MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES ORIENTATION GÉNÉRALE À FINALITÉ SPÉCIALISÉE

Introduction à la théorie adaptative appliquée à la gestion de la production, des stocks et des prix

Bogaert, Henri

Award date:
1971

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES N.-D. DE LA PAIX, NAMUR

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES ET SOCIALES

ANNEE ACADEMIQUE 1970-1971

Introduction à la théorie adaptative appliquée à la gestion de la production, des stocks et des prix

Henri BOGAERT

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade
de Licencié en Sciences Economiques et Sociales
(Option : Entreprise)

Jury du mémoire

F. Bodart

J. Paelinck

"La vie n'est qu'un songe
Et les songes ne sont eux-mêmes que des songes„

Calderon de la Barca.

L'idée qui a suscité ce travail revient à Monsieur BODART, il m'y a dirigé avec beaucoup de compréhension et de compétence. Attentif à l'expression autant qu'à la logique, il m'a permis d'arriver au bout du processus adaptatif que constitue l'élaboration d'un mémoire ; je l'en remercie très sincèrement.

Il m'est agréable aussi de reconnaître ma dette envers Monsieur PAELINCK, de nombreuses pages sont marquées de son empreinte, d'autres, de son soutien.

Pour leur aide morale, et la patience qu'ils ont mise à supporter mes explications, je dois à l'amitié de remercier Messieurs Martin, Mathieu et Raway.

Qu'eux et ceux que j'omets trouvent ici l'expression de ma gratitude.

INTRODUCTION

On peut définir le cadre de ce mémoire comme la gestion de la production des prix et des stocks. De multiples ouvrages ont traité de cette matière, la plupart, suivant la théorie traditionnelle de la firme, certains, prolongeant les méthodes de gestion de stocks. Leur vue est souvent partielle, et ne considère qu'un aspect de la gestion, leurs hypothèses restrictives, alors que leur but consiste en une théorie générale. Nous tenterons dans ce mémoire de critiquer ces approches du problème de gestion, et, chaque critique apportant un élément à tenir en compte, de construire un modèle à partir de ces éléments. Dans un premier chapitre, nous critiquerons la théorie traditionnelle de la firme. Au second chapitre, nous donnerons l'essentiel de l'approche de Mills. Au troisème nous critiquerons cette approche et la démarche qui la supporte, pour analyser ensuite le problème de décision dans le court terme. Dans un quatrième chapitre enfin, nous développerons deux modèles adaptatifs.

P L A N

C H A P I T R E   I

PLACE DES STOCKS DANS LA THEORIE ECONOMIQUE

P L A N

INTRODUCTION.

Faisant figure de parent pauvre dans la théorie économique de la firme les stocks ne s'y virent intégrés qu'erratiquement et par des biais différents n'ayant que de lointains rapports avec l'exposé général de cette théorie. Celle-ci, en effet, cherchait à expliquer des mécanismes de marché où consommateurs et producteurs établissaient un prix auquel toutes les quantités seraient vendues ou achetées. L'explication du prix était donc fonction de l'offre et de la demande, qui s'égalisent au prix d'équilibre. Les stocks, à ce moment, n'étaient plus des quantités offertes mais une certaine richesse que le producteur ne cherchait pas à transformer en monnaie.

Certains auteurs pourtant ont bien dû tenir compte des stocks lors d'études de cycle. L'interprétation des stocks dans la théorie traditionnelle en souffrait déjà.

Pour d'autres, cherchant à résoudre des problèmes particuliers propres à chaque firme et plus particulièrement des problèmes se présentant au gestionnaire de stocks, il fut nécessaire de tenir compte de cette variable sans que pour autant ils fassent oeuvre de théoriciens économiques. C'est ainsi que Wilson, en 1924, trouvait la formule célèbre de la quantité économique de commande. Très vite la Recherche opérationnelle s'est emparée de cette question, et petit à petit a développé des modèles de contrôle optimal des stocks. La multiplicité de ces modèles montrait à souhait la diversité des problèmes dont chacun, en dernière analyse, est propre à chaque entreprise, à l'imperfection des techniques de gestion, et au manque flagrant d'informations des entreprises sur leur marché, leur coût, leur stock, etc ...

La recherche opérationnelle s'est développée sous l'influence de l'industrie. Les modèles de contrôle optimal des stocks abondent, et en viennent à se détacher de leur pragmatisme des premières heures. On parle à présent d' "Etudes mathématiques sur la production et les stocks", et le terme opérationnel de vient de plus en plus éloigné du but des chercheurs.

La théorie économique, quant à elle, n'a pas pu se développer dans ce sens. Empruntant la voie d'une abstraction de bon aloi, elle n'a pas cherché à intégrer les stocks dans ses raisonnements. Les hypothèses sous-tendant théorie économique et recherche opérationnelle sont, comme nous le verrons, incompatibles.

A présent, on tente une interpénétration de la théorie économique et des études résultant de l'évolution de la recherche mathématique opérationnelle. Voilà donc où nous nous situons.

Le cadre et l'objet de ces analyses n'est autre que la firme. Leur but est la découverte des lois qui gouvernent les décisions de la firme. Le prix, la production, les ventes font l'objet de ces décisions.

L'excès de la demande sur l'offre (le stock), l'excès de l'offre sur la demande, les prévisions des états futurs de la demande influencent ces décisions et en sont par là des facteurs d'explications ; mais l'inverse pourrait tout aussi bien être vrai, les prix, la production expliquent les stocks. Cependant, ceux-ci n'ont pas le caractère de décision qu'ont les prix et la production et peuvent être considérés comme cause de la production et des prix, parce que ces stocks sont des informations de l'environnement à laquelle la firme doit s'adapter par les variables sur lesquelles elle a un pouvoir de décision.

Notre but dans ce chapitre est donc de montrer pourquoi la théorie traditionnelle n'a pas intégré les stocks, et, partant, de voir à quel prix (hypothèses) certains auteurs, qui s'y sont attachés, ont pu y parvenir.

Dans la section 1 nous verrons quelles sont les hypothèses traditionnelles de la théorie économique de la firme et comment dans ce cadre certains auteurs ont tenté d'intégrer les stocks. Cette tentative se soldera d'après nous par un échec. La raison fondamentale résulte de la reconnaissance des motifs de détention de stock qui fera l'objet de notre seconde section.

A la lumière des motifs de détention des stocks nous pourrons critiquer la théorie traditionnelle de la firme, ce sera la section troisième. La critique portera évidemment sur les hypothèses de la théorie traditionnelle, selon trois axes : Le temps ou la prise en charge obligatoire pour un modèle de stock de la durée ; l'incertitude découlant du temps et de la connaissance imparfaite de l'environnement ; les discordances qui peuvent exister entre les variables lors de l'introduction de la durée (discordance entre le taux de production et le taux de demande).

Selon ces 3 axes, nous verrons comment nous pourrons élargir les hypothèses de la théorie traditionnelle pour pouvoir y intégrer les stocks. Il s'agira de la section 4.

Le paragraphe 1 aura pour objet les hypothèses temporelles, le paragraphe 2 : les hypothèses d'environnement et surtout de la connaissance qu'a la firme de cet environnement, le paragraphe 3 : la discordance entre la production et la demande, donnant lieu à un stock détenu pour un motif de transaction.

S E C T I O N 1

Hypothèses traditionnelles de la théorie économique de la firme

1.1 La théorie traditionnelle.

Partant de l'analyse des échanges et de leur équilibre sur un marché, la théorie économique de la firme s'est fondée sur un ensemble d'hypothèses élémentaires décrivant les sources de comportement du producteur.

Un fait était observable : l'équilibre des quantités échangées sur le marché à un certain prix. Par déduction, et moyennant certaines hypothèses, on a pu décrire le comportement de l'entrepreneur.

Les hypothèses principales sont les suivantes : (*)

(1) Unicité de l'objectif : la maximation du profit sans contrainte de la fonction de coût minimum (ou fonction de transformation), elle-même contrainte par la fonction de production.

(2) Connaissance parfaite de toutes les possibilités d'actions et de leurs conséquences.

(3) Solution optimale et immédiate de problèmes de gestions dans le cadre de la théorie marginaliste.

Dans ce cas, la solution optimale pour la firme se situe à l'intersection des courbes de coût marginal et de recette marginale. A cette intersection, la firme est certaine de vendre toute la quantité qu'elle a produite puisque, d'une part, elle connaît parfaitement la courbe de demande, et, d'autre part, elle est confrontée à un problème statique où l'arbitrage de la production et des prix sur plusieurs périodes est délibérément écarté.

(*) Ceci est développé par Dister "La Gestion de la production dans le court-terme". NIJHOF, La Haye, 1968.

La firme vendant tout ce qu'elle offre (et produit pour offrir) au prix optimal, n'a aucun motif de détenir des stocks de ces produits.

L'adaptation de l'offre à la demande est donc sans fondement puisque instantanée et certaine. Reste, alors, un problème à deux variables, Le prix et la production, sur lesquelles peuvent porter les décisions de la firme dans une extension qui dépendra de la structure de son marché et de son environnement technique, de coût etc ...

Cependant si nous excluons que l'équilibre entre l'offre et la demande sur le marché est trouvé de manière instantanée par celui-ci, nous pouvons tenir compte de situations de déséquilibres, où l'offre, égale à la demande au prix courant, n'est cependant pas celle qui maximiserait le profit du producteur, (les courbes de demande et d'offre étant connues et données). Dans ce cas deux interprétations sont possibles : soit le producteur a connaissance du prix de déséquilibre du marché avant de décider de sa production, et alors il connaît "une frustration" ou un coût d'opportunité résultant du fait que son profit n'est pas optimal ; soit le producteur n'a pas connaissance de ce prix, auquel cas, il produira la quantité d'équilibre dont il ne voudra pas vendre la totalité : un stock "voulu" est alors à considérer dont le motif de détention s'interprète comme "un motif de richesse". Cependant cette dernière hypothèse est à rejeter puisqu'en fait elle est contraire à l'axiome de connaissance parfaite des états de l'environnement (ici, le prix).

1.2 Tentatives d'intégrations des stocks dans la théorie traditionnelle.

Bien que peu d'attention fut accordée aux stocks, dès l'origine, ils ne furent pourtant pas négligés. Leur intégration dans la théorie, nous l'avons vu, n'était pas réalisée et, tout naturellement, on a tenté de discerner qu'elles étaient les conditions nécessaire à leur existence, c'est-à-dire les motifs pour lesquels on les détenait.

Ainsi Alfred Marshall (1) interprétait déjà différents motifs de détention de stocks. Ils étaient détenus, selon lui, dans l'attente d'une hausse de prix sur le marché, ou d'une hausse de coûts. R.G. Hawtrey (2), quant à lui, mettait en évidence que les variations de court-terme dans le taux de l'intérêt devraient être les stimuli pour les marchants, poussant ceux-ci à des variations du niveau des stocks. D'autres tels que M. Abramovitz (3), V. Lutz (4), E.S. Shaw (5) et J.B. William ont pu prévoir que, outre les changements attendus dans les fonctions de coût et de demande, il y a deux autres raisons pour les firmes de détenir des stocks :

(a) Les discontinuités dans les taux de commandes, de production ou de ventes ;

(b) L'incertitude concernant la fonction de demande.

En fait donc, ces éléments importants pour la détention de stocks étaient connus ; mais, faute d'une analyse systématique et complète, on croyait pourvoir n'y attacher que peu d'intérêt.

---

(1) A. Marshall : "Principle of Economics" (8^{th} éd.) ; New-York, 1948, p. 332, 333, 338.

(2) R.G.Hawtrey : "A Century of Bank Rate" ; London, 1938, p. 194.

(3) M.Abramovitz: "An approach to price theory for a changing economy". New-York : Columbia University Press,1939.

(4) V. Lutz : "The theory of Investment of The Firm Princeton". Princeton University Press, 1951.

(5) E.S. Shaw : "Elements of a Theory of Inventory". Journal of Political Economy, XVIII, 1940, p. 465-485.

Plusieurs motifs de détention de stocks justifiaient donc leur existence. Restait leur intégration dans la théorie traditionnelle. Une tentative fut faite par Within (1) qui a pu construire des courbes de coûts incluant le coût de stockage, le coût de commande, en ayant soin de choisir la période de telle manière qu'une quantité économique de commande en stock soit demandée dans la période unitaire. Quoique reprenant les motifs de non-détention de stocks, le coût de stockage, pouvait-on parler pourtant d'intégration ? De fait, les motifs de détention de stocks étaient toujours inexistants dans de tels modèles. Cette intégration n'expliquait rien.

Il y a d'autre part, en analyse dynamique, une partie de la littérature économique qui peut être interprétée comme reliant les décisions de prix et de production avec les stocks. Elle se présente en deux catégories, l'une reliant l'effet du niveau des stocks sur les prix, l'autre, l'effet du niveau des stocks sur la production. Ici, point de références aux motifs de détention des stocks, non plus qu'au modèle traditionnel de la micro-économie.

La première que nous appellerons littérature de stabilité des prix (2), dont la procédure habituelle est de supposer que le taux de changement du prix est une fonction croissante de l'excès de la demande sur l'offre. Cet excès de la demande sur l'offre peut être interprété comme un investissement ou un désinvestissement en stock. Donc, l'équation de formation des prix peut s'écrire :

$$\Delta p_n = f(\Delta I_n) \qquad (1)$$

avec , le prix à la période n, et In, le stock à cette période. Supposant la dérivée, $f'(\Delta In) < o$, nous voyons que la firme augmente son prix quand la demande est supérieure à l'offre, et le diminue dans

---

(1) Whitin : "Theory of Inventory Managment" ; Princeton, New Jersey, p. 82, 83, 84.

(2) Samuelson : "Fondations of Economics Analysis" p. 268.
Allen : "Mathematical Economics" Chapitre 1.

le cas contraire. Dans cette interprétation, les modèles de stabilité de prix suppose que le seul effet direct des stocks se produit sur les prix et non sur la production.

Le seconde catégorie est représentée par la littérature sur l'accélérateur de stock, dans laquelle on met en évidence l'effet des stocks sur la production. Elle est due principalement aux travaux Metzler (1) et de Lundberg (2) et traite particulièrement des cycles de stocks en théorie macro-économique. Seules, ici, nous concernent les micro-décisions sur lesquelles est basée la théorie macro-économique. L'hypothèse principale, concernant la règle de décision employée, suppose que la production est déterminée exclusivement par le désir de maintenir le stock à un niveau normal, par exemple proportionnel aux ventes. Nous pouvons représenter ceci par une fonction du type suivant :

$$Zn = \phi \; (I_{n-1} \; , \; I_n^d) \qquad (2)$$

où I_n^d, le niveau désiré de stock est un cas spécial de l'équation (2), où I_n est proportionnel aux ventes attendues, et pour maintenir le stock à son niveau souhaité.

Une troisième tendance, représentée par Mills (3), admet qu'il y a un effet direct tant sur les prix que sur la production. Encore faut-il qu'il y ait une relation stricte entre le niveau des stocks d'une firme de production et la demande du marché. Ceci sera analysé de manière empirique ou théorique, nous l'approfondirons ultérieurement.

---

(1) Metzler, L.A. : "The Nature and Stability of Inventory Cycles" The Review of Economic Statistics. August 1941, Vol. XXIII, N° 3, pp. 113-129.

(2) Lundberg, E. : "Studies in the Theory of Economic Expansion". New-York, Kelley end Millman, 1964, 265 p. Coll. Reprints of Fconomic Classics.

(3) Mills : "Price, Output and Inventory policy" Wiley.

En effet, nous sommes déjà fort éloignés des hypothèses traditionnelles. Les travaux que nous venons de citer dans les trois catégories ci-dessus n'y font que de lointaines références. Les stocks sont pris en considération en ce qu'ils sont des phénomènes observables, sans plus. La théorie n'y trouve pas son dû.

Il fallait bien convenir que la difficulté résidait dans la structure même du problème dont le cadre est constitué par les hypothèses de la théorie traditionnelle. Comme nous pourrons le voir, les stocks ne trouveront d'intégration dans la théorie que si nous modifions les hypothèses de la théorie traditionnelle. Voilà donc notre tâche prochaine, mais d'abord essayons de systématiser quels sont les motifs de détention de stocks ; nous serons alors armés pour critiquer ces hypothèses.

S E C T I O N 2

Motifs de détention des stocks

Ainsi qu'il a été dit précédemment, dès l'origine, certains auteurs découvraient de multiples motifs de détention de stocks, et basaient leurs modèles sur celui ou ceux dont ils estimaient qu'ils étaient les plus importants. Par ailleurs, comme les deux faces d'un "Janus bifrons", des motifs de non-détention des stocks surgissaint : les coûts. Il nous appartient, à présent, de systématiser ces motifs. Pour les motifs de détention, nul mieux que Keynes (1) ne les a analysés dans le cas de détention d'un stock de monnaie ou de liquidité. L'application à des motifs de détention de biens a été faite par Arrow (2).

Cette systématisation faite, nous analyserons les différents coûts, ou motifs de non-détention, qui peuvent surgir lors de l'intégration des stocks.

Un équilibre entre les deux types de motifs en est la conséquence immédiate.

2.1 Motifs de détention des stocks. (*)

21.1 Motif de transaction ou motif d'entreprise.

Une première raison de conserver un stock est "de combler l'intervalle entre la production d'un bien et sa demande ou sa vente".

(*) Ce paragraphe s'inspire largement de Keynes : qu'on veuille donc bien nous excuser de ne pas mettre de guillemets, les citations n'étant pas littérales, et appliquées à la détention de biens.

(1) J.M. Keynes : "Théorie générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie" ; Payot, Paris, 1968, p.211-212.

(2) K. Arrow : "Mathematical studies in the Theory of Inventory and Production". Arrow - Karlin - Scarf.

Ce qui sera le cas lorsque le taux de production est supérieur au taux de la demande à cause de facteurs techniques, lorsque les biens demandés sont livrables tout de suite, la production n'étant pas instantanée, la firme doit alors puiser dans ses stocks pour satisfaire la commande. Pour un distributeur, ce sera le cas lorsqu'il commande en stock une certaine quantité de biens (livrable en totalité au début de la période de stockage), quantité qu'il tâchera de vendre durant cette période.

Cette demande de stocks pour un motif de transaction dépend principalement de la demande courante pour la période, et donc dans une certaine mesure des prévisions de cette demande, mais aussi "du nombre de mains entre lesquelles (cette demande) passe". Le nombre d'intermédiaires entre la production et la demande finale influence beaucoup le comportement des stocks dans ce réseau de distribution. Ceci est cité par Keynes pour la monnaie. Forrester l'a mis en évidence pour les biens. (Forrester : "Industrial Dynamics").

21.2 Motif de précaution.

Ce motif provient du souci de parer aux éventualités qui exigent de fournir une quantité de biens lors d'une demande inopinée, ce qui revient, en fait, au souci d'assurer un niveau de service. La mesure dans laquelle on détiendra un stock pour ce motif, dépendra de l'incertitude de la demande, de l'incertitude du délai de livraison, des coûts de commande ou de production et de stockage, et du niveau de service voulu. Ce niveau de service, lui-même, est fonction de la décision de la firme face à un marché qu'elle connaît plus ou moins, des délais de livraisons que la firme peut accorder aux clients, de la fidélité de ceux-ci etc ....

Ce sera donc le cas, par exemple, pour prévenir une commande importante qu'on ne pourrait produire dans les délais demandés par le client. Ce sera le cas aussi, pour un distributeur, si le délai de livraison du fournisseur est fluctuant et aléatoire.

21.3 Motif de spéculation.

Il s'agira, ici, d'un arbitrage de la production et du prix sur plusieurs périodes. Le rôle important est alors attribué aux anticipations d'une variation des facteurs de stockage : coûts, demande etc ... et à leur effet sur les décisions présentes.

En raison de variations de prix prévues par l'entrepreneur, il peut être plus avantageux pour lui de vendre la production actuelle à une époque ultérieure, ou du moins une partie de cette production. Ceci dans le cas de la concurrence parfaite. Dans le cas de la concurrence imparfaite, si l'entrepreneur prévoit, toutes choses égales d'ailleurs, une augmentation de la quantité demandée, et si son coût marginal de production est croissant, il peut être avantageux pour lui de produire une partie de l'accroissement prévu de la demande de la période ultérieure durant la période courante.

D'autre part, on peut raccrocher à ce motif, la conception différente qu'on a eue des stocks à différentes époques. Il y a, en effet, un motif de détention des stocks non-explicite qui y est inclus : le stock détenu pour un motif de richesse. Le coût de stockage est ici relativement peu important par rapport au profit escompté pour une augmentation de prix importante. Un exemple frappant est la période d'inflation, particulièrement en Allemagne, qui a fait suite à la première guerre mondiale.

Si la valeur de la monnaie se détériore de jour en jour sinon d'heure en heure, comme ce fut le cas précisément en Allemagne en 1922, la transformation de la monnaie par l'achat de biens, c'est-à-dire de stocks pour le commerçant, sera, non seulement, le seul moyen pour faire obstacle à la perte de richesse due à la détérioration du pouvoir d'achat de la monnaie, mais aussi et surtout pour le commerçant une source de richesse. En effet, le stock, dans cette période, augmente de valeur jusqu'à faire dépasser le taux de rentabilité de l'investissement du taux de l'intérêt.

Sans aller jusqu'à des périodes aussi troublées, il faut cependant considérer que "la fuite de la monnaie vers des biens réels" constitue un motif important de détention de stocks. Motifs de spéculation, motif de richesse sont pourtant deux aspects d'une même réalité. Ils sont tous deux fondés sur la prévision.

2.2 Motifs de non-détention des stocks : les coûts.

Incontestablement, les stocks sont, à l'origine, une transformation d'actifs monétaires en biens réels : ils sont donc une immobilisation de capitaux. Or toute immobilisation de capitaux coûte, d'une part dans la mesure de cette immobilisation, d'autre part dans la mesure du taux de rendement alternatif d'autres immobilisations de capitaux. Nous analyserons donc successivement le coût de l'approvisionnement en stock, le coût de stockage, et la pénalité due à la rupture de stock. Dans une remarque nous analyserons deux types de coûts qui interviennent lors de l'intégration des stocks mais dont la justification n'apparaîtra qu'ultérieurement.

22.1 Coût d'approvisionnement.

Lorsqu'une firme veut vendre un bien, elle doit soit le commander à une firme qui le produit, soit le produire elle-même pour approvisionner son stock. On considère généralement que le coût d'approvisionnement est directement proportionnel au nombre d'unités approvisionnées, avec soit pour une firme commerciale, le prix de vente du fournisseur, soit pour une firme de production, le prix de revient du produit, comme coéfficient de proportionnalités. On y adjoint souvent un coût fixe qui représente des frais généraux ou un coût de lancement de fabrication. Souvent, de plus, les modèles tentent de tenir compte des économies ou déséconomies d'échelles. Cela donne lieu à la formalisation d'une courbe de coût marginal décroissante ou croissante avec les quantités approvisionnées.

22.2 Coût de stockage.

Le coût de détention d'un stock se compose de plusieurs considérations : avant tout, un stock doit être financé par des capitaux à plus ou moins long terme. Ces capitaux sont disponibles moyennant un certain montant d'intérêts imputables au produit vendu. Un autre élément de ce coût peut être la mesure de l'obsolescence ou de la détérioration des produits stockés. L'immobilisation de capitaux à long terme dûs à l'achat de hangars, de dépôts etc ... servant à l'entrepôt des produits stockés, le personnel magasinier, l'entretien, sont autant d'autres éléments dont il faut tenir compte dans ce coût.

D'autre part, si l'on considére la firme sous l'angle du flux d'informations, on doit concevoir qu'à l'information provenant des stocks est attachée une valeur et un coût. Or l'information provenant ou concernant les stocks peut être différente de firme à firme, la structure peut être plus ou moins développée selon le système de traitement de l'information, les canaux de transmission de l'information, et les moments du temps où les informations sont disponibles. Ainsi, il est logique qu'un état du stock donné par un inventaire coûtera moins cher si cet inventaire est fait tous les ans que s'il est fait tous les mois ou tous les jours ou d'une manière permanente, par exemple, par un ordinateur. Dans chaque cas le système de recherche et de traitement sera différent, et aura un coût différent à supporter.

Généralement, on suppose dans les modèles que le coût de stockage est proportionnel au nombre d'unités en stock, le système d'information étant donné. La base d'imputation est différente selon les modèles : s'agit-il de la moyenne des stocks de début et de fin de période, ou s'agit-il du stock restant en fin de période ? Les différences apparaîtront surtout selon le système d'information qui sous-tend chaque modèle (Modèle à contrôle périodique ou à contrôle permanent).

22.3 Coût de rupture de stock. ("Penality of shortage").

Ce coût est dû à l'excès de la demande sur les quantités disponibles dans la période (quantité résultant de la production de la période courante ou de la production d'une période antérieure ayant fait l'objet d'un stockage).

Il y a deux manièree extrêmes d'envisager ce coût selon le type de produit vendu et la réaction de la demande. Il s'agira, soit de la perte de profit résultant de l'achat du produit auprès d'un concurrent ; la différence entre le prix d'achat auprès du concurrent et le coût de production de la firme, ou le tarif préférentiel du distributeur auprès du fournisseur mesurant ce coût, soit de la perte de clients ou de "goodwill' occasionnée par des ventes différées ou perdues.

La formalisation du coût de rupture dépendra évidemment de cette distinction. De plus, une variété d'hypothèses peuvent être émises quant à la courbure de la fonction ; au plus simple, où le coût de rupture est proportionnel au nombre d'unités en rupture, au plus complexe où la courbe est convexe. Cette convexité est importante pour certaines entreprises qui considèrent que "des ruptures petites sont de peu de conséquences alors que des grandes causent des difficultés avec la clientèle plus que proportionnelles au nombre d'unités en rupture" (1). De toute manière, il faut bien se rendre compte que l'estimation d'un tel coût est très difficile et qu'elle relève plus de facteurs subjectifs en rapport avec le niveau de service à assurer que de facteurs objectifs.

22.4 Remarques : Taux d'escompte - Coût de changement du taux de production.

22.4.1 Taux d'escompte.

A partir du moment où l'on considère plusieurs périodes influençant les décisions présentes, il faut tenir compte d'un facteur d'actualisation des effets des périodes ultérieures sur la période suivante.

---

(1) Cfr Arrow-Karlin-Scarf.

En effet, si une firme s'approvisionne pour stocker, elle immobilise des capitaux qui ne lui seront rendus disponibles qu'après un certain temps et dont un emploi alternatif aurait pu être, par exemple, l'achat de fonds d'Etat où le prêt produisant un certain taux d'intérêt ou le taux de rendement interne de la firme s'il s' agit d'un investissement alternatif. Donc, l'unité monétaire dans un an doit être évaluée à a unités actuelles, où $a = \frac{1}{1 + i}$ (i étant le taux d'intérêt par période des fonds d'Etat). La période couvrant l'horizon de gestion est parfois assez courte pour qu'on ait pas à tenir compte de l'effet de l'actualisation ; a tend alors vers 1.

22.4.2 Coût de changement du taux de production.

Certains modèles intègrent un coût dû au changement du taux de production. Ce coût se justifie par le fait que le coût de production variable ne reprend pas l'ensemble des coûts fixes qui sont dûs à la production. En effet, on considère souvent que l'effet d' un changement du niveau de production n'a pas seulement des répercussions sur les coûts variables, mais qu'à certains niveaux, il y a un accroissement des coûts fixes dont on rend responsable l'accroissement de capacité (quel que soit le facteur de production). En fait, ce coût n'est pas pris en considération par la théorie économique traditionnelle parce qu'il est supposé intégré dans la fonction de production, et son emploi dans les modèles récents est dû à l'influence de la recherche opérationnelle.

De même nature que le coût de changement de production il y a un coût de changement du prix. En effet, il faut considérer que le changement du prix impose à la firme des coûts commerciaux tels que promotion, publicité, etc ... et souvent une diminution temporaire des ventes. Cependant les modèles n'en tiennent pas compte pour des raisons de simplicités (1).

---

(1) Pour ce paragraphe voir Mills, op. cit., p. 125-127.
Cfr aussi Arrow-Karlin-Scarf, op. cit., chap 5 et 6 (34-35-53).

2.3 Equilibre des motifs contradictoires.

Les motifs de détention et de non-détention des stocks examinés plus haut, sont contradictoires pour le gestionnaire. Il s'agira donc, en quelque sorte, de leur trouver un "juste milieu". Ramenant ce problème au but de la firme : la maximation du profit, on remarquera que si le modèle de gestion a introduit les stocks et les paramètres de coûts y afférant , cette maximisation du profit dégagera du modèle une quantité d'approvisionnement optimale. Le même type de résultat peut être obtenu par la minimisation des coûts à condition que les prix soient considérés comme constants, ce qui ne peut se faire que lorsque l'horizon de gestion est suffisamment court pour qu'aucune modification des prix n'intervienne durant cet horizon.

Cependant, le concept de solution optimale reçoit un contenu différent selon les différences d'environnement de marché, de gestion, de la firme et du produit.

On peut avoir :

1. Une solution optimale par rapport aux variables réelles dans le cas où la firme a une connaissance parfaite, et à tout moment, de son environnement.

2. Une solution optimale par rapport à des prévisions des états de l'environnement, soit du prix pour le cas de la concurrence parfaite, soit de la courbe de demande pour la concurrence imparfaite.

Il est à remarquer que le second point retire toute signification au concept d'équilibre de marché de la théorie tradieionnelle auquel était appliqué la solution optimale de la firme. Il faudra tenir compte de ceci lorsque nous analyserons cet équilibre.

S E C T I O N 3

Critique d'hypothèses de la théorie traditionnelle

Nous critiquerons la théorie traditionnelle dans l'optique d'un élargissement de ses hypothèses propre à y intégrer les stocks. Cette critique s'élaborera suivant trois axes : le temps, l'incertitude, la discordance temporelle qui peut exister entre les variables.

Il est à remarquer que l'introduction du temps dans le raisonnement implique largement les deux critiques ultérieures.

3.1 Le temps.

Puisque explicatives d'un équilibre instantané, les hypothèses de comportement de la firme dans la théorie traditionnelle, ne pouvaient dépasser leur cadre statique.

Nulle référence au temps, puisque toutes les forces en présence sont supposées opérer instantanément.

"En fait, dit Dister (1), la théorie de la firme s'attache à décrire l'influence du comportement de l'entrepreneur sur la formation des prix sur le marché, plutôt que d'étudier comment l'entrepreneur doit procéder pour décider de son comportement. Elle explique abstraitement des relations d'équilibres". Dès lors dans cette théorie aucune place ne peut être faite aux stocks, variable sans dimension temporelle sinon celle précisément de donner aux stocks une valeur économique.

C'est bien là la première critique à formuler.

---

(1) Dister, op. cit.

Le temps intervient dès qu'il y a stock. Il est une condition nécessaire, et de la manière dont nous l'introduisons dans nos hypothèses ou nos variables, dépendra non seulement la recherche et la solution d'un modèle de comportement, mais l'optimisation du comportement, du système parmi d'autres systèmes alternatifs. En effet, la justification de ceci se trouve dans les motifs de détention de stocks. Le motif fondamental, l'adoption de la politique à court terme de la firme à son environnement se fait nécessairement dans le temps. Une durée s'écoule entre le moment de la commande en stock et la vente des produits stockés.

3.2 L'incertitude.

La conséquence quasi immédiate de l'introduction du temps est l'incertitude.

En effet, si les décisions qui visent à adapter la politique de la firme à son environnement mouvant, parce que la réalité, et la demande, est différente d'un moment à l'autre, ces décisions sont prises avant d'avoir pu prendre connaissance de l'état de l'environnement.

Les décisions de production, le plan de production pour une période se fait avant que les commandes soient enregistrées. Remarquons tout de suite que toute firme n'est pas dans ce cas, et que certaines "travaillent à la commande", sans avoir de plan de production bien établi pour les commandes non encore connues. De toute manière, pour la grande majorité des firmes, l'hypothèse de connaissance parfaite de la théorie traditionnelle doit être rejetée.

Et c'est bien l'incertitude qui est l'objet de la détention des stocks pour les motifs de précaution et de spéculation. Par précaution pour une demande incertaine, et par spéculation sur des prévisions de l'état de l'environnement la firme s'adapte dans le temps à l'incertitude par la détention d'un stock.

Nous verrons dans la section suivante comment l'incertitude de la demande peut être formalisée.

3.3 Discordance entre la production et la demande.

Le motif de transaction résulte lui aussi de l'introduction du temps, et remet en question les hypothèses de la théorie traditionnelle. En effet, par l'introduction du stock et du temps dans le raisonnement, il fait intervenir le problème crucial, et en dernière analyse, le vrai problème de la firme, celui de la capacité de production et de l'investissement. Il nous fait entrevoir qu'une optimalisation doit se faire entre l'investissement en capacité de production et l'investissement en stock (c'est-à-dire le niveau de service), une capacité de production excédentaire, permettant d'approvisionner les stocks de telle sorte que le taux de production puisse être en moyenne plus grand que le taux de la demande, permettra d'assurer le niveau de service imposé par le coût de rupture, lui-même découlant de la forme du marché et du produit vendu.

Une capacité de production souvent inférieure à la demande découlera, au contraire, de l'insignifiance du coût de rupture par rapport au coût de stockage et au coût du capital.

Le calcul de l'investissement le plus rentable a donc la grosse part de responsabilité dans le problème de la structure organisationnelle de la firme, c'est-à-dire de sa faculté et de ses facilités d'adaptation au marché

* * *

***

*

Les critiques que nous émettons à l'égard de la théorie traditionnelle n'ont d'impact qu'au niveau des hypothèses dans lesquelles celle-ci s'insère. Nous avons voulu montrer que l'introduction des stocks dans le modèle de la firme implique la modification et l'élargissement des hypothèses de la théorie traditionnelle à savoir : l'introduction du temps, de l'incertitude et de discordances dues à la dimension temporelle de variables.

Dès lors que ces hypothèses sont élargies et modifiées, elles changent la structure même du problème. En effet, les hypothèses elles-mêmes deviennent variables. Selon la manière d'introduire le temps, selon le degré d'incertitude, selon le type de marché, les hypothèses du modèle de la firme changeront, et par là, le modèle lui-même.

L'objet de la section suivante sera d'analyser les différents changements possibles, déjà traités dans la littérature dans deux situations de marché : la concurrence parfaite et la concurrence imparfaite.

S E C T I O N 4

Elargissement des hypothèses

Après avoir parcouru les différentes critiques qui surgissent lors de l'introduction des stocks dans la théorie traditionnelle, il convient d'approfondir des questions qui ont déjà été posées et qui donnent lieu à ce nouveau cadre d'hypothèses, à savoir l'environnement dans lequel se situe la firme. Plus qu'à des hypothèses du marché, nous sommes confrontés, lors de l'introduction d'un processus dynamique nécessaire à l'élaboration d'un modèle de stock, à la formalisation de la demande et à la manière dont elle se présente.

Nous envisagerons successivement deux cas généraux : la concurrence parfaite et la concurrence imparfaite, soit deux hypothèses de marché dans lesquelles nous pourrons distinguer différents modèles selon le type de formalisation que reçoit la demande.

4.1 La Concurrence parfaite.

Dans cette situation, la firme n'a aucun pouvoir sur le prix, celui-ci étant déterminé par l'état du marché. En fait, la firme n'a pas le choix, si elle fixe un prix plus élevé que celui du marché, elle ne vendra rien ; si elle fixe un prix identique à celui du marché, elle peut vendre toute la quantité qu'elle désire, ce qui rend irrationnel le cas où elle vendrait à un prix plus bas que celui du marché. La décision de prix est donc sans fondement, la firme s'adaptant à chaque période au prix du marché. Reste la décision du montant à produire. Là, deux situations s'offrent à l'hypothèse : soit nous supposons que la firme peut décider de sa production après avoir pris connaissance du prix sur le marché ; cette situation revient alors au cas statique envisagé par la théorie traditionnelle : la firme produira et vendra (chaque période) jusqu'à la quantité réalisant l'égalité du coût marginal de production et du prix. Il n'y a donc pas de problème de stock. Le stock effectif est détenu pour le motif de transaction. Soit nous devons supposer que la firme doit décider de sa production sur base d'une prévision du prix, avant d'avoir donc pu prendre connaissance du prix effectif. Si la prévision n'est pas réalisée, la firme enregistre un manque à gagner.

Les modèles basés sur cette hypothèse y adjoignent une troisième variable de décision : la décision du nombre d'unité à vendre.

4.2 La Concurrence imparfaite.

Dans une situation de marché telle que la Concurrence imparfaite, on suppose généralement que la firme connaît, au moins de manière probabiliste, la demande pour son produit. Décidant du prix auquel elle offrira son produit, elle connaîtra donc le montant de vente auquel elle doit s'attendre dans la période, et décidera de produire en conséquence.

(i) Lorsque la firme connaît la courbe de demande avec certitude, avant de devoir décider de sa politique, nous tombons dans le cas couramment envisagé par la théorie économique. Nul besoin de stocks (sinon le stock détenu pour le motif de transaction) ou d'anticipation de prix ; la firme détermine son prix à l'intersection des courbes de recette et de coût marginal, la production et les ventes sont automatiquement fixées. Mais ceci ne peut être admis que dans le cas où la firme ne s'attend à aucun changement de la courbe de demande.

(ii) Si la firme est amenée à prévoir un changement dans les réponses de l'environnement, elle se trouve devant une demande incertaine qui lui fera encourir soit un stock, soit une rupture de stock si la production est supérieure ou inférieure à la demande.

Plusieurs types de situations sont possibles :

a) la firme doit déterminer le prix et la production avant de connaître la demande.

b) la firme doit déterminer son prix avant de connaître la demande, mais peut décider de sa production en la connaissant.

D'autres hypothèses sont impliquées par la conception temporelle de la demande :

(i) La demande peut, en effet, se produire par lots unitaires, mais à des moments incertains ou aléatoires, sur un espace temporel continu. On peut traiter ce genre de problèmes par la théorie des files d'attentes.

(ii) Plus généralement, on procède à une découpe séquentielle du temps qui met en face de la firme un horizon fini ou infini de périodes pendant lesquelles apparaît une certaine demande à laquelle elle devra répondre. Les procédures de résolution sont ici plus complexes et ressortissent des équations à différences finies et de la programmation dynamique. La programmation dynamique tentera de déterminer les solutions optimales quant aux décisions de prix et de production pour chaque période d'horizon de gestion et en fonction de cet horizon. Dans chaque problème trouvant une solution de ce type, il y aura donc l'introduction de deux hypothèses supplémentaires, à savoir : l'horizon de gestion et la durée réelle de la période de base.

Venons-en à présent au risque proprement dit. Trois situations sont possibles.

(i) L'avenir est connu avec certitude : le cas a été examiné plus haut. La courbe de demande est connue avant de prendre les décisions.

(ii) L'avenir est connu de manière probabiliste : ici, la courbe de demande est connue comme une variable aléatoire. A chaque valeur que pourrait prendre la demande, à un certain prix, est attachée une probabilité.

(iii) L'avenir est inconnu : la firme ne connaît ni la courbe de demande, ni la distribution de probabilité qui lui est attachée. Tout au plus peut-elle estimer subjectivement ces fonctions.

Des trois situations, la première a été envisagée par la théorie économique traditionnelle, la seconde a fait l'objet d'études approfondies par des auteurs s'occupant de recherche opérationnelle, et par Mills qui y intègre les prix (cfr Infra) ; quant à la troisième nous l'analyserons plus en détail dans les chapitres qui suivent.

Pour ce faire, nous aurons besoin des formalisations et hypothèses dégagées dans les modèles où l'avenir est connu de manière aléatoire, c'est dans ce but que nous les analyserons ci-après.

Remarque : Hypothèses concernant la fonction de demande probabiliste.

La quantité demandée est fonction du prix offert par la firme pour son produit et d'une variable aléatoire dont on connaît la distribution de probabilité.

Soit donc : $x = X(p, u)$

La signification de u est claire, il s'agit du terme qui résume les influences de tous les facteurs explicatifs de la quantité demandée, autres que le prix. Ces facteurs explicatifs ne sont pas explicites dans la fonction parce que soit, ils ne sont pas connus, soit ils ne sont pas estimables soit, leurs effets ne sont pas permanents.

avec p = prix offert
x = quantité demandée
u = terme aléatoire.

et soit la distribution de probabilité de u, qui peut elle même être fonction du prix : $f(u, p)$. Pour des raisons de simplicité on considère que le terme aléatoire est indépendant du prix, p.

Reste à déterminer la fonction $X(p, u)$. Comme $f(u)$ n'est pas fonction de p, on peut admettre que la firme connaît la courbe de demande avant de décider, mais que cette courbe est affectée par le terme aléatoire de manière soit additive (Mills (1)), soit multiplicative (Arrow-Harris-Marchak (2) et A. Nevins (3)). Cette conception n'est pas tellement éloignée de celle de la théorie traditionnelle puisqu'ici aussi on connaît la courbe, mais que celle-ci est sujette à une perturbation aléatoire dont l'espérance mathématique est l'élément neutre de l'opérateur qui les structure.

- Addition : $x = X(p) + u$ avec $E(u) = 0$
- Multiplication: $x = X(p).u$ avec $E(u) = 1$.

4.3 Equilibre de la firme.

En introduisant le temps dans le modèle de la firme, nous avons voulu tenir compte de la durée qui s'écoule par exemple entre le moment de la commande en stock d'un bien et sa vente, ce qui a permis l'introduction des stocks. Nous avons déjà dit que cette durée pouvait être scindée en périodes de temps. Dès lors, la résolution peut se faire en ne tenant compte que de la solution de la période courante, soit en tenant compte, en outre, de l'effet des périodes ultérieures de l'horizon de gestion sur les décisions de la période courante,

(1) Mills, op. cit.
(2) Arrow - Harris - Marchak, dans Arrow - Karlin - Scarf, op. cit.
(3) A. Nevins. Voir bibliographie.

(i) Modèles à une période.

Certains modèles ne comprennent donc qu'une période - soit que l'environnement ou le produit l'impose ; c'est le cas par exemple du vendeur de journaux qui à la fin de la journée doit les avoir tous écoulés, sans quoi il encourre un coût de production sans contre-partie dans la recette, - soit qu'on intègre une fonction représentant approximativement l'effet des périodes ultérieures sur les décisions de la période courante (cfr infra Mills)

(ii) Modèles à périodes multiples.

Comme nous l'avons dit plus haut, le temps est une variable à part entière dans ce type de modèle, qu'il soit considéré comme variable continue ou discrète.

Nous nous tournerons exclusivement vers les modèles où le temps est une variable discrète (périodes). La firme découpe donc son horizon de gestion en périodes de temps finies et égales entre elles. La solution optimale pour une période est évidemment fonction de l'horizon de gestion, de la prévision de la demande pour la période courante, et de deux effets :

- l'un des périodes antérieures : effet contenu dans le niveau des stocks du début de la période.
- l'autre des périodes ultérieures : effet contenu dans le stock de fin de période, ou la rupture de stock.

On formalise ce problème aisément par l'équation récursive de la programmation dynamique.

En fait, dans un cas comme dans l'autre, nous nous éloignons du concept traditionnel de l'équilibre. L'équilibre pour la théorie traditionnelle est instantané parce qu'à tout moment il y a équilibre. Ici, nous formalisons le comportement du producteur face à une demande incertaine. Les décisions sont prises sur base de prévisions qui se réalisent rarement. D'où le marché est rarement "nettoyé" (comme disent les auteurs Anglo-saxons), c'est-à-dire que à chaque période l'offre n'est pas égale à la demande au prix du marché et donc que soit le producteur "se retire du marché" en fin de période avec un stock et un coût ou un manque à gagner qui lui est imputable, soit c'est le consommateur qui se "retire du marché" avec dans le coeur la frustration d'un désir inassouvi.

On ne peut donc plus considérer qu'il y a équilibre au sens de la théorie traditionnelle.

Pour les modèles à une période, les auteurs ont alors conçu de comparer les solutions de quantité et de prix aux solutions d'équilibre qui se seraient produites dans le même cadre d'hypothèses pour un modèle sans risque, sans incertitude. Ce qui revient aux solutions de la théorie traditionnelle.

Si, par ailleurs, la recherche de l'optimum se fait en tenant compte de tout l'horizon de gestion, (Modèles multi-périodes) une autre conception de l'équilibre peut surgir : la stationnarité du modèle. Ainsi, raisonnant sur des horizons de gestion infinis de périodes, les modèles peuvent tenter de trouver une règle de décision, une solution d'équilibre dans le temps, en supposant une distribution stationnaire de la demande.

L'équilibre envisagé ici, est caractérisé par un niveau de stock tel que le niveau de stock réalisé fluctue étroitement autour de cette valeur, les décisions de prix et de production restant elles-mêmes stationnaires de périodes en périodes.

C H A P I T R E   I I

INTRODUCTION

Les modèles que nous développerons dans ce chapitre ont tous pour cadre la Concurrence Imparfaite. Chacun d'eux tente d'intégrer la gestion de la production, des prix et des stocks. Le décideur peut donc faire varier le prix et la production en début de période en vue d'adapter la firme aux prévisions de la demande.

La demande est supposée aléatoire, à distribution de probabilités connues, et dépendantes du prix comme paramètre.

Pour un stock initial donné, I, le but du décideur sera de choisir un prix et une production, z, qui maximisera la somme des profits attendus escomptés sur un horizon de T périodes (T peut égaler 1 ... ∞).

Nous analyserons successivement les travaux de Mills, Karlin et Carr, et Nevins. Le modèle de base est celui de Mills : les conclusions différentes auxquelles arrivent les auteurs sont dues à des modifications à ce modèle de base.

Le modèle de Mills est développé en trois étapes :

une première où l'horizon de gestion ne comprend qu'une période;

une seconde où l'on ajoute à ce modèle d'une période une approximation des périodes ultérieures;

une troisième étape constituée par le test de ce modèle sur des données statistiques.

S E C T I O N 1

Modèle de Mills (1)

1.1 Horizon d'une période

11.1 Hypothèses

a) temporelles : nous supposons un horizon d'une période durant laquelle la firme vendra la quantité demandée de son produit si celle-ci est inférieure ou égale à la quantité produite

Cette quantité produite de même que le prix ont fait l'objet d'une décision en début de période.

b) Demande : la firme connaît la courbe de demande pour son produit, mais cette courbe est affectée par une perturbation aléatoire u, indépendante du prix, et que la firme ne connaît pas en début de période, moment où elle doit décider de son prix et de sa production.

Soit x la demande, $X(p)$ fonction de demande, u la variable aléatoire, et $f(u)$ la fonction de distribution de probabilité de u.

La fonction de demande est alors :

$$x = X(p) + u$$

(on suppose l'addivité du terme aléatoire).

La fonction de fréquence :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(u)\, du$$

donnant la probabilité que u n'exèdera pas valeur arbitraire, et donc que x n'excèdera pas $X(p;\alpha)$. En fait, on considère ici que la firme fait la prévision $X(p)$ au prix p, et u caractérise alors les erreurs de prévisions. On peut ainsi faire l'hypothèse que l'espérance mathématique de u est $E(u) = 0$.

---

(1) Mills, Op. cit.

c) les coûts : La firme encourre pendant la période un coût de production, fonction de la quantité produite. Soit $c(z)$ avec z = quantité produite.

Si la demande est inférieure à la quantité produite, le stock restant est supposé avoir une valeur économique nulle, il n'y a donc aucun motif de détention de stock, et aucun coût de stockage. Le seul coût est celui qui est engendré par la production des unités invendues. (Ceci n'est pas vrai lorsqu'il y a plusieurs périodes).

On suppose qu'il n'y a pas de coût de rupture si la demande excède l'offre.

d) Fonction objective : la firme tentera de maximiser l'espérance mathématique du profit attendu.

11.2 Modèle

Soit la recette réalisée, fonction des décisions de production et de prix :

$$R^{*}(z, p) = \begin{cases} z.p & \text{si} \quad x \geqslant z \\ x.p & \text{si} \quad x \leqslant z \end{cases}$$

en effet, eu égard à u la perturbation aléatoire, la prévision de début de période n'est pas nécessairement réalisée.

L'espérance mathématique de la recette est alors :

$$E\left[R^{*}(z,p)\right] = p\,x.\left[\text{Prob}\,(x \leqslant z)\right] + p\,z\left[\text{Prob}\,(x \geqslant z)\right] \qquad (1)$$

avec Prob $(x \leqslant z)$, la probabilité que x soit plus grand ou égal à z.

En remplaçant x par $X(p) + u$ dans (1) et transformant, on a :

$$E\left[R^{*}(z,p)\right] = p\int_{-\infty}^{\left[z - X(p)\right]} \left[X(p) + u\right] f(u)\,du + pz.$$

$$\int_{\left[z - x(p)\right]}^{\infty} f(u)\,du$$

$$= p.X(p) - p\, X(p) \int_{[z - X(p)]}^{\infty} f(u)\, du - p. \int_{[z - x(p)]}^{\infty} u\, f(u)\, du$$

$$+ \; p\, z \int_{[z - x(p)]}^{\infty} f(u)\, du.$$

$$= p\, X(p) - p\, [r - x(p)] \int_{[z - x(p)]}^{\infty} f(u)\, du - p \int_{[z - x(p)}^{\infty} u\, f(u) du$$

$$= p\, X(p) - p \int_{[z - x(p)]}^{\infty} [X(p) + u - z]\, f(u)\, du$$

$$= p.X(p) - p.D(z,p) \tag{2}$$

avec $D(z,p)$ le nombre moyen de rupture de stock.

Le profit attendu, associé à un prix p et une production z

$$E\, [\pi\, (z,p)] = p\, X(p) - p\, D(z,p) - C(z) \tag{3}$$

qu'il faut maximiser par rapport à p et à z par annulation de la dérivée première

1) $\frac{d}{dp}\, [R^{*}\, (z,p)] = \frac{d\overline{R}}{dp} \;-\; p\, D'_p\, (z,p) - D(z,p) = o.$

avec : $\overline{R} = p.X(p)$ la recette moyenne attendue

$$D'_p\, (z,p) = X'(p)\, [1 - F(z - X(p)] = \frac{d}{dp}\, [D(z,p)]$$

$$X'(p) = \frac{d}{dp}\, [X(p)]$$

$$2) \quad -\left\{ \frac{d}{d_z} \left[E\ (z,p) \right] \right\} = p\ D_z\ (z,p) + c'(z) = o. \qquad (5)$$

$$\text{avec } D_z\ (z,p) = -\left[1 - F(z - X(p)) \right] = \frac{d}{dz} \left[D\ (z,p) \right]$$

Les décisions p et r optimales sont déterminées en résolvant le système d'équations (4) et (5).

11.3 Caractéristiques de l'optimum.

a) L'équation (4) donne :

$$\frac{d\bar{R}}{dp} = p\ D_p\ (z,p) - D(z,p).$$

Donc, pour chaque niveau de production, le prix est en équilibre lorsqu'une légère diminution du prix augmente le revenu qui aurait été réalisé à partir de l'accroissement conséquent des ventes, d'une quantité égale à la diminution du revenu attendu conséquent à l'accroissement de la probabilité de rupture. En d'autres termes, une baisse de prix augmente la quantité moyenne demandée, et le revenu total attendu s'accroîtrait si la demande supplémentaire se transformait totalement en ventes. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas puisqu'une augmentation de la demande pour un niveau fixé de la production augmente aussi la probabilité de rupture et le montant moyen d'unités en ruptures.

Comme dans le cas où l'avenir est certain, le prix s'établit en un point de la courbe de demande où le revenu marginal est décroissant

$$\left(\frac{d\bar{R}}{dp} < 0 \right)$$

S'il en était autrement une augmentation du prix accroîtrait avec certitude la recette d'un montant

$$\frac{d\bar{R}}{dp} > 0 \quad \text{si} \quad x \leq z$$

$$zdp \qquad \text{si} \quad x > z.$$

b) L'équation (5) donne :

$$p\, D_z\, (z,p) + c'(z) = 0$$

or $Dz\ (z,p) = -\left[1 - F\ (z - X(p)\right] < 0$

Si $Dz\ (z,p)$ est négatif, l'équation (5) s'interprète comme suit : un léger accroissement de la production augmente le revenu du même montant qu'il accroîtrait le coût de production.
(5) devient :

$$c'(z) = p \left[1 - F\ (z - x(p))\right]$$

$p \left[1 - F\ (z - x(p))\right]$ est la valeur attendue de l'accroissement du revenu.

$\left[1 - F\ (z - X\ (p))\right]$ est la probabilité que la demande excède la production ou la probabilité de rupture.
(5) devient :

$$c'(z) = p \left[1 - F\ (z - X(p))\right]$$

$p \left[1 - F\ (z - x(p))\right]$ est la valeur attendue de l'accroissement du revenu.

$\left[1 - F\ (z - X(p)\right]$ est la probabilité que la demande excède la production ou la probabilité de rupture
d'où (5) peut s'écrire :

$$F\ (z - X(p)) = \frac{p - c'(z)}{p} \qquad (6)$$

or, nous pouvons interpréter $p - c'\ (z)$ comme le bénéfice unitaire et donc interpréter (6) comme suit :

A l'équilibre, la probabilité qu'une unité produite reste invendue en fin de période est égale au pourcentage du bénéfice dans le prix de cette unité.

11.4 Comparaison avec le modèle en avenir certain

Mills démontre les trois corrolaires suivants :

Corrolaire A :

Si le coût marginal est constant, le prix d'équilibre en avenir incertain ne peut être plus élevé que le prix d'équilibre en avenir certain.

Corrolaire B :

Si le coût marginal est croissant et si soit la production d'équilibre en avenir incertain est au plus égale à la production en avenir certain ($z^* \leqslant \bar{z}$) soit la production en avenir certain est au plus égale à la demande attendue au prix en avenir incertain ($\bar{z} \leqslant X(p)$), alors le prix d'équilibre en avenir incertain est au plus égal au prix en avenir certain ($p^* \leqslant \bar{p}$).

Corrolaire C :

Si le coût marginal de production est décroissant et si soit la production d'équilibre en avenir incertain est au moins égale à la production d'équilibre en avenir certain soit la demande attendue au prix d'équilibre en avenir incertain est au moins égale à la production d'équilibre en avenir certain, alors le prix d'équilibre en avenir incertain est au plus égal au prix d'équilibre en avenir certain ($p^* \leqslant \bar{p}$).

1.2 Horizon à périodes multiples

Reprenant les mêmes hypothèses, Mills cherche à résoudre le problème lorsque plusieurs périodes découpent l'horizon de gestion. La programmation dynamique soulève des problèmes difficiles à résoudre au point de vue formalisation; aussi la procédure la plus aisée sera d'approximer le vrai problème.

A juste titre, la littérature a montré que les décisions prises en période 1 affectent les décisions des périodes ultérieures, et dans ce sens affectent aussi le profit global sur un certain nombre de périodes. C'est le but de la programmation dynamique de rendre optimum les décisions à prendre, non plus sur la période courante, mais en considérant la suite des décisions d'un horizon de gestion de périodes multiples.

Supposant le comportement rationnel, Mills et la plupart des auteurs sont obligés de reconnaître que la firme doit tenir compte du plus de périodes ultérieures possibles. Mais chaque période suppose une prévision valable, et non seulement cela, mais le problème lui-même doit avoir une solution valable. Or chacun sait que lorsqu'on considère un avenir éloigné, non seulement l'environnement externe est variable (Demande) mais aussi l'environnement interne (les paramètres de coût).

Heureusement, le facteur d'escompte vient atténuer l'influence des périodes ultérieures en sorte que celle-ci devient insignifiante après un nombre suffisant de périodes.

De là surgit sans conteste la solution par une <u>approximation</u>. Au reste le problème de programmation est très difficile à estimer et à résoudre.

Arrow (1) propose alors une approximation des périodes ultérieures, formalisée en une fonction, basée sur l'<u>intuition</u> ou l'<u>expérience</u> et permettant de ne pas avoir à résoudre le problème de programmation.

12.1 Approximation

Puisque les décisions prises dans le futur ne peuvent en aucun cas influer sur le profit attendu de la première période, alors que l'inverse n'est pas vrai; nous pensons approcher le problème en le scindant :

- la maximation du profit attendu de la première période;

---

(1) Arrow-Kemeth : "Decision theory and operationnal research", Operationnal Research V, December 1957, p. 765-774.

- une fonction représentant l'effet des décisions de la première période sur les profits attendus des autres périodes.

La difficulté réside dans le fait que cette fonction doit tenir compte de toutes les décisions futures et de la distribution de toutes les variables aléatoires.

Cette difficulté disparaît pourtant quand nous suggérons que cette fonction devrait être estimée par intuition ou expérience sans résolution formelle du problème. "La simplification de base consiste à représenter l'effet des opérations courantes sur la rentabilité future par une fonction de la différence entre l'offre totale disponible et la quantité demandée dans la période courante" (Mills).

Soit y_n : l'offre totale disponible à la période n.

$$y_n = z_n + I_{n-1}$$

et soit la fonction : $C\ (y_n - x_n)$

qui est fonction soit - du stock terminal si $y_n > x_n$

- de la rupture si $y_n < x_n$

La proposition ci-dessus nous dit que la politique optimale de la firme pour la première période peut être approximée par la politique optimale du modèle à horizon d'une période, pourvu que le stock terminal ou la rupture pour la période est évaluée en accord avec la fonction $\mathcal{C}$.

Normalement, $\mathcal{C}$ a le signe de $(y_n - x_n)$:

- si $(y_n - x_n > 0$, cela implique que est la valeur imputée au stock restant à la fin de la période, c'est-à-dire les épargnes dans le coût de production future permises par le stock moins le coût de stockage.

- si $(y_n - x_n) < 0$, cela implique que $\mathcal{C}$ est le coût de rupture de stock de la période courante.

12.2 Modèle

Sachant que $y = z + I_{n-1}$, ou $z = y - I_{n-1}$
on a la fonction objective suivante :

$$E(\pi) = p.X(p) - p.D(y,p) - c(y - I) - \int_{-\infty}^{+\infty} e(y - X(p) - u \; f(u) \; du \qquad (7)$$

d'où en maximisant par rapport à p et y

$$\frac{d}{dp} \left[E(\pi) \right] = \frac{d}{dp}(\bar{R}) - D(y,p) - p.Dp(y,p) - X'(p) \int_{-\infty}^{+\infty} e'_p \; f(u) \; du \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dy} \left[E(\pi) \right] = p \; D(y,p) - \; '(y - I) + \int_{-\infty} e'_y \; f(u) \; du \qquad (9)$$

avec : $e'_p = \frac{d}{dp} \left[e \; (y - X(p) - u) \right]$

$$e'_y = \frac{d}{dy} \left[e \; (y - X(p) - u) \right]$$

12.3 Approximation linéaire du modèle

Dans une phase ultérieure, Mills forlamise plus précisément les différentes fonctions qui entrent dans son modèle. Ainsi pourra-t-il mieux arriver à des règles de décisions simples et susceptibles d'être testées.

D'abord, Mills suppose la distribution du terme aléatoire de la demande rectangulaire. A chaque valeur possible de la demande, c'est-à-dire les valeurs comprisent entre - h et + h, est attachée une probabilité égale.

Il suppose le coût marginal de production constant et égal à c. Il formalise la fonction ρ (y - x = $\begin{cases} - r(y - x) \text{ si } & y > x \\ (y - x) \text{ si } & y < x \end{cases}$

D'autre part, il adjoint au modèle un coût de changement du taux de production symétrique et quadratique. La firme encourera donc un coût si la production à la période t n'est pas la même que celle de la période t - 1.

Ce coût s'écrit : $y/_2 \, (z_t - z_{t-1})^2$ avec y constant. Différenciant par rapport à y_t, plutôt que par z_t, (ce qui revient au même puisque I_{t-1} est donné), il obtient la règle de décision suivante pour la production de la période : (à partir de (8)).

$$z_t = \left[\frac{h\,(p_t - c + h - r)}{p_t - c + k - r + 2\,h\,y}\right] + \left[\frac{p_t - c + k + r}{p_t - c + k + r + 2\,h\,g}\right] x_t$$

$$+ \left[\frac{2\,h\,g}{p_y - c + k - r + 2\,h\,y}\right] z_{t-1} - \left[\frac{p_t - c + k + r}{p_t - c + k + r - 2\,h\,g}\right] I_{t-1}. \tag{10}$$

Les coefficients sont évidemment fonction de p_t : le prix fixé pour la période.

L'amplitude des variations des coefficients entre crochets est affaire d'étude empirique. Néanmoins, on trouve suffisamment d'arguments pour supposer a priori que la variation dans le temps est vraisemblablement petite. En effet, p_t apparaît dans le nominateur et le dénominateur de chaque coefficient et les paramètres c, k, r et y varieront probablement dans le même sens que p_t.

Différenciant par rapport à p_t, on trouve une règle de décision beaucoup plus complexe pour les prix. Il s'agit d'une équation quadratique dans les prix dont la forme est la suivante : (à partir de (9)).

$$p_t^3 + [c_1 + c_2\,F + c_3\,G]\,p_t^2 + [c_4 + c_5\,F + c_6\,G]\,p_t$$

$$+ [c_7 + c_8\,F + c_9\,(F - G)^2] = 0. \tag{11}$$

où F est un effet de revenu sur la demande, effet incluant le trend et les variations cycliques.

$$G = z_{t-1} + I_{t-1}$$

Les termes constants c_1, c_2 ... c_3 sont des expressions complexes enfermant les paramètres de la demande, les différents paramètres de coûts et h.

On voit donc que la décision de prix est plus compliquée que la décision de production, la raison en est que x_t dépend de p_t et que p_t se trouve dans la fonction D (cfr supra).

1.3 Test du modèle

Une première chose est à signaler : la collecte des données est, en général, extrêmement difficile de telle sorte que nous ne connaîtrons jamais les valeurs des paramètres qui entrent dans les coefficients de l'équation (10).

Cependant, si ces coefficients, somme nous l'avons signalé, restent relativement constants, nous pourrons tester les équations précédentes par des modèles linéaires de régression ayant la forme suivante :

$$z_t = a_o + a, x_t^e + a_2 z_{t-1} + a_3 I_{t-1} \tag{12}$$

$$p_t = b_o + b_1, x_t^c + b_2 z_t + b_3 I_{t-1} \tag{13}$$

Le problème est alors de déterminet si (12) et (13) correspondent bien aux vraies règles de décisions (10) et (11).

Dans ce but, Mills simule des données concernant la demande en ayant spécifié les coefficients relatifs au trend et au cycle et leur sensibilité aux prix.

Des valeurs plausibles sont choisies pour les paramètres des fonctions de coût, et enfin, on donne des valeurs initiales arbitraires pour la production et les stocks, soient : z_o et I_o.

On résout alors (11) pour obtenir p_1; introduisant p_1 dans (10) on obtient z_1. Sachant la production et le prix pour la première période, on connaît aussi les ventes et les stocks pour cette période. On répète cette procédure pour les périodes ultérieures. On obtient ainsi des séries temporelles pour z, p, x^e et I.

En fait, ces séries montrent ce qui se serait passé si la firme, dans les conditions initiales et de paramètres précitées, suivait les règles de décisions dégagées par la théorie de Mills. D'autres séries temporelles peuvent être trouvées en faisant varier les paramètres, les conditions initiales et le comportement de l'erreur de prévision de la demande.

Ceci donné, on peut faire des régressions sur ces séries temporelles dans les formes (10) et (11). Les résultats de ces régressions sont probants puisqu'un bon nombre des régressions sont en accord avec les coefficients dégagés par la simulation : on peut donc conclure que l'approximation linéaire des droites de régressions (10 et (11) est bonne. De plus, les coefficients de corrélation sont élevés et généralement significatifs. (Il faut noter, comme Mills le fait d'ailleurs, que nous sommes en train de tester un modèle qui contient déjà un bon nombre d'autres approximations linéaires).

Avant d'aller plus loin, on doit encore mentionner deux points :

1) Pour la question des prévisions de la demande; on ne connaît généralement pas ces prévisions, aussi on leur substitue habituellement les ventes réelles. Ce qui implique que les prévisions ne soient pas biaisées.

2) Mills prend une équation de prix différente de celle qu'il a trouvée en (11). Il y inclut en effet le prix de la période précédente : p_{t-1}.

Mills donne les résultats de la Table I pour les différentes industries dont il a obtenu des statistiques : la "Southern Pine Lumber ", l'industrie du ciment, les "pneumatic tyres" et les magasins de chaussures. Pour chaque industrie, il teste trois équations; la règle de décision de production, et la règle de décision concernant les prix avec et sans prix de la période antérieure comme variable explicative. Dans le cas de l'industrie du ciment, l'association commerciale a fourni des prévisions de ventes, x_t^e ; Mills les emploie aussi bien que les ventes réelles pour tester le modèle. La dernière industrie, celle des chaussures, est examinée au niveau des détaillants, il considère alors les achats des détaillants comme leur production.

D'autre part, lorsqu'on analyse l'équation (10), nous pouvons en dégager des contraintes, quant à la grandeur et le signe des coefficients de l'équation de production (12).

En effet, la condition de second ordre pour un maximum impose $(p - c - k + r) > 0$, d'où il ressort que :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 > a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ 0 > a_3 > -1 \\ a_1 = -a_3 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 > a_2 \end{array}\right. \tag{14}$$

Quant à l'équation de prix, nous sommes forcés de nous en remettre à l'intuition. En terme de l'équation (13), nous pouvons nous attendre à ce que b_2 et b_3 soient négatifs. En effet, pour un niveau de demande donné, il serait normal que l'augmentation de prix et les changements de production soient des substituts. D'un autre côté, la détention d'un haut niveau de stock peut encourager la direction d'une firme à diminuer les prix. De toute façon, sans une règle de décision explicite pour les prix, on ne peut que conjecturer.

Pour l'équation de production, la table I indique si les coefficients satisfont les contraintes (14). Ceci fut fait sans test formel, mais les résultats sont évidents, et très souvent les conditions sont réalisées.

Les coéfficients de corrélation sont élevés, comme nous pouvons le voir, ce qui nous porte à croire que les résultats sont consistants avec l'approximation linéaire de modèle. Quant aux équations de prix, elles ne répondent pas du tout aux statistiques des différentes industries testées. En effet, les coéfficients de corrélation sont bas.

Ces résultats réfutent donc la théorie, ou au moins son approximation linéaire.

Interprétation des résultats.

Nous voyons donc, que l'équation de production est satisfaisante et que celle du prix ne l'est pas. Pourquoi ?

Mills offre trois explications possibles :

(1) La décision du prix est peut-être plus difficile ; il se peut aussi qu'elle ne fait pas l'objet de la même attention de la part des décideurs que celle de la production.

(2) On n'a pas pu trouver une règle de décision de prix explicite, et l'approximation linéaire employée pour tester le modèle peut être moins satisfaisante que celle de la production.

(3) Les données sont insatisfaisantes dans 3 sens :

- ce sont des données relatives à l'industrie plutôt qu'à des firmes ; les firmes peuvent plus facilement changer leur prix sans que le prix moyen de l'industrie ne s'en ressente très fort.

- Les données de prix sont particulièrement sujettes aux erreurs, l'échantillon n'étant pas recruté avec la même vigueur que les autres variables.

- Le concept de prix lui-même est complexe comparé à la production.

Dans le but de remédier aux inconvénients dus à l'échantillon, Budd et Stener (*) ont testés le modèle de Mills sur des données relatives à un produit d'une grande firme. Ceci a été fait pour plusieurs produits et les résultats obtenus pour l'équation de production sont moins encourageants que ceux trouvés par Mills pour des données plus agrégées. Quant aux résultats concernant l'équation de prix, ils sont tout aussi peu significatifs. (Il est à remarquer que dans ces statistiques les prix changent peu souvent).

(*) Budd et Stener : Manchester School, n° 36, 1968, pp. 1-25.

CONCLUSIONS

Sur base des hypothèses néo-classiques, et sur base d'hypothèses supplémentaires permettant l'introduction des stocks, Mills trouve un modèle susceptible d'expliquer la production et les prix. Dans le but de tester ce modèle, il lie les variables explicatives par une approximation linéaire. Le test est non-significatif pour les prix ; on pourrait être tenté de le croire significatif pour la production.

Que faut-il conclure ?

Mills suggère, pour défendre son modèle, que les phénomènes de prix sont tellement complexes que cela explique la pauvreté des résultats.

Pour Budd et Stener, par contre, si le test concernant les prix est non-significatif, tout le modèle doit être rejetté. En effet, l'inverse impliquerait que le modèle non-maximisé, c'est-à-dire l' équation (1), est en partie juste, en partie fausse.

De plus, ils signalent que $a_1 = -a_3$ se trouve réalisé dans un seul échantillon chez Mills et un seul de leurs échantillons. Par ailleurs, Budd et Stener, remarquent que les prix réels pour des firmes ont moins tendance à changer que les prix donnés par l'équation (5). Ils auraient plutôt tendance à changer par palliers.

Si, comme les tests le montrent, le modèle ne décrit pas le comportement de la firme, pourquoi en est-il ainsi ?

Une première solution serait de dire que l'approximation linéaire ne représente pas le modèle. Ceci est peu vraisemblable puisque les tests sur les données simulées à partir du modèle étaient significatifs.

Reste à dire alors qu'une au moins des hypothèses sur lesquelles repose le modèle est inadéquate. Si cela est le cas, il faut tout recommencer en partant sur de nouvelles hypothèses. Lesquelles ?

Nous avons déjà signalé à plusieurs reprises que certaines hypothèses néo-classiques sur lesquelles Mills base son modèle, paraissent inadéquates à représenter le comportement de la firme. En effet, plusieurs enquêtes (1) ont montré que la firme n'a pas une connaissance parfaite du marché, et que de ce fait son comportement vis-à-vis du risque est assez timoré.

En outre, ceci est corroboré par le fait que les prix évoluent par pallier.

Si nous acceptons le résultat de ces enquêtes, cela implique le changement de nos hypothèses de base et notamment la reformalisation de la demande. C'est cette reformalisation que nous tenterons aux chapitres suivants.

---

(1) Voir Dister, op. cit.

Résultats empiriques trouvés par Mills pour 4 Industries Américaines.

Equation de production : $Z_t = a_o + a_1 x_t + a_2 z_{t-1} + a_3 I_{t-1}$

N°	Produit	a_1	$1 > a_1 > o$	a_2	$1 > a_2 > o$	a_3	$o > a_3 > -1$	$a_1 = -a_3$	$a_1 + a_2 = 1$	$a_1 > a_2$	R^2
1	Southern Pine Lumber	0.443 (0.042)	Y	0.551 (0.047)	Y	-0.034 (0.023)	Y	N	Y	N	0.958
2	Cement	0.806 (0.030)	Y	0.155 (0.031)	Y	-0.266 (0.107)	Y	N	Y	Y	0.964
3	Cement (Predicted sales)	0.748 (0.043)	Y	0.127 (0.049)	Y	-0.612 (0.173)	Y	Y	Y	Y	0.920
4	Pneumatic Tyres	0.387 (0.047)	Y	0.561 (0.053)	Y	-0.033 (0.023)	Y	N	Y	N	0.808
5	Dept Store Shoes	0.847 (0.134)	Y	0.422 (0.082)	Y	-0.073 (0.027)	Y	N	N	Y	0.562

Y : consistent avec la théorie.

N : inconsistent avec la théorie.

Equations de Prix : $P_t = b_o + b_1 x_t + b_2 z_t + b_3 I_{t-1}$

N°	Product	b_1	b_2	b_3	R^2
1	Southern Pine Lumber	-0.011 (0.005)	0.024 (0.006)	-0.008 (0.002)	0.565
2	Cement	0.015 (0.017)	-0.017 (0.018)	-0.040 (0.019)	0.125
3	Cement (predicted sales)	-0.003 (0.009)	0.002 (0.010)	-0.025 (0.020)	0.105
4	Pneumatic Tyres	-0.007 (0.007)	0.010 (0.08)	0.013 (0.003)	0.206
5	Dept Stire Shoes	-0.094 (0.205)	0.172 (0.114)	0.282 (0.034)	0.523

Price Equations : $P_t = C_o + C_1 x_t + C_2 z_t + C_3 I_{t-1} + C_4 P_{t-1}$

N°	Product	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2
1	S.P.L.	0.012 (0.002)	-0.011 (0.003)	-0.003 (0.001)	0.904 (0.044)	0.924
2	Cement	0.015 (0.012)	-0.016 (0.013)	-0.032 (0.014)	0.560 (0.100)	0.571
3	Cement (predicted sales)	0.009 (0.007)	-0.010 (0.007)	-0.032 (0.014)	0.602 (0.105)	0.572
4	Pneumatic Tyres	0.001 (0.002)	0.001 (0.002)	-0.001 (0.001)	0.972 (0.021)	0.956
5	Dept Store Shoes	-0.030 (0.040)	0.061 (0.022)	0.005 (0.009)	0.978 (0.019)	0.982

S E C T I O N 2

Modèle de Karlin et Carr (*)

Se plaçant dans les mêmes hypothèses que Mills, Karlin et Carr ont approfondi la théorie mathématique du Contrôle optimal des stocks intégrant les prix. L'idée qu'ils ont poursuivie est de se demander si l'introduction de l'incertitude fait décroître le prix optimal en comparaison du prix optimal d'un modèle où la courbe de demande moyenne serait une courbe de demande déterministe. Ils montrent quant à eux que de la manière dont on introduit l'incertitude dans la demande (terme aléatoire ayant sur la courbe de demande un impact multiplicatif ou additif) dépendra si le prix est inférieur ou supérieur au prix optimal du modèle déterministe dans un modèle à période unique. Ces deux hypothèses, ils les appliquerons ensuite à un modèle à périodes multiples, où, supposant la courbe de demande moyenne stationnaire, la résolution par la programmation dynamique se fait par l'équation déduite de l'approximation à une infinité de périodes.

Dans le cas d'un terme aléatoire additif, aussi bien dans le modèle à période unique que dans le modèle à périodes multiples, le prix optimum du modèle est inférieur au prix optimal du modèle où la demande moyenne est considérée comme déterministe. Dans le cas du terme aléatoire multiplicatif, aussi bien dans le modèle à période unique que dans le modèle à périodes multiples, le prix optimal du modèle est supérieur au prix optimal du modèle où la demande moyenne est déterministe. Nous donnerons ici les grandes lignes de ces modèles.

---

(1) KARLIN S. : "Prices and optimal Inventory policy", p. 159-172 in Studies in Applied Probability and managment Science.
Arrow-Karlin-Scarf, 1962 Standford University Press.

1. Modèle à période unique.

1.1 Terme aléatoire multiplicatif.

Soit une demande x dont la courbe de demande moyenne se comporte normalement $(x'(p) < o)$, et soit un terme aléatoire ω dont la fonction de distribution est $\varphi(\omega)$ et la fonction de répartition (distribution cumulative) $\Phi(\omega)$.

Supposons en outre l'espérance mathématique $E(\omega) = 1$ et ω indépendant du prix p.

La fonction de demande est donc : $x = X(p).\omega$

et la fonction de répartition de x

$$F_p(x) = \begin{cases} o & \text{si } x < o \\ \Phi\left(\frac{x}{X(p)}\right) & x \geqslant o \end{cases}$$

la fonction de densité de probabilité :

$$f_p(x) = \frac{1}{X(p)} \varphi\left(\frac{x}{X(p)}\right)$$

Le profit est alors :

$$\pi(y,p) = \int_o^y p\, x\, d\, F_p(x) + \int_y^\infty p.y\, dF_p(x) - c\,.\,y$$

avec y : la production de la période

C : le coût de commande ou de production ou coût marginal supposé constant.

Soit :

$$\pi\ (y,p) = p.X(p) - c.y - p\int_{y}^{\infty}[1 - F_p(x)]\ dx \qquad (1)$$

Théorème 1.

Soit $\pi(\hat{y},p) = \max_{y} \pi\ (y,p)$ pour tout $p \geqslant o$.
Alors pour tout $p \leqslant C$, nous avons $\hat{y} = o$ et $\pi\ (\hat{y},p) = o$.
Si $p > c$, alors $\hat{y} = \bar{y}$, et $\pi(\hat{y},p) = \pi\ (\bar{y},p)$, où les quantités $\bar{y}$ et $\pi\ (\bar{y},p)$ sont comme suit

$$\bar{y} = F_p^{-1}\left(\frac{p - c}{p}\right)$$

$$\pi\ (\bar{y},p) = p.X(p) - c\ \bar{y} - p\int_{\bar{y}}^{\infty}[1 - F_p(x)]\ dx.$$

où F_p^{-1} (...) = fonction inverse de F_p (...) .

Différentiant par rapport à p pour obtenir la règle de décision des prix on a : (*)

$$\frac{d\ \pi\ \bar{y},p}{dp} = p.X'(p) + X(p) + p\int_{F_p^{-1}(v)}^{\infty}\frac{d}{dp}\ F_p(x)dx - \int_{F_p^{-1}(x)}^{\infty}[1 - F(x)]\ dx.$$

Lemme 1 $$\int_z^{\infty} \frac{d}{dp} F_p(x)\,dx = -\frac{X'(p)}{\bar{X}(p)} \left\{ z(1 - F_p(z)) + \int_z^{\infty} [1 - F_p(x)]\,dx \right\}$$

Démonstration cfr. Karlin et Carr. p. 164.

Lemme 2

Soit $$v = \frac{p - c}{p}$$

$$D(p) = 1 - \frac{1}{X(p)} \int_{F_p^{-1}(v)}^{\infty} [1 - F_p(x)]\,dx$$

$$N(p) = D(p) - \Phi^{-1}(v).$$

d'où :

$$\frac{d\pi(\bar{y},p)}{dp} = p.X'(p) + X(p) - p\,\frac{X'(p)}{X(p)} \left\{ F_p^{-1}(v)\,[1 - F_p(F_p^{-1}(v))] + \int_{F_p^{-1}(v)}^{\infty} [1 - F_p(x)]\,dx \right\} - \int_{F_p^{-1}(v)}^{\infty} [1 - F_p(x)]\,dx.$$

$$\frac{d\,\pi(\bar{y},p)}{dp} = [X(p) + p\,X'(p)]\,D(p) - c\,X'(p)\,\Phi^{-1}v\,.$$

Ajoutant et soustrayant $c \; X'(p) \; D(p)$

on a :

$$[X(p) + (p - c) X'(p)] D(p) + c X'(p) [D(p) - \Phi^{-1}(v)]$$

soit

$$\psi(p) \; D(p) + c X'(p) \; N(p) = 0.$$

avec

$\psi(p) = X(p) + (p-c) X'(p)$ la règle de décision de prix

dans un modèle déterministe.

Théorème 2.

Soit les quantités $\bar{y}$ et $\pi(\bar{y}, p)$ définies par le théorème 1

et soit : $\max_y \pi(\bar{y}, p) = \pi(\bar{y}(p^*) p^*)$;

alors p^* est le prix optimal pour le modèle à période unique

où le terme aléatoire est multiplicatif et p^* satisfait

l'équation :

$$\psi(p) = - \frac{c \; X'(p) \; N(p)}{D(p)}$$

où $\psi(p)$ est la fonction dont l'unique racine $\bar{p}$ est le

prix optimal du modèle déterministe.

De plus, $p^* > \bar{p}$, où $\bar{p}$ est donné par $\max_p (p - c) X(p)$.

1.2 Terme aléatoire additif.

Il s'agit ici du modèle de Mills dont nous ne reprendrons ni la formulation ni les conclusions.

La formulation de Karlin et Carr est intéressante, nous en donnerons les grandes lignes.

$$\pi(y, p) = p\,X(p) - c.y - p \int_{y-X(p)}^{\infty} [1 - \Phi(u)]\,du.$$

où u est le terme aléatoire et $\Phi(u)$ sa fonction de répartition.

$$\frac{d\pi(y,p)}{d\,y} = (p - c) - p\,\Phi(y - X(p)) = 0$$

$$\bar{y} = \Phi^{-1}\left(\frac{(p - c)}{p}\right) + X(p)$$ où Φ^{-1} est la fonction inverse de Φ.

$$\frac{d\,\pi(\bar{y}, p)}{d\,p} = \Psi(p) - \int_{\Phi^{-1}(v)}^{\infty} [1 - \Phi(u)]\,du.$$

et $\bar{p} > p^{*}$ comme nous l'avons prouvé pour le modèle de Mills.

(1) $$r\,(I) = \underset{p}{\mathrm{MAX}}\; r\,(I, p)$$

avec :

(2) $$r\,(I,\,p) = \underset{y \geqslant I}{\mathrm{MAX}} \left\{ \int_{-\infty}^{y} p.x \; d\,F_p(x) + \int_{y}^{\infty} p.y \; d\,F_p(x) - c(y-I) \right.$$

$$\left. + \; \theta \int_{y}^{\infty} r(o,\,p) \; d\,F_p(x) + \theta \int_{-\infty}^{y} r(y-x) \; d\,F_p(x) \right\}$$

(3) soit : $$\bar{\pi}\,(y,\,p) = p.X(p) - c.y - p \int_{y}^{\infty} \left[1 - F_p(x)\right] dx.$$

d'où :

$$r\,(I,\,p) = \underset{y \geqslant I}{\mathrm{MAX}} \left\{ c\,I + \bar{\pi}\,(y,\,p) + \theta\, r(o,p)\left[1 - F_p(y)\right] \right.$$

$$\left. + \theta \int_{-\infty}^{y} r(y-x,\,p) \; d\,F_p(x). \right\}$$

Pour $I \leqslant \hat{y}(p)$ et $p > c$ la solution de (4) se déduit de l'équation suivante (+)

$$r\,(I,\,p) = \frac{p - \theta\,c}{1 - \theta} \left[X(p) - \int_{\hat{y}(p)}^{\infty} \left[1 - F_p(x)\right] \right] - c\,(\hat{y}(p) - I)$$

avec $$\hat{y}(p) = F_p^{-1}\left(\frac{p - c}{p - c}\right).$$

(+) cfr Arrow-Karlin-Scarf : op. cit., chapitre 9, section 1, p.139.

La décision de prix est la suivante :

2.1 Pour le modèle où le terme aléatoire est multiplicatif : (Karlin et Carr, p. 170)

"Le prix optimal p^* existe et est une racine de :

$$D(p)\,\psi(p) = -(1-\theta)\,c\,\chi'(p)\,N(p)$$

(pour les notations cfr supra).

De plus, $p^* > \bar{p}$, où $\bar{p}$ est le prix optimal pour le modèle déterministe.

2.2 Pour le modèle où le terme aléatoire est additif :

Le prix optimal p^* est la racine de l'équation

$$\psi(p) = \int_{\Phi^{-1}(v)}^{\infty} \left[1 - \Phi(u)\right] du.$$

sous certaines conditions : notamment $\hat{y}(p) > 0$, $p > c$

De plus, $p^* < p$. (1)

3. CONCLUSION.

En résumé, Karlin et Carr démontrent que la distribution de la demande commande la grandeur du prix optimal. Si le terme aléatoire est multiplicatif le prix optimal est supérieur au prix du modèle déterministe. Inversément, si le terme aléatoire est additif le prix optimal est inférieur au prix optimal du modèle déterministe. Dans la section suivante, nous analyserons la contribution de A. Nevins à ce problème.

---

(1) Karlin et Carr, op. cit., p. 172.

S E C T I O N 3

Modèle de Simulation d ' A. Nevins (1)

A. Nevins reprend le même modèle que celui que Mills a exposé précédemment. Il considère un coût de stockage portant sur le stock de fin de période, et omet le coût de rupture de stock. Il applique à ce modèle la programmation dynamique qu'il simule sur un nombre fini de périodes. La distribution de la demande est stationnaire.

Il remarque aussitôt que le revenu marginal attendu de ce type de modèle dépend du stock initial, I, de telle sorte que le prix p et la production z sont déterminés en fonction de I d'où les relations $p = p(I)$ et $z = z(I)$.

Nevins se donne alors comme but de rechercher l'importance quantitative entre le prix optimal du modèle, p^*, et le prix optimal du modèle déterministe, $\bar{p}$, et de démontrer la dépendance critique de cette divergence du taux d'escompte et du coût de stockage. Il trouvera que la dichotomie trouvée par Karlin et Carr ne tient plus si le coût marginal de production ou de commande en stock est une fonction croissante de la quantité produite ou commandée.

1. Modèle.

Soit le profit attendu (moyen) :

$$E\ (\pi_t) = p_t \int_0^{y_t} x d\, \Phi(x\ ;\ p_t) + p_t\, y_t \int_{y_t}^{\infty} d\, \Phi(x\ ;\ p_t)$$
$$- c\ (y_t - I_t) - k\ I_t.$$

---

(1) A. Nevins : "Some effects of uncertainty : Simulation of a model of Price". Quarterly Journal of Economic Vol LXXX , Feb 1966 n° 1 p. 73.

Soit $f_t\ (I_t)$: la somme des profits attendus du début de la période t à la fin de la période T , chaque terme de la somme étant escompté à la première période.

Soit :

$$g_t\ (p_t,\ y_t,\ I_t) = \left[\frac{1}{1+i}\right]^{t-1} E(\pi_t) + \int_o^{y_t} f_{t+1}(y_t - x)\ d\,\Phi(x\ ;\ p_t)$$

$$+\ f_{t+1}\ (o) \int_{y_t}^{\infty} d\ \Phi(x\ ;\ p_t)$$

d'où f_t s'obtient par :

$$f_t\ (I_t) = \underset{p_t, y_t}{\mathrm{MAX}}\quad g_t\ (p_t,\ y_t,\ I_t).$$

sujet à : $p_t \geqslant o$ et $y_t \geqslant I_t$.

supposons en outre, $f_{t+1} \equiv o$.

Puisque $z_1 = y_1 - I_1$, lorsqu'on a y_1, on a nécessairement z. Donc, les valeurs choisies par le décideur sont $p_1\ (I_1)$ et $z(I_1)$ qui maximisent $g_1\ (p_1,\ y_1,\ I_1)$ sujet à $p_1 \geqslant o$ et $y_1 \geqslant I_1$. La résolution se fait ainsi par itération :

$$f_{T+1} \equiv o \Rightarrow f_T \Rightarrow f_{T-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_t.$$

Deux données sont nécessaires I_t et f_{T+1}.

2. Fonctions et valeurs des paramètres dans la simulation.

a - On considère un taux d'escompte : i = o, 0,001, 0,004, 0,01 et 0,1 ,

b - Un Coût marginal de stockage : k = 0, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 pourcents du coût marginal de production.

c - Une courbe de demande moyenne $X(p_t) = \begin{cases} b - a\ p_t & \text{si } p_t \leq \frac{b}{a} \\ o & \text{si } p_t > \frac{b}{a} \end{cases}$

L'incertitude est introduite de manière multiplicative, le terme aléatoire suivant une loi de distribution normale de moyenne 1 et d'écart-type σ = k.

d - On choisit les paramètres e et b de telle sorte que l'élasticité de la demande au prix (1) du modèle déterministe inclue les valeurs : 1,001, 1,5, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 15, 30, 60.

e - La courbe de coût de production est quadratique et croissante :

$$c\ (z_t) = x\ r_t^2 + B\ z_t$$

avec z_t, x, B $>$ o

$$c'(z_t) = z\ x\ z_t + \beta.$$

(1) Elasticité : $e\ (\overline{p}) = - \frac{\overline{p}\ X(\overline{p})}{X(\overline{p})} \quad \frac{a\ \overline{p}}{b-a\overline{p}}$

3. Résultats et conclusions de la Simulation.

A. Nevins montre que lorsque les valeurs des variables ont atteint les valeurs de l'équilibre dynamique, il y a alors coïncidence avec le modèle déterministe dans quatre caractéristiques :

1) La probabilité de rupture est nulle.

2) La probabilité que le prix ou le coût marginal de production change est nulle.

3) La production est égale à la demande attendue.

4) Les profits attendus sont maximés.

CONCLUSION

"L'incertitude seule ne crée pas de divergence entre le prix optimal du modèle et le prix optimal du modèle déterministe ; dans le but de faire apparaître une telle divergence nous avons besoin d'un taux d'escompte et d'un coût de stockage positif.

C H A P I T R E 3

ADAPTATION A L'INCERTITUDE ET A LA DUREE

P L A N

SECTION 1 Critique de la démarche et cadre de l'analyse.

1.1 Limite d'une théorie générale.
1.2 Théorie et modes de Comportement.
1.3 Justification des hypothèses.

SECTION 2 Analyse du problème de décision.

2.1 Le système d'information.
2.2 Périodes et Horizon de Gestion comme variables de décision.

L'analyse de Mills consiste à décrire le comportement de la firme dans un modèle qui soit le plus général possible pour pouvoir induire de tests économétriques que ce comportement est le comportement de toutes les firmes. Comme les tests économétriques sont peu significatifs, on pourrait déduire que les firmes ne se comportent pas toutes de la même manière ; chacune étant placées dans un environnement différent s'adapte à celui-ci selon une variété de modes qui sont autant de modèles différents.

Dans ce chapitre, nous verrons d'abord une critique de la démarche de Mills, en ceci que nous nous demanderons si une théorie générale de la firme a un sens. En fait, c'est l'analyse du problème de décisions qui répondra à cette question. Ensuite nous tâcherons de voir où réside les différences dans les modes de comportement et l'axiomatique du problème de décision. Dans un second paragraphe nous tenterons d'analyser le problème de décision sous l'angle de l'information. Ceci nous amènera à nous intéresser au système d'information et à l'influence qu'il a sur les périodes, d'où nous arriverons à la période de gestion comme variable de décision.

S E C T I O N 1

Critique de la démarche et cadre de l'Analyse

Jusqu'ici, nous avons vu que la théorie économique traditionnelle ne pouvait intégrer valablement les stocks du fait qu'elle se refusait à tenir compte de l'incertitude de la demande, et de la durée. Le modèle de Mills intégrait quant à lui cette incertitude, cette durée et les stocks. Les modèles de la recherche opérationnelle concernant la gestion des stocks sont extrêmement nombreux, leur variété résulte des hypothèses différentes dans lesquelles ils se placent. Pourtant, seuls ceux de Mills et de Karlin et Carr intègrent les prix dans leur démarche. Or, chaque modèle est, du point de vue logique, "exemplifiable" dans la réalité. Il serait donc intéressant de voir ce que donnent ces modèles lorsqu'on y intègre les prix.

Mais avant d'en arriver là, il convient de justifier les modèles qui ont été formulés, comme celui de Mills, et ceux que nous ferons, tant du point de vue de la démarche que du point de vue des hypothèses.

1.1 Limite d'une théorie générale.

Quel est le but de ces modèles ? Pour Mills, le but consiste à représenter le comportement de la firme dans sa gestion de la production, des prix et des stocks. L'objet de l'analyse est le comportement de la firme. C'est ici que surgit la difficulté ou, plus précisément, le choix. Il s'agit, en effet, de choisir entre :

1. La description d'un comportement général et abstrait, représentatif d'une structure, tel que le modèle (en tant que description rationnelle et quantitative) puisse s'appliquer à toute firme rencontrée dans la réalité. Voilà le but d'une théorie.

2. La description d'un comportement spécifique d'une firme réelle, à défaut de la connaissance d'une structure fondamentale.

Cette distinction est importante. En fait, c'est elle qui caractérise la différence entre l'approche de la théorie économique et l'approche de la recherche opérationnelle ou la science du managment.

Pour la recherche opérationnelle, il s'agit de rationaliser le comportement de la firme dans un univers donné quant aux critères, aux informations disponibles, au produit, au marché, etc ... La rationalisation doit aboutir à des règles de décisions meilleures. Le but et les résultats du modèle sont clairs. Le type de démarche ne pose pas de difficulté.

Il n'en va pas de même en ce qui concerne une théorie générale du comportement de la firme. Ce que Mills a voulu faire, en effet, se heurte aux mêmes obstacles que ceux auxquels s'est heurtée la théorie économique traditionnelle, à savoir :

1. Elle risque d'être taxée d'irréalisme pour peu que l'on considère des comportements spécifiques. Si les hypothèses, en d'autres termes, sont trop restrictives, très vite on ne peut plus considérer qu'il s'agit d'une théorie générale.

2. Si elle reste au niveau de généralité voulue , les conclusions qu'on peut en tirer sont vagues ou corroborent purement et simplement le bon sens le plus évident.

Par exemple, nous avons vu que la théorie économique traiditionnelle était criticable parce qu'elle n'intégrait pas les stocks ; plusieurs auteurs dont Mills ont voulu les introduire, ils entraient ainsi dans plus de détails, mais ce faisant, ils ont dû choisir entre un modèle à révision périodique des stocks et un modèle à révision permanente. Mills a choisi un modèle à révision périodique parce que le temps ainsi réduit à des périodes unitaires était à nouveau escamoté.

Or, dans la réalité, beaucoup de firmes ont instauré un système dit d'inventaire permanent. On peut donc se demander quelle est la valeur du modèle de Mills en tant que modèle général du comportement de la firme, même si les tests avaient été significatifs.

3. Si le but d'une théorie générale du comportement de la firme est de servir de base théorique ou de validation micro-économique à des modèles d'estimation économétrique d'estimation de courbe d'offre sur un marché, le problème change de sens. Néanmoins, si les erreurs de spécifications sont écartées, en ce qui concerne le modèle de régression, le modèle micro-économique n'est pas, pour cette raison et à cause de la réduction relative de l'aléa, justifié par le caractère significatif du modèle de régression.

Puisque l'établissement d'un modèle général de la firme rejette dans le terme aléatoire une grande partie de l'explication du comportement de la firme, notre tâche sera de dégager à partir d'hypothèses plus restrictives, les sources des différences de comportement. En ce sens l'analyse de modèles particuliers comporte un intérêt certain. C'est cette optique que nous adoptons. Nous verrons maintenant d'où peut provenir les différences dans les modes de comportement avant de passer à l'analyse du problème de décision en tant que tel.

1.2 Théories et modes de comportement.

Dès lors que nous voulons systématiser le comportement d'une firme, nous sommes obligés de partir de certaines hypothèses de bases qui serviront de canevas à l'analyse. Dans notre cas nous prendrons les mêmes axiomes que la théorie économique à savoir que la maximisation du profit est le critère final d'optimisation du comportement et donc que le comportement résulte lui-même d'une optimisation.

Nous supposerons aussi la rationalité de ce comportement. Ces hypothèses faites nous devons bien convenir que toutes les firmes ne tentent pas de maximiser leur profit ou que toutes n'ont pas une rationalité économique stricte. Il y a donc là source de différence de comportement. L'hypothèse que nous émettons pourtant sera justifiée ultérieurement.

Une autre source de différences résulte de la remarque suivante :

Chaque individualité humaine intègre dans son comportement deux dimensions dont elle développera l'une ou l'autre selon sa personnalité, son environnement, etc ...

1. Une dimension volontariste, tendant à la réalisation d'un but prédéfini, ou implicite, autour duquel la firme va s'organiser. Dans notre cas, pour maximiser son profit la firme va prévoir la demande et produire en conséquence de cette prévision.

2. Une dimension adaptive, tendant à aménager la politique des moyens à l'environnement changeant auquel la firme est confrontée dans la poursuite de son but. Il s'agira alors de trouver un système de gestion dont le caractère mécanique et routinier permet une adaptation la meilleure possible et aux moindres coûts aux données de l'environnement.

Lors de la construction du modèle d'une firme, il faut tenir compte de ces deux dimensions car il est clair que la gestion se fait par l'intermédiaire d'un système, d'une organisation routinière, alors que l'optimisation du système lui-même se fait par rapport à des prévisions, elles-mêmes dépendantes d'une structure qui peut être mouvante. La mise en place de règles de décisions n'est rien d'autre que la mise en place d'un système d'informations et d'organisation. Avant de poursuivre dans ce sens, nous tenterons de justifier les hypothèses de bases que nous avons adoptées.

1.3 Justification des Hypothèses.

L'axiome fondamental, pour simple qu'il soit lorsqu'il s'agit de recherche opérationnelle, est plus difficile à définir et à justifier lorsqu'il s'agit de théorie de la firme.

Le problème réside dans la définition du but poursuivi par la firme et des moyens appropriés à cet hypothétique but. Depuis toujours la science économique a résolu ce problème par l'énoncé des deux axiomes suivants :

(i) La maximisation du profit est ce vers quoi tend toute firme, c'est le but qu'elle se fixe.

(ii) La firme a un comportement rationnel, c'est-à-dire qu'elle tend à appliquer les moyens les plus efficaces dans la rédaction de son but.

A.- Bien sûr, on peut critiquer à l'infini le bien fondé de telles assertions. On n'a pas manqué de le faire. La maximation du profit est ressentie, en tant que but, avec de plus en plus de scepticisme, pour laisser la place à d'autres concepts tels que la maximation des ventes mesurées par le chiffre d'affaire (Baumal Economica août 1958), l'émulation, la joie de la réalisation, la fondation d'empires industriels, la volonté de puissance (Edwards et Towsend : Business Entreprise, its growth and organisation Macmillan 1959, p. 39) etc ... (1).

Nous ne pouvons pas nier que l'énumération précédente fasse partie du comportement de la firme, mais ne sont-ils pas de bien maigres buts lorsqu'on considère le système capitaliste dans lequel ils évoluent ? Ne sont-ils pas des comportements annexes ? Car chacun d'eux comporte peu de généralité : leur emploi ne se justifie que pour un nombre restreint de firme.

---

(1) Cité par Paelinck J. : "Note du Cours de Micro-Economie", F.N.D.P., 1969, p. 189.

Tandis que, dans un sens ou dans l'autre, la maximation du profit est susceptible de les contenir ou de les matérialiser tous. Or, c'est justement ce que nous recherchons aussi bien en théorie économique qu'en recherche opérationnelle où les buts de l'organisation sont multiples.

Voilà, pour nous, une justification de l'emploi du critère de maximation du profit.

B.- Quant à la rationalité, elle est d'autant plus contestable que nous ne sommes pas d'accord avec le but, mais elle est contestable aussi si nous ne considérons que le but de maximation du profit (critère d'appréciation de la rationalité économique que nous avons adopté). En effet, du point de vue de l'observateur objectif rarement la firme se comportera de telle manière qu'elle emploie les moyens les plus efficaces. A posteriori, le comportement de la firme peut paraître irrationnel, d'un stricte point de vue économique, mais ce n'est pas nécessairement le cas, à priori, lorsqu'on considère le contexte où elle se trouve d'incertitude quant à l'avenir et de connaissance imparfaite de son environnement, aussi bien interne qu'externe (externe : la demande ; interne : les coûts).

On objectera à cela que la firme, si elle devait se comporter rationnellement du point de vue économique devrait tout faire pour avoir une meilleure connaissance de son environnement, elle y aurait tout intérêt. Ce à quoi, il est facile de répondre comme le font des auteurs comme Marshack (1) et Mills (2) que le coût de l'information doit être pris en considération. Exemple : le coût de l'information varie fortement si l'information consiste dans la connaissance journalière, mensuelle ou annuelle de l'état des stocks.

---

(1) Marshack "Towards an Economic Theory of Organisation and Information" in Decision Process, Wiley, 1954, pp. 187-220.

(2) Mills : op. cit., p. 16.

S E C T I O N 2

Analyse du problème de décision

Nous venons de voir les deux hypothèses de base de notre modèle, il nous faut, à présent, préciser quels sont les rapports qui existent entre système d'informations, incertitude et temps. Posons tout de suite que nous emploirons le terme système en tant que l'infrastructure mise au point pour informer le décideur, le terme modèle étant employé pour désigner l'équation mathématique décrivant le comportement de la firme à l'intérieur d'un système.

2.1 Le système d'information.

C'est la toute récente informatique qui a mis l'accent sur l'importance du système d'information pour le décideur. En effet, par l'emploi des ordinateurs on a pu relever les données nécessaires à la décision, les mémoriser, les traiter, et les communiquer suffisamment vite que pour parvenir au décideur avant qu'il n'ait pris position.

En fait, on n'a fait que mettre l'accent sur l'importance du système, puisqu'aussi bien le système ,quelque forme qu'il ait revêtu antérieurement à l'ordinateur,existait déjà. La comptabilité générale, par exemple, n'est rien d'autre qu'une manière de traiter, de mémoriser, et de communiquer des informations à la gestion. Il est clair que les décisions prises dans une entreprise, le sont grâce à des informations. Autrement dit, si nous voulons modéliser ces décisions dans le but de trouver des décisions optimales, l' "état des variables" ou l' "état du processus" aussi bien que les coûts seront pour nous des informations auxquelles seront attachés des coûts (coûts de collecte, de traitement, de communication, etc ...) et des valeurs puisque chacune d'elles diminue l'incertitude et est donc susceptible d'augmenter l'espérance mathématique du profit.

On peut classer ces informations en deux catégories :

* les informations internes à l'entreprise.
* les informations externes à l'entreprise.

1. Les informations internes à l'entreprise.

Ce seront principalement pour notre problème l'état des stocks, et l'estimation des différents coûts.

a) Parmi les informations internes, l'état des stocks permet de connaître quel fut l'état de la demande à la période antérieure, puisque le stock de fin de période est égal, par définition, à l'excès de l'offre (production plus stock restant de la période ultérieure) sur la demande. Cette demande peut servir de base à la prévision de la demande pour la période ultérieure (pour le lissage exponentiel par exemple). Outre ce fait, la firme sait que l'offre de la période ultérieure contiendra au moins ce stock. Rien que par cela, on voit à quel point est importante l'information : "Etat des stocks". Or cette information coûte de plus en plus selon que l'inventaire est établi tous les jours, tous les mois ou tous les ans.

<u>Conclusion</u> :

Il y a un lien entre la périodicité de l'inventaire et la période de décision.

b) Un autre type d'informations internes consiste dans l'estimation des coûts ou des paramètres des fonctions de coût.

Les fonctions de coût ne sont pas immuables, elles dépendent entre autre du prix des matières premières, des salaires et traitements, du coût du capital, du coût de l'énergie, etc ... Tous ces facteurs sont extrêmement fluctuants au fil du temps. Or les paramètres des fonctions de coût, qui en dépendent, sont estimés à certains intervalles de temps et considérés comme constants dans chaque période. Cela, à nouveau, pour des raisons de coûts d'estimation ou de coûts de l'information.

2. Les informations externes à la firme.

Il s'agit principalement d'informations permettant d'estimer une prévision de ventes. Ces informations proviennent soit de données concernant les ventes passées soit d'enquêtes, de panel ou même de données macro-économiques. Moyennant des techniques de prévisions telle que le lissage, les modèles de régression, etc ... ou même les supputations purement subjective du décideur, on parvient à établir une prévision de la demande dont la précision n'est pas parfaite puisqu'un aléa plus ou moins important subsiste. On considère généralement que cet aléa est expliqué par les informations non disponibles par l'entreprise.

Il est clair, une fois de plus, que la prévision de la demande se fait pour une période donnée du temps. Par ailleurs, comme la prévision est faite par extrapolation sur base d'une structure passée, il est normal que plus long sera le terme de la prévision ou plus éloignée sera la période dont il faut prévoir la demande, moins précise sera cette prévision, ce dernier élément confinant généralement la firme dans des prévisions de court-terme dans sa gestion du processus productif.

2.2 Périodes et Horizon de gestion comme variables de décision.

Nous venons de voir d'une part que les décisions prises par la firme le sont sur bases d'informations, et d'autre part qu'à chacune de ces informations est attaché un coût. D'autre part, chaque grande classe d'informations que nous avons retenues comme la prévision, de la demande, l'estimation des coûts, l'état des stocks, doit être définie dans le temps. A chacune correspond un intervalle de temps, et puisque toutes sont utiles au problème de décision, il paraît normal que cet intervalle soit le même pour la prévision de la demande, pour l'estimation des coûts et pour l'inventaire. Si nous posons que l'horizon de gestion est l'intervalle de temps s'écoulant après la prise de décision pendant lequel il est possible d'estimer avec une certaine exactitude, à la fois, la demande et les coûts, les périodes sont alors la fragmentation de cet horizon de gestion en intervalles de temps à la fin desquels une prévision de la demande pour la période suivante est faite, de même qu'une estimation des coûts et un relevé de l'état des stocks. Comme nous avons stipulé qu'il y a des coûts inhérents à ces informations, il nous faudra optimiser la durée des périodes sur base de ces coûts. En d'autres termes, il faudra optimiser le système d'informations. On voit que gérer la firme consiste à adapter les décisions aux informations de l'environnement qui lui sont données par le système qu'elle a établi :

Cette adaptation peut se faire de plusieurs manières :

- a priori : sur base des prévisions de l'état de l'environnement.
- a posteriori : permettant un aménagement des comportements sur base de l'état passé et connu de l'environnement (ce qui est le cas dans la plupart des systèmes ou "information feedback system"). L'adaptation est alors purement mécanique.

Dans un cas comme dans l'autre, on peut valablement établir que plus la période de révision est courte, plus l'adaptation sera rapide, et moindres seront donc les déviations des variables de décision par rapport à leur optimum.

Ainsi voilà acquise la seconde fonction sur base de laquelle doit se faire l'optimisation du système ou de la longueur de la période.

Ces fonctions sont donc :

1. Plus la période est courte, plus élevés seront les coûts des informations.

2. Plus la période est courte, meilleurs seront les décisions par rapport à la demande réelle et aux coûts effectifs.

Puisque ces deux fonctions sont contradictoires, il s'agit de trouver un équilibre entre elles, équilibre qui sera l'optimum du système. Cet équilibre s'établira finalement entre deux investissements :

1. L'investissement dans l'infrastructure, la collecte et le traitement de l'information.

2. L'investissement en fond de roulement qui évoluera en fonction des plus ou moins grandes déviations des décisions par rapport à l'optimum qui aurait été calculé a posteriori (dans le cadre d'un modèle sans incertitude).

A ce stade, il n'y a plus deux variables de décisions mais trois :

- la production
- le prix
- la période de gestion.

De même qu'à la taille du lot à produire durant la période correspond un coût de production et une valeur de vente déterminée par le prix, à la longueur de la période correspond un coût dû à l'information et une valeur. Mais comment déterminer la valeur de l'information ? On peut considérer que cette valeur s'exprime différemment selon deux directions :

1. Elle dépend du nombre des informations recueillies, de leurs précisions et du traitement plus ou moins élaboré qu'ont leur fait subir.

2. Elle dépend aussi du nombre de fois que cette procédure d'information doit être faite dans l'horizon de gestion.

Dans cette deuxième optique le coût et la valeur de l'information varie directement avec le nombre de périodes de l'horizon de gestion. Nous l'avons dit, plus fréquentes sont les révisions des décisions, plus on se rapproche de l'optimum d'un modèle en univers certain ; plus rapidement, en effet, se fera l'adaptation aux données réelles de l'environnement.

Calculer alors la valeur de l'information supplémentaire consiste à calculer l'augmentation de l'espérance mathématique du profit sur l'horizon de gestion, suite à la diminution de l'incertitude. C'est par rapport à ce critère que le choix sera fait.

Dans le chapitre suivant nous développerons un modèle où l'adaptation de la politique de production et de prix est faite en tenant compte à la fois de l'augmentation du nombre et de la précision des informations, et de la variabilité de la période de décision.

Nous nous placerons pour cela dans des hypothèses particulières. Nous considérerons un horizon des gestion T pour lequel une prévision de la demande est faite. Nous supposerons qu'après un intervalle de temps T_1, première période de l'horizon de gestion, on puisse connaître la demande de manière exacte pour la période restante de l'horizon. En outre, nous ferons l'hypothèse que T_1 varie (variable de décision) avec le coût de l'information qui nous a permis de connaître exactement la demande. D'un autre côté, il est clair que plus petite sera la période d'incertitude T_1, plus grande sera l'espérance mathématique du profit. En effet, si on suppose un taux de demande constant, soit les risques de ruptures seront moindres si la période est courte, soit le stock ou le surplus de fin de première période aura une plus longue période d'écoulement et donc, les risques de surplus en fin d'horizon de gestion seront moindres.

Il s'agira pour le décideur d'abord de déterminer T_1 en fonction du coût de l'information et de l'augmentation de l'espérance mathématique du profit, ensuite de fixer le prix et la production de début de période.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons tenté de montrer que la modélisation du comportement de la firme en général ne conduisait pas à des résultats significatifs. Les modes de comportement sont par trop différents d'une firme à l'autre, d'un système de gestion à l'autre.

Nous avons mis l'accent alors sur les sources de divergences de ces comportements, dont la principale est la nature, le coût et la valeur de l'information sur base de laquelle sont prises les décisions.

Dans le chapitre suivant, nous développerons un modèle qui tient compte de ces différents facteurs, à la suite duquel nous en donnerons son applicabilité.

C H A P I T R E IV

Modèles adaptifs à révision de la production et des prix

PLAN DU CHAPITRE.

INTRODUCTION

Dans les pages suivantes, nous tenterons d'intégrer la décision de prix dans le modèle qu'a développé Monsieur BODART dans sa thèse de doctorat.

Le principe sous-jacent à ce modèle pourrait s'énoncer comme suit : Il s'agit d'apprécier le risque et l'incertitude en fonction du temps. Lorsqu'on considère un horizon de gestion pendant lequel on va commander en stock et donc produire une quantité d'un bien pour qu'il réponde à la demande du prix offert, ou bien plutôt à la prévision de la demande, l'aléatoire que comporte cette prévision de demande engendrera des décisions moins optimales que celles qui auraient été prises en cas de connaissance parfaite de la demande. Ceci, précisément à cause du risque. Pourtant, il n'y a pas de raison de considérer l'horizon de gestion comme indivisible. Il se peut, en effet, qu'à un moment de cet horizon et moyennant les informations concernant la demande qui s'est déjà concrétisée dans des ventes, on parvienne à connaître la demande de manière plus précise. Sur base de cette connaissance on peut reconsidérer la politique de la firme pour le reste de l'horizon.

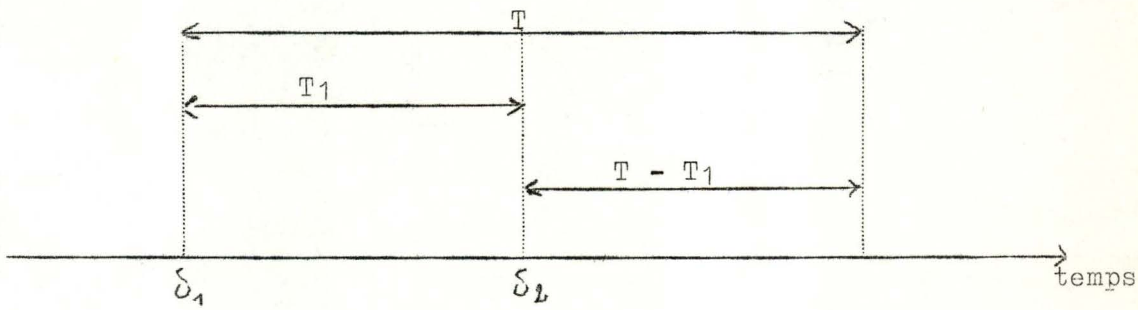
Soit un horizon de gestion de durée T et supposons qu'après T_1 , première période de cet horizon, on puisse connaître exactement la demande. Soit $\frac{T_1}{T} = K$ facteur de proportionnalité des périodes dans l'horizon.

La prévision de la demande pour l'horizon étant x , la demande de la première période sera alors égale au taux de la demande multipliée par la durée de la période.

Ceci, bien entendu, en faisant l'hypothèse que le taux de la demande est constant durant l'horizon de gestion.

La demande prévue pour la première période est donc égale à $T_1 \frac{x}{T} = K x$.

La demande prévue pour la seconde période : $\frac{T - T_1}{T} x = (1-K)x$



- La politique de la firme est donc la suivante :

  (1) Déterminer le prix auquel le produit sera vendu pendant la période (première, ou première et deuxième)

  (2) Déterminer l'approvisionnement initial qui maximise le profit attendu.

  (3) Après T_1, sur base de la connaissance du terme aléatoire de la demande on peut décider d'un réapprovisionnement

- Supposons, par ailleurs, qu'il y ait :

  - Soit un coût de stockage en fin de période proportionnel à ce stock, soit $k(y - x)$.
  - Soit une valeur de liquidation en fin de période, proportionnel au surplus soit $l(y - x)$.

  et un coût de rupture de stock proportionnel au nombre d'unité en rupture soit $r(y - x)$.

- Nous calculerons donc le prix de vente et l'approvisionnement initial optimal sur base d'une prévision de demande. Cette prévision nous la supposerons constituée par la courbe de demande moyenne, à laquelle nous adjoindrons un terme aléatoire additif de telle sorte que $x = X(p) + u$.

  (Courbe calculée par exemple par régression) u étant une variable aléatoire de densité $f(u)$ et de fonction de répartition $\Phi(u)$. L'espérance mathématique de u est nulle.

En d'autres termes, il s'agit de trouver en d_1, les décisions de prix et d'approvisionnement optimales en tenant compte d'une prévision de la demande totale sur tout l'horizon de gestion, et en sachant que la demande sera connue de manière <u>certaine</u> en d_2. En effet, durant la période T_1, on pourra estimer de manière de plus en plus précise la courbe du taux de saturation relative de la demande sur l'ensemble de l'horizon de gestion et la demande globale de l'horizon de gestion. Nous <u>supposons</u> qu'en d_2 on connaîtra cette demande globale avec certitude.

Ce qui n'empêche qu'il faut considérer le terme u comme aléatoire sur tout l'horison de gestion puisque le problème de décision se situe en d_1, moment où u est encore inconnu. D'autre part, nous avons dit que l'espérance mathématique de u est nulle ; cela ne veut pas dire que u a une valeur nulle dans l'échantillon qui est constitué par la demande de l'horizon de gestion qui nous intéresse.

Ceci dit, si nous supposons que la courbe du taux de saturation relative de la demande est une droite et donc que le taux de demande par unité de temps est constant, nous pouvons imputer une demande proportionnelle au facteur K de proportionnalité des périodes de l'horizon de gestion pour la période T_1 et au facteur $(1-K)$ pour la période $(T - T_1)$. Si le taux de demande n'est pas constant sur l'horizon de gestion, on peut pondérer la demande des périodes T_1 et $(T - T_1)$ par des coéfficients de saisonnalité.

Pour des raisons de simplicité qui n'affectent en rien le raisonnement, nous supposerons que le taux de la demande est constant.

Rappel des symboles.

T = durée de l'horizon de gestion.

T_1 = durée de la première période de l'horizon de gestion allant de la date d_1 à la date d_2. Durant cette période, la demande n'est pas encore connue avec certitude.

$\frac{T_1}{T} = K =$ facteur de proportionnalité des deux périodes de l'horizon de gestion.

x = quantité demandée pendant l'horizon de gestion.

y = quantité offerte.

z = production décidée en d_1, début de l'horizon de gestion.

p_1 = prix décidé en première période (d_1).

p_2 = prix décidé en deuxième période (d_2).

$X(p)$ = fonction de demande moyenne ou espérance mathématique de la fonction de demande de l'horizon de gestion.

u = terme aléatoire de la demande de l'horizon de gestion.

$f(u)$ = densité de probabilité de u.

$\Phi(u)$ = fonction de répartition de u.

$\overline{R}$ = $p \cdot X(p)$ = recette moyenne.

k = coût unitaire de stockage.

c = coût unitaire de production et de commande, ou coût marginal de production.

r = coût unitaire de rupture de stock.

l = valeur unitaire de liquidation.

1. Modèle à révision de la production en seconde période.

Considérons le modèle expliqué précédemment avec coûts de stockage et de ruptures, et une valeur de liquidation du surplus en fin d'horizon de gestion.

En début d'horizon de gestion soit en d_1, il faut prendre deux décisions : le prix et la production.

En d_2, une nouvelle commande en stock, soit un lancement de production, doit être fait. Quant au prix nous supposons qu'il est fixé une fois pour toute en d_1. Il n'y a donc pas de révision de la politique des prix (Nous élargirons cette hypothèse dans le modèle suivant).

(i) Calcul de la recette.

1er cas : $z \geqslant x \longrightarrow R(z, p) = p.x + (1 - k).(z - x).$

(Nous supposons que I le stock de début de période est nul et donc que l'offre pour le début de la période est égale à l'approvisionnement initial $x = y$).

2ème cas : $z \leqslant x$.

2.1 L'approvisionnement z est suffisant pour rencontrer la demande jusqu'en d_2 (date de fin de T_1), moment d'un réapprovisionnement.
$R(z, p) = p\,z + p(x - z).$
Puisque la demande après T_1 peut être estimée correctement, il n'y a pas de coût de rupture ou de stockage.

2.2 L'approvisionnement z n'est pas suffisant d'où il y aura des ruptures de stock entre l'instant initial et d_2 , celles-ci seront des ventes différées

$$R(z, p) = pz + p(x - z) - r(Kx - z).$$

(ii) Calcul du profit moyen.

$E\,[\pi(p, z, K)]$, le profit π dépend du prix p fixé en début de période, de l'approvisionnement initial z , et de K facteur de division de la période donnant T_1.

1.1 Modèle.

L'équation de profit ressort aisément des explications précédentes.

$$E(\pi) = \int_{-\infty}^{z-X(p)} \Big\{ p\,[X(p) + u] - k\,[z - X(p) - u] + l\,[r - X(p) - u] - c\,(z) \Big\}\, d\,\Phi\,(u) + \int_{z - X(p)}^{\frac{z}{K} - X(p)} \Big\{ p.z - c(z) + p.\,[X(p) + u - z] - c\,[X(p) + u - z] \Big\}\, d\,\Phi\,(u) + \int_{\frac{z}{K} - X(p)}^{\infty} \Big\{ p.z - c(z) + p\,[X(p) + u - z] - c\,[X(p) + u - z] - r\,K\,[X(p) + u - \tfrac{z}{K}] \Big\}\, d\,\Phi\,(u)$$

ou : $$E(\pi) = p.X(p) - (1-k)\left[X(p)-z\right] + (1-k)\int_{z-X(p)}^{\infty}\left[X(p)+u-z\right] d\,\Phi(u)$$

$$- c.z - c\int_{z-X(p)}^{\infty}\left[X(p) + u - z\right] d\,\Phi(u)$$

$$- rK\int_{\frac{z}{K} - X(p)}^{\infty}\left[X(p) + u - z\right] d\,\Phi(u)$$

et finalement :

$$E(\pi) = p.X(p) - (1-k)\,X(p) - (c-1+k)\left[z + \int_{z-X(p)}^{\infty}\left[X(p)+u-z\right] d\,\Phi(u)\right]$$

$$- r\,K\int_{\frac{z}{K} - X(p)}^{\infty}\left[X(p) + u - z\right] d\,\Phi(u)$$

1.2 <u>L'équation de production</u> : maximation par rapport à z.

$$\frac{d}{dz}\left[E(\pi)\right] = -(c-1+k) + (c-1+k)\left[1 - \Phi(z - X(p))\right]$$

$$+ \; r\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right)\right]$$

soit en ~~multipliant~~ simplifiant. et égalant à zéro

$$\frac{\Phi\left[z - X(p)\right]}{1 - \Phi\left[\frac{z}{K} - X(p)\right]} = \frac{r}{c - 1 + k}$$

que nous pouvons écrire ainsi :

$$r\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right]\right. = (c - 1 + k)\;\Phi\left[z - X(p)\right].$$

dont l'interprétation peut s'écrire comme suit :

à l'Optimum, l'équilibre est réalisé entre le coût marginal probable de rupture et le coût marginal de surplus.

- Caractéristiques de l'équation de production (1).

1. Si $K = 1$, On obtient l'optimum du modèle statique, il ne s'agit plus en effet que d'une seule période. Le modèle est donc identique au modèle statique de la gestion des stocks dont M. B. Roy a mis en évidence les propriétés remarquables.

2. Si $K = 0$, la probabilité de rupture est nulle, il s'agit alors du modèle déterministe où la production est égale à la demande et le prix d'équilibre satisfait à l'égalité de la recette marginale et du coût marginal de production.

3. Puisque la probabilité de rupture croît lorsque K augmente, c'est-à-dire lorsque l'intervalle de temps T_1, où il y a incertitude, augmente, il suit que la production optimale, $\bar{z}$, est fonction croissante de K . "D'où la conclusion que le fait de négliger la possibilité d'adaptation ultérieure entraine un surstockage initial" (1).

4. La production optimale z^* croît avec le coût unitaire de rupture et décroît avec le coût unitaire de stockage ou de liquidation.

---

(1) Pour une description complète de ces caractéristiques pour des densités de probabilités déterminées, voir F. BODART : "Contribution à la théorie de la gestion des stocks : Analyse Adaptive des Approvisionnements en Horizon de Gestion courte". Thèse de Doctorat - Université de Liège, 1967 - 1968.

1.3 L'équation de prix : maximation par rapport à p.

$$\frac{d}{d_p}\left[E(\pi)\right] = \frac{d\bar{R}}{dp} - (1-k)\,X'(p) - (c-1+k)\,X'(p)\left[1 - \Phi\left(z - X(p)\right)\right]$$

$$- \, r\,K\,X'(p)\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right)\right] = 0.$$

avec $\bar{R} = p.\,X(p)$ et Recette marginale $\frac{d\bar{R}}{dp} \cdot \frac{dp}{d\,X(p)} = \frac{d\bar{R}}{dp}\ \frac{1}{X'(p)}$

ou en égalant à zéro :

$$\frac{d\bar{R}}{dp}\ \frac{1}{X'(p)} = c - (c-1+k)\,.\,\Phi\left[z - X(p)\right] + r\,K\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right)\right].$$

qu'on interprète comme suit : La recette prévue marginale, c'est-à-dire l'augmentation de la recette prévue due à un accroissement d'une unité de la quantité demandée prévue est égale au coût marginal de production de cette quantité moins la somme des coûts marginaux probables de liquidation et de stockage (qui auront donc diminué suite à une augmentation de la demande) plus le coût marginal probable de rupture ramené à la proportionnalité de la période où il peut s'exprimer dans l'horizon de gestion.

Caractéristiques de l'équation de prix.

1. Si nous introduisons l'équation de production dans l'équation de prix, on a, à l'équilibre, pour une production donnée :

$$\frac{d\bar{R}}{dp} \quad \frac{1}{X'(p)} = c + r\,(K - 1)\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right)\right]$$

$$= c - r\,(1 - K)\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{K} - X(p)\right)\right]$$

A l'optimum, la recette prévue marginale est égale au coût marginal de production, net du coût marginal probable de rupture.

2. Si $K = 0$, la recette marginale est égale au coût marginal pour un prix et une production otimale. Ce qui est évident puisque la connaissance de la demande est parfaite dès d_1 . Le modèle est alors identique au modèle traditionnel déterministe.

3. Si $K = 1$, les solutions pour la production et les prix satisfont au système d'équations :

$$\frac{\Phi\left[z - X(p)\right]}{1 - \Phi\left[z - X(p)\right]} = \frac{r}{c - l + k}$$

$$\frac{d\bar{R}}{dp} \quad \frac{1}{X'(p)} = c - (c - l + k)\,\Phi\left[z - X(p)\right] + r\left[1 - \Phi\left[z - X(p)\right.\right.$$

le prix optimum, étant donné une production optimale, s'établit à l'équilibre de :

$$\frac{d\bar{R}}{dp} \quad \frac{1}{X'(p)} = C$$

c'est-à-dire que le prix optimum est le même que celui du modèle déterministe où la courbe de demande prévue est la courbe de demande effective. Remarquons que cette similitude est due exclusivement au fait que les ventes non-satisfaites sont considérées comme différées, alors que dans le modèle de Mills à une période ce sont des ventes perdues.

4. Théorème.

Si le prix d'équilibre du modèle déterministe réalise l'égalité du revenu marginal et du coût marginal de Production, le prix du modèle à révision adaptive de la décision de production sera inférieur au prix du modèle déterministe.

En effet,

1. Le prix optimum du modèle déterministe p^* satisfait :

$$\frac{dR^*}{dp^*} \quad \frac{dp^*}{d\,X(p^*)} = C$$

2. Le prix optimum du modèle adaptif $\bar{p}$ satisfait :

$$\frac{d\bar{R}}{d\bar{p}} \quad \frac{d\bar{p}}{d\,X(\bar{p})} = c + r\,(K - 1)\;[\,1 - \Phi\,(\,\frac{z}{K} - X\,(\bar{p}))\,]$$

comme $(K - 1) < 0$, $r > 0$, et $[1 - \Phi(\frac{z}{K} - X(\bar{p}))] > 0$

$$c > c + r \; (K - 1) \; [1 - \Phi(\frac{\bar{z}}{K} - X(\bar{p}))]$$

revient à :

$$\frac{dR^*}{dp^*} \; \frac{dp^*}{d\,X(p^*)} > \frac{d\bar{R}}{d\bar{p}} \; \frac{d\bar{p}}{d\,X(\bar{p})}$$

et comme la courbe de demande est décroissante

$$p^* > \bar{p}$$

La conclusion est ~~contraire à~~ la même que celle trouvée par Mills. Cela peut se comprendre intuitivement puisque le vrai problème de la première période T_1, est de limiter les coûts de rupture qui eux ne pourrons certainement pas être rattrapés en seconde période.

2. Modèle à révision du prix et de la production.

2.1 Analyse

Soit un modèle où il y a possibilité d'adaptation des prix et de la production. Supposons, par ailleurs, qu'au moment où l'adaptation est faite nous ayons pu estimer la demande globale de l'horizon de gestion de manière correcte. Le terme aléatoire est ainsi connu quel que soit le prix que nous fixerions à ce moment-là.

Symbolisons la demande estimée sur tout l'horizon de gestion $x = X\ (p_i) + u$, avec $i = 1,2$.

L'indice opposé au prix est celui de la période de décision à laquelle il s'applique.

Si $K = \frac{T_1}{T}$, comme dans le cas du modèle à révision de la production seule, alors la demande de première période sera $K\ [X\ (p_1) + u]$, la demande de seconde période estimée en d, sera $(1 - K)\ [X\ (p_2) + u]$.

Lorsque nous supposons que la firme peut agir sur la demande en d_2, début de seconde période, nous avons à considérer deux situations différentes en d_2, selon qu'il existe ou non un stock.

1. $u \leq \frac{z}{K} - X(p_1)$

Soit $(1 - K)\ [X(p_2) + \bar{u}]$, la demande pour la seconde période, $\bar{u}$ étant la valeur particulière prise par la variable aléatoire u en fin de première période. Le prix optimum de la seconde période dépend de la recette marginale de cette période, il dépend donc de $\bar{u}$. Ceci montre bien que le prix optimum de la seconde période n'est pas connu en d_1, début de la première période. Or le prix optimum de la seconde période interviendra comme paramètre dans la règle de décision de première période. Il dépendra donc de la valeur de $\bar{u}$, par conséquent, de la distribution de u.

Quelle sera la politique optimale étant donné qu'il y a un sotck de départ ?

Cette politique dépendra de la forme de la courbe de demande par l'intermédiaire de la courbe de recette marginale; de plus elle dépendra des paramètres des fonctions de coûts de production, de stockage, et de la valeur de liquidation du surplus en fin d'horizon de gestion.

Illustrons notre analyse, en considérant les deux cas suivants :

(i) Le stock en d_2 est tel que si l'on garde en seconde période le prix fixé pour la première période, on enregistrera un stock en fin d'horizon de gestion.

Dans ce cas, il faudra diminuer le prix de seconde période. En effet, le prix de la première période est déterminé sur base d'une courbe de demande prévue $X(p)$. Or cette demande est supérieure à ce qu'on attendait, et égale, dans nos hypothèses à $X(p) + \bar{u}$. Pour un même coût marginal de production, l'égalisation de la recette et du coût se fait à un prix inférieur pour $X(p) + u$ que pour $X(p)$. A fortiori, si dans le calcul du prix de première période on tient compte d'un terme aléatoire, le prix est alors inférieur en première période à ce qu'il aurait été si la courbe de demande aurait été déterministe.

Quelles seront les possibilités de diminution de prix ?

a) Nous diminuons le prix de telle sorte que la demande $(1-K) [X (p_2) + \bar{u}]$ est inférieure au stock de fin de première période, à savoir : $I = z-K [X (p_1) + u]$. Cette hypothèse se justifierait si le prix optimum de seconde période était inférieur à la valeur de liquidation du surplus l. Dans ce cas, il y aura un surplus estimé à la valeur de liquidation l; il n'y aura pas de production supplémentaire en seconde période.

b) Nous diminuons le prix de telle sorte que la demande de seconde période soit égale au stock. Ceci peut se produire dans le cas où le prix qui égalise recette marginale ou coût marginal, soit de liquidation, soit de production, égalise aussi la demande de seconde période au stock de fin de première période. Il n'y a ni valeur de surplus ni coût de production supplémentaire, en effet :
$I - (1-K) [X(p_2) + \bar{u}] = 0.$

c) Nous diminuons le prix de telle sorte que la demande de seconde période est supérieure au stock restant. Cela signifie que le prix optimum de seconde période rend la demande excédentaire par rapport au stock. Dans ce cas, il n'y aura pas de surplus, mais il y aura une production égale à $(1-K) [X(p_2) + \bar{u}] - I$; en effet, $I - (1-K) [X(p_2) + \bar{u}] < 0$

Or la diminution de prix est inconnue en début de première période. Pour exprimer le profit de la seconde période, il faudra donc tenir compte de la probabilité que pour des prix p_1 et p_2, et une production z déterminés, nous ayons à produire en seconde période ou à liquider un surplus, c'est-à-dire la probabilité que : $I-(1-K) [X(p_2) + u] \gtrless 0$. Soit la probabilité que : $u \gtrless z-(1-K) X(p_2) - K X(p_1)$
soit : $u \gtrless M(z,p_1,p_2)$.

Remarquons, en outre, que

$$M(z,p_1,p_2) \leqslant \frac{z}{K} - X(p_1)$$

en effet,

$$M(z,p_1,p_2) = z-(1-K) X(p_2) - K.X(p_1)$$

$$= \frac{z}{K} - X(p_1) - \left(\frac{1}{K} - 1\right) X(p_2).$$

Pour que l'inégalité soit vérifiée il faut que $-(\frac{1}{K} - 1)\, X\,(p_2)$ soit strictement négatif, ce qui est vrai puisque $X(p_2) \geq 0$ par définition, et $(\frac{1}{K} - 1) \geq 0$, étant donné que $0 < K < 1$. par hypothèse.

(ii) Dans un autre cas, le stock en d_2 peut être tel que si le prix de première période reste inchangé, pendant la seconde période, la demande de cette seconde période sera supérieure à ce stock.

La politique à suivre est de déterminer le prix de seconde période en compensant l'excès de la demande sur le stock par une production supplémentaire. De même que dans le premier cas, on ne connaît pas en d_1 le prix optimum de seconde période. Il faut tenir compte des paramètres de coût de production et de valeur de liquidation et de la recette marginale dépendant de u.

Selon que $u \gtreqless M(z,p_1,p_2)$, il y aura surplus ou production supplémentaire.

2. $u \geqslant \frac{z}{K} - X(p_1)$

Dans ce deuxième cas, en δ_2, il n'y a pas de stock de fin de première période. L'espérance mathématique du profit comportera donc :

(i) <u>Première période</u>

a) La recette porte cette fois sur la quantité produite puisque nous supposons la production inférieure à la demande de première période : $R = p_1 . z.$

b) Les coûts sont de deux types : le coût de production c.z. et le coût de rupture dû à la demande insatisfaite, soit : $r \, / [K . [X(p_1) + u] - z] /$ qui peut s'écrire : $r \, K \, / [X(p_1) + u - \frac{z}{K}] /$

(ii) <u>Deuxième période</u>

a) Le profit de la seconde période porte sur la demande de cette période : $(p_2 - c) . [X(p_2) + u] . (1 - K).$

b) Les ruptures de la première période peuvent soit être des ventes perdues, soit des ventes différées.

Dans le cas de ventes différées, leur quantité sera produite en seconde période. Le profit qui en résultera sera : $(p_1 - c) \, / [K \, [X(p_1) + u] - z] /$, en supposant que le contrat de livraison soit établi en première période et qu'il stipule le prix de vente p_1 de cette première période.

L'espérance mathématique du profit, dans le cas où $u \geqslant \frac{z}{K} - X(p_1)$., s'écrit, alors :

Dans le cas de ventes différenciées

$$\underset{u \geqslant \frac{z}{K}-X(p_1)}{E(\pi)} = \int_{\frac{z}{K}-X(p_1)}^{\infty} \Big\{ (p_1 - c).\, z - r\, K\, /[X(p_1) + u] - \frac{z}{K}]/ + (p_1-c)\, /[K\, [X(p_1)+u] - z]/ + (p_2-c)\, [X(p_2)+u](1-K) \Big\}\, d\,\emptyset(u).$$

Dans le cas de ventes perdues :

$$\underset{u \geqslant \frac{z}{K}-X(p_1)}{E(\pi)} = \int_{\frac{z}{K}-X(p_1)}^{\infty} \Big\{ (p_1-c)\, z - r\, K\, /[[X(p_1)+u] - \frac{z}{K}]/ + (p_2-c)\, [X(p_2) + u]\, (1 - K) \Big\}\, d\,\emptyset(u).$$

2.2 Modèle et résolution. (Cas de ventes différées).

Le modèle complet est la somme des deux segments que nous avons indiqué en 1 et 2 :

$$E(\pi) = \int_{-\infty}^{M(z,p_1,p_2)} \Big\{ p_1\, K\, [X(p_1) + u] - c.z + p_2\, (1-K)\, [X(p_2)+u] - l\, /[\, I - (1-K)\, [X(p_2) + u]]/ \Big\}\, d\,\emptyset(u).$$

$$+ \int_{M(z,p_1,p_2)}^{\frac{z}{K} - X(p_1)} \Big\{ p_1 . K . [X(p_1) + u] - c.z + p_2 (1-K) [X(p_2) + u] + c\, /[I - (1-K) [X(p_2) + u] \Big\} \; d\, \Phi (u).$$

$$+ \int_{\frac{z}{K} - X(p_1)}^{\infty} \Big\{ (p_1-c)\, z - z\, K\, /[[X(p_1) + u] - \tfrac{z}{K}]/ + (p_1-c)\, /[K [X(p_1)+u] - z]/ + (p_2-c) [X(p_2)+u] (1-K) \Big\} \; d\, \Phi (u).$$

On obtient par mise en évidence :

$$E(\pi) = p_1\, K\, X(p_1) + p_2\, (1-K)\, X(p_2) - c\, z + \int_{M(z,p_1,p_2}^{\infty} c\, /[z - K [X(p_1) + u] - (1-K) . [X(p_2)+u]]/ \; d\, \Phi (u) + \int_{-\infty}^{M(z,p_1 p_2)} l\, /[z - K [X(p_1) + u] - (1-K) [X(p_2)+u]]/ \; d\, \Phi (u)$$

$$- \int_{\frac{z}{K}-X(p_1)}^{\infty} z\, K\, [X(p_1)+u] \; d\, \Phi (u).$$

et finalement :

$$E(\pi) = p_1 K\, X(p_1) + p_2 (1-K)\, X(p_2) - c\, z + l \left[z - K\, X(p_1) - (1-K) X(p_2) \right]$$

$$+ \int_{M(z,p_1,p_2)}^{\infty} (c-l) \left[z - K\, X(p_1) - (1-K) [X(p_2) + u] \right] d\, \Phi(u)$$

$$- \int_{\frac{z}{K} - X(p_1)}^{\infty} r\, K \left[[X(p_1) + u] - \frac{z}{K} \right] d\, \Phi(u).$$

22.1 Recherche des solutions optimales pour z, p_1, p_2

1. L'équation de prix de la seconde période : $\frac{d}{dp_2} \left[E(\pi) \right] = 0$

$$\frac{dR_2}{dp_2} \cdot \frac{1}{(1-K) X'(p_2)} = l + (c-l) \left[1 - \Phi(M(z,p_1,p_2)) \right]$$

avec $\frac{dR_2}{dp_2} = \frac{d}{dp_2} \left[p_2 (1-K) X(p_2) \right]$

ou :

$$\frac{d\bar{R}_2}{dp_2} \cdot \frac{1}{(1-K) X'(p_2)} = c + (l-c)\, \Phi \left[M(z,p_1,p_2) \right].$$

2. <u>L'équation de prix de la première période</u> : $\frac{\partial}{\partial_{p_1}} [E(\pi)] = o.$

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \quad \frac{1}{KX'(p_1)} = 1 + (c-1) \cdot [1 - \emptyset (M(z_1 p_1, p_2))] + r [1 - \emptyset (\frac{z}{K} - X(p_1))]$$

avec $$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} = \frac{d}{dp_1} [p_1 K X (p_1)]$$

ou :

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \quad \frac{1}{K X'(p_1)} = c + (1 - c) \emptyset [M(z., p_1, p_2] + r [1 - \emptyset (\frac{z}{K} - X(p_1))]$$

3. <u>L'équation de production de la première période</u> : $\frac{\partial}{\partial z} [E(\pi)] = o.$

$$-c + 1 + (c-1) [1 - \emptyset (M(z, p_1, p_2))] + r [1 - \emptyset (\frac{z}{K} - X(p_1))] = o.$$

ou :

$$-(c-1) \emptyset [M (z_1, p_1, p_2)] + r [1 - \emptyset (\frac{z}{K} - X(p_1)] = o.$$

ce qui revient à :

$$\frac{\emptyset [M (z_1 p_1, p_2)]}{1 - \emptyset [\frac{z}{K} - X(p_1)]} = \frac{r}{c - 1}$$

22.2 Signification économique des équations obtenues :

(i) l'équation de production est la même que dans le modèle à révision de la production uniquement, sauf que la probabilité de rupture de stock n'est plus exprimée de la même manière puisqu'elle dépend du prix optimum fixé pour la seconde période. Néanmoins l'interprétation est la même : la production décidée en d_1, pour des prix p_1 et p_2 optima, réalise l'égalité du coût marginal probable de liquidation et du coût marginal probable de rupture :

$$(c-l)\, \Phi \left[M (z_1 p_1, p_2) \right] = r \left[1 - \Phi \left(\frac{r}{K} - X(p_1)\right) \right]$$

Les caractéristiques de l'équation sont les mêmes que dans le modèle précédent :

1. Si $K = o$, $M (z, p_1, p_2) = z - X (p_2)$; de plus la probabilité de rupture est nulle. Comme il fallait s'y attendre, par l'équation de production ci-dessus, la probabilité de surplus est nulle aussi : $\Phi \left[z - X(p_2) \right] = o$. La solution est celle du modèle déterministe.

2. Si $K = 1$, $M (z, p_1, p_2) = z - X(p_1)$; de plus la probabilité de rupture est $1 - \Phi \left[z - X (p_1) \right]$, la solution est celle du modèle statique en avenir aléatoire.

3. La solution optimale $\bar{z}$ est une fonction croissante de K. Ne pas tenir compte de l'adaptation implique donc un surstockage initial.

4. La solution optimale $\bar{z}$ croit avec le coût unitaire de rupture et décroît avec le coût de liquidation (c-l). (Comme il fallait s'y attendre).

(ii) L'équation de prix en seconde période.

Le prix optimum p_2 réalise l'égalité entre la recette marginale prévue de seconde ~~production~~ période et le coût marginal de production moins le coût de liquidation probable, à ce prix optimum, dû à un surplus provenant déjà de la première période. En fait, ceci n'a pas de signification pour le problème de décision de seconde période, en d_2 on fixera le prix optimum sur base de la situation réelle : "tomorow will be another day". Ici, il s'agit du paramètre p_2 dont nous devons tenir compte pour déterminer p_1 et z. L'équation de prix p_2 intervient comme équation de définition (contrainte) dans le modèle.

(iii) L'équation de prix en première période.

De même que pour la seconde période, le prix optimum p_1 se réalise à l'égalisation de la recette marginale prévue, de la première période cette fois, et le coût marginal de production moins le coût probable d'un surplus en fin d'horizon de gestion, et, en outre, le coût marginal probable de rupture.

Pour obtenir le prix optimum p_1, en fonction de la production $\bar{z}$, elle-même optimale et du prix $\bar{p}_2$ optimal qui sera fixé en seconde période, il suffit d'introduire les équations de production et de prix de seconde période dans l'équation de prix de première période.

Pour une production optimale déterminée en fonction de p_2, on obtient pour l'équation de prix de première période

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \; \frac{1}{K\,X'(p_1)} = \frac{r}{c - 1} \left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{Z}}{K} - X(p_1)\right) \right] + r \left[1 - \Phi\left(\frac{Z}{K} - X(p_1)\right) \right]$$

$$= c - r \left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{Z}}{K} - X(p_1)\right) \right] + r \left[1 - \Phi\left(\frac{Z}{K} - X(p_1)\right) \right]$$

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \; \frac{1}{K\,X'(p_1)} = c$$

D'où la conclusion que, pour une production optimale, le prix optimal de première période s'établit à l'équilibre de la recette marginale prévue de la première période et du coût marginal.
D'où le théorème suivant :

Théorème

Supposant que la firme se comporte comme si, à la période suivante de son horizon de gestion, elle connaissait la demande avec certitude, et, dans nos hypothèses de concurrence imparfaite, de terme aléatoire additif, de ventes différées, de coût de production unitaire constant, et de capacité de production indéterminée, on montre que, le prix optimum de la période courante sera égal au prix optimum qui aurait été fixé si la courbe de demande prévue avait été la courbe de demande effective.

Le théorème peut être élargi en cas de ventes perdues.
C'est ce que nous ferons au paragraphe suivant :

2.3 Modèle et résolution (cas de ventes perdues).

Dans le cas de ventes perdues, le modèle s'écrit comme suit :

$$E\ (\pi) = \int_{-\infty}^{M(z,\ p_1,\ p_2)} \Big\{ p_1 . K . \left[X\ (p_1) + u \right] - cz + p_2 (1-K) \left[X(p_2) + U \right] + l . \left[I - (1-K) \left[X(p_2) + u \right] \right] \Big\}\ d\ \Phi\ (u)$$

$$+ \int_{M(z, p_1, p_2)}^{\frac{z}{K} - X(p_1)} \Big\{ p_1 . K . \left[X(p_1) + u \right] - c.z + p_2 (1-K) \left[X(p_2) + u \right] + c \left[I - (1-K) \left[X(p_2) + u \right] \right] \Big\}\ d\ \Phi\ (u)$$

$$+ \int_{\frac{z}{K} - X(p_1)}^{\infty} \Big\{ (p_1 - c)\ z - r\ K \left[\left[X(p_1) + u \ /\ \frac{z}{K} \right] \right] + (p_2 - c) \left[X\ (p_2) + u \right] (1-K)] \Big\}\ d\ \Phi\ (u)$$

$$E\ (\pi)\ = \int_{-\infty}^{\frac{z}{K} - X(p_1)} \left\{ p_1\ K \left[X(p_1) + u \right] - c.z + p_2(1-K) \left[X(p_2)+u \right] \right\} d\Phi(u)$$

$$+ \int_{-\infty}^{M(z\ ,p_1,p_2)} l \left[I - (1-K) \left[X(p_2) + u \right] \right] d\ \Phi\ (u)$$

$$+ \int_{M(z,p_1,p_2)}^{\frac{z}{K} - X(p_1)} c \left[I - (1-K) \left[X(p_2) + u \right] \right] d\ \Phi\ (u)$$

$$+ \int_{\frac{z}{K} - X(p_1)}^{\infty} \left\{ (p_1 - c)\ z - r\ K\ \left[X\ (p_1) + u - \frac{z}{K} \right] + p_2(1-K) \left[X(p_2)+ \right. \right.$$

$$\left. - c \left[1 - K)\ \left[X\ (p_2) + u\ \right] \right\} d\ \Phi\ (u)$$

En transformant, on obtient finalement :

$$E(\pi) = p_1.K.X(p_1) + p_2.(1-K).X(p_2) - c.z + l\,[z-K.X(p_1)-(1-K)X(p_2)]$$

$$+ \int_{\frac{z}{K}-X(p_1)}^{\infty} \left\{ (p_1 - c + r)\,[z - K\,[X(p_1) + u]\,]\, \right\} d\,\emptyset(u)$$

$$+ \int_{M(z,p_1,p_2)}^{\infty} \left\{ (c - l)\,[z - K\,[X(p_1) + u]-(1-K\,[X(p_2)+u]\,]\, \right\} d\,\emptyset(u)$$

23.1 <u>Recherche des solutions optimales pour z, p_1, p_2.</u>

1. L'équation de prix de seconde période : $\frac{\partial}{\partial p_2} \left[E(\pi) \right] = 0$

$$\frac{d\bar{R}_2}{dp_2} \qquad \frac{1}{(1-K)X'(p_2)} = 1 + (c-1) \left[1 - \emptyset \left(M(z, p_1, p_2) \right) \right]$$

$$= c + (1-c) \, \emptyset \left[M(z, p_1, p_2) \right]$$

même solution dans le cas de ventes différées.

2. L'équation de prix de première période : $\frac{\partial}{\partial p_1} \left[E(\pi) \right] = o.$

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \qquad \frac{1}{\cancel{(1-u)}KX'(p_1)} = 1 + (p_1-c+r) \left[1-\emptyset \left(\frac{z}{u} - X(p_1) \right) \right] + c-1 \left[1-\emptyset(M(z,p_1,p_2) \right]$$

$$= c+(1-c) \, \emptyset \left[M(z,p_1,p_2) \right] + (p_1-c+r) \left[1-\emptyset \left(\frac{z}{K} - X(p_1) \right) \right]$$

3. L'équation de production : $\frac{\partial}{\partial z}\left[E(\pi)\right] = 0.$

$$-c + 1 + (p_1-c+r)\left[1 - \emptyset\left(\frac{z}{K} - X(p_1)\right)\right] + (c-1)\left[1-\emptyset\left(M(z, p_1, p_2)\right)\right] = 0.$$

ou :

$$-(c-1)\left[\emptyset\left(M(z,p_1,p_2)\right)\right] + (p_1-c+r)\left[1 - \emptyset\left(\frac{z}{K} - X(p_1)\right)\right] = 0.$$

ou encore :

$$\frac{\emptyset\left[M(z, p_1, p_2)\right]}{1 - \emptyset\left[\frac{z}{K} - X(p_1)\right]} = \frac{p_1 - c + r}{c - 1}$$

Il est à remarquer que l'expression de l'équation de production est analogue, mutatis mutandis, à l'expression trouvée par Monsieur François BODART (op. cit., p. 190).

23.2 Signification économique des équations obtenues.

(i) L'équation de production. La production optimale réalise l'équilibre entre le coût marginal probable du surplus et le coût marginal probable des ruptures de stock ; ce coût marginal des ruptures de stock comprend non seulement le coût des ruptures proprement dit, mais aussi le manque à gagner $(p_1 - c)$.

1. Si $K = 0$, le modèle est déterministe.

2. Si $K = 1$, $M(z, p_1, p_2) = z - X(p_1)$.

La solution est la suivante :

$$\frac{\Phi[z - X(p_1)]}{1 - \Phi[z - X(p_1)]} = \frac{p_1 - c + r}{c - 1}$$

Elle est bien identique à celle trouvée par Mills.

(ii) L'équation de prix de seconde période est la même que celle du modèle à ventes différées. Aucune rupture en effet, en seconde période.

(iii) L'équation de prix de première période diffère du modèle précédent par le terme $(p_1 - c)$, le manque à gagner, dû aux ruptures de stock.

De même que dans le modèle précédent le prix optimum pour une production optimale déterminée, réalise l'égalité de la recette marginale de la première période, et le coût marginal de production : $\dfrac{d\bar{R}_1}{dp_1} \cdot \dfrac{1}{K\, X'(p_1)} = c$.

Conclusion : nous pouvons étendre le théorème précédent au cas des ventes perdues.

Exemple Numérique (Modèle à ventes perdues)

1. Demande :

$$x = X(p) + u = 20 - 2\ p + u$$

$$\frac{dp.X(p)}{dp} \quad \frac{1}{X'(p)} = 10 + 2\ p.$$

u est distribué uniformément dans l'intervelle (-h.+h)

d'où :

$$\bar{\emptyset}\ [z-(1-K)\ X\ (p_2) - K.X\ (p_1)]$$

$$= \frac{1}{2h}\ [z-(1-K)\ (20-2p_1) - K\ (20-2p_1) - h]$$

$$\bar{\emptyset}\ [\ \frac{z}{K} - X\ (p_1)] = \frac{1}{2h}\ - 20 + 2p_1 - h].$$

2. Paramètres :

$c = 5$

$h = 5$

$z = 0{,}5$

$l = 2{,}5$

3. Quel que soit $K < 1$, on a

$$\frac{d\bar{R}_1}{dp_1} \quad \frac{1}{K.X'(p_1)} = c \text{ d'où} \begin{cases} p_1 = 7{,}5 \\ X(p_1) = 5 \end{cases}$$

4. L'équation

$$\frac{\bar{\emptyset}\ [M\ (z, p_1, p_2]}{1 - \bar{\emptyset}\ [\ \frac{z}{K} - X\ (p_1)]} = \frac{p_1 - c + z}{c - l} \qquad \text{devient :}$$

$$\frac{2,5}{2h} \left[z + (1-K)\, 2p_2 - 2,5K - 20 - h \right]$$

$$= 3 \left[1 - \frac{1}{2h} \left(\frac{z}{K} - 5 - h\right] \right.$$

ou, après transformation :

$$p_2 = - \frac{6 + 5\ K}{10(1-K)\ K}\ z + \frac{11\ h + 130 + 125\ K.}{10\ (1-K).} \quad \ldots\ldots (1)$$

5. L'équation

$$\frac{d\bar{R}_{2.}}{dp_2} \quad \frac{1}{(1-K)\ X'(p_2)} = c + (1-c)\ \emptyset\ \left[M\ (z, p_1, p_2 \right]$$

devient : $- 10 + 2p_2 = 5 - \frac{2,5}{2\ h} \left[z + (1-K)\ 2p_2 - 25\ K - 20 - h \right]$

ou : $p_2 = \frac{1}{2 \left[2h + 2,5(1-K) \right]} \left[32,5\ h - 2,5\ z + 62,5\ K + 50 \right] \ldots (2)$

6. Egalant (1) et (2), on obtient, avec h = 5 :

$$z = \frac{662,5\ K + 3.212,5\ K^2 - 312,5\ K^3}{75 - 35\ K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

7. Les solutions (*) pour différentes valeurs de K sont les suivantes :

K	z	p	
0	5	7,5	Modèle déterministe
$\frac{1}{4}$	5,4	7,5	Modèle en incertitude avec adaptation
$\frac{1}{2}$	6,4	7,5	" " " "
1	10		Modèle en incertitude sans adaptation

(*) Les solutions de l'équation 3 ne sont correctes que dans certains intervalles que peut prendre la valeur K. Ceci vient du fait que la distribution de probabilité de u est elle-même comprise dans un intervalle de valeurs u.

CONCLUSIONS.

Nous avons intitulé ce travail : Introduction à la Théorie adaptative appliquée à la gestion de la production, des prix, et des stocks. Nous nous sommes expliqués des raisons de cette application tout au long de ce mémoire. Prenant comme point de départ la théorie traditionnelle de la firme, nous avons montré son incompétence à prendre en considération les stocks dans l'analyse du problème de gestion dans le court terme. Nous avons abouti à la conclusion que les motifs de détention et de non-détention des stocks ne pouvaient résulter que de deux réalités conjuguées, à savoir : les problèmes de la durée et de l'incertain. L'une et l'autre sont les dimensions des décisions de gestion dans lesquelles un nombre de plus en plus grand d'analyses de l'économie contemporaine prennent place; à juste titre, puisque ces dimensions sont à la base de la logique économique réelle.

Sur ces deux axes, ce mémoire est bâti.

Nous avons analysé une première tentative d'intégration de la gestion de la production des prix et des stocks dans le temps et l'incertitude. Nous avons tenté de montrer que l'approche de Mills pour satisfaisante qu'elle était du point de vue théorique, n'en étai pas moins empreinte d'un manque d'hypothèses temporelles précises, tout en se voulant théorie générale.
L'analyse du problème de décision nous révèle, par ailleurs, que tout est affaire d'information pour le gestionnaire, et que, par la valeur et le coût des informations, l'incertitude est étroitement liée au temps.
Un essai dans ce sens est représenté par la théorie de l'adaptation, et, plus particulièrement, par les processus adaptatifs appliqués au problème de gestion de la production et des stocks analysé par Mr Bodart dans sa thèse de doctorat.

Nous avons ajouté à la gestion de la production et des stocks celle des prix dans deux hypothèses :

- la révision ou l'adaptation de la politique se fait uniquement sur la production;
- la révision de la gestion se fait à la fois sur la production et sur les prix.

Dans le premier cas, les conclusions quant à la production sont les mêmes que celles trouvées par Mr Bodart,à savoir que :

- "le fait de négliger les adaptations ultérieures conduit à un surdimentionnement de la commande initiale";
- "si la considération, dans un environnement incertain, d'un modèle statique n'est pas intrinsèque au problème, celui-ci n'est qu'un cas particulier du modèle adaptatif".

Les conclusions quant au prix sont ~~différentes de~~ les mêmes que celles de Mills (hypothèse d'un terme aléatoire additif à la courbe de demande) : le prix est ~~sup~~inférieur au prix du modèle où la courbe de demande prévue est déterministe.

Dans le second cas, où la révision porte à la fois sur la production et le prix, nous arrivons aux conclusions suivantes :

- la décision de production est influencée par les mêmes facteurs que dans le cas de la révision de la production seule; à ceci près que le paramètre donnant l'influence du prix de seconde période sur la décision de première période intervient dans le calcul de la probabilité de surplus en fin d'horizon de gestion;
- la décision de prix est la même que celle du modèle où la courbe de demande prévue est déterministe.

De là à conclure à la validité générale de la théorie traditionnelle, il n'y a qu'un pas que nous ne franchirons pas, puisqu'à vrai dire nous pouvons toujours critiquer le fait que nos hypothèses soient entièrement réalistes et totalement généralisables.

Pour terminer ces conclusions, nous donnerons quelques voies dans lesquelles la recherche devrait être poursuivie :

- la prise en considération de courbes de coûts de production quadratique, ce qui permettra de tenir compte d'un arbitrage sur les coûts entre les périodes. On peut entrevoir que les difficultés techniques seront assez grandes.
- l'application au cas d'une courbe de demande où le terme aléatoire est multiplicatif;
- l'intégration de l'incertitude au niveau de l'estimation des coûts;
- et surtout, le calcul de la valeur de l'information supplémentaire.

L I S T E   B I B L I O G R A P H I Q U E .

1. Abramovitz, Moses, "Inventories and Business Cycles", New-York : National Bureau of Economic Research, 1950.

2. Allen, R.G.D., "Mathematical Economics", London : Macmillan, 1956.

3. Arrow, Kenneth J., "Decision theory and Operationnal Research", Operationnal Research, vol.V, December 1957, pp.765-794.

4. Arrow, Kenneth J., Theodore Harris, and Jacob Marschak, "Optimal Inventory Policy", Econometrica, XIX, July 1951, pp.250-272.

5. Arrow, Kenneth J., Samuel Karlin, and Herbert Scarf, "Studies in the mathematical Theory of Inventory and Production", Stanford : Stanford University Press, 1958.

6. Baumol, William J., "Business Behavior, Value and Growth", New-York : Macmillan, 1959.

7. Beckman, Martin J., "Dynamic Programming of Economic Decisions", Berlin - Heidelberg - New-York : Springer Verlag, 1968.

8. Bellman, Richard, "Dynamic Programming", Princeton : Princeton University Press, 1957.

9. Bodart, François, "Contribution à la Théorie de la gestion des Stocks : Analyse adaptive des approvisionnements en Horizon de Gestion court", Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1967-1968.

10. Budd and Steuer, Manchester School, n°36, 1968, pp.1-25.

11. Dister, Guy, "La Gestion de la production dans le court terme", Liège, Faculté de Droit; La Haye : Nijhoff, 1968.

12. Edwards and Townsend, "Business Entreprise, its Growth and Organization": Macmillan, 1959.

13. Hadley, G., Within, T.M., "Analysis of Inventory Systems", Englewood Clifs : Prentice Hall, 1963.

14. Holt, Charles C., Fraco Modigliani, John F. Muth, and Herbert Simon, "Planning Production, Inventories and Work Forces", London : Prentice Hall, 1960.

15. Karlin, Samuel, and Carr, "Prices and Optimal Inventory Policy" in : "Studies in Applied Probability and Management Science", Arrow - Karlin - Scarf, Stanford University Press, 1962.

16. Lundberg, Erik, "Studies in the Theory of Economic Expansion", New-York : Kelley and Millman, 1955.

17. Lutz, Friedrich, and Vera Lutz, "The Theory of Investment of the Firm", Princeton : Princeton University Press, 1951.

18. Mack, Ruth P., "Consumption and Business Fluctuations", New-York : National Bureau of Economic Research, 1956.

19. Marschak, Jacob, "Towards an Economic Theory of Organization and Information", Decision Processes, ed.R.M. Thrall, C.H.Coombs, and R.L. Davis, New-York : Wiley, 1954, pp. 187-220.

20. Metzler, Lloyd A., "The Nature and Stability of Inventory Cycles", Review of Economic Statistics, XXIII, August 1941, pp.113-129.

21. Mills, Edwin S., "Price, Output and Inventory Policy" New-York : Wiley, 1962.

22. Nevins, A., "Some Effects of Uncertainty : Simulation of a Model Price", Quarterly Journal of Economics, Vol.LXXX, Feb.1966, n°1, p.73.

23. Paelinck, J., "Note du cours de Micro-Economie", F.N.D.P., 1969.

24. Samuelson, Paul Anthony, "Foundations of Economic Analysis", Cambridge : Harvard University Press, 1947.

25. Shaw, E.S., "Elements of a Theory of Inventory", Journal of Political Economy, XLVIII, August 1940, pp.465-485.

26. Starr, M.K., and Miller, D.M., "La Gestion des Stocks", Paris : Dunod, 1966.

27. Theil, H., "Optimal Decision Rules for Government and Industry", Amsterdam, North-Holland, 1964.

28. Theil, H., "Economics and Information Theory", Amsterdam, North-Holland, 1967.