THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sur la programmation quadratique non convexe

Charlier, Francine

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

Sur la programmation quadratique non convexe.

Algorithme de minimisation locale de A. Majthay.

Algorithme de minimisation globale de K. Ritter.

Charlier Francine

Je remercie Monsieur Fichefet pour sa collaboration à la mise au point de ce mémoire. Je remercie également tous les professeurs et assistants qui, au cours de mes études, m'ont apportés les connaissances nécessaires.

Francine Charlier.

Charlier

Introduction :

Le but de ce travail est d'étudier la possibilité d'obtenir une solution au problème de minimisation d'une fonction quadratique quelconque sous contraintes linéaires.

La littérature traite surtout du cas où la forme quadratique est convexe. Le problème général est beaucoup plus complexe. La méthode de Ritter pour obtenir une solution globale au problème de minimisation quadratique générale sous contraintes linéaires est la seule méthode rigoureuse connue. [A]

Dans le chapitre I, nous rappellerons quelques notions et propriétés à propos de la convexité et des formes quadratiques. Nous donnerons un théorème important [B] sur la convexité d'une forme quadratique sur un ensemble convexe. Nous rappellerons les conditions de Kuhn et Tucker et introduirons le problème de Ritter.

Dans la première partie du chapitre II, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour un minimum local suivant un théorème de Majthay. [E]

Dans la seconde partie, nous dégagerons le théorème de caractérisation des points stationnaires de Ritter [G] qui donne en particulier une condition nécessaire et suffisante de minimum local. Nous donnerons également une condition suffisante de minimum global.

L'algorithme que nous allons étudier comprend trois phases.

Dans une première phase, on recherche une solution réalisable par une méthode semblable à celle du simplexe. Elle n'est

pas vue explicitement dans ce travail.
La seconde phase permet de trouver un minimum local au programme quadratique ou de voir si la fonction objective est non bornée inférieurement.
Il existe plusieurs algorithmes à cet effet, par exemple celui donné par Beale [1]. Celui de Majthay étudié au chapitre III est fort semblable à celui de Ritter.
La troisième phase consiste alors à trouver un minimum global du problème ou à constater que la fonction objective est non bornée inférieurement.
La première partie du chapitre III donnera quelques théorèmes justifiant la méthode employée dans l'algorithme de minimisation locale. Car étant donné la difficulté de réaliser les conditions imposées par le théorème d'existence du minimum local, nous relâcherons certaines contraintes, et nous rechercherons la solution du problème ainsi restreint. Ensuite, en changeant la contrainte de capacité, on se rapprochera petit à petit du problème initial.
Nous démontrerons que cet algorithme se termine en un nombre fini d'étapes.
Au chapitre IV, nous donnerons la troisième phase de l'algorithme de Ritter pour trouver le minimum global étant donné le minimum local trouvé précédemment.
La méthode employée consiste à trouver un plan coupant qui exclut le minimum local trouvé, tout en conservant le minimum global.
Ce qui revient à ajouter une nouvelle contrainte de capacité $e'x \geq \tau$ où τ est un scalaire à déterminer.

Lorsqu'on a le nouveau problème, on recherche un minimum local de ce problème et on recommence le processus jusqu'à obtention du minimum global.
Chacune des trois phases se termine en un nombre fini d'étapes.
Ritter a démontré que lorsque l'ensemble des contraintes X est un ensemble borné, l'algorithme ne peut cycler à travers les trois phases, qu'un nombre fini de fois.
Dans ce travail, l'algorithme pour trouver un minimum local a été programmé, le listing et l'organigramme se trouvent au chapitre III, ainsi que deux exemples numériques.
Le problème traité dans le second exemple est continué en fin de chapitre IV comme exemple de celui-ci.

Du point de vue pratique, les pages seront numérotées indépendamment des chapitres ; les numérotations des formules seront propres à un chapitre donné.
Les théorèmes et corollaires seront numérotés indépendamment des autres formules et porteront un premier numéro en chiffre romain reprenant celui du chapitre et un second en chiffre arabe donnant leur place dans ce chapitre.
Les appendices relatives à un chapitre donné prendront place directement après celui-ci.
Les références seront indiquées par une lettre entre crochet renvoyant à la bibliographie.

Sur la programmation quadratique non convexe:

Chapitre I :

Définitions et concepts mathématiques .

Dans ce chapitre, nous verrons quelques définitions et concepts de base utilisés en programmation quadratique .

I : Formes définies et formes quadratiques .

On appelle forme quadratique homogène $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n variables scalaires $x_1, \dots, x_n$; une expression de la forme suivante :

$$(1)\quad Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \dots + 2c_{1n}x_1x_n$$
$$+ c_{22}x_2^2 + 2c_{23}x_2x_3 + \dots + 2c_{2n}x_2x_n$$
$$+ \dots$$
$$+ c_{nn}x_n^2$$

Nous supposerons les coefficients c_{ij} et les variables x_j réels.

La forme quadratique peut encore s'écrire, en procédant à une symétrisation des coéfficients (en posant $c_{ij} = c_{ji}$) :

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n})x_1$$
$$+ (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n})x_2$$
$$+ \dots$$
$$+ (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn})x_n$$

Si nous groupons les coefficients c_{ij} dans une matrice $C(n\times n)$ symétrique et les variables x_i dans un vecteur $x\ (n\times 1)$, nous obtenons la forme matricielle de la forme quadratique :

$Q(x) = x'Cx$ où x' est le vecteur ligne, transposée de x.

Inversément, à chaque matrice réelle symétrique C, correspond une forme quadratique de type (1).

Dans ce qui suit, la matrice C est supposée réelle .

La matrice symétrique C est <u>semi-définie positive</u> si et seulement si pour tout vecteur x $(n \times 1)$, $x'Cx \geq 0$

elle est <u>semi-définie négative</u> si et seulement si pour tout vecteur x $(n \times 1)$, $x'Cx \leq 0$

La matrice symétrique C est <u>définie positive</u> si et seulement si pour tout vecteur x $(n \times 1)$ non nul, $x'Cx > 0$

elle est <u>définie négative</u> si et seulement si pour tout vecteur x $(n \times 1)$ non nul, $x'Cx < 0$

La forme quadratique $Q(x) = x'Cx$ est dite <u>définie</u> si et seulement si la matrice C est définie.

Voici quelques propriétés des matrices définies :

I.1. Si une matrice symétrique est (semi) définie, alors toute sous matrice symétrique obtenue en éliminant des lignes et colonnes de mêmes indices de la matrice initiale est (semi) définie.

Pour le voir, il suffit de choisir un vecteur x où les composantes correspondant aux lignes et colonnes supprimées sont nulles et les composantes restantes sont quelconques.

En particulier, les éléments de la diagonale principale de la matrice symétrique (semi) définie positive sont positifs (non négatifs)

I.2. Si C est semi-définie positive, alors $Cx = 0$ pour tous les x tels que $x'Cx = 0$

Pour tout y $(n \times 1)$, pour un réel λ quelconque, et pour x tel que $x'Cx = 0$, on a :

$$0 \leq (y + \lambda x)' C (y + \lambda x) \quad \text{(car } C \text{ est semi-définie positive)}$$
$$= y'Cy + 2\lambda(y'Cx) + \lambda^2(x'Cx) \quad \text{(car } C \text{ est symétrique)}$$
$$= y'Cy + 2\lambda(y'Cx) \quad \text{(car } x'Cx = 0 \text{ par hypothèse)}$$

ceci est vérifié pour des valeurs quelconques de λ, donc le coefficient de λ doit être nul; il en résulte que

$$y'Cx = 0 \text{ pour tout vecteur } y, \text{ donc } Cx = 0$$

I. 3. . Une matrice définie positive C est non singulière et
. Une matrice semi-définie positive, non singulière est définie positive.

. Si C était singulière, le système $Cx = 0$ posséderait des solutions $x \neq 0$ pour lesquelles $x'Cx = 0$, ce qui contredirait le fait que C est définie positive.

. Si C est non singulière, le système $Cx = 0$ admet la seule solution $x = 0$. IL résulte alors de la propriété 2 que seul $x = 0$ vérifie $x'Cx = 0$, ce qui signifie que $x'Cx > 0$ pour $x \neq 0$ et que C est définie positive.

I. 4. . Si C est semi-définie positive, et si A est une matrice réelle quelconque $(n \times m)$, la matrice $A'CA$ $(m \times m)$ est semi-définie positive.
. Si C est définie positive et si A est de rang $r = m$, $A'CA$ est aussi définie positive.

On sait que pour tout y, $y'Cy \geq 0$; posons $y = Ax$; il vient : $x'A'CAx \geq 0$, d'où $x'(A'CA)x \geq 0$ pour tout x, ce qui signifie que $A'CA$ est semi-définie positive.

Si A est de rang m, alors $x \neq 0$ entraîne que $y = Ax \neq 0$
Pour une matrice C définie positive, $x'A'CAx > 0$ pour tout y non nul, donc pour tout x non nul.

I. 5. Si A est une matrice quelconque, la matrice $A'A$ est semi-définie positive.

En prenant pour C la matrice identité I définie positive
$A'CA = A'IA = A'A$ est semi-définie positive par la propriété 4.

I. 6. Si C est définie positive, C^{-1} est également définie positive.

C^{-1} existe car par la propriété 3, C est non singulière.

Démontrons que C^{-1} est symétrique. Comme $CC^{-1} = I$, il vient $(CC^{-1})' = I$ ou $(C^{-1})'C' = I$ ou $(C^{-1})'C = I$ (car C symétrique) ou encore $(C^{-1})' = C^{-1}$.
Choisissons maintenant $A = A' = C^{-1}$ dans la propriété 4.
Nous déduisons que la matrice $A'CA = C^{-1}CC^{-1} = C^{-1}$ est définie positive.

I- 7. Si on décompose une matrice symétrique semi-définie C d'ordre n selon le schéma :

$$C = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline Q' & S \end{array}\right)$$ où . P est une matrice définie positive à n_1 lignes

. S une matrice semi-définie à n_2 lignes $(n_1 + n_2 = n)$

. Q une matrice $(n_1 \times n_2)$

Alors la matrice $S - Q'P^{-1}Q$ est également semi-définie positive.

Si C est définie positive, la matrice $S - Q'P^{-1}Q$ est définie positive.

Décomposons x en $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 a n_1 composantes et x_2 a n_2 composantes.

$$0 \leq x'Cx = (x_1' \; x_2') \begin{pmatrix} P & Q \\ Q' & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1' P x_1 + 2 x_1' Q x_2 + x_2' S x_2$$ pour tous x_1, x_2 $(x_1' Q x_2 = x_2' Q' x_1 \in \mathbb{R})$

posons $x_1 = -P^{-1} Q x_2$; alors :

$$0 \leq x_2' Q' P'^{-1} P P^{-1} Q x_2 - 2 x_2' Q' P'^{-1} Q x_2 + x_2' S x_2$$

$$= x_2' S x_2 - x_2' Q' P'^{-1} Q x_2$$

$$= x_2' (S - Q' P^{-1} Q) x_2$$ pour tout x_2 car P symétrique définie positive, donc P^{-1} symétrique.

Si C est définie positive et si $x_2 \neq 0$, on peut remplacer le signe $\leq$ par le signe $<$.

I. 8. Si un élément diagonal d'une matrice symétrique semi-définie positive C est nul, les éléments de la ligne et de la colonne correspondant à cet élément sont également nuls. Il en est de même si elle est semi-définie négative.

Comme C est une matrice semi-définie positive, pour tout vecteur x, $x'Cx \geq 0$

Nous avons vu que les éléments de la diagonale principale d'une matrice semi-définie positive sont non négatifs.

Soit c_{kk} l'élément diagonal nul

posons $I = \{ i \text{ tel que } c_{ii} > 0 \}$

et $J = \{ j \text{ tel que } c_{jj} = 0 \}$

<u>1er cas:</u> Montrons que pour tout i dans I ; $c_{ik} = c_{ki} = 0$

A cet effet supposons c_{ik} non nul, et prenons pour x le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est 1, la $k^{\text{ème}}$ composante est $-\frac{c_{ii}}{c_{ik}}$, et dont les autres composantes sont nulles.

Nous avons alors :

$$\Big(0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i^e \text{ composante}}}{1} 0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ k^e \text{ composante}}}{-\frac{c_{ii}}{c_{ik}}} 0 \cdots 0\Big) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ik} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{ki} & \cdots & c_{kk} & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{c_{ii}}{c_{ik}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i^e \text{ composante}}}{0} \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ k^e \text{ composante}}}{c_{ik}} \cdots\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{c_{ii}}{c_{ik}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -c_{ii} < 0$$

; donc pour un tel x, nous avons,

$x' C x < 0$

ce qui est absurde.

Il faut donc que pour tout $i \in I$, on ait : $c_{ik} = 0$, et aussi $c_{ki} = 0$ puisque C est symétrique.

<u>2e cas :</u>

Montrons que pour tout $j \in J$; $c_{jk} = c_{kj} = 0$

A cet effet, supposons $c_{jk} \neq 0$ et prenons pour x le vecteur dont la j^e composante est -1 et la k^e composante est $\frac{1}{c_{jk}}$ et 0 partout ailleurs.

Nous avons alors :

$$\Big(0 \cdots 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ j^e\text{composante}}}{-1} \ 0 \cdots 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ k^e\text{composante}}}{\frac{1}{c_{jk}}} \ 0 \cdots 0\Big)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jk} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kj} & \cdots & c_{kk} & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & & \cdots & & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{c_{jk}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ j^e\text{composante}}}{1} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ k^e\text{composante}}}{-c_{jk}} \cdots\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{c_{jk}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

; donc pour un tel x, nous avons $x' C x < 0$ ce qui est absurde.

Il faut donc $c_{jk} = c_{kj} = 0$ pour tout $j \in J$

La démonstration est identique dans le cas d'une matrice semi-définie négative : en choisissant le même vecteur x dans le 1er cas (sachant bien sûr que les éléments diagonaux sont non positifs) et dans le 2e cas, la j^e composante de x est 1 au lieu de -1., les autres restant inchangées.

II : Ensembles convexes et fonctions convexes.

Avant de définir un convexe, donnons quelques notions de base [J]

(1). Un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est appelé <u>Variété linéaire</u> si $(1-\lambda)x+\lambda y$ appartient à M pour tous x, y appartenant à M et λ dans $\mathbb{R}$.

<u>Par exemple</u> : le vide, le singleton $\{x\}$, une droite, un plan, $\mathbb{R}^n$ lui-même .... sont des variétés linéaires.

I-9. Dans une variété linéaire M, toute combinaison linéaire d'un nombre quelconque de points de M, (de la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i$ où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$) est un point de M.

(la démonstration se fait par récurrence.)

(3). <u>Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$</u> est une variété linéaire contenant l'origine.

(4) Soit M une variété linéaire de $\mathbb{R}^n$ et a un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On définit <u>la translatée de M par a</u> comme étant l'ensemble :

$$M+a = \{ x+a \ / \ x \in M \}$$

Remarquons que la translatée d'une variété linéaire est encore une variété linéaire.

en effet, soit x, y deux vecteurs quelconques de M,

$x+a$ et $y+a$ appartiennent à la translatée de M par a, $M+a$.

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(1-\lambda)(x+a)+\lambda(y+a) = (1-\lambda)x+\lambda y+a$

or $(1-\lambda)x+\lambda y = z \in M$ qui est une variété linéaire

donc $z+a \in M+a$

(5). Une variété linéaire M est <u>parallèle</u> à une variété linéaire L s'il existe un vecteur a tel que $M = L + a$, c'est-à-dire tel que M soit la translatée de L par a.

I.10. Chaque variété linéaire non vide est parallèle à un seul sous-espace vectoriel L. Et $L = M - M = \{x - y \mid x \in M, y \in M\}$

Voyons d'abord l'unicité du sous-espace vectoriel L.
Supposons que deux sous-espaces vectoriels L_1 et L_2 sont parallèles à M.
Par la définition (5), nous avons qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}^n$

tels que $M = L_1 + \alpha$

$M = L_2 + \beta$

et donc $L_1 = L_2 + a$ où $a = \beta - \alpha \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que dans ce cas, L_1 est parallèle à L_2.

Comme l'origine 0 appartient à L_1, $-a$ appartient à L_2 et donc a appartient à L_2.

Dans ce cas, $L_1 = L_2 + a$ est donc inclus dans L_2.

De façon analogue, on obtient que L_2 est inclus dans L_1.

Nous avons donc que $L_1 = L_2$.

Observons maintenant que pour tout y de M, $M - y = M + (-y)$ est une translatée de M contenant l'origine.

Le sous-espace vectoriel L parallèle à M est donc $L = M - y$ où y est un vecteur arbitraire de M.

Donc $L = M - M$.

(6). <u>La dimension</u> d'une variété linéaire est la dimension du sous-espace vectoriel qui lui est parallèle.

Par convention la dimension de la variété linéaire vide est -1, du singleton $\{x\}$ est 0.

(7). Une variété linéaire de dimension $(n-1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un <u>hyper plan</u>.

I.11 Soient $b \in \mathbb{R}^m$ et B une matrice réelle $(m \times n)$
L'ensemble $M = \{ x \in \mathbb{R}^n / Bx = b \}$ est une variété linéaire de $\mathbb{R}^n$
Et de plus toute variété linéaire peut se représenter par un tel ensemble.

• Soit x, y deux vecteurs quelconques de M et λ réel.
Nous devons démontrer que le vecteur $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ appartient à M.
or $Bz = (1-\lambda)Bx + \lambda By = (1-\lambda)b + \lambda b = b$
donc $z \in M$.
L'ensemble $M = \{ x \in \mathbb{R}^n / Bx = b \}$ est bien une variété linéaire de $\mathbb{R}^n$.
• Soit une variété linéaire M non vide de $\mathbb{R}^n$ et L le sous espace vectoriel parallèle à M.
Soit $b_1, \dots, b_m$ la base de $L^\perp$ (*)
Alors $L = (L^\perp)^\perp = \{ x / x \perp b_1, \dots, x \perp b_m \}$
$= \{ x / \langle x, b_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, m \}$
$= \{ x / Bx = 0 \}$ où B est une matrice $(m \times n)$
formée des lignes $b_1, \dots, b_m$.

(*) Rappelons que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = 0$
Soit L un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
$x \perp L \iff \forall y \in L, \quad \langle x, y \rangle = 0$
$L^\perp = \{ x / \langle x, y \rangle = 0 \quad y \in L \}$ est le complément orthogonal de L dans $\mathbb{R}^n$
Si $b_1, \dots, b_m$ est la base de L, alors $x \perp L \iff x \perp b_1, \dots, x \perp b_m$
et $\dim . L + \dim . L^\perp = n$.

Comme M est parallèle à L, il existe un vecteur a de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$M = L + a = \{ x \mid B(x - a) = 0 \}$$
$$= \{ x \mid Bx = b \} \quad \text{où } b = Ba.$$

(8). Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $x^1, \dots, x^p \in X$.
On appelle <u>combinaison linéaire convexe</u> de $x^1, \dots, x^p$ un point de la forme : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i$ où $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

(9) X est <u>un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$</u> si toute combinaison linéaire convexe de deux points quelconques de X appartient à X.

I.12. Dans un convexe X, toute combinaison linéaire convexe d'un nombre quelconque de points de X est un point de X.
(la démonstration se fait par récurrence).

I.13. L'intersection d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

(10) L'intersection de tous les ensembles convexes contenant un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ donné est <u>la fermeture convexe de X</u>, on la note <u>conv. X</u>

La fermeture convexe de $X \subset \mathbb{R}^n$ est donc le plus petit ensemble convexe contenant X.

I.14. Pour tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$, la fermeture convexe de X, conv. X est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes d'éléments de X.

Remarquons premièrement que $X \subset$ conv. X

Soient $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ et $y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i y^i$ deux combinaisons linéaires convexes de points de X.

Soit $0 \leq \lambda \leq 1$, $(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i + \lambda \sum_{i=1}^{r} \mu_i y^i$ est une combinaison linéaire convexe des éléments x^i et y^i de X

Donc l'ensemble de toute les combinaisons linéaires convexes d'éléments de X est un ensemble convexe, contenant X.

De plus, il coïncide au plus petit ensemble convexe contenant X c'est-à-dire conv. X

<u>Corollaire</u> : la fermeture convexe d'un sous ensemble fini $\{b_0, \dots, b_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i$

où $\lambda_i \geq 0$ $i = 0, \dots, m$ et $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$

(11) On entend par <u>dimension d'un ensemble convexe</u> X, la dimension de la fermeture affine de X, c'est-à-dire la dimension de la plus petite variété linéaire contenant X.

par exemple, la dimension d'un disque convexe est 2.

I.15. Soit Aff (X) la fermeture affine de X

Aff (X) est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme :

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \; x^i \in X; \; i = 1, \dots, p.$$

Remarquons premièrement que X est inclus dans Aff (X)

Soit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ où $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ $x^i \in X$ $i = 1, \dots, m$

$$y = \sum_{i=1}^{p} \mu_i y^i \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1 \quad y^i \in X \quad i = 1, \dots, p$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i + \lambda \sum_{i=1}^{p} \mu_i y^i$

est un vecteur de la forme ci-dessus car $x^i, y^i \in X$ et

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \lambda \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$$

De plus $Aff(X)$ correspond à la plus petite variété linéaire contenant X.

Donnons maintenant la définition de la fonction convexe :

Soient X un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction f définie sur X,

(12) <u>f est convexe sur X</u> si et seulement si pour tous points x^1, x^2 de X, pour $\lambda \in [0,1]$; $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$

(13) <u>f est strictement convexe sur X</u> si et seulement si pour tous points x^1, x^2 de X, pour

$$\lambda \in \,]0,1[\; ; f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

(14) <u>f est (strictement) concave sur X</u> si et seulement si $(-f)$ est (strictement) convexe.

I.16. Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique $Q(x) = x'Cx$ soit convexe sur X convexe de $\mathbb{R}^n$ est que la matrice symétrique C soit semi-définie positive (elle est strictement convexe si C est définie positive)

En effet $Q(x)$ est une forme quadratique convexe

$\Leftrightarrow Q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda Q(x) + (1-\lambda) Q(y)$ pour tout λ dans $[0,1]$ et pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$.

$\Leftrightarrow (\lambda x + (1-\lambda)y)' C (\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda x'Cx + (1-\lambda) y'Cy$

$\Leftrightarrow \lambda^2 x'Cx + (1-\lambda)^2 y'Cy + 2\lambda(1-\lambda) x'Cy \leq \lambda x'Cx + (1-\lambda) y'Cy$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) x'Cx + \lambda(\lambda-1) y'Cy - 2\lambda(\lambda-1) x'Cy \leq 0$

$\Leftrightarrow x'Cx + y'Cy - 2x'Cy \geq 0$ $\quad$ (car $\lambda - 1 \leq 0$ et $\lambda \geq 0$)

$\Leftrightarrow (x-y)'C(x-y) \geq 0$ ce qui est vrai pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$.

Donc C est semi-définie positive.

Cette condition est aussi nécessaire et suffisante si nous prenons la forme quadratique non homogène

$$p'x + \frac{1}{2} x' C x \quad \text{car } p'(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda p'x + (1-\lambda) p'y,$$

Toute fonction convexe est continue, mais n'est pas nécessairement différentiable.

I.17 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction différentiable f soit convexe sur un ouvert X convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ est que :

pour tous x^1, x^2 de X ; $f(x^1) - f(x^2) \geq (x^1 - x^2)' \nabla f(x^2)$ (15)

où $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Elle sera strictement convexe si on a une inégalité stricte dans (15)

Démontrons d'abord que si f est convexe, l'inégalité (15) est vérifiée :

f est convexe sur X, donc par définition

pour tous x^1, x^2 de X, pour tout λ dans $[0,1]$;

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

ou $$f(x^2 + \lambda(x^1 - x^2)) \leq f(x^2) + \lambda\left(f(x^1) - f(x^2)\right)$$

et pour tout λ dans $]0,1]$ $\dfrac{f(x^2 + \lambda(x^1 - x^2)) - f(x^2)}{\lambda} \leq f(x^1) - f(x^2)$

Si on passe à la limite lorsque λ tend vers 0 par valeurs positives, on obtient :

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{f(x^2+\lambda(x^1-x^2))-f(x^2)}{\lambda} = \text{la dérivée directionnelle de } f \text{ en } x^2$$

dans la direction $(x^1 - x^2)$

$$= (x^1 - x^2)' \nabla f(x^2)$$

Nous obtenons ainsi que $(x^1 - x^2)' \nabla f(x^2) \leq f(x^1) - f(x^2)$

Démontrons maintenant la réciproque :

Pour ce faire, posons : $x^3 = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in X$, avec $\lambda \in [0,1]$

Par hypothèse, on sait que : $f(x^1) - f(x^3) \geq (x^1 - x^3)' \nabla f(x^3)$

et que $f(x^2) - f(x^3) \geq (x^2 - x^3)' \nabla f(x^3)$

Si nous multiplions la première inégalité par λ et la seconde par $(1-\lambda)$ et si ensuite, nous les additionnons, nous obtenons :

$$\lambda f(x^1) - \lambda f(x^3) + (1-\lambda) f(x^2) - (1-\lambda) f(x^3)$$
$$\geq \left(\lambda (x^1 - x^3)' + (1-\lambda)(x^2 - x^3)'\right) \nabla f(x^3)$$

ou encore :

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) - f(x^3) \geq (\lambda x^1 - \lambda x^3 + x^2 - x^3 - \lambda x^2 + \lambda x^3)' \nabla f(x^3)$$
$$= (\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 - x^3)' \nabla f(x^3)$$

or $x^3 = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$

Donc $\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) - f(x^3) \geq 0$

ou encore

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2), \text{ pour tous } x_1, x_2 \text{ de } X.$$

Pour démontrer la condition nécessaire et suffisante de fonction différentiable strictement convexe, il suffit de reprendre le même raisonnement avec des inégalités strictes.

Remarquons que si $f(x)$ est la forme quadratique non homogène $p'x + \frac{1}{2} x' C x = q(x)$ qui est une fonction différentiable en x, nous retrouvons la condition nécessaire et suffisante que C soit semi-définie positive.

En effet, $\nabla_x q(x) = p + Cx$

$q(x)$ est convexe si et seulement si pour tous x^1, x^2 de X

$$p'x_1 + \frac{1}{2} x^{1\prime} C x^1 - p'x^2 - \frac{1}{2} x^{2\prime} C x^2 \geq (x^1 - x^2)'(p + C x^2)$$

ou encore

$$(x^1 - x^2)' C (x^1 - x^2) \geq 0 \quad \text{pour tous } x^1, x^2$$

III : Définition d'un programme quadratique.

Soit la fonction quadratique $q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx$ où C est une matrice $(n \times n)$ symétrique, p un vecteur $(n \times 1)$, x un vecteur $(n \times 1)$ et soient les fonctions linéaires

$$f_j(x) = a_j' x - b_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

Résoudre un programme quadratique avec contraintes linéaires, c'est trouver la solution du problème suivant, formulé comme problème de minimisation :

$$(16) \quad \left| \begin{array}{l} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx \\ \text{sous les contraintes } \begin{cases} a_j' x - b_j \geq 0 & j = 1, \ldots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$q(x)$ est la fonction objective.

Remarquons que si la fonction quadratique doit être maximisée au lieu de minimisée, ou si dans les contraintes, on a le signe "$\leq$" au lieu du signe "$\geq$", il suffit de multiplier la fonction objective ou les contraintes par -1 pour se ramener à la forme ci-dessus.

Si l'on regroupe les m vecteurs ligne a_j en une matrice $A(m \times n)$ et les réels b_j en un vecteur b, on peut écrire le programme quadratique sous la forme matricielle :

$$(17)\quad \left| \begin{array}{l} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2}\, x' C x \\ \text{sous les contraintes } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

ou encore, sous forme condensée,

$$(18)\quad | \ \min . \{ q(x) \,/\, Ax \geq b ,\ x \geq 0 \}$$

(19) Si la matrice C de la fonction objective est semi-définie positive, alors on parlera de <u>programme quadratique convexe</u>.
(si elle est semi-définie négative, on aura un programme quadratique concave)
Sinon on a un programme plus général de programmation quadratique non convexe.

(20) Posons $X = \{ x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b ,\ x \geq 0 \}$ X est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ que nous appellerons <u>l'ensemble des solutions réalisables</u> du programme quadratique.

(21) $\bar{x}$ est un <u>minimum local</u> de q sur X si et seulement si $\bar{x} \in X$ et si il existe $\varepsilon > 0$, il correspond un ε-voisinage

$$N(\bar{x}, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n / \| x - \bar{x} \| < \varepsilon \}$$

tel que $q(\bar{x}) \leq q(x)$ pour tout $x \in X \wedge N(\bar{x}, \varepsilon)$

(22) $\bar{x}$ est un <u>minimum global</u> de q sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, $q(\bar{x}) \leq q(x)$

IV : Convexité d'une forme quadratique sur un ensemble convexe. [B]

Si dans un problème de minimisation d'une fonction quadratique $q(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x$ sur un ensemble convexe X, la fonction $q(x)$ est convexe, ses minima locaux sont des minima globaux. Il est donc intéressant d'étudier la convexité d'une forme quadratique sur un ensemble convexe.

Nous venons de voir que la forme quadratique $q(x)$ est convexe sur X si et seulement si $x' C x$ est elle-même convexe sur X, c'est-à-dire si C est semi-définie positive (I-16)

Soit la forme quadratique $Q(x) = x' C x$ où C est une matrice réelle symétrique d'ordre n.

Après quelques calculs (page 13), on obtient le critère suivant :

(23) $Q(x)$ est convexe sur l'ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tous x, y de X ; $Q(x-y) \geq 0$

Nous pouvons déduire de ce critère deux conséquences immédiates :

I-18. Q est convexe sur un sous-espace vectoriel L inclus dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $Q(z) \geq 0$ pour tout z de L

en effet, L est un sous-espace vectoriel, donc pour tous x, y de L, le vecteur $z = x - y$ appartient à L.

De plus L est convexe car toute combinaison linéaire de points de L appartient à L et en particulier toute combinaison linéaire convexe.

Donc si nous reprenons le critère ci-dessus :

Q est convexe sur le sous-espace vectoriel L si et seulement si

$Q(x-y) \geq 0$ pour tous x, y de L

ou encore $Q(z) \geq 0$ pour tout z de L

I.19. | Q est convexe sur X si et seulement si Q est convexe sur toute translatée $X+a$ de X.

Par le critère ci-dessus,

Q est convexe sur $X+a$ si et seulement si pour tous t, r de $X+a$;

$$Q(t-r) \geq 0$$

or comme $X+a$ est la translatée de X par a, il existe x, y dans X tels que $t = x+a$ et $r = y+a$.

donc $Q(t-r) \geq 0$ peut encore s'écrire $Q((x+a)-(y+a)) \geq 0$

c'est-à-dire $Q(x-y) \geq 0$

Comme r et t sont quelconques dans $X+a$, $Q(x-y) \geq 0$ est vrai pour tous x, y dans X et donc par le critère, Q est convexe sur X.

I.20. | De ces deux conséquences, nous déduisons qu'une forme quadratique est convexe sur un sous-espace vectoriel L si et seulement si elle est convexe sur toute variété linéaire $V = L+a$, c'est-à-dire sur toute variété linéaire V translatée de l'espace vectoriel L.

(24) Si X est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, par la définition de dimension d'un ensemble convexe, il est contenu dans une seule variété linéaire $V(X)$ de dimension k, appelée <u>plan de support du convexe $X \subset \mathbb{R}^n$</u>.

Le plan de support d'un ensemble convexe X est donc la plus petite variété linéaire contenant X.

I.21. Si la forme quadratique Q est convexe sur l'ensemble convexe X, elle est convexe sur son plan de support $V(X)$

en effet, pour tous points x et y de $V(X)$. il existe des points u et v de X et un scalaire ξ tels que

$x - y = \xi(u - v)$ (appendice I-1)

comme Q est convexe sur X : $Q(u - v) \geq 0$

Q est donc convexe sur $V(X)$ puisque $Q(x - y) = \xi^2 Q(u - v) \geq 0$

I.22. La convexité de Q sur le plan de support $V(X)$ est équivalente à la convexité de Q sur le sous-espace vectoriel $L(X)$ parallèle à $V(X)$, puisque $V(X)$ est une variété linéaire translatée de l'espace vectoriel $L(X)$.

Considérons le problème de programmation quadratique suivant :

minimiser $\quad q(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x$

sous les contraintes : $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$X = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ est l'ensemble convexe sur lequel on voudrait prouver la convexité de $q(x)$.

Si A est une matrice $(m \times n)$ et X de dimension $n-m$. $(n > m)$, le plan de support de X est

$$V(X) = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i,\ x^i \in X,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$

or pour tout x de $V(X)$, $Ax = A \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A x^i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b = b$

Donc le plan de support de X est $V(X) = \{x \mid Ax = b\}$ de dimension $(n-m)$

(donc A est de rang m).

Nous avons vu que $q(x)$ est convexe sur X
si et seulement si q est convexe sur son plan de support $V(X)$
si et seulement si q est convexe sur le sous-espace vectoriel $L(X)$ parallèle à $V(X)$.

$$\text{et } L(X) = \{x - y \mid x \in V(X),\ y \in V(X)\}$$
$$= \{x - y \mid Ax = b,\ Ay = b\}$$
$$= \{x - y \mid A(x - y) = 0\}$$

Nous savons que la forme quadratique $q(x)$ est convexe sur $L(X)$ si et seulement si $x'Cx$ est semi-définie sur $L(X)$.

I 23. Donc $x'Cx$ doit être semi-définie pour x soumis aux contraintes linéaires homogènes $Ax = 0$.

Une façon de vérifier que $q(x)$ est semi-définie positive sur le sous-espace vectoriel de dimension $(n-m)$, $L(X) = \{x \mid Ax = 0\}$ est la suivante :

on écrit $Ax = Bx_B + Rx_R = 0$
où B est une matrice régulière de dimension $(m \times m)$ formée de m colonnes de A.

On peut alors éliminer x_B de $Q(x) = x'Cx$ par la formule $x_B = -B^{-1}Rx_R$

et on vérifie que $\bar{Q}(x_R) = Q(-B^{-1}Rx_R, x_R)$ est semi-définie positive.

V : Conditions de Kuhn et Tucker pour un programme quadratique.

Les conditions de Kuhn et Tucker constituent des conditions néces-saires - mais pas toujours suffisantes - que doit vérifier tout minimum local.

Rappelons-les, en les adaptant au cas de la fonction quadratique :

$$q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx$$

Si $\bar{x}$ est un minimum local de q sur X,
il existe un vecteur $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$(25)\begin{cases} p + C\bar{x} - A'\bar{y} \geq 0 \\ -b + A\bar{x} \geq 0 \\ \bar{x} \geq 0 \ ; \ \bar{y} \geq 0 \\ \bar{x}'(p + C\bar{x} - A'\bar{y}) = 0 \\ \bar{y}'(-b + A\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Voici deux définitions de points remarquables :

(26). Tout couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant aux conditions de Kuhn et Tucker est par définition <u>un point de Kuhn et Tucker.</u>

(27). <u>Un point stationnaire</u> $\bar{x}$ de q sur X est un point auquel corres-pond un $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tel que le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ soit un point de Kuhn et Tucker.

Soient u et v les vecteurs définis par les équations : $\begin{cases} u = p + Cx - A'y \\ v = -b + Ax \end{cases}$ (28)

(u et v sont des vecteurs d'écarts.)

Alors les conditions de Kuhn et Tucker peuvent s'écrire sous la forme :

$$(29)\begin{cases} u \geq 0 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ v \geq 0 . \\ x'u = 0 \ ; \ y'v = 0 \end{cases}$$

(30) $\left\{\begin{array}{l}\text{On dit que les variables } x_j \text{ et } u_j \text{, de même indice dans le couple } (x,u), \underline{\text{sont complémentaires}}. \quad (a) \\ \text{On dit de même que les variables } y_i \text{ et } v_i \text{ sont complémentaires} \quad (b)\end{array}\right.$

On peut simplifier l'exposé en combinant les restrictions de non négativité ($x \geq 0$) et les inégalités en un seul système de contraintes :

(31) $\left| \; G_{i*}\, x \geq h_i \qquad i = 1, \dots, m+n \right.$

où $G_{i*} = \begin{cases} A_{i*} & \text{pour } i = 1, \dots, m \\ I_{i-m,*} & \text{pour } i = m+1, \dots, m+n \end{cases}$

et $h_i = \begin{cases} b_i & \text{pour } i = 1, \dots, m \\ 0 & \text{pour } i = m+1, \dots, m+n \end{cases}$

(32) L'ensemble d'indices $\left| \; \mathcal{A}(\bar{x}) = \{ i \mid G_{i*}\, \bar{x} = h_i \,,\; i \in \{1, \dots, m+n\} \} \right.$ est appelé l'ensemble des <u>contraintes actives</u> (<u>ou liées</u>) en $\bar{x}$.

On définit les variétés linéaires :

(33) $\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}_i = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid G_{i*}\, x = h_i \} \qquad i = 1, \dots, m+n \\ \mathcal{L} = \begin{cases} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathcal{L}_i ,\; i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \} & \text{si } \mathcal{A}(\bar{x}) \neq \phi \\ \mathbb{R}^n & \text{si } \mathcal{A}(\bar{x}) = \phi \end{cases} \end{array} \right.$

Il est important de distinguer les minima locaux des autres points stationnaires, ce sera l'objet du chapitre suivant.

Dans la formulation de Ritter, le problème s'énonce sous la forme :

(34) $\begin{cases} \text{minimiser } p'x + \frac{1}{2}\, x' C x \\ \text{sous les contraintes: } G x \geq h \end{cases}$

Les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent alors :

(35) $\begin{cases} p + Cx - G'y = 0 \\ -h + Gx \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y'(-h + Gx) = 0 \end{cases}$

Pour un point de Kuhn et Tucker $(\bar{x},\bar{y})$ (c'est-à-dire une solution des équations (4))

posons : $\mathcal{A}(\bar{x},\bar{y}) = \{ i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \mid \bar{y}_i > 0 \}$ (36)

(37) Si $i \in \mathcal{A}(\bar{x},\bar{y})$, la i^e contrainte $G_{i*}\, x \geq h_i$ est dite <u>fortement liée</u>

Posons encore : $\hat{L} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \in L_i, i \in \mathcal{A}(\bar{x},\bar{y}) \}$ (38)

Appelons <u>sous-système correspondant à (35)</u>, le système :

$$(39)\quad \begin{cases} p + Cx - \hat{G}'\hat{y} = 0 \\ -\hat{h} + \hat{G}x = 0 \\ \hat{y} > 0 \end{cases}$$

où $\hat{G}$ est la sous-matrice de G correspondant à $\mathcal{A}(x,\hat{y})$

Nous supposerons que la matrice $U = \begin{pmatrix} C & -\hat{G}' \\ \hat{G} & 0 \end{pmatrix}$ est non singulière.

VI : Quelques définitions.

Dans les chapitres qui suivront, nous mettrons les conditions de Kuhn et Tucker (28) sous forme du tableau suivant :

(40)

Variables basiques	Valeur des variables de base	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y_1	$\cdots$	y_m	u_1	u_2	$\cdots$	u_n	v_1	$\cdots$	v_m
u_1	p_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	$-a_{11}$	$\cdots$	$-a_{m1}$	-1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
u_2	p_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	$-a_{12}$	$\cdots$	$-a_{m2}$	0	-1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
u_n	p_n	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nn}	$-a_{1n}$	$\cdots$	$-a_{mn}$	0	$\cdots$	$\cdots$	-1	0	$\cdots$	0
v_1	$-b_1$	a_{11}	$\cdots$	$\cdots$	a_{1n}	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0	-1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_m	$-b_m$	a_{m1}	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0	0	$\cdots$	-1

D'un point de vue pratique, on peut se passer de stocker la matrice unité négative, par la suite nous n'en tiendrons donc plus compte dans les tableaux.

Et nous appellerons :

(41) solution de base : un vecteur (x, u, y, v) dont au plus $(n+m)$ composantes parmi les $2(n+m)$ composantes sont non nulles.

(42) Les variables de base sont les composantes de la solution de base, les autres étant les variables hors-base.

Nous avons vu dans les conditions de Kuhn et Tucker que les variables u_i et x_i, v_j et y_j sont des variables complémentaires.

(43) Dans la suite, nous ferons en sorte de ne jamais avoir en même temps deux variables complémentaires en base. Dans ce cas, nous parlerons de <u>solution basique complémentaire</u>.

(44) Lorsque les variables de base sont des variables primales, on parle de <u>solution basique primale</u>.

(45) <u>Une solution réalisable</u> est toute solution du système de Kuhn et Tucker (28) telle que les conditions de non négativité (29) soient vérifiées.

(46) <u>Une solution de base réalisable</u> est une solution de base qui est réalisable.

(47) Une solution est <u>non dégénérée</u> lorsque en ce point, aucunes contraintes linéairement dépendantes ne soient vérifiées ensemble en temps qu'égalité.

Nous sommes dans un cas de solution dégénérée lorsque deux variables complémentaires sont nulles en même temps.

Afin de changer de solution de base, nous effectuerons des transformations de pivotage sur le tableau (40)

Soient z_j $j = 1, \ldots, m+n$ les variables hors base

ω_i $i = 1, \ldots, m+n$ les variables de base

T_{ij} l'élément dans la i^e ligne et j^e colonne du tableau

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & z_1 \; \cdots & z_j & \cdots \; z_{m+n} \\
\hline
\omega_1 & & \vdots & \\
\vdots & & & \\
\omega_i & \cdots & T_{ij} & \\
\vdots & & & \\
\omega_{m+n} & & & \\
\end{array}
$$

(48). Si nous effectuons un pivot sur un élément T_{ij} du tableau, cela revient à rendre la variable z_j basique en place de la variable w_i

(49) Effectuer un pivotage sur un bloc pivot $\begin{pmatrix} T_{rr} & T_{rs} \\ T_{sr} & T_{ss} \end{pmatrix}$ où $T_{rs} = -T_{sr}$ et $T_{ss} = 0$

revient à effectuer un double pivotage :

- sur T_{rr} d'abord, d'où il suivra que z_r rentrera en base en place de w_r
- ensuite sur le nouvel élément T_{ss}, d'où il suivra que z_s rentrera en base en place de w_s.

(50) Pour rendre par exemple les variables $z_r \dots z_s$ basiques en place des variables $w_r \dots w_s$ on parlera d'effectuer un pivotage sur le bloc $\begin{bmatrix} T_{rr} & \cdots & T_{rs} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{sr} & \cdots & T_{ss} \end{bmatrix}$

c'est-à-dire qu'on effectuera successivement des pivotages sur des éléments diagonaux ou sur des blocs pivots (2×2) comme nous les avons décrits ci-dessus.

Rappelons qu'effectuer une transformation sur un élément pivot donné, revient à :

- diviser les éléments de la ligne du pivot par "- le pivot"
- additionner aux éléments des autres lignes, le produit de l'élément correspondant dans la colonne du pivot par l'élément correspondant de la ligne transformée.

Appendice I - 1 :

Si x et y sont deux points de $V(X)$, il existe des points u et v de X et un scalaire ξ tels que $x - y = \xi\,(u - v)$

$$x \in V(X) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}, \exists (x^i) \in X \quad i = 1, \ldots, r \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i$$
$$\text{où } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i$, $y = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y^i$

où $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \quad \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1 \quad x^i, y^i \in X$

Si nous prenons $r = s + m$

$z^i = x^i$ pour $i = 1, \ldots, s$

$z^i = y^{i-s}$ pour $i = s+1, \ldots, r$

$\lambda_{i-s} = 0$ pour $i = s+1, \ldots, r$

$\gamma_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, s$

nous pouvons écrire : $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z^i$ et $y = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i z^i$

$$x - y = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \gamma_i) z^i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i z^i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i - \sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 0\right)$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{r} \alpha_i z^i + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^{r} \alpha_i z^i$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{r} \alpha_i z^i - \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^{r} (-\alpha_i) z^i$$

or $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{r} \alpha_i + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^{r} \alpha_i = 0$

Donc $\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i = - \sum_{\alpha_i < 0} \alpha_i = \xi > 0$

Soit $u = \frac{1}{\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{n} \alpha_i z^i$ et $v = \frac{1}{\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^{n} (-\alpha_i) z^i$

Remarquons que $u \in X$ car $\frac{\alpha_i}{\xi} > 0 \ (\alpha_i > 0)$, $\frac{1}{\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{n} \alpha_i = 1$

$v \in X$ car $\frac{-\alpha_i}{\xi} > 0 \quad (\alpha_i < 0)$, $\frac{1}{\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^{n} \alpha_i = 1$

Donc $x - y = \xi (u - z)$

Chapitre II :

Conditions nécessaires et suffisantes
- de minimisation locale .
- de minimisation globale .

I. Conditions nécessaires et suffisantes de minimisation locale [E]

Nous allons dégager des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur x^* soit un point minimum local au problème de programmation quadratique suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

où C est une matrice symétrique $(n \times n)$

A une matrice $(m \times n)$

p un vecteur de $\mathbb{R}^n$

et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$

Nous savons que les conditions de Kuhn et Tucker donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour un minimum local lorsque la fonction à minimiser est convexe. Si la fonction n'est pas convexe, ces conditions ne sont pas suffisantes.

Dans notre cas, nous devrons imposer des conditions supplé-mentaires sur la matrice C de la forme quadratique car celle-ci n'est pas semi-définie positive.

Ces conditions seront appelées conditions du second ordre .

Soit x^* un point de $\mathcal{A} = \{x \mid Ax \geq b\}$
On définit l'ensemble des indices $\mathcal{A}(x^*) = \{i \mid A_i x^* = b_i\}$ où A_i représente la i^e ligne de la matrice A.
$\mathcal{A}(x^*)$ correspond donc à l'ensemble des indices des contraintes liées.

Théorème II.1:

Pour que x^* soit un point minimum local du problème de programmation quadratique :

$$\begin{cases} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \qquad\qquad x \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Il faut et il suffit qu'il existe un vecteur u^* de $\mathbb{R}^m$ tel que les conditions de Kuhn et Tucker :

$$(2) \begin{cases} p + C x^* - A' u^* = 0 & (a) \\ -b + A x^* \geq 0 & (b) \\ u^* \geq 0 & (c) \\ (-b + A x^*)' u^* = 0 & (d) \end{cases}$$

soient vérifiées

et tel que pour tout vecteur ω de $\mathbb{R}^n$ où

$$(3) \begin{cases} A_i \omega = 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x^*, u^*) = \{i \mid u_i^* > 0\} & (a) \\ A_i \omega \geq 0 & \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \setminus \mathcal{A}(x^*, u^*) & (b) \end{cases}$$

on a $\omega' C \omega \geq 0$ (4)

Pour la condition nécessaire, nous nous référons au théorème 4 de Mc Cormick [F]

$$(5) \begin{cases} \text{où } f(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ g_i(x) = A_i x - b_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

(Remarquons qu'il n'existe pas de fonctions h_i)

Le théorème s'énonce comme suit :

Si les fonctions $f, g_1, \ldots, g_m$ sont deux fois différentiables au point x^*, et si les contraintes de qualifications du premier et second ordre sont vérifiées en x^*,

Alors pour que x^* soit un minimum local au problème (5) il faut qu'il existe un vecteur $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)'$

tel que : $$\begin{cases} g_i(x) \geq 0 & i = 1, \ldots, m \\ u_i\, g_i(x) = 0 & i = 1, \ldots, m \\ u_i^* \geq 0 & i = 1, \ldots, m \\ \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0 & \end{cases}$$

et tel que pour tout vecteur y où $y' \nabla g_i(x^*) = 0$

pour $i \in B^* = \{ i \,/\, g_i(x^*) = 0 \}$

on a $y' \left[\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i(x^*) \right] y \geq 0$

ou encore, avec nos notations :

il faut qu'il existe un vecteur $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)'$

tel que $$\begin{cases} Ax - b \geq 0 \\ (-b + Ax)' u^* = 0 \\ u^* \geq 0 \\ p + Cx - A'u = 0 \end{cases}$$

et tel que pour tout vecteur w où $A_i w = 0$ $i \in \{ i \,/\, A_i x^* - b_i = 0 \}$

on a $w' C w \geq 0$

(démonstration p 646 [F])

Lorsque les fonctions f et g_i $i = 1, \ldots, m$ sont deux fois différentiables, le fait que les vecteurs $\nabla g_i(x^*)$, pour tout $i \in B^*$, sont linéaire-
-ment indépendants est une condition suffisante pour que les contraintes de qualification du premier et second ordre soient

vérifiées en x^*.

Dans notre cas, $\nabla g_i(x^*) = A_i$

Les lignes de A_i (relatives aux contraintes $A_i x^* = b_i$) linéairement indépendantes correspondent à une solution non dégénérée et dans ce cas, $A_i x^* - b_i = 0$ et $u_i^* > 0$.

Le cas où $A_i x^* - b_i = 0$ et $u_i^* = 0$ correspond au cas de dégénérescence.

Avant de démontrer la condition suffisante, nous allons démontrer deux lemmes.

Lemme II-2 $\begin{cases} \text{Soit } c \text{ non nul et supposons que } \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c'x}{x'Cx} = 0 \\ \text{Alors } x_0' C x_0 \neq 0 \end{cases}$

On a directement $c'x_0 = 0$ par l'hypothèse

Nous allons démontrer ce lemme par l'absurde.

Supposons donc que $x_0' C x_0 = 0$

On peut alors écrire $\dfrac{c'x}{x'Cx} = \dfrac{c'(x - x_0)}{2x_0' C(x - x_0) + (x - x_0)' C (x - x_0)}$

Posons $x = x_0 + tc$ où $t \in \mathbb{R}$ si x tend vers x_0, t tend vers 0

Calculons maintenant la limite de $\dfrac{c'x}{x'Cx}$ lorsque x tend vers x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c'x}{x'Cx} = \lim_{x \to x_0} \frac{c'(x - x_0)}{2x_0' C(x - x_0) + (x - x_0)' C (x - x_0)}$$

effectuons le changement de variable : $x - x_0 = tc$.

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t c'c}{2t x_0' Cc + t^2 c' Cc}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{c^2}{2 x_0' Cc + t c' Cc}$$

$$= \frac{c^2}{2 x_0' Cc}.$$

or ε est non nul, la limite est donc non nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'hypothèse que $x_0' C x_0$ est nul, est donc fausse.

Lemme II.3

Supposons que les conditions (2), (3), (4) du théorème sont vérifiées et définissons l'ensemble $W = \{ w / \|w\| = 1 \; ; A_i w \geq 0 \; i \in ct(x^*) \; ; w'Cw < 0 \}$

Alors $\varepsilon = \inf\limits_{w \in W} \dfrac{2u^{*\prime} A w}{-w' C w} > 0$

Par les hypothèses, nous savons déjà que ε est non négatif.

Nous allons démontrer ce lemme par l'absurde.

Supposons que ε est nul.

Il suit qu'il existe une suite $\{w_k\}$ de W telle que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{2u^{*\prime} A w_k}{-w_k' C w_k} = 0$

La suite $\{w_k\}$ est bornée donc convergente.

Soit $\lim\limits_{k \to \infty} w_k = w_0$

w_0 est tel que : $\|w_0\| = 1$

$A_i w_0 \geq 0 \quad \forall i \in ct(x^*)$

$w_0' C w_0 \leq 0$

et $2u^{*\prime} A w_0 = 0$

Par le lemme 1, nous savons que $w_0' C w_0$ est non nul, donc $w_0' C w_0$ est négatif.

De plus comme $u^* \geq 0$, $A_i w_0 \geq 0$, $\forall_i \in ct(x^*)$ et $2u^{*\prime} A w_0 = 0$,

on a $A_i w_0 = 0 \quad \forall i \in ct(x^*, u^*) = \{ i / u_i^* > 0 \}$

D'où w_0 répond aux conditions (3) du théorème, et donc à la condition (4)

c'est-à-dire $w_0' C w_0 \geq 0$ qui est en contradiction avec le fait que $w_0' C w_0 < 0$. ε est donc positif.

Nous pouvons maintenant démontrer la condition suffisante d'optimalité locale du théorème.
Supposons donc que les conditions (2), (3) et (4) sont vérifiées, et montrons que x^* est un point minimum local au programme quadratique.

$$q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx$$

or par 2(a) $\quad p = -Cx^* + A'u^*$

Donc
$$q(x) - q(x^*) = -x^{*\prime}Cx + u^{*\prime}Ax + \frac{1}{2}x'Cx + x^{*\prime}Cx^* - u^{*\prime}Ax^* - \frac{1}{2}x^{*\prime}Cx^*$$

$$= u^{*\prime}A(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)'C(x - x^*) \qquad (6)$$

Définissons
$$\varepsilon = \inf_{w \in W} \frac{2u^{*\prime}Aw}{-w'Cw} \qquad (7)$$

choisissons $x \in \mathcal{A} = \{x \mid Ax \geq b\}$ arbitraire et tel que $\|x - x^*\| < \varepsilon$ (8)

$\forall i \in \mathcal{A}(x^*)$ $A_i(x - x^*) \geq 0$

comme $u^* \geq 0$ $\quad u^{*\prime}A(x - x^*) \geq 0$

et $u^{*\prime}A(x - x^*) = 0 \iff A_i(x - x^*) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*, u^*)$ (9)

Supposons que $u^{*\prime}A(x - x^*) = 0$

Dans ce cas (6) devient : $q(x) - q(x^*) = \frac{1}{2}(x - x^*)'C(x - x^*)$

soit $w = x - x^*$

Il suit par (9) que w satisfait les conditions (3)

c'est-à-dire $A_i w = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*, u^*)$

et $A_i w \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \setminus \mathcal{A}(x^*, u^*)$

Et donc w satisfait la condition (4) : $w'Cw \geq 0$

Il en suit que $q(x) - q(x^*) \geq 0$

ou encore $q(x) \geq q(x^*)$

Il reste à considérer le cas où $u^{*'}A(x-x^*) > 0$

$$q(x)-q(x^*) = u^{*'}A(x-x^*) + \frac{1}{2}(x-x^*)'C(x-x^*)$$

peut encore s'écrire :

$$q(x)-q(x^*) = \|x-x^*\| \left[u^{*'}A\frac{x-x^*}{\|x-x^*\|} + \frac{\|x-x^*\|}{2}\frac{(x-x^*)'}{\|x-x^*\|}C\frac{(x-x^*)}{\|x-x^*\|} \right]$$

. si $(x-x^*)'C(x-x^*) \geq 0$, alors $q(x)-q(x^*) \geq 0$

. si $(x-x^*)'C(x-x^*) < 0$, $\frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}$ est un vecteur de W

par le lemme 2, par la définition de ε (7) et le choix de x (8)

$$\frac{2u^{*'}A\frac{x-x^*}{\|x-x^*\|}}{-\frac{(x-x^*)}{\|x-x^*\|}C\frac{(x-x^*)}{\|x-x^*\|}} \geq \varepsilon > \|x-x^*\| > 0$$

d'où $q(x)-q(x^*) > 0$

Dans chaque cas, x^* est un point minimum local de q.

<u>Corollaire II.4 : caractérisation d'un minimum local.</u>

Un point x^* est un minimum local pour une fonction quadratique générale (1) si et seulement si, il existe des vecteurs y^*, u^*, v^* qui répondent aux conditions de Kuhn et Tucker :

$$(2')\begin{cases} u^* = p + Cx^* - A'y^* & (a) \\ v^* = -b + Ax^* & (b) \\ 0 = u^{*'}x^* + y^{*'}v^* & (c) \\ 0 \leq u^*;\ 0 \leq v^*;\ 0 \leq x^*;\ 0 \leq y^* & (d) \end{cases}$$

et tels que pour tout vecteur ω non nul où

$$(3') \begin{cases} A_i\,\omega = 0 & \text{si } y_i^* > 0 \quad (a) \\ A_i\,\omega \geq 0 & \text{si } y_i^* = v_i^* = 0 \quad (b) \\ \omega_j = 0 & \text{si } u_j^* > 0 \quad (c) \\ \omega_j \geq 0 & \text{si } u_j^* = x_j^* = 0 \quad (d) \end{cases}$$

on ait, $\omega' C \omega \geq 0 \quad (4')$

Ramenons le problème sous la forme du problème du théorème II-1 :

Les contraintes : $\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ peuvent encore s'écrire :

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$ où I est la matrice unité $(n \times n)$

Donc $\mathcal{A} = \left\{ x \,/ \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Si nous appliquons maintenant le théorème en remplaçant u^* par le vecteur $\begin{pmatrix} y^* \\ u^* \end{pmatrix}$

où $y^* \in \mathbb{R}^m$ et $u^* \in \mathbb{R}^n$

Les équations de Kuhn et Tucker (2) deviennent :

$$\begin{cases} p + Cx^* - (A' \; I) \begin{pmatrix} y^* \\ u^* \end{pmatrix} = 0 \\ -\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x^* \geq 0 \\ y^* \geq 0 \,,\; u^* \geq 0 \\ \left[\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x^* \right]' \begin{pmatrix} y^* \\ u^* \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} p + Cx^* - A'y^* = u^* \\ -b + Ax^* = v^* \;;\; v^* \geq 0 \\ x^* \geq 0 \\ y^* \geq 0 \;;\; u^* \geq 0 \\ (-b + Ax^*)' y^* + x^{*\prime} u^* = 0 \end{cases}$$

On obtient donc les conditions (ℓ') :
$$\begin{cases} p + Cx^* - A'y^* = u^* \\ -b + Ax^* = v^* \\ 0 = u^{*\prime}x^* + y^{*\prime}v^* \\ 0 \leq u^*;\ 0 \leq v^*;\ 0 \leq x^*;\ 0 \leq y^* \end{cases}$$

soient $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = G$, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = h$ et $\begin{pmatrix} y^* \\ u^* \end{pmatrix} = z^*$

$$\mathcal{A}(x^*) = \{ i \,/\, G_i x^* = h_i \} = \{ i \,/\, v_i^* = 0,\ i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{ i \,/\, x_{i-m}^* = 0,\ i \in \{m+1, \dots, m+n\}\}$$

$$\mathcal{A}(x^*, z^*) = \{ i \,/\, G_i x^* = h_i,\ z_i^* > 0 \}$$
$$= \{ i \,/\, v_i^* = 0,\ y_i^* > 0,\ i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{ i \,/\, x_{i-m}^* = 0,\ u_{i-m}^* > 0,\ i \in \{m+1, \dots, m+n\}\}$$

Donc la condition 3(a) devient :
$$\begin{cases} A_i w = 0 \quad \text{si } y_i^* > 0 & 3'a \\ w_j = 0 \quad \text{si } u_j^* > 0 & 3'c \end{cases}$$

pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{A}(x^*) \setminus \mathcal{A}(x^*, z^*) = \{ i \,/\, v_i^* = 0 \ \ y_i^* = 0 \}$
pour $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$, $\mathcal{A}(x^*) \setminus \mathcal{A}(x^*, z^*) = \{ i \,/\, x_{i-m}^* = 0 \ \ u_{i-m}^* = 0 \}$
Donc la condition 3(b) devient :
$$\begin{cases} A_i w \geq 0 \quad \text{si } y_i^* = v_i^* = 0 & 3'b. \\ w_j \geq 0 \quad \text{si } u_j^* = x_j^* = 0 & 3'd. \end{cases}$$

Nous dirons que :

x_i $(i = 1, \dots, n)$ sont les variables primales

v_i $(i = 1, \dots, m)$ sont les variables d'écart (primales)

y_i, u_i sont les variables duales correspondant respectivement à v_i et x_i.

Remarquons que si la fonction est quadratique convexe, les conditions (3') et (4') sont automatiquement vérifiées car nous avons vu que C semi-définie positive est une condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique $q(x)$ soit convexe (I.16)
Donc $w'Cw \geq 0$ pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$ et en particulier pour w vérifiant (3').
Remarquons également que si la solution est non dégénérée, les conditions (3') se réduisent aux conditions 3'a et 3'C car dans ce cas si v_i^* ou x_i^* est nulle,
la variable complémentaire lui correspondant (y_i^* ou u_i^*) est nécessairement positive.
Nous voyons donc que pour trouver un minimum local au problème (1), nous devons remplir des conditions assez fortes.
Les conditions du second ordre (3' et 4') sont les plus difficiles à satisfaire.
Par la suite nous allons résoudre une suite de problèmes plus larges satisfaisant des conditions moins fortes.

Le théorème suivant montre que si le point de départ résout partiellement les conditions de Kuhn et Tucker, alors on a un minimum local d'un problème restreint en introduisant quelques contraintes.

Théorème II. 5. :

Soient x^*, y^*, v^*, u^* solution du système incomplet suivant :

$$(10)\begin{cases} u^* = p + C x^* - A' y^* \\ v^* = -b + A x^* \\ 0 = u_j^* \, x_j^* = y_i^* \, v_i^* \quad \text{pour tous } i, j. \\ x^* \geq 0 \; ; \; v^* \geq 0 \end{cases}$$

Alors x^* est un minimum local pour le problème restreint suivant :

$$(11)\begin{cases} \text{minimiser } \left(p' x + \frac{1}{2} x' C x\right) \\ \text{sous les contraintes :} \\ A_i x \geq b_i \quad \text{si } v_i^* > 0 \text{ ou } v_i^* = 0 \;\; y_i^* > 0 & (a) \\ A_i x = b_i \quad \text{si } v_i^* = 0 \;\; y_i^* \leq 0 & (b) \\ x_j \geq 0 \quad \text{si } x_j^* > 0 \text{ ou } x_j^* = 0 \;\; u_j^* > 0 & (c) \\ x_j = 0 \quad \text{si } x_j^* = 0 \;\; u_j^* \leq 0 & (d) \end{cases}$$

si et seulement si pour tout vecteur w non nul pour lequel

$$(12)\begin{cases} A_i w = 0 \quad \text{si } y_i^* > 0 \text{ ou } v_i^* = 0 \;\; y_i^* \leq 0 \\ w_j = 0 \quad \text{si } u_j^* > 0 \text{ ou } x_j^* = 0 \;\; u_j^* \leq 0 \end{cases}$$

on a $w' C w \geq 0$ (13)

Nous allons démontrer ce théorème en appliquant le corollaire II. 4

Les contraintes (11) peuvent encore s'écrire comme suit :

$$(14)\begin{cases} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où A_1 est une sous-matrice de A formée des lignes A_i telles que $v_i^* > 0$ ou $v_i^* = 0$ $y_i^* > 0$

A_2 est une sous-matrice de A formée des lignes A_i telles que $v_i^* = 0$ $y_i^* \leq 0$

b_1 et b_2 est la partition de b correspondant à celle de A.

I_1 est formée des lignes $e_j = (0, \ldots, 0, \overset{j^e \text{ place}}{1}, 0, \ldots, 0)$ de la matrice unité $(n \times n)$ telles que $x_j^* > 0$ ou $x_j^* = 0$ $u_j^* > 0$

I_2 est formée des lignes e_j de la matrice unité $(n \times n)$ telles que $x_j^* = 0$ $u_j^* \leq 0$

Par le corollaire II.4, pour que x^* soit un minimum local du problème restreint (11), il faut et il suffit que :

(15)

- $u^* = p + Cx^* - A'y^*$

  où $u^* = \begin{pmatrix} r_1^* \\ r_2^* - r_3^* \end{pmatrix}$ tel que $(I_1' \;\; I_2' \;\; -I_2') \begin{pmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ r_3^* \end{pmatrix} = I_1' r_1^* + I_2'(r_2^* - r_3^*)$

  $$r_1^* \geq 0 \; ; \; r_2^* \geq 0 \; ; \; r_3^* \geq 0$$

  $y^* = \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* - t_3^* \end{pmatrix}$ tel que $(A_1' \;\; A_2' \;\; -A_2') \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ t_3^* \end{pmatrix} = A_1' t_1^* + A_2'(t_2^* - t_3^*)$

  $$t_1^* \geq 0 \; ; \; t_2^* \geq 0 \; ; \; t_3^* \geq 0$$

  Remarquons que les vecteurs u^* et y^* ne sont plus nécessairement non négatifs.

- $v^* = -b + Ax^*$
- $x^* \geq 0$; $v^* \geq 0$
- $u^{*\prime} x^* = y^{*\prime} v^* = 0$ car u^*, y^* sont des vecteurs quelconques (c'est-à-dire le système incomplet (10))

et tel que pour tout vecteur w non nul vérifiant

$$\begin{cases} A_i\, w = 0 & \text{si } y_i^* > 0 \quad \text{ou } v_i^* = 0 \quad y_i^* \leq 0 \\ w_j = 0 & \text{si } u_j^* > 0 \quad \text{ou } x_j^* = 0 \quad u_j^* \leq 0 \end{cases}$$

on a $w' C w \geq 0$

(c'est-à-dire (12) et (13))

en effet; soient $G = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \\ I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$ $\quad h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(x^*) = \{ i \,/\, G_i\, x^* = h_i \}$

si G_i représente une ligne de :

A_1, on a : $A_i\, x^* = b_i$ et $y_i^* > 0$ par définition de A_1

A_2, on a $A_i\, x^* = b_i$ et $y_i^* \leq 0$ par définition de A_2

$-A_2$, on a $-A_i\, x^* = b_i$ et $y_i^* \leq 0$ par définition de $-A_2$

De même si G_i représente une ligne de :

I_1, on a $x_i^* = 0$ et $u_j^* > 0$

I_2, on a $x_i^* = 0$ et $u_j^* \leq 0$

$-I_2$, on a $x_i^* = 0$ et $u_j^* \leq 0$

Donc $\mathcal{A}(x^*, z^*) = \{ i / G_i\, x^* = h_i \}$ où G_i est soit une ligne de A_1

soit une ligne de I_1

Les conditions (3') s'écrivent alors :

$$(16) \quad \begin{cases} A_i\, w = 0 & \text{si } y_i^* > 0 & (a) \\ A_i\, w \geq 0 & \text{si } v_i^* = 0 \quad y_i^* \leq 0 & (b) \\ -A_i\, w \geq 0 & \text{si } v_i^* = 0 \quad y_i^* \leq 0 & (c) \\ w_j = 0 & \text{si } u_j^* > 0 & (d) \\ w_j \geq 0 & \text{si } x_j^* = 0 \quad u_j^* \leq 0 & (e) \\ -w_j \geq 0 & \text{si } x_j^* = 0 \quad u_j^* \leq 0 & (f) \end{cases}$$

or comme les indices "i" de (16b) et (16c) sont identiques nous obtenons : $A_i\,w = 0$ si $v_i^* = 0$ $y_i^* \leq 0$.
De même les indices "j" de (16e) et (16f) sont identiques et donc : $w_j = 0$ si $x_j^* = 0$ $u_j^* \leq 0$.
La condition (16) représente donc bien (12)

Ce théorème suggère, du point de vue algorithmique de relâcher (du moins temporairement) les contraintes de non négativité des variables duales de telle façon que les conditions (12) et (13) soient vérifiées. De cette façon on a toujours un minimum local d'un problème restreint et on peut alors essayer de se débarasser des contraintes auxiliaires.
Ce sera le sujet du chapitre suivant.

II : Théorème de caractérisation de Ritter.

Condition suffisante pour un minimum global.

Lorsque nous avons défini les conditions de Kuhn et Tucker au chapitre I, nous avons introduit la formulation de Ritter pour le problème général :

$$(17)\begin{cases} \text{minimiser} \quad q(x) = p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \text{sous les contraintes} : \quad G x \geq h \end{cases}$$

Les conditions de Kuhn et Tucker associées à ce problème étant :

$$(18)\begin{cases} p + C x - G' y = 0 \\ -h + G x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y'(-h + G x) = 0 \end{cases}$$

Nous avons défini l'ensemble des contraintes fortement liées en un point $(\bar{x}, \bar{y})$ de Kuhn et Tucker :

$$\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y}) = \{ i \in \mathcal{A}(\bar{x}),\ \bar{y}_i > 0 \}$$

où $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{ i \mid G_i x = h_i \} \quad i = 1, \ldots, m+n$

est l'ensemble des contraintes liées.

et nous avons posé :

$$\hat{\mathcal{L}} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathcal{L}_i,\ i \in \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y}) \}$$

où $\mathcal{L}_i = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid G_i x = h_i \} \quad i = 1, \ldots, m+n$

sont les hyperplans limitant l'ensemble X des contraintes.

Soit $\hat{y}$ le sous-vecteur de $\bar{y}$ formé des composantes $\bar{y}_i > 0$

on a alors le sous-système de (18) suivant :

$$(19)\begin{cases} p + C x - \hat{G}' \hat{y} = 0 & (a) \\ -\hat{h} + \hat{G} x = 0 & (b) \\ \hat{y} > 0 & (c) \end{cases}$$

où $\hat{G}$ est la sous-matrice de G correspondant à $\mathcal{A}(x, \hat{y})$
$(x, \hat{y})$ étant solution du système (19)
et $\hat{h}$ est le sous-vecteur de h correspondant.

Afin de clarifier ces définitions, donnons un petit exemple numérique :

soit à minimiser : $(-1\ \ -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

sous les contraintes : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

les conditions de Kuhn et Tucker de ce problème sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 & \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (1^\circ) \\ (2^\circ) \end{array} \\ v_1 \geq 0\ ;\ v_2 \geq 0 & \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 & (3^\circ)\ ;\ (4^\circ) \\ (x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 & \\ (v_1\ \ v_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 & \end{array}\right.$$

Une solution de ce problème est :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 3\ ;\ \bar{x}_2 = 1\ ;\ \bar{v}_1 = 0\ ;\ \bar{v}_2 = 0 \\ \bar{u}_1 = 0\ ;\ \bar{u}_2 = 0\ ;\ \bar{y}_1 = 2\ ;\ \bar{y}_2 = 1 \end{array}\right.$$

Les contraintes (1°) et (2°) sont liées, et comme $\bar{y}_1 = 2 > 0$ et $\bar{y}_2 = 1 > 0$, elles sont fortement liées.

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{y}) = \{(1°), (2°)\}$$

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 4 \right\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 - x_2 = 5 \right\}$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \right\} = \left\{ x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\hat{\mathcal{L}}$ est donc l'intersection de toutes les variétés linéaires correspondant aux contraintes fortement liées.

Notons que pour cet exemple $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}$.

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{et} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} > 0$$

$\hat{G}$ est la sous-matrice de G formée des 1ère et 2ème lignes de G.

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \hat{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Le sous-système correspondant est donc :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ y_1 > 0 \ ; \ y_2 > 0 \end{cases}$$

Soit $\hat{X} = \{x \,/\, \hat{G} x \geq \hat{h}\} = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \end{cases}$

et nous avions $X = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \,;\, x_2 \geq 0 \end{cases}$

nous voyons donc que X est inclus dans $\hat{X}$.

Nous avons supposé que la matrice $\begin{pmatrix} D & -\hat{G}' \\ \hat{G} & 0 \end{pmatrix}$ est non singulière.

De ce fait, les lignes de la sous-matrice $\hat{G}$ sont linéairement indépendantes.

Soit B la sous-matrice carrée régulière de rang maximum de $\hat{G}$

$\hat{G} = (B, N)$

et la partition de x correspondante $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

On peut alors écrire x comme fonction de $\hat{h}$, via la formule

$$x_B = B^{-1}\hat{h} - B^{-1} N x_N$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}\hat{h} - B^{-1} N x_N \\ x_N \end{pmatrix}$$

et $q(x)$ en fonction de $\hat{h}$.

On peut de plus démontrer que :

II-6 | Pour un point stationnaire $(x, \hat{y})$ du problème (19)

$$\hat{y}' = \nabla_{\hat{h}}\, q\,(x(\hat{h}))$$

(R.W. Cottle et W.C. Mylander [A] p. 262)

Donnons maintenant l'énoncé du théorème de caractérisation des points stationnaires de Ritter [A]

Théorème II - 7.

Si $(x, \hat{y})$ est une solution de (19) et $\hat{X} = \{x / \hat{G}x \geq \hat{h}\}$

Alors (i) x est un minimum local de q sur $\hat{X}$

si et seulement si q est convexe sur $\hat{\mathcal{L}}$

(ii) x est un maximum local de q sur $\hat{X}$

si et seulement si $\hat{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^n$ et q est concave.

(iii) x est un point de selle de q sur $\hat{X}$

si et seulement si q n'est ni concave, ni convexe lorque $\hat{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^n$

(c'est-à-dire, lorsque dans ce cas, la forme quadratique

$x'Cx$ est indéfinie)

ou si et seulement si q est non convexe sur $\hat{\mathcal{L}}$ lorsque $\hat{\mathcal{L}} \neq \mathbb{R}^n$

Soit $\varphi(x, y)$ la fonction lagrangienne associée à la forme quadratique $q(x)$: $\varphi(x, y) = q(x) - \sum_{i=1}^{p} y_i g_i(x)$ où $g_i(x) = \hat{G}_i x - \hat{h}_i$

Rappelons qu'un point de selle de φ sur $\hat{X}$ est un point $(\hat{x}, \hat{y})$

tel que $\varphi(\hat{x}, y) \leq \varphi(\hat{x}, \hat{y}) \leq \varphi(x, \hat{y}) \quad \forall x \in \hat{X} \quad \forall y \geq 0$

Pour la démonstration, nous renvoyons à l'article de R.W. Cottle et W.C. Mylander [A] pp 262 - 263

Remarquons que si (x^*, y^*) est un point de Kuhn et Tucker pour (18) et si la fonction q est convexe sur $\hat{\mathcal{L}}$, alors x^* est non seulement un minimum local de q sur $\hat{X}$ mais aussi sur X.

Le but de l'algorithme de Ritter est de trouver un minimum global au programme quadratique, or le théorème II - 7 donne une condition suffisante pour un minimum local.

Le théorème II-8, énoncé ci-dessous, donne une condition suffisante pour un minimum global.

Soit x^* un vecteur réalisable de (17) tel que $\mathcal{A}(x^*)$ est non vide, par une permutation appropriée des contraintes, on peut partitionner G et h de la façon suivante : $\begin{pmatrix} G_0 \\ G_+ \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}$

tels que $G_0 x^* = h_0$

$G_+ x^* > h_+$

<u>Théorème II-8 :</u>

Si x^* est un minimum local de (17)

et si $\min \{ x'Cx \,/\, G_0 x \geq 0 \} \geq 0$

Alors x^* est un minimum global de q sur X

(R.W. Cottle et W.C. Mylander [A] p. 264)

Chapitre III :

Algorithme de minimisation locale d'un programme quadratique quelconque. [D]

I : Partie théorique.

Nous voudrions trouver un algorithme qui permette de déterminer un minimum local au problème de programmation quadratique :

$$(1)\begin{cases} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx \\ \quad \text{sous les contraintes : } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

où C est une matrice $(n \times n)$ symétrique
A est une matrice $(m \times n)$
p un vecteur de $\mathbb{R}^n$
b un vecteur de $\mathbb{R}^m$

Nous avons vu au chapitre II les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point réalisable x^* soit un minimum local du problème (1) (corollaire II.4), rappelons les :
Un point x^* est un minimum local pour le problème (1) si et seulement si :
Il existe des vecteurs y^*, u^*, v^* qui répondent aux conditions de Kuhn et Tucker :

$$(2)\begin{cases} u^* = p + Cx^* - A'y^* & (a) \\ v^* = -b + Ax^* & (b) \\ 0 = u^{*\prime}x^* + y^{*\prime}v^* & (c) \\ u^* \geq 0 ; v^* \geq 0 ; x^* \geq 0 ; y^* \geq 0 & (d) \end{cases}$$

et tels que pour tout vecteur ω non nul où

$$(3)\quad \begin{cases} A_i\,\omega = 0 & \text{si } y_i^* > 0 \quad (a)\\ A_i\,\omega \geq 0 & \text{si } y_i^* = v_i^* = 0 \quad (b)\\ \omega_j = 0 & \text{si } u_j^* > 0 \quad (c)\\ \omega_j \geq 0 & \text{si } u_j^* = x_j^* = 0 \quad (d)\end{cases}$$

on a $\omega' C\, \omega \geq 0$ (4)

Nous avons vu également que si le point de départ résoud partiellement les conditions de Kuhn et Tucker, on a un minimum local d'un problème restreint en introduisant quelques contraintes (théorème II - 5)

Nous allons donc résoudre une suite de problèmes plus larges où les conditions de non négativité des variables duales seront relâchées (du moins temporairement) de telle façon que les conditions ((3) et (4)) soient vérifiées. Et essayer par la suite de se débarasser des contraintes auxiliaires.

Au cours de ce paragraphe nous allons voir si une telle procédure est possible ; quel est le tableau simplexe à utiliser ; quels sont les pivotages à effectuer ainsi que les propriétés des matrices obtenues par ces opérations de pivotage.

Afin de trouver une solution x^*, (si elle existe), répondant aux conditions 2, 3 et 4 par une procédure de pivotage, nous donnerons une caractérisation des conditions 3 et 4

Le théorème suivant va justifier le fait que nous nous limitons à rechercher un minimum sur les solutions réalisables complémentaires basiques.

Théorème III. 1.

Si on a une solution complémentaire réalisable aux équations de Kuhn et Tucker dans laquelle les vecteurs colonnes correspondant aux variables positives sont linéairement dépendants, on peut construire une autre solution complémentaire réalisable ayant moins de composantes positives et telle que la valeur de la fonction objective, (s'il existe un minimum), ne soit pas plus élevée.

Supposons que dans une solution particulière des conditions de Kuhn et Tucker (2), les variables positives sont : u^1, y^1, x^2, v^2.
Les autres variables étant nulles par définition.
Et partitionnons les matrices C, et A ainsi que les vecteurs p et b de la même façon.
La solution peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^1 \\ -b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$(5) \quad \begin{cases} u^1 - C_{12}\, x^2 + A'_{11}\, y^1 = p^1 \\ \quad - C_{22}\, x^2 + A'_{12}\, y^1 = p^2 \\ \quad\quad - A_{12}\, x^2 = -b^1 \\ v^2 - A_{22}\, x^2 = -b^2 \\ u^1, v^2, x^2, y^1 > 0 \end{cases}$$

Les conditions d'orthogonalité (2C) sont satisfaites puisque

$$u^2 = v^1 = x^1 = y^2 = 0$$

Supposons de plus que les colonnes de (5) sont linéairement dépendantes ; c'est-à-dire qu'il existe z^1, z^2, z^3, z^4 tels que

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -C_{12} & A'_{11} \\ 0 & 0 & -C_{22} & A'_{12} \\ 0 & 0 & -A_{12} & 0 \\ 0 & F & -A_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où z^1, z^2, z^3, z^4 sont respectivement des vecteurs de même dimension que u^1, v^2, x^1, y^1 et dont toutes les composantes sont égales à un même scalaire, respectivement $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
E et F sont les matrices identité correspondant respectivement à la dimension de u^1 et v^2.
ou encore :

$$(6) \begin{cases} z^1 - C_{12} z^3 + A'_{11} z^4 = 0 \\ -C_{22} z^3 + A'_{12} z^4 = 0 \\ -A_{12} z^3 = 0 \\ z^2 - A_{22} z^3 = 0 \end{cases}$$

De (5) et (6), on obtient alors que pour tout réel r :

$$(7) \begin{cases} (u^1 + r z^1) - C_{12}(x^2 + r z^3) + A'_{11}(y^1 + r z^4) = p^1 \\ -C_{22}(x^2 + r z^3) + A'_{12}(y^1 + r z^4) = p^2 \\ -A_{12}(x^2 + r z^3) = -b^1 \\ (v^2 + r z^2) - A_{22}(x^2 + r z^3) = -b^2 \end{cases}$$

et la valeur de la fonction objective correspondante peut s'écrire :

$$\begin{aligned} q(x + rz) &= p^{2'}(x^2 + r z^3) + \tfrac{1}{2}(x^2 + r z^3)' C_{22}(x^2 + r z^3) \\ &= p^{2'}(x^2 + r z^3) - \tfrac{1}{2}(x^2 + r z^3)' p^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 + r z^3)' A'_{12}(y^1 + r z^4) \\ &= \tfrac{1}{2} p^{2'} x^2 + \tfrac{r}{2} p^{2'} z^3 + \tfrac{1}{2} b^{1'} y^1 + \tfrac{r}{2} b^{1'} r z^4 \\ &= \tfrac{1}{2}(p^{2'} x^2 + b^{1'} y^1) + \tfrac{r}{2}(p^{2'} z^3 + b^{1'} z^4) \end{aligned}$$

or $$\begin{aligned} q(x) &= p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ &= p^{2\prime} x^2 + \frac{1}{2} (0 \quad x^{2\prime}) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ &= p^{2\prime} x^2 + \frac{1}{2} x^2 A'_{12} y^1 - \frac{1}{2} x^{2\prime} p^2 \\ &= \frac{1}{2} p^{2\prime} x^2 + \frac{1}{2} x^2 A'_{12} y^1 \\ &= \frac{1}{2} p^{2\prime} x^2 + \frac{1}{2} b^{1\prime} y^1 \end{aligned}$$

d'où, on obtient que :

$$(8) \quad q(x + rz) = q(x) + \frac{r}{2} (p^{2\prime} z^3 + b^{1\prime} z^4)$$

il est évident que la contrainte $\begin{pmatrix} u^1 \\ v^2 \\ x^2 \\ y^1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (9)$

permet de supposer que r a des valeurs positives et négatives. Et comme z est non nul, l'intervalle réalisable pour r n'est pas toute la droite.
Aux bornes finies des valeurs réalisables de r, le vecteur de (9) a moins de composantes positives qu'il n'en a pour $r = 0$.

D'autre part, par (8), on peut voir que si $p^{2\prime} z^3 + b^{1\prime} z^4$ est nul, la fonction objective ne dépend pas de la valeur de r. Tandis que si $p^{2\prime} z^3 + b^{1\prime} z^4$ est non nul, par le choix approprié du signe de r, on a la possibilité de diminuer la valeur de la fonction objective tandis que l'admissibilité est maintenue.

Dans le cas où, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, $z^i \geq 0$ et $p^{2\prime} z^3 + b^{1\prime} z^4 < 0$,

On peut obtenir une amélioration de la fonction objective en choisissant uniquement un r positif et ceci sans jamais faire décroître le nombre de variables positives.
Ce cas correspond à une fonction objective non bornée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Afin de caractériser l'espace des vecteurs w qui permettent de trouver les solutions qui satisfont les conditions du second ordre, considérons les propriétés d'un tableau quadratique obtenu en effectuant certains pivotages.

Soit une solution basique complémentaire des conditions de Kuhn et Tucker (2) : où u^1, y^1, x^2, v^2 sont les variables de base.
La valeur des variables non basiques étant nulle par définition.

En écrivant les conditions de Kuhn et Tucker (2) sous forme de tableau, nous obtenons le tableau suivant :

(10)

		x^1	x^2	y^1	y^2
u^1	p^1	C_{11}	C_{12}	$-A'_{11}$	$-A'_{21}$
u^2	p^2	C_{21}	C_{22}	$-A'_{12}$	$-A'_{22}$
v^1	$-b^1$	A_{11}	A_{12}	0	0
v^2	$-b^2$	A_{21}	A_{22}	0	0

Si nous effectuons le pivotage sur le bloc encadré, nous obtenons le tableau où u^1, y^1, x^2, v^2 sont les variables basiques.

Théorème III.2.

Dans un tableau correspondant à une solution complémentaire basique des conditions de Kuhn et Tucker (2) ;

(a) les blocs définis par les variables de base duales - non base primales et par les variables de base primales - non base duales, sont symétriques.

(b) Tandis que le bloc défini par les variables de base - non base duales est la transposée négative du bloc défini par les variables de base - non base primales.

Si nous reprenons le tableau (10), nous pouvons remarquer que le bloc défini par les variables u^i basiques et x^i non basiques est la matrice C symétrique, le bloc défini par les variables v^i basiques et y^i non basiques est la matrice nulle qui est symétrique. Tandis que le bloc défini par les variables u^i basiques et y^i non basiques est la transposée négative de la matrice A, qui est le bloc défini par les variables v^i basiques et x^i non basiques.

On peut démontrer ce théorème en effectuant le bloc-pivot approprié. Si on effectue l'opération bloc-pivot principal, le tableau est transformé en un autre tableau et on peut voir que le théorème est vrai s'il est vrai pour le bloc pivot.

Démontrons donc premièrement que ceci est vrai pour le bloc pivot, c'est-à-dire :

Si la matrice $M = \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et N symétrique.

Alors la matrice M^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$ où R et U sont symétriques.

Soit I, E, F les matrices unités de taille appropriée :

on a que $M M^{-1} = I = M^{-1} M$

c'est-à-dire :

$$(11) \quad \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & W \\ S & U \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} R & W \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} = I$$

De même $(M M^{-1})' = M^{-1\prime} M' = I$

donc
$$(12) \quad \begin{pmatrix} N & P' \\ -P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' & S' \\ W' & U' \end{pmatrix} = I$$

D'autre part, (11) peut encore s'écrire :

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & W \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} = I$$

En pré et post multipliant cette équation par $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & W \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} = I$$

ou encore
$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & W \\ -S & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -F \end{pmatrix} = I$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} N & P' \\ -P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -W \\ -S & U \end{pmatrix} = I$$

Or l'inverse d'une matrice est unique, donc de ce résultat et de (12), nous pouvons déduire que $R = R'$; $-W = S'$ et $U = U'$

ou encore $M^{-1} = \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$ avec $R = R'$ et $U = U'$

En sachant que $M^{-1} = \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$ où M est le bloc pivot,

on voudrait démontrer que le tableau obtenu est de la forme suivante :

		x^1	u^2	v^1	y^2
u^1	a	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
x^2	b	T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}
y^1	c	T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}
v^2	d	T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}

où $T_{11} = T'_{11}$; $T_{33} = T'_{33}$ et $T_{31} = T'_{13}$

$T_{22} = T'_{22}$; $T_{44} = T'_{44}$ et $T_{42} = T'_{24}$

et $T_{12} = -T'_{21}$; $T_{14} = -T'_{41}$; $T_{32} = -T'_{23}$ et $T_{34} = -T'_{43}$

. $T_{11} = C_{11} - \left(C_{12} \;\; -A'_{11} \right) \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ A_{11} \end{pmatrix}$

$= C_{11} - C_{12} R C_{21} + A'_{11} S C_{21} + C_{12} S' A_{11} + A'_{11} U A_{11}$

or C_{11} est symétrique

$C_{12} R C_{21}$ est symétrique car R l'est et $C_{12} = C'_{21}$

$A'_{11} S C_{21} + C_{12} S' A_{11}$ est symétrique car $T + T'$ est une matrice symé-trique quelle que soit la matrice T.

$A'_{11} U A_{11}$ est symétrique, car U l'est.

et la somme de matrices symétriques est une matrice symétrique

Donc $T_{11} = T'_{11}$

. $T_{33} = U = U' = T'_{33}$

$\bullet\ T_{31} = -\begin{pmatrix} S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ A_{11} \end{pmatrix} = -SC_{21} - UA_{11}$

$T_{13} = -\begin{pmatrix} C_{12} & -A'_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$

$= -C_{12}S' - A'_{11}U$

$= T'_{31}$

$\bullet\ T_{22} = R = R' = T'_{22}$

$\bullet\ T_{44} = 0 - \begin{pmatrix} A_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A'_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= A_{22} R A'_{22}$ symétrique

$= T'_{44}$

$\bullet\ T_{42} = -\begin{pmatrix} A_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I \\ 0 \end{pmatrix}$

$= A_{22} R$

$T_{24} = -\begin{pmatrix} R & -S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A'_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= R A'_{22}$

$= T'_{42}$

$\bullet\ T_{12} = -\begin{pmatrix} C_{12} & -A'_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E \\ 0 \end{pmatrix}$

$= C_{12} R - A'_{11} S$

$T_{21} = -\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ A_{11} \end{pmatrix}$

$= -RC_{21} + S'A_{11} = -T'_{12}$

$$\bullet\ T_{14} = -A'_{21} - (C_{12} \quad -A'_{11}) \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A'_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -A'_{21} + C_{12} R A'_{22} - A'_{11} S A'_{22}$$

$$T_{41} = A_{21} - (A_{22} \quad 0) \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ A_{11} \end{pmatrix}$$

$$= A_{21} - A_{22} R C_{21} + A_{22} S' A_{11}$$

$$= -T'_{14}$$

$$\bullet\ T_{32} = S$$

$$T_{23} = -S'$$

Donc $T_{32} = -T'_{23}$

$$\bullet\ T_{34} = -(S \quad U) \begin{pmatrix} -A'_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= S A'_{22}$$

$$T_{43} = -(A_{22} \quad 0) \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix}$$

$$= -A_{22} S'$$

$$= -T'_{34}$$

Du théorème II.5, on conclut qu'il est utile de caractériser explicitement tous les vecteurs w tels que :

$$A_i\, w = 0 \quad y_i^* > 0 \quad \text{ou} \quad y_i^* \leq 0,\ v_i^* = 0$$

$$w_j = 0 \quad u_j^* > 0 \quad \text{ou} \quad u_j^* \leq 0,\ x_j^* = 0$$

Comme il suffit de traiter les solutions complémentaires basiques, en regardant le tableau (10), on remarque qu'il faut expliciter les formules uniquement pour l'ensemble $\{ \omega_2 \mid A_{12}\, \omega_2 = 0 \}$

Théorème III . 3.

Soient P une matrice $(r \times s)$ de rang r et N une matrice symé-trique $(s \times s)$, telles que $M = \begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix}$ soit inversible.

et posons $M^{-1} = \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$

Alors le complément orthogonal de l'espace engendré par l'ensemble des lignes de P est égal à l'espace engendré par les colonnes de R c'est-à-dire : $\{ t \mid P \bullet t = 0 \} = \{ t \mid t \in R s \}$ où s est un vecteur à s composantes.

Nous avons $\begin{pmatrix} N & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$

ou encore :

$$
\begin{aligned}
NR - P'S &= E \\
-NS' - P'U &= 0 \\
PR &= 0 \\
-PS' &= F
\end{aligned}
$$

Donc en particulier, on a $PR = 0$, c'est-à-dire que l'espace engendré par les colonnes de R est dans le complément ortho-gonal de l'espace engendré par les lignes de P.

De plus la sous-matrice $(R \; -S')$ est de rang s, donc le rang de la matrice R est au moins $s - r$.

on obtient donc l'égalité : $\{ t \mid P \bullet t = 0 \} = \{ t \mid t \in R s \}$

De ce théorème on peut déduire le corollaire suivant :

L'ensemble $\{w_2 / A_{12} w_2 = 0\}$ est l'espace engendré par les colonnes de la matrice définie par les variables basiques x et non basiques u.

en effet, si nous reprenons le tableau (10), le sous tableau correspondant au bloc pivot est :

	x^2	y^1
u^2	C_{22}	$-A'_{12}$
v^1	A_{12}	0

donc dans ce cas-ci, $M = \begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$ où C_{22} est symétrique.

après avoir effectué le pivotage sur M, on obtient le sous-tableau suivant :

	u^2	v^1
x^2	R	$-S'$
y^1	S	U

où $M^{-1} = \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$

Du théorème précédent, nous pouvons déduire que l'espace engendré par les colonnes de A_{12}, c'est-à-dire $\{w_2 / A_{12} w_2 = 0\}$ est égal à l'espace engendré par les colonnes de R, c'est-à-dire $\{w_2 / w_2 \in Rt\}$ où t est un vecteur de même dimension que u^2. Ce qui revient à dire que l'ensemble $\{w_2 / A_{12} w_2 = 0\}$ est l'espace engendré par les colonnes de la matrice définie par les variables basiques x et non basiques u.

De ce résultat nous pouvons immédiatement prouver les théorèmes suivants :

Théorème III. 4

Une solution réalisable basique complémentaire non dégénérée aux équations de Kuhn et Tucker (2) est un minimum local du problème (1) de programmation quadratique.
si et seulement si :
La matrice définie par les variables basiques x et non basiques u du tableau correspondant est semi-définie positive.

Soit $\begin{pmatrix} R & -P' \\ P & U \end{pmatrix}$ l'inverse du bloc pivot $\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$

Avant d'effectuer le pivotage sur le bloc pivot $\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$

nous avons le tableau suivant :

	x^1	x^2	y^1	y^2
u^1				
u^2		C_{22}	$-A'_{12}$	
v^1		A_{12}	0	
v^2				

après le pivotage, x^2 devient basique en place de u^2, et y^1 en place de v^1 ; on obtient donc :

	x^1	u^2	v^1	y^2
u^1				
x^2		R	$-P'$	
y^1		P	U	
v^2				

et la matrice définie par les variables basiques x et non basiques u de ce tableau est donc la matrice R.

Nous devons donc démontrer que R est semi-définie positive.

$W = \{ w / w_1 = 0 \text{ et } A_{12}\, w_2 = 0 \}$ est par le théorème III. 3 et le corollaire, équivalent à l'ensemble :

$= \{ w / w_1 = 0 \text{ et } w_2 = Rt \}$ où t est un vecteur de même dimension que u^2.

Comme la solution est non dégénérée, par la remarque que nous avons faite après le corollaire II.4, nous savons que pour tout $w \in W$; $w'Cw \geq 0$

et donc : pour tout $w \in W$

$$w'Cw = \begin{pmatrix} 0 & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_2' C_{22}\, w_2$$

$$= t'R'C_{22}\, Rt$$

$$= t'R\, C_{22}\, Rt$$

or $\begin{pmatrix} C_{22} & -A_{12}' \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -P' \\ P & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$

ou encore :

$$C_{22} R - A_{12}' P = E$$

$$A_{12} R = 0 \quad \text{et donc } R A_{12}' = 0$$

En prémultipliant la première équation par R, nous obtenons :

$$RC_{22} R - R A_{12}' P = R$$

et par la deuxième équation, nous pouvons dire que :

$$R C_{22} R = R$$

D'où nous concluons :

pour tout $w \in W$; $t'Rt = w_2' C_{22}\, w_2 \geq 0$

où t est un vecteur quelconque

Et donc R est semi-définie positive.

Le théorème III.5 va donner le cas général.

Théorème III.5 :

Soit une solution réalisable basique complémentaire du système incomplet de Kuhn et Tucker :

$$(13)\left\{\begin{array}{l} u^* = p + C\,x^* - A'y^* \\ v^* = -b + A\,x^* \\ 0 = u_j^*\,x_j^* = y_i^*\,v_i^* \quad \text{pour tous } i, j. \\ x^* \geq 0 \ ; \ v^* \geq 0 \end{array}\right.$$

telle que la matrice du tableau correspondant, définie par les variables basiques x et non basiques u est semi-définie positive.
Alors, la solution est un minimum local du problème restreint suivant :

$$(13')\left\{\begin{array}{l} \text{minimiser } (p'x + \frac{1}{2}\,x'C\,x) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad Ax \geq b \\ \quad A_i\,x = b_i \ \text{ si } y_i \text{ basique et } y_i^* \leq 0 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad x_j = 0 \ \text{ si } u_j \text{ basique et } u_j^* \leq 0 \end{array}\right.$$

En suivant un raisonnement analogue à celui fait au chapitre II pour le corollaire II.4 et le théorème II.5 ;

Par le corollaire II-4, nous savons que la solution est un minimum local du problème (13') si et seulement si :

- les conditions de Kuhn et Tucker (13) sont vérifiées.

et
- pour tout vecteur w non nul tel que

$$(14)\begin{cases} A_i\, w = 0 & \text{si } y_i^* > 0 \text{ ou } y_i \text{ basique } y_i^* \leq 0 & (a) \\ A_i\, w \geq 0 & \text{si } y_i^* = v_i^* = 0 & (b) \\ w_j = 0 & \text{si } u_j^* > 0 \text{ ou } u_j \text{ basique et } u_j^* \leq 0 & (c) \\ w_j \geq 0 & \text{si } u_j^* = x_j^* = 0 & (d) \end{cases}$$

on a $w' C w \geq 0$.

Or par notre hypothèse et par le théorème II-5, nous savons que pour tout vecteur w ~~non~~ nul vérifiant les conditions (14(a)) et (14(c)), on a $w' C w \geq 0$.

De plus l'ensemble des vecteurs w soumis aux quatre conditions de (14) est inclus dans l'ensemble des vecteurs w soumis uniquement aux conditions 14(a) et 14(c)

Donc pour tout vecteur w vérifiant les conditions (14), $w' C w \geq 0$.

Nous avons donc obtenu une description des conditions nécessaires et suffisantes du corollaire II - 4.
Nous devrons donc pour chaque tableau obtenu, vérifier que la matrice définie par les variables basiques x et non basiques u est semi-définie positive.
Introduisons à cet effet une définition qui rendra plus aisée la suite de l'exposé.

Pour toute solution basique complémentaire, non nécessairement réalisable, des conditions de Kuhn et Tucker (2), <u>on appelle matrice critique,</u> la matrice du tableau correspondant définie par les variables basiques x et non basiques u.

Par exemple, dans le tableau (10), la matrice critique est vide, car aucune variable x n'est basique.
Dans le tableau suivant :

		x^1	u^2	v^1	y^2
u^1	a	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}
x^2	b	T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}
y^1	c	T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}
v^2	d	T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}

la matrice critique est T_{22}.

Dans les théorèmes suivants, nous verrons que la semi-définie positivité de la matrice critique est une propriété héréditaire par certaine opération de pivotages.

Théorème III.6

Soit la matrice critique du tableau correspondant à une solution basique complémentaire des conditions de Kuhn et Tucker (2), semi-définie positive ou vide.
Si l'on effectue l'opération pivot de ce tableau en utilisant un élément diagonal positif.
Alors la matrice critique du tableau résultant est semi-définie positive.

Nous allons démontrer ce théorème en effectuant la transformation pivot et en utilisant les propriétés des blocs du tableau (théorème III.2) qui représentent les relations de symétrie de base de tout tableau correspondant à une solution basique complémentaire.
Nous devons envisager quatre cas :
<u>1er cas :</u> L'élément pivot p est dans la matrice critique courante.
On peut supposer, sans perdre la généralité, que p est le dernier élément de la diagonale principale.
c'est-à-dire ; la matrice critique semi-définie positive est :

$$\begin{pmatrix} M & m \\ m' & p \end{pmatrix}$$

correspondant au tableau suivant :

	$u_1 \; ---- \; u_{n-1}$	u_n
x_1 ⋮ x_{n-1}	M	m
x_n	m'	p

On fait le pivotage sur l'élément p, c'est-à-dire on rend u_n basique en place de x_n

On obtient alors le tableau suivant :

	u_1 ---- u_{n-1}	x_n
x_1 ... x_{m-1}	$M - \frac{m\,m'}{p}$	$-\frac{m}{p}$
u_n	$\frac{m'}{p}$	$\frac{1}{p}$

la nouvelle matrice critique est donc :

$$\left(M - \frac{m\,m'}{p} \right)$$

On remarque qu'après le pivotage sur le nombre positif p, la taille de la matrice critique diminue de un.

or pour tout vecteur $\begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix}$, $0 \leq (z' \ \omega') \begin{pmatrix} M & m \\ m' & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} = z'Mz + 2m'z\,\omega + p\omega^2$

cette inégalité est en particulier vraie pour $\omega = -\frac{1}{p} m'z$

Il s'en suit donc que pour tout vecteur z :

$$0 \leq z'Mz - 2\frac{1}{p}(m'z)^2 + \frac{1}{p}(m'z)^2$$

$$0 \leq z'Mz - \frac{1}{p} z'm\,m'z$$

ou encore

$$0 \leq z'\left(M - \frac{1}{p} m\,m'\right) z$$

et donc, la nouvelle matrice critique est semi-définie positive.

<u>2^e cas :</u> L'élément pivot est sur la diagonale principale du bloc défini par la variable basique v et la variable non basique y.

Nous remarquons que la semi-définie positivité de la matrice critique M implique la semi-définie positivité de la matrice définie par les variables basiques primales, non basiques duales, qui est soit la matrice nulle, soit la matrice de la forme $\begin{pmatrix} M & MA'_{22} \\ A_{22}M & A_{22}MA'_{22} \end{pmatrix}$

où M est la matrice critique définie par x^2 et u^2 et le reste est défini par v^2 et y^2.

Si z et w sont des vecteurs arbitraires de taille appropriée, on a :

$$(z', w') \begin{pmatrix} M & MA'_{22} \\ A_{22}M & A_{22}MA'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$
$$= z'Mz + w'A_{22}Mz + z'MA'_{22}w + w'A_{22}MA'_{22}$$
$$= (z' + w'A_{22})\,M\,(z + A'_{22}w) \geq 0$$

Après cette observation, on peut faire une démonstration analogue au premier cas, sachant que la nouvelle matrice critique sera la transformée de la matrice critique M.

<u>3^e cas :</u> L'élément pivot est dans le bloc défini par la variable basique u et la variable non basique x.
Dans ce cas, la taille de la matrice critique va croître de 1.
En utilisant le théorème III.2, on sait que la nouvelle matrice sera la transformée de la matrice de la forme : $\begin{pmatrix} M & -m \\ m' & p \end{pmatrix}$

où M est la matrice critique courante et p l'élément pivot positif.

Après avoir effectué le pivot sur p, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} M + \frac{1}{p}\, m\, m' & \frac{m}{p} \\ \frac{m'}{p} & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

où x_n devient la variable basique en place de u_n.
et la nouvelle matrice critique est donc :

$$\begin{pmatrix} M + \frac{1}{p}\, m\, m' & \frac{1}{p}\, m \\ \frac{1}{p}\, m' & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

et pour tout vecteur z et nombre w, on a :

$$(z', w) \begin{pmatrix} M + \frac{1}{p}\, m\, m' & \frac{1}{p}\, m \\ \frac{1}{p}\, m' & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$= z'Mz + \frac{1}{p} z' m\, m' z + \frac{1}{p}\, w\, m' z + \frac{1}{p} z' m\, w + \frac{1}{p}\, w^2$$

$$= z'Mz + \frac{1}{p} (m'z)^2 + \frac{2}{p}\, w\, m'z + \frac{1}{p}\, w^2$$

$$= z'Mz + \frac{1}{p} (m'z + w)^2$$

$$\geq 0$$

c'est-à-dire : la nouvelle matrice critique est semi-définie positive.

<u>4e cas :</u> L'élément pivot est dans le bloc défini par la variable basique y et la variable non basique v.
Dans ce cas, la taille de la matrice critique ne change pas.
Si M est la matrice critique courante, la nouvelle matrice critique est de la forme : $M + \frac{1}{p}\, m\, m'$

et pour tout vecteur z, on a :

$$z'(M+\frac{1}{p}mm')z = z'Mz + \frac{1}{p}z'mm'z$$
$$= z'Mz + \frac{1}{p}(m'z)^2$$
$$\geq 0$$

et donc la nouvelle matrice critique est semi-définie positive si M l'est.

Théorème III. 7.

Soit la matrice critique du tableau correspondant à une solution basique complémentaire des équations de Kuhn et Tucker, vide ou semi-définie positive.
On effectue une transformation sur des blocs pivots de dimension (2×2) dans ce tableau.
Le bloc pivot étant défini par une variable primale basique, une variable duale basique et leur variable complémentaire non basique correspondante.
Supposons de plus que
. l'élément défini par la variable primale basique choisie et son complémentaire non basique est nul.
. Dans le cas où la matrice est non vide, la variable duale basique définie est une variable y.
Dans ce cas, la matrice critique du tableau résultant sera semi-définie positive.

Par le théorème III. 2. et le fait que le bloc pivot est régulier, on voit que la structure des pivots (2×2) est : $\begin{pmatrix} q & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}$

où q est un nombre réel et p non nul

et l'inverse de cette matrice est : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & \frac{q}{p^2} \end{pmatrix}$

Nous devons considérer trois cas :

1^er cas : La matrice critique du tableau initial M est vide.

Nous allons voir que, dans ce cas, après avoir effectué le bloc pivot indiqué, la matrice critique résultante $\hat{M}$ est l'élément nul.

Avant d'effectuer l'opération double pivot, nous avons la situation suivante :

	x	x_n	y_1	y
u				
u_n		q	$-p$	
v_1		p	0	
v				

après un premier pivot sur l'élément q, la variable x_n devient basique en place de u_n et on obtient le sous-tableau:

	u_n	y_1
x_n	$1/q$	$-p/q$
v_1	$-p/q$	p^2/q

après un deuxième pivot sur l'élément p^2/q, la variable y_1 devient basique en place de v_1

et on obtient le sous-tableau :

	u_n	v_1
x_n	$\frac{1}{q} - \frac{p^2}{q^2}\,\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p^2}$
y_1	$-\frac{p}{q}\,\frac{q}{p^2}$	$\frac{q}{p^2}$

ou encore

	u_n	v_1
x_n	0	$\frac{1}{p}$
y_1	$-\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Nous obtenons donc finalement la situation suivante :

	x	u_n	v_1	y
u				
x_n		$\boxed{0}$		
y_1				
v				

et donc la matrice critique $\hat{M} = 0$

<u>2^e cas :</u> La matrice critique M est non vide et la variable basique est une variable x.

On peut donc déduire qu'après le pivot, la taille de la matrice critique décroît de 1

Comme la matrice critique est semi-définie par hypothèse, et comme un élément de la diagonale principale défini par le choix de x basique et son complément non basique est nul, on sait que toute la ligne et toute la colonne définies par cet élément diagonal sont nulles (propriété 8 du chapitre I)

Par le théorème III. 2, avant le pivotage, on a la situation suivante :

$$\begin{pmatrix} M & 0 & -r \\ 0 & 0 & -p \\ r' & p & q \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est la matrice critique}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & q \end{pmatrix} \text{ le bloc pivot}$$

après un premier pivotage sur l'élément q, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} M + \frac{r\,r'}{q} & r\frac{p}{q} & \frac{1}{q}r \\ \frac{p}{q}r' & \frac{p^2}{q} & \frac{p}{q} \\ \frac{r'}{q} & \frac{p}{q} & \frac{1}{q} \end{pmatrix} \quad \text{où } v_1 \text{ devient variable basique en place de } y_1$$

après un second pivotage sur l'élément $\frac{p^2}{q}$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} M & \frac{r}{p} & 0 \\ \frac{r'}{p} & \frac{q}{p^2} & \frac{1}{p} \\ 0 & -\frac{1}{p} & 0 \end{pmatrix}$$ où u_n devient variable basique en place de x_n

La nouvelle matrice critique $\hat{M}$ est donc M qui est une matrice semi-définie positive par hypothèse.

Nous avions donc avant l'opération double pivot, la situation suivante :

	x^1	u^2	u_n	v_1	v^1	y^2
u^1						
x^2		M	0			
x_n		0	0	$-p$		
y_1			p	q		
y^1						
v^2						

où $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice critique

et $\begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & q \end{pmatrix}$ le bloc pivot

Et nous obtenons après l'opération double pivot :

			x_n	y_1		
u_n		M				
v_1						

<u>3^e cas :</u> La matrice critique M est non vide et la variable primale basique est v tandis que la variable duale basique est y
On peut donc dire que la taille de la matrice critique ne change pas.

En utilisant le théorème III-2, on peut dire qu'avant d'effectuer le double pivot, on a un tableau de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} M & -r & 0 \\ r & q & -p \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$ où M est la matrice critique initiale

et $\begin{pmatrix} q & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}$ le bloc pivot.

Après un premier pivot sur l'élément q, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} M + \frac{rr}{q} & \frac{r}{q} & -\frac{rp}{q} \\ \frac{r}{q} & \frac{1}{q} & -\frac{p}{q} \\ -\frac{rp}{q} & -\frac{p}{q} & \frac{p^2}{q} \end{pmatrix}$$ où v_n devient variable basique en place de y_m.

Après un second pivot sur l'élément $\frac{p^2}{q}$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} M & 0 & \frac{r}{p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p} \\ \frac{r}{p} & -\frac{1}{p} & \frac{q}{p^2} \end{pmatrix}$$ où la variable y_n devient basique en place de v_m

La nouvelle matrice critique $\hat{M}$ est donc M, qui est une matrice semi-définie positive par hypothèse.

Nous avions donc avant l'opération double pivot, la situation suivente :

	x^1	u^2	v^1	v_n	y_n	y^2
u^1						
x^2		M			0	
y^1						
y_m				q	$-p$	
v_m		$0'$		p	0	
v^2						

où (M) est la matrice critique

et $\begin{pmatrix} q & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}$ le bloc pivot

Et nous obtenons après l'opération double pivot :

	x^1	u^2	v^1 y_m	v_m y^2
u^1				
x^2		M		
y^1 v_n				
y_n v^2				

Revenons maintenant au résultat du théorème III - 5
Nous avons que toute solution basique réalisable primale des équations de Kuhn et Tucker est un minimum local d'un problème obtenu à partir du problème original où certaines variables primales non basiques sont restreintes à la valeur nulle.

Il est assez difficile de traiter le problème lorsqu'on introduit plusieurs restrictions supplémentaires de formes différentes ; il serait plus avantageux d'introduire une seule contrainte d'inégalité équivalente à l'ensemble ou à un sous-ensemble des contraintes d'égalités.
Une telle contrainte peut être la somme des variables restreintes qui seraient non positives.
Cette contrainte et les contraintes de non négativité ensemble restreignent à la valeur nulle les variables indiquées.
Il faut trouver la forme transformée des équations de Kuhn et Tucker du problème restreint.
La difficulté réside en l'introduction d'une contrainte contenant des variables d'écart. v.

D'un point de vue concret, supposons que dans la solution complé-mentaire basique restreinte, les variables basiques sont u^1, x^2, y^1, v^2. Nous avons donc des restrictions supplémentaires sur des composantes de v^1 et x^1.

On introduit donc une nouvelle contrainte :

(15) $c'x^1 + d'v^1 \leq -b^{m+1}$ où $c \geq 0$, $d \geq 0$ et $b^{m+1} = 0$

les contraintes sont alors :

$$\begin{cases} v^1 = -b^1 + A_{11}\, x^1 + A_{12}\, x^2 \\ v^2 = -b^2 + A_{21}\, x^1 + A_{22}\, x^2 \\ d'v^1 + v^{m+1} = -b^{m+1} - c'\, x^1 \end{cases}$$

Si nous écrivons les équations de Kuhn et Tucker appropriées à ce problème, en tenant compte des propriétés du théorème III-2, nous obtenons :

		x^1	x^2	y^1	y^2	y^{m+1}
u^1	p^1	C_{11}	C_{12}	$-A'_{11}$	$-A'_{21}$	$c+A'_{11}\, d$
u^2	p^2	C_{21}	C_{22}	$-A'_{12}$	$-A'_{22}$	$A'_{12}\, d$
v^1	$-b^1$	A_{11}	A_{12}	0	0	0
v^2	$-b^2$	A_{21}	A_{22}	0	0	0
v^{m+1}	$d'b^1 - b^{m+1}$	$-c' - d'A_{11}$	$-d'A_{12}$	0	0	0

Si nous effectuons maintenant le bloc pivot nécessaire pour rendre x^2 et y^1 basiques, nous obtenons un tableau où la dernière ligne et la dernière colonne sont :

	x^1	u^2	v^1	y^2	y^{m+1}
u^1					c
x^2					0
y^1					d
v^2					0
v^{m+1}	$-b^{m+1}$	c'	0	$-d'$	0	0

(voir appendice III.1.)

Le tableau transformé des équations de Kuhn et Tucker au problème restreint dans lequel on impose la restriction (15) aux contraintes originales peut donc être écrit sous cette forme. C'est-à-dire nous avons pu écrire la nouvelle contrainte conformément au tableau transformé comme s'il était le tableau original et imposer les restrictions sur les variables x.

Nous avons écrit "$-b^{m+1}$" à droite au lieu de "0" afin de pouvoir relâcher cette contrainte temporaire.
On peut traiter b^{m+1} comme un paramètre dont la valeur originale est nulle et est, en général négative.

Nous voudrions voir comment la valeur de la fonction objective dépend de la valeur de ce paramètre.

Soit une solution basique complémentaire du système de Kuhn et Tucker du problème augmenté de la contrainte additionnelle, qui est une primale réalisable pour certaines valeurs du paramètre b^{m+1}. Si nous fixons les variables basiques et que nous définissons les variables non basiques comme nulles, la solution définie par la base va en général dépendre du paramètre b^{m+1}

Excepté dans le cas où l'on ne peut changer la valeur de b^{m+1} sans perdre l'admissibilité, on a un intervalle fini ou infini de solutions définies réalisables.

Nous allons voir par le théorème III - 8, comment la fonction objective va dépendre du paramètre b^{m+1} sur cet intervalle d'admissibilité.

Théorème III - 8

Quand la fonction objective dépend du paramètre b^{m+1}, elle est strictement croissante avec ce paramètre.

Pour toute solution complémentaire des équations de Kuhn et Tucker, on a :

$$\begin{cases} u = p + Cx - A'y \\ v = -b + Ax \\ u'x + y'v = 0 \\ u, x, y, v \geq 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} u'x + y'v &= p'x + x'Cx - y'Ax - y'b + y'Ax \\ &= p'x + x'Cx - b'y \\ &= 0 \end{aligned}$$

or $q(x) = p'x + \frac{1}{2}x'Cx = \frac{1}{2}p'x + \frac{1}{2}(p'x + x'Cx)$
$= \frac{1}{2}(p'x + b'y)$

c'est-à-dire $\quad q(x) = \frac{1}{2}(p'x + b'y) \qquad (16)$

Supposons que la solution complémentaire basique des équations de Kuhn et Tucker soit donnée par les variables basiques u^1, x^2, y^1, v^2

et les variables non basiques sont nulles.

Nous noterons la base par $\mathcal{B}$.

Remarquons qu'en particulier $x^1 = y^2 = 0$

Traitons les vecteurs p^2 et b^1 comme variables tandis que $\mathcal{B}(u^1\, x^2\, y^1\, v^2)$ reste fixe.

Afin de rendre x^2, y^1 variables basiques, nous devons effectuer un pivotage sur le bloc $\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$ (voir tableau 10)

Notons $\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$ l'inverse du bloc pivot.

A partir des équations de Kuhn et Tucker, on peut exprimer x^2, y^1 en termes de p et b comme suit :

on a
$$\begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^1 \\ -b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

et donc
$$0 = p^2 + C_{22}\, x^2 - A'_{12}\, y^1$$
$$0 = -b^1 + A_{12}\, x^2$$

ou encore
$$\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p^2 \\ b^1 \end{pmatrix}$$

et ceci en tenant compte de la base $\mathcal{B} = (u^1\; x^2\; y^1\; v^2)$

Nous obtenons donc $\begin{pmatrix} x^2(p,b\,/\,B) \\ y^1(p,b\,/\,B) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^2 \\ -b^1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire une relation linéaire définie pour tout vecteur (p,b)

Nous pouvons aussi écrire : $x^1(p.b\,/\,B) = 0$

et $y^2(p.b\,/\,B) = 0$

D'où on définit la fonction $f(p.b)$ par :

$$f(p.b\,/\,B) = \frac{1}{2}\left(p^{2'}x^2(p.b) + b^{1'}y^1(p.b)\right)$$

$f(p.b\,/\,B)$ est définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et y est différentiable.

Le gradient de la fonction f peut s'exprimer sous la forme :

$$\nabla f(p.b\,/\,B) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2(p.b/B) \\ y^1(p.b/B) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(p.b\,/\,B) \\ x^2(p.b\,/\,B) \\ y^1(p.b\,/\,B) \\ y^2(p.b\,/\,B) \end{pmatrix}$$

Remarquons que :

$$f(p.b\,/\,B) = \frac{1}{2}\left(p^{2'}x^2(p,b) + b^{1'}y^1(p,b)\right)$$

$$= q\left(x(p,b\,/\,B)\right)$$

où $x(p,b\,/\,B)$ n'est pas nécessairement un minimum de q sur l'ensemble de travail.

on a donc prouvé que : $\nabla_{p,b}\, q\left(x(p.b\,/\,B)\right) = \begin{pmatrix} x(p,b\,/\,B) \\ y(p,b\,/\,B) \end{pmatrix}$

De ce théorème, on tire immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire :

Si, dans une solution complémentaire basique, la variable duale y^{m+1} correspondant à la contrainte auxiliaire n'est pas dans la base, la valeur de la fonction objective ne dépend pas du paramètre b^{m+1}, tandis que celui-ci varie dans son intervalle d'admissibilité.
Et si y^{m+1} est variable basique positive, alors la fonction objective est strictement croissante avec b^{m+1}.

II : Algorithme du minimum local.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que :
Si on a une solution complémentaire basique réalisable primale des équations de Kuhn et Tucker (2a, 2b) et que la matrice critique correspondante est semi-définie positive, on peut maintenir en même temps la complémentarité et la semi-définie positivité de la matrice critique en effectuant une suite d'opérations pivots admissibles.
Et la solution basique courante peut toujours être interprétée comme un minimum local d'un problème restreint.
De plus, nous savons comment varie la fonction objective en relâchant la contrainte temporaire.
Le développement théorique indique clairement la nature de l'algo-rithme mais on a encore une certaine liberté dans la construction de celui-ci.
Pour la facilité des calculs, on va profiter de cette liberté, dans le choix de la contrainte temporaire.

Nous devons avoir initialement une solution basique complémentaire réalisable primale. Pour ce faire, effectuer toute suite d'opérations de pivotage désirée sur la matrice A, jusqu'à ce qu'on ait l'admissibilité primale. C'est-à-dire jusqu'à obtention de variables x basiques et v non basiques. Et effectuer la suite symétrique de pivotage sur $-A'$ de telle façon que les compléments des nouvelles variables primales basiques deviennent non basiques et les compléments des nouvelles variables primales non basiques, deviennent basiques. C'est-à-dire de

telle façon que les variables y correspondant aux variables v non basiques deviennent basiques et les variables u correspondant aux variables x basiques deviennent non basiques.
Par le développement théorique, nous savons que nous pouvons interpréter le tableau résultant comme le tableau de Kuhn et Tucker d'un nouveau problème de programmation quadratique équivalent. Et nous pouvons procéder à la résolution de ce nouveau problème, plus facile à traiter que le tableau original.
Par le théorème III.7, nous savons que les opérations pivots utilisées dans l'initialisation sont admissibles et donc que la matrice critique obtenue est semi-définie positive. En fait étant donné qu'au départ la matrice critique était vide, nous savons même que la nouvelle matrice critique est la matrice nulle.

Avant de discuter les différentes étapes de l'algorithme, nous allons donner les définitions des termes employés.

w_i ≡ variable dans la base et la valeur courante de celle-ci.
$i = 0, 1, \ldots, m+n$
z_i ≡ variable hors base
$i = 0, 1, \ldots, m+n$
Le couple (w_i, z_i) forme un couple de variables complémentaires.
T_{ij} ≡ l'élément dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne du tableau
q_i ≡ terme constant de la valeur de la variable basique w_i.
$i = 0, \ldots, m+m$
$q_{\lambda i}$ ≡ coefficient du terme linéaire de la valeur de la variable basique w_i, à multiplier par le paramètre λ.

Le tableau de Kuhn-Tucker est donc représenté de la façon suivante :

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & & & z_j \\
\hline
w_i & q_i & q_{\lambda i} & T_{ij} \\
\hline
\end{array}$$

En considérant les équations de Kuhn et Tucker, on a initialement :

$w_i = u^i = p^i$ pour $i = 1, ..., n$

$w_i = v^{i-n} = -b^{i-n}$ pour $i = n+1, ..., n+m$

w_0 est la variable d'écart pour la contrainte auxiliaire.

On a donc :

$q_0 = 0$

$q_i = p^i \quad i = 1, ..., n$

$q_i = -b^{i-n} \quad i = n+1, ..., n+m$

$q_{\lambda 0} = 1$

$q_{\lambda i} = 0 \quad i = 1, ..., n+m$

Le tableau initial a donc la forme suivante :

Variables basiques		Valeur 1	λ	z_1 x^1 ... z_n x^n	z_{n+1} y^1 ... z_{n+m} y^m	z_0 y^{m+1}
w_1	u^1	p^1	0	c_{11} ... c_{1n}	$-a_{11}$ ... $-a_{m1}$	e_1
⋮		⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮
w_n	u^n	p^n	0	c_{n1} ... c_{nn}	$-a_{1n}$ ... $-a_{mn}$	e_n
w_{n+1}	v^1	$-b^1$	0	a_{11} ... a_{1n}	0 ... 0	0
⋮		⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮
w_{n+m}	v^m	$-b^n$	0	a_{m1} ... a_{mn}	0 ... 0	0
w_0	v^{n+1}	0	1	$-e_1$ ... $-e_n$	0 ... 0	0

où nous avons introduit la notation :

$$\lambda = -b^{m+1}$$

et $e_j = -a_{m+1,j} \qquad j = 1, \ldots, n$

ces coefficients seront spécifiés plus loin, à l'introduction de la contrainte auxiliaire.

La contrainte correspondant à w_0 sera la contrainte auxiliaire temporaire.

Dans la suite, nous allons supposer que la valeur des variables basiques est non nulle.

Nous pouvons maintenant décrire les différentes étapes de l'algorithme.

Nous allons choisir des contraintes et restrictions de non négativité de notre problème, en fonction de règles qui seront spécifiées plus loin, et nous formerons un ensemble des indices les identifiant. Soit I cet ensemble.

Nous formons alors un nouveau problème où l'on restreint les inégalités des contraintes et restrictions de non négativité choisies de façon à ce qu'elles soient satisfaites en temps qu' égalité stricte.

L'ensemble des solutions réalisables de ce nouveau problème est alors un sous ensemble des solutions réalisables du problème original. C'est pourquoi nous appelons ce nouveau problème, le problème restreint $P(I)$.

Le problème original étant noté $P(\phi)$ (où ϕ est **le** symbole du vide)

L'algorithme décrit le travail suivant :

Partant d'une solution basique des équations de Kuhn et Tucker de P, par un choix approprié de I, on trouve le problème restreint $P(I_1)$ pour lequel, par le théorème III-5, la solution est un point minimum local.

Ayant un problème restreint $P(I_k)$, où I_k est non vide, et un minimum local de ce problème, on définit une procédure finie de laquelle il résulte :

- soit un nouveau problème restreint $P(I_{k+1})$ et un minimum local de ce problème.
- soit le fait que la fonction objective est non bornée inférieurement sur l'ensemble des solutions réalisables

Dans l'initialisation, on définit : $T_{0j} = 0 \quad j = 1, \dots, n+m$
et $\lambda = 0$

comme résultat de l'initialisation, on a une solution basique com-plémentaire réalisable primale avec le tableau correspondant.

. <u>Dans l'étape 1</u>, on détermine si la solution courante est optimale ou non.

- Si toutes les valeurs des variables basiques sont supérieures à zéro, la solution présente est une solution optimale du problème original.
  on arrête donc la procédure.
- sinon, par le théorème III-5, on peut considérer cette solution comme un point minimum local pour un problème restreint $P(J)$ où J contient les indices de toutes les variables primales non basiques compléments des variables basiques non positives.

<u>Dans l'étape 2.</u> on va ajouter aux conditions de Kuhn et Tucker du problème restreint, la contrainte appropriée de la forme de l'équation (15)

-on définit $J = \{ j \neq 0 \;/\; \omega_j < 0$ et ω_j variable duale. $\}$

-on définit la dernière ligne du tableau en introduisant :

$$T_{oj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin J \\ -1 & \text{si } j \in J \end{cases}$$

Remarquons que nous sommes relativement libre dans la définition de la valeur numérique de e_j, mais elle doit satisfaire aux propriétés suivantes :

. $e_j \geq 0$ pour $j \in J$

. $\sum_{j \in J} e_j > 0$

. $\omega_j e_j < 0$ pour au moins un j de J.

Le choix de $e_j = 1$ pour j dans J, est donc adéquat.

Les étapes suivantes nous permettront de trouver un nouveau problème restreint ayant une solution minimum locale meilleure que la solution courante, ou de déterminer si la fonction objective est non bornée dans la région réalisable.

<u>Dans l'étape 3 :</u> on réalise l'admissibilité du système restreint.

-on définit r par $\dfrac{\omega_r}{e_r} = \min\limits_{j \in J} \left\{ \dfrac{\omega_j}{e_j} \;/\; e_j > 0 \right\}$

. et on effectue l'opération de double pivotage sur $< \omega_r, z_o >$ et $< \omega_o, z_r >$

on obtient ainsi une solution basique complémentaire réalisable primale.

Dans l'étape 4, on essaye de relâcher la contrainte auxiliaire en faisant croître λ (donc décroître b_{m+1}) à partir de sa valeur originale nulle.
Par le théorème III.8, nous savons qu'un accroissement de λ implique une décroissance de la valeur de la fonction objective, et donc une amélioration de la solution courante.

1e cas : si $q_{\lambda j} \geq 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, n+m$,
quelle que soit la valeur de $q_{\lambda j}$, la solution reste réalisable.
on conclut donc que la fonction objective n'est pas bornée inférieurement.
on arrête donc la procédure.

2e cas : Il existe au moins un j pour lequel $q_{\lambda j}$ est négatif
on détermine r par $-\frac{q_r}{q_{\lambda r}} = \min\left\{ -\frac{q_j}{q_{\lambda j}} \mid q_{\lambda j} < 0 \right\}$

on obtient ainsi une borne supérieure pour la valeur de λ telle que la solution reste réalisable.
A cette borne, l'admissibilité de la base prend fin. Nous allons alors essayer de changer la base courante en utilisant l'une des opérations pivots admissibles.
Ce qui peut se faire dans certains cas.
. si $T_{rr} > 0$, on passe à l'étape 5.
. si $T_{rr} \leq 0$ et w_r primale, on passe à l'étape 6.
. si $T_{rr} \leq 0$ et w_r duale, l'admissibilité duale n'est pas vérifiée à ce stade.
on laisse alors la variable w_r devenir négative, et on continue d'accroître la valeur de λ. On forme donc un nouveau problème restreint.

On détermine r' par $-\dfrac{q_{r'}}{q_{\lambda r'}} = \min\left\{-\dfrac{q_j}{q_{\lambda j}} \;/\; q_{\lambda j} < 0 \text{ et } j \neq r\right\}$

et on recommence l'étape 4.

- Dans l'étape 5. on effectue le pivot $< w_r, z_r >$

Par le théorème III.6, nous savons que ce pivot est admissible.

1er cas. si $r = 0$

On obtient alors une solution minimum locale au problème restreint considéré.

On supprime alors la ligne de la contrainte auxiliaire et on remonte à la première étape.

2e cas. si $r \neq 0$

on retourne à l'étape 4.

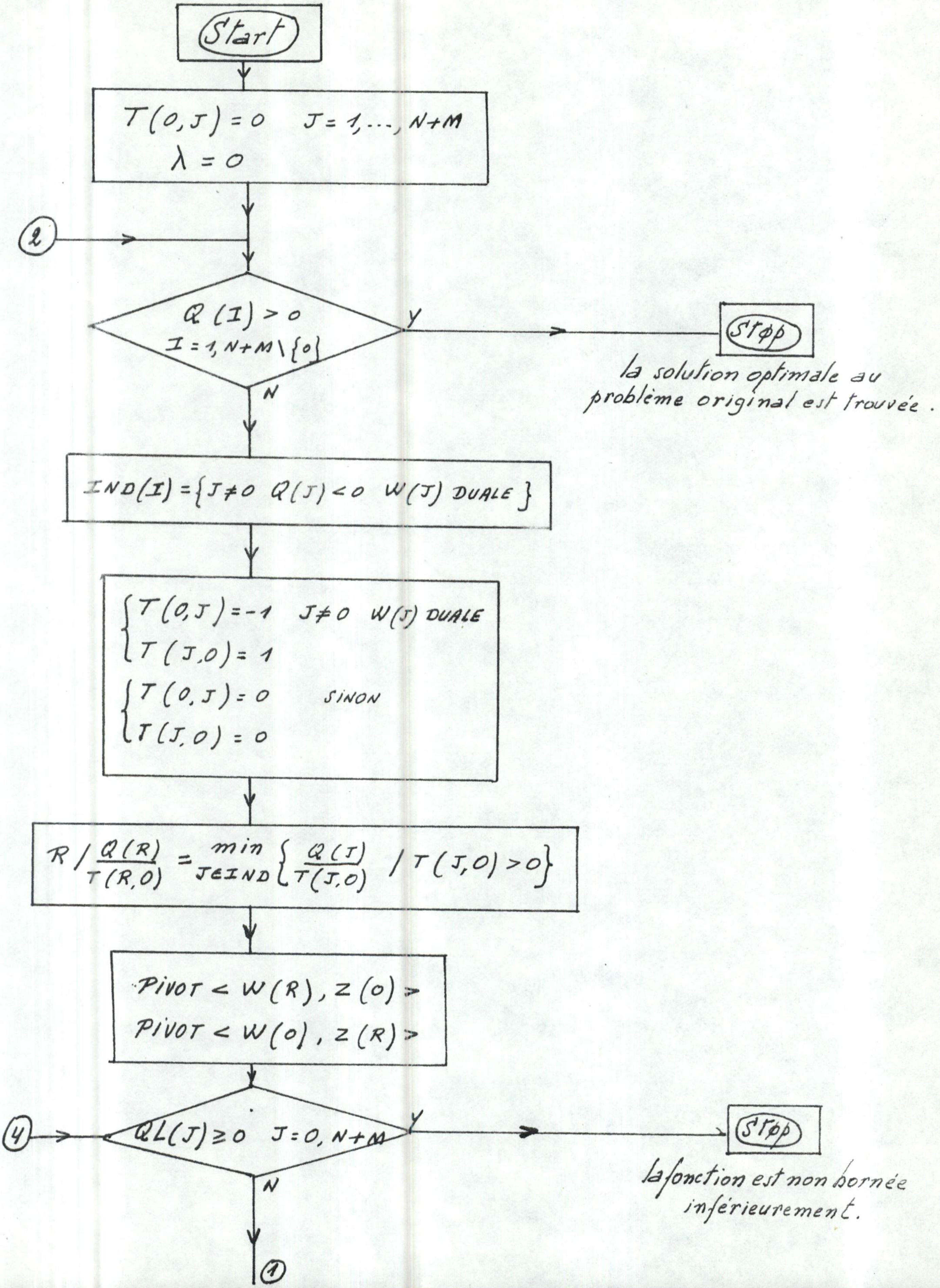
Dans l'étape 6 : On effectue le double pivot $< w_r, z_0 >, < w_0, z_r >$

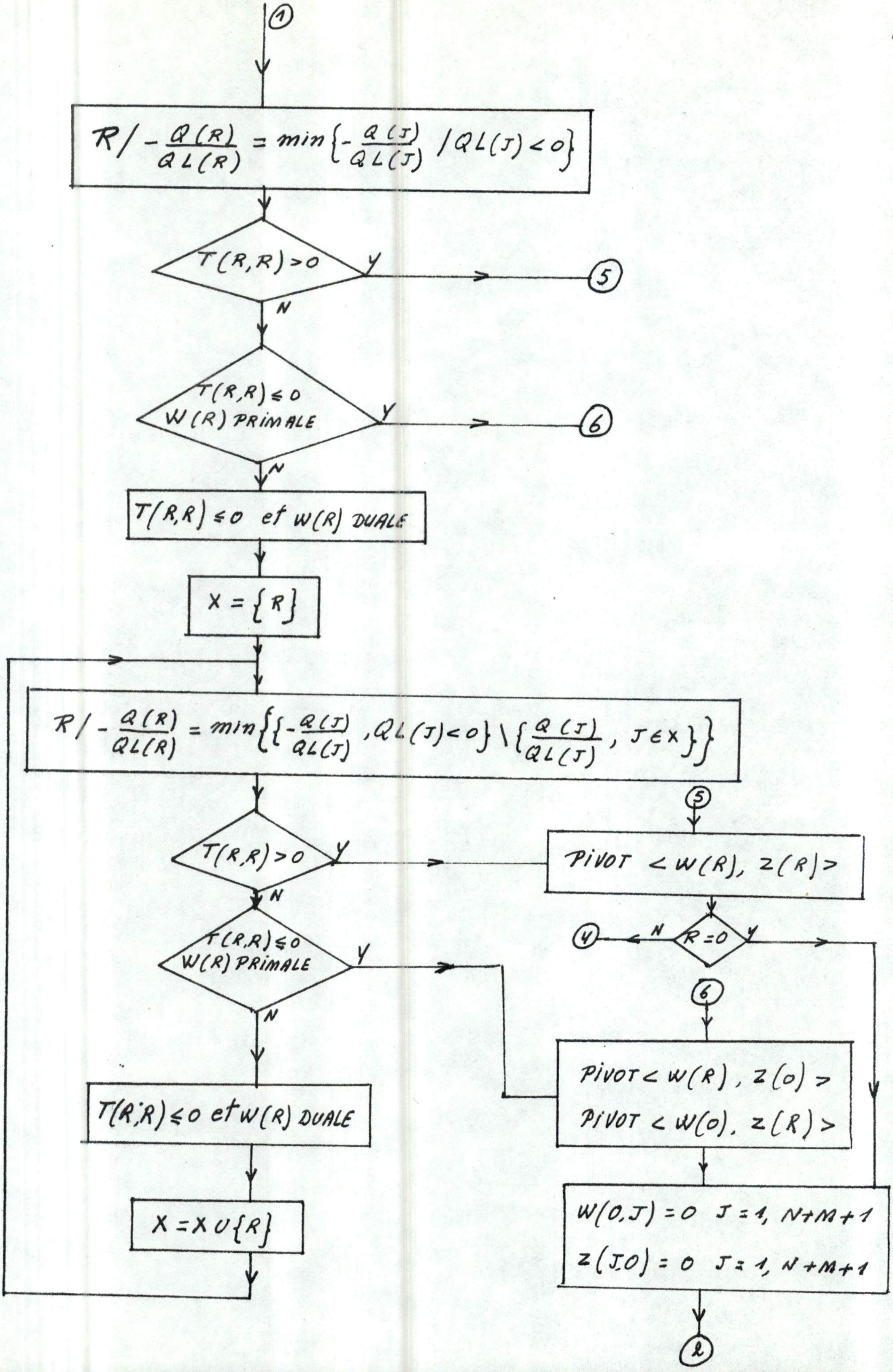
Par le théorème III.7, nous savons que ce pivot est admissible.

On obtient ainsi la solution optimale au problème restreint considéré.

On supprime alors la ligne de la contrainte auxiliaire et on remonte à la première étape.

Nous allons maintenant résumer la procédure dans un organigramme :


Start
T(0,J) = 0 J = 1,..., N+M
λ = 0
2
Q(I) > 0
I = 1, N+M \ {0}
Y
N
STφP
la solution optimale au problème original est trouvée.
IND(I) = {J≠0 Q(J) < 0 W(J) DUALE}
T(0,J) = -1 J≠0 W(J) DUALE
T(J,0) = 1
T(0,J) = 0 SINON
T(J,0) = 0
R / Q(R)/T(R,0) = min J∈IND {Q(J)/T(J,0) / T(J,0) > 0}
PIVOT < W(R), Z(0) >
PIVOT < W(0), Z(R) >
4
QL(J) ≥ 0 J = 0, N+M
Y
N
STφP
la fonction est non bornée inférieurement.
1



1
R / - Q(R) / QL(R) = min { - Q(J) / QL(J) / QL(J) < 0 }
T(R,R) > 0
Y
N
5
T(R,R) ≤ 0
W(R) PRIMALE
Y
N
6
T(R,R) ≤ 0 et W(R) DUALE
X = {R}
R / - Q(R) / QL(R) = min { { - Q(J) / QL(J) , QL(J) < 0 } \ { Q(J) / QL(J) , J ∈ X } }
T(R,R) > 0
Y
N
5
PIVOT < W(R), Z(R) >
4
N
R = 0
Y
T(R,R) ≤ 0
W(R) PRIMALE
Y
N
6
PIVOT < W(R), Z(0) >
PIVOT < W(0), Z(R) >
T(R,R) ≤ 0 et W(R) DUALE
W(0,J) = 0 J = 1, N+M+1
Z(J,0) = 0 J = 1, N+M+1
X = X U {R}
2

Les exemples numériques feront l'objet du paragraphe suivant.

Il nous reste maintenant à démontrer la convergence de l'algorithme.

<u>Théorème III.9</u> :

L'algorithme décrit ci-dessus atteint un minimum local en un nombre fini d'étapes.

Par le théorème III.4, nous savons que toute solution réalisable basique complémentaire dans laquelle la matrice critique est semi-définie positive ou vide satisfait le critère d'optimalité du deuxième ordre (3). De plus, elle est aussi un point de Kuhn et Tucker (elle vérifie (2)) car c'est une solution complémentaire et réalisable primale et duale. Elle est donc un point minimum local.

La solution de départ est une solution complémentaire basique avec une matrice critique vide.
L'algorithme est constitué d'étapes pivots sur des éléments diagonaux ou sur des blocs diagonaux deux par deux seulement, donc toute solution est complémentaire.
Les opérations pivot principal de l'algorithme sont choisies de façon à maintenir l'admissibilité primale et elles sont faites soit sur des éléments pivots spécifiés par le théorème III 6, soit sur des blocs pivots deux par deux spécifiés par le théorème III 7. La matrice critique résultante reste donc toujours semi-définie positive ou vide.

Lorsqu'une solution réalisable primale complémentaire trouvée

n'est pas réalisable duale, l'algorithme n'arrête pas.
Donc la seule chose qui doit être démontrée est le fait que l'algorithme arrêtera en un nombre fini d'étapes.
Or on sait par le corollaire du théorème III.8. que tout accroissement de λ implique la décroissance de la valeur de la fonction objective.
Nous voyons qu'en résultat de l'étape 3 et toute exécution de l'étape 5, la valeur maximum de λ pour laquelle la solution basique courante est primale réalisable, décroît strictement.

Le nombre de base d'un problème restreint donné est fini et max λ est strictement croissante, donc aucune base ne peut se répéter.
Donc après un nombre fini d'étapes, on atteint la première étape à nouveau et ce avec une valeur de la fonction objective inférieure à la précédente.

De ceci et du fait que le nombre de problèmes restreints et le nombre de bases d'un problème restreint donné sont finis, on peut voir qu'après un nombre fini d'itérations, on atteint le cas où $J = \phi$ ou on détermine qu'aucune solution n'existe.
Par le théorème III.5, la solution sera un optimum local du problème original.

III : Exemples numériques.

Listing

```
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$                                               $
$ ALGORITHME POUR TROUVER UN MINIMUM LOCAL $
$ D'UNE FONCTION QUADRATIQUE QUELCONQUE     $
$                                               $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
ENONCE DU PROBLEME:
-------------------

FONCTION OBJECTIVE:P'*X +0.5 X'*FQ*X
  A MINIMISER
SOUS CONTRAINTES:CC*X >OU= B

LES DONNEES SERONT LUES COMME SUIT:
-----------------------------------

   1.N,LE NOMBRE DE VARIABLES;M,LE NOMBRE DE CONTRAINTES
   2.LE VECTEUR P
   3.LE VECTEUR B
   4.LA MATRICE CC (M*N) LIGNE PAR LIGNE
   5.LA MATRICE FQ (N*N) LIGNE PAR LIGNE

VARIABLES DU PROGRAMME:
-----------------------

WV : VARIABLES EN BASE
ZV : VARIABLES HORS BASE
PRIDU : VECTEUR QUI RETIENT SI LA VARIABLE EST DUALE OU PRIMALE
IND :VECTEUR DES INDICES DES VARIABLES DUALES
      A VALEUR NEGATIVE DIFFERENTES DE ZO
WZ :VECTEUR A DEUX COMPOSANTES;
   WZ(1) RETIENT LA PLACE DE WO OU ZO EN BASE
   WZ(2) RETIENT LA PLACE DE WO OU ZO HORS BASE
    OU WO ET ZO SONT RESPECTIVEMENT LES VARIABLES PRIMALE ET DUALE
    DE LA CONTRAINTE DE CAPACITE
```

Sous-routines

Pivot

```
      SUBROUTINE PIVOT(A,B,L,T,Q,QL,WV,
C
C     OPERATION DE PIVOT SIMPLE
C     -------------------------
C      A=LIGNE DU PIVOT
C      B=COLONNE DU PIVOT
C
      IMPLICIT REAL*8(E-H,O-Q,T-V,X)
      INTEGER A,B,WV(L),ZV(L)
      DIMENSION T(40,L),Q(L),QL(L)
      PIV=T(A,B)
      Q(A)=-(Q(A)/PIV)
      QL(A)=-(QL(A)/PIV)
      DO 1 J=1,L
    1 T(A,J)=-(T(A,J)/PIV)
      DO 2 I=1,L
      IF(I.EQ.A)GOTO4
      T(I,B)=T(I,B)/PIV
      GOTO2
    4 T(A,B)=1./PIV
    2 CONTINUE
      DO 3 I=1,L
      IF(I.EQ.A)GOTO3
      Q(I)=Q(I)+Q(A)*T(I,B)*PIV
      QL(I)=QL(I)+QL(A)*T(I,B)*PIV
      DO 3 J=1,L
      IF(J.EQ.B)GOTO3
      T(I,J)=T(I,J)+T(A,J)*T(I,B)*PIV
    3 CONTINUE
      CALL PRINT(WV,ZV,Q,QL,T,L)
      RETURN
      END
```

Valeur

```
      SUBROUTINE VALEUR(WV,Q,X,P,D,N,L)

      IMPLICIT REAL*8(D-H,O-Q,T-V,X)
      INTEGER WV(L)
      DIMENSION Q(L),X(N),P(N),D(40,N)
      DIMENSION XD(20)

      CETTE SOUS-ROUTINE CALCULE LES VALEURS DES VARIABLES DU PROBLEME XI
       A PARTIR DU TABLEAU

      DO 999 I=1,N
  999 X(I)=0.
      DO 1000 J=1,N
      DO 1002 I=1,L
      JJ=J
      II=I
      IV=WV(I)-1100
      IF(IV.EQ.J)GOTO1001
 1002 CONTINUE
      GOTO1000
 1001 X(JJ)=Q(II)
 1000 CONTINUE
      DO 1110 I=1,N
 1110 PRINT 1100,I,X(I)

      CETTE SOUS-ROUTINE CALCULE EGALEMENT LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIVE

      PX=0.
      DO 1 I=1,N
    1 PX=P(I)*X(I)+PX
      DO 2 J=1,N
      XD(J)=0.
      DO 2 I=1,N
    2 XD(J)=X(I)*D(I,J)+XD(J)
      DX=0.
      DO 3 I=1,N
    3 DX=XD(I)*X(I)+DX
      FX=PX+0.5*DX
      PRINT 1003,FX
 1003 FORMAT (1X,'FX='D18.10/)
 1100 FORMAT (1X,'X',I2,'=',D18.10)
      RETURN
      END
```

Print

```
      SUBROUTINE PRINT(WV,ZV,Q,QL,T,L)
      IMPLICIT REAL*8(E-H,O-Q,T-V,X)
      INTEGER WV(L),ZV(L)
      DIMENSION Q(L),QL(L),T(40,L)
      PRINT 7000
      PRINT 7001
      PRINT 7000
      DO 7002 I=1,L
 7002 PRINT 7003,WV(I),Q(1),QL(I)
      PRINT 7000
      DO 8002 IJ=1,L,3
      N=IJ+2
      PRINT 8000
      PRINT 8001,(ZV(I),I=IJ,N)
      PRINT 8000
      DO 7999 I=1,L
 7999 PRINT 8003,WV(I),(T(I,J),J=IJ,N)
 8002 PRINT 8000
      RETURN
 7000 FORMAT(1X,48(1H*))
 7001 FORMAT(1X,'     *          Q          *          QL          *')
 7003 FORMAT(1X,I4,2H *,D18.10,3H  *,D18.10,3H  *)
 8000 FORMAT(1X,69(1H*))
 8001 FORMAT(1X,'     *',3('          ',I4,'          *'))
 8003 FORMAT(1X,I4,' *',3(D18.10,'  *'))
      END
```

Programme principal..

```
      IMPLICIT REAL*8(E-H,O-Q,T-V,X)
      INTEGER R,C,D,S,A
      INTEGER WV(40),ZV(40),PRIDU(40),WZ(2),W(40)
      DIMENSION T(40,40),IND(40),Q(40),QL(40)
      DIMENSION P(40),B(40),CC(40,40),FQ(40,40)
      DIMENSION X(40)
C
C     LECTURE DES DONNEES
C     -------------------
      READ 1500,N,M
      N1=N+1
      K=M+N
      L=K+1
      READ 9000,(P(I),I=1,N)
      READ 9000,(B(I),I=1,N)
      DO 20 I=1,M
   20 READ 9000,(CC(I,J),J=1,N)
      DO 21 I=1,N
   21 READ 9000,(FQ(I,J),J=1,N)
C
C     EQUATIONS DE KHUN ET TUCKER SOUS FORME DE TABLEAU
C     -----------------------------------------------
C     Q :VECTEUR DES TERMES INDEPENDANTS
C     QL:VECTEUR DES TERMES DEPENDANTS DE PARAMC
C     T(I,J):TERMES DE LA LIGNE I ET DE LA COLONNE J DU TABLEAU
C
C     DISTINCTION VARIABLES PRIMALES=1,VARIABLES DUALES=0
C     INITIALISATION:XI=11I;UI=10I
C                    VI=21I;YI=20I
C
      DO 27 I=1,N
      Q(I)=P(I)
      QL(I)=0.
      DO 25 J=1,N
   25 T(I,J)=FQ(I,J)
      DO 27 J=N1,K
   27 T(I,J)=-CC(J-N,I)
      DO 28 I=N1,K
      Q(I)=-B(I-N)
      QL(I)=0.
      DO 26 J=1,N
   26 T(I,J)=CC(I-N,J)
      DO 28 J=N1,K
   28 T(I,J)=0.
      DO 29 I=1,L
      T(I,L)=0.
   29 T(L,I)=0.
      Q(L)=0.
      QL(L)=0.
```

```
      DO 150 I=1,N
      PRIDU(I)=0
      ZV(I)=1100+I
  150 WV(I)=1000+I
      DO 151 I=N1,K
      PRIDU(I)=1
      ZV(I)=2000+I-N
  151 WV(I)=2100+I-N
      PRIDU(L)=1
      ZV(L)=L+1
      WV(L)=L
      WZ(1)=L
      WZ(2)=L
C
C     ETAPE 1
C     -------
C     SI TOUS LES Q(I) SONT POSITIFS,ALORS ON A UN MINIMUM LOCAL
C
      C=WZ(1)
  100 DO 102 I=1,L
      IF(I.EQ.C)GOTO102
      IF(Q(I).LE.0.)GOTO101
  102 CONTINUE
      CALL PRINT(WV,ZV,Q,QL,T,L)
      CALL VALEUR(WV,Q,X,P,FQ,N,L)
      PRINT 1001
      RETURN
C
C     REMPLISSAGE DU VECTEUR IND
C
  101 DO 205 I=1,40
  205 IND(I)=0
      IJ=0
      C=WZ(1)
      DO 201 J=1,L
      IF(J.EQ.C)GOTO201
      IF(Q(J).GE.0.)GOTO201
      IF(PRIDU(J).EQ.1)GOTO201
      IJ=IJ+1
      IND(IJ)=J
  201 CONTINUE
C
C     ETAPE 2
C     -------
C     CONTRAINTE ADDITIONNELLE
C
      C=WZ(1)
      D=WZ(2)
      Q(C)=0.
      QL(C)=1.
```

```
      DO 206 J=1,L
      IF(PRIDU(J).EQ.0)GOTO202
      T(C,J)=0.
      T(J,D)=0.
      GOTO206
  202 T(C,J)=-1.
      T(J,D)=1.
  206 CONTINUE
      CALL PRINT(WV,ZV,Q,QL,T,L)
C
C     ETAPE 3
C     -------
C     RECHERCHE DE R TEL QUE:
C     Q(R)/E(R)=MIN(Q(J)/E(J)>0)    J DANS IND(I)
C         ICI E(J)=1
C
      J=0
  290 J=J+1
      DO 292 I=1,IJ
      IF(J.EQ.IND(I))GOTO293
  292 CONTINUE
      GOTO290
  293 D=WZ(2)
      VR=Q(J)
      R=J
      S=R+1
      IF(IJ.EQ.1)GOTO303
      DO 302 J=S,L
      DO 308 I=1,IJ
      IF(J.EQ.IND(I))GOTO309
  308 CONTINUE
      GOTO302
  309 VJ=Q(J)
      IF(VJ.GT.VR)GOTO302
      VR=VJ
      R=J
  302 CONTINUE
C
C     ELEMENT PIVOT=T(R,D) ET ELEMENT PIVOT=T(C,R)
C
  303 D=WZ(2)
      C=WZ(1)
      A=WV(R)
      WV(R)=ZV(D)
      ZV(D)=A
      CALL PIVOT(R,D,L,T,Q,QL,WV,ZV)
      A=WV(C)
      WV(C)=ZV(R)
      ZV(R)=A
      CALL PIVOT(C,R,L,T,Q,QL,WV,ZV)

      WZ(1)=R
      WZ(2)=R
```

```
C
C      ETAPE 4
C      -------
       C=WZ(1)
   401 DO 402  J=1,L
       IF(J.EQ.C)GOTO402
       IF(QL(J).LT.0.)GOTO403
   402 CONTINUE
       PRINT 1100
       RETURN
   403 VR=-(Q(J)/QL(J))
       R=J
       S=R+1
   405 DO 404  J=S,L
       IF(QL(J).GE.0.)GOTO404
       VJ=-(Q(J)/QL(J))
       IF(VJ.GE.VR)GOTO404
       VR=VJ
       R=J
   404 CONTINUE
       PARAMC=-Q(R)/QL(R)
       PRINT 9900,PARAMC
       IF(T(R,R).GT.0.)GOTO501
       IF(PRIDU(R).EQ.1)GOTO602
C
C      T(R,R)NEGATIF;W(R) DUALE
C
       IW=1
  4000 W(IW)=R
       J=0
  4001 J=J+1
       DO 407 I=1,IW
       IF(J.EQ.W(I))GOTO4001
   407 CONTINUE
       IF(QL(J).GE.0.)GOTO4001
       VR=-(Q(J)/QL(J))
       R=J
       S=R+1
       DO 4002 J=S,L
       DO 4003 I=1,IW
       IF(J.EQ.W(I))GOTO4002
  4003 CONTINUE
       IF(QL(J).GE.0.)GOTO4002
       VJ=-(Q(J)/QL(J))
       IF(VJ.GE.VR)GOTO4002
       VR=VJ
       R=J
  4002 CONTINUE

       PARAMC=-Q(R)/QL(R)
       PRINT 9900,PARAMC
       IF(T(R,R).GT.0.)GOTO5001
       IF(PRIDU(R).EQ.1)GOTO602
C
C      T(R,R)NEGATIF;W(R) DUALE
C
       IW=IW+1
       GOTO4000
```

```
C
C       ETAPE 5
C       -------
C       ELEMENT PIVOT=T(R,R)
C
  501 IF(PRIDU(R).EQ.1)GOTO409
      PRIDU(R)=1
      GOTO502
  409 PRIDU(R)=0
  502 A=WV(R)
      WV(R)=ZV(R)
      ZV(R)=A
      CALL PIVOT(R,R,L,T,Q,QL,WV,ZV)
      IF(R.EQ.WZ(1))GOTO700
      GOTO401
 5001 IF(PRIDU(R).EQ.1)GOTO4009
      PRIDU(R)=1
      GOTO5002
 4009 PRIDU(R)=0
 5002 A=WV(R)
      WV(R)=ZV(R)
      ZV(R)=A
      CALL PIVOT(R,R,L,T,Q,QL,WV,ZV)
      GOTO700
C
C       ETAPE 6
C       -------
C       ELEMENT PIVOT=T(R,D) ET ELEMENT PIVOT=T(C,R)
C
  602 D=WZ(2)
      C=WZ(1)
      A=WV(R)
      WV(R)=ZV(D)
      ZV(D)=A
      CALL PIVOT(R,D,L,T,Q,QL,WV,ZV)
      C=WZ(1)
      A=WV(C)
      WV(C)=ZV(R)
      ZV(R)=A
      CALL PIVOT(C,R,L,T,Q,QL,WV,ZV)
      IF(PRIDU(C).EQ.0)GOTO710
      PRIDU(R)=0
      PRIDU(C)=0
  710 WZ(1)=R
      WZ(2)=R
  700 CALL VALEUR(WV,Q,X,P,FQ,N,L)
```

```
C
C     ON OBTIENT UNE SOLUTION DU PROBLEME RESTREINT
C
C     CHANGEONS DE CONTRAINTE ADDITIONNELLE AFIN D'ELARGIR LE PROBLEME
C
C     LAISSONS TOMBER LA LIGNE WO ET LA COLONNE ZO
C
      C=WZ(1)
      D=WZ(2)
      DO 701 I=1,L
      T(I,D)=0.
  701 T(C,I)=0.
      Q(C)=0.
      QL(C)=0.
      GOTO100
 1500 FORMAT (2(I2))
 9000 FORMAT (4(D20.10))
 1100 FORMAT (1X,'FONCTION NON BORNEE INFERIEUREMENT')
 9900 FORMAT (1X,'PARAMC=',D18.10,/)
 1001 FORMAT (1X,'LA SOLUTION TROUVEE EST UN MINIMUM LOCAL')
      END
```

Exemple 1 :

Soit à minimiser : $g(x) = -x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$

sous les contraintes : $-x_1 - x_2 \geq -4$

$$-2x_1 + x_2 \geq -5$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

ou encore :

minimiser $g(x) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

sous les contraintes : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

	Q	QL
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1002	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.5000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	1102	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
1002	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	-0.2000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	6	0
1001	0.2000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1002	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

	Q	QL
1001	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.5000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	1102	2001
1001	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
2102	-0.2000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	1002	0
1001	0.3000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

	Q	QL
1001	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
6	0.2000000000D 01	-0.1000000000D 01
2101	0.4000000000D 01	-0.1000000000D 01
2102	0.5000000000D 01	0.1000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	5	2001
1001	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
2101	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	-0.3000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	1002	0
1001	0.3000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

PARAMC= 0.1000000000D 01

PARAMC= 0.2000000000D 01

	Q	QL
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	-0.2000000000D 01	0.1000000000D 01
2101	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.7000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00

	1101	6	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
5	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2101	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2102	-0.2000000000D 01	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
1001	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

X 1= 0.0000000000D 00
X 2= 0.2000000000D 01
FX= -0.2000000000D 01

	Q	QL
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2101	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.7000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00

	1101	6	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
5	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2102	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
1001	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	Q	QL
6	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2101	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.7000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00

	1101	1001	2001
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
5	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2102	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
6	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	Q	QL
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
1101	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2101	0.2000000000D 01	-0.1000000000D 01
2102	0.7000000000D 01	-0.2000000000D 01
1102	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00

	5	1001	2001
6	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
1101	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2102	0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
6	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

PARAMC= 0.2000000000D 01

	Q	QL
6	0.3000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2001	-0.2000000000D 01	0.1000000000D 01
2102	0.9000000000D 01	-0.3000000000D 01
1102	0.4000000000D 01	-0.1000000000D 01

	5	1001	2101
6	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
1101	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2102	0.3000000000D 01	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01
1102	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
6	-0.3000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2001	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

PARAMC= 0.3000000000D 01

	Q	QL
6	0.3000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.3000000000D 01	0.2220446049D-15
2001	0.1000000000D 01	0.2220446049D-15
5	-0.3000000000D 01	0.1000000000D 01
1102	0.1000000000D 01	-0.2220446049D-15

	2102	1001	2101
6	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
1101	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.3333333333D 00
2001	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	0.6666666667D 00
5	0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	0.3333333333D 00
1102	0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.6666666667D 00

	2002	1002	0
6	-0.3000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2001	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

	Q	QL
2002	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.3000000000D 01	0.2220446049D-15
2001	0.2000000000D 01	0.2220446049D-15
5	-0.3000000000D 01	0.1000000000D 01
1102	0.1000000000D 01	-0.2220446049D-15

	2102	1001	2101
2002	0.0000000000D 00	0.3333333333D 00	-0.3333333333D 00
1101	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.3333333333D 00
2001	-0.3333333333D 00	0.3333333333D 00	0.3333333333D 00
5	0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	0.3333333333D 00
1102	0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.6666666667D 00

	6	1002	0
2002	-0.3333333333D 00	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2001	-0.3333333333D 00	0.6666666667D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

X 1= 0.3000000000D 01
X 2= 0.1000000000D 01
FX= -0.9000000000D 01

	Q	QL
2002	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1101	0.3000000000D 01	0.2220446049D-15
2001	0.2000000000D 01	0.2220446049D-15
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.1000000000D 01	-0.2220446049D-15

	2102	1001	2101
2002	0.0000000000D 00	0.3333333333D 00	-0.3333333333D 00
1101	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.3333333333D 00
2001	-0.3333333333D 00	0.3333333333D 00	0.3333333333D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.3333333333D 00	0.0000000000D 00	-0.6666666667D 00

	6	1002	0
2002	0.0000000000D 00	-0.3333333333D 00	0.0000000000D 00
1101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2001	0.0000000000D 00	0.6666666667D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

X 1= 0.3000000000D 01
X 2= 0.1000000000D 01
FX= -0.9000000000D 01

LA SOLUTION TROUVEE EST UN MINIMUM LOCAL

Exemple 2 :

Soit à minimiser : $q(x) = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$

sous les contraintes : $2x_1 + x_2 \leq 6$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

ou encore :

minimiser $q(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

sous les contraintes : $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

	Q	QL
1001	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00
1002	-0.5000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	0.6000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.6000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	1102	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.2000000000D 01
1002	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2101	-0.2000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	-0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
5	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	6	0
1001	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
1002	0.4000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

	Q	QL
1001	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	0.6000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.6000000000D 01	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	1102	2001
1001	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
6	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
2101	-0.2000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1000000000D 01	-0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
5	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	1002	D
1001	-0.5000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	-0.4000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

	Q	QL
1001	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
6	0.5000000000D 00	-0.1000000000D 01
2101	0.6000000000D 01	-0.1000000000D 01
2102	0.6000000000D 01	-0.4000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01

	1101	5	2001
1001	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
6	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01
2101	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.5000000000D 01	0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

	2002	1002	D
1001	-0.5000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
6	-0.4000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00

PARAMC= 0.5000000000D 00

	Q	QL
1001	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00
5	-0.5000000000D 00	0.1000000000D 01
2101	0.5500000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00

	1101	6	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.2000000000D 01
5	-0.1000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2101	-0.2000000000D 01	0.1000000000D 01	0.1000000000D 01
2102	0.1000000000D 01	0.4000000000D 01	0.4000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.4000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2101	0.4000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1600000000D 02	-0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	-0.4000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

X 1= 0.0000000000D 00
X 2= 0.5000000000D 00
FX= -0.1250000000D 00

	Q	QL
1001	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	0.5500000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	0.5000000000D 00	0.0000000000D 00

	1101	6	2001
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.2000000000D 01
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	-0.2000000000D 01	0.0000000000D 00	0.1000000000D 01
2102	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.4000000000D 01
1102	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	-0.1000000000D 01

	2002	1002	0
1001	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
5	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00	0.0000000000D 00
2101	0.4000000000D 01	-0.1000000000D 01	0.0000000000D 00
2102	0.1600000000D 02	-0.4000000000D 01	0.0000000000D 00
1102	-0.4000000000D 01	0.1000000000D 01	0.0000000000D 00

X 1= 0.0000000000D 00
X 2= 0.5000000000D 00
FX= -0.1250000000D 00

LA SOLUTION TROUVEE EST UN MINIMUM LOCAL

Appendice III -1. :

		x^1	x^2	y^1	y^2	y^{m+1}
u^1	p^1	C_{11}	C_{12}	$-A'_{11}$	$-A'_{21}$	$c+A'_{11}d$
u^2	p^2	C_{21}	$\boxed{C_{22}}$	$\boxed{-A'_{12}}$	$-A'_{22}$	$A'_{12}d$
v^1	$-b^1$	A_{11}	$\boxed{A_{12}}$	$\boxed{0}$	0	0
v^2	$-b^2$	A_{21}	A_{22}	0	0	0
v^{m+1}	$d'b^1-b^{m+1}$	$-c'-d'A_{11}$	$-d'A_{12}$	0	0	0

le bloc pivot est donc : $\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}$ l'inverse du bloc pivot.

On en déduit que : $\begin{pmatrix} C_{22} & -A'_{12} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$

et donc : $A_{12} R = 0$

$-A_{12} S' = F$

Calcul des différents coefficients de v^{m+1} basique :

. Terme indépendant :

$$d'b^1 - b^{m+1} - \begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^2 \\ b^1 \end{pmatrix}$$

$$= d'b^1 - b^{m+1} + d'A_{12} R P^2 + d'A_{12} S' b^1$$

$$= d'b^1 - b^{m+1} + 0 - d'b^1$$

$$= -b^{m+1}$$

. Terme en x^1 :

$$-C' - d'A_{11} - \begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ A_{11} \end{pmatrix}$$

$$= -C' - d'A_{11} + d'A_{12} R C_{21} - d'A_{12} S' A_{11}$$

$$= -C' - d'A_{11} + 0 + d'A_{11}$$

$$= -C'$$

. Terme en x^2 :

$$-\begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -d'A_{12} R$$

$$= 0$$

. Terme en y^1 :

$$-\begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$= d'A_{12} S'$$

$$= -d'$$

. Terme en y^2 :

$$0 - \begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A'_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -d'A_{12} R A'_{12}$$

$$= 0$$

. Terme en y^{m+1}

$$0 - \begin{pmatrix} -d'A_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -S' \\ S & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{12} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= d'A_{12} R A'_{12} d$$

$$= 0.$$

Chapitre IV :

Algorithme de Ritter pour trouver le minimum global d'un programme quadratique quelconque. [A]

1. Aperçu de la méthode.

Notre but est d'obtenir une solution au problème de minimisation quadratique sous contraintes linéaires.

Sans perdre la généralité, nous pouvons énoncer le problème comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2} x'Cx \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

où A est une matrice $(m \times n)$

C une matrice symétrique $(n \times n)$ $(C = C')$

x un vecteur de $\mathbb{R}^n$

b un vecteur de $\mathbb{R}^m$

La méthode de Ritter comprend trois phases :

. La phase I est semblable à la méthode du simplex pour la programmation linéaire [K] et permet de voir s'il existe un vecteur x satisfaisant aux contraintes. Dans l'affirmative, elle fournit un point extrémal de l'ensemble des contraintes $X = \{x \mid Ax \geq b \; ; \; x \geq 0\}$.
Subsidiairement, elle exprime la fonction objective en termes de variables indépendantes.

Le point extrémal obtenu est le point de départ de la deuxième phase.

. La phase II permet d'obtenir un minimum local de q sur X, soit de se rendre compte que q n'est pas bornée inférieurement dans X.

. La phase III constitue une méthode de construction d'un plan coupant qui permet d'écarter le minimum local trouvé précédement et de poursuivre la recherche du minimum global (si le minimum local trouvé n'est pas global.)

Après transformation de X par adjonction du plan coupant, elle transmet le contrôle à la première phase.

L'arrêt du processus peut avoir lieu :

- dans la première phase, si le nouvel ensemble X est vide.
- dans la seconde phase lorsque q est non bornée inférieurement sur l'ensemble des contraintes.
- dans la troisième phase si une condition suffisante pour l'obtention d'un minimum global est satisfaite ou lorsque q est non bornée inferieurement sur l'ensemble des contraintes.

Le nombre d'opérations de chaque phase est fini.

Au chapitre II, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes pour un minimum local ainsi qu'une condition suffisante pour un minimum global.

Au chapitre III, nous avons vu un algorithme permettant de trouver un minimum local.

Dans son article, Ritter donne aussi un algorithme de mini-misation locale, ces deux algorithmes sont très semblables, seules les justifications des différentes étapes et des opérations effectuées sont présentées différemment.
Le même tableau termine l'algorithme de minimisation locale de Ritter et Majthay. Le passage de la deuxième à la troisième phase ne pose donc aucun problème, si nous utilisons l'algorithme de Majthay.
Pour continuer la recherche du minimum global, nous devons rechercher un minimum local du nouveau problème obtenu après transformation de l'ensemble des contraintes X.
Pour ce faire, il suffit d'écrire les équations de Kuhn et Tucker correspondant à ce nouvel ensemble de contraintes.
Dans ce chapitre nous expliciterons uniquement la troisième phase.

2. Recherche du plan coupant : phase III

Par le théorème de caractérisation de Ritter donné au chapitre II, nous savons comment distinguer les points stationnaires d'un programme quadratique sous contraintes linéaires.
Après avoir trouvé à la phase II un minimum local du programme quadratique, nous allons introduire un plan coupant qui permettra d'exclure ce minimum local tout en conservant le minimum global (si toutefois celui-ci n'est pas atteint.)

Après quelques manipulations algébriques, le problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(1)\begin{cases} \text{minimiser } q(x) = p'x + \frac{1}{2}x'Cx \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} v = -b + Ax \\ v \geq 0 ;\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

où $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{y})$ est le point de Kuhn et Tucker associé au minimum local $\bar{x}$, c'est-à-dire $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{u}, \bar{y})$ est la solution du problème de Kuhn et Tucker associé au problème (1).

Nous supposerons que $\bar{x}$ est une solution non dégénérée et donc que $\bar{v} > 0$ et $\bar{x} \geq 0$

Supposons de plus que x peut être partitionné comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } \bar{x}_1 > 0 \text{ et } \bar{x}_2 = 0$$

Soit $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}$ la partition de u correspondante

L'hypothèse de non dégénérescence implique que $\bar{u}_1 = 0$ et $\bar{u}_2 > 0$.

Au point de vue géométrique, l'hyperplan coupant aura pour effet de séparer l'ensemble des minima globaux et le minimum local trouvé.

Nous allons voir comment construire un tel hyperplan.

Supposons pour l'instant que l'ensemble $S = \left\{ s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ;\ s'Cs < 0 \text{ et } s_2 \geq 0 \right\}$ est non vide et connu.

Pour chaque $s \in S$, il existe $\tau_s > 0$ le plus petit possible tel que :

$$q(\bar{x} + \tau s) < q(\bar{x}) \quad \forall \tau > \tau_s$$

en effet : $q(\bar{x} + \tau s) = p'(\bar{x} + \tau s) + \frac{1}{2}(\bar{x} + \tau s)' C (\bar{x} + \tau s)$

$$= p'\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{x}' C \bar{x} + \tau p's + \frac{1}{2}\tau^2 s' C s + \tau \bar{x}' C s$$

$$= q(\bar{x}) + \tau (p's + \bar{x}' C s) + \frac{1}{2}\tau^2 s' C s$$

Donc, il existe τ_s tel que pour tout $\tau > \tau_s$

$$p's + \bar{x}' C s < \frac{1}{2}\tau |s' C s|$$

$$\tau_s \begin{cases} = \dfrac{2(p's + \bar{x}' C s)}{|s' C s|} < \tau \\ = 0 \text{ si } \dfrac{2(p's + \bar{x}' C s)}{|s' C s|} < 0 \end{cases}$$

Si pour tout s appartenant à S, le point $\bar{x} + \tau s$ n'appartient pas à X, alors $\bar{x}$ est un minimum global.

Si il existe s dans S, il existe $\tau > \tau_s$ tels que $\bar{x} + \tau s \in X$, on peut alors définir $Y = \{\bar{x} + \tau s \,/\, s \in S, \ \tau \geq \tau_s\}$ et étudier un hyperplan d'appui de l'ensemble Y.

Nous allons voir une méthode pour construire un hyperplan d'appui particulier.

(dans certains cas, il est possible de construire un plan coupant parallèle qui enlève plus de points de X).

Soit $e'x \geq \tau$ la contrainte additionnelle.
Nous devons donc spécifier le vecteur e et le scalaire τ.
Pour ce faire, nous allons considérer le problème suivant :
Trouver un minimum global pour toutes les valeurs de τ du programme quadratique :

$$(2) \begin{cases} \min p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} x_2 \geq 0 \\ e'x \leq \tau \end{cases} \end{cases}$$

où $e'x \leq \tau$ est appelée <u>contrainte de capacité.</u>
e est choisi de telle sorte que pour toute valeur de $\tau \geq 0$, il existe un minimum global au programme quadratique (2) correspondant.

Partitionnons p, C et e de façon compatible avec la partition de $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}' & C_{22} \end{pmatrix} \text{ et } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Comme $(\bar{x}_1, 0)$ est un minimum local du problème (1), avec $\bar{x}_1 > 0$, il suit que C_{11} est non singulière.
Le point stationnaire considéré étant supposé être un minimum local, par le théorème de caractérisation de Ritter, on sait que q est convexe sur le sous-espace :

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_2 = 0 \right\}$$

en effet, comme $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum local de q sur

$$\hat{X} = \{ x / \hat{G} x \geq \hat{h} \} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n / x_2 \geq 0 \right\}$$

Par le théorème de caractérisation de Ritter, on a que q est convexe sur $\hat{\mathcal{L}} = \{ x / G_i x = h_i \ ; \ u_i \geq 0 \} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n / x_2 = 0, u_2 > 0 \right\}$

or $u_2 > 0$ par l'hypothèse de non dégénérescence.
Donc q est convexe sur $\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,/\, x_2 = 0 \right\}$

Nous savons donc qu'un minimum global du problème (2) existe quand e_1 est nul et e_2 positif.

Un minimum global du problème (2) doit satisfaire les conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} 0 = p_1 + C_{11}\, x_1 + C_{12}\, x_2 & (a) \\ u_2 = p_2 + C'_{12}\, x_1 + C_{22}\, x_2 + e_2 \xi & (b) \\ \omega = \tau - e'_2\, x_2 & (c) \\ \xi \geq 0 \,;\; \omega \geq 0 \,;\; u_2 \geq 0 \,;\; x_2 \geq 0 & (d) \\ \xi \omega = 0 \,;\; x'_2\, u_2 = 0 & (e) \end{array}\right.$$

(voir appendice IV - 1)

C_{11} étant non singulière, substituons x_1 dans (2) à partir de la condition de Kuhn et Tucker (3a) :

$$x_1 = -C_{11}^{-1} p_1 - C_{11}^{-1} C_{12}\, x_2$$

Après substitution, le problème (2) devient :

$$(4)\left\{\begin{array}{l} \text{minimiser } \bar{q}(x_2) = \bar{p}' x_2 + \frac{1}{2} x'_2 \bar{C} x_2 \\ \text{sous les contraintes : } \left\{\begin{array}{l} x_2 \geq 0 \\ e'_2\, x_2 \leq \tau \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{où } (4')\left\{\begin{array}{l} \bar{p}' = p'_2 - p'_1\, C_{11}^{-1}\, C_{12} \\ \bar{C} = C_{22} - C'_{12}\, C_{11}^{-1}\, C_{12} \\ q(\bar{x}) = -\frac{1}{2} p'_1\, C_{11}^{-1}\, p_1 \\ q(x) = q(\bar{x}) + \bar{q}(x_2) \end{array}\right.$$

Le point $x_2 = 0$ est un minimum local avec $\bar{q}(0) = 0$ pour tout τ non négatif.
Pour τ assez petit, $x_2 = 0$ est le seul point stationnaire de l'ensemble des contraintes (4), $x_2 = 0$ est dans ce cas le minimum global.
Si nous considérons le théorème de caractérisation de Ritter, nous voyons qu'en tout minimum local de (4) autre que le point $x_2 = 0$, la contrainte de capacité $e_2' x_2 \leq \tau$ doit être liée.
Pour cette raison, nous ne considérerons que les points satisfaisant les conditions de Kuhn et Tucker avec la variable d'écart de la contrainte de capacité, ω, nulle.
Les conditions de Kuhn et Tucker pour le problème (4) sont les suivantes :

$$(5)\left\{\begin{array}{ll} u_2 = \bar{p} + \bar{C}\, x_2 + e_2\, \xi & (a) \\ \omega = \tau - e_2'\, x_2 & (b) \\ u_2 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ \xi \geq 0\ ;\ \omega \geq 0 & (c) \\ x_2'\, u_2 = 0\ ;\ \xi\,\omega = 0 & (d) \end{array}\right.$$

Déterminer un minimum global de (4) revient donc à trouver une solution basique non négative de (5a et b) satisfaisant la condition de complémentarité (5d) et donnant la plus petite valeur de $\bar{q}$.

Pour une valeur de τ donnée, il est plus simple de trouver la valeur minimum de $\bar{q}$ du problème (5), de taille plus petite que le problème original.
On choisit e_2 de telle sorte que, ayant la solution de (5) pour une valeur particulière de τ, l'obtention du minimum global de (4) pour toute valeur de τ non négative soit plus aisée.

Soit $e_2 = \bar{p} > 0$. Alors pour toute solution du problème (s) où ω est nul, on a $x_2' \bar{C} x_2 = -(1+\xi)\,\tau$ (6)

en effet, considérons le problème (s) où $e_2 = \bar{p}$ et $\omega = 0$

. de (sb) on a : $\omega = \tau - e_2' x_2 = 0$

$$\text{donc } e_2' x_2 = \tau = \bar{p}' x_2$$

$$\text{ou } x_2' e_2 = \tau = x_2' \bar{p}$$

. En prémultipliant (sa) par x_2', on obtient :

$$x_2' u_2 = x_2' \bar{p} + x_2' \bar{C} x_2 + x_2' e_2 \xi$$

or par (sd) $x_2' u_2 = 0$

On obtient donc $0 = \tau + x_2' \bar{C} x_2 + \tau \xi$

ou encore $x_2' \bar{C} x_2 = -(1+\xi)\,\tau$

De ce fait et comme la contrainte de capacité est liée, nous allons chercher un point satisfaisant (s) et minimisant :

$$\bar{q}(x_2) = \tau - \tfrac{1}{2}(1+\xi)\,\tau \qquad (7)$$

Posons $\sigma = 1 + \xi$. Nous allons traiter le problème suivant :

Trouver une solution de :

$$(8) \begin{cases} u_2 = \bar{C} x_2 + \bar{p}\,\sigma & (a) \\ \omega = \tau - \bar{p}' x_2 & (b) \\ u_2 \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 ;\ \sigma \geq 0 ;\ \omega \geq 0 & (c) \\ x_2' u_2 = 0 ;\ \sigma\,\omega = 0 & (d) \end{cases}$$

où $\omega = 0$ donne la plus grande valeur de σ pour chaque valeur de τ.

. Si $1 \leq \sigma < 2$, le multiplicateur ξ associé à la contrainte de capacité est positif et x_2 correspondant est un minimum local. (on a un point réalisable)

. Si $\sigma \geq 2$, x_2 est un minimum global

Quand $\tau = 0$, le point $x_2 = 0$ est un minimum global de (4). Nous nous intéresserons donc uniquement aux solutions pour $\tau > 0$

Soit le changement de variables : $\tilde{u} = \dfrac{u_2}{\tau}$; $\tilde{x} = \dfrac{x_2}{\tau}$; $\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{\tau}$; $\tilde{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\tau}$ $(\tau > 0)$

le problème revient alors à trouver une solution de :

$$(9) \begin{cases} \tilde{u} = \bar{C}\,\tilde{x} + \tilde{\sigma}\,\bar{p} & (a) \\ \tilde{\omega} = 1 - \bar{p}'\,\tilde{x} & (b) \\ \tilde{u} \geq 0 ; \tilde{x} \geq 0 ; \tilde{\omega} \geq 0 ; \tilde{\sigma} \geq 0 & (c) \\ \tilde{x}'\tilde{u} = 0 \; ; \; \tilde{\sigma}\,\tilde{\omega} = 0 & (d) \end{cases}$$

avec $\tilde{\omega} = 0$ et la plus grande valeur de $\tilde{\sigma}$.

Soit $(\tilde{u}^*, \tilde{x}^*), (0, \tilde{\sigma}^*)$ la solution trouvée.
La solution du problème (8) peut-être interprétée en fonction de la valeur de τ :
en particulier si . $\tilde{\sigma}^* < \dfrac{1}{\tau}$, $x_2 = 0$ est le minimum global
$x_2 = \tau\tilde{x}^*$ n'est pas un point minimum
. $\dfrac{1}{\tau} \leq \tilde{\sigma}^* < \dfrac{2}{\tau}$, $x_2 = 0$ est le minimum global
$x_2 = \tau\tilde{x}^*$ est un minimum local
. $\dfrac{2}{\tau} \leq \tilde{\sigma}^*$, $x_2 = \tau\tilde{x}^*$ est le minimum global du problème (4).

Notons que si $\tilde{\sigma}^* = 0$, alors le point de départ $x = \begin{pmatrix} -C_{11}^{-1} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum global pour le problème quadratique original, car il satisfait les conditions du théorème II- 8.
On écrit le système (9) sous forme de tableau simplex et on examine toutes les solutions telles que $\tilde{\omega}$ soit nul. Dans son article (p347) Ritter [H] donne quelques règles afin d'éviter d'examiner toutes les solutions.

Le plan coupant ajouté est donc $e'x \geq \tau$

où $e = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ et où seule la valeur de τ n'est pas encore spécifiée.

On calcule premièrement la plus grande valeur τ_1 telle que $q(x(\tau)) = q(\bar{x})$ c'est-à-dire la valeur de la fonction objective correspondant au minimum local trouvé en fin de la phase II.

et $x(\tau) = \begin{pmatrix} -C_{11}^{-1} p_1 - \tau C_{11}^{-1} C_{12} \hat{x}^* \\ \tau \hat{x}^* \end{pmatrix}$ où $\hat{x}^*$ est la solution du système (9)

On calcule ensuite $\tau_2 = \sup \{ \tau / A x(-\tau) \geq b \; ; \; x(\tau) \geq 0 \}$ c'est-à-dire la plus grande valeur de τ telle que $x(\tau)$ satisfasse les contraintes du problème original (2).

Si $\tau_2 = \infty$, la fonction objective q n'est pas bornée inférieurement sur X

Soit $\bar{\tau} = \max \{ \tau_1, \tau_2 \}$, le plan coupant ajouté est alors $e'x \geq \bar{\tau}$

. Si $\bar{\tau} = \tau_1$, le plan coupant est un plan d'appui de Y.
Il exclut les minima locaux jusqu'à la plus petite valeur de la fonction objective déjà trouvée.

. Si $\bar{\tau} = \tau_2$, la nouvelle valeur minimale de la fonction objective est assurée en un point $x(\bar{\tau})$ réalisable et on ne perd aucun minimum local donnant une valeur inférieure de q.

On peut ensuite réappliquer la première phase au système initial augmenté de la nouvelle contrainte $e'x \geq \bar{\tau}$.

3. exemple numérique.

Reprenons l'exemple du chapitre précédent,

soit à minimiser $q(x) = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$

sous les contraintes : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$

Nous avions obtenu en fin de la phase II le tableau suivant :

	1	τ	x_1	ξ	y_1	y_2	u_2
u_1	$1/2$	0	-1	1	2	-1	0
w	$-1/2$	1	-1	1	1	4	-1
v_1	$1/2$	0	-2	1	1	4	-1
v_2	4	0	1	4	4	16	-4
x_2	$1/2$	0	0	-1	-1	-4	1

$\bar{x} = (\bar{x}_2, \bar{x}_1)' = (0, \frac{1}{2})'$ est un minimum local.

Nous avons donc $p = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{21} \\ C_{12} & C_{11} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}$$

Par les formules (4') nous obtenons :

$$\bar{p}' = p_2' - p_1' \, C_{11}^{-1} \, C_{12} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{C} = C_{22} - C_{12}' \, C_{11}^{-1} \, C_{12} = -1$$

$$q(\bar{x}) = -\frac{1}{2} \, p_1' \, C_{11}^{-1} \, p_1 = -\frac{1}{8}$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Nous devons trouver une solution $\tilde{x}^*$ au problème (9) :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \bar{C}\,\tilde{x} + \tilde{\sigma}\,\bar{p} = -\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma} \\ \tilde{\omega} = 1 - \bar{p}'\,\tilde{x} = 1 - \frac{1}{2}\tilde{x} \\ \tilde{u} \geq 0 \; ; \; \tilde{x} \geq 0 \; ; \; \tilde{\omega} \geq 0 \; ; \; \tilde{\sigma} \geq 0 \end{cases}$$

ou encore, sous forme de tableau :

	1	$\tilde{x}$	$\tilde{\sigma}$
$\tilde{u}$	0	-1	$1/2$
$\tilde{\omega}$	1	$-1/2$	0

cette solution $\tilde{x}^*$ doit être telle que $\tilde{\omega} = 0$ et telle que la valeur de $\tilde{\sigma}$ soit la plus grande.

Ici la seule possibilité est de rendre $\tilde{x}$ basique en place de $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\sigma}$ basique en place de $\tilde{u}$.

	1	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\sigma}$
$\tilde{u}$	-2	2	$1/2$
$\tilde{x}$	2	-2	0

	1	$\tilde{\omega}$	$\tilde{u}$
$\tilde{\sigma}$	4	-4	2
$\tilde{x}$	2	-2	0

on obtient donc $\tilde{x}^* = 2$ et $\tilde{\sigma}^* = 4$.

La contrainte ajoutée est donc $\frac{1}{2} x_1 \geq \tau$

Il reste maintenant à déterminer la valeur du scalaire τ.

$$\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \, \tilde{x}^* \\ -C_{11}^{-1} p_1 - \tau C_{11}^{-1} C_{12} \tilde{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tau \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

si $0 \leq \tau < \frac{1}{4}$ c'est-à-dire $0 \leq \tilde{\sigma}^* < \frac{1}{\tau}$, $x(\tau) = \begin{pmatrix} 2\tau \\ 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas un point minimum

si $\frac{1}{4} < \tau \leq \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{\tau} < \tilde{\sigma}^* \leq \frac{2}{\tau}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ est le minimum global.

si $\frac{1}{2} < \tau$ c'est-à-dire $\frac{1}{\tau} < \tilde{\sigma}^*$, $x(\tau)$ est le minimum global

Calculons la plus grande valeur τ_1 telle que $q(x(\tau)) = q(\bar{x}) = -\frac{1}{8}$

$$q(x(\tau)) = \tau - \frac{1}{4} - 2\tau^2 + \frac{1}{8}$$
$$= -\frac{1}{8}$$

Donc $\tau_1 = \frac{1}{2}$

Calculons la plus grande valeur τ_2 telle que le point $x(\tau)$ soit réalisable, c'est-à-dire $\tau_2 = \sup \left\{ \tau \,/\, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\tau \\ 1/2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2\tau \\ 1/2 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$

τ doit donc être tel que : $\begin{cases} -4\tau - \frac{1}{2} \geq -6 \\ 2\tau - 2 \geq -6 \\ \tau \geq 0 \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} \frac{11}{8} \geq \tau \\ -\tau \leq 2 \\ \tau \geq 0 \end{cases}$

Donc $\tau_2 = \frac{11}{8}$

On choisit alors $\bar{\tau} = \max\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_2 = \frac{11}{8}$

Avec le plan coupant ajouté, le problème devient :

$$
\begin{cases}
\text{minimiser } q(x) = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \\
\text{sous les contraintes : } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq \frac{11}{4} \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

A ce moment, on réapplique la première phase.

Appendice IV.1 :

Soit le problème général : $\begin{cases} \text{minimiser } p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

Nous savons que les conditions de Kuhn et Tucker de ce problème s'écrivent :

$$\begin{cases} p + Cx - A'y = 0 \\ Ax - b \geq 0 \\ (Ax - b)'y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Nous voulons démontrer que les conditions de Kuhn et Tucker correspondant au problème : $\begin{cases} \text{minimiser } p'x + \frac{1}{2} x' C x \\ \text{sous les contraintes : } \begin{cases} x_2 \geq 0 \\ e'x \leq \tau \end{cases} \end{cases}$

où $e_1 = 0$ et $e_2 > 0$

sont :

$$\begin{cases} 0 = p_1 + C_{11} x_1 + C_{12} x_2 \\ u_2 = p_2 + C'_{12} x_1 + C_{22} x_2 + e_2 \xi \\ w = \tau - e'_2 x_2 \\ \xi \geq 0 \ ; \ w \geq 0 \ ; \ u_2 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \\ \xi w = 0 \ ; \ x'_2 u_2 = 0 \end{cases}$$

Soient $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C'_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Ax = \begin{pmatrix} -e'_1 & -e'_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $e_1 = 0$, $e_2 > 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -e'_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $y = \begin{pmatrix} \xi \\ u_2 \end{pmatrix}$

Les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent alors :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C'_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 0 & -e'_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \\[2ex]
\left[\begin{pmatrix} 0 & -e'_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \right]' \begin{pmatrix} \xi \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex]
\begin{pmatrix} \xi \\ u_2 \end{pmatrix} \geq 0
\end{array}
\right.
$$

ou encore

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p_1 + C_{11} x_1 + C_{12} x_2 = 0 \\
p_2 + C'_{12} x_1 + C_{22} x_2 - e_2 \xi - u_2 = 0 \\
-e'_2 x_2 + \tau \geq 0 \\
x_2 \geq 0 \\
\left[(\tau - e'_2 x_2)' \quad x'_2 \right] \begin{pmatrix} \xi \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \\
\xi \geq 0 \\
u_2 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0 = p_1 + C_{11} x_1 + C_{12} x_2 \\
u_2 = p_2 + C'_{12} x_1 + C_{22} x_2 - e_2 \xi \\
-e'_2 x_2 + \tau = \omega \\
x_2 \geq 0 \;;\; \omega \geq 0 \;;\; \xi \geq 0 \;;\; u_2 \geq 0 \\
\omega \xi = 0 \;;\; x'_2 u_2 = 0
\end{array}
\right.
$$

Conclusion :

Dans l'algorithme que nous avons exposé, nous avons toujours considéré une solution non dégénérée, il serait intéressant d'adapter la méthode au cas dégénéré.

Cet algorithme est déjà intéressant par le seul fait qu'il permet de trouver un minimum local ou même global d'un programme quadratique non convexe, c'est pourquoi nous n'en avons pas étudié la performance.

L'algorithme de minimisation locale peut être intéressant dans le cas concave car aucun pivot diagonal n'est effectué pour atteindre la solution optimale.

Toutes les itérations consistent en un couple de pivots hors-diagonal.

L'avantage, dans les problèmes concaves, est de réduire le stockage des données.

L'algorithme de recherche du minimum global peut prendre un temps considérable.

Il peut exister un grand nombre de minima locaux et la malchance peut être telle qu'on localise ces minima dans l'ordre décroissant de la valeur de la fonction objective et donc de les énumérer tous.

Dans ce cas l'addition d'un plan coupant est répétée un grand nombre de fois et le temps de localisation du minimum local est proportionnel au nombre de variables plus le nombre de contraintes.

La programmation linéaire peut être utilisée pour éliminer les contraintes de plan coupant superflues, mais ceci demande encore des calculs supplémentaires [G]

Bibliographie

[A] R.W. COTTLE and W.C. MYLANDER
"Ritter's cutting plane méthod for nonconvex quadratic.
programming" Integer and Nonlinear Programming
edited by J. ABADIE, North-Holland, Amsterdam 1970.

[B] R.W. COTTLE, 1967 "On the convexity of quadratic-forms over
convex sets" Operations Research 15 (p 170-172)

[C] H.P. KÜNZI, W. KRELLE "La programmation non linéaire"
Gauthier-Villars

[D] A. MAJTHAY, A. WHINSTON and J. COFFMAN
"Local optimization for nonconvex quadratic programming"
Naval Research Logistics quartely 21 (1974) (pp 465-490)

[E] A. MAJTHAY "Optimality conditions for quadratic programming"
Mathématical Programming 1 (1971) (pp 359-365)

[F] G.P. Mc CORMICK, 1967
"Second order conditions for constrained minima"
J. Soc. Industr. Appl. Math. 15 (pp 641-652)

[G] K. RITTER "Stationary points of quadratic maximum-problems"
Zeitschrift für. Wahrscheinlichkeits théorie und
verwandte Gebiete 4 (1965) (pp 149-158)

[H] K. RITTER: "A méthod for solving maximum problèms with
a non concave quadratic objective function"
Ibidem 4 (1966) (pp 340-351)

[I] E.M.L. BEALE, 1955, On minimizing a convexfunction subject to
linear inequalities, J. Roy. Statist. Soc. (B) 17.

E.M.L. BEALE, 1967, Numerical methods, in: Nonlinear programming ed J. Abadie (North-Holland, Amsterdam).

[J] R. T. ROCKAFELLAR. "Convex analysis„
Princeton University Press, 1972.
[K] G. B. DANTZIG 1963, "Linear programming and extensions
(Princeton University Press, Princeton. N. J.).