1-W_4).d.\left[(V-Cu)^2-X^2\right]}{2\ Cu.I}$$

ou $$\frac{Cu.I}{2d}.Q^2 - (V-Cu).Q + CC + (1-W_4).\left[(V-Cu)^2-X^2\right].\frac{d}{2\ Cu.I} \leq 0$$

cela sera vérifié pour les valeurs de Q comprises entre les racines :

$$Q = \frac{(V-Cu) \pm \sqrt{(V-Cu)^2 - \frac{2\ CC.Cu.I}{d} - (1-W_4).\left[(V-Cu)^2-X^2\right]}}{\frac{Cu.I}{d}}$$

$$= \frac{d}{Cu.I}.\left\{(V-Cu) \pm \sqrt{\left[(V-Cu)^2-X^2\right].\left[1-(1-W_4)\right]}\right\}$$

or, $\frac{d.(V-Cu)}{Cu.I} = Q^o_{Pq}$ (voir annexe 4)

Dès lors, les limites de variation de Q deviennent :

$$Q^o_{Pq} \pm \frac{d}{Cu.I}.\sqrt{\left[(V-Cu)^2-X^2\right].W_4}$$

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE.

N.B. Les ouvrages marqués d'une astérisque ont été consultés dans la préparation de ce mémoire. Les autres titres sont indiqués dans un souci de documentation, ou d'exploration plus approfondie d'un aspect particulier.

/01/ P. ANTIER, Conseils pratiques pour la gestion des stocks.
Dunod, Paris, 1967.

/02/ ARROW, HARRIS, MARSCHAK, Optimal Inventory Policy.
Econometrica, XIX, 1951.

/03/ ARROW, KARLIN, SCARF, Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production.
Standford University Press, 1958.

/04/ R. BELLMAN, I. GLICKSBERG, O. GROSS, On the optimal inventory equation.
Management Science, II, 1955.

/05/ M.P. BESSIERE, Peut-on envisager l'application de moyens nouveaux pour abaisser le prix de revient dans les fabrications mécaniques ?
Société des ingénieurs de l'automobile, 6° section technique, (pas d'indication de date).

/06/ G. BITTERLIN, Gestion scientifique et pratique des stocks.
Dunod, Paris, 1971.

/07/ François BODART, Théorie de la production.(*)
Notes de cours, 2° licence Economiques, Namur, 1971/72.

/08/ François BODART, Cours d'Analyse de Systèmes Informatiques de Gestion. (*)
C.I.G.E.R. Namur, 1973.

/09/ Marcel BOURGEOIS & François BODART , Modèles déterministes de gestion des stocks. (*)
Note de travail, 1965.

/10/ Marcel BOURGEOIS & François BODART , Modèle statique stochastique de gestion des stocks. (*)
Note de travail, 1966.

/11/ Edward BOWMAN & B. FETTER, Analysis for Production Management.
Irwin, New York, 1957.

/12/ D. BREFORT & M. MUSSENBAUM , La gestion scientifique des stocks.
Dunod, Paris, 1971.

/13/ J. BUCHAN & E. KOENIGSBERG, Gestion scientifique des stocks. (*)
Eyrolles, Paris, 1965.

/14/ John L. BURBIDGE, A New Approach to Production Control.
J. Inst. Prod. Engrs. ; 37.288, May 1958.

/15/ John L. BURBIDGE, A New Approach to the Batch Quantity Decision.
Productivity Management Review, May 1959.

/16/ John L. BURBIDGE, The New Approach to the Batch Quantity Decision ; A reply. (*)
Productivity Management Review.

/17/ Andrew J. CLARK, A Dynamic, Single-Item, Multi-Echelon Inventory Model.
RM 2297. Santa Monica, California, The RAND Corporation, Décembre 1958.

/18/ Andrew J. CLARK & Herbert SCARF, Optimal policies for a multi-echelon inventory problem.
Management Science, Vol.6, 1960.

/19/ R.M. CYERT & J.G. MARCH, Processus de décision dans l'entreprise. (*)
Dunod, Paris, 1970.

/20/ R.M. CYERT & J.G. MARCH, Organization design.
in New Perspectives in Organization Research,
Wiley, 1964.

/21/ Richard K. DAVIS, Production Inventory Control in a Paint Company.
(Pas d'indication).

/22/ G. DISTER, Recherches sur le comportement des stocks dans l'économie globale et dans l'entreprise.
Mémoire, Université de Liège, 1957-58.

/23/ W.E. DUCKWORTH, Stock Control Problems,.
Talk given to a Royal Stat. Soc. meeting at Bristol, 1963.

/24/ W.E. DUCKWORTH, Stock Control Problems : Some fallacies in their current treatment.
App. Stats. Vol. 9, N° 3, 1960

/25/ A. DVORETZKY, J. KIEFER, J. WOLFOWITZ, On the optimal character of the (s,S) policy in inventory theory.
Econometrica, XXI, 1953.

/26/ Bernard P. DZIELINSKI & Ralph E. GOMORY, Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations.
Management Science, Vol. 11, N° 9, July 1965.

/27/ Samuel EILON, Elements of Production Planning and Control.
Mac Millan, New York, 1962. (*)

/28/ Samuel EILON, A note on the optimal range. (*)
Management Science, Vol. 6, N° 7, 1960.

/29/ Samuel EILON, Scheduling for Batch Production.
Paper presented at Harrogate, to Institution of Production Engineers, August 1957.

/30/ Samuel EILON, Dragons in Pursuit of the EBQ. (*)
Operational Research Quarterly, Vol. 15, N° 4.

/31/ Samuel EILON, Economic batch size determination for multiproduct scheduling. (*)
Operational Research Quaterly, U.K., December, 1959.

/32/ J. FERRIER, La gestion scientifique des stocks.
Dunod, Paris 1966.

/33/ H. FOUILLET, L'évaluation et le contrôle des stocks.
Dunod, Paris, 1970.

/34/ Brian GLUSS, An optimal inventory solution for some specific demand distributions.
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 7, N° 1, March 1960.

/35/ Brian GLUSS, Costs of incorrect data in optimal inventory computations.
Management Science, Vol. 6, 1960.

/36/ G. HADLEY & T.M. WHITIN, Etude et pratique des modèles de stocks. (*)
Dunod, Paris, 1966.

/37/ F. HANSMANN, A Survey of Inventory Theory from the Operations Research Viewpoint.
in Progress in Operations Research, Wiley, 1961.

/38/ F. HANSMANN, Operations Research in Production and Inventory Control.
Wiley, 1962.

/39/ Ford HARRIS, Operations and Cost (Factory Management Series).
A.W. Shaw, Chicago, 1915.

/40/ C.C. HOLT, F. MODIGLIANI, J.M. MUTH, H.A. SIMON, Planification de la production, des stocks, de l'emploi. (*)
Dunod, Paris, 1964.

/41/ Yuji IJIRI, Objectifs et contrôle de gestion (*).
Dunod, Paris, 1970.

/42/ Erich JANTSCH, Prospective et Politique. (*)
O.C.D.E., Paris, 1971.

/43/ Samuel KARLIN, Dynamic inventory policy with varying stochastic demands.
Management Science, Vol.6, 1960.

/44/ Gérard LATIERE, Analyse de système et techniques décisionnelles. (*)
Dunod, Paris, 1971.

/45/ J.F. MAGEE, Le planning de la production et le contrôle des stocks. (*)
Dunod, Paris, 1962.

/46/ James G. MARCH, Handbook of Organizations. (*)
Rand McNally, Chicago.

/47/ Pierre MASSE, Le choix des investissements. (*)
Dunod, Paris, 1968.

/48/ E. MILLS, Price, Output and Inventory Policy.
Wiley, 1962.

/49/ F. MODIGLIANI, Business Reasons for Holding Inventories and their Macro-Economic Implications.
in Studies in Income and Wealth, n°19.

/50/ M. MONGON, Communication au XI° congrès international d'organisation scientifique.
Paris, 24-28 Juin 1957.

/51/ E. NADDOR, Evaluation of Inventory Control.
in Actes du 2° Congrès International de Recherche Opérationnelle.
Dunod, Paris, 1961.

/52/ A. RAMBAUX, Gestion économique des stocks.
Dunod, Paris, 1969.

/53/ Herbert SCARF, The optimality of (S,s) policies for the dynamic inventory problem.
Math. Methods in the Social Sciences, Standford University Press, 1960.

/54/ William H. STARBUCK, Organizational Growth and Development . in James G. MARCH, Handbook of Organizations.
Rand McNally, Chicago.

/55/ M.K. STARR & D.M. MILLER, La gestion des stocks : Théorie et pratique. (*)
Dunod, Paris, 1966.

/56/ T.B. TATE, In Defence of the Economic Batch Quantity. (*)
Operational Research Quarterly, Vol. 15, N° 4.

/57/ T.M. WHITIN, The Theory of Inventory Management.
Princeton University Press, 1953.

/58/ T.M. WHITIN, The New Approach to the Batch Quantity Decision ; A critical examination. (*)
Productivity Management Review.

/59/ T.M. WHITIN, Inventory Control and Price Theory. (*)
Management Science, Vol. II, N°1, October 1955.

/60/ (I.B.M.), The Production Information and Control System (Data Processing Application).
I.B.M. Corp. New York, 1966.