

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES ORIENTATION GÉNÉRALE À FINALITÉ SPÉCIALISÉE

#### Éléments de gestion de portefeuille

Devaux, Louis

*Award date:*  
1971

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix - Namur  
Faculté des Sciences Economiques et Sociales  
Année académique 1970 - 1971.



# ELEMENTS DE GESTION DE PORTEFEUILLE

LOUIS DEVAUX

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Licencié-Maître en Sciences Economiques et Sociales  
(Option Publique)

Jury du Mémoire :  
J. de Groot  
G. Delsupehe  
Ph. Callier

à Nicole

Nous tenons à exprimer nos remerciements au Professeur Harry Johnson qui nous a accueilli à la London School of Economics et nous a permis d'y accomplir un stage fécond. Que le Professeur Marcus Miller trouve en ce mémoire l'expression de notre reconnaissance : Nous avons trouvé chez lui les conseils nécessaires à une recherche constructive.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude au corps professoral de la Faculté des Sciences Economiques de Namur qui nous a conféré notre formation économique. Le travail présent est l'expression de l'esprit dans lequel notre initiation économique fut accomplie.

Que Philippe Callier reçoive tous nos remerciements. Nous avons trouvé en lui un collaborateur et un ami. Il nous a permis de porter de nombreuses améliorations à ce texte.

A toute oeuvre il faut un guide. C'est en la personne du Professeur Jacques de Groot que nous l'avons trouvé. Il nous a laissé la liberté nécessaire pour faire oeuvre personnelle et a conservé une attention et un esprit critique indispensables à la bonne marche du mémoire. Nous lui en sommes particulièrement reconnaissant.

## Table des matières.

Introduction

Chapitre préliminaire : Le marché boursier et les investisseurs à risque. p.3

I. Nature et rôle du marché boursier.

- a. Délimitation du marché boursier
- b. Caractéristiques du marché boursier
- c. Rôle du marché boursier
- d. En réalité
- e. Un marché dérégulé ?

II. Psychologie des participants au marché.

- a. Revenu et utilité
- b. Incertitude et investissement
- c. Liquidité et demande d'actifs

III. Introduction au modèle de gestion de portefeuille fondé sur la moyenne et la déviation-standard.

- a. Place du modèle dans les préoccupations actuelles de la recherche en matière financière
- b. Objet et méthode du modèle

Première partie : Le modèle statique de gestion de portefeuille. p.27

I. Définition des concepts et justification du modèle.

- a. Définition des concepts
  - 1) Portefeuille de transactions et portefeuille d'investissement
  - 2) Portefeuille d'investissement
  - 3) Revenu financier
  - 4) Le risque
- b. Justification du modèle
  - 1) Les courbes d'indifférence
  - 2) La fonction d'utilité quadratique

## II. Modèle d'investissement individuel

- a. Définition des variables
- b. Détermination de la quantité à investir
- c. Le théorème de séparation
- d. La diversification

## III. Application du modèle individuel à un marché financier

- a. Détermination de l'équilibre du marché
  - 1) Taux d'intérêt de prêt = taux d'intérêt d'emprunt
  - 2) Taux d'intérêt de prêt  $\neq$  taux d'intérêt d'emprunt
- b. Relation de marché entre un actif à risque et les combinaisons effi-  
cientes

## IV. Vers une méthode applicable.

- a. Le modèle simplifié de Sharpe
- b. La prime de risque

## V. Conclusions de la première partie.

## Deuxième partie : Eléments de gestion dynamique d'un portefeuille. p.93

### I. Introduction

### II. Monnaie et révision du portefeuille

### III. Courbe d'opportunité et prévision du cours des obligations

### IV. Prévision boursière

- a. Introduction
- b. Le modèle de Keran
- c. Cours des actions et inflation

### V. Conclusions de la seconde partie

Résumé et conclusions p.114

Index bibliographique

L'objet de ce travail est de rassembler le fruit des recherches théoriques et pratiques poursuivies depuis plusieurs années par des économistes américains dans le domaine de la gestion de portefeuille et de les compléter par une réflexion personnelle.

L'étude de la gestion de portefeuille trouve sa raison d'être dans la nécessité, pour les agents économiques, de donner à leurs épargnes une affectation rationnelle. La première démarche à cette fin suppose un choix par lequel les agents économiques renoncent à la consommation immédiate de la totalité de leur revenu pour transférer à une période ultérieure les résultats de cette opération.

A partir du moment où la décision de ne pas consommer tout le revenu a été prise, l'agent économique investisseur est confronté à quatre problèmes principaux. Il doit tout d'abord déterminer le volume global de son investissement. Nous verrons que la délimitation de ce volume ne peut toujours être réalisée avec certitude. Une seconde décision est la fixation du montant investi en titres à risque et résiduellement du montant investi sans risque. Une troisième décision concerne la répartition au sein du portefeuille d'actifs à risque. La méthode développée à cet égard dans ce travail a l'avantage d'offrir un critère de choix valable pour la seconde et la troisième décisions, ce qui permet d'obtenir une vision plus complète du portefeuille. Ces deux décisions restent toutefois clairement séparées, comme nous le démontrerons.

La quatrième option qui s'offre à l'investisseur est la détermination du rythme de révision de son portefeuille. Nous verrons quels facteurs influencent ce choix et suggérerons des indications nécessaires à la formulation des prévisions sur lesquelles repose cette révision du portefeuille.

Telle sera notre préoccupation dans ce travail, du point de vue de l'investisseur.

On ne peut négliger l'effet de ces choix sur le marché des titres. L'action des investisseurs exerce une influence déterminante sur la création et la répartition des actifs de la nation, par l'intermédiaire de la fixation du prix de ces actifs. Nous étudierons les mécanismes qui amènent à l'équilibre du marché des titres et ses effets sur les choix des investisseurs.

Notre travail fait ainsi partie des préoccupations qui ont guidé, dans la même faculté, Jean-Pierre van Lede et Georges Delsupehe dans leur étude de la demande d'actifs et des mécanismes d'équilibre de ce marché.

Nous espérons que la lecture de ce travail donnera au lecteur une vue constructive dans un domaine aussi familier et pourtant mal connu. Nous prions le lecteur d'excuser la complexité de la matière. Nous avons essayé d'en donner une présentation aussi abordable que possible.



## Chapitre préliminaire :

Le marché boursier et les investisseurs à risque.

---

Nous voulons, dans une partie préliminaire, introduire au cadre général de l'analyse. Qu'est le marché boursier ? Quel est son rôle ? Quels en sont les participants ? Qu'en attendent-ils ? Quels sont les motifs qui les poussent à déterminer le choix des actifs à détenir ? En particulier, quel est le sens de la notion de liquidité qui est le plus adéquat pour cette analyse ?

Le rappel de ces éléments a pour but de nous familiariser avec l'investisseur à risque sur lequel est fondé le modèle de la moyenne-variance.

Nous signalerons les hypothèses de base du modèle, en le situant au sein des recherches actuelles en matière des marchés des capitaux. Enfin nous verrons brièvement l'objet du modèle de la moyenne-variance et de ses corollaires.

### I. Nature et rôle du marché boursier.

#### a. Délimitations du marché boursier (1)

En partant de l'ensemble le plus large vers le plus restreint, on peut situer de la manière suivante le marché boursier.

- Le système financier comprend toutes les institutions financières et le système bancaire (banque centrale incluse), ainsi que toutes les transactions financières avec le reste de l'économie et l'étranger.
- 

(1) "Etudes sur les Marchés de Capitaux"

O.C.D.E. Rapport général, Paris 1967.

- Le marché des capitaux, partie intégrante du système financier, concerne toutes les opérations d'investissement à long terme et le financement de celles-ci.
- Le marché des titres, catégorie fort restreinte, est le marché où s'échangent actions, obligations à intérêt fixe et obligations convertibles.
- Le marché boursier est celui où sont traitées les actions nouvellement émises (marché primaire) ou existantes (marché secondaire) ainsi que les obligations ayant fait l'objet de conversion en actions.

#### b. Caractéristiques du marché boursier (1)

Le marché boursier possède des éléments d'un marché parfait : Les biens échangés forment une catégorie homogène. L'entrée et la sortie du marché sont libres. Enfin, les participants sont nombreux et peu importants.

Cette dernière caractéristique doit être nuancée. Le marché est, matériellement, conduit par un petit nombre d'individus, les agents de change. On peut comparer ce système avec une démocratie représentative. Toutefois, ces agents peuvent faire des transactions pour leur compte, et planifier dans une certaine mesure les transactions dont ils sont les exécutants. Cette marge de liberté leur permet d'exercer une influence sur la bourse. Bien sûr, ils n'affecteront pas les mouvements à long terme, qui sont guidés par l'activité économique générale, mais ils peuvent stabiliser les fluctuations à court terme : En offrant un marché continu pour des titres dont les transactions sont peu fréquentes, ils éliminent les variations importantes à court terme qui accompagneraient autrement presque toutes les transactions.

---

(1) Baumol W.I. " The Stock Market and Economic Efficiency ".  
Millar Lectures n° 6, Fordham University Press, New York 1965.

Si nous examinons le rôle des investisseurs institutionnels, nous remarquons aussi que ces agents exercent une influence assainissante sur le marché. Aux Etats-Unis, les particuliers manifestent une tendance à être vendeurs nets d'actions, tandis que les fonds de placement prennent un développement considérable depuis une vingtaine d'années. Ils représentent les particuliers qui renoncent à jouer un rôle sur ce marché, se rendant compte de l'avantage des fonds de placement qui disposent de moyens d'action beaucoup plus larges.

L'influence assainissante des investisseurs institutionnels s'exerce grâce à l'information qu'ils peuvent incorporer dans leurs calculs. Leurs choix sont revus plus fréquemment et fondés sur une information plus large. Un modèle comme celui que nous présentons s'adresse à un investisseur important, pouvant pratiquer la diversification et traiter selon une technique relativement sophistiquée les informations dont il dispose.

L'application de plus en plus fréquente de ces méthodes est susceptible d'accentuer la transformation du marché, entraînant la disparition des petits investisseurs au profit des fonds de placement qui, à leur tour, feront une sélection de plus en plus sévère de leurs investissements. Le marché boursier remplira alors beaucoup mieux le rôle qui lui revient.

#### c. Rôle du marché boursier.

Le marché boursier fait partie du marché des capitaux. Il est un des canaux par lequel une économie transforme son épargne en capital disponible pour les entreprises et accroît sa capacité de production. Sans cette transformation, l'économie ne peut déterminer son avenir. Le marché boursier, par le biais des entreprises dont les titres sont achetés, permet d'orienter la production future et de fixer le taux de croissance de la nation.

De plus, la bourse exerce un rôle régulateur en permettant une plus grande diversité dans les sources de financement des entreprises.

Ainsi on peut reconnaître cinq propriétés au marché des actions :

- Il informe et guide partiellement la gestion des affaires.
- Il permet à un très grand nombre d'épargnants de participer, plus ou moins directement à la formation et à la gestion des entreprises.
- Il est un des mécanismes les plus simples de transfert de fonds, du point de vue du prêteur. (1)
- Dans la mesure où il remplit correctement son rôle, le marché est un bon indicateur du climat financier et des perspectives futures des firmes emprunteuses.
- Enfin, il permet de pratiquer un financement à long terme au moyen de prêts d'une durée aussi brève que l'on veut du point de vue du prêteur, si les titres font l'objet de transactions suffisamment fréquentes.

Ces propriétés font du marché boursier un instrument d'une importance primordiale dans l'activité économique. Il la stimule en permettant à l'entreprise de disposer de capitaux à un coût spécialement approprié à sa nature. Si le marché fonctionne parfaitement, il est le meilleur révélateur de l'efficacité des sociétés industrielles.

---

(1) Ceci n'est pas vrai du point de vue de l'emprunteur, car un fractionnement trop grand des parts entraîne un coût de gestion (information, etc...) tel que des sociétés envisagent de racheter leurs titres aux petits actionnaires.

Young et Marshall " Controlling Shareholder Servicing Costs "  
Harvard Business Review, January 71.

d. En réalité

Le marché boursier semble être évité par bon nombre d'entreprises en quête de capitaux.

Tableau 1. Répartition du financement des entreprises américaines.

Moyenne sur la période 1959 - 1966.

autofinancement	:	71,1 %
actions	:	2 %
Obligations	:	7,7 %
autres moyens	:	19,2 %

Source : Lamfalussy A. "Les Marchés Financiers en Europe".

Presses Universitaires de France, 1968.

Comme nous le montre le tableau 1, l'émission d'actions représente une part infime des sources de capitaux des sociétés américaines. L'explication qu'en donne Lamfalussy est la suivante : la structure financière extrêmement forte des entreprises ne les pousse pas à émettre des actions. Leur intérêt ne les y amène pas non plus, car l'endettement est fiscalement favorisé.

Baumol ajoute d'autres motifs propres à détourner les entreprises des émissions d'actions (1) :

- la protection du profit des actionnaires actuels; celui-ci n'est cependant diminué qu'à court terme, avant que le capital investi ne produise des revenus nouveaux.
- Les règlementations de la Stock Exchange Commission.
- les coûts d'émission et de transaction.
- l'obligation de révéler l'activité de la société.

-----  
(1) Baumol, op. cit.

- l'incertitude de toute émission.
- le refus de suivre la discipline du marché.

Ce bilan est grave et une modification de la fiscalité sur les titres et les revenus de capitaux et de la réglementation du marché boursier s'impose si l'on veut rendre aux actions la place qui leur revient dans le financement des entreprises.

e. Un marché dérégulé ?

Pour conclure cette brève présentation du marché boursier, nous voudrions répondre aux critiques fréquentes à propos du comportement irrégulier de ce marché.

Les dérèglements que peut subir le marché boursier sont dus à deux causes principales, de mauvaises prévisions ou une manipulation anormale par ses participants. La seconde cause ne peut durer très longtemps ni entraîner un bouleversement majeur, vu le nombre de participants au marché.

La première est celle à laquelle les économistes s'attaquent depuis bientôt un demi-siècle, en créant une information de plus en plus précise et rapide, aux niveaux macro-et micro-économiques, en recherchant des relations et un équilibre potentiel entre agrégats, en multipliant les explications de la réalité.

Notre travail concerne l'incertitude d'un investisseur en actions et la prévision du marché boursier. En essayant de donner plus de lumière sur ce problème, nous espérons participer à l'effort d'amélioration de ce marché.

## II. Psychologie des participants au marché.

Dans un essai de justification de l'existence d'un portefeuille, nous tenterons de décrire les motifs qui poussent un agent économique à l'épargne et à l'investissement de cette épargne. Nous rattacherons ces notions à la consommation et à l'utilité qui en découle. Ainsi nous verrons que l'utilité d'un revenu n'existe pas en soi mais bien parce qu'elle permet la consommation, présente ou future. Nous rattacherons de même manière l'utilité du rendement d'un titre à risque à celle de la consommation future.

La notion de liquidité sera précisée et comparée avec l'aversion pour le risque. Toutes deux trouvent une même justification : permettre la satisfaction des besoins de consommation, à tout moment.

Nous allons voir comment est constitué le montant de titres dont dispose un individu et comment il se répartit entre les diverses formes d'actifs.

Cette analyse remet la demande d'actions à sa place, au sein de la demande de titres, et replonge cette dernière dans le processus de "vie économique" d'un individu. De plus cette présentation permettra de mieux cerner l'originalité de la demande d'actions: Celle-ci n'est qu'une partie de la demande de titres. C'est pourquoi elle lui est semblable à certains points de vue tout en présentant des caractéristiques propres. Cette comparaison aidera à mieux comprendre la signification et le rôle des titres à risque d'une part, et des actifs sans risque, dont la monnaie est le meilleur exemple, d'autre part, au sein d'un portefeuille.

a. Revenu et utilité

La tradition économique suggère de partir du revenu et de voir sa répartition entre la consommation et l'épargne. L'inconvénient d'une telle présentation est qu'elle pousse à croire que l'individu reçoit un revenu et se demande ensuite ce qu'il va en faire. N'est-il pas plus éclairant de renverser le schéma : l'individu désire un certain montant de consommation et, pour cela, il va offrir ses services et demander un revenu correspondant. Tel est le raisonnement ex ante, sur lequel l'individu se base pour orienter son activité économique.

Y a-t-il une utilité au revenu ? Nous ne parlons pas ici de la gloriole qui entoure celui qui peut annoncer autour de lui un montant enviable de revenus. Notre propos n'est pas non plus centré sur l'utilité du travail. Un agent économique peut désirer travailler indépendamment de tout revenu, pour sa réalisation personnelle, par générosité, ou simplement parce que la peine du travail est inférieure à l'ennui de ne rien faire.

Le revenu n'a pas d'utilité propre. Sa seule justification est de permettre la consommation présente ou future. Cette faculté est constante, ou du moins directement liée au pouvoir d'achat du titre dans lequel le revenu est libellé.

L'utilité fondamentale, à la base de l'activité économique de l'individu, est celle de la consommation, c'est à dire de la jouissance des biens et services qui s'offrent à lui. Cette utilité est décroissante à cause de la décroissance de sa capacité physique ou psychologique de " goûter ". C'est cette utilité qui décroît et pas celle du revenu.



Le désir de consommation est indépendant du revenu. Il existe de soi parce que les individus ont d'abord des besoins primaires, physiques, de subsistance, et ensuite des besoins psychologiques, intellectuels. Lorsque des études post-keynésiennes ont critiqué la constance de la propension à consommer, leurs résultats, opposés à cette constance, n'étaient-ils pas dus plus à des variations du revenu qu'à des variations de la consommation? Lorsqu'on parle de "revenu permanent", on entend que les ménages maintiennent constant le niveau de consommation, même si leur revenu disponible a été passagèrement modifié. Ne devrait-on pas parler de "consommation permanente"? Ceci porte à croire que le niveau de consommation désirée est déterminé indépendamment du revenu, ex ante.

Reconstruisons le raisonnement. L'individu a un désir de consommation réparti à travers le temps. Nous le supposons fixé exogènement. Son montant n'est pas clairement déterminé, mais évalué. D'un autre côté, l'individu dispose d'une capacité de travail, quantitativement et qualitativement déterminée. La quantité de travail sera déterminée par sa capacité physique, donnée, et son désir d'exercer une activité. Ce dernier dépend de la productivité du travail, du désir de consommation et de la "propension à ne rien faire". Ceci détermine l'offre de travail. La demande est fixée par le niveau d'emploi de l'économie et par l'ensemble des activités proposées par les employeurs. Offre et demande s'équilibreront par tâtonnement et donneront un certain niveau de revenu.

Notre schéma est établi sur une période fort longue, par exemple la vie d'un individu. On pourrait en donner la représentation suivante :

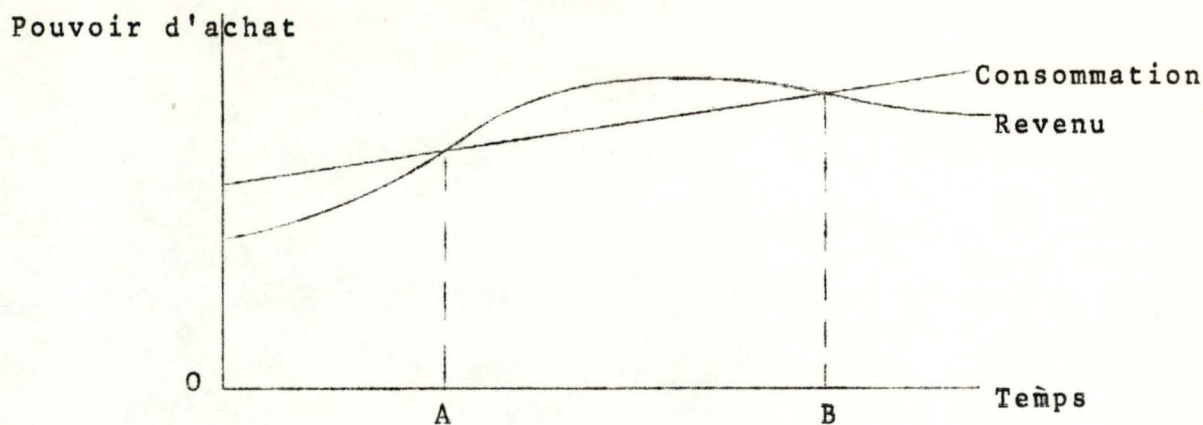


Figure 1

Dans la première période,  $0A$ , l'individu consomme plus qu'il ne gagne. On pourrait même supposer que son revenu est nul. Ce serait le cas de l'étudiant. Durant cette période, il acquiert des habitudes de consommation. Il projetera ses besoins de consommation comme la perpétuation de ces habitudes, avec un taux d'accroissement correspondant à son désir d'accession à une aisance toujours plus grande.

La période  $AB$  est celle où l'individu reçoit un revenu supérieur à ses besoins de consommation. Un excédent des recettes sur les dépenses surgira. Celui-ci sera investi, c'est-à-dire placé dans des formes d'actifs conservant la valeur et produisant un revenu. Telle est la justification de la création et de la gestion d'un portefeuille que nous analyserons dans cette étude.

L'agent économique prévoit une diminution substantielle de son revenu à partir du point  $B$ . Ceci constitue un motif de création d'un portefeuille rémunérateur, qui devra constituer une réserve suffisante pour suppléer à la diminution de revenu prévue, si l'individu veut réaliser son plan de consommation.

Une question peut être posée : un tel projet rend égale la consommation au revenu. Comment dès lors l'investissement et la croissance sont-ils possibles ? Remarquons d'abord que ce plan est celui d'un individu, et pas celui d'une entreprise. Ensuite, le portefeuille permettant de transférer des revenus excédentaires d'une période à l'autre sera constitué au moyen d'actifs. En celà, il constituera une participation à la constitution d'une épargne permettant un investissement productif.

Enfin si nous supposons que la population est en croissance, une partie de la consommation de l'individu sera constituée d'investissement sous forme d'éducation de la génération future. Ainsi la préparation de nouveaux facteurs humains est financée. Ceux-ci seront générateurs de revenu. Si la population croît, ces effets seront croissants.

Le système est également en croissance si l'on suppose que les besoins de consommation sont de plus en plus coûteux et raffinés, chaque nouvelle génération n'acceptant plus de vivre comme la précédente. Nous appliquons ici aux générations le même désir d'accession à une aisance plus grande que celui que nous supposons dans le cas d'un individu.

Jusqu'ici, nous avons raisonné en termes de désirs, d'attente, avant toute réalisation de ces désirs. C'est pourquoi nous pouvons parler d'adaptation du revenu ex ante à la consommation ex ante. Dans la mesure où un individu n'a pas encore formulé son offre de travail, celle-ci peut s'adapter à la consommation.

Ex post, le raisonnement se renverse : l'individu obtient un revenu donné. Il va comparer sa consommation et son revenu. Si le revenu est inférieur, ou bien il emprunte, ou bien il restreint sa consommation.

S'il obtient une égalité, l'affectation est complète. S'il existe un surplus, c'est à dire une épargne positive, celle-ci va donner lieu à la création et à la gestion d'un portefeuille.

b. Incertitude et investissement.

Pourquoi conserver une épargne positive et ne pas réduire le revenu jusqu'au point où il est égal à la consommation ? Parce qu'existe l'incertitude du futur. L'individu ignore les fluctuations futures de son revenu et de sa consommation. C'est pourquoi il garde un certain montant d'actifs, titres de consommation présente ou future.

La forme dans laquelle il conservera ses actifs, sa répartition reflètera l'évaluation de sa consommation ou de l'écart entre son revenu courant et sa consommation courante dans les périodes futures. Plus l'évaluation de ses besoins sera précise, plus l'accumulation se fera sous des formes spécifiques adaptées à chaque besoin. La concentration ne sera jamais totale, pour deux raisons : ses besoins, comme son revenu, sont répartis dans le temps, et l'incertitude subsiste toujours.

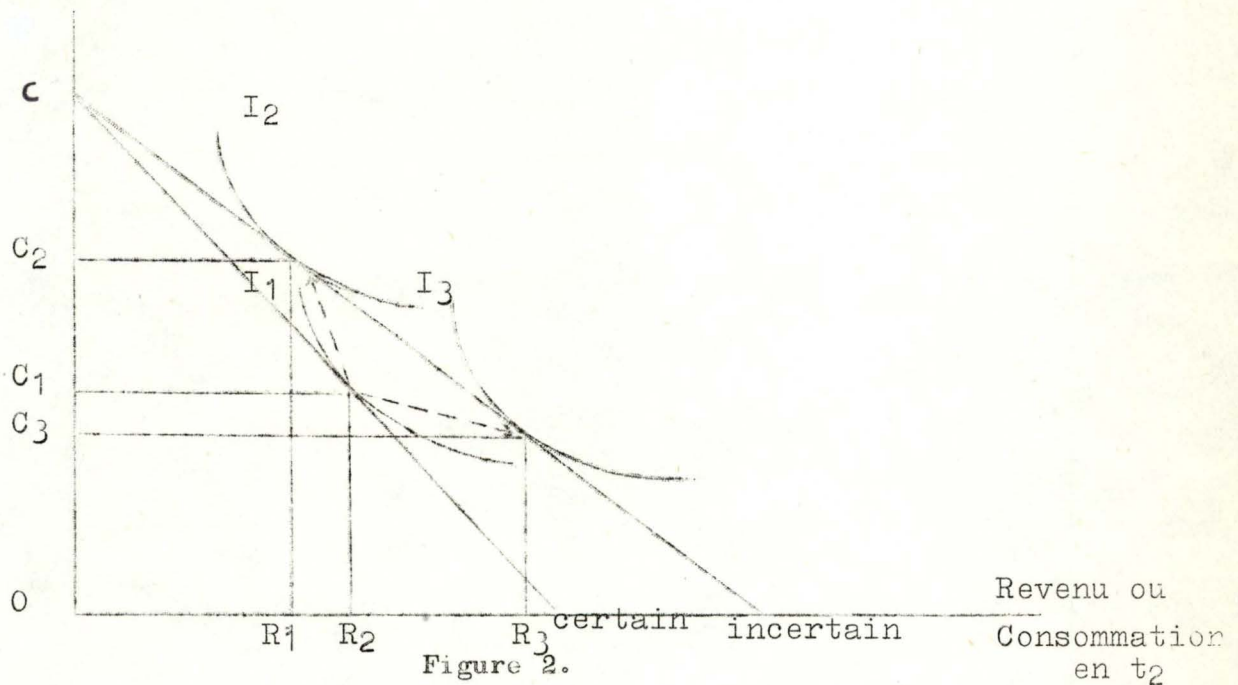
Un autre élément du portefeuille est sa taille. On s'attendait à ce qu'elle varie inversement avec le degré d'incertitude du futur. Tobin (1) montre que les effets de l'incertitude sur le montant du portefeuille sont doubles : un effet négatif, car cela diminue l'attrait du revenu financier - et il compare cet effet à celui de substitution dans l'analyse de la demande -, et un effet positif, car le résultat pouvant être peu élevé, mieux vaut investir plus pour être certain d'avoir assez - ceci serait semblable à un effet de revenu. L'effet final sera une balance des deux.

-----  
 (1) Tobin : Notes on Optimal Monetary Growth  
 Journal of Political Economy, August 1968 (Part II).

Nous pouvons donner la représentation graphique suivante de ce raisonnement.

Soit un rapport entre la consommation présente et le revenu futur, certain et incertain. Ce rapport, représenté par la droite C-certain ou C-incertain, exprime le choix qui s'offre à l'individu. Il peut, soit consommer en  $t_1$  un montant  $OC$  et ne rien consommer en  $t_2$ , soit renoncer à consommer en  $t_1$  et consommer un montant égal à  $O$ -certain en  $t_2$ , soit choisir une solution intermédiaire. La pente de la droite C-certain (C-incertain) exprime le taux de transformation d'un revenu présent en un revenu futur certain (incertain).

Consommation en  $t_1$



Le revenu certain est obtenu en enlevant la prime d'incertitude du revenu incertain. Si l'on suppose une distribution normale de probabilité des revenus incertains, nous appellerons revenu incertain la moyenne de cette distribution, et revenu certain une valeur inférieure à celle-ci étant donné que seule compte l'incertitude des pertes.

Le revenu certain est donc la valeur du revenu correspondant à un niveau de risque accepté et équivalent à la certitude car négligeable.

Les courbes d'indifférence nous montrent comment l'individu répartira ses fonds entre la consommation et l'investissement. Si l'on se réfère à la famille de courbes d'indifférence de type  $I_1 I_2$ , on constate que la perspective d'incertitude diminue la proportion du revenu disponible en  $t_1$  consacrée à l'investissement et accroît la consommation qui passe de  $OC_1$  en  $OC_2$ . L'effet de substitution domine l'effet de revenu. L'autre famille de courbes d'indifférence ( $I_1 I_3$ ) montre que l'incertitude accroît la part de l'investissement dans le revenu présent (la consommation diminue  $OC_3 (OC_1)$ ). C'est l'effet du revenu.

Les lignes en pointillé entre les points de tangence des courbes d'indifférence avec les droites de transformation entre la consommation et le revenu (certain ou incertain) montrent le sentier d'expansion du certain vers l'incertain. Dans les cas  $I_1, I_3$ , celui-ci est nettement orienté vers le revenu et cet effet prédomine. Dans le cas  $I_1, I_2$ , celui-ci est plus proche de la consommation. C'est l'effet de substitution qui prédomine.

c. Liquidité et demande d'actifs.

La recherche des motifs qui poussent les agents économiques à déterminer la forme des actifs détenus dans un portefeuille fait partie d'un ensemble de préoccupations qui n'étaient pas étrangères à Keynes. Nous voulons examiner comment sont conciliés les besoins de moyens de paiement et les besoins de moyens de réserve de valeur. Quel est le coût de pareille conciliation ? Quelle est la mesure de ce coût ? Voilà notre préoccupation présente.

Lorsque Keynes a formulé sa fonction de préférence pour la liquidité, il voulait expliquer les réactions de la demande de monnaie par rapport à un facteur-clé qu'il déterminait sous la forme du taux d'intérêt. Ce facteur était censé représenter l'élément catalyseur de toutes les influences sur le marché. Keynes obtenait une fonction de marché, supposant des adaptations automatiques des portefeuilles des individus suite à une variation du taux d'intérêt. Si le taux d'intérêt était élevé, les agents économiques prévoyaient une baisse de celui-ci et une hausse du prix des obligations. La demande de titres s'élevait et celle de monnaie s'affaiblissait.

On remarque deux parties dans le raisonnement : d'une part, l'observation du niveau du taux d'intérêt et la comparaison de celui-ci avec un niveau polarisant, vers lequel le taux d'intérêt courant doit tendre, d'autre part la déduction d'un effet de la variation du taux d'intérêt sur la valeur des obligations.

Tout au long de ce développement, une constante de comportement est sous-entendue : le désir de préservation, et même d'accroissement, de la valeur du capital investi. Celle-ci est impliquée par Keynes et sert de critère aux modifications du portefeuille des agents économiques.

C'est ce désir que nous nous proposons d'analyser, au niveau de l'individu, indépendamment de la situation du marché financier. Notre étude sera donc située à un niveau plus fondamental que celui où Keynes élaborait la sienne. Sa présentation suppose la vérification des hypothèses que nous allons formuler.

Nous procéderons comme suit : nous nous analyserons la notion de liquidité en définissant les éléments qui la composent. Nous remarquerons qu'on peut envisager la liquidité de deux façons différentes, suivant que l'on se réfère à un titre ou aux besoins d'un agent économique. Nous verrons ensuite comment on peut classer les actifs à partir de critères définis. De l'adaptation des titres aux besoins des agents économiques découlera la demande d'actifs, dont la fonction de préférence pour la liquidité de Keynes n'est que la représentation simplifiée.

Nous proposons la définition suivante de la liquidité : Est liquide un titre dont le propriétaire estime pouvoir se défaire sans délai ni perte. Ceci implique que son détenteur se fasse une idée de l'attitude des autres participants au marché à l'égard du titre détenu.

Notre définition vérifie trois critères de Claassen (1) absence de coût de transaction, absence de coût d'information et absence de variation de la valeur nominale du titre. Un quatrième critère n'est pas vérifié : notre définition ne suppose pas la constance de la valeur réelle du titre. Une condition moins restrictive est suffisante : si la valeur réelle du titre fluctue, celui-ci sera liquide tant qu'il y aura illusion monétaire sur ce titre, au sens de Patinkin c'est à dire lorsque les agents économiques ne réagissent pas à une variation de la valeur réelle de l'actif considéré (2).

---

(1) Claassen E.M. "Analyse des liquidités et théorie du portefeuille"  
Presses universitaires de France, Paris 1970, p. 50

(2) Claassen E.M. "Monnaie, revenu national et prix"  
Dunod, Paris 1968, p. 17.



Nous pouvons déterminer trois degrés d'inflation, par ordre d'importance :

1) L'inflation "rampante" est celle qui est caractérisée par une légère perte de valeur réelle de la monnaie. Cette perte est trop menue pour éveiller l'attention des agents économiques et susciter des adaptations de leur portefeuille ou de leur calendrier de dépenses. Ainsi il y a illusion monétaire et la monnaie est parfaitement liquide, du moins dans l'esprit des agents économiques qui la détiennent.

2) L'inflation "modérée" est caractérisée par une diminution plus importante de la valeur réelle de la monnaie, au point de supprimer l'illusion monétaire. Les agents économiques acceptent encore la monnaie, car le service de liquidité offert par ce titre compense la perte de valeur réelle qu'entraîne sa détention. Mais le degré de liquidité de la monnaie est diminué par le désir des individus de se débarrasser de ce titre dans la mesure du possible. Les individus font des évaluations sur l'actif liquide. Le critère d'absence de coût d'information n'est plus tout à fait vérifié. La préoccupation monétaire, qui remplace l'illusion monétaire, a des répercussions sur les taux <sup>de prêt</sup> qui enregistrent une hausse pour pallier la diminution du pouvoir d'achat du capital prêté.

3) L'inflation est "forte" lorsque, primo l'illusion monétaire n'existe plus, secundo, le service de liquidité offert par ce titre ne compense plus la perte de valeur réelle qu'entraîne la détention de la monnaie. Pour reprendre les propos de Claassen, "la monnaie, privée de sa fonction de réserve de valeur, cessera d'être acceptée unanimement comme moyen de paiement (1)

---

(1) Claassen E.H. op. cit. (1), p.38.

Les délimitations qui séparent ces niveaux d'inflation ne sont pas aisément décelées. L'inflation rampante peut devenir de l'inflation modérée même si l'ampleur de la dépréciation monétaire est constante, dès que les agents économiques prennent conscience de cette perte. L'inflation à un taux moyen sera modérée ou forte selon que l'on attache un prix élevé ou non au service de la liquidité. La présence d'un substitut potentiel à la monnaie détériorée favorise le passage de l'inflation modérée à l'inflation forte. Notre référence à des éléments difficilement mesurables comme le prix qu'on attache aux services rendus par la monnaie rend plus subtile la distinction entre les degrés d'inflation.

Notre définition de la liquidité fait référence à un élément subjectif, puisqu'elle suppose que les agents économiques prêtent à l'actif liquide, à tort ou à raison la fonction de réserve de valeur, ou que les individus estiment que le service de la liquidité est suffisant pour compenser une perte de valeur limitée. Nous remarquons que la fonction de réserve de valeur n'est pas aussi secondaire que ne le dit Claassen.

Nous pouvons nous résumer en rappelant les propriétés d'un actif liquide : il facilite les transactions en offrant aux agents économiques un intermédiaire dont l'usage n'entraîne aucun coût et dont la détention n'entraîne aucun risque connu. Sur ce dernier point, le risque peut exister, mais il n'affecte pas la liquidité de l'actif tant que les agents économiques n'en sont pas conscients ou tant que le risque de perte est compensé par le service de la liquidité.

Les motifs de demande d'un actif liquide apparaissent clairement.

Celui-ci sera accepté et détenu parce qu'il permet (ou est censé permettre) les transactions à tout moment présent et futur. Tel est le service rendu par la liquidité.

Nous avons vu que la monnaie n'est pas toujours parfaitement liquide. De plus, certains actifs peuvent être plus ou moins liquides et exercer ainsi un effet sur l'activité économique en permettant les transactions.

On pourrait envisager une autre optique dans l'analyse de la liquidité, qui est celle de la liquidité relative. C'est celle qui résulte de l'adéquation de la composition du portefeuille d'un agent économique au calendrier de ses besoins. Ces besoins trouvent leur origine dans des projets de consommation d'une part, et d'autre part dans les obligations contractées dans le passé.

Si l'individu a un montant donné de besoins pour une période présente, la portion liquide de son portefeuille sera limitée à ce montant. Si les besoins sont prévus pour une période future, la forme désirée de ses actifs sera des titres pour une consommation future, c'est à dire des titres dont la liquidité sera parfaite lorsque la période future sera arrivée. A ce point de vue, un titre pour une consommation présente peut-être moins liquide pour la période envisagée. On pourrait donc parler d'un coût de la liquidité présente, mesuré par exemple en termes de dépréciation du pouvoir d'achat de l'actif liquide (1). On pourrait même envisager un second coût de la liquidité présente, mesuré en coût d'opportunité en termes de la différence entre le rendement d'un actif liquide et celui d'un actif non encore liquide.

---

(1) Stiglitz J.E. "Consumption Oriented Theory of the Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates".  
Review of Economic Studies, July 1970.

On ne détiendra de la monnaie que dans la mesure où sa détention procure des avantages qui compensent ces coûts : coût réel ou coût d'opportunité. Les avantages de la détention de monnaie prennent la forme soit d'une économie de coût de transaction pour l'encaisse de transaction, soit une sécurité plus grande en ce qui concerne la valeur du capital lorsqu'on prévoit une baisse de la valeur des autres types d'actifs financiers.

Il existe dans un même ordre d'idée, un coût de l'illiquidité présente mesuré par le coût de transformation des actifs non liquides en moyens de paiement et par le risque de perte en capital, si l'actif non liquide a une valeur fluctuante.

Il n'est pas inutile de rappeler les diverses idées que nous avons développées et de schématiser les critères de détermination du degré de liquidité d'un portefeuille.

Nous avons défini la liquidité d'un actif comme étant sa qualité de moyen de paiement (ceci exclut tout coût d'information et de transformation) fondée sur la manière dont cet actif remplit la fonction de réserve de valeur. Sur ce dernier point, les estimations d'un agent économique quant à la manière dont l'actif liquide remplit cette fonction dépendent de sa connaissance du marché, de l'existence ou non d'une illusion monétaire, ou d'un arbitrage conscient entre les différents services de liquidité et la dépréciation de la valeur réelle de la monnaie.

La monnaie n'est pas le seul actif liquide, bien qu'elle en soit généralement le meilleur exemple. D'autres actifs peuvent remplir ce rôle plus ou moins parfaitement.

Une seconde interprétation de la liquidité, en termes relatifs, fut élaborée à partir de l'adéquation de la composition d'un portefeuille au calendrier des besoins de son détenteur. Cette adéquation est réalisée en évaluant le montant des besoins de moyens de paiement par période et en affectant à chaque besoin un volume correspondant d'actifs qui seront rendus liquides au moment opportun. Une telle approche a pour but de minimiser le coût de la liquidité (coût d'opportunité exprimé par le rendement attendu sur un actif rémunérateur) et le coût de l'illiquidité (coût de transformation, d'information, d'incertitude, de délai).

Ce qui rend compatibles les notions de préférence pour la liquidité et de renonciation à celle-ci pour effectuer un placement, éventuellement à risque, c'est le désir d'adapter le mieux possible ses titres pour une consommation présente ou future, c'est à dire la monnaie et tout actif non liquide, de façon à maximiser l'utilité retirée de cette consommation, à toute période du temps.

Le particulier sera prêt à renoncer à la liquidité et à courir un risque, s'il en retire un revenu, c'est à dire s'il accroît ses droits à la consommation. Telle nous semble être la justification d'un portefeuille comprenant des titres à risque.

### III. Introduction au modèle de gestion de portefeuille fondé sur la moyenne et la déviation standard.

#### a) Place du modèle dans les préoccupations actuelles de la recherche en matière financière.

En 1964, le National Bureau of Economic Research (N.B.E.R.) organisait un colloque destiné à mettre en commun toutes les recherches faites sur les marchés de capitaux et à préciser les voies dans lesquelles des

études devaient être poursuivies. (1)

Ils insistèrent sur le rôle du marché des capitaux dans la réalisation des objectifs nationaux. Nous avons dit un mot à ce propos en définissant le rôle du marché boursier.

Une étude des interrelations entre secteurs du marché des capitaux s'avérait utile. En établissant une relation entre le rendement sur obligations et celui des actions, nous allons dans ce sens.

L'analyse du processus de la décision du portefeuille est une de nos premières préoccupations. Le modèle de moyenne-variance développe une méthode de détermination de la composition et du volume d'un portefeuille diversifié.

L'influence des marchés financiers sur les dépenses réelles est un problème qui subsiste. Quelle est la relation entre les variables financières et réelles? Quel est le rôle des facteurs financiers sur l'allocation des ressources, sur le niveau d'emploi? Toutes ces questions sont fondées, mais notre étude n'y répondra que partiellement et indirectement.

A propos du marché boursier, on s'interrogeait sur la nature des acheteurs de titres, sur leur attitude vis-à-vis du risque, sur le rôle des prévisions, sur les raisons du changement dans la répartition de la propriété des actions. Nous apporterons une réponse à quelques-uns de ces problèmes.

Notre intérêt n'est pas tourné vers l'offre de titres dont nous supposons qu'elle s'adapte à la demande.

Le N.B.E.R. s'interrogeait sur les facteurs de détermination du prix des actions. Nous n'avons pas voulu reprendre ici la recherche au niveau d'un titre particulier.

---

(1) N.B.E.R. "The Market for Corporate Securities" in "Research in the Capital Markets" - Journal of Finance, May 64 (supplément).

Mais le modèle de Kéran (1) donnera des indications fort utiles au niveau d'un indice du marché boursier. Nous justifions cette approche par la diversification et les conclusions qu'elle nous a permis de tirer.

Remarquant que nos préoccupations rejoignent, sur plusieurs points, celles du N.B.E.R., nous placerons ce travail dans la ligne des recherches qu'ils préconisaient.

b) Objet et méthode du modèle.

Ce modèle que nous allons exposer a pour but de fournir à l'investisseur un cadre cohérent et des instruments de mesure lui permettant de choisir plus rationnellement ses formes de placement.

Aux notions vagues de recherche du profit et de fuite du risque, nous substituons une relation précise entre le revenu financier et le risque couru. Nous fournissons les instruments de mesure de ces grandeurs, qui ont été suggérés par Tobin.

La diversification est présentée mathématiquement et ses effets peuvent être mesurés.

La dérivation d'un équilibre de marché explique l'évolution du prix des titres et des taux d'intérêt vers un alignement de leurs rendements.

Le modèle de Sharpe (2) simplifie considérablement l'approche et la rend praticable. Elle est justifiée par la diversification qui ne laisse subsister qu'un seul risque, celui du marché.

-----  
 (1) Keran "Expectative Money and the Stock Market"  
 Review of the Federal Reserve Bank of St Louis, January '71.

(2) Sharpe W. "A Simplified Model for Portfolio Analysis"  
 Management Science, Janvier 63, pp 277 à 293.

Le travail de Keran et notre présentation permettent de s'attaquer à ce dernier en développant une théorie et un modèle de simulation de l'évolution du marché boursier.

Nous avons bouclé la boucle et présenté une explication du marché des actions du point de vue de l'investisseur. Nous laissons délibérément de côté le point de vue de l'offre de titres, en supposant qu'elle s'adapte à la demande.



P R E M I E R E P A R T I E

=====

Le modèle statique de gestion de portefeuille.

-----

## I. Définition des concepts et justification du modèle

-----

### A. Définition des concepts

#### 1) Portefeuille de transactions et portefeuille d'investissement

L'individu dispose d'un portefeuille de transactions servant à assurer la synchronisation entre le flux de revenus et celui de dépenses courantes. Son volume est peu sensible au niveau du taux d'intérêt car il est constitué pour un horizon à court terme, pour une durée n'excédant pas, en principe, la période qui sépare deux revenus.

Si l'horizon de l'agent économique dépasse la période pour laquelle il perçoit son revenu, cet agent va tenir compte du revenu attaché à diverses formes de placement et du risque attaché à ce revenu en se constituant un portefeuille d'investissement. Celui-ci est géré selon une méthode que nous décrirons plus bas et qui est fondée sur deux critères principaux : le revenu financier et le risque.

La limite entre les deux types de portefeuille est fort imprécise, pour deux raisons : Dans l'un comme dans l'autre, l'agent économique détient de la monnaie et ses encaisses peuvent difficilement être décomposées en une encaisse de transactions et une encaisse spéculative. Un second motif est l'incertitude qui entoure toute activité économique. Ceci pousse l'agent économique à changer inopinément la destination des montants de son portefeuille, particulièrement celle des moyens de paiement. Ainsi, il est parfois impossible de savoir si un montant liquide, résidu du portefeuille de spéculation, garde encore sa finalité spéculative ou devient un moyen de transaction. Plusieurs motifs justifient la détention d'encaisses, mais il n'est pas possible de répartir quantitativement une encaisse déterminée entre ces motifs de détention.

Toutefois, on peut faire l'observation suivante. La composition d'un portefeuille d'investissement sera différente selon qu'on choisit une optique statique ou une optique dynamique. Dans le premier cas, on détermine une fois pour toutes la combinaison optimale d'actifs au sein du portefeuille et l'on peut fixer une période de temps pendant laquelle ce portefeuille reste valable. Telle sera l'optique de la première partie de l'exposé.

Dans le second cas, l'investisseur compose son portefeuille en cherchant à maximiser le rapport entre le revenu financier et le risque, non plus sur une période, mais sur une multitude de périodes. Dans la mesure où l'objectif dans un horizon à long terme et l'objectif dans un horizon à court terme ne sont pas entièrement compatibles, une modification de la composition du portefeuille s'imposera. Par exemple, l'investisseur devra renoncer à certains placements peut-être fort fructueux mais pas assez facilement réalisables. S'il engageait ses fonds dans cette voie, d'autres possibilités non encore permises mais déjà envisageables lui seraient interdites. Il sera donc obligé, durant certaines périodes, d'investir de façon moins intéressante pour disposer plus rapidement de moyens d'action. L'absence de concordance entre un revenu et le moment où l'on souhaite l'encaisser est la cause de non investissement complet dans des combinaisons optimales du point de vue statique. La mobilité devient un facteur important dans la gestion dynamique d'un portefeuille.

On pourrait dès lors suggérer la présence d'un portefeuille de transactions au sein du portefeuille d'investissement. Cette partie du portefeuille est constituée dans un but spéculatif et pas dans un but de transactions servant à la consommation.

Ainsi on ne peut le ranger dans le portefeuille de transactions tel qu'il a été défini au point de départ. Cette encaisse de transactions d'investissement sert à assurer la synchronisation entre le flux de recettes provenant de la liquidation de certains actifs et celui des dépenses d'investissement. Le mécanisme est le même, la finalité est différente.

Nous reverrons cette notion et son application dans la seconde partie de l'exposé, quand nous analyserons la gestion dynamique du portefeuille.

## 2) Portefeuille d'investissement.

Le portefeuille d'investissement est celui qui est constitué dans un but de transfert productif de pouvoir d'achat d'une période à une autre. Il suppose une gestion dont les prises de décision varient à l'intérieur de deux limites : au minimum, il y a deux décisions : choix d'un actif au début de la période de gestion et liquidation de cet actif en fin de période; le maximum de décisions est un nombre infini de révisions de portefeuille durant la période globale d'investissement, donnant lieu à des substitutions d'actifs. Ces substitutions, de même que tout choix premier d'actifs sont guidés par les critères que nous avons déjà mentionnés : le revenu financier et le risque.

Nous supposons que le portefeuille d'investissement se répartit entre deux éléments : un portefeuille à risque comportant des actions et des obligations, et un portefeuille sans risque, sous forme de monnaie, investie positivement en prêt, ou négativement en emprunt.

Les deux premiers actifs, actions et obligations, comportent un risque que nous décrirons plus loin. Disons seulement que celui-ci est mesuré en termes de déviation autour du revenu attendu. Cet écart peut provenir d'une fluctuation inattendue du cours du titre ou du dividende qu'il rapporte.

Contrairement à la monnaie, ces actifs voient fluctuer leur valeur d'échange. Leur valeur patrimoniale n'est pas certaine, même si la valeur faciale est fixée, car si l'on veut négocier ce titre, il faut se soumettre aux fluctuations du marché. La monnaie, par contre, est toujours négociée à sa valeur nominale, puisqu'elle exerce à la fois les fonctions de numéraire et de moyens de paiement.

Les actions sont des titres réels; les obligations sont des titres monétaires. Les premières sont évaluées à partir des rendements réels escomptés sur une période future égale à la vie de la société. Nous supposons que cette vie est illimitée : dans les cas habituels, la liquidation de la société échappe à l'horizon de l'agent économique investisseur. Les actions sont donc des titres réels représentatifs de droits sur des actifs physiques ou sur la production de certains facteurs. Les obligations sont des titres monétaires c'est à dire représentatifs d'engagements nominaux. La partie du portefeuille sans risque, prêtée ou empruntée, sert de variable instrumentale. Elle permet d'investir en actifs à risque un montant différent du volume de fonds disponibles. Nous verrons plus loin comment cette décision prend forme.

Dans la première partie du travail, nous nous préoccupons du choix des actifs qui composeront le portefeuille pour maximiser l'utilité sur une période. Dans la seconde, nous envisagerons toutes les autres décisions : liquidation des actifs et remplacement par d'autres au bout de chaque période unitaire d'investissement, en maximisant l'utilité sur une succession de périodes. La composition du portefeuille est définie de façon plus large que celle du portefeuille de base dans l'analyse de Tobin (1)

---

(1) Tobin J. "Liquidity Preference, as Behavior towards Risk"  
Review of Economic Studies, February 1958.

Celui-ci ne faisait intervenir que deux actifs, la monnaie et les titres consolidés. On peut relever deux différences entre sa présentation et la nôtre, la première étant accessoire, la seconde fondamentale.

D'une part, nous incluons les obligations, actifs relativement semblables aux titres consolidés. Tous deux sont des engagements monétaires. La différence provient de la détermination du terme dans le cas des obligations, tandis que ce terme n'est pas fixé dans le cas des titres consolidés. Cette différence n'est pas déterminante pour le raisonnement que nous faisons. Supposons simplement que le terme des obligations est au moins égal à la durée de la période sur laquelle l'investisseur calcule le rendement de son portefeuille.

D'autre part, nous incluons un troisième type d'actifs dans le portefeuille : les actions. Ceci n'était pas envisagé par Tobin. Son but était différent du nôtre. Il centrait son attention sur la préférence pour la liquidité et sur les motifs de renonciation à celle-ci. Nous étudions la composition et le rendement d'un portefeuille constitué dans le but de réaliser un transfert productif de pouvoir d'achat d'une période à une autre. Les caractéristiques d'un titre réel justifient que nous l'incluions expressément dans l'analyse.

### 3) Revenu financier

Le revenu qui entre dans le calcul économique de l'investisseur n'est pas le revenu actuel, mais le revenu escompté sur une période future. Il varie suivant l'actif considéré. Dans le cas de la monnaie, il est composé du taux de variation du pouvoir d'achat de la monnaie, auquel on ajoute, dans le cas de prêt, le taux d'intérêt sur prêt, ou l'on retranche, dans le cas d'emprunt, le taux d'intérêt sur emprunt. Nous supposons ce revenu connu et constant pour la période d'investissement considérée.

Dans le cas des obligations, il se compose du taux d'intérêt et de la variation du prix des titres, pondérés par le taux de variation du pouvoir d'achat de la monnaie. Toutes ces grandeurs sont estimées, sauf la dernière, supposée connue. Le revenu financier des actions se compose des dividendes et de la variation du prix des actifs (grandeurs estimées), pondérés par le taux de variation du pouvoir d'achat de la monnaie.

Notre détermination du revenu estimé du portefeuille est assez différente de celle de Tobin. Nous y avons inclus la variation du pouvoir d'achat de la monnaie et l'estimation de gain (ou perte) en capital non nulle<sup>(1)</sup>. Nous justifions ce procédé de la manière suivante : On ne peut parler d'investissement à moyen et à long termes en actifs monétaires sans tenir compte de l'inflation qui réduit la valeur réelle de ces titres. L'analyse de Tobin nous paraît insuffisamment générale du fait qu'elle exclut du revenu d'un actif l'estimation d'une variation du prix de celui-ci. Ce serait supposer que l'individu ne dispose d'aucune information sur l'évolution future des marchés financiers et de l'activité économique en général et sur les conséquences de cette évolution sur la valeur de ses actifs. Il nous paraît peu logique, dans notre exposé, de supposer à la fois que l'investisseur dispose de moyens suffisants pour calculer les effets de la diversification - et pour la pratiquer - mais ne dispose pas de moyen lui permettant de donner un sens - si pas une mesure précise - aux variations anticipées de l'activité économique et aux conséquences qu'elles entraînent sur le cours des actifs.

---

(1) Tobin n'ignore pas la possibilité d'un gain ou d'une perte en capital mais il suppose que l'espérance mathématique de cette éventualité est nulle.

Notre modèle dispose de tous les instruments nécessaires pour faire un tel calcul. Le revenu d'un actif inclura la variation estimée du cours de ce titre, et le risque mesurera l'incertitude qui entoure cette estimation. La formulation de telles hypothèses élargit considérablement le cadre de l'analyse.

#### 4) Le risque

L'autre critère de choix des actifs du portefeuille est le risque. Celui-ci est mesuré par l'écart-type autour du revenu attendu des actifs.

Markowitz (1) suggère de prendre la semi-variance comme mesure du risque : au lieu de faire la somme des carrés des écarts positifs et négatifs autour de la moyenne, on n'additionne que les écarts négatifs, pour les valeurs situées en dessous de la moyenne.

Cette méthode se justifie par le fait que l'investisseur, désireux d'éviter le risque, comme nous le verrons plus loin, attache beaucoup d'importance à la possibilité d'une perte. Le risque dont l'investisseur tiendrait compte serait alors mesuré uniquement par l'insuffisance du revenu réalisé par rapport au revenu attendu. Le calcul du risque par cette méthode respecte mieux le raisonnement suivi par l'investisseur. Mais d'autres arguments, parmi lesquels la complication introduite par cette méthode, militent en sa défaveur.

Reprenons d'abord les arguments que Markowitz cite lui-même. Cela allonge le temps de calcul du risque du portefeuille. De plus cette méthode est inusitée et nécessiterait une adaptation de la part des analystes. Ces difficultés sont surmontables et ne nous arrêteraient pas à elles seules.

---

(1) Markowitz H.M., Portfolio Selection  
Cowles Foundation, Willey, New-York 1959, pp. 188 à 203.



Des difficultés d'ordre mathématique se présentent aussi. La semi-variance est mesurée par la somme des écarts négatifs par rapport au revenu attendu. Or, dans la détermination du portefeuille optimal, intervient le calcul de la covariance entre titres (1) Pour calculer la semi-variance d'un portefeuille, il faudrait donc calculer les semi-variances des titres selon une méthode, puis calculer la covariance entre titres selon une seconde méthode qui mêlerait semi-variance "Markowitzienne" et corrélations calculées à partir des variances habituelles. Une telle complication apporterait-elle une information nettement améliorée pour justifier le recours à cette méthode ?

De même, on eût pu imaginer des pondérations proportionnelles à l'écart par rapport à la valeur moyenne. De telles variantes seraient à envisager, quoiqu'il soit à craindre qu'elles ne compliquent beaucoup les recherches pour un gain minime en précision.

Si l'on songe que Tobin fonde ce modèle sur une hypothèse de distribution de probabilité normale des portefeuilles, ceci entraîne que les pertes et les gains inattendus par rapport au revenu escompté se compensent dans l'ensemble.

Si l'on ne veut pas tenir compte de l'hypothèse de normalité et si l'on justifie la méthode uniquement par une fonction d'utilité quadratique (cfr ci-dessous), rien ne nous empêche de supposer qu'a priori les pertes et les gains par rapport au revenu escompté soient également répartis autour de la moyenne.

---

(1) Le risque d'un portefeuille composé de deux titres est calculé par :

$$\sigma_{AB} = \sqrt{\alpha^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_B^2 + 2\rho_{AB} \alpha(1 - \alpha) \sigma_A \sigma_B}$$

Si l'on accroît le nombre d'investissements différents, ceci nous semble l'hypothèse la plus plausible en l'absence de connaissance supplémentaire sur la répartition de revenus réels. Il n'est donc pas certain que se limiter à l'information fournie par l'écart-type entraîne une perte importante.

Enfin, l'étude des présentations faites par les spécialistes du modèle révèle que la semi-variance n'est utilisée nulle part. Même Markowitz, après avoir présenté et justifié la semi-variance, poursuit son analyse en termes d'écart-type.

Nous regrettons que cette mesure, qui se révélait de prime abord pleine d'intérêt n'ait fait l'objet d'un examen plus approfondi. Il faudrait analyser le coût qu'occasionnerait l'emploi de cet instrument et le profit qui en résulterait.

### B. Justification du modèle

Voyons comment Tobin justifie le modèle de moyenne-écart-type dans les cas de distribution de probabilité des portefeuilles normale ou dans le cas d'une fonction d'utilité quadratique.

Le modèle suppose que l'investisseur choisit, entre deux distributions de probabilité alternatives de revenu qui lui sont offertes, sur base de deux critères seulement. Décrivons brièvement la démarche suivie. Un investisseur dispose d'actifs divisibles différant par le revenu ou le risque. Dans un graphique à deux dimensions, à chaque actif (ou portefeuille d'actif) correspond un point donnant le revenu attendu (mesuré en ordonnée) et le risque (mesuré en abscisse). Le marché offre différentes possibilités. L'investisseur choisira celle qui maximise son utilité. Graphiquement, il fera son choix en investissant dans l'actif (ou le portefeuille) qui lui permet d'atteindre la courbe d'indifférence la plus élevée.

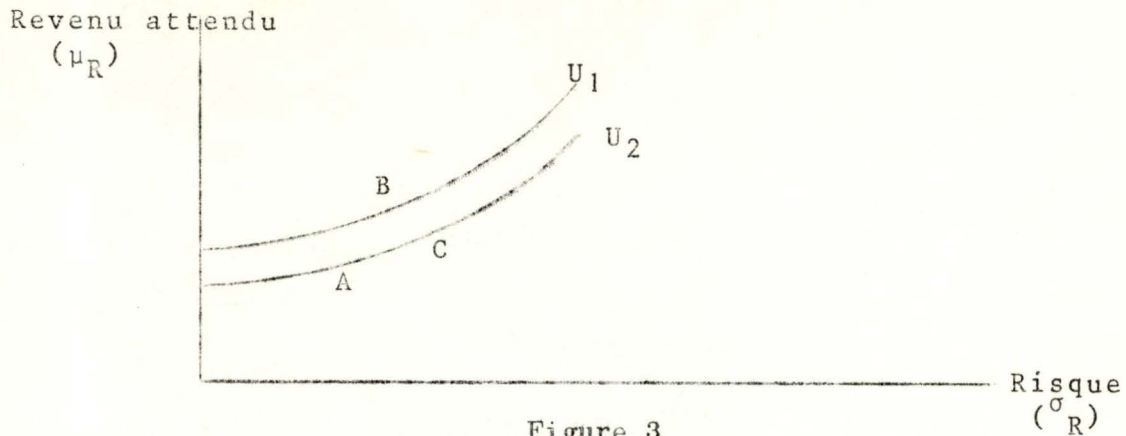


Figure 3

Dans la figure 3, l'individu préférera un portefeuille B, situé sur une courbe d'indifférence  $U_1$ . Les portefeuilles A ou C sont situés sur une courbe d'indifférence inférieure  $U_2$ , qui représente un degré d'utilité inférieur.

#### 1) Les courbes d'indifférence

Dans notre analyse, une courbe d'indifférence est le lieu de toutes les combinaisons de revenu financier et de risque procurant une utilité constante.

Nous allons démontrer comment les courbes d'indifférence entre le revenu  $\mu_R$  et le risque  $\sigma_R$  remplissent ce rôle. Nous verrons ensuite les implications qui résultent de la forme donnée à ces courbes.

Une justification des courbes d'indifférence entre  $\mu_R$  et  $\sigma_R$  serait que l'investisseur évalue l'évolution de son portefeuille en termes d'une distribution de probabilité de revenus. Cette distribution, dont Tobin propose qu'elle soit normale, est connue dès que l'on connaît sa moyenne et sa déviation standard, c'est-à-dire  $\mu_R$  et  $\sigma_R$  dans notre cas.

La forme des courbes d'indifférence découle des caractéristiques de la fonction d'utilité du revenu du portefeuille définie par un investisseur.

Von Neumann et Morgenstern (1) se basent sur les postulats suivants pour mesurer les utilités : 1) existence d'un système de préférence complet et transitif (c'est-à-dire incluant toutes les éventualités possibles)

2) Possibilité de combiner des événements avec des probabilités, et de même pour les utilités attachées à ces événements.

Ces postulats permettent d'assimiler la maximisation de la valeur estimée d'une fonction d'utilité au choix d'un individu entre des distributions de probabilité.

Soit une distribution de probabilité de revenus ( $R$ ) décrite par la fonction  $f(R; \mu_R, \sigma_R)$ . L'utilité estimée de  $R$  vaut :

$$\begin{aligned} E \{U(R)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(R) f(R; \mu_R, \sigma_R) dR \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mu_R + \sigma_R z) f(z; 0, 1) dz \end{aligned}$$

$$\text{pour } z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (\text{fonction standardisée})$$

Une courbe d'indifférence est le lieu des points  $(\mu_R, \sigma_R)$  d'utilité estimée constante. Donc, nous annulerons la dérivée par rapport à  $\sigma_R$  :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\mu_R + \sigma_R z) \left( \frac{d \mu_R}{d \sigma_R} + z \right) f(z; 0, 1) dz$$

$$\text{d'où } \frac{d \mu_R}{d \sigma_R} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z U'(R) f(z; 0, 1) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} U'(R) f(z; 0, 1) dz}$$

$U'(R)$  est l'utilité marginale du revenu d'un actif. Nous supposons partout non négative. Si c'est une fonction décroissante de  $R$ , la pente de la courbe d'indifférence est positive. Et l'investisseur ayant une telle pente est hostile au risque, c'est à dire qu'il n'accepte pas de courir un risque plus élevé à moins d'en attendre un revenu supérieur.

(1) Von Neumann et Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior" Princeton University Press 1953.

La courbure des lieux d'indifférence dépend aussi de la forme de la fonction d'utilité. L'utilité marginale du revenu d'un actif, décroissante chez un investisseur hostile au risque (risk-avertter), entraîne, pour tout  $z$  et pour  $(\mu_R + \sigma_R)$  et  $(\mu'_R + \sigma'_R)$ , deux points sur une même courbe d'indifférence :

$$\frac{1}{2} U(\mu_R + \sigma_R z) + \frac{1}{2} U(\mu'_R + \sigma'_R z)$$

Donc  $E\left(\frac{\mu_R + \mu'_R}{2}, \frac{\sigma_R + \sigma'_R}{2}\right)$  est supérieur à  $E(\mu_R, \sigma_R)$  et à  $E(\mu'_R, \sigma'_R)$  et  $\left(\frac{\mu_R + \mu'_R}{2}, \frac{\sigma_R + \sigma'_R}{2}\right)$  est situé sur une courbe d'indifférence supérieure à celle de  $(\mu_R, \sigma_R)$  et  $(\mu'_R, \sigma'_R)$ .

ainsi la courbe d'indifférence d'un investisseur hostile au risque est nécessairement concave vers le haut. De plus, cet investisseur est diversificateur.

## 2) La fonction d'utilité quadratique

Une autre justification de la moyenne et de l'écart-type du revenu comme mesure de l'utilité peut être basée sur la notion de fonction d'utilité quadratique.

Définissons, par convention, une échelle d'utilité de revenu  $U(R)$  telle que  $U(0) = 0$  et  $U(1) = 1$ . Et définissons une fonction quadratique du revenu de la forme

$$U(R) = (1 + b)R + bR^2$$

avec  $-1 < b < 0$  pour un investisseur hostile au risque.

Cette fonction est limitée aux cas d'utilité marginale non négative.

D'où :  $(1 + b) + 2bR \geq 0$

$R \leq -\left(\frac{1 + b}{2b}\right)$  avec  $b < 0$  pour un investisseur hostile au risque.

Examinons la pente et la courbure des courbes d'indifférence :

$$E\{U(R)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} U(R) f(R) dR = (1 + b)\mu_R + b(\mu_R^2 + \sigma_R^2)$$

La dérivée nulle nous donne le coefficient d'inclinaison de la courbe d'indifférence, soit :

$$\frac{d \mu_R}{d \sigma_R} = \frac{\sigma_R}{\left(\frac{1+b}{2b}\right) - \mu_R}$$

$-\left(\frac{1+b}{2b}\right)$  est positif pour un investisseur hostile au risque et est

la limite supérieure de  $R$ . En effet :

$$R \leq -\left(\frac{1+b}{2b}\right)$$

Donc  $-\left(\frac{1+b}{2b}\right)$  est nécessairement plus grand que  $\mu_R$ . Ainsi la pente de la courbe d'indifférence est positive pour un investisseur hostile au risque.

Quant à la courbure, nous avons

$$\frac{d^2 \mu_R}{d \sigma_R^2} = \frac{1 + \frac{d^2 \mu_R}{d \sigma_R^2}}{\left(-\frac{1+b}{2b} - \mu_R\right)^2}$$

Pour un investisseur hostile au risque, la dérivée seconde est positive et la courbe d'indifférence inclinée vers le haut.

Dans nos courbes d'indifférence, nous avons toujours supposé que l'investisseur était hostile au risque. Tobin distingue deux types d'investisseurs adversaires du risque : les diversificateurs dont les courbes d'indifférence sont concaves vers le haut. Ils pratiquent la diversification et réduisent ainsi le risque par rapport au revenu, pour un investissement plus important. Un second type est celui des "plungers", dont les courbes d'indifférence sont inclinées vers le haut, soit linéaires, soit convexes. Pour un accroissement de risque donné, le diversificateur exigera un revenu croissant, tandis que le plongeur acceptera un risque croissant pour une augmentation donnée du revenu.

Tobin envisage d'autres investisseurs : les risk-lovers. Ceux-ci acceptent la possibilité d'un revenu attendu plus bas s'ils ont l'espoir d'un gain élevé, même peu probable.

Si le marché ne leur est pas favorable, ils risquent fort de disparaître au bout de quelques périodes. Nous ne tiendrons pas compte de ces investisseurs dont la rationalité nous paraît moins représentative de l'ensemble des investisseurs.

## II. Modèle d'investissement individuel

Avant de développer systématiquement ce modèle, nous faisons les remarques suivantes :

- Tout au long de la partie qui étudie la gestion statique de portefeuille, nous supposons que les investisseurs maximisent leur utilité en une période : Ils établissent leurs calculs de revenu et maximisent l'utilité retirée de leur portefeuille au terme de la période étudiée.

- Nous supposons aussi que le marché des capitaux est parfait. Les actifs vendus et achetés sont parfaitement divisibles. Aucune taxe ne frappe le revenu des actifs. L'information est immédiate, complète, n'entraîne aucun coût, et est disponible pour tous.

- Cette partie de l'exposé démontrera comment réaliser la maximisation de l'utilité d'un portefeuille particulier. Nous appliquerons plus loin cette maximisation à un ensemble d'investisseurs et chercherons à déterminer un équilibre de marché avec évaluation des prix des actifs.

### A. Définition des variables.

Le portefeuille à risque (A) est réparti entre deux actifs : les obligations ( $A_1$ ) et les actions ( $A_2$ ).

$$A = A_1 + A_2$$

Nous écartons la monnaie du portefeuille à risque. Rappelons simplement que son rendement est connu et mesuré par le taux d'inflation. Nous réintroduisons la monnaie en même temps que les taux de prêt et d'emprunt sans risque. Dans le portefeuille global, ces variables seront opératoires : Elles sont nécessaires mais résiduelles.

Le revenu unitaire des obligations ( $R_1$ ) est composé des intérêts ( $r_1$ ) et de la variation du cours ( $g_1$ ) réduction faite du taux d'inflation

$$R_1 = r_1 + g_1 - \lambda \quad (1)$$

Le revenu unitaire des actions ( $R_2$ ) est la somme des dividendes ( $r_2$ ) et de l'appréciation des actifs ( $g_2$ ) diminuée du taux d'inflation.

De plus, les actions sont des titres réels comme nous le verrons dans la seconde partie. En période d'inflation, les entreprises bénéficient d'une hausse des prix sur les produits finis fabriqués à partir d'intrants achetés avant la hausse des prix, mais voient s'accroître la charge des intérêts. Les actions reflètent cette situation : Elles subissent l'inflation mais pas sans contrepartie. Nous introduirons un coefficient de plus-value d'inflation ( $\alpha$ ). Si  $\alpha = \lambda$ , l'inflation n'a aucun effet sur le revenu réel des actions. Si  $\alpha < \lambda$ , la compensation n'est pas complète et les actions subissent une perte due à l'inflation, et vice versa si  $\alpha > \lambda$ .

$$R_2 = r_2 + g_2 - \lambda + \alpha$$

Le revenu du portefeuille ( $R$ ) vaut :

$$\begin{aligned} R &= A_1 R_1 + A_2 R_2 \\ &= A_1 ( r_1 + g_1 - \lambda ) + A_2 ( r_2 + g_2 - \lambda + \alpha ) \end{aligned}$$

---

(1) Nous laisserons de côté  $r_1 - \lambda$  et  $g_1 - \lambda$  qui sont négligeables pour des taux d'inflation modérés.



Si nous supposons connus et constants  $\lambda$  et  $\alpha$ , le revenu estimé du portefeuille  $E(R)$  vaut :

$$\mu_R = E(R) = A_1 \{E(r_1) + E(g_1) - \lambda\} + A_2 \{E(r_2) + E(g_2) - \lambda + \alpha\}$$

Et le risque, mesuré par la déviation standard, vaut :

$$\sigma_R = \frac{A_1 \sqrt{\sigma^2 r_1 + \sigma^2 g_1 + 2 \text{cov } r_1 g_1} + A_2 \sqrt{\sigma^2 r_2 + \sigma^2 g_2 + 2 \text{cov } r_2 g_2}}{\sqrt{+ 2 A_1 A_2 (\text{cov } r_1 r_2 + \text{cov } r_1 g_2 + \text{cov } r_2 g_1 + \text{cov } g_1 g_2)}}$$

La mesure dans laquelle on peut espérer un montant donné de revenu pour un montant correspondant de risque est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\mu_R}{\sigma_R} = \frac{A_1 \{E(r_1) + E(g_1) - \lambda\} + A_2 \{E(r_2) + E(g_2) - \lambda + \alpha\}}{A_1 \sqrt{\sigma^2 r_1 + \sigma^2 g_1 + 2 \text{cov } r_1 g_1} + A_2 \sqrt{\sigma^2 r_2 + \sigma^2 g_2 + 2 \text{cov } r_2 g_2} + \sqrt{2 A_1 A_2 (\text{cov } r_1 r_2 + \text{cov } r_1 g_2 + \text{cov } r_2 g_1 + \text{cov } g_1 g_2)}}$$

Cette expression mesure la pente de la courbe d'opportunité. Elle représente les niveaux de revenu croissant que l'on peut obtenir suite à un accroissement du risque. L'augmentation de  $\mu_R$  et celle de  $\sigma_R$  sont dues à l'accroissement du volume de l'investissement et non par une modification de la structure du portefeuille. Si cette structure est donnée, le rapport  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  reste constant.

Nous avons ainsi une méthode de détermination simultanée du revenu et du risque qu'entraîne la détention d'un portefeuille composé de deux actifs à risque, l'un monétaire, les obligations et l'autre réel, les actions.

La composition du portefeuille détermine un  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ , c'est-à-dire l'angle de la courbe d'opportunité. La taille de ce portefeuille détermine l'endroit où l'on se situe sur cette courbe. Comme nous avons supposé que les actifs étaient parfaitement divisibles, on peut augmenter leur quantité détenue par fractions aussi petites que l'on veut et accroître le volume du portefeuille total d'un montant quelconque en respectant les proportions de

chaque titre qui maintiennent constant . Ainsi la courbe d'opportunité est une droite issue de l'origine.

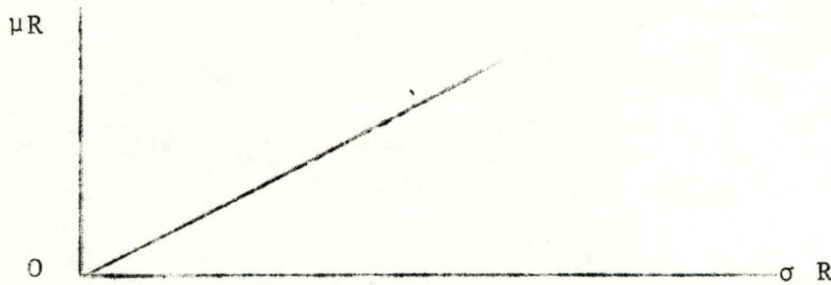


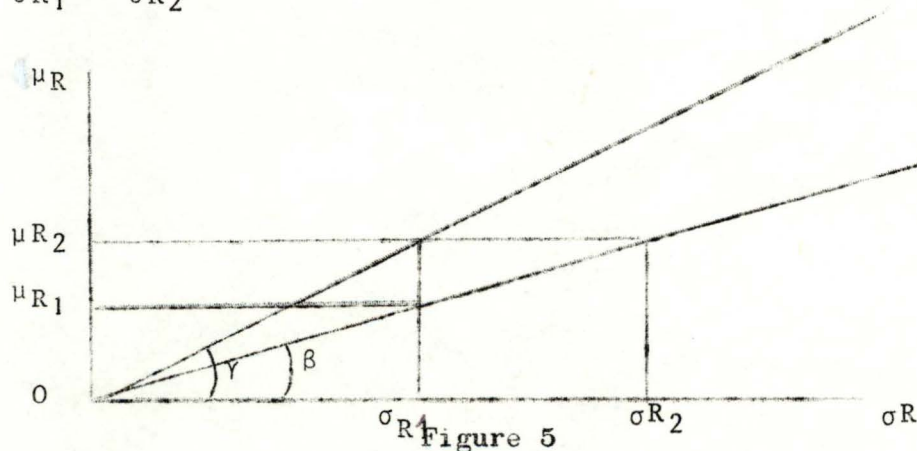
Figure 4

La figure 4 représente cette situation.

Au point 0, le revenu et le risque sont nuls. Ceci signifie que l'investissement est nul. Dès que l'on investit en actifs à risque (obligations ou actions), on obtient un revenu (supposé positif dans notre graphique) et on court un risque. Le rapport des deux  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  donne l'angle de la courbe d'opportunité. Comme nous le montre la figure 5, plus l'angle est ouvert,

$\gamma > \beta$  plus il est intéressant d'investir pour un risque donné :  $\frac{\mu_{R2}}{\sigma_{R1}} > \frac{\mu_{R1}}{\sigma_{R2}}$  ou moins on court de risque pour un revenu donné:

$$\frac{\mu_{R2}}{\sigma_{R1}} > \frac{\mu_{R1}}{\sigma_{R2}}$$



Quels sont les facteurs dont dépend  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  ?

Remarquons d'abord que  $\sigma_R$  est indépendant de  $\lambda$ . Ceci signifie que le risque n'est pas influencé par le taux d'inflation. En effet, nous avons supposé que ce taux est connu et constant.

Au numérateur de  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ , nous avons les revenus attendus sur les divers actifs, actions et obligations. Nous examinerons plus loin diverses méthodes de prévision des revenus estimés sur ces titres.

Au dénominateur  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ , nous avons le risque couru par la détention d'actifs. D'après nos hypothèses, il est mesuré par l'écart-type autour du revenu attendu sur les obligations et sur les actions. En formules, nous avons :

$$\sigma_R = \sqrt{A_1^2 (\sigma^2 r_1 + \sigma^2 g_1) + A_2^2 (\sigma^2 r_2 + \sigma^2 g_2 + 2 \text{cov } r_2 g_2) + 2 A_1 A_2 (\text{cov } r_1 r_2 + \text{cov } r_2 g_1 + \text{cov } r_1 g_2 + \text{cov } g_1 g_2)}$$

Le risque est fonction des proportions investies dans chaque actif à risque  $A_1$  et  $A_2$ . Il est formé des variances autour de l'intérêt attendu et autour du gain en capital attendu, ainsi que des covariances entre ces écarts. Des covariances négatives ou inférieures à l'unité diminuent le risque. Le risque maximum est atteint lorsque les intérêts et les gains en capital sont parfaitement corrélés. Ce n'est généralement pas le cas. Ainsi la diversification permet de réduire le risque, comme nous le verrons plus bas.

#### B. Détermination de la quantité à investir

Nous avons examiné les courbes d'indifférence et d'opportunité. Lorsque l'investisseur est hostile au risque, ses courbes d'indifférence sont concaves vers le haut.

A partir d'ici, nous envisagerons le revenu et le risque du portefeuille global, c'est-à-dire du portefeuille composé d'actifs à risque et d'actifs sans risque, de monnaie, par exemple.

Si l'on suppose l'existence d'un taux d'inflation connu et constant, lorsque le portefeuille est investi entièrement en monnaie, son revenu n'est pas nul mais équivaut au produit du montant d'encaisses et du taux de dépréciation du pouvoir d'achat de la monnaie. Ce revenu est donc négatif.

Ainsi la droite d'opportunité du portefeuille global n'est plus issue de l'origine car, à un risque nul, ne correspond pas un revenu nul. La figure 6 représente cette situation. Lorsque le rapport entre le revenu et le risque du portefeuille à risque est positif, la courbe d'opportunité globale se situera au dessus de l'abscisse à partir du moment où le revenu sur actifs à risque compensera la dépréciation encourue par la détention d'encaisses monétaires.

Il est possible de déterminer un point de tangence entre une courbe d'indifférence et la courbe d'opportunité la plus élevée.

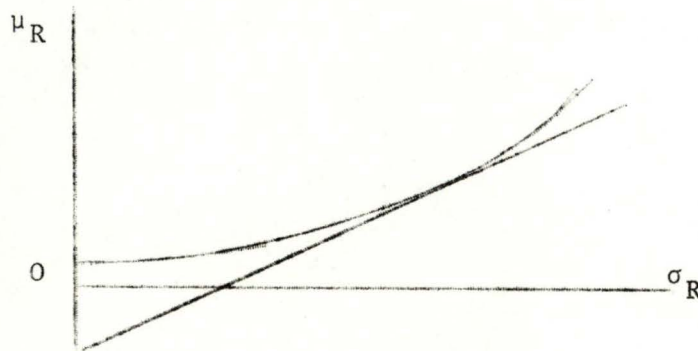


Figure 6

Ce point détermine les quantités optimales à investir suivant des proportions définies à l'avance qui ont permis le calcul de la courbe d'opportunité. L'individu détermine ainsi le risque global qu'il accepte de courir. Celui-ci permet de fixer le volume d'investissement dans le portefeuille à risque de structure donnée.

Si les quantités disponibles ne sont pas égales au volume déterminé par le point de tangence entre la courbe d'indifférence et la droite d'opportunité, il faut introduire la possibilité de prêt ou d'emprunt, que nous supposons sans risque.

Deux cas sont possibles : les taux de prêt et d'emprunt sont identiques ou ils sont différents. C'est ici que nous nous écartons de la théorie traditionnelle en envisageant la possibilité d'une différence entre ces taux. Les taux de prêt et d'emprunt sont égaux lorsque prêteurs et emprunteurs <sup>ultimes</sup> sont mis directement en rapport. Ils diffèrent lorsque les services financiers organisent le service de prêt et d'emprunt. La différence entre les taux correspond à leur rémunération.

1) Si les taux de prêt et d'emprunt sont identiques, la courbe d'opportunité bascule autour du point de prêt-emprunt nul, c'est à dire autour du point où l'investissement en capital à risque épuise le portefeuille. Nous supposons que l'investissement en monnaie est nul, car remplacé par le prêt (emprunt).

L'angle formé par la différence entre la nouvelle courbe d'opportunité et l'ancienne est déterminée par le taux d'intérêt sur le prêt (emprunt) en monnaie (figure 7.) Il exprime le coût de renonciation au prêt ou de recours à l'emprunt et le bénéfice retiré de l'investissement de ces fonds en titres à risque, selon des proportions déterminées à l'avance.

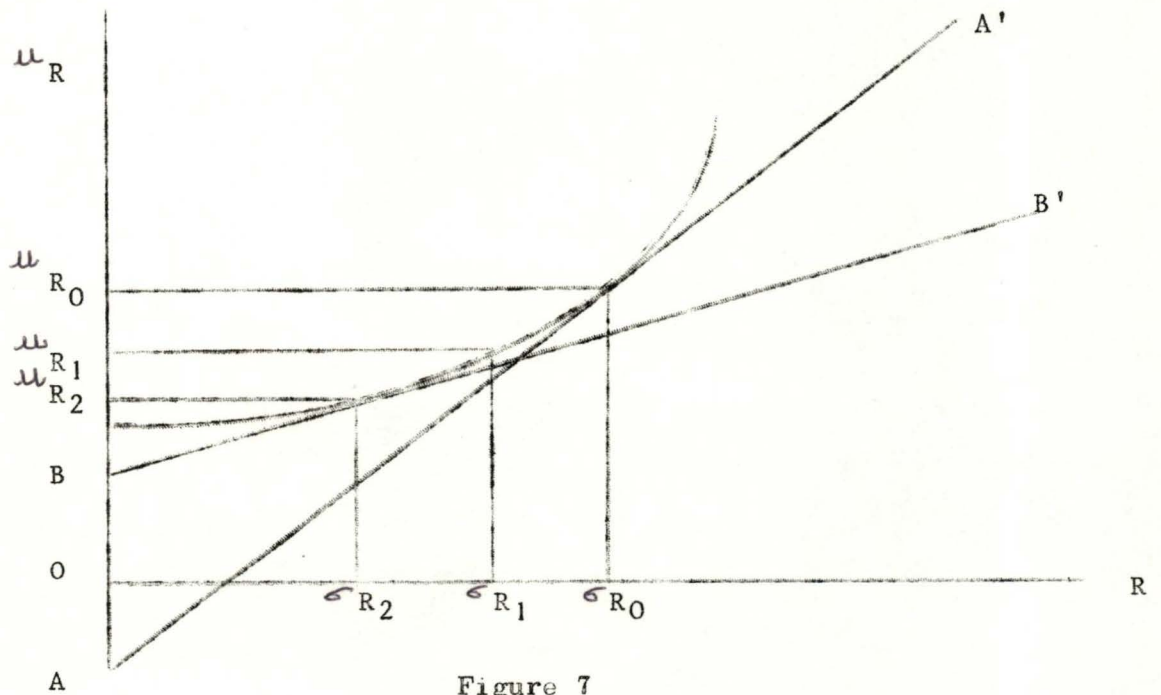


Figure 7

Dans la figure 7, la droite AA' représente la courbe d'opportunité d'un portefeuille constitué d'investissement en actifs à risque ou en monnaie. La droite BB', par contre, représente le rapport entre le revenu et le risque d'un portefeuille investi en actifs à risque ou en prêt (emprunt).

La courbe d'opportunité globale est calculée comme suit :

$$\frac{\mu R}{\sigma R} = \frac{A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_3 R_3}{A_1 \sigma R_1 + A_2 \sigma R_2 + \text{cov } R_1 R_2 (A_1 + A_2)}$$

avec  $A_1, A_2, A_3$  représentant successivement l'investissement en obligations, actions et actifs sans risque.

Pour la droite AA',  $R_3$  représente le taux de dépréciation monétaire.

Pour la droite BB',  $R_3$  représente le taux d'intérêt positif (négatif) sur prêt (emprunt) moins le taux de dépréciation monétaire.

$$R_3 = r_p - \lambda \quad R_3 = -r_e - \lambda$$

$$r_p = \text{taux d'intérêt sur prêt}$$

$$r_e = \text{taux d'intérêt sur emprunt.}$$

La différence entre les deux courbes est donnée par la différence entre " $A_3 (-\lambda)$ " d'un côté et " $A_3 (-\lambda + r_p)$ " ou " $A_3 (-\lambda - r_e)$ " de l'autre côté.

Nous remarquons que le numérateur  $\mu R$  varie seul ;  $\sigma R$  reste constant, quelle que soit la courbe. Ainsi, pour un même volume d'investissement à risque, on obtiendra un revenu plus élevé si l'on inclut le taux d'intérêt sur prêt (partie de la droite BB' à gauche de  $\mu R_1 / \sigma R_1$ ) et moins élevé si l'on inclut le taux d'intérêt sur emprunt (partie de la droite BB' à droite de  $\mu R_1 / \sigma R_1$ ). La droite BB' est moins inclinée que la droite AA'.

Supposons que l'on puisse déterminer une répartition optimale à l'intérieur du portefeuille qui donne une droite d'opportunité AA', en l'absence de prêt (emprunt). Nous verrons plus loin comment cette répartition est déterminée. Elle résulte de la maximisation du revenu pour un risque donné ou de la minimisation du risque pour un revenu donné. La condition de tangence avec une courbe d'opportunité indique un niveau optimal de placement donnant un revenu attendu  $\mu R_0$  pour un risque  $\sigma R_0$ , c'est-à-dire une répartition optimale entre le portefeuille à risque et le portefeuille sans risque. La tangence de la droite d'opportunité avec une courbe d'indifférence nous montre que cette solution permet d'atteindre l'utilité la plus grande, car aucune courbe d'indifférence supérieure n'est accessible.

Ce point de tangence exprime l'égalité entre le rapport, en termes d'utilité, du risque et du revenu attendu d'une part, tel que la courbe d'indifférence le donne, et un autre rapport déterminé à partir des titres existant sur le marché, tel que la courbe d'opportunité le détermine. En d'autres termes, à ce point, l'investisseur obtient du marché ce qu'il <sup>ou</sup> attend. Il a exprimé ses désirs en formulant une courbe d'indifférence.

La courbe d'opportunité est tangente à la courbe d'indifférence : l'ensemble des titres donnant cette courbe d'opportunité réalise ses désirs au point de tangence.

Or dans notre cas, l'investissement maximum qu'on peut atteindre est en  $\mu R_1, \sigma R_1$ . On devrait donc emprunter pour combler la différence. Mais la possibilité de prêt (emprunt) modifie la droite d'opportunité qui devient  $BB'$  : au point de risque nul, tout est investi en prêt (sans risque) qui donne un intérêt réel  $OB$ . Le terme d'échange entre le portefeuille à risque et celui sans risque n'est plus un certain  $\mu_R / \sigma_R$  contre un revenu nul, mais ce même  $\mu_R / \sigma_R$  contre un revenu sans risque, positif (négatif) en cas de prêt (emprunt). A chaque unité qui passe du portefeuille de prêt au portefeuille à risque, on obtient une baisse de revenu sur le portefeuille sans risque, mesurée par le produit du taux de prêt et du volume désinvesti sous cette forme et une hausse du revenu du portefeuille à risque accompagnée d'un accroissement du risque. Il est clair que le revenu à risque doit être supérieur au taux de prêt si les investisseurs sont hostiles au risque.

Au point  $\mu R_1, \sigma R_1$  prêt et emprunt sont nuls car  $BB'$  coupe  $AA'$  en cet endroit. Les deux droites sont sécantes en ce point car il n'y a pas de partie du portefeuille investie de façon différente sur l'une ou l'autre courbe. La différence entre ces deux droites était due à l'existence d'un taux d'intérêt sans risque dans le second cas. Si le prêt et l'emprunt sont nuls, la cause de l'écart entre les deux droites ne peut produire son effet. Comme le taux de prêt est identique au taux d'emprunt, l'angle de la droite d'opportunité est le même avant et après  $\mu R_1 / \sigma R_1$ .



Le point de tangence de la courbe d'opportunité avec la courbe d'indifférence la plus élevée nous indique un revenu  $\mu R_2$  avec un risque  $\sigma R_2$ . En ce point, tout n'est pas investi et on prête sans risque un montant qui fait passer le risque de  $\sigma R_1$  en  $\sigma R_2$ .

2) Taux d'intérêt sur le prêt  $\neq$  taux d'intérêt sur l'emprunt.

Lorsque les taux de prêt et d'emprunt diffèrent, la seconde partie de la courbe d'opportunité n'est plus située dans le prolongement de la première - à gauche du point où prêt et emprunt s'annulent. Graphiquement nous avons :

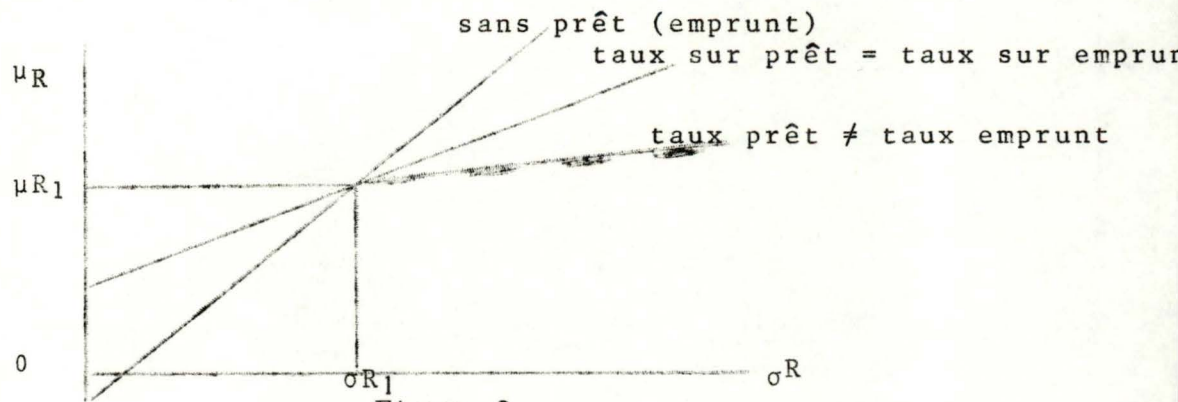


Figure 8

Lorsque le taux d'emprunt est supérieur au taux de prêt, la courbe d'opportunité s'abaisse au-delà du point  $\mu R_1, \sigma R_1$ . C'est la droite hachurée de la figure 8.

L'élargissement du calcul de la courbe d'opportunité qui inclut un taux d'intérêt sans risque sur le prêt et l'emprunt rapproche l'analyse de la réalité. D'une part, on ne laisse plus de côté une possibilité d'investissement sans risque. D'autre part, le coût de l'emprunt contracté pour investir à risque doit être mis en rapport avec le revenu de l'investissement à risque. Une analyse simultanée de ces éléments permet d'arriver à une vision globale de l'investissement de portefeuille.

De plus, il nous paraît fort utile d'envisager une différence entre le taux d'intérêt sur le prêt et le taux d'intérêt sur l'emprunt, car prêteur et emprunteur ultimes entrent rarement en rapport direct. L'intermédiaire désire obtenir une rémunération pour son service. C'est l'origine de la différence entre les taux d'intérêt sans risque.

Il serait possible d'enrichir encore l'analyse en envisageant un coût croissant pour l'emprunt; le taux d'intérêt emprunteur serait fonction alors du volume emprunté. Ceci aplatirait encore la courbe d'opportunité et tendrait à réduire l'investissement à risque financé par l'emprunt.

### C. Le théorème de séparation

Nous allons démontrer que, dans certaines hypothèses relatives aux taux d'intérêt sans risque, la répartition optimale à l'intérieur du portefeuille à risque est indépendante du rapport entre l'investissement en titres et l'investissement total. La combinaison de titres à risque déterminant un portefeuille à risque optimal est indépendante du volume de ce portefeuille et donc de son mode de financement.

Nous nous inspirerons de la démonstration de Lintner (1), en l'adaptant aux hypothèses de notre analyse.

Partons de la relation qui définit le revenu du portefeuille global.

Soit  $r^0$  = intérêt sur prêt (emprunt sans risque) (2)

$r = \mu_r$  = revenu incertain d'un investissement unitaire  
en titres à risque.

$$r = \mu_r = \frac{A_1 \{E(r_1) + E(g_1)\} + A_2 \{E(r_2) + E(g_2)\}}{A_1 + A_2}$$

- (1) Lintner J. The valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolio and Capital Budgets .  
Review of Economic Studies, Février 1965.
- (2) Nous verrons plus loin l'effet du relâchement de l'hypothèse d'unicité du taux d'intérêt sans risque.

Soit  $w$  = proportion de l'investissement total investie sous forme d'actifs à risque.

$$w = \frac{A_1 + A_2}{A_1 + A_2 + A_3} \quad \text{où } A_3 = \text{portefeuille sans risque.}$$

D'où le revenu du portefeuille global  $\mu_R$  est donné par la formule:

$$\mu_R = (1 - w) r^0 + w \mu_r \quad (1)$$

On constate que si  $w > 1$ , il y a emprunt pour investir en actifs à risque et si  $w < 1$ , il y a prêt.

$$\mu_R = r^0 + w (\mu_r - r^0) \quad (2)$$

$$\text{Le risque du portefeuille total vaut: } \sigma_R = w \sigma_r \quad (3)$$

Si on élimine  $w$  de (2) et (3), on obtient :

$$\mu_R = r^0 + \theta \sigma_R$$

$$\text{avec } \theta = (\mu_r - r^0) / \sigma_r$$

Ainsi  $\mu_R$  est une fonction linéaire de  $\sigma_R$ . Ceci correspond à notre courbe d'opportunité. Son intercept est  $r^0$ , le taux d'intérêt sans risque, et son inclinaison est donnée par  $\theta$  qui dépend des valeurs de  $\mu_r$  et  $\sigma_r$  du portefeuille considéré.

La formule (2) nous permet de voir que si l'on choisit un  $w$  approprié, on peut accroître  $\mu_R$  tant qu'on veut avec un portefeuille de titres à risque déterminé, mais  $\sigma_R$  s'accroît proportionnellement, comme le montre la formule (3).

Si l'on considère tous les portefeuilles possibles composés de titres à risque, ceux qui ont le même  $\theta$  seront sur la même courbe d'opportunité et inversement pour des  $\theta$  différents.

L'investisseur fera deux choix : il déterminera le portefeuille à risque qui lui donne le  $\theta$  le plus élevé, et il déterminera le  $w$  qui répond le mieux à sa courbe d'utilité.

La maximisation de  $\theta$  est obtenue en choisissant le portefeuille qui rend  $\sigma_R$  minimum pour un  $\mu_R$  donné. La possibilité de minimiser la déviation standard associée avec tout  $\mu_R$  (et ainsi tout  $w$ ) démontre que  $\mu_R$  est indépendant de  $w$ . C'est le théorème de séparation des objectifs de choix dans l'établissement d'un portefeuille.

Les corollaires suivants découlent du théorème de séparation :

- Les décisions de répartition à l'intérieur du portefeuille à risque sont indépendantes de la fonction d'utilité de l'investisseur.

Cette répartition dépend uniquement d'éléments objectifs : le revenu et le risque. L'agent économique est supposé maximiser l'utilité qu'il retire du portefeuille, pour une structure donnée de celui-ci.

- La fonction d'utilité ne détermine que le niveau de prêt (emprunt) qui déterminera un volume d'investissement en titres à risque.

Ainsi, pour une structure donnée du portefeuille, il n'existe qu'une courbe d'opportunité. Celle-ci sera identique pour tous les investisseurs si l'on suppose qu'ils ont la même opinion quant au revenu et au risque attaché à chaque titre.

Chaque investisseur appliquera sa fonction d'utilité à la courbe d'opportunité. En comparant le volume dont il dispose pour son investissement et celui qui est nécessaire pour pratiquer l'investissement qui maximise son utilité, il déterminera le montant de prêt (emprunt) de façon résiduelle.

L'inflation ne modifie pas nos résultats. Elle nous donne une nouvelle courbe d'opportunité en incluant un coefficient <sup>$\alpha$</sup>  de plus-value d'inflation sur les actions et un coefficient <sup>$\lambda$</sup>  de moins-value d'inflation qui s'applique à tous les titres.

$$\text{On a } \mu_R = r^0 - \lambda + \theta \sigma_R$$

$$\text{avec } \theta = (\mu_R + \alpha - r^0) / \sigma_R$$

Donc  $\mu_R$  reste une fonction linéaire de  $\sigma_R$ , indépendante de  $w$ .

#### D. La diversification

Un agent économique diversifie son portefeuille pour deux raisons : la première, comme nous l'avons vu dans l'introduction, consiste dans la recherche d'une formule tirant le meilleur parti de l'échelonnement des besoins de liquidité dans le temps. La seconde est le désir de réduire le risque encouru pour la détention d'un titre particulier.

La création d'un portefeuille composé de titres liquides (monnaie) et de titres moins liquides (prêt ou emprunt, actions et obligations) répond surtout au premier objectif de la diversification. En effet, si la négociabilité des actifs à risque n'est pas pleinement assurée, la détention de monnaie dans le portefeuille assurera les besoins courants de liquidité. Cette classification des actifs suivant le degré de liquidité recouvre la distinction traditionnelle entre un portefeuille de transactions et un portefeuille d'investissement.

Ce même portefeuille, considéré sous l'angle du risque, tire avantage de la diversification en répartissant le risque dans différents types d'actifs : actifs sans risque (monnaie, prêt ou emprunt) et actifs à risque (obligations et actions).

Comme nous allons le voir, des corrélations inférieures à l'unité diminuent l'écart-type autour du revenu attendu sur un portefeuille diversifié et diminuent donc son risque.

Un exemple montrera l'effet de la diversification.

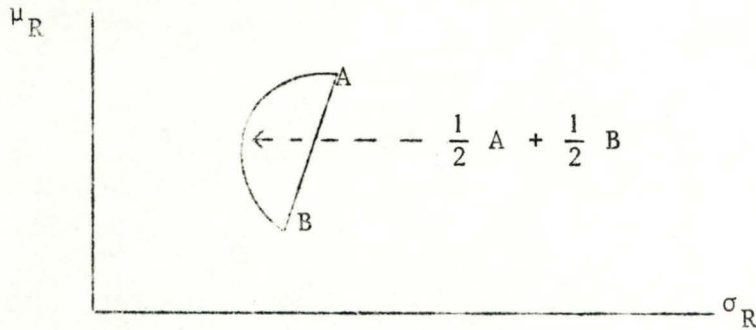


Figure 9.

Soient deux titres : A ( $\mu_A = 5$ ,  $\sigma_A = 0,07$ ) et B ( $\mu_B = 2$ ,  $\sigma_B = 0,06$ ) corrélés dans une proportion  $\rho = -1$ . La figure 9 nous les représente. Le risque du portefeuille composé de deux titres est calculé par la formule suivante :

$$\sigma_{AB} = \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1-x)^2 \sigma_B^2 + 2 x (1-x) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B} \quad (1)$$

où  $x$  et  $(1-x)$  représentent les proportions du portefeuille investies dans chacun des titres.

La combinaison de ces titres diminue le risque de façon appréciable puisque  $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$  nous donne  $\mu_R = 3,5$  avec  $\sigma_R = 0,046$ . Ce portefeuille est certainement préférable à celui qui est composé uniquement de B. Si les titres sont parfaitement corrélés ( $\rho = +1$ ), la combinaison se situera sur une ligne droite entre A et B. En effet, la déviation standard du portefeuille sera égale à la combinaison linéaire des déviations sur chaque titre. Dans la formule (1),  $\rho_{AB}$  est remplacé par 1. C'est le cas le moins favorable.

La plupart du temps,  $-1 < \rho < +1$ , c'est-à-dire que la combinaison des titres se situera à l'intérieur de la surface décrite par les deux cas limites,  $\rho = -1$  et  $\rho = +1$ .

Le revenu du portefeuille diversifié est toujours une combinaison linéaire du revenu des titres qui le composent, tandis que le risque de ce portefeuille est inférieur ou égal à la combinaison linéaire du risque des titres qui le composent. Il est donc intéressant de diversifier son portefeuille.

Le coefficient de corrélation mesure le degré d'interdépendance entre deux ou plusieurs variables. Ici, les variables sont les revenus sur actifs. Si ceux-ci ne sont pas parfaitement corrélés, il sera intéressant de répartir son portefeuille sur plusieurs titres, car les risques se combattront, une perte sur un actif étant compensée par un gain sur un autre actif lorsque la corrélation est imparfaite. Supposons que le revenu attendu soit identique pour les deux titres. S'ils sont imparfaitement corrélés, la possibilité d'une variation par rapport à ce revenu attendu diminuera si le portefeuille est diversifié. Pour un même revenu attendu, le risque sera inférieur et la droite d'opportunité sera plus inclinée, c'est-à-dire que l'investissement sera plus intéressant pour un même risque ou moins risqué pour un même revenu.

Si l'on envisage plus de deux titres, on obtient une surface, au lieu d'une hyperbole.

Soient trois titres, avec  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  parfaitement corrélés ( $\rho = +1$ ) On obtient une ligne droite entre  $R_1$  et  $R_2$ , entre  $R_1$  et  $R_3$  et entre  $R_2$  et  $R_3$ . L'ensemble des combinaisons de X (combinaison donnée de  $R_1$  et  $R_2$ ) et de  $R_3$  sera situé sur une ligne droite à l'intérieur de la surface formée par les points  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ . Graphiquement, nous avons

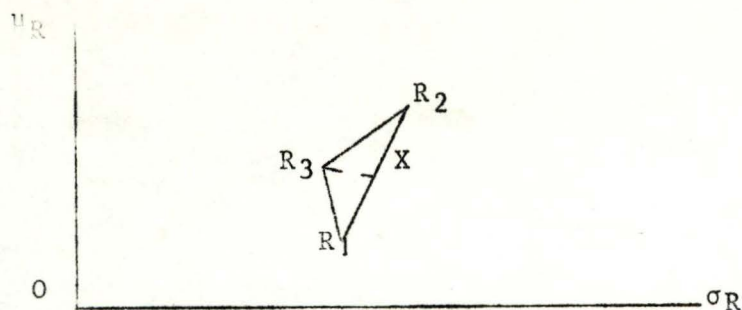


figure 10

Si  $\rho_{A_1 A_2} < 1$ , les combinaisons de  $R_1 R_2$  seront situées sur une courbe convexe vers le haut plutôt que sur une droite. Puis on calcule  $\rho_{A_3 X}$ .

Si  $\rho_{A_3 X} \approx 1$ ,  $\sigma_R$  se rapproche de zéro. Graphiquement :

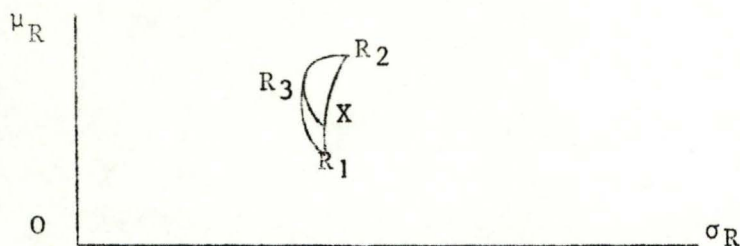


Figure 11

Si  $\sigma_{R_3} = 0$ , ce qui est le cas pour le prêt sans risque au taux d'intérêt  $R_3$ , la combinaison de  $R_3$  avec  $R_1, R_2$  et  $R_1 R_2 = X$ , est située sur une ligne droite. Si  $\rho_{A_1 A_2} < 1$ ,  $R_1 R_2$  sont reliés par une hyperbole.  $R_3$  entrera dans la combinaison la plus intéressante tant que la ligne qui le relie aux combinaisons  $X = R_1 R_2$  n'est pas tangente à l'hyperbole  $R_1 R_2$ .

Graphiquement :

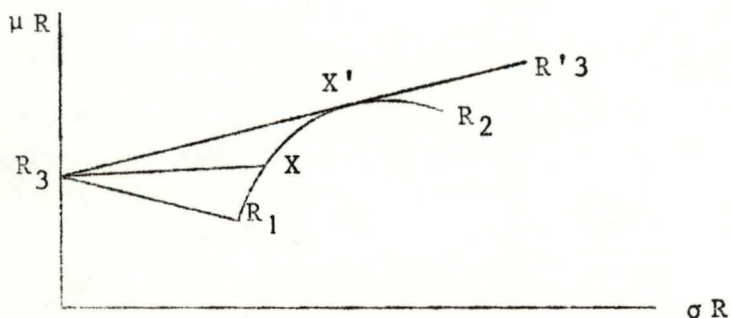


Figure 12



Entre  $R_3$  et  $X$ ,  $R_3$  est inclus dans le portefeuille qui comprend alors les trois actifs. Au point  $X'$ ,  $R_3$  est exclu du portefeuille. Celui-ci ne comprend plus que deux actifs,  $R_1$  et  $R_2$ .

Pour faciliter la compréhension, le graphique est dessiné de façon à ce que, pour une combinaison optimale donnée  $X'$  de  $R_1R_2$ , l'investissement dans cette combinaison épuise le portefeuille à investir. Si le portefeuille à investir double, il suffit de réduire de moitié l'échelle de  $\mu_R$  et de  $\sigma_R$ . Cette présentation n'enlève rien à la validité du raisonnement. Elle a l'avantage de mettre en évidence le terme d'échange entre le revenu à risque et le taux d'intérêt de prêt du marché. Elle est d'autant plus utile lorsqu'on relâche l'hypothèse d'égalité entre le taux d'intérêt sur prêt et celui sur emprunt.

Au delà du point  $X'$ , la proportion de  $R_3$  reste nulle. Si l'on va de gauche à droite sur l'hyperbole  $R_1R_2$ , on accroît la part de  $R_2$  au détriment de celle de  $R_1$ . A la limite, le portefeuille ne comprend plus qu'un seul actif :  $R_2$ .

Toutefois, il n'est pas intéressant d'aller au delà de  $X'$  sur l'hyperbole  $R_1R_2$ , car  $R_3X'$  est la droite de  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  le plus élevé. Au delà de  $X'$ , la courbe  $R_1R_2$ , est inférieure à la prolongation de la droite  $R_3X'$ .

Si nous appelons  $R_3$  le taux d'intérêt sur prêt (sans risque) et  $R_1$  et  $R_2$  les rendements sur actifs à risque (obligations et actions), nous obtenons par cette méthode la combinaison optimale d'actifs à risque  $X'$ . Celle-ci est la seule combinaison efficiente, tout autre  $X$  donnant une droite  $R_3X$  de  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  inférieur à celui de  $R_3X'$ .

La droite  $R_3X'$  détermine  $\mu_R$  et  $\sigma_R$  pour différentes combinaisons de  $R_3$  avec  $X' = \overline{R_1R_2}$  (1) Le point de tangence de la fonction d'utilité avec cette droite (d'opportunité) permet de trouver le niveau de prêt sans risque qui maximise l'utilité de l'investissement.

La prolongation de  $R_3X'$  signifie que l'investissement en  $R_3$  est négatif, c'est-à-dire qu'il y a un emprunt pour investir en  $X'$ , soit un point  $R_3'$ .  $R_3'X'$  détermine  $\mu_R$  et  $\sigma_R$  pour une combinaison donnée d'investissement négatif en monnaie ( $R_3'$ ) et d'investissement en  $X'$ . Ceci vaut dans l'hypothèse que le taux d'intérêt de prêt et d'emprunt sont égaux. Si le taux d'emprunt est supérieur au taux de prêt, la droite  $R_3R_3'$  est brisée en  $X'$ . On obtient alors le graphique suivant :

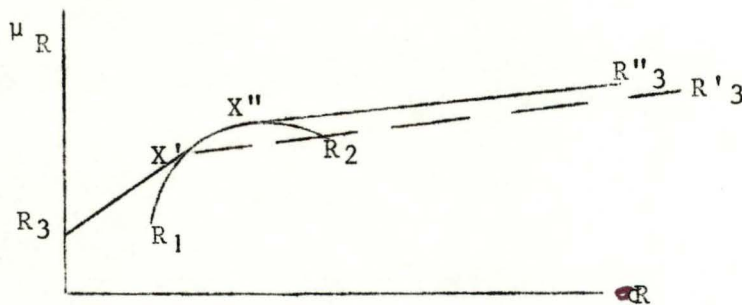


Figure 13

La droite  $X'R_3'$  passe en-dessous des combinaisons  $R_1R_2$ , donc, l'emprunt n'est pas justifié car son  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  a une pente inférieure à celle de  $R_3X'$ .

L'investisseur modifiera donc son portefeuille de la façon suivante : le prêt est nul (depuis  $X'$ ); l'emprunt n'est pas intéressant car le revenu des combinaisons  $R_1R_2$  est encore supérieur à celui de  $X'R_3'$ . Il augmente la part de  $R_2$  en diminuant celle de  $R_1$ .

(1)  $\overline{R_1R_2}$  signifie une combinaison optimale de  $R_1$  et de  $R_2$

Toutefois, la part de  $R_2$  devient tellement importante que l'effet de la diversification diminue, et le risque couru s'accroît proportionnellement au revenu supplémentaire. L'investisseur augmentera la part de  $R_2$  jusqu'au moment où l'accroissement du revenu par rapport à celui du risque sera le même, que l'on accroisse  $R_2$  en diminuant  $R_1$  ou que l'on accroisse l'investissement à risque global en empruntant. C'est le point  $X''$ . Au delà de ce point, il devient plus intéressant d'emprunter que d'accroître encore la part de  $R_2$  au détriment de celle de  $R_1$ .

La combinaison  $X''$  donne un revenu plus élevé que celle de  $X'$ . C'est nécessaire pour justifier un emprunt dont le coût est supérieur à celui qui correspondrait à la renonciation de l'intérêt du prêt sans risque. En allant de  $X'$  à  $X''$ , on comble la différence entre les deux taux d'intérêt (prêt et emprunt).

A gauche de  $X'$ , la droite  $R_3X'$  représente les combinaisons efficientes de prêt et d'investissement à risque. A droite de  $X''$ , la droite  $X''R_3$  représente les combinaisons efficientes d'emprunt et d'investissement à risque. La courbe d'opportunité est donc située entre les points  $R_3X'$  et  $X''R_3$ . Si l'ensemble des combinaisons  $R_1R_2$  donnait en tout point un  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  supérieur au taux d'emprunt, l'emprunt ne serait pas contracté avant d'atteindre le point  $R_2$ . Au delà du point  $R_2$ , on emprunterait pour investir uniquement dans l'actif  $R_2$ . Dans ce cas, la courbe d'opportunité est brisée au point  $R_2$ . Graphiquement, nous avons :

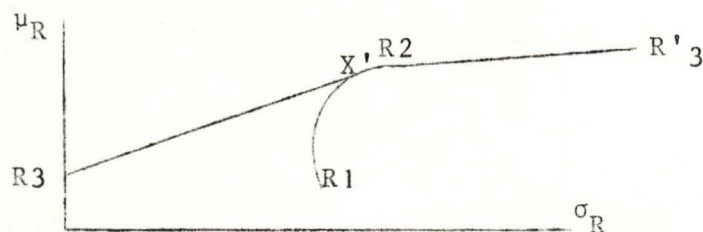


Figure 14

Ce cas est le pendant de celui où le point  $X'$  est confondu avec  $R_2$ , dans l'hypothèse d'unicité des taux d'intérêt sans risque.

Résumons les différents cas possibles.

1) Taux d'intérêt sur prêt = taux d'intérêt sur emprunt.

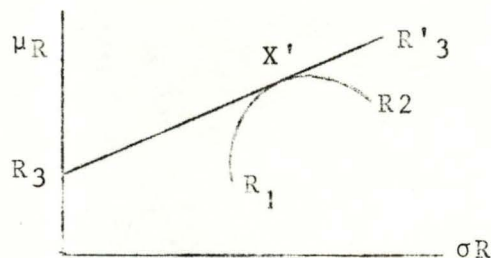


Figure 15 (A)

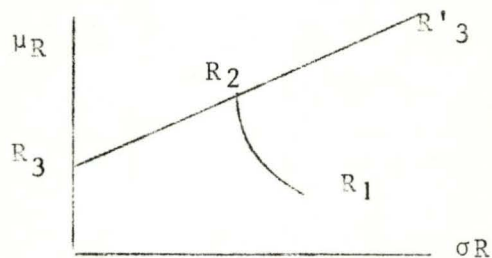


Figure 15 (B)

La combinaison prêt-emprunt sera faite avec une combinaison  $X'$  de  $R_1R_2$  dans le cas (A) ou avec le seul actif  $R_2$  dans le cas (B).

2) Taux d'intérêt sur prêt  $\neq$  taux d'intérêt sur emprunt.

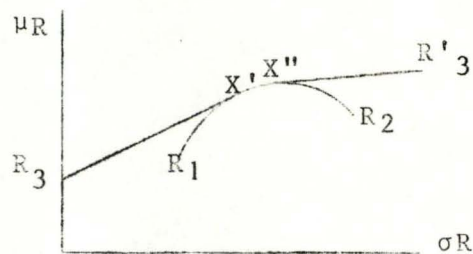


Figure 15 (A')

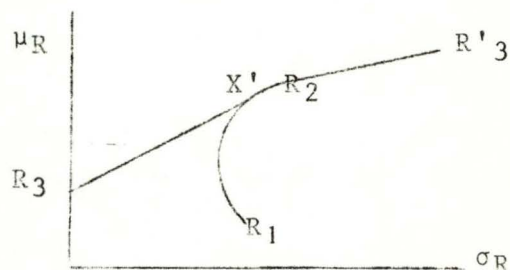


Figure 15 (B')

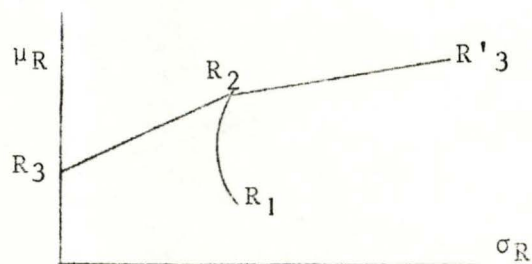


Figure 15 (C')

- (A') : Une combinaison  $X'$  de  $R_1R_2$  sera combinée avec  $R_3$  et une autre combinaison  $X''$  sera utilisée pour  $R_3'$
- (B') : Une combinaison de  $R_1R_2$  sera combinée avec  $R_3$  et  $R_2$  sera le seul actif combiné avec  $R_3'$ .
- (C') : L'actif  $R_2$  entrera dans les combinaisons avec  $R_3$  ou  $R_3'$ .

Un corollaire important découle de cette analyse : La combinaison d'actifs à risque n'est pas indépendante de la situation du prêt ou d'emprunt lorsque les taux d'intérêt sur prêt et sur emprunt divergent. Toutefois, lorsque le choix du prêt (ou de l'emprunt) est déterminé, la répartition des quantités entre le prêt (emprunt) et l'investissement est indépendante de la combinaison d'actifs à risque.

Ainsi le théorème de séparation ne vaut que dans un cadre plus restreint lorsque les taux d'intérêt ne sont pas égaux.

Nous avons envisagé le cas de deux titres à risque avec un titre sans risque que l'on peut détenir positivement (prêt) ou négativement (emprunt). Si l'on étend cette analyse à une multitude de titres, la ligne montrant les combinaisons de titres à risque devient une enveloppe dont les extrémités ne sont plus limitées aussi abruptement que dans le cas de deux actifs. Les cas (B), (B') et (C') ne sont plus représentatifs, et l'on n'a que deux solutions :

- Si taux de prêt et d'emprunt sont égaux, une seule combinaison est efficiente. Elle a un rapport entre le revenu et le risque, c'est-à-dire un  $\frac{\mu}{\sigma} \frac{R}{R}$  qui représente le rapport entre la combinaison du taux d'intérêt sans risque (positif ou négatif) et du revenu de la combinaison à risque d'une part et le risque attaché à cette combinaison d'autre part.
- Si taux de prêt et d'emprunt diffèrent, nous avons successivement, comme solutions efficientes une combinaison de prêt et d'actifs à risque, puis un ensemble de combinaisons sans prêt ni emprunt, enfin une combinaison d'emprunt et d'actifs à risque. La distance entre X' et X'' sera d'autant plus grande, c'est-à-dire les combinaisons différentes d'actifs à risque en l'absence de prêt-emprunt seront d'autant plus nombreuses que la différence entre taux de prêt et d'emprunt sera importante.

Mais ces combinaisons restent une partie infime des combinaisons possibles (le reste de l'enveloppe et toutes les combinaisons y incluses.)

### III. Application du modèle individuel à un marché financier

#### A. Détermination de l'équilibre du marché

Nous allons confronter les choix individuels dans un marché où le prix des titres peut varier. Cette variable permet d'atteindre un équilibre du marché où demande et offre de titres sont toutes satisfaites.

Quelles sont les hypothèses ?

- Les participants au marché sont hostiles au risque et maximisent leur utilité sur une période d'investissement, sur base de deux critères : le revenu et le risque.
- L'horizon de décision est identique pour tous : chacun maximise son utilité sur la même période de temps.
- Le marché des capitaux est parfait : Les actifs sont divisibles, directement échangeables, sans taxe. L'information est disponible sans coût. Le taux de prêt et celui d'emprunt sont identiques pour tous les individus, quoique pouvant différer l'un de l'autre. La différence entre ces taux est due à la rémunération des organismes financiers pour l'organisation du service de prêt et emprunt.
- Les possibilités d'investissement et leur estimation sont les mêmes pour tous. Nous avons standardisé le modèle de détermination du portefeuille d'investissement à la fois du côté des possibilités d'investissement et du côté des périodes d'investissement.

1) Taux d'intérêt de prêt = taux d'intérêt d'emprunt

Comme nous l'avons vu précédemment, il existe pour tous les investisseurs, une seule courbe d'opportunité, dans le cas où taux d'intérêt de prêt et d'emprunt sont égaux. La seule différence dans le choix de l'investissement proviendra de l'existence d'une fonction d'utilité, entre le risque et l'investissement, propre à chaque individu.

Si nous présentons graphiquement la confrontation des choix individuels dans un marché, nous obtenons la figure suivante :

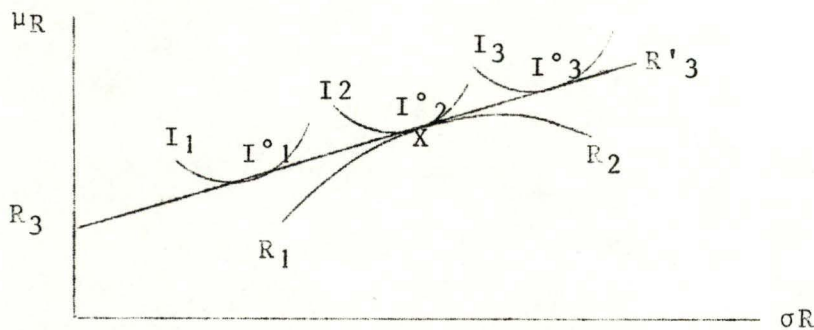


Figure 16

Les combinaisons d'actifs à risque sont limitées par la courbe  $R_1R_2$ . Le point  $X$  sur la courbe  $R_1R_2$  représente la combinaison optimale d'actifs à risque. Nous supposons l'existence d'une multitude de titres offerts sur le marché. Ils diffèrent entre eux par le risque ou le revenu. La combinaison optimale  $X$  ne les contient pas tous. Elle ne comprend que les titres les plus intéressants, c'est-à-dire ceux dont la combinaison avec le prêt et l'emprunt donne une droite  $R_3XR_3'$  de pente la plus forte.

La droite  $R_3XR_3'$  représente le terme d'échange entre un investissement sans risque donnant un revenu  $R_3$  et une combinaison d'actifs à risque  $X$  donnant un revenu supérieur à  $R_3$  et à celui de toute autre combinaison de titres.

L'emprunt sans risque contracté dans le but d'investir dans la combinaison  $X$  se situe dans le prolongement de cette droite puisqu'il correspond à la renonciation d'un montant égal de revenu sans risque pour l'obtention d'un montant correspondant de revenu à risque. Le terme d'échange entre l'intérêt sans risque et le revenu n'a pas changé. La droite  $R_3XR_3'$  représente donc toutes les combinaisons linéaires d'investissement sans risque et à risque.

Cette courbe  $R_3XR_3'$  est identique pour tous les investisseurs, qui particulariseront leur choix à partir des courbes d'indifférence. L'individu dont les courbes sont tangentes à la droite d'opportunité au point  $I_1^0$  investira une partie de son portefeuille suivant la combinaison  $X$  des actifs à risque et prêtera une autre partie au taux  $R_3$  sans risque. L'individu ayant des courbes d'indifférence du type  $I_2$  investit tout en actifs à risque dans la combinaison  $X$  des actifs à risque. Celui dont les courbes ( $I_3$ ) sont tangentes à la droite d'opportunité au point  $I_3^0$  empruntera au taux  $R_3'$  pour investir à risque une quantité supérieure au montant dont il dispose, selon la combinaison  $X$  des actifs à risque.

Dans les trois cas,  $I_1^0$ ,  $I_2^0$  et  $I_3^0$ , la combinaison  $X$  des actifs à risque est choisie par les investisseurs. Ainsi la demande des actifs compris dans cette combinaison sera élevée. Leur prix va donc augmenter, ce qui va entraîner une baisse du revenu attendu sur ces titres.  $X$  va devenir moins intéressant. Graphiquement, il va descendre vers la droite.

La demande des autres actifs, qui ne sont pas compris dans  $X$ , étant moins forte, leur prix va diminuer. Cela entraîne un accroissement de leur revenu. Graphiquement, leur  $\frac{\mu}{\sigma} \frac{R}{R}$  va monter vers la gauche. Ainsi de nouvelles combinaisons vont devenir intéressantes.



Ce processus va donner une forme plus linéaire à la courbe d'opportunité des titres à risque qui va s'aplatir le long de la droite  $R_3 R_3''$  de pente inférieure à la droite  $R_3 R'_3$ .

Graphiquement, nous obtenons :

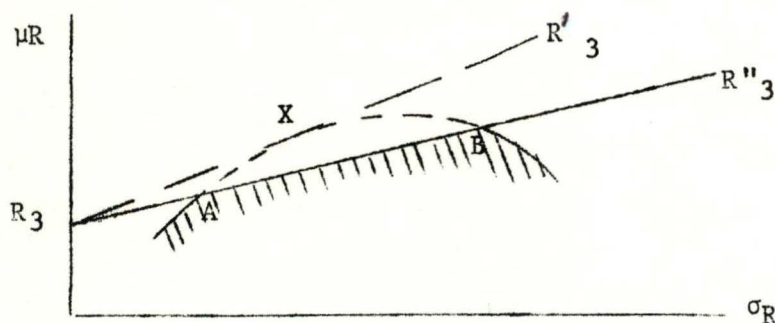


Figure 17

Au lieu d'un seul point de tangence avec la courbe  $R_3 R_3'$ , le point X, on aura une portion de la courbe d'opportunité des titres à risque tangente à la droite  $R_3 R_3''$  entre les points A et B.

Le prix des actifs à risque évoluera jusqu'au moment où l'on aura atteint un ensemble de prix tel qu'il permette à tout actif existant d'entrer dans au moins une combinaison efficiente dont l'ensemble est compris entre les points A et B.

Une propriété découle de la linéarité du segment A B :

Une combinaison comprise entre A et B peut être réalisée de différentes façons. En A, on peut par exemple investir tout en actifs risque suivant la combinaison A, ou l'on peut investir une partie suivant la combinaison B et prêter le reste. En effet, après que le marché eût entraîné l'alignement des rapports entre le revenu attendu et le risque des diverses combinaisons de façon à vider le marché, toute formule d'investissement est une combinaison linéaire des deux points A et B ou de tous les points situés sur cette droite entre A et B.

Nous remarquons qu'il y a une multitude de points d'efficience situés sur la portion A B. Elle découle de la possibilité de faire varier le prix des actifs au moyen du marchandage des titres.

Cette présentation suppose que les adaptations de prix, suite à un certain niveau de la demande d'actifs, se font instantanément ou du moins avant la période sur laquelle on calcule le revenu d'un investissement.

La courbe d'opportunité avec une seule combinaison efficiente, X, est obtenue en l'absence de variation du prix des actifs, avant le marchandage. Celle où une portion de la courbe délimite les combinaisons efficientes, la portion A B, se base sur une variation immédiate du prix des actifs, avant le calcul du revenu de l'investissement et après le marchandage. La variation de prix des actifs qui entrera dans le calcul du revenu de l'investissement, après la liquidation du marché, proviendra uniquement de l'action des forces économiques réelles et financières extérieures au marchandage qui sert à déterminer le prix des actifs.

## 2) Taux d'intérêt sur prêt $\neq$ taux d'intérêt sur emprunt

Nous savons déjà que, dans ce cas, la courbe d'opportunité n'est pas une droite mais suit l'enveloppe des possibilités d'investissement à risque sur une partie délimitée, d'un côté, par le point où toutes les combinaisons de prêt et d'investissement à risque ont un même  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ , et de l'autre côté par le point où toutes les combinaisons d'emprunt et d'investissement à risque ont un même  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ , différent du premier. Cette différence est le reflet de la différence entre le coût de renonciation au prêt et le coût de création d'un emprunt. Les taux d'intérêt sans risque étant différents, il en résulte deux termes d'échange avec les actifs à risque, au lieu d'un seul.

Le processus d'adaptation des prix des actifs à risque est le même que celui que nous avons décrit dans le cas d'égalité du taux d'intérêt sur prêt et de celui d'emprunt. Le prix des actifs demandés s'accroît et leur revenu diminue, et vice versa pour les actifs qui sont peu demandés.

La courbe d'opportunité s'incline vers la droite et la portion des combinaisons efficaces s'accroît jusqu'au moment où tous les titres à risque offerts sur le marché sont demandés. Le graphique suivant représente cette situation :

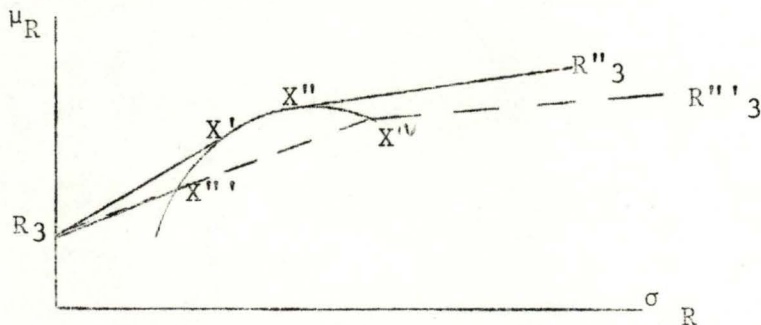


Figure 18

Avant le marchandage, la combinaison efficace avec le prêt est  $X'$  et celle qui est mise en rapport avec l'emprunt est  $X''$ . Le marchandage diminue le revenu attendu de  $X'$  de telle sorte qu'une combinaison efficace de prêt et d'investissement à risque peut déjà être atteinte en  $X'''$ . De même, le revenu attendu de  $X''$  n'est plus possible après un marchandage et un emprunt se justifiera à partir d'une combinaison donnant un revenu et un risque représentés par le point  $X''$ .

Entre  $X'''$  et  $X''$ , il n'est pas possible d'obtenir un revenu supérieur à celui qui est délimité par la droite qui les joint : Toute combinaison qui le permettrait verrait augmenter le prix des actifs qui la composent et serait ramenée à la droite  $X''' X''$ .

Entre les points  $X'''$  et  $X^{IV}$ , il n'est pas possible d'avoir deux proportions différentes de prêt (emprunt) et d'investissement, car les pentes de la courbe en situation de prêt ( $R_3 X'''$ ), en cas d'investissement complet ( $X''' X^{IV}$ ) et en cas d'investissement avec emprunt ( $X^{IV} R_3'''$ ) sont différentes. En allant de  $R_3$  à  $X'''$ , on a éliminé toutes les possibilités de prêt et d'investissement à risque. Et on ne passera pas dans la portion de droite  $X^{IV} R_3'''$  avant d'éliminer toutes les possibilités d'investissement à risque complet du portefeuille.

Le graphique ci-dessus est une représentation imparfaite des modifications subies par la courbe d'opportunité suite à la fixation des prix d'équilibre des actifs. En effet, l'hyperbole représentant les  $\frac{\mu R}{\sigma R}$  que l'on peut atteindre en combinant les titres offerts sur le marché est modifiée par le marchandage.

Comme dans l'hypothèse d'unicité du taux d'intérêt sans risque, les titres les plus demandés verront baisser leur revenu suite à une hausse du prix auquel ils sont accessibles dans le marché, et inversement pour les titres les moins demandés. Toutefois, l'effet de marchandage sera moins important dans l'hypothèse de deux taux d'intérêt sans risque : celle-ci entraîne la détermination d'un segment - au lieu d'un point - de combinaisons efficaces, compris entre les points de tangence des combinaisons linéaires entre le prêt et l'emprunt et une combinaison efficace des actifs à risque. Cet accroissement de la diversité de la demande de titres avant le marchandage donnera à ce dernier une ampleur moindre. Donc la courbe d'opportunité s'aplatit, mais moins fort si les taux de prêt et d'emprunt diffèrent.

L'aplatissement de la courbe entraîne une diminution de la pente de la droite d'opportunité exprimant les combinaisons de prêt et d'investissement à risque. Par contre, la diminution de la pente de la droite représentant les combinaisons d'emprunt et d'investissement à risque sera plus importante. Ce résultat s'explique de la façon suivante : Supposons que le marchandage affecte dans la même mesure les titres d'un portefeuille d'emprunt et les titres d'un portefeuille de prêt. Dans ce cas, la diminution du revenu à risque jouera un rôle plus important dans un portefeuille d'emprunt que dans un portefeuille de prêt. En effet, un revenu à risque moindre devra financer un emprunt de coût constant, laissant un revenu net diminué, tandis qu'un revenu constant sur le prêt compensera en partie la diminution du revenu à risque. C'est pourquoi la diminution de la pente de la droite d'opportunité représentant les combinaisons d'investissement à risque financé en partie par l'emprunt sera plus importante.

Nos résultats montrent que, dans l'hypothèse d'adaptation du prix des actifs à risque, la position emprunteuse devient de moins en moins justifiée. Le volume d'emprunt aura donc tendance à diminuer au profit de celui du prêt, car la position prêteuse se justifie davantage lorsque le prix des actifs à risque se modifie. Cette tendance sera encore accentuée si l'on suppose que le taux d'intérêt sur l'emprunt est proportionnel au volume emprunté. Dans ce cas, non seulement l'emprunt est plus lourd que le prêt mais cette charge s'accroît de plus en plus. Nous obtenons le graphique suivant :

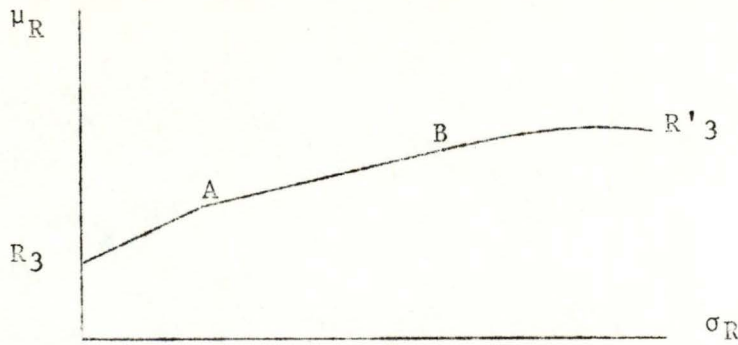


Figure 19

Ceci peut-il constituer une pression suffisante pour entraîner un rapprochement des taux d'intérêt sans risque ? Nous ne le pensons pas, car l'investissement à risque n'est qu'une possibilité, parmi beaucoup d'autres justifiant l'emprunt. D'ailleurs, si c'était le cas, on pourrait appliquer la théorie fondée sur l'unicité des taux d'intérêt sans risque. Celle-ci ne se vérifie pas, comme nous le verrons plus loin dans la discussion relative à la prime du risque.

Nous pouvons nous résumer en rappelant les acquis essentiels de cette analyse de marché.

- Une uniformisation des revenus des actifs à risque a lieu et permet la liquidation du marché par l'acquisition de tous les titres offerts.
- Cette uniformisation entraîne un aplatissement de la courbe d'opportunité d'autant plus important que la demande de titres était concentrée avant le marchandage.
- L'unicité des taux d'intérêt sans risque est un facteur de concentration de cette demande. Dans ce cas, les variations se portent sur la courbe d'opportunité des titres à risque.

- L'existence d'un taux d'intérêt sur le prêt différent du taux d'intérêt sur l'emprunt atténue la concentration de la demande d'actifs à risque et les modifications de prix qu'elle entraîne. Ces modifications, bien que réduites, exercent une pression défavorable sur le volume de l'emprunt et favorable sur le volume du prêt. Si le marché était gouverné principalement par ces forces, ceci tendrait à l'égalisation des taux d'intérêt sans risque.

B. Relation de marché entre un actif à risque et les combinaisons efficaces.(1)

A l'équilibre, tous les actifs à risque sont inclus dans au moins une combinaison efficiente, c'est-à-dire sont demandés sur le marché.

Lorsque le taux d'intérêt de prêt est égal à celui de l'emprunt, toutes les combinaisons efficaces sont situées sur une même ligne, la courbe d'opportunité. Mais chaque actif à risque inclus dans cette combinaison se situe à l'intérieur de l'enveloppe dès qu'il est détenu dans des proportions différentes de celles de l'optimum. En effet, les détentions non diversifiées sont moins efficaces. Nous rechercherons une relation qui exprime l'apport d'un actif particulier dans le revenu et le risque du portefeuille efficient.

La représentation graphique de cette situation est la suivante :

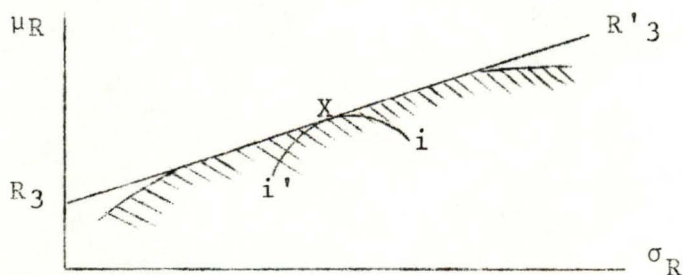


Figure 20

(1) Nous nous inspirons ici de l'article de Sharpe :  
 Sharpe W., Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium  
 under Conditions of Risk.  
 Journal of Finance, Septembre 1964.

Soit un actif à risque  $i$ , une combinaison efficiente  $X$  et une mesure de l'écart entre la proportion optimale de l'actif  $i$  dans la combinaison  $X$  et la proportion effective de  $i$  dans un portefeuille. Appelons  $y$  cet écart.

Si l'actif  $i$  est détenu exactement dans les proportions définies par  $X$ ,  $y = 0$ . Nous obtenons alors le point  $X$  sur la droite  $R_3R_3'$  représentant la courbe d'opportunité du marché. Si l'on ne détient que l'actif  $i$ ,  $y = 1$ , et l'on se situe sur le point  $i$  de la figure. Si l'on ne détient pas  $i$ , la combinaison est moins efficiente. Elle est représentée par le point  $i'$  sur le graphique.  $y$  prend alors une valeur négative.

La courbe  $i X i'$  est tangente à la droite d'opportunité du marché  $R_3R_3'$  au point  $X$ . Ce n'est pas une coïncidence. En effet, à l'équilibre, toutes les courbes représentant l'apport d'un actif doivent être tangentes à la courbe d'opportunité car elles font partie d'une combinaison efficiente au moins. Elles ne peuvent être sécantes, car alors la droite  $R_3R_3'$  ne représenterait plus toutes les combinaisons efficientes. Cette condition de tangence nous permet de trouver une formule reliant  $\mu_R$  au risque des actifs inclus dans la combinaison  $X$ .

Nous savons que le risque d'un portefeuille composé de deux titres vaut :

$$\sigma_R = \sqrt{y^2 \sigma_{Ri}^2 + (1-y)^2 \sigma_{RX}^2 + 2 \rho_{iX} (1-y) y \sigma_{Ri} \sigma_{RX}}$$

$$\frac{d\sigma_R}{dy} = \frac{y \sigma_{Ri}^2 - (1-y) \sigma_{RX}^2 + \rho_{iX} \sigma_{Ri} \sigma_{RX} (1-2y)}{\sqrt{y^2 \sigma_{Ri}^2 + (1-y)^2 \sigma_{RX}^2 + 2 \rho_{iX} (1-y) y \sigma_{Ri} \sigma_{RX}}}$$

Pour  $y = 0$ , on a :

$$\frac{d\sigma_R}{dy} = - \frac{1}{\sigma_R} ( \sigma_{RX} - \rho_{iX} \sigma_{Ri} \sigma_{RX} )$$

Or  $\sigma_R = \sigma_{RX}$  pour  $y = 0$

D'où  $\frac{d\sigma_R}{dy} = - ( \sigma_{RX} - \rho_{iX} \sigma_{Ri} )$



Par définition, on a  $\mu_R = y \mu_{R_i} + (1 - y) \mu_{R_X}$

Donc, pour tout  $y$ , on a

$$\frac{d\mu_R}{dy} = - (\mu_{R_X} - \mu_{R_i})$$

Et si  $y = 0$ , on a

$$\frac{d\sigma_R}{d\mu_R} = \frac{\sigma_{R_X} - \rho_{iX} \sigma_{R_i}}{\mu_{R_X} - \mu_{R_i}}$$

L'équation de la courbe d'opportunité est donnée par :

$$\sigma_R = s (\mu_R - R_3)$$

où

$R_3$  représente le taux d'intérêt sur prêt (emprunt). Puisque  $iX_i$  est tangent à la courbe lorsque  $y = 0$ , et puisque  $(\mu_{R_X}, \sigma_{R_X})$  est sur cette courbe, on a

$$\frac{\sigma_{R_X} - \rho_{iX} \sigma_{R_i}}{\mu_{R_X} - \mu_{R_i}} = s = \frac{\sigma_R}{\mu_R - R_3} = \frac{\sigma_{R_X}}{\mu_{R_X} - R_3}$$

$$\frac{\rho_{iX} \sigma_{R_i}}{\mu_{R_X} - \mu_{R_i}} = \frac{\sigma_{R_X}}{\mu_{R_X} - \mu_{R_i}} - \frac{\sigma_{R_X}}{\mu_{R_X} - R_3}$$

$$\rho_{iX} \sigma_{R_i} = \frac{\sigma_{R_X} (\mu_{R_i} - R_3)}{\mu_{R_X} - R_3}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{iX} \sigma_{R_i}}{\sigma_{R_X}} &= - \left( \frac{R_3}{\mu_{R_X} - R_3} \right) + \left( \frac{1}{\mu_{R_X} - R_3} \right) \mu_{R_i} \quad (1) \\ &= \frac{\mu_{R_i} - R_3}{\mu_{R_X} - R_3} \end{aligned}$$

L'apport en risque d'un actif  $i$  dans une combinaison  $X$  est égal à son apport en revenu à risque (excédant le taux d'intérêt sans risque). Ceci nous paraît justifié intuitivement. Mais la formule (1) nous introduit au modèle diagonal développé par Sharpe. Nous allons l'examiner, puis nous reprendrons la formule (1) pour étudier la prime de risque à laquelle cette formule conduit.

#### IV. Vers une méthode applicable.

##### A. Le modèle simplifié de Sharpe

Jusqu'ici, nous avons repris la procédure de Markowitz-Tobin pour déterminer les titres à risque qui composent le portefeuille optimal. Nous pouvons la résumer comme suit :

Soit un ensemble de titres ( $i = 1 \dots n$ ) de revenu estimé  $\mu_i$  et reliés entre eux par les covariances  $c_{ij}$ . On investit une proportion  $X_i$  du titre  $i$ .

Le revenu du portefeuille vaut  $\mu_R = \sum_i X_i \mu_i$

Le risque du portefeuille vaut  $\sigma_R = \sqrt{\sum_i \sum_j X_i X_j c_{ij}}$

La fonction objectif est, par hypothèse, la suivante :

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda \mu_R - \sigma_R \\ &= \lambda \sum_i \mu_i X_i - \sqrt{\sum_i \sum_j X_i X_j c_{ij}} \end{aligned}$$

Elle variera en fonction des  $X_i$  si  $\mu_i$  et  $c_{ij}$  sont donnés, sous contraintes de

$$\sum_i X_i = 1 \text{ et } X_i \geq 0 \text{ pour tout } i.$$

Il faut maximiser la fonction objectif.

Pour toute valeur de  $\lambda$  donnée, on maximisera la fonction quadratique  $\phi$ , fonction de  $X_1, X_2$  et  $X_1 X_2$ .

En faisant varier  $\lambda$  de 0 à  $+\infty$ , on trouvera la solution.

Graphiquement, nous avons :

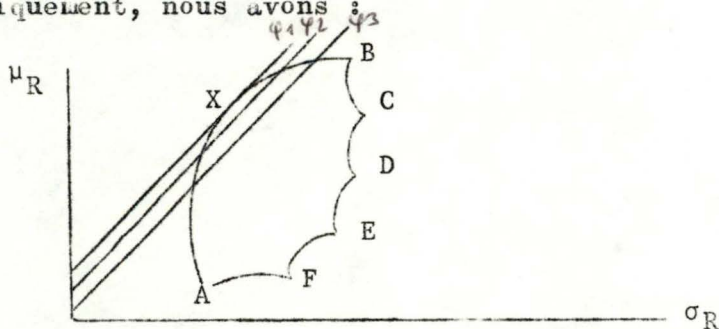


Figure 21

Soient 6 titres à risque donnant un  $(\mu_R, \sigma_R)$  localisé en A, B, C, D, E et F. Les droites  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  montrent différentes combinaisons des  $X_i$  pour un  $\lambda$  donné. On cherchera celle qui donne le  $\phi$  le plus élevé. Dans ce cas, c'est la combinaison X.

La méthode de la ligne critique développée par Markowitz, résout ce problème. Deux relations de départ : D'abord, tout ensemble de portefeuilles efficients peut être décrit en termes d'un ensemble plus restreint de "portefeuilles en coin". Les portefeuilles en coin sont les investissements globaux dans un actif donné (les points A, B, C, D, E ou F). Les autres portefeuilles sont obtenus par des combinaisons de ces portefeuilles en coin. La seconde relation est la suivante : Deux portefeuilles en coin adjacents sur l'enveloppe des possibilités sont reliés entre eux de la façon suivante : L'un d'eux comprend soit tous les titres de l'autre plus un titre ou moins un titre. Ainsi, en allant de l'un à l'autre, on fait varier les quantités jusqu'à exclusion d'un titre pour le remplacer par un autre, et à ce moment, on a une solution en coin.

La méthode est la suivante : Primo, on calcule les rapports entre les  $X_i$  et  $\lambda$  pour tout point situé entre les coins. Secundo, on détermine les valeurs de  $\lambda$  au dessous desquelles il faut exclure un titre et au dessus desquelles il faut inclure un titre, ceci pour tout titre. Tertio, on détermine ainsi les différents  $\lambda$ , à partir du plus élevé. Pour chaque  $\lambda$  limite, on obtient une solution en coin. On répète cette opération tant qu'on obtient une nouvelle valeur limite de  $\lambda$ . Le calcul est fini soit si on n'a plus de nouveaux  $\lambda$  limites, soit si  $\lambda = 0$ . On devine la longueur des calculs par cette méthode.

C'est pourquoi Sharpe propose un modèle simplifié (1) où le nombre des comparaisons entre revenus et titres est largement diminué, et en même temps qui n'exclut pas l'existence de relations entre titres.

Il part de l'hypothèse selon laquelle les revenus des différents titres sont reliés entre eux uniquement par un facteur commun sous-jacent. Le revenu d'un titre est alors fonction du hasard et d'un facteur commun à tous les titres.

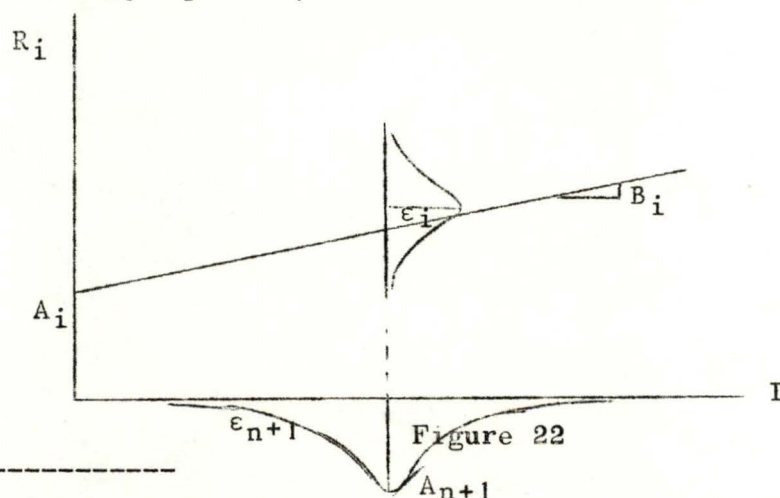
$$R_i = A_i + B_i I + \varepsilon_i \quad i = 1, 2 \dots n$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres,  $I$ , le facteur commun et  $\varepsilon_i$  le facteur du hasard ou de l'erreur. Les hypothèses sur le facteur d'erreur sont les suivantes :  $\mu_{\varepsilon_i} = 0$ ,  $\sigma_{\varepsilon_i} = q_i$ .

Le facteur commun serait par exemple le cours de l'indice boursier pour le revenu des actions, ou la quantité de monnaie, ou le taux d'intérêt. La valeur future du facteur commun est, elle aussi, soumise au hasard :

$$I = A_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

Graphiquement, nous avons :



(1) Sharpe W.F. A simplified Model for Portfolio Analysis. Management Science, Janvier 63, pp. 227-293.

$A_i$  et  $B_i$  servent à définir  $\mu_{R_i}$  par rapport à  $I$ .  $\epsilon_i$  mesure  $\sigma_{R_i}$  autour de  $\mu_{R_i}$ .  $A_{n+1}$  définit  $\mu_I$  et  $\epsilon_{n+1}$  définit  $\sigma_I$  autour de  $\mu_I$ .

Il faut donc connaître  $A_i$ ,  $B_i$  et  $\epsilon_i$  pour chaque titre,

et  $A_{n+1}$  et  $\epsilon_{n+1}$  pour l'indice  $I$ ,

pour calculer le revenu estimé sur chaque titre.

On a les relations suivantes :

$$\mu_{R_i} = A_i + (A_{n+1}) B_i$$

$$\sigma_{R_i} = (B_i)^2 (\epsilon_{n+1}) + \epsilon_i$$

$$\sigma_{R_i} = B_i B_j \epsilon_{n+1}$$

Réécrivons le modèle directement en termes de paramètres définis ci-dessus.

Le revenu du portefeuille est la moyenne pondérée des revenus sur chaque titre :

$$R = \sum_{i=1}^n X_i R_i$$

La combinaison d'un titre,  $X_i R_i$ , est donnée par

$$X_i R_i = X_i (A_i + B_i I + \epsilon_i) = X_i (A_i + \epsilon_i) + X_i B_i I$$

où  $A_i + \epsilon_i$  mesure les caractéristiques propres au titre

$B_i I$  mesure la sensibilité du titre au facteur commun.

Le revenu du portefeuille est le résultat de ces deux éléments :

$$R = \sum_{i=1}^n X_i (A_i + \epsilon_i) + \left( \sum_{i=1}^n X_i B_i \right) I$$

Si on définit  $X_{n+1}$  comme la réponse du portefeuille au facteur  $I$ , on

obtient

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^n X_i B_i$$

D'où :

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^n X_i (A_i + \epsilon_i) + X_{n+1} (A_{n+1} + \epsilon_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} X_i (A_i + \epsilon_i) \end{aligned}$$

Le revenu attendu vaut :

$$\mu_R = \sum_{i=1}^{n+1} X_i A_i$$

Et son risque vaut :

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 \epsilon_i}$$

Ainsi, au lieu d'être complète, la matrice de variance-covariance à partir de laquelle on calcule le risque contient des éléments non nuls uniquement le long de la diagonale. Les calculs sont fortement diminués. Ceci découle de notre hypothèse selon laquelle le revenu entre les actifs est corrélé uniquement à travers le facteur commun I.

#### Possibilité de prêt et d'emprunt

On peut prêter au taux  $r_1$  sans risque. Ceci modifie la formule du revenu.

Soit une portion  $X_1$  prêtée et une portion  $(1 - X_1)$  investie. D'où le revenu attendu :

$$\mu_R = X_1 r_1 + (1 - X_1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i A_i$$

On calcule le risque par la formule :

$$\sigma_R = (1 - X_1) \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 \epsilon_i}$$

De même pour l'emprunt réalisé au taux  $r_b$  sans risque.

Soit une fraction  $X_b$  empruntée et une fraction  $(1 + X_b)$  investie. On obtient le revenu suivant :

$$\mu_R = -X_b r_b + (1 + X_b) \sum_{i=1}^{n+1} X_i A_i$$

Le risque est calculé par la formule :

$$\sigma_R = (1 + X_b) \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 \epsilon_i}$$

### B. La prime de risque

Partons du modèle diagonal et examinons le revenu de l'actif  $i$  et celui de la combinaison  $X$ , que nous avons présentés aux pages 73-75.

Si nous observons ex post le revenu de l'actif  $i$  à diverses périodes, ainsi que celui de la combinaison  $X$ , il est possible de tracer une droite de régression à travers tous ces points.

Un graphique avec le revenu de l'actif  $i$  ( $R_i$ ) en ordonnée, et celui de la combinaison  $X$  ( $R_X$ ) en abscisse représente cette situation.

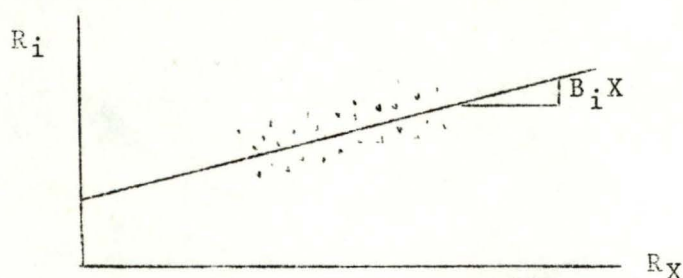


Figure 23

Une partie du flou autour de la droite de régression est due au risque de l'actif  $i$ , mais on devine une relation entre  $R_X$  et  $R_i$ , exprimée par la pente  $B_i X$  de la droite. Cette relation est appelée "risque systématique" par rapport à  $R_X$ . C'est la même relation que celle que nous avons vue entre  $R_i$  et  $I$  dans le modèle diagonal. On peut s'en servir pour faire des prévisions au niveau d'un titre.  $B_i X$  est la réponse prévue de  $R_i$  à une variation de  $R_X$ . Si le risque sur la combinaison  $X$  est calculé, on peut déterminer la partie systématique du risque pour chaque titre.

Nous savons que sur la droite d'opportunité du marché, à l'équilibre, les prix sont tels que le revenu par unité de risque est le même pour tous les actifs composant un portefeuille efficient (la courbe  $iKi'$  est tangente à la droite d'opportunité).

Sharpe définit ensuite une droite exprimant la relation entre le revenu d'un titre et sa "coopération" à déterminer  $X$ , c'est-à-dire son influence dans le calcul du revenu et du risque du portefeuille.

Le graphique suivant exprime l'apport de l'actif  $i$  dans le revenu du portefeuille  $X$ .  $R_3Q$  est le minimum : pour un tel revenu  $R_3$ , l'actif ne peut créer une source supplémentaire de risque :  $R_3$  est le taux d'intérêt sans risque.  $R_3Q$  est incliné vers le haut : l'apport en revenu doit être croissant dès que l'actif constitue une cause de risque supplémentaire.

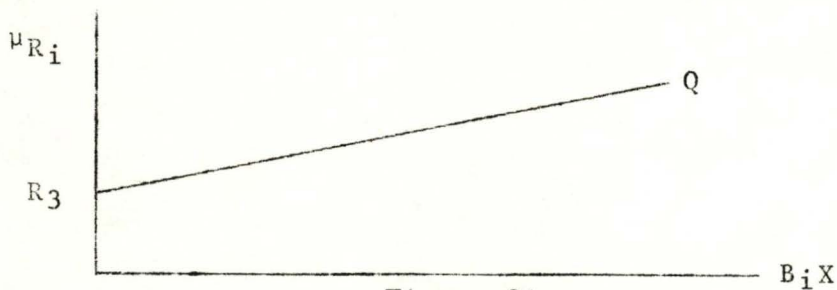


Figure 24

La pente de cette droite est donnée par les relations suivantes

$$\rho_{iX} = \frac{\sqrt{B_{iX}^2 \sigma_{RX}^2}}{\sigma_{Ri}^2}$$

d'où

$$B_{iX} = \frac{\rho_{iX} \sigma_{Ri}}{\sigma_{RX}}$$

On rejoint ainsi la formule (P) de la page 77.

$$B_{iX} = - \left\{ \frac{R_3}{\mu_{RX} - R_3} \right\} + \left\{ \frac{1}{\mu_{RX} - R_3} \right\} \mu_{Ri}$$

Nous constatons que si  $B_{iX} = 0$ ,  $\mu_{Ri} = R_3$ .

L'apport minimum d'un titre doit être égal au taux d'intérêt sans risque. Avant de participer au risque, un titre doit produire un revenu au moins égal à cette valeur.

Cette formule montre qu'à l'équilibre, les actifs créant les plus grandes variations de  $R_X$  auront un revenu attendu  $R_i$  supérieur à celui des



actifs qui agissent moins sur  $R_X$ . La prime de risque doit être la même pour tous les titres dans une combinaison. Elle représente l'accroissement du revenu par unité de risque supplémentaire. Ceci est valable pour toute combinaison efficiente.

Les taux de revenu sur toutes les combinaisons efficientes seront parfaitement corrélées, suite au marchandage du marché qui égalise le rapport entre le prix et le revenu des titres à risque.

Ainsi la figure 24 où l'on exprime la relation entre le revenu d'un titre et son influence sur le revenu de la combinaison efficiente peut convenir pour tout titre  $i$  de la combinaison  $X$  ou de toute autre combinaison efficiente. L'axe horizontal montrera les niveaux alternatifs de la sensibilité du revenu de la combinaison à un changement de l'actif choisi ou inversement l'action d'un actif dans une combinaison à risque.

Le but d'un investissement est d'obtenir un revenu élevé en courant un risque minimum. Pour déterminer le choix des actifs qui composent un portefeuille, il faut tenir compte non seulement du revenu et du risque de chaque titre, mais également de l'apport en revenu et en risque de la combinaison des titres. Ce sont là deux notions différentes car si le revenu du portefeuille équivaut à la somme des revenus de chaque titre, le risque n'est pas égal à la somme des risques attachés à chaque titre. Les corrélations entre actifs jouent un rôle important dans la détermination du risque du portefeuille, comme nous l'avons vu précédemment.

La prime de risque est un instrument de mesure de l'apport d'un actif dans un portefeuille. On la calcule par la formule suivante :

$$\rho_{iX} = \frac{B_{iX} \sigma_{RX}}{\sigma_{Ri}}$$

$B_i X$  mesure l'apport en revenu du titre  $i$  dans la combinaison  $X$ , compte tenu du niveau de revenu atteint par la combinaison  $X$ .

En effet,

$$B_{iX} = \frac{\mu_{Ri} - R_3}{\mu_{RX} - R_3}$$

$\frac{\sigma_{RX}}{\sigma_{Ri}}$  mesure l'apport en risque du titre  $i$  dans la combinaison  $X$ . Ainsi la figure 24 est bien la représentation de la coopération de l'actif  $i$  dans la détermination du risque et du revenu du portefeuille  $X$ . La prime de risque en est la mesure algébrique. Elle repose sur l'hypothèse d'égalité des taux d'intérêt de prêt et d'emprunt. Grâce à cette hypothèse, on obtient une droite  $R_3Q$  dans la figure 24. Si cette condition n'est pas remplie, l'utilisation pratique de cette mesure est fort dangereuse, comme nous le verrons plus loin.

Nous avons montré comment se nouait la relation entre le revenu attendu et le risque d'un titre particulier.

Une hypothèse expliquant la corrélation entre les revenus des actifs peut être la suivante : ces revenus sont tous soumis de la même façon aux variations de l'activité économique générale.

Ainsi la diversification permet d'éviter tous les risques sauf celui de l'activité économique. Ce sera le seul risque significatif des "actifs à risque". Les titres qui y échappent verront leur prix évoluer de façon à rendre leur taux de rendement égal au taux d'intérêt sans risque, c'est-à-dire le taux d'intérêt sur le prêt ou sur l'emprunt. Les titres qui y sont soumis produiront un revenu plus élevé : la prime de risque s'ajoutera au taux d'intérêt sans risque. Nous rejoignons l'hypothèse d'aversion pour le risque : on<sup>n</sup> accepte de courir un risque que si le revenu attendu est plus élevé.

On peut exprimer de la façon suivante le revenu attendu d'un portefeuille efficient :

$$\mu R_i = R_3 + b \sigma R_i$$

où  $R_3$  exprime le taux d'intérêt sans risque

$b$  exprime la prime de risque. Ce coefficient est positif en cas d'aversion pour le risque.

Sharpe (1) fait une vérification empirique de cette théorie.

Il remplace les valeurs prévues (non mesurables) par des données ex post.

Les  $\mu R_i$  et  $\sigma R_i$  sont respectivement le revenu moyen et la déviation standard autour de ce revenu, calculés sur une période de 10 ans (1954-1963) pour 34 fonds mutuels de placement (open-end).

Il faut observer si un accroissement du risque est accompagné d'un accroissement du revenu. Les résultats sont significatifs : le coefficient de corrélation entre  $\mu R$  et  $\sigma R$  vaut + 0,836. Ceci vérifie l'hypothèse d'aversion pour le risque. Pour trouver la valeur du taux d'intérêt sans risque et de la prime de risque, Sharpe fait une régression entre  $\mu R$  et  $\sigma R$ , puis une seconde régression entre  $\sigma R$  et  $\mu R$  (car  $\mu R$  et  $\sigma R$  ne sont pas indépendants) et il calcule la valeur moyenne des deux régressions. Il obtient une prime de risque de 0,576 et un taux d'intérêt sans risque de 3,81. Ceci signifie que l'investisseur réclame 3,8% d'intérêt sans risque et 0,576 d'intérêt supplémentaire par pour cent de risque couru (2).

---

(1) Sharpe W.F. "Risk Aversion in the Stock Market : Some Empirical Evidence." - Journal of Finance September 1965.

(2) Le risque est mesuré par la déviation standard. Ceci nous permet de lui donner une valeur aussi précise.

Sharpe fait ensuite un test de linéarité pour vérifier l'hypothèse selon laquelle <sup>1)</sup> l'individu prête ou emprunte au taux d'intérêt sans risque et <sup>2)</sup> toutes les combinaisons à risque sont situées sur une même droite (de marché) suite à l'égalisation du revenu des actifs.

Remarquons que si cette condition de linéarité n'est pas vérifiée, on peut en déduire une différence entre les taux d'intérêt de prêt et d'emprunt. La droite d'opportunité s'infléchit alors dans la mesure de l'écart entre ces deux taux. Ces deux possibilités se présentent graphiquement de la manière suivante.

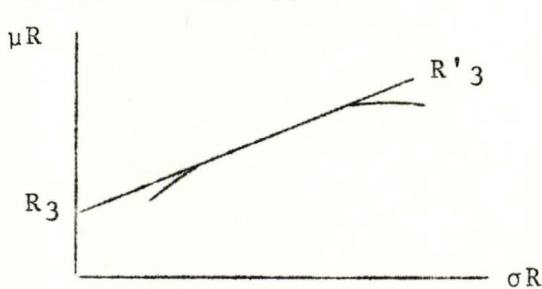


Figure 25 (A)

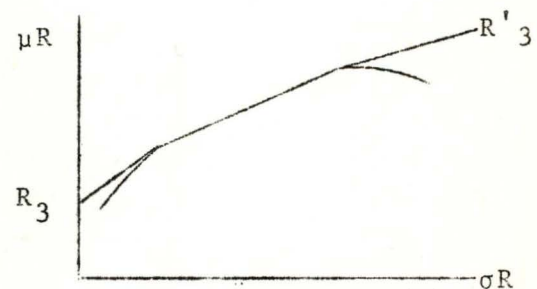


Figure 25 (B)

En (A), la pente est identique du côté  $R_3$  et du côté  $R'_3$ .

En (B), la pente a changé. La linéarité n'est plus vérifiée, car il y a deux taux d'intérêt sans risque.

Sharpe obtient un coefficient de corrélation plus élevé pour une régression quadratique que pour une régression linéaire : son coefficient est de + 0,852 au lieu de + 0,836.

Il se demande si ce ne serait pas dû à la présence de portefeuilles moins efficaces pour un revenu plus élevé. En d'autres termes, Sharpe se demande si, en quête d'un revenu plus élevé, les fonds n'ont pas couru un risque proportionnellement plus important que celui auquel on se serait attendu en gardant le même rapport  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$ .

Nous ne voyons pas pourquoi, a priori, cette explication serait plus valable que la nôtre. Nous supposons que pour obtenir un revenu plus élevé, les fonds doivent emprunter au taux d'intérêt sur emprunt qui est supérieur au taux de prêt.

Si tous les portefeuilles efficients sont situés le long d'une ligne droite, leurs taux de rendement doivent être parfaitement corrélés. Sharpe fait la vérification suivante : Il calcule la mesure dans laquelle les revenus des fonds sont corrélés avec le revenu calculé à partir de l'indice Dow Jones, dont on suppose qu'il représente le marché.

Il obtient des résultats significatifs : 50 % des fonds sont corrélés entre 0,95 et 0,99 ; 90 % des fonds sont corrélés entre 0,90 et 0,99 et tous sont corrélés entre 0,75 et 0,99.

Ceci soutient l'hypothèse de l'égalisation des revenus sur tous les titres et sur toutes les combinaisons. Celles-ci s'alignent et suivent le marché. Le risque subsistant est alors celui du marché. Si l'on parvient à réduire ce dernier, l'incertitude d'un investissement à risque peut être limitée à la prévision du marché.

L'étude de la théorie de gestion de portefeuille nous a amenés à plusieurs résultats. Nous en reprendrons quelques-uns ici en essayant de porter un jugement sur leur validité. Nous retiendrons en particulier la ligne de marché et la prime de risque.

Un des acquis principaux de cette théorie est la définition d'une ligne d'opportunité de marché le long de laquelle revenus et risques de tous les titres doivent s'aligner pour permettre la liquidation du marché. Quelle forme donner à cette ligne ? Deux possibilités se présentent :

Si les taux d'intérêt et d'emprunt sont égaux, cette ligne est une droite. Si ces taux diffèrent, cette ligne est brisée et suit l'enveloppe des combinaisons d'actifs à risque sur la distance nécessaire pour donner deux points de tangence des combinaisons à risque avec une situation de prêt ou d'emprunt. La figure 18 nous en a donné la représentation graphique.

Jusqu'ici, la théorie fut principalement axée sur la première hypothèse, fort simplificatrice puisque supposant l'existence d'un seul taux d'intérêt sans risque. Lintner (1) et Sharpe (2) envisagent la seconde hypothèse, mais de façon subsidiaire, continuant à donner le plus d'importance à la première hypothèse. Nous nous sommes efforcés, dans ce travail, de développer la seconde hypothèse qui nous semble plus proche de la réalité.

Plusieurs constatations viennent renforcer notre position. D'abord le résultat de Sharpe qui obtient un meilleur ajustement avec une régression quadratique qu'avec une régression linéaire (3). Ensuite Friend and Blume remettent en cause la théorie fondée sur l'unicité des taux d'intérêt sans risque (4). Nous nous inspirerons de leur critique.

- 
- (1) Lintner J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolio and Capital Budgets. Review of Economics and Statistics, Février 1965.
- (2) Sharpe W. Capital Asset Prices, op. cit.
- (3) Sharpe W. Risk-Aversion in the Stock Market, op. cit.
- (4) Friend I. and Blume M. Measurement of Portfolio Performance Under Uncertainty. American Economic Review, Septembre 1970.

Friend and Blume s'interrogent sur la validité des instruments de mesure de performance des portefeuilles fondés sur un seul paramètre. Différentes présentations de ces instruments existent, développées par Sharpe (1), Treynor (2) et Jensen (3). Ces mesures sont identiques, mais présentées sous des formes différentes. Nous avons analysé celle de Sharpe.

Rappelons la formule utilisée

$${}^{\mu} RI = R_3 + b \sigma R_i$$

où  $R_3$  exprime le taux d'intérêt sans risque  
 $b$  exprime la prime de risque.

Friend and Blume testent cette relation sur des portefeuilles choisis au hasard, pour la période 1960-1968 et obtiennent des coefficients "b" négatifs. Ceci signifie que les portefeuilles les plus risqués se comportent beaucoup moins bien que les portefeuilles moins risqués. Ce résultat est contraire à la théorie que nous avons développée, qui est fondée sur l'hypothèse d'aversion pour le risque.

Leurs résultats rendent nécessaire la mise en cause des hypothèses de la théorie. Une des hypothèses qu'ils remettent particulièrement en question est celle d'égalité des taux d'intérêt de prêt et d'emprunt.

- (1) Sharpe W.-Capital Asset Prices, op. cit.  
 -Mutual Funds Performance  
 Journal of Business, Janvier 1966.
- (2) Treynor J. Toward a Theory of Market Value of Risky Assets  
 unpublished manuscript, undated.
- (3) Jensen M. Risk, Capital Assets and the Evaluation of Investment Portfolio.  
 Journal of Business, Avril 1969.

Le taux d'intérêt d'emprunt est supérieur au taux d'intérêt de prêt, comme nous l'avons fait remarquer. Ceci crée un biais dans le calcul de la mesure de performance des portefeuilles basée sur un seul paramètre, biais défavorable aux portefeuilles les plus risqués.

Comme nous l'avons exposé précédemment, la ligne de marché s'abaisse davantage du côté de l'emprunt que du côté du prêt, et plus encore si l'on suppose que le coût de l'emprunt croît avec le volume emprunté. Nous pensons que cette hypothèse est plus utile pour étudier la réalité.

#### V. Conclusions de la première partie.

Nous avons examiné dans cette partie le modèle de moyenne -écart-type de Tobin, que nous avons adapté à un cadre plus large. Les hypothèses suivantes ont été introduites : présence d'actions au sein du portefeuille et possibilité d'une estimation de gain (perte) non nulle sur la valeur du capital.

Nous étions partis de la distinction qui sépare un portefeuille de transactions d'un portefeuille d'investissement ; cette distinction est fondée sur la finalité du choix de l'agent économique.

Le modèle est fondé sur la relation qui existe entre le revenu financier attendu et le risque d'un portefeuille de titres établi dans le but de maximiser l'utilité du revenu du portefeuille.

Deux justifications complémentaires du modèle ont été présentées, l'une à partir des courbes d'indifférence, l'autre à partir de la fonction d'utilité du revenu. On en conclut une forme particulière de ces courbes dans le cas d'un investisseur hostile au risque.

La relation entre le revenu et le risque d'un actif permet de déterminer la courbe d'opportunité de cet actif.



De la tangence de cette courbe avec une courbe d'indifférence, on a déduit la quantité à investir pour maximiser l'utilité.

Le théorème de séparation a été établi dans l'hypothèse d'égalité des taux de prêt et d'emprunt. Il démontre l'indépendance entre la répartition des actifs au sein d'un portefeuille d'une part, et le volume d'investissement à risque d'autre part.

Ensuite nous avons analysé de façon détaillée les effets de la diversification : celle-ci permet de limiter le risque grâce à des corrélations inférieures à l'unité entre les titres d'un portefeuille.

Nous avons étendu l'analyse à l'hypothèse de différence entre les taux de prêt et d'emprunt. Deux conséquences découlent de cette situation : il y a plus d'une combinaison efficiente d'actifs à risque. Deux combinaisons sont alors à souligner, celles qui sont choisies dans un portefeuille de prêt ou dans un portefeuille d'emprunt. Secundo, le théorème de séparation est réduit et n'est valable qu'après détermination d'une situation de prêt ou d'emprunt. Ceci signifie que dans le premier cas, il n'existe qu'un terme d'échange entre les actifs à risque et le prêt (emprunt), à cause de l'unicité des taux d'intérêt sans risque; tandis que dans le second, il en existe deux, un pour chacun des taux d'intérêt sans risque.

Nous avons présenté la détermination de l'équilibre du marché des titres à risque et ses effets sur les prix de ceux-ci. Ces prix seront modifiés de façon à aligner sur une même courbe d'opportunité le revenu et le risque de tous les titres offerts sur le marché. Lorsque les taux d'intérêt divergent, le prêt se voit d'autant plus justifié que le revenu des actifs à risque diminue, tandis que l'emprunt se justifie de plus en plus difficilement dans ces conditions.

La relation entre un actif à risque et les combinaisons efficientes fut développée, à l'équilibre du marché.

Enfin, nous avons exposé le modèle simplifié de Sharpe en insistant sur sa brièveté par rapport à la procédure précédente. Il faut toutefois prendre garde à la simplicité de la prime de risque comme mesure de performance des portefeuilles. La vérification de Friend and Blume nous montre ses faiblesses. Fondée sur l'unicité des taux d'intérêt sans risque, et supposant une relation explicite entre le revenu et le risque, elle ne peut être utilisée telle quelle pour juger un portefeuille. Il est donc préférable de retourner à la mesure de Markowitz-Tobin, c'est-à-dire le rapport entre le revenu et le risque.

## Deuxième partie.

ELEMENTS DE GESTION DYNAMIQUE D'UN PORTEFEUILLE.I. Introduction

Nous avons vu précédemment comment rendre efficient un portefeuille composé d'actifs à risque et sans risque, respectivement des obligations et des actions d'une part, de la monnaie sous forme de prêt ou d'emprunt d'autre part. Notre critère d'efficience était la maximisation du revenu financier réel escomté pour un risque constant ou la minimisation du risque pour un niveau donné de revenu.

Dans l'optique statique qui était celle de cette première partie, point n'était besoin de prévoir une fraction du portefeuille destinée aux transactions d'investissement, puisqu'on déterminait la formule d'investissement la plus intéressante et la mieux adaptée aux goûts de l'investisseur, indépendamment du temps. La période d'investissement était unique. A la fin de celle-ci, le placement était liquidé et rendu disponible pour la consommation. Mais ceci n'est qu'une possibilité parmi les décisions de l'agent économique. Celui-ci peut choisir de réinvestir son portefeuille d'investissement. Il le fera toujours selon la méthode exposée précédemment.

Toutefois, s'il savait dès le début de la première période que son investissement se ferait sur une durée plus longue qu'une seule période, il n'aurait sans doute pas effectué son placement de la même manière. Il n'aurait en tout cas pas liquidé des titres pour les racheter au début de la seconde période. De plus, si la possibilité de modifier son portefeuille lui est offerte, il aurait pu ne pas attendre la fin de la première période pour effectuer des changements.

Il aurait pu aussi ne pas investir simultanément tout le montant disponible pour l'investissement. Bref, une multitude de variantes s'offrent à l'agent économique qui gère son portefeuille dans une optique dynamique.

Notre objet n'est pas de décrire ces variantes, ni de faire une théorie de l'investissement multi-période. Fama (1) démontre d'ailleurs que, dans le cadre des hypothèses du modèle exposé dans la première partie, le comportement d'un investisseur-consommateur sur une succession de périodes n'est pas différent de celui de l'investisseur hostile au risque qui a un horizon d'une seule période.

Notre tâche est plus modeste. Elle se limitera à souligner quelques aspects de l'investissement dynamique, plus particulièrement le rôle de la monnaie dans ce portefeuille, les facteurs de détermination d'un rythme de révision du portefeuille, enfin un complément de la théorie appliquée aux cas des obligations et un exemple de méthode de prévision de l'indice boursier.

## II. Monnaie et révision du portefeuille.

En faisant allusion à la diversité des possibilités d'investissement dynamique, nous avons mentionné la présence d'un portefeuille de transactions d'investissement. Celui-ci sera composé de titres liquides, c'est-à-dire de la monnaie ou des dépôts à vue. Nous pouvons simplifier en ne considérant que la monnaie.

Cette dernière est détenue pour deux raisons : elle permet les modifications au sein du portefeuille et elle constitue une réserve de valeur.

---

(1) Fama E.F. "Multiperiod Consumption Investment Decisions",  
The American Economic Review, March 70.

Car, si à un moment donné, toutes les possibilités d'investissement à risque n'offrent pas de revenu suffisant ou mieux offrent un revenu négatif, la monnaie devient alors l'actif le plus intéressant, dans lequel on investira en attendant une meilleure situation du marché.

Quel montant de monnaie détenir dans un portefeuille d'investissement ? La fraction détenue sera fonction de la durée de la période de non-révision du portefeuille. Si le portefeuille n'est pas modifié avant la date de l'échéance des actifs qui le composent, cette fraction sera nulle. C'est le cas présenté dans la première partie de ce travail. Autrement, cette fraction devra être égale au montant nécessaire pour acquérir de nouveaux actifs en plus de ceux qu'on peut acquérir pour la liquidation d'une partie du portefeuille, si cette liquidation a lieu lors de la modification du portefeuille. Si cette liquidation n'a pas lieu, ce montant de monnaie devra être égal au montant des nouveaux titres désirés.

Bref, la monnaie doit combler l'écart entre les décisions d'accroissement du portefeuille et le moment où l'agent économique liquide certains actifs détenus.

Le calendrier de révision du portefeuille est un facteur important dans la détermination du montant de monnaie détenue parmi les actifs de l'agent économique investisseur. Nous examinerons les facteurs dont il dépend.

La répartition du portefeuille est déterminée à partir du revenu financier attendu et du risque de chaque titre. Le revenu attendu est estimé à partir, par exemple, d'un modèle comme celui de Keran, que nous présenterons ci-dessous.

Ce modèle nous donne des valeurs attendues pour une, deux ou trois périodes futures, trimestres par exemple. Plus la période est éloignée dans le temps, plus le risque d'erreur est élevé. Si l'investisseur détermine a priori la marge d'erreur maximum acceptable, la durée de validité des prévisions en découlera, et par là aussi le rythme de révision du portefeuille. A cela il faut ajouter aussi un facteur influençant positivement la durée des périodes unitaires d'investissement, ce sont les coûts de modification du portefeuille : coût d'information, coût de manipulation de l'information pour recalculer la composition du portefeuille et coût d'échange des titres (les commissions de l'agent de change, les taxes sur transactions...).

Enfin, comme facteurs importants dans la détermination du rythme de révision du portefeuille, citons les problèmes de substituabilité entre titres. Est-il possible de passer rapidement d'une action à une obligation sans encourir une perte de capital? Ce ne sont plus des coûts de transactions sensu stricto, mais des coûts d'existence d'un marché simultané sur ces titres.

Les deux premiers facteurs que nous avons signalés agissent de façon continue; le dernier a un effet brutal : il y a moyen de substituer des titres contre d'autres ou c'est impossible à un prix acceptable.

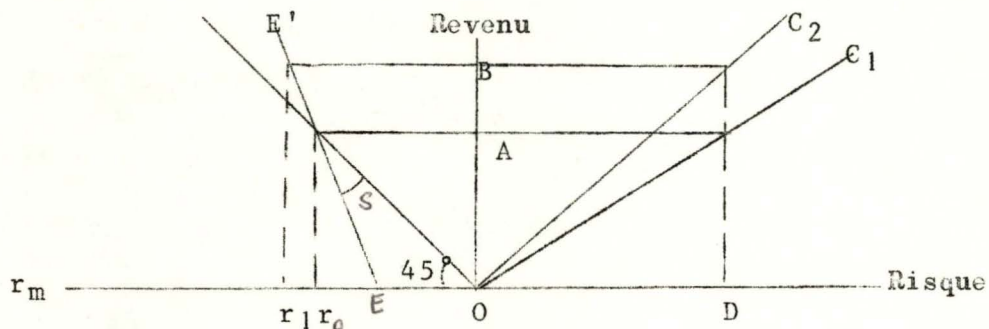
### III. Courbe d'opportunité et prévision du cours des obligations.

Nous voulons présenter ici une application du modèle de la moyenne-déviations standard au calcul du revenu des obligations. Ce revenu dépend des taux d'intérêt et de la variation des cours auxquels on s'attend. Les prévisions interviennent ici et servent de base au calcul du revenu attendu.

Il est possible de tracer une courbe d'opportunité pour chaque titre, mesurant le rapport entre le revenu attendu et le risque, pour l'acquisition d'un stock croissant de ce type d'actifs. Nous pouvons donc le faire pour les obligations.

D'autre part, le prix d'une obligation varie en sens inverse de celui du taux d'intérêt pratiqué sur le marché. Si on prévoit le taux d'intérêt qui prévaudra dans le futur, on peut s'attendre à une variation du cours des obligations et obtenir une courbe d'opportunité différente.

Ce raisonnement est illustré graphiquement de façon suivante :



Soit un titre émis au moment où le taux d'intérêt du marché était  $or_1 = OA$ . Pour un risque  $OD$ , on avait un revenu  $OA$ .

On connaît le taux vers lequel le marché va tendre, soit  $Or_0$ . On connaît aussi la sensibilité du prix des obligations aux variations du taux d'intérêt c'est à dire l'angle  $S$ . Ceci nous permet de prévoir la variation du prix du titre, soit  $AB$ , suite à une baisse du taux d'intérêt du marché  $r_1 r_0$ .

Le revenu est alors composé de  $OA$ , le taux d'intérêt du titre émis, plus  $AB$ , le gain en capital suite à la variation du cours, ce qui nous donne au total  $OB$  et nous permet de passer à une courbe d'opportunité supérieure, soit  $OC_2$ . Sur cette courbe, pour un même risque  $OD$ , on obtient un revenu plus élevé  $OB$ .

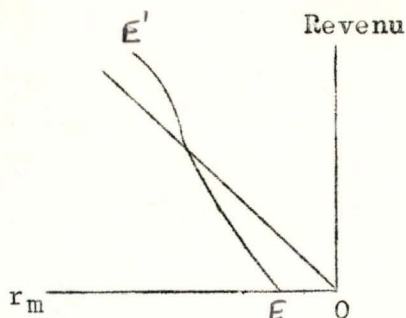
Le calcul des élasticités du prix des obligations au taux d'intérêt nous permet de définir l'angle S et la forme de la courbe E'E, qui mesure le gain ou la perte en capital attendu suite à une variation du taux d'intérêt sur le marché des obligations.

Une étude pratique devrait déterminer la valeur de cette élasticité. On peut toutefois déceler deux tendances : les variations attendues du taux d'intérêt se produisent au cours du temps. Or les obligations ont une date d'échéance déterminée. Plus on s'en rapproche, plus le titre gagne en liquidité et son risque diminue et plus on peut échanger ce titre à un prix intéressant. Ceci entraînerait une assymétrie dans les variations du prix des obligations qui se montreraient plus élastiques à la hausse qu'à la baisse, c'est-à-dire plus élastique à la baisse du taux d'intérêt du marché qu'à la hausse de celui-ci, non pas à cause du taux d'intérêt, mais parce que celui-ci varie à des moments toujours plus proches de la date d'échéance de l'obligation.

Un autre élément intervient, c'est l'incertitude des variations futures plus éloignées du taux d'intérêt. Si l'on peut prévoir la variation future immédiate du taux d'intérêt du marché, on peut moins facilement prévoir les autres variations, qui suivront la première. Celles-ci peuvent contredire la première. Si le titre n'est pas échangé dans le futur immédiat, il est plus prudent pour l'agent économique de calculer une marge de sécurité dans ses prévisions, c'est-à-dire de ne pas s'attendre à une variation aussi forte du cours du titre que le mouvement du taux d'intérêt ne le prévoirait directement. Ceci nous fait croire que l'élasticité du prix des obligations au taux d'intérêt du marché est inférieure à l'unité, avec un biais à la hausse comme nous l'avons mentionné ci-dessus.



Ces renseignements nous permettent de particulariser la forme de la courbe  $E'E$  qui devient dans ce cas :



Rappelons que ce graphique n'est valable que dans le temps. C'est parce qu'on s'approche de la date d'échéance du titre qu'il y a un biais à la hausse : le titre devient plus certain et rapporte toujours le même taux d'intérêt.

#### IV. Prévision boursière.

##### a. Introduction

Nous allons maintenant présenter une méthode de prévision de l'indice boursier, celle de Keran.

Définissons d'abord l'optique dans laquelle cette étude est faite, en délimitant le domaine de notre prospection. Nous ne prétendons pas, en effet, résoudre un problème de l'évaluation d'un type précis d'action. Nous étudions au contraire, le comportement du marché boursier dans son ensemble.

Deux arguments justifient notre approche :

-) La prévision de l'évolution d'un titre boursier n'a pas encore atteint une exactitude suffisante, tant sur le plan théorique (1) que sur le plan pratique (2)

(1) Keenan M : Models of equity valuation : the great semi bubble",  
Journal of Finance, Proceedings May 70.

(2) Graggand Malkiel : "The Consensus and accuracy of some predictions of the growth of corporate earnings"  
Journal of Finance March 68

S'il n'est pas possible de prévoir le prix d'une action, ne peut-on prévoir le prix moyen des actions, l'évolution du marché tout entier ?

-) La diversification constitue une seconde justification de notre approche. Nous avons terminé la première partie de cette étude en développant le modèle de Sharpe, où le risque est séparé en deux catégories : le risque diversifiable et le risque non diversifiable. Le premier est celui qui est couru par la détention d'un titre particulier. Le second concerne les fluctuations du marché boursier. La diversification réduit le premier de façon appréciable. Une diversification même limitée permet d'atteindre des résultats significatifs (3,4). Par exemple, si des titres sont corrélés à un degré  $\rho=0,5$ , il suffit de trois titres pour réduire de moitié le risque diversifiable (4). Et il suffit de huit titres pour approcher du niveau du risque non diversifiable (3).

Ainsi, dans un portefeuille diversifié, revenu et risque ne sont plus directement liés à un titre particulier. Il est donc plus intéressant de prévoir le comportement du marché boursier que celui des titres qui sont échangés.

Nous supposons que l'indice Standard and Poor's 500 (5) est représentatif du comportement global du marché boursier et nous nous proposons d'examiner un modèle de prévision de cet indice.

---

(3) Evans and Archer : "Diversification and the reduction of dispersion"  
Journal of Finance, December 58.

(4) Mao J : "Essentials of portfolio diversification"  
Journal of Finance, December 70

(5) L'indice Standard and Poor's est défini comme suit :  $\text{indice} = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_0}$  (10)  
où  $P_0$  et  $Q_0$  sont le prix des titres et la quantité des années de base 1941-1943,  $P_1$  est le prix moyen de la période courante et  $Q_1$  est le volume de titres existant pendant la période courante.

En recherchant les variables susceptibles d'influencer le marché boursier, nous commencerons par nous interroger sur la place qu'occupe ce marché dans l'activité économique. Il est le lien économique où s'échangent des titres financiers de participation au financement, et subsidiairement à la gestion de sociétés industrielles, financières ou bancaires.

Il subit donc l'influence des mouvements généraux des secteurs financiers, ceux des variations de l'activité économique globale par le biais des fluctuations de l'activité industrielle et par celui du climat dans lequel celui-ci se poursuit. Les divers mouvements s'entrecoupent, s'enchaînent et s'influencent au sein de l'interdépendance générale (un exemple de présentation simultanée de toutes les interdépendances est donné dans l'article de R. Wanty) (1).

L'influence proprement financière se fait sentir à travers le mécanisme de l'offre et de la demande des divers actifs monétaires et réels, ces variations étant guidées par le principe de recherche d'un équilibre entre les divers types d'actifs vus sous l'angle du degré de liquidité et sous celui du revenu financier de chacun d'eux.

L'influence directe de l'activité économique est exercée par les mécanismes de distribution des profits par les firmes et par le besoin de financement de celles-ci. L'influence indirecte est le reflet de l'influence directe.

---

(1) R. Wanty : "Réflexions sur un modèle économétrique de formation des cours de bourse".

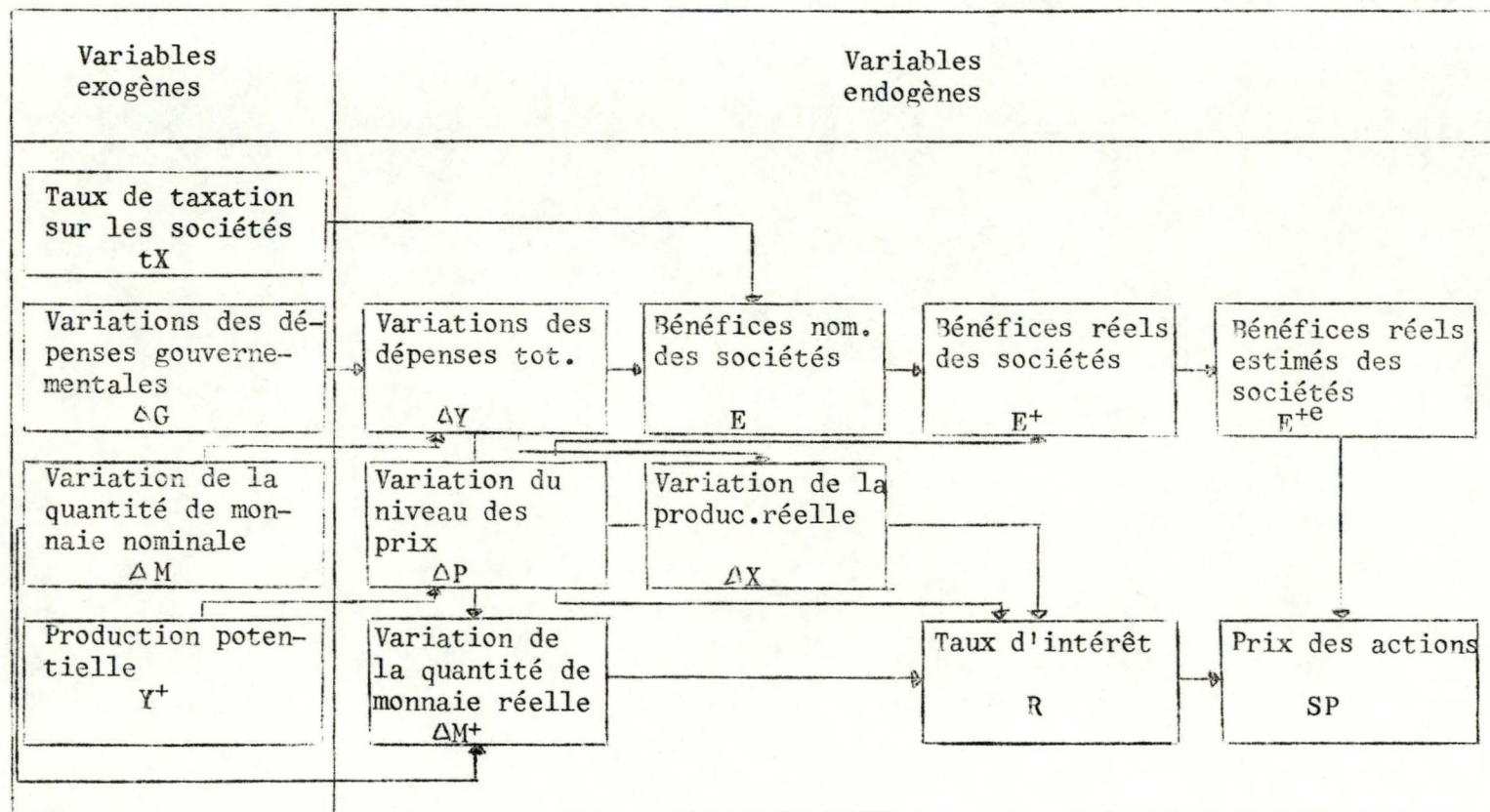
C'est le climat dans lequel a lieu l'activité économique, climat qui donne une teinte plus ou moins optimiste aux prévisions des agents économiques entrepreneurs et aux estimations des participants au marché boursier et de tous les agents économiques qui font des prévisions.

b. Le modèle de Keran.

Nous allons voir comment Keran (1) met ensemble tous ces éléments pour bâtir son modèle.

Son point de départ est le modèle économétrique d'Andersen et Carlson (2). Celui-ci permet de définir les interrelations entre le marché boursier et le reste de l'économie de la façon suivante :

- 
- (1) Keran M.W. : "Expectations, money and the stock market"  
Review of the Federal Reserve Bank of St Louis,  
January 71
- (2) Andersen and Carlson : "A monetarist model for Economic stabilization"  
Review of the Federal Reserve Bank of St Louis,  
April 1970.



Source : Keran, Review of St Louis, January 1971.

Trois variables sont indépendantes et peuvent être déterminées par la politique : la politique monétaire agit sur les variations de la quantité de monnaie nominale ( $\Delta M$ ); la politique fiscale crée les variations des dépenses gouvernementales ( $\Delta G$ ) et décide du taux de taxation des bénéfices des sociétés ( $tx$ ).

Une dernière variable exogène et non politique est la capacité de l'économie ( $Y^+$ ). Celle-ci est estimée par le "Council of Economic Advisors" qui évalue son taux de croissance. Dans cette étude, ce taux se monte à 4 % l'an.

Toutes les autres variables sont endogènes et déterminées par le modèle.

On suppose que le taux de taxation des bénéfices des sociétés est fixé pour toute la période.

Les variations de la quantité de monnaie nominale et celles des dépenses gouvernementales ( $\Delta M$  et  $\Delta G$ ) affectent le prix des actions par deux canaux : en influençant les dépenses totales ( $\Delta Y$ ) et en agissant sur le taux d'intérêt ( $R$ ) (1). Ce modèle est donc partiellement keynésien en reprenant le multiplicateur des dépenses gouvernementales et friedmanien en prenant comme autre point de départ la quantité de monnaie nominale.

---

(1) Celui-ci représenté par le taux d'intérêt à long terme qui, d'après Meiselman, est la moyenne de tous les taux.

Meiselman : "The term structure of interest rates",  
Chicago, 1963.

Les dépenses totales et le taux de taxation des bénéfices des sociétés ( $\Delta Y$  et  $tx$ ) déterminent les bénéfices nominaux des entreprises ( $E$ ) qui déflatés par un indice de prix ( $\Delta P$ ), donnent les bénéfices réels des sociétés ( $E^+$ ).

Les bénéfices réels des sociétés sont estimés ( $E^{+e}$ ) en appliquant l'hypothèse des prévisions adaptives : les estimations des agents économiques sont fortement influencées par l'expérience actuelle et d'un passé récent. Ainsi, on détermine les bénéfices réels estimés des sociétés à partir du niveau présent et passé des bénéfices réels, selon une distribution Almon (1) des poids attribués aux résultats présents et passés. D'où la formule :  $E_t^{+e} = \sum_{i=0}^n W_i E_{t-i}^+$

avec  $n$  = nombre de périodes sur lesquelles repose l'estimation de  $E_t^{+e}$

L'action  $\Delta M$  et  $\Delta G$  sur le taux d'intérêt est expliquée de la façon suivante. Les variations des dépenses totales ( $\Delta Y$ ) suite à  $\Delta M$  et  $\Delta G$ , combinées avec la capacité de l'économie ( $Y^+$ ) et les variations passées du niveau des prix, qui vont déterminer les variations courantes du niveau des prix ( $\Delta P$ ). Les variations des dépenses totales ( $\Delta Y$ ) pondérées par l'évolution des prix ( $\Delta P$ ) détermineront les variations de la production réelle ( $\Delta X$ ).

---

(1) Almon S : "The distributed lag between capital appropriations and expenditures".

Econometrica, January 1965.

Une application de cette méthode sera réalisée dans le travail de P. Gilard aux Facultés de Namur.

L'évolution courante et passée de  $\Delta X$  et  $\Delta P$  permet d'estimer la croissance globale et l'inflation attendue, qui à leur tour agiront sur le taux d'intérêt courant ( $R$ ). Celui-ci est aussi influencé par les variations de la quantité de monnaie réelle ( $\Delta M^+$ ).

Ainsi sont déterminés le taux d'intérêt ( $R$ ) et l'estimation des bénéfices réels des sociétés ( $E^{+e}$ ). Les deux grandeurs influenceront le prix des actions ( $SP$ ). En effet, si nous définissons le prix des actions comme la somme, sur un horizon infini des rendements attendus escomptés à leur valeur actuelle ( $\Gamma$ ) soit :  $SP_t = \sum_{i=1}^{\infty} E^e_{t+i} (1 + R)^{-i}$ ,

nous voyons que ce prix est influencé positivement par les bénéfices escomptés des sociétés et négativement par le taux d'intérêt.

La formule employée pour estimer le prix des actions est la suivante :

$$SP_t = a + \sum_{i=0}^{n1} b w_{1i} \Delta M^+_{t-i} + \sum_{i=0}^{n2} c w_{2i} \Delta X_{t-i} + \sum_{i=0}^{n3} d w_{3i} \Delta P_{t-i} + \sum_{i=0}^{n4} e w_{4i} E^{+e}_{t-i} \quad (1)$$

Le taux d'intérêt a été remplacé par les facteurs qui le déterminent, c'est-à-dire les variations de la quantité de monnaie réelle ( $\Delta M^+$ ), les variations de la production réelle ( $\Delta X$ ) et les variations du niveau des prix ( $\Delta P$ ).

---

(1) En fait, Keran suppose que le prix d'une action est fonction des dividendes et gains en capital attendus, escomptés au taux d'intérêt courant. Pour le marché, considéré globalement, on peut supposer que l'habileté de l'entrepreneur est stable.

Alors le gain en capital attendu peut être estimé par les bénéfices réservés des sociétés; ce qui est l'autre composante des bénéfices totaux, après répartition des dividendes. Les bénéfices représentent donc l'ensemble des revenus attendus.



A partir de ce modèle, Keran procède à des simulations de l'indice boursier. Deux types de simulation sont utilisés : la simulation "ex post" est réalisée en introduisant les valeurs effectives des variables politiques ( $\Delta M$ ,  $\Delta G$  et  $t_x$ ) et en calculant les valeurs de toutes les autres variables au moyen des coefficients estimés sur la période d'ajustement. Période d'ajustement et période de simulation coïncident. Dans la simulation "ex ante", les variables politiques sont posées, et la période de simulation suit celle où a lieu l'ajustement des coefficients du modèle.

Les coefficients de la simulation ex post sont calculés sur la période allant du premier trimestre 1956 au second trimestre 1970. La comparaison des valeurs effectives avec les valeurs calculées par la simulation de l'indice des cours boursiers permet de juger de l'efficacité du modèle.

Une première simulation porte sur la période allant du troisième trimestre 1961 au quatrième trimestre 1965 (III 61 - IV 65). Les mouvements du marché sont fort bien suivis, mais toutes valeurs sont exagérées. La seconde simulation couvre la période allant de I 66 à I 70.

Le creux de 1966 et la reprise de 1967 sont bien repris, mais le sommet de 1968 est escamoté. Le déclin de 69-début 70 est enregistré de façon modérée.

Pour la simulation ex post, 4 essais sont faits : de I 67 à I 70, de I 68 à I 70, de I 69 à I 70 et de I 70 à IV 70.

La première simulation (I 67 à I 70) enregistre la hausse de 67, le léger déclin du début 68 et l'accroissement du reste de l'année 68, mais continue à la hausse de 69 à 70. Ainsi la valeur de la simulation est fort aléatoire pour plus de deux ans après son début.

La seconde simulation (I 68 à I 70) enregistre un léger recul à partir de la fin 68. La troisième (I 69 à I 70) marque plus fort ce déclin, et la quatrième (I 70 à IV 70) simule raisonnablement le début et la fin, mais néglige le creux du milieu de l'année.

On peut souligner la bonne performance de ces estimations, alors que les données de base pour le calcul se comportèrent de façon beaucoup plus stable que le fit le marché boursier.

Le modèle de Kéran est une réponse à l'attente d'une possibilité d'estimer le comportement du marché boursier dans son ensemble. Il complète la démarche suivie dans tout notre travail.

On calcule le portefeuille qui, par sa diversification, réduit le risque diversifiable à un niveau minimum, mesuré par la déviation-standard autour du revenu du marché, calculé à partir de l'évolution de l'indice des cours boursiers. Cette évolution peut être estimée à partir du modèle que nous venons de décrire, avec une déviation-standard autour de cette prévision. Celle-ci exprime le risque non diversifiable du portefeuille.

Ainsi revenu et risque du portefeuille sont connus. On approprie ce rapport avec le revenu et le risque des obligations et avec la monnaie pour obtenir, par l'intermédiaire des courbes d'opportunité et d'indifférence, un niveau de prêt ou d'emprunt permettant de maximiser l'utilité attendue du revenu du portefeuille global.

### c. Cours des actions et inflation.

Un résultat intéressant du modèle de Kéran est la relation qu'il définit entre le prix des actions et le taux d'inflation. Le calcul du prix des actions dans la formule vue précédemment était fait en termes nominaux.

$$SP_t = \sum_{i=1}^{\infty} E^e_{t+i} \frac{1}{(1+R)^i}$$

Ceci nous donne, si l'on introduit l'estimation d'une variation des prix ( $\Delta P^e$ )

$$SP_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E^{+e}_{t+i} (1 + \Delta P^e)^i}{(1 + R^+) (1 + \Delta P^e)^i}$$

Les signes ( + ) indiquent des valeurs réelles.

Si l'inflation estimée est identique pour les bénéfices réels et pour le taux d'intérêt réel, elle est sans effet sur le prix des actions. Ceci est le cas à l'équilibre à long terme, lorsque l'inflation courante et l'inflation estimée sont égales, car toutes les unités économiques ont ajusté leur comportement.

Moins le cas d'équilibre à long terme, l'écart entre le numérateur et le dénominateur peut exister en période d'inflation. En effet, il est possible que l'investisseur moyen sur le marché des obligations évalue les estimations d'inflation de façon différente de l'investisseur moyen sur la bourse, à cause de la différence d'horizon d'investissement qui sépare ces agents économiques. De plus, même si leurs estimations sont identiques, il est possible que l'inflation ait un effet systématique sur l'écart entre les taux d'intérêt réels et nominaux estimés et un autre effet systématique sur l'écart entre les bénéfices réels et nominaux estimés des sociétés. Ce serait le cas si l'inflation entraînait des estimations d'accroissement des coûts supérieures à l'accroissement de prix.

Constatant que les estimations d'inflation ont un effet négatif sur le prix des actions, Keran conclut que son hypothèse est vérifiée. C'est contraire à la croyance habituelle. Celle-ci confond l'estimation d'inflation et l'inflation effective.

S'il y a inflation mais si on s'attend à ce qu'elle soit passagère, les bénéfices observés peuvent enregistrer une hausse qui tende à accroître les bénéfices estimés et le prix des actions. Mais si cette inflation se prolonge, les estimations de bénéfices réels ne seront plus influencées de façon significative, car tous les prix seront ajustés. L'effet des taux d'intérêt se fera sentir par contre. Quand l'inflation se prolonge, les centres de décision les plus importants s'attendent à ce qu'elle continue, et le prix des actions décroît.

Nous croyons devoir nuancer cette opinion en attirant l'attention sur le degré de la tendance à l'inflation. Il faut distinguer un seuil critique du taux d'inflation. En dessous de celui-ci, les taux d'intérêt ne manifestent pas de brusques variations. Le prix des actions est alors dominé par l'effet positif des bénéfices réels des sociétés. Au-delà de ce seuil, les préoccupations de variation de prix prennent une place importante dans l'estimation des taux d'intérêt nominaux. De plus, il est à craindre que des hausses de coûts salariaux et autres ne diminuent ou annulent la plus-value de l'inflation.

Si nous examinons les prévisions du prix des actions faites au milieu d'une période d'expansion prolongée, comme celle de 1963 à 1965 nous constatons que la prévision de hausse du cours boursier est basée sur celle d'équilibre de la croissance économique. Les taux d'intérêt restèrent fort stables, tandis que les bénéfices des sociétés croissaient. Le niveau des prix n'était pourtant pas constant, mais marquait une légère inflation. On remarque qu'à cette période le cours boursier se réévalua constamment.

Le modèle de Keran est donc un instrument fort utile pour prévoir les mouvements du marché boursier dans un avenir assez rapproché.

Nous aurions voulu donner à la prévision boursière une variable reflétant le climat dans lequel les estimations sont formulées, en plus de l'estimation des variations de la production et des bénéfices réels des sociétés. Pour que ce fût possible, il aurait fallu que la variable supplémentaire, l'indice d'attitude des agents économiques, fut suffisamment différente des autres variables du modèle de Keran. Nous avons recalculé le modèle en ajoutant cet indice, mais l'estimation fut entachée d'une telle multicollinéarité qu'un bon ajustement devint impossible.

La seule conclusion qui découle de cette tentative est que l'indice d'attitude des consommateurs publié par l'Université de Michigan reflète très bien l'évolution économique, trop bien même puisqu'il n'ajoute rien au modèle de Keran.

## V. Conclusions de la seconde partie.

Cette partie de notre travail fut consacrée à la présentation de quelques indications utiles pour passer d'une optique statique à une optique dynamique dans la gestion de portefeuille.

Nous avons souligné l'importance de la monnaie dans un portefeuille dynamique : elle n'intervient plus seulement dans un but de diversification mais aussi pour permettre les transactions d'investissement. Une autre préoccupation de l'investisseur sera l'étalement dans le temps du revenu des actifs, sous forme de rendement et de liquidation des actifs. La substituabilité entre titres est un facteur primordial. Existe-t-il ou non un marché actif des titres qui composent le portefeuille d'un agent économique ? Cet élément, ignoré dans l'optique statique, ne peut être laissé de côté dans une perspective dynamique.

Une application des techniques développées dans la première partie de notre étude nous permet de représenter graphiquement la modification d'une courbe d'opportunité lorsqu'intervient une prévision de variation du cours d'une obligation.

Le problème des prévisions est fondamental dans la gestion dynamique d'un portefeuille. S'il est encore assez facile de prévoir le cours des obligations, en fonction des variations du taux d'intérêt par exemple, la prévision boursière est beaucoup plus délicate et reste encore à la frontière des connaissances.

Plusieurs analystes essaient d'adapter les méthodes mathématiques récentes - processus Markoviens et autres - pour prévoir les mouvements de la bourse, mais sans grand succès.

Une des principales difficultés résulte dans le fait que l'indice boursier précède l'activité économique. Il est très difficile de prévoir une variable prévisionnelle.

Le modèle de Keran est, à notre connaissance, une des meilleures tentatives de prévision de l'indice boursier. Il apporte, de plus, un démenti à l'opinion courante selon laquelle les actions sont parfaitement à l'abri de l'inflation. A cause des adaptations des taux d'intérêt qui augmentent pour protéger les créanciers de l'inflation, les actions peuvent subir une dépréciation due à la hausse des prix.

La prévision boursière est ardue et mérite une recherche plus approfondie. Une étude de l'évolution boursière en relation avec celle des autres actifs financiers nous semble souhaitable.

### Résumé et Conclusions.

---

Nous avons voulu, dans ce travail, présenter un modèle théorique de gestion de portefeuille permettant d'aboutir à des règles applicables pour un agent économique investisseur d'une part, d'autre part, de mieux comprendre les mécanismes amenant à la formation des prix des actifs, à leur création et distribution au sein du portefeuille de la nation.

Un chapitre préliminaire a introduit au marché boursier et à la psychologie des investisseurs. La bourse est un instrument particulièrement utile dans la formation du capital d'une société. En contribuant à une meilleure connaissance du risque assumé par les agents économiques investissant en titres à risque, la théorie exposée ici est de nature à favoriser le placement dans ces actifs et une meilleure affectation de l'épargne de la nation.

L'investissement est une renonciation temporaire à la liquidité dans le but de créer une source de revenus futurs. Nous avons donné à la liquidité une définition appropriée à cette problématique.

Pour conclure le chapitre préliminaire, nous avons démontré comment le modèle de gestion de portefeuille s'insère dans la recherche actuelle en matière financière.

Le modèle statique présenté dans une première partie est fondé sur deux critères : le revenu financier et le risque inhérent à l'investissement dans un portefeuille. Ces deux notions sont mesurées respectivement par l'espérance mathématique du revenu et par l'écart-type autour de ce revenu.



On peut ainsi déterminer une courbe d'opportunité d'un portefeuille et choisir la combinaison d'actifs la plus intéressante. La comparaison de cette courbe d'opportunité avec la courbe d'indifférence d'un agent économique permet de fixer un volume d'investissement maximisant l'utilité de cet investissement.

A partir de là, il est possible de calculer la courbe d'opportunité d'un portefeuille comprenant à la fois des actifs à risque et un montant investi en monnaie sous forme de prêt ou d'emprunt. Le théorème de séparation, sous une première forme, se limite à l'hypothèse d'égalité des taux d'intérêt de prêt et d'emprunt. Il établit, dans ce cas, que le choix des actifs à risque est indépendant du volume du portefeuille à risque et donc de l'attitude de l'investisseur envers le risque et le revenu financier.

La théorie a démontré à cet égard comment la diversification au sein d'un portefeuille d'actifs à risque réduit le risque attaché à chaque titre particulier et à un portefeuille dans son ensemble.

Reprenant ensuite le théorème de séparation, nous avons démontré que sa validité est limitée dans le cas de différence entre le taux d'intérêt de prêt et celui d'emprunt et qu'il ne vaut qu'après détermination d'une position prêteuse ou emprunteuse.

La réalisation d'un équilibre de marché a plusieurs conséquences : Elle entraîne l'égalisation du revenu financier des titres le long d'une droite d'opportunité de marché. Nous estimons avoir démontré que si le taux d'intérêt de prêt est inférieur au taux d'intérêt d'emprunt, la position emprunteuse devient de moins en moins justifiée à cause de l'aplatissement de la courbe d'opportunité.

Il est possible de mesurer l'apport d'un actif à risque dans un portefeuille efficient, à l'équilibre du marché. La prime de risque en est l'expression mathématique. Elle synthétise l'apport d'un titre dans le revenu et le risque d'un portefeuille. Mais reposant sur une hypothèse non vérifiée, l'égalité des taux d'intérêt de prêt et d'emprunt, elle ne permet pas d'analyser la réalité. En revanche, le premier instrument que nous avons développé, le rapport entre le revenu et le risque, nous paraît très utile pour expliquer la réalité.

Après cette présentation du modèle statique de gestion de portefeuille, nous avons fourni, dans la seconde partie de ce travail, quelques indications qui nous semblent utiles à la gestion dynamique d'un portefeuille. Dès le moment où le portefeuille n'est plus considéré comme donné mais se prête à de fréquentes révisions, la détention de monnaie se justifie plus encore qu'au point de vue statique car la diversification à travers le temps devient prépondérante. La monnaie finance alors un portefeuille de transactions d'investissement.

Nous avons montré qu'il était possible d'incorporer des prévisions de variation du cours des obligations à l'analyse graphique de la courbe d'opportunité.

Enfin, nous avons abordé le problème de la prévision boursière. Celle-ci dépasse l'état de projet avec le modèle de Keran. Ce modèle apporte de plus des indications sur l'effet de l'inflation sur la valeur des actions : Celles-ci ne sont pas à l'abri de la dépréciation monétaire.

o o o o o  
o o o o

Que penser du modèle et des autres éléments de gestion de portefeuille qui ont été exposés dans ce travail ?

Tout d'abord, il apporte des indications utiles à l'investisseur et susceptibles d'améliorer l'affectation des ressources en capital de la nation.

Il montre, par exemple, que les titres entraînant un risque élevé ne doivent pas être évités a priori. Il peut être avantageux de les détenir si leur corrélation avec les autres actifs du portefeuille est très faible. Ceci résulte de la notion employée pour mesurer le risque, l'écart-type. Celui-ci reprend à la fois les variations inattendues à la hausse et à la baisse. Ce ne serait plus le cas si l'on utilisait la semi-variance comme mesure du risque. Il est donc possible d'affiner l'analyse de portefeuille.

Un autre résultat à retenir est la conséquence du théorème de séparation, même après la limitation que nous avons apportée au cas où taux d'intérêt de prêt et d'emprunt divergent. En effet, dans ce cas, dès que l'on a choisi une position de prêt ou d'emprunt, la répartition au sein du portefeuille d'actifs à risque est fixée. Le volume de ce portefeuille à risque au sein du portefeuille global reste indépendant et est déterminé librement par la suite, en fonction de l'attitude de l'investisseur envers le risque et le revenu, c'est-à-dire en fonction de la forme de ses courbes d'utilité. Les éléments subjectifs - courbes d'utilité - et les éléments objectifs - revenu et risque des actifs - sont clairement séparés. Ceci donne une plus grande clarté au schéma de raisonnement de l'investisseur.

Une troisième conclusion qui mérite d'être relevée est la présentation du processus par lequel le marché des actifs se liquide. Elle montre pourquoi et comment tous les titres offerts sur le marché sont demandés : le prix des actifs variera de façon à amener le revenu de tous les titres sur une même droite d'opportunité. Si les taux d'intérêt de prêt et d'emprunt sont différents, le marché se subdivise en deux parties. Chacune a son terme d'échange propre entre le revenu à risque et le revenu sans risque. L'aplatissement de la courbe d'opportunité du marché qui permet la liquidation de celui-ci a des effets asymétriques sur les deux parties du marché : il favorise le prêt sans risque et défavorise l'emprunt sans risque.

Une quatrième conclusion est relative à la méthode. Les récents développements de cette théorie ont voulu simplifier la comparaison entre titres en limitant à un seul instrument la mesure de la performance des portefeuilles. Mais, fondée sur une hypothèse trop restrictive - un seul taux d'intérêt sans risque -, cette méthode ne donne pas de résultats satisfaisants. Il faudrait améliorer cette mesure. En attendant, il est souhaitable de continuer à utiliser le double critère de Tobin - Markowitz : le revenu et le risque d'un portefeuille.

L'utilité de ce mémoire ne résulte pas seulement dans l'analyse théorique des mécanismes de gestion de portefeuille. Il nous a semblé aussi utile de faire une synthèse des résultats principaux de la recherche empirique dans cette matière.

Nous avons relevé un modèle intéressant de prévision boursière, celui de Keran. Celui-ci exprime de manière très constructive le mécanisme par lequel la hausse des prix atteint les actions : les créanciers veulent se prémunir contre l'inflation et incorporent dans le taux d'intérêt auquel ils accordent des prêts une plus-value d'inflation. De même, les investisseurs escompteront les bénéfices des sociétés à un taux d'intérêt plus élevé. Cet accroissement des taux peut être supérieur à la hausse des bénéfices des entreprises en période d'inflation. L'écart entre les deux peut causer la baisse du prix des actions.

Telles étaient les principales conclusions à tirer de ce travail.

L'analyse mérite d'être poursuivie dans cette direction. Une étude simultanée de l'évolution de tous les actifs financiers serait fort utile. Les interactions entre les phénomènes monétaires et réels et leurs répercussions sur les marchés des capitaux sont encore mal connues. Le domaine de la prévision boursière, la formation des prix des actions, l'influence de la politique monétaire sur la bourse, toutes ces questions n'ont pas encore reçu une réponse vraiment satisfaisante. Ce sont là quelques orientations pour une recherche ultérieure.

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- - - - -

I. Ouvrages généraux.

- Baumol W.J., The Stock Market and Economic Efficiency  
Millar Lectures n° 6 1965.  
Fordham University Press, New York.
- Berger P., Problèmes de l'Ajustement de l'Epargne aux Investissements  
Banque, Décembre 1968.
- Berger P., L'Equilibre Monétaire dans l'Economie  
Banque, Janvier 1969.
- Bibliothèque O.C.D.E., Bibliographie spéciale Analytique : Le Marché  
des Capitaux  
O.C.D.E. Paris, 1969.
- Brifford R., Les investisseurs Institutionnels et la Marché Financier  
aux U.S.A.  
Banque, Avril 1970.
- Brill D.H., La Réglementation du Marché Financier et son Rôle dans le  
Processus Epargne-Investissement  
Banque, Mars 1969.
- Claassen E., Monnaie, Revenu National et Prix  
Paris, Dunod 1968.
- Conard , An Introduction to the Theory of Interest Rates  
University of California Press, Berkeley 1959.
- Etudes O.C.D.E., Etudes sur les Marchés des Capitaux  
Paris, 1967.
- Fournier H., Liquidité de l'Economie et Liquidité des Banques  
Banque, Novembre-Décembre 1967.
- Friedman M., A Theoretical Framework for Monetary Analysis  
Journal of Political Economy, Mars 1970.
- Garelli F., Pour un Marché Européen des Capitaux  
Banque, août 1967.
- Garvy G., Vitesse de circulation de la Monnaie et Analyse Monétaire.  
Banque, Juillet 1970.
- Georges-Picot J., Le Marché Financier Européen  
Banque, Avril 1970.

- Gibson W.E., Price Expectations Effects on Interest Rates  
Journal of Finance, Mars 1970.
- Hansen , A guide to Keynes  
Mac-Graw Hill, New York 1953.
- Hester D. and Tobin J., Financial Markets and Economic Activity  
Cowles Foundation  
John Wiley and Sons, New York 1967.
- Lamfalussy A., Les Marchés Financiers en Europe  
Presses universitaires de France 1968.
- Lelart M., Les Intermédiaires Financiers et le Jeu des Mécanismes  
Monétaires  
Banque, Avril 1965.
- Lelièvre B., Le Marché des Capitaux  
Banque, Janvier 1968.
- Modigliani , The Monetary Mechanism and its Interaction with Real  
Phenomena  
Review of Economics and Statistics, Supplément  
Février 1963.
- Murray R., The Market for Equities  
Journal of Finance, Mai 1964.
- N.B.E.R., The Market for Corporate Securities  
Journal of Finance, Supplément Mai 1964.
- Patinkin D., La Théorie Quantitative de la Monnaie  
Economie Appliquée, 1956.
- Pella G., Comportement des Epargnants et Marché des Capitaux  
Banque, Décembre 1965.
- Rapport Radcliffe, Committee on the Working of the Monetary System  
Londres 1959.
- Robinson R., Money and Capital Markets  
Mac-Graw Hill, New York 1964.
- Ségré (Rapport), Marché Européen des Capitaux : Conditions et Modalités  
de son Développement  
Banque, Octobre 1967.
- Smith W., The Maturity Structure of Interest Rates  
in "Money, Financial Institutions and the Economy"  
par Crutchfield

- Tew B., Monetary Theory  
Routledge, London 1969.
- Tew B., Wealth and Income  
London 1950.
- Von Neumann and Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior  
Princeton University Press, 1953.
- Wolf M., Monetary and Fiscal Policy  
Merril Book, Columbus Ohio.

+  
++

## II. Ouvrages concernant la théorie de gestion de portefeuille.

- Arrow K.J., The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing  
Review of Economic Studies, Avril 1964.
  - Bolton R.H., Money and Investment Profits  
Dow-Jones-Irwin, 1967.
  - Claassen E., Analyse des Liquidités et Théorie du Portefeuille  
Presses Universitaires de France, Paris 1970.
  - Diamond P.A., The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty  
American Economic Review, Septembre 1967.
  - Duesenberry J., The Portfolio Approach to the Demand for Money and Other Assets  
Review of Economics and Statistics, Supplément  
Février 1963.
- Fama E.F., Risk, Return and Equilibrium : Some Clarifying Comment  
Journal of Finance, Mars 1968.
- Fama E.F., Multiperiod Consumption-Investment Decisions  
American Economic Review, Mars 1970.
  - Fried J., Forecasting and Probability Distributions for Models of Portfolio Selection  
Journal of Finance, Juin 1970.
  - Friend I. and Blume M., Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty  
American Economic Review, Septembre 1970.



- Gaumnitz J.E., Appraising Performance of Investment Portfolio  
Journal of Finance, Juin 1970.
- Hahn , Savings and Uncertainty  
Review of Economic Studies, Janvier 1970.
- Hamada R.S., Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation  
Finance  
Journal of Finance, Mars 1969.
- Hester D. and Tobin J., Studies of Portfolio Behavior  
Cowles Foundation  
John Wiley and Sons, New York 1967.
- Hirshleifer J., On the Theory of Optimal Investment Decision  
Journal of Political Economy, Août 1958.
- Hirshleifer J., Investment Decision Under Certainty, Choice Theoretic  
Approaches  
Quarterly Journal of Economics, November 1965.
- Lintner J., The valuation of Risk Assets and the Selection of Risky  
Investment in Stock Portfolio and Capital Budgets  
Review of Economics and Statistics, Février 1965.
- Lintner J., Security Prices, Risk and Diversification  
Journal of Finance, Décembre 1965.
- Mao J.C., Essentials of Portfolio Diversification Strategy  
Journal of Finance, Décembre 1970.
- Markowitz , Portfolio Selection  
New York, 1959.
- Motley B., Inflation and Common Stock Values : Comment  
Journal of Finance, Juin 1969.
- Nichols D., Note on Inflation and Value of Common Stocks  
Journal of Finance, Septembre 1968.
- Renshaw E., Portfolio Balance Models in Perspective : Some General-  
isations that can be Derived from the Two-Asset Case.  
Journal of Financial and Quantitative Analysis.
- Sharpe W., A Simplified Model for Portfolio Analysis  
Management Science, Janvier 1963.
- Sharpe W., Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium  
under Conditions of Risk  
Journal of Finance, Septembre 1964.

- Sprinkel B., Money and Stock Prices  
Richard Irwin, Homewood Illinois, 1964.
- Stiglitz J.E., Consumption Oriented Theory of the Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates  
Review of Economic Studies, Février 1970.
- Tobin J., Liquidity Preference as Behavior Towards Risk  
Review of Economic Studies, Février 1958.
- Tobin J., Money, Capital and Other Stores of Value  
American Economic Review, Mai 1961.
- Tobin J., A Dynamic Aggregative Model  
Journal of Political Economy, Avril 1965.
- Tobin J., The Theory of Portfolio Selection  
in " The Theory of Interest Rates "  
Hann and Brechling  
Macmillan, Londres 1966.
- Tobin J. Uncertainty, Saving and Liquidity  
in " Notes on Optimal Monetary Growth "  
Journal of Political Economy, Août 1968.
- Wanty R., Reflexion sur un Modèle Econométrique de Formation  
des Cours de Bourse  
Annales de Sciences Economiques Appliquées, Mars 1967.

+  
+ +

### III. Etudes empiriques.

- Andersen and Carlson , A Monetarist Model for Economic Stabilization  
Review of the Federal Reserve Bank of St Louis  
Avril 1970.
  - Atkinson S.N., Financial Flows in recent Business Cycles  
Journal of Finance, Mars 1965.
- Cagan P., Changes in the Cyclical Behavior of Interest Rates  
Review of Economics and Statistics, Août 1966.
- Cowles and Jones , A Revision of Previous Conclusions Regarding Stock  
Prices Behavior  
Econometrica, Octobre 1960.

- Cragg and Malkiel , The Concensus and Accuracy of Some Predictions of the Growth of Corporate Earnings  
Journal of Finance, Mars 1968.
- Dryden M.M., Share Price Movements : A Markovian Approach  
Journal of Finance, Mars 1969.
- Evans and Archer , Diversification and the Reduction of Dispersion : an Empirical Analysis  
Journal of Finance, Décembre 1958.
- Fabra P., La Baisse des Taux d'Intérêt est due à la Baisse des Profits  
Le Monde, 16 février 1971.
- Farrel , On the Structure of Capital Market  
Economic Journal, Décembre 1962.
- Friend and Adams , The Predictive Ability of Consumers Attitudes Stock Prices and non-attitudinal Variables  
Journal of the American Statistical Association  
Décembre 1964.
- Gerard K.N., Forecasting the Stock Market  
in " How Business Economists Forecast " Bulter  
Prentice-Hall 1966.
- Guthmann and Bakay , The Market Impact of the Sale of Large Blocks of Stocks  
Journal of Finance, Décembre 1965.
- Jensen M.C., The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964.  
Journal of Finance, Mai 1968.
- Keenan M., Models of Equity Valuation : The Great Sern Bubble  
Journal of Finance, Papers and Proceedings, May 1970.
- Keran M.W., Expectations, Money and the Stock Market  
Review of the Federal Reserve Bank of St Louis, Janvier 1971.
- Mellon W., On the Use of Time Series for Financial Prediction  
Journal of Finance, Mai 1964.
- Pattison J., Stock Market Prices and Economic Activity in Canada (1956-1968)  
Unpublished Paper, London School of Economics 1970.
- Rosenfeld F., La prévision Economique dans l'analyse des Valeurs Mobilières  
Annales des Sciences Economiques Appliquées, Juillet 1967.

- Sharpe W., Risk Aversion in the Stock Market : Some Empirical Evidence  
Journal of Finance, Septembre 1965.
- Weintraub R., On Speculative Prices and Random Walk  
Journal of Finance, Mars 1963.
- Westerfield , A Behavioral Approach to the Investment-Management  
decision and to the Securities Market  
Dissertation completed at Los Angeles 1968.
- Young and Marshall , Controlling Shareholders Servicing Costs  
Harvard Business Review, Janvier 1971.