MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

La logique dans un topos élémentaire

Couvreur, Chantal

Award date:
1979

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX
NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

LA LOGIQUE DANS UN TOPOS ELEMENTAIRE

Promoteur : J. MERSCH

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathématiques
par

Chantal COUVREUR

Année Académique : 1978-1979

A PIERRE,

"*Le sourire, il ne dure pas longtemps,
mais son souvenir est éternel.*"

Je voudrais remercier Monsieur Mersch de m'avoir fait découvrir ce monde passionant de la théorie des topos. J'aimerais d'ailleurs tant trouver d'autres occasions de l'étudier plus en détail. Pour la peine qu'il s'est donnée, pour sa disponibilité, pour avoir accepté de diriger mon mémoire, pour m'avoir aidée à le mener au mieux, je lui exprime encore mes vifs remerciements.

Qu'il me soit permis encore de remercier Mesdames Labidi et Honhon, pour leur gnetillesse et pour la patience dont elles ont fait preuve au cours de la dactylographie.

J'aimerais tant aussi adresser ma profonde gratitude à Pierre, pour son aide précieuse tout au long de ce travail, pour ses bons conseils, pour ses attentions délicates et sa collaboration au cours de cette dernière année d'étude, pour mon enthousiasme encore plus grand que je lui dois.

Je n'oublie pas non plus mes parents; pour m'avoir donné la possibilité d'étudier, pour leur compréhension, pour leurs encouragements au cours de ces quatre années, je les remercie eux aussi de tout coeur.

Chantal

TABLE DES MATIERES

PREFACE

Dans ce mémoire, j'ai étudié un aspect important de la théorie des topos : la logique qui se reflète dans le langage formel. Le langage est introduit très rapidement. Il sera approfondi au fur et à mesure que les connaissances sur les topos s'intensifieront. Les quantificateurs ne seront définis qu'à la fin du premier chapitre, la négation et la disjonction qu'au second chapitre. La logique des topos ressemble très fort à la logique ensembliste. Elle en est d'ailleurs une généralisation. Cependant elle en diffère de plusieurs façons :

- le tiers exclu n'est pas valable dans un topos : en général, la phase "Φ ou non Φ " n'est pas vraie.
- dans un topos, il peut y avoir plusieurs objets vides.

La base de ce mémoire a été l'ouvrage de Dana I. Schlomiuk : "Logique des topos (introduction à la théorie des topos élémentaires)".
Un premier travail fut, pour moi, une étude préliminaire de la théorie des catégories, puis une remise en ordre des différentes notions introduites par Schlomiuk, j'ai aussi détaillé certaines démonstrations et fait celles qui ne se trouvaient pas dans l'ouvrage de base.
J'ai ensuite montré comment généraliser la logique ensembliste à celle d'un topos, ce qui m'a permis de faire le lien entre mes connaissances en logique et le travail de Schlomiuk. Comme application à ses notes, j'ai choisi d'étudier un topos moins trivial et sa logique : il s'agit de $\mathfrak{S}1$. La catégorie des couples d'ensembles reliés par une flèche, qui est d'ailleurs la catégorie des préfaisceaux sur une catégorie à deux objets et à un seul morphisme non neutre.
La trame du mémoire est la suivante :
au chapitre I, j'introduis tout d'abord la notion de topos élémentaire. Justifions ici le choix de l'adjectif "élémentaire" : dans la définition, nous constaterons que tous les quantificateurs sont appliqués à des variables individuelles - variables qui sont interprétées comme objets ou morphismes - et pas à des familles d'objets ou de morphismes (à comprendre dans le sens : famille d'objets ou de morphismes, vérifiant une propriété, c-à-d satisfaisant un prédicat). Pour cette raison, nous dirons que les axiomes sont élémentaires (ou axiomes de premier ordre), ce qui explique le terme utilisé de "topos élémentaire". A partir du paragraphe 2, commence la description de la logique dans un topos $\mathcal{E}$. Je me suis alors attardée à la structure logique de l'objet Ω de $\mathcal{E}$ car Schlomiuk l'avait laissée de côté dans son ouvrage. Elle me paraît très intéressante puisqu'elle permet de représenter aussi bien l'ordre $\leqslant$ sur les sous-objets d'un objet quelconque X de $\mathcal{E}$, que les opérations

de conjonction, implication, négation et disjonction et que les deux valeurs fondamentales de la logique : le vrai et le faux. Plusieurs approches de cette structure, qui n'avaient pas été abordées par Schlomiuk, ont été détaillées (cfr CH.I, §2, §5, CH.II. §4).

Dans le chapitre II, le langage défini au chapitre I, va permettre de démontrer plus facilement quelques grands théorèmes de la théorie des topos, en particulier l'existence des limites à droite.

Je me suis rendue compte que les démonstrations étaient assez aisées dans ce langage car il suffisait de les détailler dans le topos des ensembles, Ens et de les retranscrire dans &, au moyen des techniques élaborées précédemment.

J'ai donc trouvé intéressant d'en reproduire quelques unes entièrement, en annexe.

Enfin, comme le tiers exclu n'est valable que dans un topos booléen, j'ai voulu regarder d'un peu plus près ces topos et examiner leurs premières propriétés.

C H A P I T R E   0

PRELIMINAIRES

Ce chapitre consiste à rappeler quelques notions concernant les produits fibrés, les foncteurs adjoints et le lemme de Yonoda, nécessaires à la compréhension de ce travail.

1. LE PRODUIT FIBRE

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
Soient $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ 2 morphismes de $\mathcal{C}$.
Le produit fibré de f et de g est le couple de morphismes de $\mathcal{C}$ $(X \xrightarrow{g'} B,\ X \xrightarrow{f'} C)$.

Il doit jouir des 2 propriétés suivantes :

(i) $f \circ g' = g \circ f'$
(ii) il doit satisfaire la propriété universelle des produits fibrés, à savoir

$\forall$ couple de morphismes de $\mathcal{C}$ $(T \xrightarrow{s} B,\ T \xrightarrow{t} C)$, tel que $f \circ s = g \circ t$

$\exists !$ morphisme de $\mathcal{C}$, $T \xrightarrow{\sigma} X$

tel que $t = f' \circ \sigma$ et $s = g' \circ \sigma$

Le diagramme suivant clarifie cette définition :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\sigma"] \arrow[drr, dashed, bend left, "t"] \arrow[ddr, dashed, "s"'] & & \\
& X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Proposition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
Soit le carré

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

qui est un produit fibré.
Si g est un monomorphisme, alors g' est un monomorphisme.
Si $\mathcal{C}$ est un topos élémentaire et si g est un épimorphisme, alors g' est un épimorphism

Proposition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

Supposons que le carré droit est un produit fibré.

Alors le carré gauche est un produit fibré ssi le rectangle extérieur est un produit fibré.

2. LE LEMME DE YONODA

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

Soit $A \in |\mathcal{C}|$.

définition du foncteur $\mathcal{C}(A, -)$

$\mathcal{C}(A,-)$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans Ens, la catégorie des ensembles. Il organise les flèches de source A.

A un objet B de $\mathcal{C}$, il associe les flèches de but B.

A un morphisme $g:B\longrightarrow C$ de $\mathcal{C}$, il associe la composition qui change les flèches de but B en flèches de but C. $\mathcal{C}(A,-)$ peut alors être synthétisé par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{C}(A,-)"] & \mathrm{Ens} \\ B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{C}(A,B) \arrow[d, "g\circ -"] \\ C \arrow[r, mapsto] & \mathcal{C}(A,C) \end{tikzcd}$$

Définition du foncteur $\mathcal{C}(-,A)$

$\mathcal{C}(-,A)$ peut être défini par un même type de schéma :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} \arrow[rr, "\mathcal{C}(-{,}A)"] & & \mathrm{Ens} \\
B \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{C}(B,A) \\
C \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{C}(C,A) \arrow[u, "-og"']
\end{tikzcd}$$

Notation

Soient F et G 2 foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.
$\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)$ désigne l'ensemble des transformations naturelles entre F et G.

Lemme de Yonoda

Pour tout foncteur $\mathcal{F}$: $\mathcal{A} \longrightarrow$ Ens et tout objet A de $\mathcal{A}$, on a une bijection :

$$\eta_{\mathcal{F}A} : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}(A,-),\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}A$$
$$\alpha \longmapsto \eta_{\mathcal{F}A}(\alpha) \underset{\text{déf}}{=} \alpha_A(id_A)$$

dont la réciproque s'obtient en associant au point a de $\mathcal{F}A$, la transformation naturelle α telle que $\forall f : A \to B$, on ait :

$$\alpha_B(f) = \mathcal{F}f(a).$$

Notion duale du lemme de Yonoda

Pour tout foncteur $\mathcal{F}$: $\mathcal{A}^{op} \longrightarrow$ Ens et tout objet A de $\mathcal{A}$, on a une bijection :

$$\eta_{\mathcal{F}A} : \underline{\mathrm{Hom}}\ (\mathcal{A}(-,A),\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}A$$
$$\alpha \longmapsto \eta_{\mathcal{F}A}(\alpha) \underset{\text{déf}}{=} \alpha_A(id_A)$$

dont la réciproque s'obtient en associant au point a de $\mathcal{F}A$, la transformation naturelle α, telle que $\forall f : B \to A$, on ait:

$$\alpha_B(f) = \mathcal{F}f(a)$$

3. LES FONCTEURS ADJOINTS

Le foncteur $\mathbb{L} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathbb{F} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$, ou le foncteur $\mathbb{F}$ est adjoint à droite du foncteur $\mathbb{L}$

ssi

$\forall A \in |\mathcal{A}|$ et $\forall M \in |\mathcal{M}|$, les 2 ensembles $\mathcal{A}(A, \mathbb{F}M)$ et $(\mathbb{L}A, M)$ sont en bijection. Cette bijection doit aussi être naturelle en A et en M.

Théorème

Le foncteur $\mathbb{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche ssi tout objet de $\mathcal{A}$ admet un $\mathbb{F}$-reflet. Le foncteur $\mathbb{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ admet un adjoint à droite ssi tout objet de $\mathcal{A}$ admet un $\mathbb{F}$-coreflet.

CHAPITRE I

Topos élémentaire, Langage, Logiques associées

1. DEFINITION DE LA NOTION DE TOPOS ELEMENTAIRE. INTRODUCTION DES 2 EXEMPLES : Ens et $\mathfrak{F}l$.

Une catégorie $\mathcal{E}$ est un topos élémentaire ssi

1. Les limites à gauche finies existent dans $\mathcal{E}$,

c-à-d

- *si $A, B \in |\mathcal{E}|$, le produit $A \times B$ existe dans $\mathcal{E}$.*
- *si $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \in \mathcal{E}$, il existe dans $\mathcal{E}$ un égalisateur des morphismes f et g, noté*

  $$eg(f,g).$$

- *$\mathcal{E}$ admet un objet terminal 1.*

En effet, ces trois conditions suffisent, étant donné le théorème suivant :
"Si une catégorie $\mathcal{E}$ a un objet terminal, des égalisateurs de toutes les paires de flèches et les produits de toutes les paires d'objets, alors toutes les limites à gauche finies existent dans $\mathcal{E}$". (référence : "Catégories for the working mathematician" Mac Lane. Corollaire 1 p.109).

2. $\mathcal{E}$ est une catégorie avec des exponentielles

c-à-d

si $A, B \in |\mathcal{E}|$, il existe dans $\mathcal{E}$ un objet B^A et un morphisme $A \times B^A \xrightarrow{ev_{AB}} B$, appelé évaluation, tels que, pour tout $X \in |\mathcal{E}|$ et pour tout morphisme $A \times X \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow B^A$, tel que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} B^A & & B & A \times B^A \arrow[l, "ev_{AB}"'] \\ X \arrow[u, "h"'] & & A \times X \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "1_A \times h"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "©"] & \end{tikzcd}$$

h sera noté $\ulcorner f \urcorner$ et appelé le morphisme transposé de f.

3. $\mathcal{E}$ *admet un classificateur de monomorphismes (ou un objet représentant les sous-objets),*
c-à-d
il existe un monomorphisme $F' \overset{f}{\rightarrowtail} F$ *tel que tout autre monomorphisme s'obtient de façon unique à partir de* f, *par produit fibré.*

Donc pour tout monomorphisme $A' \overset{m}{\rightarrowtail} A$ de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul morphisme $\varphi_m : A \to F$, appelé *morphisme caractéristique de* m, tel que le diagramme suivant soit un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & F' \arrow[d, tail, "f"] \\ A \arrow[r, "\varphi_m"'] & F \end{tikzcd}$$

Nous appellerons l'objet F : Ω

Nous pouvons montrer que l'objet F' est un objet terminal de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, pour tout objet x de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul morphisme de source x et de but F':

puisque f est classificateur de monomorphismes, il existe au moins un morphisme $X \xrightarrow{x} F'$, défini de cette façon :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & F' \arrow[d, tail, "f"] \\ X \arrow[r, "\varphi_X"'] & F \end{tikzcd}$$

tel que ce carré soit un produit fibré.

Vérifions alors l'unicité de ce morphisme x.

Supposons $X \xrightarrow{y} F'$, et montrons que $y=x$.

Comme le carré suivant est aussi un produit fibré,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "y"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & F' \arrow[d, tail, "f"] \\ X \arrow[r, "f \circ y"'] & F \end{tikzcd}$$

nous déduisons que φ_X = f∘y = f∘x et donc que x=y puisque f est un monomorphisme.

cqfd.

Nous appellerons dorénavant le morphisme f : v et le classificateur de monomorphisme sera donc

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow v \\ \Omega \end{array}$$

Donnons une explication intuitive de ce troisième axiome : nous allons voir que la catégorie des ensembles Ens est un topos élémentaire.

L'objet Ω sera {o,1}.

L'objet terminal 1 sera un singleton quelconque de Ens. Nous le prendrons souvent égal à {o}.

Le morphisme v :1= {o}$\longrightarrow\Omega$ ={o,1} : o$\longmapsto v$(o) = 1.

On peut alors associer Ω à {vrai, faux } de la manière suivante :

Soit A un ensemble.

Soit Φ un énoncé à une variable libre sur A, c-à-d un énoncé à une variable, de domaine inclus dans A. (Par exemple : "x est un nombre réel qui est un entier " est un énoncé à une variable dans $\mathbb{R}$, et son domaine est $\mathbb{Z}$).

Le schéma de compréhension assure que les éléments de A qui satisfont Φ constituent un ensemble.

Nous associons alors à un énoncé Φ sur A, une application de A dans Ω = {vrai,faux}

$$\begin{aligned} \varphi: A &\longrightarrow \{\text{vrai, faux}\} \\ a &\longmapsto \varphi(a) = \text{vrai si a satisfait l'énoncé } \Phi \\ &\qquad \varphi(a) = \text{faux sinon} \end{aligned}$$

φ^{-1}(vrai) est un ensemble vu ce schéma de compréhension, mais φ^{-1}(vrai) peut aussi se déduire du produit fibré de v et de φ, dans Ens :

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(\text{vrai}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Donc, chaque énoncé Φ à une variable libre sur A détermine un sous-objet de A. Et réciproquement, tout sous-objet de A définit un énoncé Φ à une variable libre sur A.

<u>Voici maintenant quelques conclusions concernant la définition d'un topos élémentaire :</u>

1. Nous définissons un foncteur $A\times - : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de cette façon :
   à tout objet B de $\mathcal{E}$, on lui associe l'objet $A \times B$;
   à tout morphisme $f : B \longrightarrow B'$, correspond le morphisme

   $$id_A \times f : A \times B \longrightarrow A \times B'.$$

   Nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "Ax-"] & \mathcal{E} \\
B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & AxB \arrow[d, "id_A xf \text{ ou } Axf"] \\
B' \arrow[r, mapsto] & AxB'
\end{tikzcd}$$

   l'axiome 2 traduit l'existence de l'adjoint à droite du foncteur produit :
   Rappelons d'abord le théorème général :
   soient $\mathcal{A}, \mathcal{M}$ 2 catégories.
   Soit $\mathbb{F} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.
   $\mathbb{L} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ est le foncteur adjoint à droite de $\mathbb{F}$

$$\Updownarrow$$

   $\forall A \in |\mathcal{A}|$, $\exists 1_A : \mathbb{F}\mathbb{L}A \longrightarrow A$
   tel que $\forall M \in \mathcal{M}$, $\forall f : \mathbb{F}M \longrightarrow A$,
   $\exists!\ \tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{L}A$
   tel que $f = 1_A \circ \mathbb{F}\tilde{f}$

   ce qui se résumait par le schéma suivant :

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\ \mathbb{F}\ } \mathcal{A}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}A & & A & & \mathbb{F}\mathbb{L}A \arrow[ll, "1_A"'] \\
\forall M \arrow[u, "\exists!\tilde{f}"'] & & \mathbb{F}M \arrow[u, "\forall\ f"] \arrow[urr, "\mathbb{F}\tilde{f}"'] \arrow[ur, phantom, "c"] & &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $a : A \longrightarrow B$ morphisme de $\mathfrak{A}$, $\mathbb{L}a$ était alors défini de cette façon :

$$\mathbb{L}a = \widetilde{a \circ 1_A}$$

Nous avions en effet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
B & \mathbb{F}\mathbb{L}B \arrow[l, "1_B"'] \\
A \arrow[u, "a"] \arrow[ur, phantom, "©"] & \mathbb{F}\mathbb{L}A \arrow[l, "1_A"] \arrow[u, "\mathbb{F}(\widetilde{a \circ 1_A})"']
\end{tikzcd}$$

Expliquons-le :

Comme $a \circ 1_A$ est un morphisme de source $\mathbb{F}\mathbb{L}A$ et de but B, il existe un seul morphisme $\widetilde{a \circ 1_A} : \mathbb{L}A \longrightarrow \mathbb{L}B$ tq
$a \circ 1_A = 1_B \circ \mathbb{F}(\widetilde{a \circ 1_A})$.

Dans notre cas particulier, $\mathbb{F} \equiv Ax-$ et le théorème de caractérisation des adjoints nous décrit l'adjoint à droite de $\mathbb{F}$, que nous noterons $(-)^A$.

A tout objet B de $\mathcal{E}$, nous lui associons l'objet B^A.

A tout morphisme $f : B \longrightarrow B'$, correspond le morphisme

$$\overline{f \circ ev_{AB}} : B^A \longrightarrow B'^A$$

Nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "(-)^A"] & \mathcal{E} \\
B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & B^A \arrow[d, "\overline{f \circ ev_{AB}}"] \\
B' \arrow[r, mapsto] & B'^A
\end{tikzcd}$$

2. Soit $f : A \longrightarrow B$

   Comme $A = Ax1$, on a que $\overline{f} : 1 \longrightarrow B^A$

3. L'axiome 3 détermine Ω et v à un isomorphisme près.

4. si $A \in |\mathcal{E}|$, on notera v_A, le morphisme suivant :

$$A \longrightarrow \bar{1} \xrightarrow{v} \Omega$$

5. Il y a une bijection entre les sous-objets de A, où $A \in |\mathcal{E}|$ et les morphismes $A \longrightarrow \Omega$.

6. v est un monomorphisme.

7. Nous omettrons souvent le terme "élémentaire" en parlant de topos.

Proposition

Dans un topos, tout monomorphisme est un égalisateur et tout topos qui est aussi un épimorphisme est un isomorphisme.

Faisons la démonstration.

Soit $m : A \rightarrowtail B$ un monomorphisme.

Nous vérifions sur le diagramme suivant que $m = eg(\varphi_m, v_B)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & 1 \arrow[d, tail, "v"] \\ B \arrow[r, "\varphi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Si de plus, m est un épimorphisme, de $\varphi_m \circ m = v_B \circ m$, nous tirons successivement :

$\varphi_m = v_B$

m est $eg(\varphi_m, \varphi_m)$

$m \simeq id_B$

m est un isomorphisme

cqfd.

EXEMPLE 1 DE TOPOS : Ens

Les objets de cette catégorie sont les ensembles et les morphismes, les applications entre 2 ensembles.

Ens est un topos; en effet, nous vérifions aisément que :

1. - AxB est le produit cartésien de A et de B.

- si $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$

  alors $eg(f,g) : K \hookrightarrow A$

  où $K = \{x \in A \text{ tel que } f(x)=g(x)\}$

- 1 est un singleton quelconque

  Nous le prendrons égal à {o}

2. Soient A et B, 2 ensembles;

   alors $B^A = \{g:A \longrightarrow B\}$

   et $ev_{A,B} : AxB^A \longrightarrow B:(a,g) \longmapsto ev_{A,B}(a,g) = g(a)$

   soit $f:A \times X \longrightarrow B$,

   nous voyons que $\overline{f} : X \longrightarrow B^A : x \longmapsto \overline{f}(x) = f(.,x)$ est la seule façon de définir $\overline{f}$ pour que

   $$f = ev_{A,B} \circ id_A \times \overline{f}.$$

   Nous remarquons aussi que, à chaque morphisme $g : X \longrightarrow B^A$, nous pouvons associer un morphisme $\underline{g} : A \times X \longrightarrow B$, défini de cette façon :

   $$\underline{g} = ev_{A,B} \circ id_A \times g.$$

   Donc pour tout $(x,y) \in A\times X$, $\underline{g}(x,y) = g(x)(y)$.

3. $\Omega = 2$ c.à.d $\Omega = \{o, 1\}$.

   $v : 1 = \{o\} \longrightarrow \Omega = \{o,1\} : o \longmapsto v(o)=1$

   Nous vérifions que si $A' \in A$, le morphisme caractéristique de A', soit $\varphi_{A'}$, ne peut être que la fonction caractéristique de A',

   c-à-d

   $$\varphi_{A'} : A \longrightarrow \Omega : a \longmapsto \begin{cases} \varphi_{A'}(a)=1 & \text{si } a \in A' \\ \varphi_{A'}(a) = o & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\text{EXEMPLE 2 : } \mathfrak{F}1}$

Les objets de $\mathfrak{F}1$ sont les applications entre 2 ensembles :

un objet de $\mathfrak{F}1$ sera noté $\mathbb{F}$.

Il désignera l'application $F1 \xrightarrow{f} F2$

Les morphismes de $\mathfrak{F}1$ seront les carrés commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
F1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & G1 \arrow[d, "g"] \\
F2 \arrow[r, "\sigma_2"'] & G2
\end{tikzcd}$$

Il sera noté $\mathbb{F} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{G}$ où $\mathbb{F}$ désigne $F1 \xrightarrow{f} F2$

et $\mathbb{G}$ désigne $G1 \xrightarrow{g} G2$

Il sera aussi noté (σ_1, σ_2) ou encore σ quand il n'y a pas de confusion possible.

Introduisons ici plusieurs notations qui nous servirons pour la suite.

Rappelons un schéma classique :

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ est le foncteur défini grâce au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{H}_{\mathcal{A}}"] & Ens \\
(A,B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, shift right, "a"'] & \mathcal{A}(A,B) \\
(A',B') \arrow[r, mapsto] \arrow[u, shift right, "b"'] & \mathcal{A}(A',B') \arrow[u, "\mathcal{A}(a,b)"']
\end{tikzcd}$$

tel que $\mathcal{A}(a,b)(f) = b \circ f \circ a$ quelque soit $f : A' \longrightarrow B'$.

Si $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbb{M}} Ens$ est un foncteur, nous pouvons définir une transformation naturelle μ :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \arrow[rr, "\mathcal{H}_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\mathbb{M}^* \times \mathbb{M}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "\Downarrow \mu"] & & Ens \\
& Ens^{op} \times Ens \arrow[ur, "\mathcal{H}_{Ens}"'] &
\end{tikzcd}$$

(où $\mathbb{M}^*$ est le foncteur défini à partir du foncteur $\mathbb{M}$)

μ sera définie par la famille d'applications $(\mu_{AB})_{A,B \in |\mathcal{A}|}$

telles que $\mu_{A,B} : \mathfrak{A}(A,B) \longrightarrow Appl(\mathbb{M}A, \mathbb{M}B)$

$$f \longmapsto \mathbb{M}(f)$$

Appliquons ce schéma à la catégorie $\mathfrak{Fl}$ et aux foncteurs source $(\underset{not}{=} \mathcal{S}_r)$ et but $(\underset{not}{=} \mathcal{B}t)$:

Le foncteur $\mathcal{S}_r$ est défini par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Fl} & \longrightarrow & Ens \\ \mathbb{F} & \longmapsto & F1 \\ \sigma \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma_1 \\ \mathbb{G} & \longmapsto & G1 \end{array}$$

Le foncteur $\mathcal{B}t$ est défini par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Fl} & \longrightarrow & Ens \\ \mathbb{F} & \longmapsto & F2 \\ \sigma \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma_2 \\ \mathbb{G} & \longmapsto & G2 \end{array}$$

Nous en déduirons alors 2 transformations naturelles notées π_1 et π_2 :

a) π_1 est une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathcal{H}_{\mathfrak{Fl}}$ et $\mathcal{H}_{Ens} \circ \mathcal{S}_r^* \times \mathcal{S}_r$.

π_1 est définie par la famille d'applications :

$$(\pi_{1\mathbb{F}\mathbb{G}})_{\mathbb{F},\mathbb{G} \in |\mathfrak{Fl}|}$$

telles que $\pi_{1\mathbb{F}\mathbb{G}} : \mathfrak{Fl}(\mathbb{F},\mathbb{G}) \longrightarrow Appl(F1,G1)$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \longmapsto \pi_{1\mathbb{F}\mathbb{G}}(\sigma) = \sigma_1$$

b) π_2 est une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathcal{H}_{\mathfrak{F}1}$ et $\mathcal{H}_{Ens} \circ \mathcal{B}t^* \times \mathcal{B}t$.

π_2 est définie par la famille d'applications $(\pi_{2\,\mathbb{F}\mathbb{G}})_{\mathbb{F},\mathbb{G}\in|\mathfrak{F}1|}$:

telles que $\pi_{2\,\mathbb{F}\,\mathbb{G}} : \mathfrak{F}1(\mathbb{F},\mathbb{G}) \longrightarrow Appl(F2,G2)$

$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2) \longmapsto \pi_{2\,\mathbb{F}\,\mathbb{G}}(\sigma)=\sigma_2$$

Montrons que les 3 axiomes définissant un topos sont vérifiés dans $\mathfrak{F}1$.

axiome 1

- soit $\mathbb{F} : F1 \xrightarrow{f} F2$

  soit $\mathbb{G} : G1 \xrightarrow{g} G2$

  alors $\mathbb{F} \times \mathbb{G} : F1 \times G1 \xrightarrow{f \times g} F2 \times G2$

- soient $\mathbb{F} \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \mathbb{G}$ 2 morphismes de $\mathfrak{F}1$.

Nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
F1 \arrow[r, shift left, "\sigma_1"] \arrow[r, shift right, swap, "\tau_1"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & G1 \arrow[d, "g"] \\
F2 \arrow[r, shift left, "\sigma_2"] \arrow[r, shift right, swap, "\tau_2"] & G2
\end{tikzcd}$$

eg(σ,τ) sera le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
K1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & F1 \arrow[d, "f"] \\
K2 \arrow[r, hook] & F2
\end{tikzcd}$$

défini de la manière suivante :

$K1 = \{x \in F1 \text{ tel que } \sigma_1(x)=\tau_{\mathbb{F}}(x)\}$

$K2 = \{y \in F2 \text{ tel que } \sigma_2(x)=\tau_2(x)\}$

$k : K1 \longrightarrow K2 : x \longmapsto k(x) = f(x)$

Nous vérifions que k ainsi défini a un sens :

c-à-d si $x \in K1$, alors $k(x)=f(x) \in K2$

c-à-d si $\sigma_1(x)=\tau_1(x)$ alors $\sigma_2 \circ f(x)=\tau_2 \circ f(x)$

En effet σ et τ déterminent 2 carrés commutatifs entre f et g.

- L'objet $\mathbb{1}$ de $\mathfrak{F}1$ est l'application $\{o\} \xrightarrow{id} \{o\}$

<u>axiome 2</u>

- soient $\mathbb{F} \equiv F1 \xrightarrow{f} F2$ et $\mathbb{G} \equiv G1 \xrightarrow{g} G2$.

  Pensons d'abord à 'Ens où l'exponentielle B^A est Appl(A,B).

  Nous aurions aussi envie de dire que dans $\mathfrak{F}1$, l'exponentielle $\mathbb{F}^{\mathbb{G}}$ est $\mathfrak{F}1(\mathbb{G}, \mathbb{F})$.

  Comme cela ne forme pas un objet de $\mathfrak{F}1$ (il nous faut aussi un autre ensemble et une application reliant $\mathfrak{F}1(\mathbb{G},\mathbb{F})$ à cet autre ensemble), posons FG l'application

  $f^g : \mathfrak{F}1(\mathbb{G}, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Appl}(G2,F2)$

  Donc $(F^G)1$ sera $\{\theta : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{F}\}$ c-à-d l'ensemble des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} G1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\ G2 \arrow[r, "\theta_2"'] & F2 \end{tikzcd}$$

  $(F^G)2$ sera l'ensemble des applications de source G2 et de but F2.

  f^g sera $\pi_{2\mathbb{G}\mathbb{F}}$

  La définition de $\mathbb{F}^{\mathbb{G}}$ se résume en un schéma suivant :

$$(F^G)_1 \xrightarrow{\qquad\qquad f^g \qquad\qquad} (F^G)_2$$

$$\begin{tikzcd} G1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\ G2 \arrow[r, "\theta_2"'] & F2 \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \left(G2 \xrightarrow{\theta_2} F2 \right).$$

- Définissons maintenant le morphisme $E_v : \mathbb{G} \times \mathbb{F}^{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathbb{F}$.

  Nous devons donc définir $(E_v)_1$ et $(E_v)_2$ de façon à avoir un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} G1 \times (F^G)_1 \arrow[r, "(E_v)_1"] \arrow[d, "g \times f^g"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\ G2 \times (F^G)_2 \arrow[r, "(E_v)_2"'] & F2 \end{tikzcd}$$

Posons alors : $(E_v)_1 : G1 \times (F^G)_1 \longrightarrow F1$

$(y,(\theta_1,\theta_2)) \longmapsto (E_v)_1(y,(\theta_1,\theta_2)) = \theta_1(y)$

et $(E_v)_2 : G2 \times (F^G)_2 \longrightarrow F2$

$(y,\eta) \longmapsto (E_v)_2(y,\eta) = \eta(y)$

Nous vérifions facilement que le carré est commutatif :

En effet, quelque soit $y \in G1$ et $(\theta_1,\theta_2) \in (F^G)_1$,

nous voyons que : $f\circ(E_v)_1(y,(\theta_1,\theta_2)) = f(\theta_1(y))$

$$= \theta_2(g(y))$$

$$= (E_v)_2(g(y),\theta_2)$$

$$= (E_v)_2 \circ g\times f^g(y,(\theta_1,\theta_2))$$

donc $f\circ(E_v)_1 = (E_v)_2 \circ g\times f^g$.

- Avec cette définition de $\mathbb{F}^{\mathbb{G}}$ et de E_v, quelque soit $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$, montrons le résultat suivant :

$\forall \mathbb{X} \equiv X1 \xrightarrow{x} X2$

$\forall$ morphisme $\varphi : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$

c-à-d $\forall$ carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G1 \times X1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "g \times x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\ G2 \times X2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & F2 \end{tikzcd}$$

$\exists!$ morphisme $\psi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{G}}$

c-à-d $\exists!$ carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & (F^G)_1 = \mathfrak{J}1(\mathbb{G},\mathbb{F}) \arrow[d, "f^g = \pi_2 \mathbb{G}\mathbb{F}"] \\ X2 \arrow[r, "\psi_2"'] & (F^G)_2 = \mathrm{Appl}(G2,F2) \end{tikzcd}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \times \mathbb{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{G}} \times \psi"'] & © & \mathbb{F} \\ & \mathbb{G} \times \mathbb{F}^{\mathbb{G}} \arrow[ur, "E_v"'] & \end{tikzcd}$$

Pour démontrer ce résultat, définissons deux applications

a) la première application

à tout morphisme $\psi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{G}}$, elle fait correspondre un morphisme $\overline{\psi} : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$.

Rappelons avant de définir $\overline{\psi}$, plusieurs applications que nous avons introduites

si $\psi_1(t) \underset{\text{not}}{=} (\rho_1, \rho_2)$ où $t \in X1$:

- $\pi_{1\mathbb{G}\mathbb{F}} \circ \psi_1 : X1 \longrightarrow \mathrm{Appl}(G1,F1) : t \longmapsto \rho_1$

  $\pi_{2\mathbb{G}\mathbb{F}} \circ \psi_1 : X1 \longrightarrow \mathrm{Appl}(G2,F2) : t \longmapsto \rho_2$
- $\underline{\pi_{1\mathbb{G}\mathbb{F}} \circ \psi_1} : G1xX1 \longrightarrow F1 : (y,t) \longmapsto \rho_1(y)$

  $\underline{\pi_{2\mathbb{G}\mathbb{F}} \circ \psi_1} : G2xX1 \longrightarrow F2 : (y,t) \longmapsto \rho_2(y)$
- $\underline{\psi_2} : G2xX2 \longrightarrow F2 : (y,t) \longmapsto \psi_2(t)(y)$

remarquons que $\psi_2 \circ x(t) = \rho_2$ car ψ détermine un carré commutatif entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{F}^{\mathbb{G}}$.

Nous pouvons maintenant définir $\overline{\psi} : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$, en posant :

$\overline{\psi_1} = \underline{\pi_{1\mathbb{G}\mathbb{F}} \circ \psi_1}$ et $\overline{\psi_2} = \underline{\psi_2}$.

Nous vérifions facilement que $\overline{\psi}$ détermine ainsi un carré commutatif entre $\mathbb{G} \times \mathbb{X}$ et $\mathbb{F}$.

b) La deuxième application fait correspondre à tout morphisme $\varphi : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$, un morphisme

$\widetilde{\varphi} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{G}}$ défini par $(\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2})$

Rappelons encore quelques applications définies plus haut :

$\varphi : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$ définit l'existence de $\varphi_1 : G1xX1 \longrightarrow F1$ et de

$\varphi_2 : G2xX2 \longrightarrow F2$

Donc $\overline{\varphi_1}\ X1 \longrightarrow F1^{G1} : t \longmapsto \overline{\varphi_1}(t) = \varphi_1(.,t)$

et $\overline{\varphi_2}\ X2 \longrightarrow F2^{G2} : t \longmapsto \overline{\varphi_2}(t) = \varphi_2(.,t)$

$\widetilde{\varphi}$ sera alors défini par $(\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2})$ de cette façon : $\widetilde{\varphi_1} = (\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2} \circ x)$

$\widetilde{\varphi_2} = \overline{\varphi_2}$

Nous vérifions facilement aussi que $(\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2})$ détermine ainsi un carré commutatif entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{F}^{\mathbb{G}}$.

Montrons maintenant que les 2 applications définies en a) et en b) sont réciproques l'une de l'autre,

c-à-d que $\overline{\widetilde{\varphi}} = \varphi$ et $\widetilde{\overline{\psi}} = \psi$

a) montrons que $\overline{\widetilde{\varphi}} = \varphi$.

Nous avons successivement :

$$
\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\varphi}} &= (\overline{\widetilde{\varphi}}_1, \overline{\widetilde{\varphi}}_2) \\
&= (\underbrace{\pi_{1\,\mathbb{GF}} \circ \widetilde{\varphi}_1}, \widetilde{\varphi}_2) \\
&= (\underbrace{\pi_{1\,\mathbb{GF}} \circ (\varphi_1, \varphi_2 \circ X)}, \varphi_2) \\
&= (\varphi_1, \varphi_2) \\
&= (\varphi_1, \varphi_2) \\
&= \varphi
\end{aligned}
$$

b) montrons que $\widetilde{\overline{\psi}} = \psi$

Nous avons successivement :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\overline{\psi}} &= (\widetilde{\overline{\psi}}_1, \widetilde{\overline{\psi}}_2) \\
&= ((\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2 \circ X), \overline{\psi}_2) \\
&= ((\underbrace{\pi_{1\,\mathbb{GF}} \circ \psi_1}, \psi_2 \circ X), \psi_2) \\
&= ((\pi_{1\,\mathbb{GF}} \circ \psi_1, \psi_2 \circ X), \psi_2) \\
&= (\psi_1, \psi_2)
\end{aligned}
$$

Montrons maintenant que $\varphi = E_V \circ \mathrm{id}_{\mathbb{G}} \times \widetilde{\varphi}$.

E_V et $\mathrm{id}_{\mathbb{G}} \times \widetilde{\varphi}$ définissent 2 carrés commutatifs qui sont composables. Ils déterminent le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
G1 \times X1 \arrow[r, "\mathrm{id}_{G1} \times \widetilde{\varphi}_1"] \arrow[d, "g \times x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & G1 \times \mathfrak{F}1(\mathbb{G},\mathbb{F}) \arrow[r, "(E_V)_1"] \arrow[d, "g \times f^g"] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\
G2 \times X2 \arrow[r, "\mathrm{id}_{G2} \times \widetilde{\varphi}_2"'] & G2 \times \mathrm{Appl}(G2,F2) \arrow[r, "(E_V)_2"'] & F2
\end{tikzcd}
$$

Montrons que la composition de ces 2 carrés donne le carré définissant φ. Démontrons donc que

a) $(E_V)_1 \circ id_{G1} \times \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$

soit donc $(s, t) \in G1 \times X1$. Nous avons successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}((E_V)_1 \circ id_{G1} \times \tilde{\varphi}_1)(s,t) &= (E_V)_1 (s, \tilde{\varphi}_1 (t)) \\ &= (E_V)_1 (s,(\varphi_1 (.,t),\varphi_2 (.,x(t)))) \\ &= \varphi_1 (s, t)\end{aligned}$$

b) $(E_V)_2 \circ id_{G2} \times \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2$

soit donc $(s,t) \in G2 \times X2$. Nous avons successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}((E_V)_2 \circ id_{G2} \times \tilde{\varphi}_2)(s,t) &= (E_V)_2 (s,\tilde{\varphi}_2 (t)) \\ &= (E_V)_2 (s,\widehat{\varphi_2} (t)) \\ &= (E_V)_2 (s,\varphi_2 (.,t)) \\ &= \varphi_2 (s,t)\end{aligned}$$

axiome 3

Avant de vérifier l'axiome 3, voyons intuitivement ce à quoi nous voulons arriver. Pour cela, introduisons la notion d'élément global : un élément global de $\mathbb{G}$ sera un couple $(x_1, x_2) \in G1 \times G2$ tel que $x_2 = g(x_1)$. $|\mathbb{G}|_g$ désignera l'ensemble des éléments globaux de G.

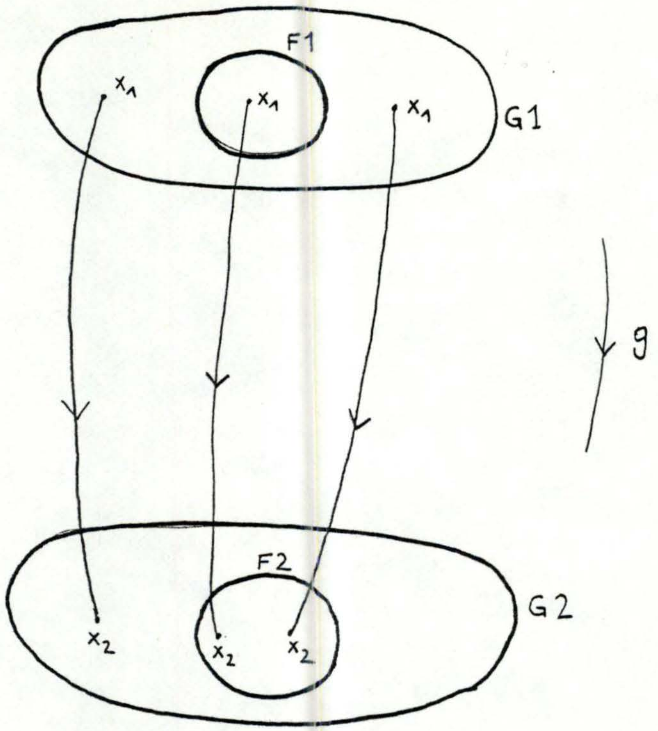
Si $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, nous avons 3 situations possibles pour tout élément global de $\mathbb{G}$:

(x_1, x_2) est dans $\mathbb{F}$ si et seulement si il est élément global de $\mathbb{F}$ c-à-d si et seulement si $x_1 \in F1$.

(x_1, x_2) est hors de F si et seulement si $x_1 \notin F1$ et $x_2 \notin F2$ c-à-d si et seulement si $x_2 \notin F2$.

(x_1, x_2) est peut-être dans $\mathbb{F}$ si et seulement si $x_1 \notin F1$ mais $x_2 \in F2$.

Ces situations sont reprises dans le diagramme suivant :



Définissons maintenant l'objet Ω, objet qui rendra compte de ces situations :

Ω est une application $\Omega_1 \xrightarrow{\omega} \Omega_2$

où Ω_1 est {o,1,2} : o correspond à la situation où x_1 n'est pas dans F1 et $g(x_1)$ n'est pas dans F2.

2 correspond à la situation où x_1 n'est pas dans F1 mais $g(x_1)$ est dans F2.

1 correspond à la situation où x_1 est dans F1.

et où Ω_2 est {o,1} : comme dans Ens, o correspond à la situation où x_2 n'est pas dans F2 et 1 correspond à la situation où x_2 est dans F2.

et $\omega : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$: $o \longmapsto \omega(o)=o$

$2 \longmapsto \omega(2)=1$

$1 \longmapsto \omega(1)=1$

Définissons le morphisme $\mathcal{V}: \mathbb{1} \longrightarrow \mathfrak{Q}$

c-ã-d que $\mathcal{V}$ détermine le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
1=\{o\} \arrow[r, "\mathcal{V}_1"] \arrow[d, "id_{\{o\}}"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega_1 = \{o,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\
1=\{o\} \arrow[r, "\mathcal{V}_2"'] & \Omega_2 = \{o,1\}
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{V}_1(o) = 1$ et $\mathcal{V}_2(o) = 1$.

Soit $\mu : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$ tel que $\mathbb{F}$ est un sous-objet de $\mathbb{G}$

μ est donc le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F1 \arrow[r, hook, "\mu_1"] \arrow[d, "f=g|_{F1}"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & G1 \arrow[d, "g"] \\
F2 \arrow[r, hook, "\mu_2"'] & G2
\end{tikzcd}$$

comment alors définir le morphisme caractéristique φ_μ ?

A ce sous-objet $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, nous avons envie d'associer un énoncé Φ à une variable libre sur G1 et sur G2, tel que si $x \in G1$ satisfait l'énoncé Φ, alors $g(x) \in G2$ satisfait aussi l'énoncé Φ. F1 serait $\{x \in G1$ tel que x satisfait $\Phi\}$ et F2 serait $\{y \in G2$ tel que y satisfait $\Phi\}$.

Nous allons alors définir le morphisme φ_μ tel que ses deux applications associées $(\varphi_\mu)_1$ et $(\varphi_\mu)_2$ donnent les valeurs de l'énoncé Φ correspondant au sous-objet $\mu : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$.

φ_μ sera le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G1 \arrow[r, "(\varphi_\mu)_1"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega_1 = \{o,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\
G2 \arrow[r, "(\varphi_\mu)_2"'] & \Omega_2 = \{o,1\}
\end{tikzcd}$$

où nous posons

$$(\varphi_\mu)_1 : G1 \longrightarrow \{0,1,2\}$$

$x \longmapsto (\varphi_\mu)_1(x)$ = 1 si $x \in F1$ c-à-d si x vérifie l'énoncé Φ.

= o si $x \notin F1$ et $g(x) \notin F2$ c-à-d si ni x ni g(x) ne vérifient l'énoncé Φ.

= 2 si $x \notin F1$ et $g(x) \in F2$ c-à-d si x ne vérifie pas l'énoncé Φ mais g(x) le vérifie.

$$(\varphi_\mu)_2 : G2 \longrightarrow \{o,1\}$$

$y \longmapsto (\varphi_\mu)_2(y)$ = o si $y \notin F2$ c-à-d si y ne vérifie pas l'énoncé Φ.

= 1 si $y \in F2$ c-à-d si y vérifie l'énoncé Φ.

Pour des raisons de logique, nous appellerons

l'élément o, le "faux"

l'élément 1, le "vrai"

l'élément 2, le "possible",

"possible" étant à comprendre dans le sens suivant : $(\varphi_\mu)_1(x)$ = le "possible" si x vérifie peut-être l'énoncé Φ c-à-d si x ne vérifie pas Φ mais g(x) le vérifie.

Vérifions maintenant l'axiome 3. Soit $\mu : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$. Nous venons de définir $\varphi_\mu : \mathbb{G} \longrightarrow \Omega$. Nous pouvons voir facilement que le diagramme suivant est un produit fibré.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & \mathbb{1} \arrow[d, "v"] \\
G \arrow[r, "\varphi_\mu"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Il nous reste à montrer l'unicité de φ_μ. Pour ce faire, il suffit de suivre le même raisonnement (technique !) fait pour démontrer l'unicité de $\tilde{\varphi} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{G}}$ étant donné $\varphi : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}$; c-à-d, il faut construire 2 applications et montrer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. La première associe à tout sous-objet $\mu : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$, le morphisme caractéristique $\varphi_\mu : \mathbb{G} \longrightarrow \Omega$. La deuxième associe à tout morphisme $\theta : \mathbb{G} \longrightarrow \Omega$, un sous-objet $\psi_\theta : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$.

Nous pouvons donc conclure que cette catégorie $\mathcal{F}l$ est un topos élémentaire. La situation se généralise : $Ens^{(\mathcal{C}^{op})}$ et un topos où $\mathcal{C}$ est 1 catégorie et $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie duale associée. Nous notons $Ens^{(\mathcal{C}^{op})}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie   . Les objets de $Ens^{(\mathcal{C}^{op})}$ sont les foncteurs : $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$. Ils sont appelés "préfaisceaux". Les morphismes sont les transformations naturelles entre les préfaisceaux.
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie bien particulière à 2 objets A et B et à un seul morphisme non neutre $A \xrightarrow{a} B$, nous pouvons alors voir que $Ens^{(\mathcal{C}^{op})} = \mathcal{F}l$, la catégorie que nous venons d'étudier.

La démonstration du théorème : "$Ens^{(\mathcal{C}^{op})}$ est un topos" n'a pas été reprise dans ces feuilles étant donné qu'elle était très longue et qu'elle n'aidait pas à la compréhension de la suite.

2. FACTORISATION DU FONCTEUR "PARTIE" DANS LA CATEGORIE DES PRE-ALGEBRES DE HEYTING. STRUCTURE LOGIQUE DE L'OBJET Ω.

Dans ce paragraphe, nous allons définir un foncteur "Partie" : $\mathcal{P} : \mathcal{E}^{op} \longrightarrow$ Ens.
Nous définirons aussi plusieurs structures sur $\mathcal{P}(X)$, $X \in |\mathcal{E}|$, qui seront :

- une relation d'ordre $\leqslant$.
- une opération $\wedge$: $\wedge$ sera une intersection de sous-objets c-à-d, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha \wedge \beta$ sera l'infimum de α et β . Nous pouvons déjà imaginer que $\wedge$ sera aussi un connecteur conjonction pour les formules construites dans le topos : rappelons-nous en effet que dans les deux cas particuliers, nous avons associé un énoncé Φ à chaque sous-objet. De même si Φ correspond au sous-objet α et ψ à β , alors $\Phi \wedge \psi$ sera un nouvel énoncé correspondant au sous-objet $\alpha \wedge \beta$
- une opération $\rightarrow$.
  Nous pouvons aussi imaginer que $\rightarrow$ sera un connecteur implication pour ces formules : dans les deux cas particuliers, $\Phi \rightarrow \psi$ serait le nouvel énoncé associé au sous-objet $\alpha \rightarrow \beta$.

Définition du foncteur partie

Soit $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{E}^{op}$ la catégorie duale de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{P} : \mathcal{E}^{op} \longrightarrow$ Ens le foncteur partie.

Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des sous-objets de X.

Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(f)$ sera noté f^{-1} et est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{P}(f) \equiv f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : \alpha \longmapsto f^{-1}(\alpha)$$

où $f^{-1}(\alpha)$ est obtenu en prenant le produit fibré de f et de α :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, tail, "f^{-1}(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & A \arrow[d, tail, "\alpha"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Grâce aux propriétés des produits fibrés, nous vérifions aisément que $\mathcal{P}$ est un foncteur,

c-à-d $\mathcal{P}(f\circ g) = \mathcal{P}(g)\circ\mathcal{P}(f)$,

c-à-d $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$

quels que soient les morphismes f et g de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{P}(id_X) = id_{\mathcal{P}(X)}$ quel que soit X, objet de $\mathcal{E}$.

Propriétés du foncteur partie

1. *$\mathcal{P}$ est isomorphe au foncteur $\mathcal{E}(-,\Omega)$.*

   c-à-d pour tout objet X de $\mathcal{E}$: $\mathcal{P}(X)$ est bijectif à $\mathcal{E}(X,\Omega)$ ce que nous avons déjà vérifié. De plus cette bijection doit être naturelle en X, c-à-d pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{E}$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathcal{E}(X,\Omega) \\
& © & \\
\mathcal{P}(Y) \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[uu, "f^{-1}"] & & \mathcal{E}(Y,\Omega) \arrow[uu, "\mathcal{E}(f,\Omega)"']
\end{tikzcd}$$

où pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(Y,\Omega)$: $\mathcal{E}(f,\Omega)(\varphi)=\varphi\circ f$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $\alpha\in\mathcal{P}(Y)$, $\varphi_{f^{-1}(\alpha)}=\varphi_\alpha\circ f$;

c-à-d, étant donné les propriétés des produits fibrés, que les 2 carrés du diagramme suivant sont des produits fibrés :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, tail, "f^{-1}(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & A \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & 1 \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

2. *$\mathcal{P}$ se factorise dans Ord.*

   Ord est une catégorie telle que les objets sont les ensembles ordonnés et les morphismes, les applications qui conservent l'ordre (c-à-d les applications croissantes).

   Cette propriété de $\mathcal{P}$ se traduit par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ord} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{E}^{op} \arrow[r, "\mathcal{P}"'] \arrow[ur, dashed, "c"] & \mathrm{Ens} \end{tikzcd}$$

où U est le foncteur d'oubli, c-à-d si $(A, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, alors $U(A, \leqslant) = A$ et si f est une application croissante, alors $U(f)=f$, l'application sous jacente.

Pour que $\mathcal{P}$ se factorise dans Ord, nous devons démontrer que pour tout $X \in |\mathcal{E}|$, $\mathcal{P}(X)$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ et que pour tout morphisme f de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(f) \equiv f^{-1}$ conserve cet ordre.

- Définissons d'abord un ordre $\leqslant$ sur $\mathcal{P}(X)$.

  soit $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$.

  Nous dirons que $\alpha \leqslant \beta$ *si et seulement si il existe un morphisme* θ *de* $\mathcal{E}$ *tel que* $\alpha = \beta \circ \theta$.

  Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, "\alpha"] \arrow[dr, "\theta"'] & {} \arrow[d, phantom, "©"] & X \\ & B \arrow[ur, tail, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

  remarquons que θ est aussi un monomorphisme.

  $\leqslant$ est antisymétrique :

  en effet, soit $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$ tq $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \alpha$.

  donc $\exists\, \theta$ tel que $\alpha = \beta \circ \theta$

  $\exists\, \varphi$ tel que $\beta = \alpha \circ \varphi$.

  donc $\alpha = \alpha \circ \varphi \circ \theta$,

  $\beta = \beta \circ \theta \circ \varphi$

  or α et β sont des monomorphismes.

  donc $\varphi \circ \theta = id_A$

  $\theta \circ \varphi = id_B$

  donc φ et θ sont des isomorphismes

  donc α et β sont isomorphes et en terme de sous-objets, $\alpha = \beta$.

Nous vérifions encore plus rapidement que $\leqslant$ est transitive et réflexive.

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{E}$.

Montrons que f^{-1} conserve l'ordre,

c-à-d si α, $\beta \in \mathcal{P}(Y)$ tel que $\alpha \leqslant \beta$

alors $f^{-1}(\alpha) \leqslant f^{-1}(\beta)$

ce qui est immédiat car $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}(\beta)$ sont obtenus par produit fibré.

Nous avons en effet le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(A) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right=40, tail, "f^{-1}(\alpha)"'] & \arrow[d, phantom, "\text{p.f.}"] & A \arrow[d, tail, "\theta"] \arrow[dd, bend left=60, tail, "\alpha"] \\
& f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, tail, "f^{-1}(\beta)"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & B \arrow[d, tail, "\beta"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\alpha \leqslant \beta$ donc $\exists\, \theta$ tel que $\alpha = \beta o \theta$.

$f o f^{-1}(\alpha)$ se factorise donc à travers β.

Donc $\exists !\ \varphi : f^{-1}(A) \longrightarrow f^{-1}(B)$ tel que $f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\beta) o \varphi$.

Comme $\mathcal{P} \simeq \mathcal{E}(-,\Omega)$, nous pouvons transporter l'ordre défini sur $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{E}(X,\Omega)$:

$$\boxed{\forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{E}(X,\Omega) : \varphi_\alpha \leqslant \varphi_\beta \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \alpha \leqslant \beta}$$

3. *$\mathcal{P}$ se factorise dans Ord_π.*

Ord_π est une catégorie telle que un objet est un ensemble ordonné qui a un plus grand élément et telle que l'infinum de deux éléments de cet ensemble existe dans cet ensemble ordonné. Les morphismes de Ord_π sont les morphismes de Ord, qui en plus conservent le plus grand élément et les infinums.

Cette propriété de $\mathcal{P}$ se traduit par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ord}_\pi \arrow[d, "U"] \\ \&^{op} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\mathcal{P}"'] \arrow[ur, phantom, "\copyright", near end, shift right=3] & \mathrm{Ens} \end{tikzcd}$$

Nous devons donc voir que : $\forall X \in |\&|$, $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ a un plus grand élément et possède tous les infinums de toutes les paires de sous-objets de X et que pour tout morphisme f de $\&$, $\mathcal{P}(f) \equiv f^{-1}$ conserve le plus grand élément et les infinums.

- Soit $X \in |\&|$

  Soient α, $\beta \in \mathcal{P}(X)$

  Montrons que $\inf(\alpha,\beta)$ existe dans $\mathcal{P}(X)$. Pour cela construisons le produit fibré de α et de β :

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, tail, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & A \arrow[d, tail, "\alpha"] \\ B \arrow[r, tail, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

et posons $\alpha\wedge\beta = \beta o b = \alpha o a$.

$\alpha\wedge\beta$ est $\inf(\alpha,\beta)$ car . $\alpha\wedge\beta \leqslant \beta$ et $\alpha\wedge\beta \leqslant \alpha$

. si $\gamma \leqslant \alpha$ et $\gamma \leqslant \beta$, alors $\gamma \leqslant \alpha\wedge\beta$

par la propriété universelle du produit fibré.

$\alpha\wedge\beta$ est un monomorphisme, donc $\alpha\wedge\beta \in \mathcal{P}(X)$.

- soit $X \in |\&|$.

  Alors id_X est le plus grand élément dans $\mathcal{P}(X)$.

- soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\&$.

  $f^{-1}(id_Y) = id_X$ donc f^{-1} conserve le plus grand élément.

  Montrons maintenant que f^{-1} conserve les infinums, c-à-d que :

  $f^{-1}(\alpha\wedge\beta) = f^{-1}(\alpha) \wedge f^{-1}(\beta)$ quels que soient $\alpha,\beta \in \mathcal{P}(Y)$.

Construisons 4 produits fibrés : (α,α',f,f_1) où (α',f_1) est le produit fibré de (α,f)

(β,β',f,f_2)

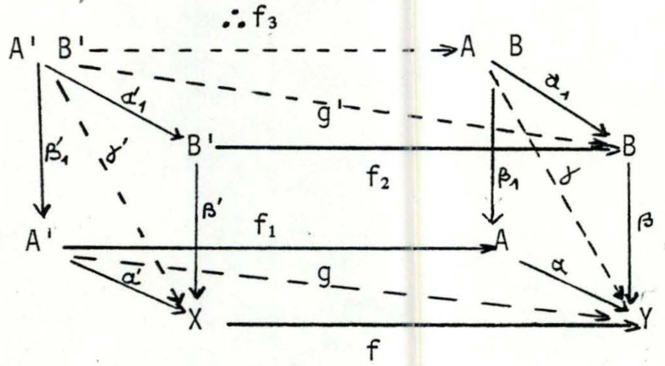
$(\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1)$

$(\alpha',\alpha'_1,\beta'_1,\beta'_1)$

où $\alpha' = f^{-1}(\alpha)$ et $\beta' = f^{-1}(\beta)$

si $\gamma = \alpha \wedge \beta$ et $\gamma' = \alpha' \wedge \beta'$, montrons que $f^{-1}(\gamma) = \gamma'$.

Nous avons le diagramme suivant :



Les propriétés élémentaires de produits fibrés permettent de vérifier que si g, g', γ', γ sont les composés diagonaux,

si (f, f_2, β, β') et $(\beta', \beta_1', \alpha', \alpha_1')$ sont des produits fibrés,

alors (g, g', β, β_1') est un produit fibré.

or $(\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1)$ est un produit fibré.

Donc, nous déduisons f_3 et $(f_1, f_3, \beta_1, \beta_1')$ est alors un produit fibré.

or $(f, f_1, \alpha, \alpha')$ est un produit fibré,

donc $(f, f_3, \gamma, \gamma')$ est un produit fibré.

c-à-d $\gamma' = f^{-1}(\gamma)$.

Comme $\mathcal{P} \simeq \mathcal{E}(-,\Omega)$, nous pouvons transporter l'opération $\wedge$ définie sur $\mathcal{P}(X)$, dans $\mathcal{E}(X,\Omega)$

$$\boxed{\forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{E}(X,\Omega) \qquad \varphi_\alpha \wedge \varphi_\beta \overset{\text{déf}}{=} \varphi_{\alpha\wedge\beta}}$$

4. *P se factorise dans* $\mathcal{O}$*Heyt*

E est un objet de $\mathcal{O}$Heyt,

c-à-d *E est une pré-algèbre de Heyting*

si et seulement si

E est un objet de Ord_π

et $\forall x,y \in E\ \exists x \to y \in E$ *tel que* $a \leqslant x \to y \Leftrightarrow (a \wedge x) \leqslant y \qquad \forall a \in E$.

Les morphismes de $\mathcal{O}$Heyt sont les morphismes de Ord_π qui commutent avec cette nouvelle opération.

Cette propriété de P se traduit par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{P}\mathrm{Heyt} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{E}^{op} \arrow[urr, dashed, "c"] \arrow[rr, "\mathcal{P}"'] & & \mathrm{Ens}
\end{tikzcd}$$

Nous devons donc montrer que pour tout $X \in |\mathcal{E}|$, $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ est une pré-algèbre de Heyting et que pour tout morphisme f de $\mathcal{E}$, $P(f) \equiv f^{-1}$ commute avec l'opération $\rightarrow$.
Pour cela, soit $X \in |\mathcal{E}|$ et considérons $\mathcal{P}(X)$ comme une catégorie :

- ses objets seront les sous-objets de X.
- $\alpha \longrightarrow \beta$ sera un morphisme de $\mathcal{P}(X)$ si et seulement si $\alpha \leqslant \beta$. Donc entre α et β, il existe au plus une flèche et les seuls isomorphismes sont les identités (ce qui traduit la propriété d'anti-symétrie de $\leqslant$).

Nous sommes donc en droit de définir un foncteur, de source et de but $\mathcal{P}(X)$:
$\forall \alpha \in \mathcal{P}(x)$: $\alpha \wedge - : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ sera défini de la manière suivante :

à tout objet γ de $\mathcal{P}(X)$, il lui fera correspondre l'objet $\alpha \wedge \gamma$.

$\alpha \wedge -$ est fonctoriel car $\forall \beta, \gamma \in \mathcal{P}(X)$: $\beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leqslant \alpha \wedge \gamma$
Nous appelons ce foncteur $\alpha \wedge -$ un foncteur produit car $\forall \alpha, \beta \in P(X)$, $\alpha \wedge \beta$ est le produit de α et de β dans cette catégorie. En effet, ceci résulte de la propriété d'infinum.

Voyons maintenant une proposition qui nous permettra d'introduire l'opération $\rightarrow$ sur $\mathcal{P}(X)$, $\forall X \in |\mathcal{E}|$

<u>Proposition 1.2.</u>
Le foncteur produit $\alpha \wedge - : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *admet un adjoint à droite, noté* $\alpha \rightarrow -$, $\forall \alpha \in \mathcal{P}(X)$.

c-à-d que nous devons prouver :

si $\gamma \in \mathcal{P}(X)$

alors $\alpha \rightarrow \gamma$ doit satisfaire la condition suivante :

$$\beta \leqslant \alpha \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leqslant \gamma \qquad \forall \beta \in \mathcal{P}(X)$$

Trouvons un sous-objet de X, vérifiant cette condition :

supposons : $\alpha \wedge \beta \leqslant \gamma$

Nous avons : $\alpha \wedge \beta \leqslant \gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha \wedge \beta$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\;\Leftrightarrow\; \alpha \wedge \gamma \wedge \beta = \alpha \wedge \beta$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \wedge B \wedge C \arrow[r] \arrow[d, "\beta^{-1}(\alpha \wedge \gamma)"'] \arrow[dr, "\alpha \wedge \gamma \wedge \beta"] & A \wedge C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha \wedge \gamma"] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & 1 \arrow[d, "v"] \\
B \arrow[r, tail, "\beta"'] & X \arrow[r, "\varphi_{\alpha \wedge \gamma}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Nous voyons que $\alpha \wedge \gamma \wedge \beta = \beta \circ \beta^{-1}(\alpha \wedge \gamma)$.

De même, nous avons que $\alpha \wedge \beta = \beta \circ \beta^{-1}(\alpha)$.

Nous obtenons alors successivement, les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \gamma \wedge \beta = \alpha \wedge \beta &\Leftrightarrow \beta \circ \beta^{-1}(\alpha \wedge \gamma) = \beta \circ \beta^{-1}(\alpha) \\
&\Leftrightarrow \beta^{-1}(\alpha \wedge \gamma) = \beta^{-1}(\alpha) \qquad \text{car } \beta \text{ est un monomorphisme} \\
&\Leftrightarrow \varphi_{\beta^{-1}(\alpha \wedge \gamma)} = \varphi_{\beta^{-1}(\alpha)} \\
&\Leftrightarrow \varphi_{\alpha \wedge \gamma} \circ \beta = \varphi_\alpha \circ \beta \\
&\Leftrightarrow \beta \leqslant eg(\varphi_{\alpha \wedge \gamma}, \varphi_\alpha)
\end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

$$\alpha \wedge \beta \leqslant \gamma \Leftrightarrow \beta \leqslant eg(\varphi_{\alpha \wedge \gamma}, \varphi_\alpha)$$

Nous définissons donc :

$$\boxed{\alpha \to \gamma \;\overset{=}{\text{déf}}\; eg(\varphi_{\alpha \wedge \gamma}, \varphi_\alpha) \qquad \forall \alpha, \gamma \in \mathcal{P}(X)}$$

Nous pouvons aussi montrer facilement que si f est un morphisme de $\mathcal{E}$, f^{-1} permute avec $\to$, c-à-d que $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$: $f^{-1}(\alpha \to \beta) = f^{-1}(\alpha) \to f^{-1}(\beta)$.

Regardons pour cela le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r, tail, "\alpha \to \beta"] & X \arrow[r, shift left, "\varphi_{\alpha \wedge \beta}"] \arrow[r, shift right, "\varphi_\alpha"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\
A' \arrow[r] \arrow[u, dashed] & B' \arrow[r, tail, "f^{-1}(\alpha) \to f^{-1}(\beta)"'] & Y \arrow[u, "f"] \arrow[r, shift left, "\varphi_{f^{-1}(\alpha \wedge \beta)}"] \arrow[r, shift right, "\varphi_{f^{-1}(\alpha)}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Nous observons que :

. le carré droit est commutatif

. $f \circ (f^{-1}(\alpha) \to f^{-1}(\beta))$ égalise $\varphi_{\alpha \wedge \beta}$ et φ_α, donc se factorise à travers $\alpha \to \beta$ de manière unique.

. Le carré gauche est alors un produit fibré, ce qui permet de conclure :

$$f^{-1}(\alpha \to \beta) = f^{-1}(\alpha) \to f^{-1}(\beta).$$

Comme $\mathcal{P} \simeq (-,\Omega)$, nous pouvons transporter l'opération $\to$ définie sur $\mathcal{P}(X)$, dans $\mathcal{E}(X,\Omega)$:

$$\boxed{\forall\, \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{E}(X,\Omega) : \varphi_\alpha \to \varphi_\beta \overset{=}{\text{déf}}\ \varphi_{\alpha \to \beta}}$$

La façon dont nous avons défini la notion de pré-algèbre de Heyting dans Ens est un concept valable pour les ensembles ordonnés. Il existe une notion algébrique qui lui est équivalente :

un ensemble E est une pré-algèbre de Heyting

$$\Updownarrow$$

il existe deux opérations $\wedge : E \times E \longrightarrow E$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \to : E \times E \longrightarrow E$

il existe une constante $1 \in E$

tels que les axiomes suivants soient vérifiés :

$x \wedge y = y \wedge x$

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$x \wedge x = x$

$x \wedge 1 = x$

$x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

$(x \to y) \wedge x = x \wedge y$

$(x \to y) \wedge y = y$

$x \to x = 1$

L'équivalence entre les 2 notions est immédiate si on sait que : $x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x$
Cette notion de pré-algèbre de Heyting peut se généraliser dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits finis. Les axiomes sont alors remplacés par des diagrammes commutatifs.

Nous parlerons alors de la catégorie $Mod_T(\mathcal{C})$ où T est la théorie des pré-algèbres de heyting :

un objet sera un modèle de T dans $\mathcal{C}$, c-à-d la donnée de $A \in |\mathcal{C}|$ et d'un morphisme $*_A : A{\times}A \to A$ pour chaque opération, rendant les diagrammes de T commutatifs.

Un morphisme entre 2 modèles A et B est la donnée d'une flèche $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ qui permute avec ces opérations.

Concrètement un objet A de $\mathcal{C}$ sera une pré-algèbre de heyting si et seulement si il existe 3 morphismes

$$A \times A \xrightarrow{\ \wedge\ } A$$
$$A \times A \xrightarrow{\ \rightarrow\ } A$$
$$1 \xrightarrow{\ k\ } A$$

tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "{<\pi_2, \pi_1>}"'] & A \\
A \times A \arrow[ur, "\wedge"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "©"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \times A \times A \arrow[r, "id_A \times \wedge"] \arrow[d, "\wedge \times id_A"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A \times A \arrow[d, "\wedge"] \\
A \times A \arrow[r, "\wedge"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[dr, "id_A"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "©"] & A \times A \arrow[d, "\wedge"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \simeq A\times 1 \arrow[rr, "id_A\times k"] \arrow[drr, "id_A"'] & \arrow[d, phantom, "©"] & A\times A \arrow[d, "\wedge"] \\
& & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\times A\times A \arrow[r, "id_A\times\wedge"] \arrow[d, "<\rightarrow\circ<\pi_1,\pi_2>,\rightarrow\circ<\pi_1,\pi_3>>"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A\times A \arrow[d, "\rightarrow"] \\
A\times A \arrow[r, "\wedge"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\times A \arrow[r, "<\pi_1,\rightarrow>"] \arrow[d, "\wedge"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A\times A \arrow[dl, "\wedge"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\times A \arrow[r, "<\rightarrow,\pi_2>"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A\times A \arrow[dl, "\wedge"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\Delta_A"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "©"] & A\times A \arrow[d, "\rightarrow"] \\
& 1 \arrow[r, "k"'] & A
\end{tikzcd}$$

Nous savons maintenant comprendre le théorème suivant :

soit T une théorie algébrique opérationnelle

(c-à-d une théorie du 1er ordre, telle que les axiomes sont décrits à l'aide de symboles opérationnels et du seul symbole relationnel qui est 7'=).

soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits finis.

Soit F un foncteur représentable
(c-à-d il existe un objet $A \in |\mathcal{C}|$ tel que $F \simeq \mathcal{C}(-,A)$)
tel que le diagramme soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{op} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "©"] & \mathrm{Ens} \\
& \mathrm{Mod}_T(\mathrm{Ens}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

alors A est un modèle de T dans $\mathcal{C}$.

Appliquons le théorème au cas qui nous intéresse :

prenons $\mathcal{C} = \mathcal{E}$

$F = \mathcal{P}$

nous savons que $\mathcal{P}$ se factorise dans $\mathcal{P}$ Heyt et que $\mathcal{P} \simeq \mathcal{E}(-,\Omega)$

Nous en déduisons donc que Ω est une pré-algèbre de Heyting.

Nous devons donc définir des opérations $* : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ qui rendent commutatifs les diagrammes définissant la théorie des pré-algèbres de Heyting.
Le théorème donne un moyen de construire ces opérations, grâce au Lemme de Yonoda; signalons la manière de faire : $\forall X \in |\mathcal{C}|$, $F(X)$ est un modèle de T dans Ens. Sur $F(X)$, sont donc définies des opérations $*_X$ satisfaisant les axiomes de T.
Nous construisons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \times F(X) \arrow[r, "*_X"] \arrow[d, no head, "\wr"] & F(X) \arrow[d, no head, "\wr"] \\
\mathcal{C}(X,A) \times (X,A) \arrow[d, no head, "\wr"] & \mathcal{C}(X,A) \\
\mathcal{C}(X,A\times A) &
\end{tikzcd}$$

Nous déduisons donc : $\mathcal{C}(X,A\times A) \xrightarrow{*'_X} \mathcal{C}(X,A)$. Ces applications sont naturelles en X. Il en résulte donc une transformation naturelle : $\mathcal{C}(.,A\times A) \longrightarrow \mathcal{C}(.,A)$, qui est représentée, par Yonoda, pour un morphisme de $\mathcal{C}(A\times A,A)$. Le morphisme sera l'opération $*_A$, qui permettra de dire que A est un modèle de T.

Nous ne construirons pas les opérations sur Ω en nous servant du lemme de Yonoda. Nous essaierons plutôt de les définir en suivant notre intuition ensembliste. Le lecteur pourra vérifier, s'il le désire que les opérations définies seront bien celles construites par Yonoda.

<u>Voyons d'abord dans Ens, ce que nous aurions envie d'avoir</u>

La définition du *foncteur partie* se résume dans le schéma suivant :

$$\mathcal{P} : \mathrm{Ens}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$\begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) = \text{l'ensemble des parties de } X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow {\scriptstyle f^{-1}} \\ Y & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) = \text{l'ensemble des parties de } Y \end{array}$$

où f^{-1} est une application qui à tout sous-ensemble B de Y fait correspondre le sous ensemble de X :

$$\{x \in X \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

Prenons la convention suivante :

soit $A \leqslant X$

un énoncé à une variable libre sur X, correspondant sera noté a.

Le morphisme caractéristique sera φ_A.

Nous avons défini *un ordre sur* $\mathcal{P}(X)$. Dans ce cas, l'ordre sera caractérisé par :

$\forall A,B \in P(X) : A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$

X *est le plus grand élément de* $\mathcal{P}(X)$ pour cette relation.

Donc un énoncé x associé est toujours vrai.

φ_X est donc l'application constante qui vaut toujours 1.

Un tel morphisme peut être représenté dans Ω par la constante 1, qui est le "vrai", c-à-d par l'application $1=\{o\} \longrightarrow \Omega=\{o,1\} : o \longrightarrow 1$, c-à-d par v.

L'infinum de 2 sous-ensembles A et B de X sera : $A \cap B$

Un énoncé (a et b) correspond au sous-ensemble $A \cap B$.

Donc (a et b) ne sera vrai que si a et b sont vrais en même temps.

Le morphisme $\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ va traduire cette propriété. $\wedge$ sera la fonction de vérité de la conjonction.

Donc $\wedge : \{o,1\} \times \{o,1\} \longrightarrow \{o,1\}$: $(1,1) \longmapsto 1$

$(o,1) \longmapsto o$

$(o,o) \longmapsto o$

$(1,o) \longmapsto o$

Quel est le morphisme $\leqslant$?

De même que $\leqslant$ était une relation sur $\mathcal{P}(X)$, donc un sous-objet de X x X, le morphisme $\leqslant$ sera un sous-objet de $\Omega \times \Omega$:

$$\leqslant : K \hookrightarrow \Omega \times \Omega$$

comment définir K ?

Nous savons que $A \leqslant B$ si et seulement si $A \cap B = A$.

Donc "l'énoncé b est vrai dès que l'énoncé a est l'est"

si et seulement si

"les énoncés (a et b) et a sont vrais en même temps et faux en même temps".

Pour traduire cette propriété, nous dirons que

$K = eg(\pi_1, \wedge)$ où π_1 est la première projection de $\Omega \times \Omega$ sur Ω

Donc $K = \{(o,o),(o,1),(1,1)\}$

Nous avons aussi introduit *l'opération* $\rightarrow$ dans $\mathcal{P}(X)$.

Ici, $\forall A,B \in \mathcal{P}(X)$: $A \rightarrow B = (X-A) \cup B$

Un énoncé associé à $A \rightarrow B$ est $a \rightarrow b$:

il sera vrai dès que b est vrai ou a est faux. Nous remarquons donc que l'énoncé $a \rightarrow b$ est l'énoncé $a \Rightarrow b$ dans son sens habituel.

Le morphisme $\rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ va traduire cette propriété. Pour ce faire, $\rightarrow$ sera la fonction de vérité de l'implication.

Donc, $\rightarrow : \{o,1\} \times \{o,1\} \longrightarrow \{o,1\}$: $(o,o) \longmapsto 1$

$(o,1) \longmapsto 1$

$(1,1) \longmapsto 1$

$(1,o) \longmapsto o$

Faisons maintenant quelques constatations qui nous permettront de définir ces nouveaux morphismes dans le cas où $\mathcal{E}$ est un topos quelconque.

. $v : 1 \longrightarrow \Omega$ représente dans Ω l'objet X, pour tout $X \in |\mathcal{E}|$

. Le morphisme $\wedge$ est le morphisme caractéristique de $<v,v>$

. Le sous-objet $\leqslant$ est $eg(\pi_1, \wedge)$.

. Le morphisme $\rightarrow$ est le morphisme caractéristique de $\leqslant$.

Donc

$(\Omega, v, \wedge, \leq, \rightarrow)$ *est un pré-algèbre de Heyting*

où $\wedge \underset{\text{déf}}{=} \varphi_{<v,v>}$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "<v,v>"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\leqslant \underset{\text{déf}}{=} eg(\pi_1, \wedge)$: $K \hookrightarrow \Omega \times \Omega \overset{\pi_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} \Omega$

$\rightarrow \underset{\text{déf}}{=} \varphi_{\leqslant}$:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, hook, "\leqslant"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\rightarrow"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Nous allons voir que ces morphismes sont bien choisis. En effet, nous allons montrer que :

$$\forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{E}(X,\Omega) : \varphi_{\alpha \wedge \beta} = \wedge \circ <\varphi_\alpha, \varphi_\beta>$$
$$\varphi_{\alpha \rightarrow \beta} = \rightarrow \circ <\varphi_\alpha, \varphi_\beta>$$
$$\varphi_\alpha \leqslant \varphi_\beta \Leftrightarrow <\varphi_\alpha, \varphi_\beta> \text{ se factorise à travers } \leqslant .$$

1. $\boxed{\begin{array}{l} \forall X \in |\mathcal{E}| \text{ et } \forall \alpha, \beta \in P(X) : \varphi_{\alpha \wedge \beta} = \wedge \circ <\varphi_\alpha, \varphi_\beta> \\ \text{c-à-d } \varphi_{\alpha \wedge \beta} = \varphi_{<v,v>} \circ <\varphi_\alpha, \varphi_\beta> \end{array}}$

a) Soit $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathbb{P}(X)$. Montrons que $(\alpha \wedge \beta,\ A \wedge B \xrightarrow{c_{A\wedge B}} 1)$
est le produit fibré de $(\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle, \langle v, v \rangle)$.
Construisons alors le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drrr, bend left, "c_Y"] \arrow[dr, dashed, "\sigma"] \arrow[dddr, bend right, "f"'] & & & & \\
& A \wedge B \arrow[rr, "c_{A\wedge B}"] \arrow[dr, tail, "i_\alpha"] \arrow[dd, tail, "\alpha \wedge \beta"'] & & 1 \arrow[dd, "\langle v, v \rangle"'] \arrow[ddr, "v"] & \\
& & A \arrow[ur, "c_A"'] \arrow[dl, tail, "\alpha"'] & & \\
& X \arrow[rr, "\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle"'] & & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\pi_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(Nous pouvons refaire un diagramme similaire en mettant B en évidence au lieu de A : nous exprimerons alors : $\alpha \wedge \beta = \beta \circ i_\beta$ au lieu de $\alpha \wedge \beta = \alpha \circ i_\alpha$).

Nous voyons d'abord que $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ \alpha \wedge \beta = \langle v, v \rangle \circ c_{A\wedge B}$

car $\pi_1 \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ \alpha \wedge \beta = \pi_1 \circ \langle v, v \rangle \circ c_{A\wedge B}$

et $\pi_2 \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ \alpha \wedge \beta = \pi_2 \circ \langle v, v \rangle \circ c_{A\wedge B}$

Soient maintenant 2 morphismes f et C_Y tels que

$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ f = \langle v, v \rangle \circ C_Y$

Montrons qu'$\exists !\ \sigma : Y \longrightarrow A \wedge B$ tel que $f = \alpha \wedge \beta \circ \sigma$ et $C_Y = C_{A \wedge B} \circ \sigma$

$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ f = \langle v, v \rangle \circ C_Y$ donne

$\pi_1 \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ f = \pi_1 \circ \langle v, v \rangle\ C_Y$ et $\pi_2 \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \circ f = \pi_2 \circ \langle v, v \rangle \circ C_Y$

c-à-d $\varphi_\alpha \circ f = v \circ C_Y$ et $\varphi_\beta \circ f = v \circ C_Y$.

Comme (α, C_A) et (β, C_B) sont les produits fibrés respectifs de (φ_α, v) et (φ_β, v), nous savons qu'$\exists !\ \tau : Y \longrightarrow A$ et $\exists !\ \lambda : Y \longrightarrow B$ tel que $f = \alpha \circ \tau = \beta \circ \lambda$

Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rrd, bend left, "\tau"] \arrow[dr, dashed, "\sigma"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& A\wedge B \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "i_\beta"'] \arrow[dr, "\alpha\wedge\beta"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
& B \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

Comme (i_α, i_β) est le produit fibré de (α,β) et comme $\alpha \circ \tau=\beta \circ \lambda$, $\exists ! \sigma : Y \to A\wedge B$ tel que $f=\beta \circ \lambda=\beta \circ i_\beta \circ \sigma=\alpha \wedge \beta \circ \sigma$. Donc $f= \alpha \wedge \beta \circ \sigma$ et $C_Y=C_{A\wedge B}\circ\sigma$, car 1 = un objet terminal.

Nous venons donc de montrer que $(\alpha\wedge\beta, C_{A \wedge B})$ est le produit fibré de $(<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>, <v,v>)$.

b) Nous avons alors le résultat suivant :

$(\alpha\wedge\beta, C_{A\wedge B})$ est le produit fibré de $(\wedge \circ <\varphi_\alpha, \varphi_\beta>, v)$.

En effet, nous avons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \wedge B \arrow[r, "C_{A \wedge B}"] \arrow[d, tail, "\alpha\wedge\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "<v,v>"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\varphi_{<v,v>}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Comme les 2 carrés sont des produits fibrés, il en résulte que le grand rectangle est aussi un produit fibré.

Donc $\varphi_{<v,v>} \circ <\varphi_\alpha\, \varphi_\beta> = \varphi_{\alpha \wedge \beta} = \varphi_\alpha \wedge \varphi_\beta$

2. $$\boxed{\begin{array}{l} \forall X \in |\mathcal{E}| \text{ et } \forall\ \alpha\ ,\beta \in \mathcal{P}(X) \\ \varphi_\alpha \leqslant \varphi_\beta \iff <\varphi_\alpha, \varphi_\beta> \text{ se factorise à travers } \leqslant \end{array}}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "\leqslant"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\wedge"'] & \Omega \\
& X \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>"'] &
\end{tikzcd}$$

en effet : $\varphi_\alpha \leq \varphi_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\wedge\beta}$

$\Leftrightarrow \quad \pi_1 \circ \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle = \wedge \circ \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$

$\Leftrightarrow \quad \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$ se factorise à travers $eg(\pi_1, \wedge)$

$\Leftrightarrow \quad \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$ se factorise à travers $\leqslant$.

3. $\forall X \in |\mathcal{E}|$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$:

$$\varphi_{\alpha \to \beta} = \to \circ \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$$

c-à-d $\varphi_{\alpha\to\beta} = \varphi_{\leq} \circ \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle$

Nous avons en effet le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \to B \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha \to \beta"'] & K \arrow[r] \arrow[d, tail, "\leq"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & 1 \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "\langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\varphi_\leqslant"'] \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\wedge"] & \Omega \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

La propriété sera donc démontrée si nous prouvons que le carré gauche est un produit fibré,

c-à-d si $\alpha \to \beta = \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle^{-1}(\leqslant)$

c-à-d si $\langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle^{-1}(\leqslant) = eg(\varphi_{\alpha\wedge\beta}, \varphi_\alpha)$

Or nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed] \arrow[rr, dashed, bend left] \arrow[dr, bend right, "f"'] & {} \arrow[r] \arrow[d, "\langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle^{-1}(\leq)"'] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & K \arrow[d, tail, "\leq"] & \\
 & X \arrow[r, "\langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

où $\leqslant$ est $eg(\pi_1, \wedge)$ et où le carré est une produit fibré.
Montrons que $<\varphi_\alpha \varphi_\beta>^{-1}(\leqslant)$ est $eg(\wedge\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>, \pi_1\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>)$
Soit donc $f: Y \longrightarrow X$ tel que $\wedge\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>\circ f = \pi_1\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>\circ f$.

Nous avons de suite que f se factorise de manière unique à travers $<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>^{-1}(\leqslant)$ car

$$\wedge\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>\circ f = \pi_1\circ<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>\circ f$$

donc $<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>\circ f$ se factorise de manière unique à travers $\leqslant$.
Appliquons alors la propriété universelle du produit fibré et nous déduisons alors la factorisation unique de f à travers $<\varphi_\alpha, \varphi_\beta>^{-1}(\leqslant)$.

Voyons maintenant que dans $\mathfrak{F}1$, tout suit aussi notre intuition.

DEUXIEME CAS PARTICULIER : $\mathfrak{F}1$

Comment est caractérisé le foncteur partie ?
$\forall\ \mathbb{F} \equiv F1 \xrightarrow{f} F2 \in |\mathfrak{F}1|$, $\Phi(\mathbb{F})$ est l'ensemble des applications $\mathbb{X} \equiv X1 \xrightarrow{x} X2$ telles que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & F1 \arrow[d, "f"] \\
X2 \arrow[r, hook] & F2
\end{tikzcd}$$

Si σ est un carré commutatif entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$, c-à-d si σ est le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
F1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & G1 \arrow[d, "g"] \\
F2 \arrow[r, "\sigma_2"'] & G2
\end{tikzcd}$$

alors $\mathcal{P}(\sigma)$ sera une application de $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, définie par le schéma suivant :

$$\mathcal{P}(\sigma) \underset{\text{nēt}}{\equiv} \sigma^{-1}_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

$$\mathbb{Y} \equiv \begin{array}{c} Y1 \\ \big\downarrow y \\ Y2 \end{array} \longmapsto \sigma^{-1}(\mathbb{Y}) \equiv \begin{array}{c} \{x \in F1 \text{ tel que } \sigma_1(x) \in Y1\} \\ = \sigma_1{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y1) \\ \big\downarrow f_l \\ \{y \in F2 \text{ tel que } \sigma_2(y) \in Y2\} \\ = \sigma_2{}^{-2}_{\mathcal{P}}(Y2) \end{array}$$

Montrons que $f_l : \sigma_1{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y1) \longrightarrow \sigma_2{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y2)$ a un sens :

soit $s \in \sigma_1{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y1)$, montrons que $f(s) \in \sigma_2{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y2)$.

or $s \in \sigma_1{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y1) \Leftrightarrow \sigma_1(s) \in Y1$

Nous avons donc : $\sigma_1(s) \in Y1 \Rightarrow g \circ \sigma_1(s) \in Y2$

or $g \circ \sigma_1(s) = \sigma_2 \circ f(s)$

donc $\sigma_2 \circ f(s) \in Y2$

donc $f(s) \in \sigma_2{}^{-1}_{\mathcal{P}}(Y2)$.

Prenons les conventions suivantes :

Soit $\mathbb{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

Nous noterons $\overline{x}$, un énoncé associé à $\mathbb{X}$ et $\varphi_{\mathbb{X}}$, le morphisme caractéristique.

Voyons maintenant comment l'ordre est défini dans $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Nous dirons que $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$ si et seulement si le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_l"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & Y1 \arrow[d, "f_l"] \\ X2 \arrow[r, hook] & Y2 \end{tikzcd}$$

c-à-d si et seulement si $X1 \subseteq Y1$ et $X2 \subseteq Y2$.

L'infinimum de $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ sera noté $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$

Il sera l'application $X1 \cap Y1 \xrightarrow[f_I]{} X2 \cap Y2$

Il lui correspond un énoncé ($\overline{x}$ et $\overline{y}$) :

dans F1, ($\overline{x}$ et $\overline{y}$) ne sera vrai que si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont vrais; il sera faux dès que l'un des deux est faux; il sera possible si l'un est possible et l'autre vrai ou possible.

Cette propriété peut être traduite par une application :

$$\wedge_1 : \{o,1,2\} \times \{o,1,2\} \longrightarrow \{o,1,2\} : \begin{array}{l} (o,o) \\ (o,1) \\ (o,2) \longmapsto o \\ (1,o) \\ (2,o) \\ (1,1) \longmapsto 1 \\ (1,2) \\ (2,1) \longmapsto 2 \\ (2,2) \end{array}$$

$\wedge_1$ est la fonction de vérité de la conjonction où 3 valeurs sont possibles : le vrai, le faux, le possible.

Nous pouvons retrouver facilement cette application grâce au tableau suivant :

	0	2	1
0	0	0	0
2	0	2	2
1	0	2	1

Dans F2, l'énoncé ($\overline{x}$ et $\overline{y}$) ne sera vrai que si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont vrais; il sera faux dans les autres cas.

L'application $\wedge_2 : \{o,1\} \times \{o,1\} \longrightarrow \{o,1\}$ va traduire cette propriété, de la même façon que dans Ens.

$\wedge_2$ sera donc la fonction de vérité de la conjonction, où 2 valeurs sont possibles : le vrai et le faux.

Nous prendrons alors comme *morphisme caractéristique* $\wedge$, le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \{o,1,2\} \times \{o,1,2\} \arrow[r, "\wedge_1"] \arrow[d, "\omega \times \omega"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \{o,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\ \{o,1\} \times \{o,1\} \arrow[r, "\wedge_2"'] & \{o,1\} \end{tikzcd}$$

Nous vérifions sans peine que $\wedge$ ainsi défini est $\varphi_{<v,v>}$.

Quel est le sous-objet $\leqslant$ de $\Omega \times \Omega$?

Nous savons que $\mathcal{X} \leqslant \mathcal{Y}$ si et seulement si $X1 \cap Y1 = X1$ et $X2 \cap Y2 = X2$.

Par conséquent $\overline{y}$ est vrai dès que $\overline{x}$ l'est

$$\Updownarrow$$

($\overline{x}$ et $\overline{y}$) et $\overline{x}$ prennent les mêmes valeurs de vérité en même temps.

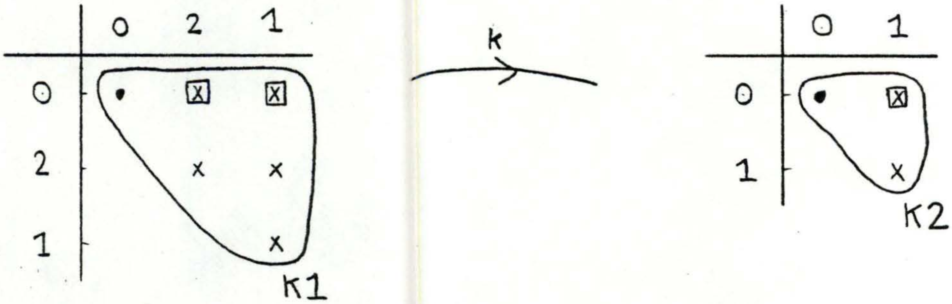
C'est pourquoi $\leqslant$ sera le sous-objet $\mathbb{K} \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ qui est $eg(\pi_1, \wedge)$:

où $K1 = \{(o,o),(o,1),(o,2),(1,1),(2,1),(2,2)\}$

$K2 = \{(o,o),(o,1),(1,1)\}$

$k \; : \; K1 \longrightarrow K2$ est $\omega \times \omega_{\,|K1}$

k peut se retrouver par le schéma suivant :



où l'application k associe chaque symbole du tableau gauche au symbole similaire du tableau droit.

Quelle est l'opération $\rightarrow$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F} \in \mathcal{J}\ell$?

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y} \leqslant \mathbb{F}$

Le sous-objet $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sera l'application $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_1 \xrightarrow[f_|]{} (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_2$

Un énoncé correspondant sera $(\overline{x} \rightarrow \overline{y})$

$(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_2$ sera l'ensemble des éléments de F2 pour lesquels l'énoncé $(\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$ est vrai.

Donc $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_2 = (F2 \setminus X2) \cup Y_2 = X2 \rightarrow Y2$.

$(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_1$ sera l'ensemble des éléments de F1 pour lesquels l'énoncé $(\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$ est vrai et tel que il reste vrai pour $f(t) \in F2$.

Donc $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})_1 = (X1 \rightarrow Y1) \cap f^{-1}_{\mathcal{P}}(X2 \rightarrow Y2)$.

Nous pouvons constater que cette définition de $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est aussi (heureusement) $eg(\varphi_{\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}}, \varphi_{\mathcal{X}})$.

Nous pouvons maintenant décrire le morphisme $\rightarrow$

$\rightarrow$ est le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\{o,1,2\} \times \{o,1,2\} \arrow[r, "\rightarrow_1"] \arrow[d, "\omega\times\omega"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \{o,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\
\{o,1\} \times \{o,1\} \arrow[r, "\rightarrow_2"'] & \{o,1\}
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow_1$ et $\rightarrow_2$ vont donner dans Ω les valeurs de vérité de l'énoncé $(\overline{x} \rightarrow \overline{y})$.

Par rapport à F1, la valeur de vérité de l'énoncé $(\overline{x} \rightarrow \overline{y})$

sera : 1 quand $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont vrais

quand $\overline{x}$ est faux (car à ce moment on peut déduire n'importe quoi de la valeur de vérité de $\overline{y}$).

donc $\rightarrow_1 \{(1,1),(o,1),(o,2),(o,o)\} = 1$

si $\overline{x}$ est vrai et $\overline{y}$ est possible dans F1, alors $(\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$ est faux dans F1 mais après avoir subi la transformation associée à f, $\overline{y}$ devient vrai dans F2, et par conséquent, l'énoncé $(\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$ transformé est vrai dans F2. Ceci se résume en disant : dans ce cas, $(\overline{x} \rightarrow \overline{y})$ est possible; donc $\rightarrow_1 \{(1,2)\} = 2$.

Nous avons aussi $\rightarrow_1 \{(2,1),(2,2)\} = 1$ car dans ces situations, l'énoncé $\overline{x} \Rightarrow \overline{y}$ est vrai dans F1 et reste vrai dans F2. Si $\overline{x}$ est vrai et $\overline{y}$ faux dans F1, alors $\overline{x} \Rightarrow \overline{y}$ est faux dans F1 et reste faux dans F2, après transformation;

donc $\rightarrow_1 \{(1,o)\} = o$

Si $\overline{x}$ est possible et $\overline{y}$ faux dans F1, alors $\overline{x} \Rightarrow \overline{y}$ est vrai dans F1 mais devient faux dans F2;

donc $\rightarrow_1 \{(2,o)\} = o$.

Nous retrouvons facilement $\rightarrow_1$ par le tableau suivant :

	0	2	1
0	1	1	1
2	0	1	1
1	0	2	1

Nous constatons que le vrai se déduit de n'importe quoi, que n'importe quoi se déduit du faux, que le probable se déduit du probable, que le faux ne peut se déduire du vrai ou du probable, que le probable se déduit parfois du vrai.

$\rightarrow_2$ sera elle la fonction de vérité de l'implication lorsque 2 valeurs sont possibles le vrai et le faux. Nous pouvons constater que $\rightarrow$ ainsi définie est aussi le morphisme caractéristique de $\leqslant$.

3. LANGAGE D'UN TOPOS

Nous allons associer à chaque topos un langage formel à l'aide duquel nous pouvons utiliser notre intuition ensembliste pour travailler en théorie des topos.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Nous définissons un langage formel $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ de la façon suivante :
Nous nous donnons d'abord *des symboles* : quels sont-ils ?

1. *Les variables*

   pour tout objet A de $\mathcal{E}$, soit V_A, un ensemble dénombrable.
   Par exemple, nous pouvons poser $V_A = \{A\} \times N$. Les éléments de V_A sont appelés variables de type A. Si $A, B \in |\mathcal{E}|$ et $A \neq B$, nous avons $V_A \cap V_B = \emptyset$

   Soit $V = \bigcup\limits_{A \in |\mathcal{E}|} V_A$

   Nous noterons $P_{fini}(V)$ la classe des parties finies de V.

2. Un symbole pour chaque morphisme de $\mathcal{E}$.
   Un symbole pour chaque objet de $\mathcal{E}$.

3. $\in$, $\wedge$, $\rightarrow$, (,), *la virgule*.

Tous ces symboles constituent *l'alphabet* du système formel. Avec ces symboles, nous faisons des assemblages en juxtaposant sur une même ligne un certain nombre de ces symboles; ce que nous obtenons sont des *mots*.
Nous avons alors des mots significatifs de 2 sortes : les termes et
les formules.

1. *Les termes*

   Nous définissons une classe T de termes munis de 2 fonctions $\tau : T \rightarrow |\mathcal{E}|$ et $\sigma : T \rightarrow P_{fini}(V)$. Pour tout terme t, $\tau(t)$ s'appelle le type de t et $\sigma(t)$ s'appelle le support de t.

   Un terme est une suite finie de symboles obtenue en appliquant un nombre fini de fois les règles de formation suivantes :

T1. Si $a \in V_A$, alors a est un terme de type A.

T2. Si $1 \xrightarrow{a} A \in \mathcal{E}$, alors a est un terme appelé constante, de type A. (Nous identifions ici le morphisme a avec le symbole qui lui est associé).

T3. Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de type $A_1, \ldots, A_n$ respectivement, alors $(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme de type $A_1 \times \ldots \times A_n$.

T4. Si $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{E}$ et t est un terme de type A, alors f(t) est un terme de type B.

Pour tout terme t, $\sigma(t)$ est l'ensemble des variables apparaissant dans t.

Exemple : Si $A \xrightarrow{f} B$ et $B \xrightarrow{g} C$ sont deux morphismes de $\mathcal{E}$ et $a \in V_A$, alors $g(f(a))$, $(g \circ f)(a)$, $ev(a, \overline{f})$, et $f(a)$ sont des termes. Si t_1, t_2 sont deux termes de type Ω, $\wedge(t_1, t_2)$ est aussi un terme de type Ω.

Notation : Nous noterons $t_1 \wedge t_2$, le terme $\wedge(t_1, t_2)$ et $t_1 \to t_2$, le terme $\to (t_1, t_2)$. Si t est un terme de type B^A et t' un terme de type A, nous noterons t(t') le terme ev(t',t).

2. *Les formules*

Nous définissons une classe F de formules muni d'une fonction $\sigma : F \longrightarrow P_{fini}(V)$ appelé support.

Une famille est une suite finie de symboles obtenue en appliquant un nombre fini de fois les règles de formation suivantes :

F1. Si $A' \rightarrowtail^{a} A \in \mathcal{E}$ et t est un terme de type A, alors $(t \in a)$ est une formule.

F2. Si Φ et ψ sont des formules, alors $(\Phi \to \psi)$ et $(\Phi \quad \psi)$ sont des formules.

Quand il n'y aura pas de confusion, nous écrirons $t \in A'$, $\Phi \wedge \psi$, $\Phi \to \psi$, au lieu de $(t \in a)$, $(\Phi \wedge \psi)$, $(\Phi \to \psi)$ respectivement.

Le support $\sigma(\Phi)$ d'une formule Φ est l'ensemble des variables apparaissant dans Φ.

Exemple : si t_1, t_2 sont des termes de type A, alors nous pouvons former la formule : $(t_1, t_2) \in \Delta_A$

où $\Delta_A = \langle 1_A, 1_A \rangle : A \times A \longrightarrow A$

Nous noterons $t_1 = t_2$ cette formule.

Remarque : Nous introduisons des abréviations pour certaines formules ou certains termes. Pour indiquer ces abréviations, nous utiliserons le symbole $\equiv$.

Ainsi $t_1 = t_2 \equiv (t_1, t_2) \in \Delta_A$.

(Ce symbole = est aussi utilisé pour indiquer l'égalité entre 2 morphismes de $\mathcal{E}$. C'est abus ne produit pas de confusion).

Les abréviations seront quelquefois abrégées à leur tour.

Posons $t_1 \leqslant t_2 \equiv (t_1 , t_2) \in \leqslant$

$$\Phi \leftrightarrow \psi \equiv (\Phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \Phi)$$

Remarque : En pratique, nous identifierons les morphismes du topos avec les symboles associés à ces morphismes. C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà fait en T2 et F1. Si dans le topos $\mathcal{E}$, nous avons un choix canonique d'un monomorphisme représentant les sous-objet associés, alors il suffit de limiter F1 à ces monomorphismes.

Désormais $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ désignera toujours le langage associé à un topo $\mathcal{E}$.

°
° °

4. INTERPRETATION DU LANGAGE D'UN TOPOS DANS LE MEME TOPOS

Interprétation des termes

Soit t un terme de type B.

Soit une suite de variables distinctes $a_1, \dots, a_n$ de types $A_1, \dots, A_n$ telles que $\bar{\sigma}(t) \subseteq \{a_1 \dots . a_n\}$

Dans Ens, nous aurions envie d'interpréter t de la façon suivante :

> a_i est une variable de type A_i, c-à-d, a_i prend ses valeurs dans A_i.
> t est une terme de type B, c-à-d, t va être représenté dans Ens par des éléments de B. De quelle façon ?
> Chaque fois que nous donnons une valeur(prise dans A_i) à chaque a_i, nous ferons correspondre un élément de B, qui sera la représentation de t.

Traduisons cette idée pour définir l'interprétation d'un terme dans le cas où $\mathcal{E}$ est un topos quelconque.

L'interprétation du terme t par rapport à la suite $a_1 \dots a_n$ est un morphisme $|t|_{a_1 \dots a_n} : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$, défini par les règles suivantes:

T1. Si $a_i \in V_{a_i}$, $i \in \{1,2 \dots n\}$, alors $|a_i|_{a_1 \dots a_n} : A_1 \times \dots \times A_n \xrightarrow{\pi_i} A_i$.
est la projection canonique.En particulier, si $a \in V_A$, alors $|a|_a = A \xrightarrow{id_A} A$.

T2. Si a est une constante, c-à-d $1 \xrightarrow{a} A \in \mathcal{E}$, alors
$|a|_{a_1 \dots a_n} = A \times \dots \times A_n \longrightarrow 1 \xrightarrow{a} A$.

T3. Si $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{E}$, t est un terme de type A et $\sigma(t) \subseteq \{a_1 \dots . a_n\}$, alors
$|f(t)|_{a_1 \dots a_n} = A_1 \times \dots \times A_n \xrightarrow{|t|_{a_1 \dots . a_n}} A \xrightarrow{f} B$

T4. Si $t_1, \dots, t_m$ sont des termes, alors
$|(t_1, \dots, t_m)|_{a_1 \dots a_n} = \langle |t_1|_{a_1 \dots a_n}, \dots, |t_m|_{a_1 \dots a_n} \rangle$

Une remarque concernant cette définition :

> l'interprétation d'un terme est définie par rapport à une *suite de variables distinctes*. Intuitivement, nous ne voyons d'ailleurs pas l'intérêt d'interpréter par rapport à une suite où toutes les variables ne seraient pas distinctes 2 à 2. Et de plus, cela introduirait quelques difficultés : T1 par exemple ne définirait pas toujours, un morphisme unique, nous aurions 2 possibilités, à savoir : $\pi_1 : A \times A \to A$ et $\pi_2 : A \times A \to A$.

Dorénavant donc, toutes les suites seront supposées être formées de variables distinctes.

quelques cas particuliers

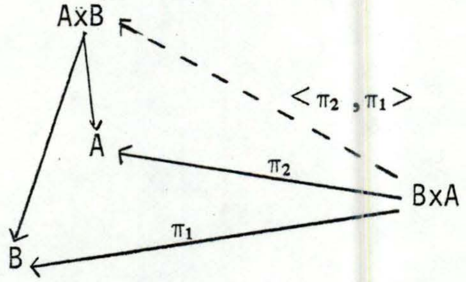
Nous ne démontrerons pas les égalités qui suivront, nous verrons simplement qu'elles correspondent fort bien à notre intuition ensembliste.

1. Si $f : A \longrightarrow B$
si $a \in V_A$
alors $|ev(a, \ulcorner f \urcorner)|_a = f$

Dans Ens, nous interprétons le terme ev(a, f) par rapport à a, de cette façon : soit $\alpha \in A$ représentant la variable a.
L'application $\ulcorner f \urcorner : 1 \longrightarrow B^A$ est une constante : son interprétation est aussi une constante qui est f.
L'évaluation de $\ulcorner f \urcorner$ en α est $f(\alpha)$.
Donc $|ev(a, \ulcorner f \urcorner)|_a = f$

2. si $a \in V_A$, si $b \in V_B$, $a \neq b$.
alors $|(a,b)|_{b,a} = <\pi_2 , \pi_1>$

où π_2 est la projection canonique de BxA dans A et
π_1 celle de BxA sur B,
où $< \pi_1 , \pi_2 >$ est construit par le schéma suivant :



3. $\boxed{\text{si } a : 1 \longrightarrow A, \text{ alors } |a|_{\emptyset} \text{ est } a}$

en effet, $|a|_{\emptyset}$ est le morphisme : $\prod_{i \in \emptyset} A_i \longrightarrow 1 \xrightarrow{a} A.$

Comme $\prod_{i \in \emptyset} A_i = 1, |a|_{\emptyset} = a$

4. $$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } t \text{ et } t' \text{ sont 2 termes de type } \Omega \\ \text{alors } |t \wedge t'|_{a_1 \dots a_n} = \wedge \circ \langle |t|_{a_1 \dots a_n}, |t'|_{a_1 \dots a_n} \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\quad = |t|_{a_1 \dots a_n} \wedge |t'|_{a_1 \dots a_n} \end{array}}$$

5. Soit S une suite finie de variables.
Nous noterons (S), le terme associé par la règle T3, c-à-d si S est la suite $x_1, \dots, x_n$, alors

$(S) = (x_1, \dots, x_n)$ si $n > 1$

$(S) = x_1$ si $n = 1$

$(S) = id_1$ si $n = 0$

Nous noterons $X^S = X_1 \times \dots X_n$ où $X_i = \tau(x_i)$.

Si S et S' sont 2 suites, nous posons :

$S \subseteq S'$ si tout élément de S est élément de S'

$S' - S$ la sous-suite de S' obtenue en éliminant les variables de S.

Si $S \subseteq S'$, nous avons un morphisme canonique :

$\pi : X^{S'} \longrightarrow X^S$

Nous observons que $\pi = |(S)|_{S'}$.

Interprétation des formules

Soit Φ une formule.

Soit $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables de type $A_1, \ldots, A_n$, telles que $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Dans Ens, comment allons-nous interpréter la formule Φ ?

Chaque fois que nous attribuerons une valeur à $a_1, \ldots, a_n$, la formule Φ sera ou ne sera pas vérifiée.

Nous pouvons alors définir un sous-ensemble de $A_1 \times \ldots \times A_n$ qui sera l'ensemble des n-uples pour lesquels Φ est vraie.

L'interprétation de Φ par rapport à $a_1, \ldots, a_n$ sera ce sous-ensemble.

Suivons ce raisonnement pour la définir dans le cas général :

L'interprétation de Φ par rapport à la suite $a_1, \ldots, a_n$ est le sous-objet

$$|\Phi|_{a_1 \ldots a_n} \rightarrowtail A_1 \times \ldots \times A_n$$

défini par les règles suivantes :

F1. Si $A' \overset{\alpha}{\rightarrowtail} A$ est un sous-objet de A dans $\mathcal{E}$ et t est un terme de type A, alors $|t \in \alpha|_{a_1 \ldots a_n} \rightarrowtail A_1 \times \ldots \times A_n$ s'obtient en faisant le produit fibré de α par $|t|_{a_1 \ldots a_n}$.

$$\begin{tikzcd}
{|t \in \alpha|_{a_1 \ldots a_n}} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & A_1 \times \ldots \times A_n \arrow[d, "{|t|_{a_1 \ldots a_n}}"] \\
A' \arrow[r, tail, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}$$

c-à-d dans Ens, les n-uples de $A_1 \times \ldots \times A_n$ pour lesquels la formule $t \in \alpha$ est vraie, sont ceux pour lesquels l'interprétation correspondante de t se trouve dans A'.

F2. $|\Phi \wedge \psi|_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|_{a_1 \ldots a_n} \wedge |\psi|_{a_1 \ldots a_n}$

c-à-d dans Ens, la formule $\Phi \wedge \psi$ sera vraie si et seulement si Φ et ψ sont vraies en même temps.

Nous avons donc dans ce cas;

$$|\Phi \wedge \psi|_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|_{a_1 \ldots a_n} \cap |\psi|_{a_1 \ldots a_n}$$

F3. $|\Phi \to \psi|_{a_1 \ldots\ldots a_n} = |\Phi|_{a_1 \ldots\ldots a_n} \to |\psi|_{a_1 \ldots\ldots a_n}$

c-à-d dans Ens, la formule $\Phi \to \psi$ sera vraie si ψ est vraie dès que Φ est vraie.

Donc $|\Phi \to \psi|_{a_1 \ldots a_n} = A_1 \times \ldots \times A_n - |\Phi|_{a_1 \ldots a_n} \cup |\psi|_{a_1 \ldots a_n}$

$$= |\Phi|_{a_1 \ldots a_n} \to |\psi|_{a_1 \ldots a_n}$$

quand il n'y a pas de confusion sur la suite de variables considérées, nous notons $|t|$ ou $|\Phi|$, L'interprétation du terme t ou de la formule Φ par rapport à cette suite.

Quelques cas particuliers

1.

> Soient t_1, t_2 2 termes de type A.
> Soit $\{a_1 \ldots\ldots a_n\}$ une suite de variables distinctes telles que $\sigma(t_1) \cup \sigma(t_2) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$
> où $a_i \in V_{A_i}$.
> Alors $|t_1 = t_2|_{a_1 \ldots a_n} = eg(|t_1|_{a_1 \ldots a_n}, |t_2|_{a_1 \ldots a_n})$

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
{|t_1 = t_2|_{a_1 \ldots a_n}} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & A_1 \times \ldots \times A_n \arrow[d, "{<|t_1|, |t_2|>}"] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \\
A \arrow[r, tail, "\Delta_A"'] & A \times A \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & A
\end{tikzcd}$$

où $\Delta_A = <id_A, id_A>$

Voyons plutôt dans Ens :

les n-uples de $A_1 \times \ldots \times A_n$ pour lesquels la formule $t_1 = t_2$ est vraie sont ceux pour lesquels t_1 et t_2 ont interprétés de la même façon.

ce qui se traduit par :

$$|t_1 = t_2|_{a_1 \ldots a_n} = \{(x_1 \ldots x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n \text{ tel que } |t_1|(x_1 \ldots x_n) = |t_2|(x_1 \ldots x_n)\}$$

$$= eg(|t_1|, |t_2|).$$

2. En particulier, si t est un terme de type Ω, alors

$$|t = v|_{a_1 \dots a_n} = eg(|t|_{a_1 \dots a_n}, v_{A_1 \times \dots A_n}).$$

c-à-d dans Ens, l'ensemble des n-uples de $A_1 \times \dots \times A_n$ pour lesquels l'interprétation de t vaut 1. Par conséquent, la formule t=v ne sera vraie que si l'interprétation de t est le "vrai". Ceci exprime donc :

$$\boxed{{}^{\varphi}|t=v|_{a_1 \dots a_n} = |t|_{a_1 \dots a_n}}$$

c-à-d

$$\begin{tikzcd} {|t = v|_{a_1 \dots a_n}} \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\ A \times \dots \times A_n \arrow[r, "{|t|_{a_1 \dots a_n}}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

3. Soient t_1, t_2 2 termes de type Ω,
tels que $\sigma(t_1) \cup \sigma(t_2) \subseteq \{a_1 \dots a_n\}$, une suite de variables.
Nous avons alors successivement

$$\begin{aligned} |t_1 \leqslant t_2|_{a_1 \dots a_n} &= \langle |t_1|_{a_1 \dots a_n}, |t_2|_{a_1 \dots a_n} \rangle^{-1} (\leqslant) \\ &= \langle {}^{\varphi}|t_1 = v|, {}^{\varphi}|t_2 = v| \rangle^{-1} (\leqslant) \\ &= |t_1 = v| \to |t_2 = v| \end{aligned}$$

Ceci grâce au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} {|t_1 \leqslant t_2|_{a_1 \dots a_n}} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & A_1 \times \dots \times A_n \arrow[d, "{<|t_1|, |t_2|>}"] \\ K \arrow[r, tail, "\leqslant"'] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

Voyons dans Ens :

l'ensemble des n-uples de $A_1 \times \ldots \times A_n$ qui satisfont la formule $t_1 \leqslant t_2$ sont les $(x_1 \ldots x_n)$ tels que

$$|t_1|(x_1 \ \ldots \ x_n) \leqslant |t_2|(x_1 \ \ldots \ x_n)$$

pour la relation $\leqslant$ définie sur Ω.

Or nous avons vu que $o \leqslant o$, $1 \leqslant 1$ et $o \leqslant 1$. Donc

$|t_1|(x_1 \ldots x_n) \leqslant |t_2|x_1 \ldots x_n)$ si et seulement si dès que $|t_1|(x_1 \ldots x_n)$ est 1 ou le "vrai", alors $|t_2|(x_1 \ldots x_n)$ est aussi le "vrai".

Donc la formule $t_1 \leqslant t_2$ est vérifiée si et seulement si chaque fois que $t_1 = v$ l'est, alors $t_2 = v$ l'est aussi.

Donc $|t_1 \leqslant t_2| = |t_1 = v| \longrightarrow |t_2 = v|$

4. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } 1 \xrightarrow{\ a\ } A \\ \text{Si } A' \overset{\alpha}{\rightarrowtail} A \\ \text{alors } |a \in \alpha|_{\phi} = a^{-1}(\alpha) \end{array}}$

car $|a \in \alpha|_{\phi}$ est déterminé par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
{|a \in \alpha|_{\phi}} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & 1 \arrow[d, "{|a|_{\phi} = a}"] \\
A' \arrow[r, tail, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

Dans Ens, par exemple, $|a \in \alpha|_{\phi}$ est 1 si la constante a se trouve dans A' et l'ensemble vide sinon.

L'opération de substitution

Supposons que t est un terme de type A

$a \in V_A$

Φ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

W est un terme de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Nous appelons substitution du terme t par la variable a, dans Φ ou dans w, l'opéra-

tion qui consiste à remplacer chaque occurrence de a dans Φ ou W par une occurrence

<u>Notation</u> : nous désignons par $w(t/a)$ et $\Phi(t/a)$, le résultat de la substitution de a par t dans w et Φ respectivement.

S'il n'y a pas de confusion, nous écrivons w' et Φ' à la place de $w(t/a)$ et $\Phi(t/a)$.

<u>Proposition 4.1.</u>

$w(t/a)$ est un terme et $\Phi(t/a)$ est une formule de $\mathcal{L}_{\&}$.

La preuve se fait par induction.

<u>Proposition 4.2.</u>

Soit w un terme

a une variable de type A

t un terme de type A

Supposons S et S' 2 suites de variables telles que

$$\sigma(w) \subseteq S$$

$$\sigma(t) \subseteq S'$$

$$S-\{a\} \subseteq S'$$

Alors $\sigma(w(t/a)) \subseteq S'$

et $|w(t/a)|_{S'} = |W|_S \circ |(S)(t/a)|_{S'}$

Comment comprendre cette formule ?

Interpréter le terme $w(t/a)$, c'est d'abord interpréter les occurrences de $w(t/a)$ et puis interpréter w, c-à-d interpréter les occurrences de w où celle de a est remplacée par celle de t et puis interpréter w.

C'est ce que traduit la formule.

La démonstration de cette proposition se trouve dans l'annexe 1.

Une remarque concernant l'ordre dans lequel les variables de S interviennent. Supposons que S' contiennent les mêmes variables que S mais prises dans un ordre différent. Par cette proposition, nous obtenons que $|w|_{S'} = |w|_S \circ |(S)|_{S'}$. Les 2 interprétations $|w|_{S'}$ et $|w|_S$ sont donc isomorphes. Heureusement, car intuitivement, la façon d'interpréter w ne dépend que de l'interprétation des variables de la suite.

Corollaire 4.1.

$|w(a'/a)|_{S'} = |w|_S$ où $a, a' \in V_A$

où $(S') = (S).(a/a')$

Proposition 4.3.

Soit Φ *une formule de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

$a \in V_A$

t *un terme de type* A

Soient S *et* S' 2 ~~*suites*~~ *de variables telles que* $\sigma(\Phi) \in S$

$\sigma(t) \in S'$

$S-\{a\} \in S'$

Alors $|\Phi(t/a)|_{S'} = |(S)(t/a)|^{-1}_{S'}(|\Phi|_S)$

et en termes de morphismes caractéristiques

$$\varphi_{|\Phi'|_{S'}} = \varphi_{|\Phi|_S} \circ |(S)(t/a)|_{S'}$$

En effet, dans Ens, par exemple, $|\Phi(t/a)|_{S'}$ = l'ensemble des éléments de $X^{S'}$ tels que les interprétations correspondantes des variables de Φ (où a est remplacée par le terme t) satisfont Φ.

Cet ensemble est donc déterminé en prenant le produit fibré de $|\Phi|_S$ et de $|(S)(t/a)|_{S'}$:

$$\begin{tikzcd}
{|\Phi(t/a)|_{S'}} \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & {|\Phi|_S} \arrow[d, tail] \\
X^{S'} \arrow[r, "{|(S)(t/a)|_{S'}}"'] & X^S
\end{tikzcd}$$

remarquons que nous pourrions associer la formule Φ à un terme de type Ω, tel son interprétation par rapport à S serait : $\varphi_{|\Phi|_S}$

La propriété $\varphi_{|\Phi'|_{S'}} = \varphi_{|\Phi|_S} \circ |(S)(t/a)|_{S'}$ est alors celle annoncée dans la proposition 4.2.

Corollaire 4.2.

$|\Phi(a'/a)|_{S'} = |\Phi|_S$ *où* $a', a \in V_A$

$(S') = (S)(a'/a)$

Corollaire 4.3.

Si S *et* S' *sont 2 suites de variables telles que* $\sigma(\Phi) \subseteq S \subseteq S'$

alors $|\Phi|_{S'} = |(S)|_{S'}^{-1}(|\Phi|_S)$

$= X^{S-S'} \times |\Phi|_S$

démonstration :

Nous savons déjà que $|\Phi|_{S'} = |(S)|_{S'}^{-1}(|\Phi|_S)$.

Il nous suffit donc de montrer que

$X^{S'-S} \times |\Phi|_S = |(S)|_{S'}^{-1}(|\Phi|_S)$

c-à-d que le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
X^{S'-S} \times |\Phi|_S \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, tail, "id_{X^{S'-S}} \times f"'] \arrow[drr, phantom, "p.f."] & & |\Phi|_S \arrow[d, tail, "f"] \\
X^{S'-S} \times X^S \simeq X^{S'} \arrow[rr, "\pi"'] & & X^S
\end{tikzcd}$$

où f est l'interprétation de Φ par rapport à S

et π et λ sont les projections canoniques.

Ceci est immédiat car nous avons la propriété générale disant que le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f \times id_B"] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & A \arrow[d, "f"] \\
C \times B \arrow[r, "\pi'"'] & C
\end{tikzcd}$$

quels que soient $A, B, C \in |\mathcal{E}|$, $A \xrightarrow{f} C$,

où π, π' sont les projections canoniques.

Voyons maintenant comment interpréter $\mathcal{L}_{\mathfrak{J}1}$ dans $\mathfrak{J}1$

Interprétation des termes de $\mathcal{L}_{\mathfrak{J}1}$:

si t est un terme de type $\mathbb{B}$,
si $a_1, \ldots, a_n$ est une suite de variables de type $\mathbb{A}_i (\equiv A_i^1 \xrightarrow{\alpha_i} A_i^2)$
telles que $\sigma\{a_1, \ldots a_n\} \leq \sigma(t)$,
alors $|t|_{a_1 \ldots a_n}$ sera un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 \times \ldots \times A_n^1 \arrow[r, "|t|^1_{a_1 \ldots a_n}"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & B1 \arrow[d, "b"] \\
A_1^2 \times \ldots \times A_n^2 \arrow[r, "|t|^2_{a_1 \ldots a_n}"'] & B2
\end{tikzcd}$$

c-à-d chaque fois qu'on représentera les variables a_i par un élément de A_i^1, il y correspondra une représentation dans B1, du terme t. Si on transforme la représentation de la variable a_i (grâce à α_i), pour tout $i = 1 \ldots n$, la représentation de t sera elle aussi transformée en un élément de B2, grâce à b.
Nous comprenons alors aisément que l'interprétation $|t|_{a_1 \ldots a_n}$ soit définie par les règles suivantes :

T1. si $a_i \in V_{\mathbb{A}_i}$, alors $|a_i|_{a_1 \ldots a_n}$ est

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 \times \ldots \times A_n^1 \arrow[r, "\pi^1 i"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A_i^1 \arrow[d, "\alpha_i"] \\
A_1^2 \times \ldots \times A_n^2 \arrow[r, "\pi^2 i"'] & A_i^2
\end{tikzcd}$$

où (π^1_i, π^2_i) sont les projections canoniques.

T2. Si α est un morphisme $\mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{A}$ tel que $\alpha_1(o) = k_1 \in A1$
et $\alpha_2(o) = k_2 \in A2$,

alors $|\alpha|_{a_1 \ldots a_n}$ sera le morphisme de $\mathfrak{F}1$:

$$\begin{tikzcd} A^1_1 \times \ldots \times A^1_n \arrow[r, "|\alpha|^1_{a_1 \ldots a_n}"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A1 \arrow[d, "a"] \\ A^2_1 \times \ldots \times A^2_n \arrow[r, "|\alpha|^2_{a_1 \ldots a_n}"'] & A2 \end{tikzcd}$$

où $|\alpha|^i_{a_1 \ldots a_n}$ est l'application constante qui vaut k_i, i=1,2.

T3. Si $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ est un morphisme de $\mathfrak{F}1$
si t est un terme de type $\mathbb{A}$
alors $|\varphi(t)|_{a_1 \ldots a_n}$ sera la composition des 2 diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A^1_1 \times \ldots \times A^1_n \arrow[r, "|t|^1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "©"] & B1 \arrow[d, "b"] \\ A^2_1 \times \ldots \times A^2_n \arrow[r, "|t|^2"'] & A2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & B2 \end{tikzcd}$$

T.4. Si $t_1 \ldots t_m$ sont des termes de type $\mathbb{B}_1, \ldots \mathbb{B}_m$, alors $|(t_1 \ldots t_m)|_{a_1 \ldots a_n}$ sera le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A^1_1 \times \ldots \times A^1_n \arrow[r, "|t_1|^1 \times \ldots \times |t_m|^1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & B^1_1 \times \ldots \times B^1_m \arrow[d, "b_1 \times \ldots \times b_m"] \\ A^2_1 \times \ldots \times A^2_n \arrow[r, "|t_1|^2 \times \ldots \times |t_m|^2"'] & B^2_1 \times \ldots \times B^2_m \end{tikzcd}$$

Regardons comme cas particulier, l'interprétation de $t \wedge t'$, par rapport à la suite de variables $a_1 \dots a_n$, quand t et t' sont 2 termes de type Ω.
Elle est définie par le carré commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
A_1^1 \times \dots \times A_n^1 \arrow[r, "|t \wedge t'|^1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \dots \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega_1 \arrow[d, "\omega"] \\
A_1^2 \times \dots \times A_n^2 \arrow[r, "|t \wedge t'|^2"'] & \Omega_2
\end{tikzcd}
$$

quand a_i varie dans A_i^1, $i=1 \dots n$, $t \; t'$ s'interprétera dans Ω_1 :

comme "vrai" si t et t' s'interprètent comme "vrai",

comme "faux" dès que l'un des deux s'interprète comme faux.

Comme "possible" dès que l'un des deux s'interprète comme "possible" et l'autre comme "vrai" ou "possible".

quand a_i varie dans A_i^2, $i=1 \dots n$, $t \wedge t'$ s'interprétera dans Ω_2 ; $t \wedge t'$ prendra donc la valeur "vrai" si t et t' sont interprétés par le "vrai" et la valeur "faux" dans les autres cas.
Cette interprétation de $t \wedge t'$ est donc, comme dans Ens, tout à fait logique.

Interprétation des formules de $\mathcal{L}_{\mathfrak{I}}$

Si Φ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathfrak{I}}$, alors $|\Phi|_{a_1 \dots a_n}$ devra être un sous-objet de $\mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{A}_n$, c-à-d un carré commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
|\Phi|^1_{a_1 \dots a_n} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n | {|\Phi|^1_{a_1 \dots a_n}}"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A_1^1 \times \dots \times A_n^1 \arrow[d, "\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n"] \\
|\Phi|^2_{a_1 \dots a_n} \arrow[r, hook] & A_1^2 \times \dots \times A_n^2
\end{tikzcd}
$$

c-à-d $|\Phi|^1_{a_1 \ldots a_n}$ sera l'ensemble des n-uples de $A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$ qui satisfont la formule Φ et qui la satisfont encore, après avoir subit la transformation $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$. $|\Phi|^2_{a_1 \ldots a_n}$ sera l'ensemble des n-uples de $A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$ qui satisfont la formule Φ.

Nous admettons donc facilement que l'interprétation d'une formule par rapport à la suite de variables distinctes $a_1 \ldots a_n$, de type $\mathbb{A}_1 \ldots \mathbb{A}_n$, soit définie par les règles suivantes :

F1. si $\mathbb{A}' \xrightarrow{\alpha} \mathbb{A}$

si t est un terme de type $\mathbb{A}$

alors $|t \in \alpha|^1_{a_1 \ldots a_n} = \{(x_1 \ldots x_n) \in A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$ tel que $|t|^1(x_1 \ldots x_n) \in A1'\}$

$|t \in \alpha|^2_{a_1 \ldots a_n} = \{(y_1 \ldots y_n) \in A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$ tel que $|t|^2(y_1 \ldots y_n) \in A2'\}$

F2. $|\Phi \wedge \psi|^1_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|^1_{a_1 \ldots a_n} \cap |\psi|^1_{a_1 \ldots a_n}$

$|\Phi \wedge \psi|^2_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|^2_{a_1 \ldots a_n} \cap |\psi|^2_{a_1 \ldots a_n}$

F3. $|\Phi \to \psi|^1_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|^1 \to |\psi|^1 \cap (\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n)^{-1} (|\Phi|^2 \to |\psi|^2)$

$|\Phi \to \psi|^2_{a_1 \ldots a_n} = |\Phi|^2 \to |\psi|^2$

Les règles F2 et F3 sont à comprendre en suivant le même raisonnement fait pour construire les sous-objets $\mathbb{X} \wedge \mathbb{Y}$ et $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ d'un objet $\mathbb{F}$ de $\mathfrak{F}1$.

Regardons quelques exemples de plus près et voyons que là aussi, la théorie rejoint notre intuition.

1. Si t_1 et t_2 sont 2 termes de type $\mathbb{A}$, alors $(t_1 = t_2)$ est déterminé par $(t_1 = t_2)^1$ et $(t_1 = t_2)^2$, 2 sous-ensembles de $A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$ et $A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$, respectivement :

   $|t_1 = t_2|^1 = \{(x_1 \ldots x_n)$ tel que $|t_1|^1 (x_1 \ldots x_n) = |t_2|^2 (x_1 \ldots x_n)\}$

   $|t_1 = t_2|^2 = \{(y_1 \ldots y_n)$ tel que $|t_1|^2 (y_1 \ldots y_n) = |t_2|_2 (y_1 \ldots y_n)\}$

2. Si $\mathbb{1} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{A}$

   Si $\mathbb{A}' \xrightarrow{\beta} \mathbb{A}$

   alors $|\alpha \in \beta|_\phi \hookrightarrow \mathbb{1}$

   où $|\alpha \in \beta|^i_\phi = \{o\}$ si $\alpha_i(o) \in A'_i$

   $= \emptyset$ sinon

3. Si t_1, t_2 sont 2 termes de type Ω, que sera $|t_1 \leq t_2|_{a_1 \ldots a_n}$?

Nous avons déjà défini la relation $\leq$ dans Ω.

$|t_1 \leq t_2|^1 = \{(x_1 \ldots x_n) \in A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$ tel que

$\qquad |t_1|^1(x_1 \ldots x_n) \leq_1 |t_2|^1(x_1 \ldots x_n)\}$

$|t_1 \leq t_2|^2 = \{(y_1 \ldots y_n) \in A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$ tel que

$\qquad |t_1|^2(y_1 \ldots y_n) \leq_2 |t_2|^2(y_1 \ldots y_n)\}$

Revoyons quelques propositions intéressantes particularisées dans $\mathcal{F}\ell$.

Proposition 4.2.

si W est un terme de type $\mathbb{B}$, nous avions : $|W(t/a)|_{S'} = |W|_S \circ |(S)(t/a)|_{S'}$

c-à-d ici la composition des 2 carrés :

$$\begin{tikzcd}
X_1^{S'} \arrow[r, "|(S)(t/a)|_{S'}^1"] \arrow[d, "x'"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & X_1^S \arrow[r, "|W|_S^1"] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & B1 \arrow[d, "b"] \\
X_2^{S'} \arrow[r, "|(S)(t/a)|_{S'}^2"'] & X_2^S \arrow[r, "|W|_S^2"'] & B2
\end{tikzcd}$$

où $X_1^S \xrightarrow{x} X_2^S$ est l'objet $\mathbb{X}^S$

et $X_1^{S'} \xrightarrow{x'} X_2^{S'}$ est l'objet $\mathbb{X}^{S'}$

Proposition 4.3.

si Φ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$, alors $|\Phi(t/a)|_{S'} = |(S)(t/a)|_{S'}^{-1}(|\Phi|_S)$

c-à-d dans ce cas-ci, le carré

$$\begin{tikzcd}
|\Phi(t/a)|_{S'}^1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & X_1^{S'} \arrow[d, "x'"] \\
|\Phi(t/a)|_{S'}^2 \arrow[r, hook] & X_2^{S'}
\end{tikzcd}$$

où $|\Phi(t/a)|^{i}_{S'} = \{(x_1 \ldots x_n) \in X_i^{S'}$ tel que $|(S)(t/a)|^{i}_{S'}\,(x_1 \ldots x_n) \in |\Phi|^{i}_{S}\}$
$i=1,2$.

Il est aussi intéressant de voir comment se particularise le <u>corollaire 4.3.</u> :

Si S et S' sont 2 suites de variables telles que $\sigma(\Phi) \subseteq S \subseteq S'$, alors $|\Phi|_{S'}$ est le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
|\Phi|^{1}_{S'} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & X_1^{S'} \arrow[d, "x'"] \\
|\Phi|^{2}_{S'} \arrow[r, hook] & X_2^{S'}
\end{tikzcd}$$

où $\quad |\Phi|^{i}_{S'} = \{(x_1 \ldots x_n) \in X_1^{S'} \mid \pi_i(x_1 \ldots x_n) \in |\Phi|^{i}_{S}\}$, $i=1,2$.
où π est la projection canonique de $\mathbb{X}^{S'}$ sur $\mathbb{X}^{S}$.

5. VALIDITE D'UNE FORMULE
NOUVELLE NOTION DE PRE-ALGEBRE DE HEYTING

Définition 5.1.

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Soit $a_1 \dots a_n$ une suite de variables de type $A_1 \dots A_n$, telle que $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \dots a_n\}$.

Dans Ens, nous serions tenté de dire que la formule Φ est valide par rapport à la suite $a_1 \dots a_n$ si et seulement si chaque interprétation des variables a_i satisfait Φ, c-à-d si et seulement si $|\Phi|_{a_1 \dots a_n} = A_1 x \dots x A_n$.
Notre intuition est de nouveau cohérente avec la théorie puisque dans le cas général, nous dirons

Φ est valide par rapport à la suite $a_1 \dots a_n$
si et seulement si
$$|\Phi|_{a_1 \dots a_n} \rightarrowtail A_1 x \dots x A_n = id_{A_1 x \dots x A_n}$$

Notation

Nous écrirons $\models_{a_1 \dots a_n} \Phi$ (respectivement $\not\models_{a_1 \dots a_n} \Phi$), si Φ est (respectivement n'est pas), une formule valide par rapport à la suite $a_1 \dots a_n$. Parfois au lieu d'écrire $|\Phi|_{a_1 \dots a_n} \rightarrowtail A_1 x \dots x A_n = id_{A_1 x \dots x A_n}$, on écrira seulement $|\Phi|_{a_1 \dots a_n} = A_1 x \dots x An$.

Exemple

Soit $\mathcal{E}$ = Ens,

Soit $R \times R \xrightarrow{\bullet} R$ l'opération de multiplication des réels.

Alors $\models_{a,b,c} b.a = a.b$ où $a,b,c \in V_R$.

En effet, $|b.a = a.b|_{a,b,c} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
pourquoi ? L'interprétation $|b.a = a.b|_{a,b,c}$ est l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x.y = y.z \} = \mathbb{R}^3$ car . est commutative dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.2.

Φ est une formule valide si et seulement si pour toute suite de variables $a_1 \ldots a_n$ telle que $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$

$$\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \Phi$$

Notation

Nous écrivons $\models \Phi$ ($\not\models \Phi$) si Φ est (n'est pas) une formule valide de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Nous allons voir maintenant toute une série de propriétés concernant la validité de formules. Nous les verrons dans Ens, ce qui permettra au lecteur de comprendre plus facilement la généralisation (c-à-d le cas où $\mathcal{E}$ est un topos quelconque). A la fin de ce chapitre, nous regarderons de plus près, comment se traduit cette nouvelle notion dans $\mathfrak{M}$.

Propriété

Soit Φ une formule, a une variable, t un terme tel que $\tau(t)=\tau(a)$.
Soit S une suite de variables qui forme le support de Φ.
Soient $a_1 \ldots a_n$ une autre suite de variables telle que $\sigma(\Phi(t/a)) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$
Alors

$$|\Phi(t/a)|_{a_1 \ldots a_n} = \big|\, (S)(t/a) \in |\Phi|_S \,\big|_{a_1 \ldots a_n}$$

et en particulier

$$\models \Phi(t/a) \Leftrightarrow \models (S)(t/a) \in |\Phi|_S$$

ceci est immédiat puisque $|\Phi|(t/a)|_{a_1 \ldots a_n}$

$= |(S)(t/a)|^{-1}_{a_1 \ldots a_n}(|\Phi|_S)$ (vu prop. 4.3.)

$= \big|(S)(t/a) \in |\Phi|_S\big|_{a_1 \ldots a_n}$ (vu F1)

Nous devions nous attendre à ce résultat puisque dans Ens, les n-uples de $A_1 x \ldots x A_n$ rendant vraie la formule $\Phi(t/a)$ sont ceux qui fournissent une interprétation de $(S)(t/a)$ rendant vraie la formule Φ, c-à-d se trouvant dans $|\Phi|_S$.

Proposition 5.1.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et soient $a_1 \dots a_n$ et $b_1 \dots b_m$ 2 suites de variables telles que

$$\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \dots a_n\} \subseteq \{b_1 \dots b_m\}$$

Si $\underset{a_1 \dots a_n}{\models} \Phi$ *alors* $\underset{b_1 \dots b_m}{\models} \Phi$

ceci est une conséquence immédiate du corollaire 4.3. : en effet, si nous posons $S=a_1 \dots a_n$ et $S'=b_1 \dots b_m$, nous avons successivement les égalités suivantes : $|\Phi|_{S'} = X^{S'-S} x |\Phi|_S$

$= X^{S'-S} x X^S$ puisque $\underset{a_1 \dots a_n}{\models} \Phi$

$= X^{S'}$

et donc $\underset{b_1 \dots b_m}{\models} \Phi$

Faisons attention :

Nous aurions envie de démontrer la réciproque, puisque intuitivement : si quelque soit la façon dont nous interprétons les variables b_i, la formule Φ est vraie, à fortiori, la formule Φ restera toujours vraie, quelque soit l'interprétation des a_i.

Nous verrons qu'il n'en est pas toujours ainsi : en particulier, quand une des b_i est de type dit "vide".

Corollaire 5.1.

Soit $a_1 \dots a_n$ une suite de variables distinctes telle que $\sigma(\Phi) = \{a_1 \dots a_n\}$.

Alors $\models \Phi$ *si et seulement si* $\underset{a_1 \dots a_n}{\models} \Phi$

ce qui traduit l'idée que nous nous faisons de la validité d'une formule : cette notion ne dépend que des variables de Φ.

Corollaire 5.2.

Soit a une variable de type A telle que $a \in \sigma(\Phi)$.

Alors $\models \Phi$ si et seulement si pour tout terme t de type A, $\models \Phi(t/a)$.

En d'autres mots, la formule Φ est satisfaite, quelque soit la façon d'interpréter a ou tout terme du même type, qui remplacerait l'occurrence de a dans l'écriture de Φ.

La preuve résulte de la proposition 4.3.

Proposition 5.2.

Soient t_1, t_2 2 termes du même type.

Soit $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables, de type $A_1 \ldots A_n$, telle que

$$\sigma(t_1) \cup \sigma(t_2) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$$

Alors $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} t_1 = t_2$ *si et seulement si* $|t_1|_{a_1 \ldots a_n} = |t_2|_{a_2 \ldots a_n}$

En effet, la formule $t_1 = t_2$ est valide par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$ si et seulement si quelque soit la façon dont nous interprétons les termes t_1 et t_2, par rapport à cette suite, la formule est satisfaite. Dans Ens, cela se traduit par :

$|t_1|_{a_1 \ldots a_n}(x_1 \ldots x_n) = |t_2|_{a_1 \ldots a_n}(x_1 \ldots x_n)$

pour tout $(x_1 \ldots x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$

c-à-d $|t_1|_{a_1 \ldots a_n} = |t_2|_{a_1 \ldots a_n}$.

Formellement, cette proposition est vraie étant donné les équivalences successives suivantes :

$$\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} t_1 = t_2 \iff |t_1 = t_2|_{a_1 \ldots a_n} = A_1 \times \ldots \times A_n$$

$$eg(|t_1|, |t_2|) = A_1 \times \ldots \times A_n$$

$$|t_1| = |t_2|$$

Corollaire 5.3.

Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *et si t est un terme de type A, alors*

$\models (g \circ f)(t) = g(f(t))$

$\models id_A(t) = t$

$\models ev(t, \ulcorner f \urcorner) = f(t)$

$\models t = t$

Ces propriétés sont toutes triviales sauf peut-être la troisième. Essayons donc de la comprendre et voyons que les 2 termes $f(t)$ et $ev(t, \ulcorner f \urcorner)$ s'interprêtent de la même façon.

Soit une suite de variables $a_1 \ldots a_n$ tel que $\sigma(t) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$

$$|f(t)|_{a_1 \ldots a_n} = f \circ |t|_{a_1 \ldots a_n}$$

tandis que $|ev(t, \ulcorner f \urcorner)|_{a_1 \ldots a_n} = ev \circ \langle |t|_{a_1 \ldots a_n}, A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B^A \rangle$

Dans Ens, $A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B^A$ est une application constante qui vaut toujours f, $|ev(t, \ulcorner f \urcorner)|_{a_1 \ldots a_n}$ revient donc à évaluer f en t interprété dans A, c-à-d à calculer $f \circ |t|_{a_1 \ldots a_n}$.

Formellement, nous constatons que

$\langle |t|, A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} B^A \rangle = 1_A \times \ulcorner f \urcorner \circ \langle |t|, A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow 1 \rangle$

$$\begin{tikzcd}
A\times B^A \arrow[dr] \arrow[dd] & & A\simeq A\times 1 \arrow[ll, "1_A\times f"'] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
 & A \arrow[rr, equal] & & A & A_1\times\dots\times A_n \arrow[l, "|t|"'] \arrow[ull, "<|t|{,}A_1\times\dots\times A_n\longrightarrow 1>"'] \arrow[dll] \\
B^A & & 1 \arrow[ll, "\ulcorner f\urcorner"] & &
\end{tikzcd}$$

Donc $|ev(t,\ulcorner f\urcorner)|_{a_1\dots a_n} = ev\circ 1_A\times\ulcorner f\urcorner\circ\langle |t|, A_1\times\dots\times A_n \longrightarrow 1)\rangle$

$= f\circ\langle |t|, A_1\times\dots\times A_n \longrightarrow 1\rangle$

$= f\circ |t|$

car $\langle |t|, A_1\times\dots\times A_n \longrightarrow 1\rangle = |t|$

Corollaire 5.4.

i) Si t,w,r sont des termes de type Ω, alors

$$\models t\wedge w = w\wedge t$$

$$\models (t\wedge w)\wedge r = t\wedge(w\wedge r)$$

$$\models t\wedge t = t$$

ii) Si $t_1,t_2,\dots t_n$ sont des termes de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, alors

$$\models ((t_1,\dots,t_k),(t_{k+1},\dots,t_n)) = (t_1\dots t_n) \text{ pour tout } k\leqslant n$$

i) paraît évident et ii) se démontre par récurrence sur n.

Proposition 5.3.

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Soit $a_1\dots a_n$ une suite de variables, de types $A_1,\dots,A_n$, telle que $\sigma(\Phi)\cup\sigma(\psi) \subseteq \{a_1\dots a_n\}$.

Alors

α) $\models_{a_1\dots a_n} \Phi\rightarrow\psi \Leftrightarrow |\Phi|_{a_1\dots a_n} \leqslant |\psi|_{a_1\dots a_n}$

β) $\models_{a_1\dots a_n} \Phi\leftrightarrow\psi \Leftrightarrow |\Phi|_{a_1\dots a_n} = |\psi|_{a_1\dots a_n}$

γ) $\underset{a_1\ldots a_n}{\models} \Phi\wedge\psi \Leftrightarrow \underset{a_1\ldots a_n}{\models} \Phi$ et $\underset{a_1\ldots a_n}{\models} \psi$

δ) $\models \Phi \wedge (\Phi\rightarrow\psi)\rightarrow\psi$

les équivalences sont immédiates dans Ens comme dans un topos quelconque.
Démontrons la première par exemple :
Nous obtenons successivement les équivalences suivantes :

$$\underset{a_1\ldots a_n}{\models} \Phi\rightarrow\psi \Leftrightarrow |\Phi\rightarrow\psi|_{a_1\ldots a_n} = A_1\times\ldots\times A_n$$

$$\Leftrightarrow |\Phi| \rightarrow |\psi| = A_1\times\ldots\times A_n$$

$$\Leftrightarrow <\varphi_{|\Phi|}, \varphi_{|\psi|}>^{-1}(\leqslant) = A_1\times\ldots\times A_n$$

Donc le carré suivant est un produit fibré.

$$\begin{tikzcd}
A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & K \arrow[d, tail, "\leqslant"] \\
A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "<\varphi_{|\Phi|}, \varphi_{|\psi|}>"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

c-à-d $<\varphi_{|\Phi|}\ \varphi_{|\psi|}>$ se factorise $\leqslant$.

c-à-d $|\Phi| \leqslant |\psi|$.

cqfd.

<u>Corollaire 5.4.'</u>

Soient t_i, w_i $(i=1,2,\ldots n)$ des termes de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ tels que $\tau(t_i) = \tau(w_i)$
Alors

$$\models (t_1\ldots t_n) = (w_1\ldots w_n) \leftrightarrow (t_1 = w_1 \wedge t_2 = w_2 \quad \ldots \wedge t_n = w_n).$$

Désignons par $\vec{a}$, la suite de variables $a_1\ldots a_n$ telle que
$\{a_1\ldots a_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(t_i)\cup\sigma(w_i)$.

Il suffit de montrer que :

$$eg(|(t_1\ldots t_n)|_{\vec{a}}, |(w_1\ldots w_n)|_{\vec{a}}) =$$
$$eg(|t_1|_{\vec{a}}, |w_1|_{\vec{a}}) \wedge \ldots \wedge eg(|t_n|_{\vec{a}}, |W_n|_{\vec{a}}).$$

La démonstration se fait par récurrence sur n et se trouve dans l'annexe 2.

Remarque 5.1.

Nous pouvons avoir $\models \Phi \wedge \psi$ sans avoir $\models \Phi$ et $\models \psi$

Par exemple, si $\mathcal{E}$ = Ens

si $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$ est l'opération de multiplication des réels

si $\{o\} \xrightarrow{1} \mathbb{R}$ est l'application choisissant le nombre 1

Nous avons alors

1. $\models a=a+1 \wedge b=b$ où $a \in V_{\mathbb{R}}$ et $b \in V_{\emptyset}$

   en effet, l'interprétation de cette formule par rapport à a et b est un sous-ensemble de $\mathbb{R}\times\emptyset$, c-à-d de $\emptyset$ et ne peut donc être que $\emptyset$.
2. Cependant $\not\models a=a+1$

De même, nous pouvons avoir $\models \Phi$ et $\models \Phi \rightarrow \psi$ sans avoir $\models \psi$:

$\models b=b$

$\models b=b \rightarrow a=a+1$

cependant $\not\models a=a+1$

Corollaire 5.5.

Soit $\mathcal{E}$ un topos, $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{E}$, $a,a' \in V_A$ telles que $a \neq a'$.
Alors f est un monomorphisme ssi

$$\models (f(a) = f(a)) \rightarrow (a=a')$$

Ceci est une copie exacte de la propriété correspondante de Ens.

Démonstration :

Soit $U = |f(a)=f(a')|_{a,a'} = eg(f\circ\pi_1, f\circ\pi_2) = \langle\alpha,\beta\rangle$

$$U \rightarrowtail^{\langle\alpha,\beta\rangle} A\times A \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

Alors $\models (f(a)=f(a')) \to (a=a')$

$\Leftrightarrow |f(a)=f(a')|_{a,a'} \leq |a=a'|_{a,a'}$

$\Leftrightarrow \langle \alpha,\beta \rangle \leqslant eg(\pi_1,\pi_2)$

Or $eg(\pi_1,\pi_2) = \langle id_A, id_A \rangle$

Par conséquent $\alpha=\beta$

Il nous reste à prouver : $\alpha=\beta \Leftrightarrow f$ est un monomorphisme

1) si f est un monomorphisme,

   comme $f \circ \pi_1 \circ \langle\alpha,\beta\rangle = f \circ \pi_2 \circ \langle\alpha,\beta\rangle$

   c-à-d $f \circ \alpha = f \circ \beta$, on déduit $\alpha = \beta$.

2) supposons $\alpha = \beta$ et g,h 2 morphismes tels que

   $f \circ g = f \circ h$, c-à-d $f \circ \pi_1 \circ \langle g,h\rangle = f \circ \pi_2 \langle g,h\rangle$,

   comme $\langle\alpha,\beta\rangle = eg(f \circ \pi_1, f \circ \pi_2)$, $\langle g,h\rangle$ se factorise à travers $\langle\alpha\ \beta\rangle$

   et comme $\alpha=\beta$, nous déduisons, $g=h$.

Corollaire 5.6.

Soient Φ une formule de $\mathcal{L}_{\&}$, $a \in V_A$ et t,w 2 termes de type A.
Alors $\models (\Phi(t/a) \wedge (t=w) \to \Phi(w/a)$

Ce résultat paraît normal. Démontrons-le.

Posons S'=la suite des variables de $\sigma(\Phi)\setminus\{a\}\cup\sigma(t)\cup\sigma(w)$.

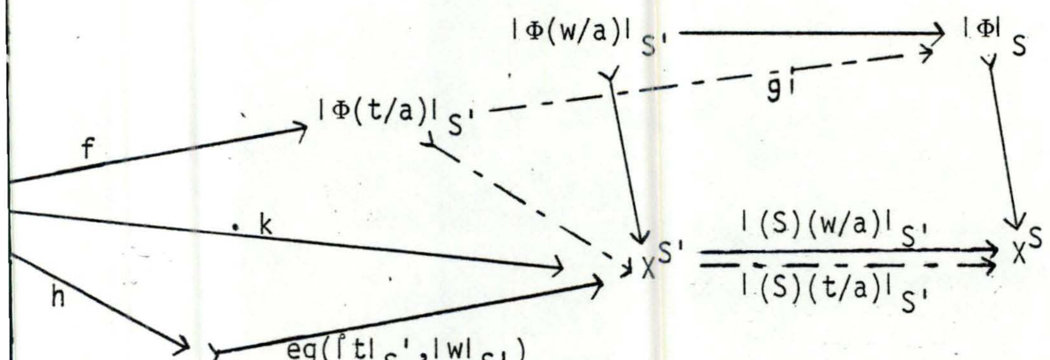
S =la suite des variables de $\sigma(\Phi)$.

En vertu de la proposition 5.3.4., démontrons plutôt

$$\underbrace{|\Phi(t/a)|_{S'} \wedge eg(|t|_{S'},|W|_{S'})}_{\text{nōt } k} \leqslant |\Phi(w/a)|_{S'}$$

ou encore : k se factorise à travers $|\Phi(w/a)|_{S'}$.

Construisons le diagramme suivant et commentons-le :



Les 3 carrés sont des produits fibrés. Nous avons alors les équivalences suivantes :

k se factorise à travers $|\Phi(w/a)|_{S'}$ $\Leftrightarrow$

$|(S)(w/a)|_{S'} \circ k$ se factorise à travers $|\Phi|_S$.

Ce qui est vérifié puisque

$$\begin{aligned} |(S)(w/a)|_{S'} \circ k &= |(S)(w/a)|_{S'} \circ eg(|t|_{S'}, |w|_{S'}) \circ h \\ &= |(S)(t/a)|_{S'} \circ eg(|t|_{S'}, |w|_{S'}) \circ h \\ &= |(S)(t/a)|_{S'} \circ |\Phi(t/a)|_{S'} \circ f \\ &= |\Phi|_S \circ g \circ f. \end{aligned}$$

Le corollaire est ainsi démontré.

Corollaire 5.7.

Si t,w et r sont des termes de même type de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, alors

α) $\models t=w \rightarrow w=t$

β) $\models t=w \wedge w=r \rightarrow t=r$

α)etβ) traduisent dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ les propriétés évidentes de l'égalité (symétrie et transitivité).

γ) *si t et w sont de type Ω, alors*

$\models t\wedge w=v \leftrightarrow t=v\wedge w=v$

ou de manière équivalente $|t\wedge w=v| = |t=v| \wedge |w=v|$

ou encore $\varphi_{|t\wedge w=v|} = \varphi_{|t=v|} \wedge \varphi_{|w=v|}$

c-à-d $|t\wedge w| = |t| \wedge |w|$

ce qui est vrai par définition de l'opération $\wedge$.

$\models t\leqslant w \leftrightarrow (t=v \rightarrow w=v)$

qui est une autre manière d'écrire la propriété déjà vue :

$|t\leqslant w| = |t=v| \rightarrow |w=v|$

$\models t\leqslant w \leftrightarrow t\wedge w=t$

ceci est une mise en formule de la définition de la relation $\leqslant$ dans Ω : en effet $\leqslant$ est $eg(\wedge, \pi_1)$

Corollaire 5.8.

Soient Φ_i, Φ'_i *i=1,2 des formules de* $\mathcal{L}_{\&}$ *telles que* $\models \Phi_i \leftrightarrow \Phi'_i$, *pour i=1,2. Alors*

$a)\ \models (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \leftrightarrow (\Phi'_1 \wedge \Phi'_2)$

$\beta)\ \models (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2) \leftrightarrow (\Phi'_1 \rightarrow \Phi'_2)$

$\gamma)\ \models (\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2) \leftrightarrow (\Phi'_1 \leftrightarrow \Phi'_2)$

Proposition 5.4.

Soient Φ, ψ, χ *trois formules de* $\mathcal{L}_{\&}$. *Alors*

$a)\ \models (\Phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\Phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$.

$\beta)\ \models ((\Phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\Phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$.

$\gamma)\ \models ((\Phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \chi)$.

$\delta)\ \models (\Phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \chi))$.

Ce sont des propriétés relatives à l'implication que nous retrouvons telles quelles dans Ens.

Démontrons la deuxième.

Cela revient à montrer :

$(|\Phi| \rightarrow (|\varphi| \rightarrow |\chi|)) \leqslant ((|\Phi| \wedge |\psi|) \rightarrow |\chi|)$

En utilisant les 2 propriétés suivantes :

$a \wedge \beta \leqslant \gamma \Leftrightarrow a \leqslant \beta \rightarrow \gamma$

$a \wedge (a \rightarrow \gamma) \leqslant \gamma$

$\forall a, \beta, \gamma \in \mathcal{P}(X)$ et $\forall X \in |\&|$

Nous avons les implications suivantes :

$|\Phi| \rightarrow (|\psi| \rightarrow |\chi|) \leqslant ((|\Phi| \wedge |\psi|) \rightarrow |\chi|)$

$\Leftrightarrow |\Phi| \wedge |\psi| \wedge (|\Phi| \rightarrow (|\psi| \rightarrow |\chi|)) \leqslant |\chi|$ (*)

or $|\Phi| \wedge (|\Phi| \rightarrow (|\psi| \rightarrow |\psi| \rightarrow |\chi|$

et $|\psi| \wedge (|\psi| \rightarrow |\chi| \leqslant |\chi|$

Par conséquent (*) est satisfait.

Les 3 autres propriétés se démontrent exactement de la même façon : le plus simple est d'utiliser à chaque étape, la propriété : $|\Phi| \rightarrow \cdot$ est adjoint à droite de $|\Phi| \wedge$.

Corollaire 5.9.

Si $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \Phi \rightarrow \psi$ *et* $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \psi \rightarrow \chi$ *alors* $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \Phi \rightarrow \chi$

le résultat est immédiat étant donné la prop. 5.4.8.

Cependant, remarque 5.2.

Nous pouvons avoir $\models \Phi \rightarrow \psi$ et $\models \psi \rightarrow \chi$ sans avoir $\models \Phi \rightarrow \chi$

Par exemple, si &=Ens, $a \in V_{\mathbb{R}}$, $b \in V_{\emptyset}$

Prenons $\Phi \equiv a=a$

$\psi \equiv b=b$

$\chi \equiv a=a+1$

Nous avons que $\models \Phi \rightarrow \psi$

$\models \psi \rightarrow \chi$

mais $\not\models \Phi \rightarrow \chi$

De nouveau, nous constatons que les variables de type vide nous empêchent de traduire notre intuition intégralement en formules.

Corollaire 5.10

Il consiste à formuler la propriété : "$\leqslant$ est une relation d'ordre sur Ω".

c-à-d

Si t,w,r *sont des termes de type* Ω *, alors*

α) $\models t \leqslant w \wedge w \leqslant r \rightarrow t \leqslant r$

β) $\models t \leqslant w \wedge w \leqslant t \leftrightarrow t = w$

Démontrons la deuxième propriété, c-à-d étant donné le corollaire 5.7. :

$\models (t \wedge w = t) \wedge (w \wedge t = w) \leftrightarrow t=w$

le corollaire 5.6. affirme que

$\models (t \wedge w = t) \wedge (t \wedge w = w) \rightarrow t = w$

Démontrons maintenant que

$\models t = w \rightarrow (t \leqslant w) \wedge (w \leqslant t)$

c-à-d $eg(|t|,|w|) \leqslant |t \leqslant w| \wedge |w \leqslant t|$

Il nous suffit donc de voir que $eg(|t|,|w|) \leqslant |t \leqslant w|$

or $|t \leq w| = |t = \vartheta| \to |w = \vartheta|$

$= eg(\varphi_{|t=\vartheta| \wedge |w=\vartheta|}, \varphi_{|t=\vartheta|})$

$= eg(|t| \wedge |w|, |t|)$

$= eg(\wedge \circ \langle |t|, |w| \rangle, |t|)$

Il nous reste donc à montrer que $eg(|t|, |w|)$ égalise $\wedge \circ \langle |t|, |w| \rangle$ et $|t|$:.

si nous notons e , $eg(|t|, |w|)$, nous constatons que :

$|t| \circ e = |w| \circ e$,

donc $\langle |t| \circ e, |w| \circ e \rangle$ se factorise à travers $\leqslant$

Comme $\leqslant = eg(\pi_1, \wedge)$, $\pi_1 \circ \langle |t| \circ e, |w| \circ e \rangle = \wedge \circ \langle |t| \circ e, |w| \circ e \rangle$

c-à-d $|t| \circ e = |t| \wedge |w| \circ e$

Par la prop. 5.3. , nous pouvons conclure que

$\models t = w \leftrightarrow (t \leqslant w) \wedge (w \leqslant t)$.

Ceci achève donc la démonstration du corollaire 5.10.

Définition 5.3.

Soit A *un objet d'un topos* $\mathcal{E}$ *et* $R \xrightarrow{j} A x A$ *un sous-objet de* AxA.

(A, *j*) *est un objet ordonné de* $\mathcal{E}$

$\Updownarrow$

i) $\models (x,x) \in j$

ii) $\models (x,y) \in j \wedge (y,z) \in j \to (x,z) \in j$

iii) $\models (x,y) \in j \wedge (y,x) \in j \to (x=y)$.

où $x,y,z \in V_A$ *et* $x \neq y \neq z \neq x$.

Remarque 5.3.

En vertu du corollaire 4.2., la définition ci-dessus ne dépend pas du choix des variables x,y,z dans V_A.

Nous avons vu au paragraphe 2, comment étaient définies les pré-algèbres de Heyting dans $\mathcal{E}$:

un objet de $\mathcal{E}$ était une pré-algèbre de Heyting

si et seulement si

il était muni de 3 opérations : $\wedge$, $\to$, 1 rendant commutatifs les diagrammes appropriés.

Nous allons donner une autre définition d'une pré-algèbre de Heyting, de type catégorique.

Nous dirons qu'un morphisme $A\times A \xrightarrow{\wedge} A$ *est* *une opération infinum* *par rapport à un objet ordonné* (A,j).

si et seulement si

i) $\models (x \wedge y, x) \in j$

$\models (x \wedge y, y) \in j$

ii) $\models ((z,x) \in j \wedge (z,y) \in j) \rightarrow (z, x \wedge y) \in j$

où $x,y,z \in V_A$ *et* $x \neq y \neq z \neq x$

Nous dirons qu'un morphisme $A\times A \xrightarrow{\rightarrow} A$ *est* *une opération implication* *par rapport à un objet ordonné* (A,j) *muni d'une opération infinum*

si et seulement si

$\models (x \wedge z, y) \in j \leftrightarrow (z, x \rightarrow y) \in j$

où $x,y,z \in V_A$ *et* $x \neq y \neq z \neq x$.

Nous dirons qu'un morphisme $1 \xrightarrow{s} A$ *est un* *supremum* *pour un objet ordonné* (A,j)

si et seulement si

$\models (x,s) \in j$ *où* $x \in V_A$

Donnons maintenant une deuxième définition d'une pré-algèbre de Heyting, donnée dans $\mathcal{L}_{\&}$.

un objet A de & est une *pré-algèbre de Heyting*

si et seulement si

il existe un sous-objet $j : R \rightarrowtail A\times A$ *tel que* (A,j) *soit un objet ordonné;*

il existe une opération infinum $\wedge$ *par rapport à* (A,j);

il existe une opération implication $\rightarrow$ *par rapport à* (A,j);

il existe un suprémum s *par rapport à* (A,j).

Nous pouvons montrer l'équivalence entre les 2 définitions de pré-algèbre de Heyting. Donnons uniquement le schéma de démonstration.

Soit A un objet de $\mathcal{E}$
A est une pré-algèbre de Heyting si et seulement si les 3 axiomes suivants sont satisfaits :

définition de type algébrique		définition de type catégorique
Il existe une opération $\wedge : A\times A \longrightarrow A$ satisfaisant les axiomes : A1) $\models x \wedge y = y \wedge x$ A2) $\models x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ A3) $\models x \wedge x = x$	$\Leftrightarrow$	(A,j) est un ensemble ordonné et $\wedge$ est une opération infinum pour (A,j) j sera tel que $\models (x,y) \in j \leftrightarrow x \wedge y = x$
Il existe $1 \xrightarrow{s} A$ tel que A4) $\models x \wedge s = x$	$\Leftrightarrow$	s est un suprénum pour (A,j)
Il existe une opération $\rightarrow : A\times A \longrightarrow A$ satisfaisant les axiomes : A5) $\models x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ A6) $\models (x \rightarrow y) \wedge x = x \wedge y$ A7) $\models (y \rightarrow x) \wedge x = x$ A8) $\models x \rightarrow x = 1$	$\Leftrightarrow$	$\rightarrow$ est une opération implication sur (A,j)

Par conséquent, nous nous attendons au résultat suivant qui est l'objet de la <u>proposition 5.5.</u> :

Dans un topos $(\Omega, \leqslant, \wedge, \rightarrow, v)$ est un objet ordonné avec opération infinum , implication $\rightarrow$ et suprénum v.

Le corollaire 5.10. affirme en effet que $(\Omega, \leqslant)$ est un objet ordonné.
D'autre part, le corollaire 5.7. assure que $\wedge$ est une opération cohérente avec $\leq$: en effet

$$\models t \leqslant w \leftrightarrow t \wedge w = t$$

De plus, nous avons montré au paragraphe 2 que $(\Omega, \wedge, \rightarrow, v)$ était une pré-algèbre de Heyting.

Par conséquent, la proposition 5.5. est immédiate.

Définition 5.5.

Un objet A d'une catégorie avec un objet terminal 1 est non-vide s'il existe un morphisme $1 \longrightarrow A$.

Dans Ens, un ensemble A est non-vide s'il contient au moint un élément.

Proposition 5.6.

Soit $\mathcal{C}$ *une catégorie avec produits finis. Alors*

α) *si* $A, B \in |\mathcal{C}|$ *et B non-vide, la projection* $A\times B \xrightarrow{\pi_A} A$ *est un épimorphisme*

β) *les projections :*

$$A\times A\times B \overset{\pi_{2,3}}{\underset{\pi_{1,3}}{\rightrightarrows}} A\times B \quad \textit{sont des épimorphimes.}$$

Démonstration :

α) soient $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C$ tels que : $f \circ \pi_A = g \circ \pi_A$. Monstrons que f=g. B étant non vide, il existe un morphisme $1 \xrightarrow{b} B$. Alors, il résulte du diagramme suivant que f = g

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "{<1_A, A \to 1 \xrightarrow{b} B>}"'] \arrow[dr, equal] & & \\
A\times B \arrow[r, "\pi_A"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

en effet, puisque $f \circ \pi_A = g \circ \pi_A$, nous avons aussi

$f \circ \pi_A \circ <1_A, A \to 1 \xrightarrow{b} B> = g \circ \pi_A \circ <1A, A \to 1 \xrightarrow{b} B>$

c-à-d que f=g.

β) pour prouver que $\pi_{2,3}$ est un épimorphisme, nous nous servons du diagramme suivant, (en nous rappelant que $id_{A\times B} = <\pi_A, \pi_B> = \pi_{2,3} \circ <\pi_A, <\pi_A, \pi_B>>$

$= \pi_{2\,3} \circ <\pi_A, \pi_A, \pi_B>$ et en suivant le même raisonnement que celui fait en α)

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[d, "<\pi_A,\pi_A,\pi_B>"'] \arrow[dr, equal] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "\circlearrowleft"] & & \\
A\times A\times B \arrow[r, "\pi_{2,3}"'] & A\times B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

La démonstration est analogue pour π_{13}.

Corollaire 5.11.

Qui est la réciproque de la proposition 5.1., sous certaines hypothèses supplémentaires.

Soient Φ *une formule d'un langage* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$,

$a_1 \dots a_n$ *une suite de variables telle que* $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \dots a_n\}$.

$x_1 \dots x_m$ *une suite de variables telle que* $\dot{\tau}(\{x_1 \dots x_m\}) \subseteq \tau(\{a_1 \dots a_n\}) \cup \{U_1 \dots U_k\}$

où les U_i *sont des types non-vides.*

Alors $\underset{a_1 \dots a_n\ x_1 \dots x_m}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{a_1 \dots a_n}{\models} \Phi$

Démonstration :

L'implication est claire vu la proposition 5.1.. Prouvons $\Rightarrow$. Nous devons donc montrer que $|\Phi|_{a_1 \dots a_n} = A_1 \times \dots \times A_n$ sachant que

$|\Phi|_{a_1 \dots a_n, x_1 \dots x_m} = A_1 \times \dots \times A_n \times X_1 \times \dots \times X_m$ si $a_i \in V_{A_i}$ et $x_i \in V_{X_i}$.

Nous avons donc le produit fibré suivant, étant donné la proposition 4.3. :

$$\begin{tikzcd}
A_1 \times \dots \times X_m = |\Phi|_{a_1 \dots x_m} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & |\Phi|_{a_1 \dots a_n} \arrow[d, tail] \\
A_1 \times \dots \times X_m \arrow[r, "\pi"'] & A_1 \times \dots \times A_n
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 5.6., π est un épimorphisme, par conséquent $|\Phi|_{a_1 \dots a_n}$ est aussi est un épimorphisme. Par la proposition 1.1., nous concluons que $|\Phi|_{a_1 \dots a_n} = A_1 \times \dots \times A_n$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 5.12.

Soient Φ, ψ *2 formules de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Supposons que pour toute variable a, telle que $a \in \sigma(\Phi) - \sigma(\psi)$, $\tau(a)$ *est non-vide ou* $\tau(a) \in \tau(\sigma(\psi))$.

Alors si $\models \Phi$ *et* $\models \Phi \rightarrow \psi$, *nous avons aussi* $\models \psi$

Démonstration :

Supposons que $\sigma(\Phi) \cup \sigma(\psi) = \{a_1 \ldots a_n\}$,

Donc par la proposition 5.3.δ), nous déduisons que $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \psi$. Et vu le corollaire 5.11., nous concluons : $\models \psi$.

La remarque 5.1. n'aurait donc pas été valable si b avait été de type non-vide.

Proposition 5.8.

Soit Φ *une formule de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *telle que* $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\} \cap \{a'_1 \ldots a'_k\}$ *où* $a_i \in V_{A_i}$ *et* $a'_j \in V_{A'_j}$

Supposons que $\tau(\{a_1 \ldots a_n\}) = \tau(\{a'_1 \ldots a'_k\})$

Alors $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \Phi \iff \underset{a'_1 \ldots a'_k}{\models} \Phi$

Par conséquent, la validité d'une formule par rapport à une suite de variables ne dépend que du type de variables, résultat auquel nous aurions pu nous attendre étant donné la façon dont a été conçue l'interprétation de formules.

Démonstration :

supposons que $\sigma(\Phi) = \{x_1 \ldots x_m\}$ où les variables x_i sont distinctes

Alors $\{a_1 \ldots a_n\} = \{x_1 \ldots x_m, a_{1_1} \ldots a_{1_p}\}$ et $\{a'_1 \ldots a'_k\} = \{x_1 \ldots x_m, a'_{j_1} \ldots a'_{j_s}\}$, où les variables a_{1_i}, $i=1 \ldots p$ sont distinctes entre elles et distinctes des variables $x_1 \ldots x_m$. Analoguement pour a'_{j_i}, $i=1 \ldots s$.

Donc $\underset{a_1 \ldots a_n}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a_{1_p}}{\models} \Phi$ et $\underset{a'_1 \ldots a'_k}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a'_{j_s}}{\models} \Phi$

D'autre part, nous pouvons supposer que $\tau(a_{1_{r+1}}, \ldots a_{1_p})$ $\subseteq \tau(a_{1_1} \ldots a_{1_r})$, pour un certain r

Donc par le corollaire 5.11. : $\underset{x_1 \ldots a_{1_p}}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a_{1_r}}{\models} \Phi$

De même, nous pouvons supposer que $\tau(\{a'_{j_{q+1}} \ldots a'_{j_s}\}) \subseteq \tau(\{a'_{j_1} \ldots a'_{j_q}\})$ pour un certain q.

Donc $\underset{x_1 \ldots a'_{j_s}}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a'_{j_q}}{\models} \Phi$

Nous devons donc montrer : $\underset{x_1 \ldots a'_{j_q}}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a_{l_r}}{\models} \Phi$

D'autre part, par hypothèse, nous avons :

$$\tau(\{a_1 \ldots a_n\}) = \tau(\{a'_1 \ldots a'_k\})$$

Par conséquent, r = q et nous pouvons supposer :

$$A_{l_1} = A'_{j_1}, \ldots, A_{l_r} = A'_{j_q}$$

Donc par le corollaire 4.3. :

$$\underset{x_1 \ldots a'_{j_q}}{\models} \Phi \Leftrightarrow \underset{x_1 \ldots a_{l_r}}{\models} \Phi$$

Nous sommes donc amenés à donner <u>la définition 5.5.</u>

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Soient $U_1, \ldots, U_k$ des types distincts tels que $\tau(\sigma(\Phi)) \subseteq \{U_1, \ldots, U_k\}$.

<u>Φ est valide par rapport à $\{U_1, \ldots, U_k\}$</u> si et seulement si il existe une suite de variables $a_1 \ldots a_\ell$ telle que $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \ldots a_\ell\}$,

$$\tau(\{a_1 \ldots a_l\}) = \{U_1 \ldots U_k\} \text{ et } \underset{a_1 \ldots a_l}{\models} \Phi$$

<u>Notation</u>

Nous écrivons $\underset{\{U_1 \ldots U_k\}}{\models} \Phi$ $(\underset{\{U_1 \ldots U_k\}}{\not\models} \Phi)$ si Φ est (n'est pas) valide par rapport à $\{U_1 \ldots U_k\}$.

Poursuivons notre application dans $\mathfrak{H}l$ et étudions la validité d'une formule dans ce topos.

Soit $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables de types $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$.

Soit une formule Φ telle que $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$.

Φ est valide par rapport à $a_1 \ldots a_n$ si et seulement si $|\Phi|_{a_1 \ldots a_n} = \mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n$, c-à-d l'application $A_1^1 \times \ldots \times A_n^1 \xrightarrow[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n]{} A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$, c-à-d Φ est toujours satisfaite et dans $A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$ et dans $A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$.

Particularisons les propriétés importantes du paragraphe 5.

Corollaire 5.5.

Soit $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ un morphisme de $\mathfrak{F}1$.

Donc f est le carré

$$\begin{tikzcd} A1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "©"] & B1 \arrow[d, "b"] \\ A2 \arrow[r, "f_2"'] & B2 \end{tikzcd}$$

f sera un monomorphisme ssi $\models f(a) = f(a') \rightarrow a=a'$

c-à-d ssi $\forall (x,y) \in A1xA1 : f_1(x) = f_1(y) \Rightarrow x=y$

$\forall (x,y) \in A2xA2 : f_2(x) = f_2(y) \Rightarrow x=y$

c-à-d ssi f_1 et f_2 sont 2 monomorphismes de Ens.

définition d'un objet ordonné

Soient $\mathbb{A}$ un objet de $\mathfrak{F}1$

et $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}x\mathbb{A}$

$(\mathbb{A},j)$ est un objet ordonné de $\mathfrak{F}1$ si et seulement si

i) $\forall x \in Ai : (x,x) \in Ri$

ii) $\forall x,y,z \in Ai : (x,y) \in Ri$ et $(y,z) \in Ri \Rightarrow (x,z) \in Ri$

iii) $\forall x,y \in Ai : (x,y) \in Ri$ et $(y,x) \in Ri \Rightarrow x=y$

pour i = 1,2.

c-à-d si et seulement si (A1,R1) et (A2,R2) sont 2 objets ordonnés de Ens.

définition d'une opération infimum

$\wedge : \mathbb{A}x\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ est une opération infimum sur $(\mathbb{A},j)$

si et seulement si

$\wedge_i : AixAi \longrightarrow Ai$ est une opération infimum sur (Ai,Ri) pour i=1,2, dans Ens.

définition d'une opération implication

$\rightarrow : \mathbb{A}x\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ est une opération implication sur $(\mathbb{A},j)$

si et seulement si

$\rightarrow_i : AixAi \longrightarrow Ai$ est une opération implication sur (Ai,Ri) dans Ens, pour i=1,2.

<u>définition d'un suprémum</u>

un morphisme $s:\mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{A}$ est une suprémum sur $(\mathbb{A},j)$

si et seulement si

$s_i : 1 \longrightarrow A_i$ est un suprémum sur (A_i,R_i) dans Ens, pour $i=1,2$

<u>définition d'un objet $\mathbb{A}$ non-vide</u>

$\mathbb{A}$ est non-vide si et seulement si A_1 est non-vide dans Ens.

Contrairement à Ens, il existe donc dans $\mathfrak{R}$1, plusieurs objets vides.

° ° °

6. NOUVEAUX TERMES, LE QUANTIFICATEUR UNIVERSEL. APPLICATIONS

Soient A,B 2 ensembles

$R \subseteq A\times B$.

Posons $\forall_{-A}(R) = \{b \in B$ tel que pour tout $a \in A : R(a,b)\}$

ou bien $\forall_{-A}(R) = \{b \in B$ tel que $\{a \in R \mid R(a,b)\} = A\}$ (*)

ceci définit un foncteur $\forall_{-A} : \mathcal{P}(A\times B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.

$\forall_{-A}$ est adjoint à droite de π_B^{-1} mais cela reste vrai si nous remplaçons Ens par un topos quelconque.

Si $\mathcal{E}$ est un topos quelconque, $A,B \in |\mathcal{E}|$ et $R \rightarrowtail A\times B$, alors pour définir l'adjoint à droite $\forall_{-A}$ de π_B^{-1}, nous considérons l'analogue dans $\mathcal{E}$ de la formule (*). Pour cela, nous avons d'abord besoin de l'analogue dans $\mathcal{E}$ de l'application :

$$\begin{aligned} \{a \in A \mid R(a,-)\} : B &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \simeq 2^A \\ b &\longmapsto \{a \in A \mid R(a,b)\} \end{aligned}$$

L'analogue dans $\mathcal{E}$ de cette application est la morphisme :

$$B \xrightarrow{\ulcorner \varphi_R \urcorner} \Omega^A$$

Définition 6.1.

Soit $\mathcal{E}$ un topos, $A,B \in |\mathcal{E}|$ et $R \rightarrowtail A\times B$.

Alors

$$\boxed{\forall_{-A}r = eg(\ulcorner \varphi_R \urcorner, \ulcorner \mathbf{v}_{A\times B} \urcorner)}$$

Théorème 6.1.

Soit $\mathcal{E}$ un topos et A,B 2 objets quelconques de $\mathcal{E}$. Alors le foncteur

$$\pi_B^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A\times B)$$

admet un adjoint à droite $\forall_{-A} : \mathcal{P}(A\times B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$

Rappelons d'abord la définition du foncteur π_B^{-1} : à tout sous-objet X de B, il lui associe AxX qui est un sous-objet de AxB. (La notation du foncteur, soit π_B^{-1}, s'explique donc car le sous-objet de AxX peut aussi s'obtenir en prenant le produit fibré de $X \rightarrowtail B$ et de π_B).

Et à tout morphisme de $\mathcal{P}(B)$, c-à-d à tout triangle

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & \arrow[d, phantom, "©"] & B \\ & S \arrow[ur, tail, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad (\Leftrightarrow i \leqslant j \text{ dans } \mathcal{P}(B))$$

Il lui associe le triangle

$$\begin{tikzcd} A\times T \arrow[rr, tail, "id_A\times i"] \arrow[dr, "id_A\times\theta"'] & \arrow[d, phantom, "©"] & A\times B \\ & A\times S \arrow[ur, tail, "id_A\times j"'] & \end{tikzcd} \qquad (\Leftrightarrow id_A\times i \leqslant id_A\times j \text{ dans } \mathcal{P}(A\times B))$$

qui est un morphisme de $\mathcal{P}(A\times B)$.

En vertu de la caractérisation des adjoints, $\forall_{-A}$ sera un adjoint à droite de π_B^{-1} si et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$\forall R \in \mathcal{P}(A\times B)$, $\forall C \in \mathcal{P}(B)$

$C \leqslant \forall_{-A}(R) \Leftrightarrow \pi_B^{-1}(C) \leqslant R.$

Dans Ens, ceci est trivial puisque $C \leqslant \forall_{-A}(R) \Leftrightarrow$ C est en relation R avec tout élément de A, c-à-d $A\times C \subseteq R$.

Vérifions-là, dans le cas général :

pour cela, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, tail] & & A\times B \arrow[r, shift left, "\varphi_R"] \arrow[r, shift right, "v_{A\times B}"'] \arrow[dd] & \Omega \\ & A\times C \arrow[ul] \arrow[ur, tail, "id_A\times i"'] \arrow[dd] & & \\ \forall_{-A}(R) \arrow[rr, tail] & & B \arrow[r, shift left, "\overline{\varphi_R}"] \arrow[r, shift right, "\overline{v_{A\times B}}"'] & \Omega^A \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur, tail, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

$R \rightarrowtail A\times B$ est $eg(\varphi_R, \upsilon_{A\times B})$ vu la proposition 1.1

$A\times C = \pi_B^{-1}(C)$

$\forall_{-A}(R)$ est $eg(\ulcorner\varphi_R\urcorner, \ulcorner\upsilon_{A\times B}\urcorner)$.

Nous avons alors les équivalences suivantes :

$$\pi_B^{-1}(C) \leqslant R$$

$\Leftrightarrow A\times C \leqslant R$

$\Leftrightarrow id_A \times i$ égalise φ_R et $\upsilon_{A\times B}$

$\Leftrightarrow \ulcorner \varphi_R \circ id_A \times i \urcorner = \ulcorner \upsilon_{A\times B} \circ id_A \times i \urcorner$

$\Leftrightarrow \ulcorner\varphi_R\urcorner \circ i = \ulcorner\upsilon_{A\times B}\urcorner \circ i$

Rappelons-nous en effet, que dans le cas général :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } f : A\times X \longrightarrow B \\ \text{si } y : Y \longrightarrow X \\ \text{alors } \ulcorner f \circ id_A \times y \urcorner = \ulcorner f \urcorner \circ y \end{array}}$$

Pour le voir, refaisons un diagramme qui sera visiblement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & A\times Y \arrow[d, "id_A \times y"] \arrow[ddl, bend right, "id_A\times(\ulcorner f\urcorner\circ y)"'] \arrow[dl, phantom, "\copyright"] \\
 & A\times X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "id_A\times\ulcorner f\urcorner"'] \arrow[d, phantom, "\copyright"', shift right=6] \\
A\times B^A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

puisque $f \circ id_A \times y = ev \circ id_A \times(\ulcorner f\urcorner \circ y)$, nous déduisons que $id_A \times(\ulcorner f\urcorner\circ y) = id_A \times(\ulcorner f \circ id_A \times y\urcorner)$, c-à-d que $\ulcorner f\urcorner \circ y = \ulcorner f \circ id_A \times y\urcorner$.

Poursuivons alors notre raisonnement; nous obtenons de nouvelles équivalences, à savoir :

$\ulcorner\varphi_R\urcorner \circ i = \ulcorner \upsilon_{A\times B} \circ i \urcorner$

$$\Leftrightarrow i \leqslant eg(\overline{\varphi_R}, \overline{v_{A\times B}})$$
$$\Leftrightarrow i \leqslant \mathcal{V}_{-A}(R)$$
$$\Leftrightarrow c \leqslant \mathcal{V}_{-A}(R)$$

ce qui achève la démonstration.

Nous venons donc d'introduire un nouveau sous-objet de B :

$$\mathcal{V}_{-A}R \text{ où } R \rightarrowtail A\times B.$$

Dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ maintenant, nous allons définir une nouvelle formule : $\mathcal{V}_a\Phi$ où Φ est une formule. Pour ce faire, nous allons suivre le même raisonnement, fait pour définir $\mathcal{V}_{-A}R$, c-à-d si R est l'interprétation de Φ, nous voudrions que $\mathcal{V}_{-A}R$ devienne celle de $\mathcal{V}_a\Phi$. Nous avons besoin, pour cela de nouveaux termes et nouvelles formules à savoir :

les termes valΦ et $t_{a_1\ldots a_n}$

la formule $(t_1\ldots t_n)\in t$

le terme $\{a_1\ldots a_n | \Phi\}$

et finalement, nous arriverons à définir $\mathcal{V}_a\Phi$

$$\mathcal{V}_a\Phi \equiv (\{a \mid \Phi\} = v_a)$$

Soit λ un terme ou une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

<u>Définition 6.2.</u>

L'ordre naturel de $\sigma(\lambda)$ (ou de S où $S \subseteq \sigma(\lambda)$) est la suite des variables de $\sigma(\lambda)$ (ou de S) déterminée par l'ordre dans lequel les variables de $\sigma(\lambda)$ (ou de S) apparaissent dans λ.

<u>Exemple</u>

L'ordre naturel du support $\{a,b,c\}$ de la formule

$$((b=a)\wedge(c=a)) \rightarrow (b=c)$$

est b,a,c.

<u>Définition 6.3.</u>

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Soit $a_1\ldots a_n$, la suite de variables de Φ.

Nous allons définir un nouveau terme, noté valΦ, de type Ω.

Son interprétation nous fournira la valeur de Φ.
Dans Ens, $|\mathrm{val}\Phi|_{a_1\ldots a_n}$ associera à chaque n-uple de $A_1 \times\ldots\times A_n$ la valeur "vrai" si ce n-uple satisfait la formule Φ et la valeur "faux sinon.
$|\mathrm{val}\Phi|_{a_1\ldots a_n}$ est donc le morphisme caractéristique $\varphi_{\ulcorner|\Phi|_{a_1\ldots a_n}}$.
Nous sommes ainsi amenés à considérer l'analogue dans un topos quelconque, c-à-d

soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$
La valeur de Φ est le terme

$\varphi_{|\Phi|_{a_1\ldots a_n}}(a_1\ldots a_n)$ *si* $\sigma(\Phi) \neq \emptyset$
et $a_1\ldots a_n$ *est l'ordre naturel de* $\sigma(\Phi)$

ou bien le terme constant

$\varphi_{|\Phi|_\emptyset} : 1 \longrightarrow \Omega$ *si* $\sigma(\Phi) = \emptyset$

Notation

Nous noterons $\mathrm{val}\Phi$, la valeur de Φ
Nous avons : $\tau(\mathrm{val}\Phi) = \Omega$
$\sigma(\mathrm{val}\Phi) = \sigma(\Phi)$

Il en déroule une série de propriétés immédiates étant donné le sens donné à ce nouveau terme.

Proposition 6.1.

Soient t,w 2 termes de type Ω et Φ , ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.
Alors

1) $\models \mathrm{val}(t=v)=t$

dans Ens en effet, la formule $t=v$ est satisfaite si t est interprété comme étant le "vrai". Donc l'interprétation de t est la valeur de la formule $t=v$.

2) $\models \mathrm{val}\Phi = v \Leftrightarrow \Phi$

dans Ens, soit $a_1\ldots a_n$ la suite de variables, de type $A_1\ldots A_n$, de Φ, $(x_1\ldots x_n) \in A_1 \times\ldots\times A_n$ satisfait la formule $\mathrm{val}\Phi = v \Leftrightarrow$
$|\mathrm{val}\Phi|_{a_1\ldots a_n}(x_1\ldots x_n) = $ "vrai"
$\Leftrightarrow (x_1\ldots x_n)$ satisfait la formule Φ et donc $|\Phi|_{a_1\ldots a_n} = |\mathrm{val}\Phi = v|_{a_1\ldots a_n}$

3) $\models val(\Phi \wedge \psi) = val\,\Phi \wedge val\,\psi$

dans Ens, $\Phi \wedge \psi$ est vérifié si Φ et ψ le sont en même temps.

4) $\models val(\Phi \rightarrow \psi) = val\,\Phi \rightarrow val\,\psi$

5) $\models val(t \leqslant w) = t \rightarrow w$

car $\models t \leqslant w \leftrightarrow t = v \rightarrow w = v$

donc $\models val(t \leqslant w) = val(t = v \rightarrow w = v)$

et $\models val(t = v \rightarrow w = v) = val(t = v) \rightarrow val(w = v)$

et $\models val(t = v) \rightarrow val(w = v) = t \rightarrow w$

6) $\models (\Phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow val\,\Phi \leqslant val\,\psi$

c-à-d $\models \Phi \rightarrow \psi \leftrightarrow (val\,\Phi = v \rightarrow val\,\psi = v)$

ce qui traduit dans & la signification de la formule $\Phi \rightarrow \psi$ de $\mathcal{L}_{Ens}$.

7) $\models (\Phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow val\,\Phi = val\,\psi$

puisque Φ et ψ sont satisfaites en même temps puisqu'elles sont équivalentes.

<u>Proposition 6.2.</u>

Soit x une variable

Soit t un terme tel que $\tau(x) = \tau(t)$

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\&}$

Alors $\models (val\,\Phi)(t/x) = val\,(\Phi\,(t/x))$

démonstration :

soit S', la suite de variables de $(val\ \Phi)(t/x)$ dans son ordre naturel.

Donc $S' = (\sigma(\Phi) \setminus \{x\}) \cup \sigma(t)$. Notons $S = \sigma(\Phi)$ dans son ordre naturel.

Donc par la proposition 4.2.,

$$|(val\ \Phi)(t/x)|_{S'} = |val\Phi|_S \circ |(S)(t/x)|_{S'} = \varphi_{|\Phi|_S} \circ |(S)(t/x)|_{S'}$$

D'autre part, par la proposition 4.3. :

$$|\Phi(t/x)|_{S'} = |(S)(t/x)|^{-1}_{S'}\ (|\Phi|_S)$$

Donc

$$|val(\Phi(t/x)|_{S'} = \varphi_{|\Phi\ (t/x)|_{S'}} = \varphi_{|\Phi|_S} \circ |(S)(t/x)|_{S'}$$

Nous avons donc bien démontré que

$\models (val\Phi)(t/x) = val(\Phi(t/x))$

Définition 6.4.

Soit t un terme de type B d'un langage $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Et soit $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables distinctes de types $A_1 \ldots A_n$.

Le terme transposé de t par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$ est le terme défini de la façon suivante :

a) si $\sigma(t) \neq \emptyset$ et $x_1 \ldots x_m$ est l'ordre naturel des variables de $\sigma(t) - \{a_1 \ldots a_n\}$ où $x_i \in V_{X_i}$, alors le terme transposé de t par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$ est le terme

$$\overline{|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}}(x_1 \ldots x_m)$$

où

$$\overline{|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}} : X_1 \times \ldots \times X_m \longrightarrow B^{A_1 \times \ldots \times A_n}$$

est le morphisme transposé de $|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}$.

β) si $\sigma(t) = \emptyset$, alors le morphisme transposé de t par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$ est la constante qui correspond au morphisme

$$\overline{|t|_{a_1 \ldots a_n}} : 1 \longrightarrow B^{A_1 \times \ldots \times A_n}$$

Notation

Nous noterons $(t)_{a_1 \ldots a_n}$ le terme transposé de t par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$.
Parfois nous écrirons $t_{a_1 \ldots a_n}$ au lieu de $(t)_{a_1 \ldots a_n}$.
Nous observons que $\tau(t_{a_1 \ldots a_n}) = B^{A_1 \times \ldots \times A_n}$ et que $\sigma(t_{a_1 \ldots a_n}) = \sigma(t) - \{a_1 \ldots a_n\}$

Donnons quelques mots d'explication concernant cette nouvelle définition. Etant donné l'axiome 2 définissant les topos, nous savons que :

$$|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m} = ev \circ id_{A_1 \times \ldots \times A_n} \times \overline{|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}}$$

Voyons dans Ens :

$$|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}(a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m) =$$
$$ev(a_1 \ldots a_n, \overline{|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_m}}(x_1 \ldots x_m)).$$

c-à-d que le terme $|t|_{a_1\ldots a_n,x_1\ldots x_m}(a_1\ldots a_n,x_1\ldots x_m)$ est obtenu en évaluant $\overline{|t|_{a_1\ldots a_n,x_1\ldots x_m}}(x_1\ldots x_m)$ en $(a_1\ldots a_n)$.

Notons que l'interprétation du terme transposé $t_{a_1\ldots a_n}$ par rapport à la suite $x_1\ldots x_m$ est :

$$|t_{a_1\ldots a_n}|_{x_1\ldots x_m} = \overline{|t|_{a_1\ldots a_n,x_1\ldots x_m}}$$

qui est l'application :

$$X_1 x\ldots xX_m \longrightarrow B^{A_1 x\ldots xA_n}$$

$$(s_1\ldots s_m) \longmapsto \overline{|t|_{a_1\ldots a_n x_1\ldots x_m}}(-,s_1\ldots s_m)$$

cette application évaluée en un n-uple $(r_1\ldots r_n)$ de $A_1 x\ldots xA_n$ sera l'interprétation de t en un point $(r_1\ldots r_n,s_1\ldots s_m)$. Intuitivement, cette application est une "interprétation partielle" de t en $(s_1\ldots s_m)$.

Proposition 6.3.

Pour tout terme t de type B d'un langage $\mathcal{L}_{\&}$, si $a_1\ldots a_n$ et $b_1\ldots b_m$ sont deux suites de variables distinctes telle que $a_i\neq b_j$ pour $i=1,2\ldots n$ et $j=1,2\ldots m$ et si
$\sigma(t_{a_1\ldots a_n})\subseteq\{b_1\ldots b_m\}$
Alors

$$|t_{a_1\ldots a_n}|_{b_1\ldots b_m} = \overline{|t|_{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_m}}$$

$$(\overline{|t|_{a_1\ldots a_n,b_1\ldots b_m}} : B_1 x\ldots xB_m \longrightarrow B^{A_1 x\ldots xA_n})$$

où $B_i=\tau(b_i)$ et $A_j=\tau(a_j)$

Expliquons le résultat dans Ens.

$t_{a_1\ldots a_n}$ est un terme de type $B^{A_1 x\ldots xA_n}$, par conséquent

$|t_{a_1\ldots a_n}|_{b_1\ldots b_m}$ est une application : $B_1 x\ldots xB_m \longrightarrow B^{A_1 x\ldots xA_n}$.

A chaque m-uple $(P_1\ldots P_m)$, elle doit associer une "interprétation partielle" de $|t|$ en $(P_1\ldots P_m)$,

c-à-d qu'à chaque m-uple $(P_1\ldots P_m)$, elle associe l'application

$|t|_{a_1\ldots a_n, b_1\ldots b_m}(-,P_1\ldots P_m)$.

Nous admettons donc facilement que

$$|t_{a_1\ldots a_n}|_{b_1\ldots b_m} = \overline{|t|_{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_m}}$$

dans Ens.

Le raisonnement peut se généraliser dans un topos quelconque.

Notation

Soit w un terme de type $B^{A_1\times\ldots\times A_n}$.

Soit $a_1\ldots a_n$ une suite de variables distinctes de types $A_1\ldots A_n$.

Alors $w(a_1\ldots a_n) \underset{\text{not}}{=} ev(a_1\ldots a_n, w)$.

Propositon 6.4.

Soient t un terme de type B et w un terme de type $B^{A_1\times\ldots\times A_n}$ de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Soit $a_1\ldots a_n$ une suite de variables distinctes de type A_i

Alors :

1) $\models t_{a_1\ldots a_n}(a_1\ldots a_n) = t$

c-à-d $\models ev(a_1\ldots a_n, t_{a_1\ldots a_n}) = t$

2) $\models (w(a_1\ldots a_n))_{a_1\ldots a_n} = w$ *si* $\{a_1\ldots a_n\} \cap \sigma(w) = \emptyset$

c-à-d $\models (ev(a_1\ldots a_n, w))_{a_1\ldots a_n} = w$

La propriété 1) est une mise en formule de l'explication donnée après la définition 6.4.

La deuxième propriété est moins triviale en ce qui concerne l'intuition : explicitons d'abord l'écriture lourde $(ev(a_1\ldots a_n, w))_{a_1\ldots a_n}$.

Supposons que $x_1\ldots x_m$ est la suite de variables de w.

Donc $(ev(a_1\ldots a_n, w))_{a_1\ldots a_n} = \overline{|ev(a_1\ldots a_n, w)|_{a_1\ldots a_n, x_1\ldots x_m}}(x_1\ldots x_m) =$

$\overline{ev\circ\langle |(a_1\ldots a_n)|_{a_1\ldots a_n, x_1\ldots x_m}, |W|_{a_1\ldots a_n, x_1\ldots x_m}\rangle}(x_1\ldots x_m) =$

$\overline{ev\circ id_{A_1\times\ldots\times A_n}\times |W|_{x_1\ldots x_m}}(x_1\ldots x_m) =$

$|w|_{x_1\ldots x_m}(x_1\ldots x_m)$.

la propriété 2) peut alors s'écrire plus simplement

$\models |w|_{x_1\ldots x_m}(x_1\ldots x_m) = w$ et est alors immédiate.

Signalons seulement la <u>proposition 6.5.</u>

Soient t *un terme d'un langage* $\mathcal{L}_{\&}$

x *et* a *2 variables distinctes*

w *un terme de* $\mathcal{L}_{\&}$ *tel que* $\tau(w)=\tau(x)$.

$a \notin \sigma(w)$

alors $\models (t(w/x))_a = (t_a)(w/x)$

<u>Proposition 6.6.</u>

Soient t,w *deux termes du même type d'un langage* $\mathcal{L}_{\&}$ *et soient* $a_1 \ldots a_n$ *et* $x_1 \ldots x_k$ *deux suites de variables distinctes telles que* $\{x_1 \ldots x_k\}=(\sigma(t)\cup\sigma(w))-\{a_1 \ldots a_n\}$

Alors

$$\underset{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}{\models} t_{a_1 \ldots a_n} = w_{a_1 \ldots a_n} \rightarrow t=w$$

Dans Ens, cette proposition signifie ceci : chaque fois que nous donnons une valeur aux variables $a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k$, (par exemple : $(s_1 \ldots s_n, r_1 \ldots r_k) \in A_1 \times \ldots \times A_m \times X_1 \times \ldots \times X_k$), les 2 termes $t_{a_1 \ldots a_n}$ et $W_{a_1 \ldots a_n}$ sont alors représentés chacun par une application de $B^{A_1 \times \ldots \times A_n}$,

à savoir :

$|t|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}(-, r_1 \ldots r_k)$

et

$|w|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}(-, r_1 \ldots r_k)$.

Si ces 2 applications sont égales, en particulier elles donnent la même image en l'abscisse $(s_1 \ldots s_n)$ et donc en $(s_1 \ldots s_n, r_1 \ldots r_k)$, ces 2 termes t et w sont interprétés de la même façon.

Ceci est une traduction littérale de la prop. 6.6. dans Ens.

<u>Remarque 6.1.</u>

Etant donné cette explication, nous comprenons fort bien que la réciproque n'est pas vraie.

c-à-d, nous n'avons pas

$$\underset{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}{\models} t=w \rightarrow t_{a_1 \ldots a_n} = w_{a_1 \ldots a_n}$$

Regardons dans Ens :

Si en $(s_1 \dots s_n; r_1 \dots r_k) \in A_1 \times \dots \times A_n \times X_1 \times \dots \times X_k$, t et w sont interprétés de la même façon, nous ne pouvons pas conclure : t et w seront encore interprétés de la même façon si nous faisons varier $(s_1 \dots s_n)$ dans $A_1 \times \dots \times A_n$, tout en gardant fixe $(r_1 \dots r_k)$.

c-à-d que nous ne pouvons pas conclure :

$$\models |t|_{a_1 \dots a_n, x_1 \dots x_k}(-, r_1 \dots r_k) = |w|_{a_1 \dots a_n x_1 \dots x_k}(-, r_1 \dots r_k).$$

Donc ce n'est pas parce que t et w sont interprétés de la même façon en un certain élément de $A_1 \times \dots \times A_n \times X_1 \times \dots \times X_k$ que leurs interprétations partielles correspondantes seront égales.

Corollaire 6.1.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos et* t, w *2 termes de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *tels que* $\tau(t) = \tau(w) = B^{A_1 \times \dots \times A_n}$ *où* $A_i, B \in |\mathcal{E}|$.

Alors

$$\models t = w \quad \rightarrow \quad t(a_1 \dots a_n) = w(a_1 \dots a_n)$$

c-à-d

$$\models t = w \quad \rightarrow \quad ev(a_1 \dots a_n, t) = ev(a_1 \dots a_n, w)$$

où $a_i \in V_{A_i}$ *et* $a_1 \dots a_n \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$

faisons la démonstration

Il suffit de montrer

$$\underset{a_1 \dots a_n, x_1 \dots x_m}{\models} (t=w) \rightarrow t(a_1 \dots a_n) = w(a_1 \dots a_n)$$

où $\{x_1 \dots x_m\} = \sigma(t) \cup \sigma(w)$.

Or par la proposition 6.4. : $\models (t(a_1 \dots a_n))_{a_1 \dots a_n} = t$

$\models (w(a_1 \dots a_n))_{a_1 \dots a_n} = w$

et pour la proposition 6.6. :

$$\underset{a_1 \dots a_n x_1 \dots x_m}{\models} (t(a_1 \dots a_n))_{a_1 \dots a_n} = (w(a_1 \dots a_n))_{a_1 \dots a_n} \rightarrow t(a_1 \dots a_n) = w(a_1 \dots a_n$$

cqfd.

Proposition 6.7.

Soient t,w 2 termes de $\mathcal{L}_{\&}$ et soient $a_1 \dots a_n$ une suite de variables distinctes de types $A_1 \dots A_n$. Alors

$$\models t_{a_1 \dots a_n} = w_{a_1 \dots a_n} \Leftrightarrow \underset{a_1 \dots a_n x_1 \dots x_k}{\models} t=w$$

où $x_1 \dots x_k$ est une suite de variables distinctes telles que $\sigma(t=w)-\{a_1 \dots a_n\} = \{x_1 \dots x_k\}$.

En particulier, si $\{a_1 \dots a_n\} \subseteq \sigma(t=w)$ alors

$$\models t_{a_1 \dots a_n} = w_{a_1 \dots a_n} \Leftrightarrow \models t=w$$

voici une série d'implications qui nous conduisent au résultat : si nous notons $\vec{a}$, la suite $a_1 \dots a_n$ et $\vec{x}$, la suite $x_1 \dots x_k$, alors

$$\underset{\vec{a},\vec{x}}{\models} t=w$$

$$\Leftrightarrow |t|_{\vec{a},\vec{x}} = |w|_{\vec{a},\vec{x}}$$

$$\Leftrightarrow \ulcorner |t|_{\vec{a},\vec{x}} \urcorner = \ulcorner |w|_{\vec{a},\vec{x}} \urcorner$$

$$\Leftrightarrow |t_{\vec{a}}|_{\vec{x}} = |w_{\vec{a}}|_{\vec{x}}$$

$$\Leftrightarrow \models t_{\vec{a}} = w_{\vec{a}}$$

Corollaire 6.2.

Soient t,w deux termes de $\mathcal{L}_{\&}$ tels que $\tau(t)=\tau(w)$ et soit $a_1 \dots a_n$ une suite de variables distinctes.

Si $\models t=w$ alors $\models t_{a_1 \dots a_n} = w_{a_1 \dots a_n}$.

Remarque 6.2.

Dans les hypothèses du corollaire 6.2., si $\models t_{a_1 \dots a_n} = w_{a_1 \dots a_n}$, nous n'avons pas nécessairement $\models t=w$

Nous savons qu'il faut nous méfier des variables de type vide.

En voici encore un exemple :

Si $\& = \mathrm{Ens}$,

si $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ sont 2 applications distinctes, si $a \in V_{\emptyset}$ et $x \in V_X$, $x \neq a$,

alors $\models f(x)_a = g(x)_a$

car $|f(x)_a|_x = \overline{|f(x)|_{a,x}} : X \longrightarrow B^{\emptyset} = X \longrightarrow 1$

et analoguement $|g(x)_a|_x \; : X \longrightarrow 1$

mais $\not\models f(x) = g(x)$.

Corollaire 6.3.

Soient t,w 2 termes de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ tels que $\tau(t) = \tau(w) = B^{A_1 \times \dots \times A_n}$, soit $a_1 \dots a_n$ une suite de variables distinctes telle que $a_i \in V_{A_i}$ et $a_i \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$ pour $i=1,2,\dots n$. Alors

$$\models t=w \Leftrightarrow \models t(a_1 \dots a_n) = w(a_1 \dots a_n).$$

c-ã-d $\models t=w \Leftrightarrow \models ev(a_1 \dots a_n, t) = ev(a_1 \dots a_n, w)$

c-ã-d si $\{x_1 \dots x_k\} = \sigma(t) \cup \sigma(w)$

$$\underset{x_1 \dots x_k}{\models} t=w \Leftrightarrow \underset{a_1 \dots a_n, x_1 \dots x_k}{\models} ev(a_1 \dots a_n, t) = ev(a_1 \dots a_n, w)$$

c-ã-d si on désigne par $\vec{x}$ la suite $x_1 \dots x_k$ et par $\vec{a}$ la suite $a_1 \dots a_n$:

$$\models |t|_{\vec{x}} = |w|_{\vec{x}} \Leftrightarrow ev \circ < |\vec{a}|_{\vec{a},\vec{x}} \, , \, |t|_{\vec{a},\vec{x}} >$$

$$= ev \circ < |\vec{a}|_{\vec{a},\vec{x}} \, , \, |w|_{\vec{a},\vec{x}} >$$

ce qui est beaucoup plus immédiat.

Définition 6.5.

Soit t un terme de type $\Omega^{X_1 \times \dots \times X_n}$ et $t_1 \dots t_n$ une suite de termes telle que $\tau(t_i) = X_i$. Posons

$$((t_1 \dots t_n) \in t) \equiv t(t_1 \dots t_n) = v$$

$$\equiv ev((t_1 \dots t_n), t) = v$$

Parfois on écrira $(t_1 \dots t_n) \in t$ au lieu de $((t_1 .. t_n) \in t)$.

c-ã-d littéralement l'évaluation de t en $(t_1 \dots t_n)$ est le vrai.

Justifions la notation de cette nouvelle formule : $(t_1 \dots t_n) \in t$.

Dans Ens, t est représenté par une application $: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \Omega = \{o,1\}$ et les termes t_i par un élément de X_i.

Pour ce n-uple de $X_1 \times \dots \times X_n$, t peut valoir o ou 1 : dans ce cas, nous dirons que $(t_1 \dots t_n) \in t$ est satisfaite pour cette représentation.

En conclusion, si $a \ldots a_m$ est la suite de variables distinctes de $t, t_1 \ldots t_n$,

$|(t_1 \ldots t_n) \in t|_{a_1 \ldots a_m} = \{(s_1 \ldots s_m) \in A_1 \times \ldots \times A_m \mid$ l'interprétation correspondante de t évaluée en celle de $t_1 \ldots t_n$, vaut $1\}$

Remarque 6.3.

Si $R \rightarrowtail A$, *si* $R^* = \ulcorner\varphi_R\urcorner : 1 \longrightarrow \Omega^A$, *si* $a \in V_A$,

alors nous avons les formules : $a \in R$

$$a \in R^* \equiv ev(a, R^*) = v$$

et $\models a \in R \leftrightarrow a \in R^*$

Montrons donc que $|a \in R|_a = |a \in R^*|_a$

c-à-d que $R = eg(|ev(a, \ulcorner\varphi_R\urcorner)|_a, v_A)$

$= eg(\varphi_R, v_A)$

ce qui est immédiat vu la proposition 1.1.

Dans Ens, de toute façon,

$|a \in \ulcorner\varphi_R\urcorner|_a = \{x \in A \mid$ l'interprétation correspondante de $\ulcorner\varphi_R\urcorner$, c-à-d φ_R, évaluée en $x = 1\}$

$= \{x \in A \mid \varphi_R(x) = 1\}$

$= R.$

Par conséquent si dans une formule Φ, nous avons utilisé la relation R et $\Phi(R^*/R)$ est la formule obtenue de Φ en remplaçant partout dans Φ, R par R^*, alors nous avons :

$$\models \Phi \leftrightarrow \Phi\,(R^*/R)$$

(la preuve faite par induction est immédiate).

Corollaire 6.4.

Soient t, w *2 termes d'un langage* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *tels que* $\tau(t) = \tau(w) = \Omega^{A_1 \times \ldots \times A_n}$.

Soit $a_1 \ldots a_n$, *une suite de variables distinctes telle que* $a_i \in V_{A_i}$, $a_i \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$. *Alors*

$$\models t = w \Leftrightarrow \models (a_1 \ldots a_n) \in t \leftrightarrow (a_1 \ldots a_n) \in w$$

résultat immédiat étant donné le corollaire 6.3.

Définition 6.6.

Soient Φ *une formule de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

$a_1 \ldots a_n$ *une suite de variables distinctes*

$x_1 \ldots x_k$ *une suite de variables telle que* $\{x_1 \ldots x_k\} = \sigma(\Phi) - \{a_1 \ldots a_n\}$

Dans Ens, chaque fois que nous fixons un k-uple $(s_1 \ldots s_k)$ dans $X_1 x \ldots x X_k$, nous pouvons déterminer un sous-ensemble de $A_1 x \ldots x A_n$, soit :

$$\{(r_1 \ldots r_n) \mid (r_1 \ldots r_m, s_1 \ldots s_k) \text{ satisfait } \Phi\};$$

ou encore définir une application : $A_1 x \ldots x A_n \longrightarrow \{o,1\}$

qui en $(r_1 \ldots r_n)$ prend la valeur 1 dès que $(r_1 \ldots r_n, s_1 \ldots s_k)$ satisfait Φ.

En fait, nous connaissons cette application, il s'agit de :

$$|\mathrm{val}\,\Phi|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}(-, s_1 \ldots s_k).$$

c-à-d de $\overline{|\mathrm{val}\,\Phi|_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k}}\,(s_1 \ldots s_k)$

c-à-d de $|(\mathrm{val}\,\Phi)_{a_1 \ldots a_n}|_{x_1 \ldots x_k}\,(s_1 \ldots s_k)$

Nous aurons l'analogue dans $\mathcal{E}$ quelconque et nous posons

$$\boxed{\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} \equiv (\mathrm{val}\,\Phi)_{a_1 \ldots a_n}}$$

qui est un nouveau terme de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Nous avons :

$$\sigma(\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}) = \sigma(\Phi) - \{a_1 \ldots a_n\}$$
$$\tau(\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}) = \Omega^{A_1 x \ldots x A_n}$$

Corollaire 6.5.

Si Φ *et* ψ *sont 2 formules de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, *alors*

$$\models \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} = \{a_1 \ldots a_n \mid \psi\}$$

si et seulement si

$$\models_{a_1 \ldots a_n, x_1 \ldots x_k} \Phi \leftrightarrow \psi$$

où $x_1 \ldots x_k$ *est une suite de variables distinctes telle que*

$$\{x_1 \ldots x_k\} = (\sigma(\Phi) \cup \sigma(\psi)) - \{a_1 \ldots a_n\}$$

Si $\models \Phi \leftrightarrow \psi$ *alors* $\models \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} = \{a_1 \ldots a_n \mid \psi\}$

L'introduction à la définition 6.6. est en fait une amorce de ce corollaire

Démontrons-le dans $\mathcal{E}$.

Nous avons les équivalences successives :

$\models \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} = \{a_1 \ldots a_n \mid \psi\}$

$\Leftrightarrow \models (\text{val } \Phi)_{a_1 \ldots a_n} = (\text{val } \psi)_{a_1 \ldots a_n}$

$\Leftrightarrow \underset{a_1 \ldots a_n x_1 \ldots x_k}{\models} \text{val } \Phi = \text{val } \psi$ vu la prop.6.7.

$\Leftrightarrow \underset{a_1 \ldots a_n x_1 \ldots x_k}{\models} \Phi \leftrightarrow \psi$ vu la prop 6.1,7)

Corollaire 6.6.

Soient une formule de $\mathcal{L}_{\&}$, $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables distinctes et $t_1 \ldots t_n$ une suite de termes de $\mathcal{L}_{\&}$ telle que $\tau(t_i) = \tau(a_i)$ pour $i=1,2, \ldots n$. Alors

$\models (t_1 \ldots t_n) \in \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} \quad \leftrightarrow \quad \Phi(t_1/a_1, \ldots, t_n/a_n)$

Démontrons ce corollaire qui intuitivement est évident.

Par la prop. 6.4., nous avons : $\models (\text{val}\Phi)_{a_1 \ldots a_n}(a_1 \ldots a_n) = \text{val } \Phi$

Donc $(a_1 \ldots a_n) \in \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} \leftrightarrow \text{val}\Phi = \mathfrak{v}$

Mais $\models$ val $\Phi = \mathfrak{v} \leftrightarrow \Phi$ vu la prop. 6.1.

Donc $\models (a_1 \ldots a_n) \in \{a_1 \ldots a_n \; \Phi\} \leftrightarrow \Phi$

En substituant les variables a_i par les termes t_i, nous obtenons le corollaire.

Corollaire 6.7.

Soient t un terme et Φ une formule de $\mathcal{L}_{\&}$ et $a_1 \ldots a_n$, une suite de variables distinctes de type $A_1, \ldots A_n$.

Supposons que $\tau(t) = \Omega^{A_1 \times \ldots \times A_n}$

Alors

$\models t = \{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} \Leftrightarrow \models (x_1 \ldots x_n) \in t \leftrightarrow \Phi(x_1/a_1 \ldots x_n/a_n)$

où $x_1 \ldots x_n$ est une suite de variables distinctes telle que

$x_i \in (\sigma(\Phi) - \{a_1 \ldots a_n\}) \cup \sigma(t)$ et $x_i \in V_{A_i}$, pour $i=1,2 \ldots n$.

Ceci est une conséquence immédiate des corollaires 6.6. et 6.4.

Définition 6.7.

Rappelons-nous la définition du foncteur $\mathcal{V}_{-A}$, dans Ens :

si R est un sous-ensemble de AxB

alors $\mathcal{V}_{-A}R = \{b \in B\} \mid \{a \in A \mid R(a,b)\} = A\}$

Soit alors une formule Φ de $\mathcal{L}_{\&}$ et $a \in V_A$ où $A \in |\&|$.

Nous définissons une nouvelle formule : $\mathcal{V}_a\Phi$

Dans Ens, elle aurait la signification suivante :

si $\{a_1 \ldots a_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$

alors $(x_1 \ldots x_n) \in A_1 x \ldots xA_n$ satisferait la formule $\mathcal{V}_a\Phi$ si

$(x, x_1 \ldots x_n) \in AxA_1 x \ldots xA_n$ satisfaisait Φ , quelque soit $x \in A$.

Nous poserons donc

$$\boxed{(\mathcal{V}_a \Phi) \equiv (\{a \mid \Phi\} = v_a)}$$

Nous avons donc $\sigma(\mathcal{V}_a\Phi) = \sigma(\Phi) - \{a\}$

Nous voyons que dans Ens, cette nouvelle formule correspond bien à celle que nous voulions construire :

en effet, si $\{a_1 \ldots a_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$

$(x_1 \ldots x_n) \in A_1 x \ldots xA_n$ satisfait la formule $(\{a/\Phi\} = v_a)$

si les 2 applications de $\Omega^A : |\{a|\Phi\}|_{a_1 \ldots a_n}(x_1 \ldots x_n)$.

et $|v_a|_{a_1 \ldots a_n}(x_1 \ldots x_n)$ sont égales, c-à-d si $|\{a|\Phi\}|_{a_1 \ldots a_n}(x_1 \ldots x_n)$ vaut toujours 1 quelque soit $x \in A$, c-à-d ~~si~~ $(x, x_1 \ldots x_n)$ satisfait Φ quelque soit $x \in A$.

Quand il n'y a pas de possibilité de confusion, nous écrirons $\mathcal{V}_a \Phi$ au lieu de $(\mathcal{V}_a \Phi)$

Corollaire 6.8.

Soit Φ *une formule de* $\mathcal{L}_{\&}$, *soit* a *une variable et* $x_1 \ldots x_n$ *une suite de variables distinctes telle que* $\{x_1 \ldots x_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$. *Alors*

$$\models \mathcal{V}_a\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \underset{ax_1 \ldots x_n}{\models} \Phi$$

si $a \in \sigma(\Phi)$ *alors* $\models \mathcal{V}_a\Phi \Leftrightarrow \models \Phi$

Dans Ens, par exemple, $(s_1 \ldots s_n) \in X_1 x \ldots xX_n$ satisfait la formule $\mathcal{V}_a\Phi$ si et seulement si $(s, s_1 \ldots s_n) \in AxX_1 x \ldots xX_n$ satisfait Φ quelque soit $s \in A$.

Démontrons-le quand même et voyons que

$$\models \{a \mid \Phi\} = \mathcal{V}_a \quad \Leftrightarrow \quad \underset{ax_1\ldots x_n}{\models} \Phi$$

Or, nous avons les équivalences suivantes :

$$\models \{a \mid \Phi\} = \mathcal{V}_a$$

$$\Leftrightarrow \models (\mathrm{val}\, \Phi)_a = \mathcal{V}_a$$

$$\Leftrightarrow \underset{ax_1\ldots x_n}{\models} \mathrm{val}\, \Phi = \mathcal{V} \qquad \text{par la prop. 6.7.}$$

$$\Leftrightarrow \underset{ax_1\ldots x_n}{\models} \Phi \qquad \text{par la prop. 6.1.}$$

cqfd.

Applications : construction de l'objet des monomorphismes de A à B dans un topos

Par le corollaire ci-dessus et le corollaire 5.5., un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ d'un topos est un monomorphisme ssi pour $a, a \in V_{A'}$ telles que $a \neq a'$, nous avons :

$$\models \forall_a \forall_{a'} (f(a) = f(a') \to a = a')$$

Définition 6.8.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos et* $A, B \in |\mathcal{E}|$. *L'objet des monomorphismes de A à B est le sous-objet suivant de* B^A :

$$Mono(A,B) = |\forall_a \forall_{a'} ((f(a) = f(a')) \to (a = a'))|_f$$

où $f \in V_{B^A}$

Dans Ens, Mono(A,B) est évidemment l'ensemble des injections de A dans B.

Proposition 6.7.

Soit $A \xrightarrow{\lambda} B$ *un morphisme d'un topos. Alors* λ *est un monomorphisme ssi* f *se factorise par* $Mono(A,B)$, *c-à-d* $\exists\, \theta : 1 \longrightarrow Mono(A,B)$ *tel que* $\ulcorner\lambda\urcorner = i \circ \theta$

$$\begin{tikzcd}
Mono(A,B) \arrow[rr, "i"] & & B^A \\
& 1 \arrow[ul, dashed, "\theta"] \arrow[ur, "\ulcorner\lambda\urcorner"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans Ens, cette proposition est triviale car $\ulcorner\lambda\urcorner$ est une application qui envoie o sur λ. Donc λ est un monomorphisme ssi $\lambda(=\ulcorner\lambda\urcorner(o)) \in \mathrm{Mono}(A,B)$.
Démontrons-là dans le cas général :
$\ulcorner\lambda\urcorner$ se factorise par Mono(A,B) $\Leftrightarrow$
Le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & 1 \arrow[d, "\ulcorner\lambda\urcorner"] \\
\mathrm{Mono}(A,B) \arrow[r, tail] & B^A
\end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow \ \models \ulcorner\lambda\urcorner \in \mathrm{Mono}(A,B)$ car $|\ulcorner\lambda\urcorner|_{\emptyset} = \ulcorner\lambda\urcorner$

$\Leftrightarrow \ \models \ \forall_a \forall_{a'} \ ((\lambda(a) = \lambda(a')) \rightarrow a=a')$

$\Leftrightarrow \ \models \ \ulcorner\lambda\urcorner(a) = \ulcorner\lambda\urcorner(a') \rightarrow a=a'$

$\Leftrightarrow \ \models \ ev(a,\ulcorner\lambda\urcorner) = ev(a',\ulcorner\lambda\urcorner) \ \rightarrow a=a'$

par définition des termes $\ulcorner\lambda\urcorner(a)$ et $\ulcorner\lambda\urcorner(a')$

$\Leftrightarrow \ \models \ \lambda(a) = \lambda(a') \rightarrow \ a=a'$

$\Leftrightarrow \lambda$ est un monomorphisme.

Ne formulons que <u>la proposition 6.8.</u>
Soit t un terme de type B, de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$
Soit a une variable telle $a \notin \sigma(t)$ et $b \in V_B$, $b \neq a$.
Alors

$$\models (\forall_a \Phi)(t/b) \leftrightarrow \forall_a(\Phi(t/b)).$$

La démonstration se trouve dans l'annexe 3.

<u>Construction de l'objet des relations d'équivalence sur B</u>
Soit $\mathcal{E}$ un topos et $B \in |\mathcal{E}|$.

Définition 6.9.

Un sous-objet $R \rightarrowtail B\times B$ est une relation d'équivalence sur B

si

$$\models \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$$

où $\psi_1 \equiv \mathcal{V}_b\ ((b,b) \in R) \qquad b \in V_B$

$\psi_2 \equiv \mathcal{V}_{b_1} \mathcal{V}_{b_2}\ ((b_1,b_2) \in R \rightarrow (b_1,b_2) \in R) \qquad b_1, b_2 \in V_B, b_1 \neq b_2$

$\psi_3 \equiv \mathcal{V}_{b_1} \mathcal{V}_{b_2} \mathcal{V}_{b_3}\ ((b_1,b_2) \in R \wedge (b_2,b_3) \in R \rightarrow (b_1,b_3) \in R)$

où $b_1, b_2, b_3 \in V_B,\ b_i \neq b_j$

ce qui est l'analogie immédiate de la définition d'une relation d'équivalence dans Ens.

Comme $\models (b_1,b_2) \in R \leftrightarrow (b_1,b_2) \in R^*$, R est une relation d'équivalence sur B $\Leftrightarrow \models \psi(R^*/R)$ où $\psi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ et $\psi(R^*/R)$ est la formule obtenue en remplaçant dans ψ, R par R^*.

Posons $\boxed{Equiv\ B = |\psi\ (\gamma/R)|_\gamma}$

où $\gamma \in V_{\Omega^{B\times B}}$ *et* $\psi(\gamma/R)$ *désigne la formule obtenue de* ψ *en remplaçant R dans* ψ *par la variable* γ.

Dans Ens, EquivB = $\{\varphi_R : B\times B \longrightarrow \Omega \mid R$ est une relation d'équivalence$\}$

Par le même raisonnement fait dans la proposition 6.7., nous obtenons le résultat suivant :

R est une relation d'équivalence sur B

$$\Updownarrow$$

R^* se factorise par Equiv B.

Proposition 6.9.

qui répond à ce que nous attendions de l'interprétation de la formule $\mathcal{V}_a\Phi$

Soit Φ *une formule d'un langage* $\mathcal{L}_{\&}$. *Soit* $b_1 \ldots b_n$, *une suite de variables distinctes telle que* $\sigma(\Phi) \subseteq \{b_1 \ldots b_n\}$ *et soit a une variable telle que* $a \notin \{b_1 \ldots b_n\}, a \in V_A$ *où* $A \in |\&|$ *et* $b_i \in V_{B_i}$.

Alors

$$|\mathcal{V}_a \Phi|_{b_1 \ldots b_n} = \mathcal{V}_{-A}\ |\Phi|_{a, b_1 \ldots b_n}$$

Dans Ens, en effet,

$|\forall_a \Phi|_{b_1 \ldots b_n} = \{(s_1 \ldots s_n) \in B_1 \times \ldots \times B_n \mid (s s_1 \ldots s_n)$ satisfait Φ, quelque soit $s \in A\}$

$= \forall_{-A} |\Phi|_{a, b_1 \ldots b_n}$.

Nous ne démontrons pas cette propriété. Donnons seulement le diagramme qui construit ce sous-objet :

Notons $B = B_1 \times \ldots \times B_n$

$R = |\Phi|_{a, b_1 \ldots b_n}$

Par la définition 6.1., $\forall_{-A} R = \mathrm{eg}(\ulcorner \varphi_R \urcorner, \ulcorner \upsilon_{A\times B} \urcorner)$

donc

$$\begin{tikzcd}
R = |\Phi|_{a, b_1 \ldots b_n} \arrow[r, tail] & A\times B \arrow[d, "\pi_B"] & \\
\forall_{-A} R = \forall_{-A} |\Phi|_{a, b_1 \ldots b_n} \arrow[r, tail] & B \arrow[r, shift left, "\ulcorner \varphi_R \urcorner"] \arrow[r, shift right, "\ulcorner \upsilon_{A\times B} \urcorner"'] & \Omega^A
\end{tikzcd}$$

Corollaire 6.9.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, soient a et a' 2 variables distinctes de type A telles que $a' \notin \sigma(\Phi)$. Alors

$$\models \forall_a \Phi \leftrightarrow \forall_{a'} \Phi\,(a'/a)$$

Proposition 6.10.

Soit Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, soit $a \in V_A$ telle que $a \notin \sigma(\psi)$, et soit $b_1 \ldots b_n$ une suite de variables distinctes telles que $\{b_1 \ldots b_n\} = \sigma(\psi \to \forall_a \Phi)$. Alors

$$\models \psi \to \forall_a \Phi \quad \textit{ssi} \quad \models_{a, b_1 \ldots b_n} \psi \to \Phi$$

C-à-d $|\psi|_{b_1 \ldots b_n} \leqslant |\forall_a \Phi|_{b_1 \ldots b_n}$

ssi $|\psi|_{ab_1 \ldots b_n} \leqslant |\Phi|_{ab_1 \ldots b_n}$

ce qui semble normale si nous repensons à la signification ensembliste de la formule $\forall_a \Phi$.

Remarque 6.4.

Dans les hypothèses de la proposition 6.10. si $a \in \sigma(\Phi)$, *alors*

$$\models \psi \to \forall_a \Phi \quad \Leftrightarrow \models \psi \to \Phi$$

Si $a \notin \sigma(\Phi)$ on peut avoir $\models \psi \to \forall_a \Phi$ sans avoir $\models \psi \to \Phi$.

Par exemple, si $\mathcal{E}$ =Ens, $x \in V_{\mathbb{R}}$ et $a \in V_{\emptyset}$:

$$\models (x=x) \to \forall_a (x=x+1)$$

puisque $\underset{a,x}{\models} x=x \to x=x+1$

mais $\not\models x=x \to x=x+1$

La proposition 6.10. admet la généralisation suivante :

proposition 6.11.

Soient ψ *et* Φ *2 formules d'un langage* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Soit $a \in V_A$ *où* $A \in |\mathcal{E}|$, $a \notin \sigma(\psi)$.

Soit λ *un ensemble fini de types contenant les types de* $\sigma(\psi \to \forall_a \Phi)$. *Alors*

$$\underset{\lambda}{\models} \psi \to \forall_a \Phi \Leftrightarrow \underset{\tau(a) \cup \lambda}{\models} \psi \to \Phi$$

démonstration :

nous pouvons écrire les équivalences suivantes :

$$\underset{\lambda}{\models} \psi \to \forall_a \Phi$$

$\Leftrightarrow \exists\ a_1 \ldots a_k$ tellesque $\sigma(\psi \to \forall_a \Phi) \subseteq \{a_1 \ldots a_l\}$

$\tau(\{a_1 \ldots a_l\}) = \lambda$

$a \notin \{a_1 \ldots a_l\}$

et telle que $\underset{a_1 \ldots a_l}{\models} \psi \to \forall_a \Phi$

$\Leftrightarrow\ |\psi|_{a_1\ldots a_l} \leqslant |\forall_a \Phi|_{a_1\ldots a_l}$

or $|\forall_a \Phi|_{a_1\ldots a_l} = \forall_{-A} |\Phi|_{aa_1\ldots a_l}$

$\Leftrightarrow\ |\psi|_{aa_1\ldots a_l} \leqslant |\Phi|_{aa_1\ldots a_l}$ car $\forall_{-A}$ est adjoint

à droite de π^{-1} où $\pi : A\times A_1 \times\ldots\times A_l \longrightarrow A_1\times\ldots\times A_l$ est la projection canonique.

$\Leftrightarrow\ \models_{aa_1\ldots a_l} \psi \rightarrow \Phi$

$\Leftrightarrow\ \models_{\tau(a)\cup\lambda} \psi \rightarrow \Phi$

<u>Proposition 6.12.</u>

Soit $b_1\ldots b_n$ une suite de variables distinctes telle que $\{b_1\ldots b_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$ où $a \in V_A$. Alors $\models_{ab_1\ldots b_n} \forall_a\Phi \rightarrow \Phi$

c-à-d $|\forall_a\Phi|_{ab_1\ldots b_n} \leqslant |\Phi|_{ab_1\ldots b_n}$

Particularisons dans Ens :

$(s,s_1\ldots s_n) \in A\times B_1\times\ldots\times B_n$ satisfait $\forall_a\Phi$. Donc $(s_1\ldots s_n)$ satisfait $\forall_a\Phi$, c-à-d $(s',s_1\ldots s_n)$ satisfait Φ quelque soit $s' \in A$, en particulier $(s\ s_1\ldots s_n)$ satisfait Φ.

<u>Remarque 6.5.</u>

si $a \in \sigma(\Phi)$ alors $\models \forall_a \Phi \rightarrow \psi$

si $a \notin \sigma(\Phi)$, nous n'avons pas nécessairement $\models \forall_a\Phi \rightarrow \Phi$ (ce cas arrive de nouveau dans Ens par exemple, où $a \in V_\emptyset$).

<u>Corollaire 6.10.</u>

Si $a \in \sigma(\Phi)$ et t est un terme tel que $\tau(t) = \tau(a)$ et $a \notin \sigma(t)$, alors

$\models \forall_a \Phi \rightarrow \Phi(t/a)$

en effet, par la proposition précédente, $\models \forall_a\Phi \rightarrow \Phi$

Donc en substituant a par t :

$\models (\forall_a\Phi)(t/a) \rightarrow \Phi(t/a)$

or $\sigma(\forall_a\Phi) = \sigma(\Phi) - \{a\}$, donc a n'est pas une variable libre de $\forall_a\Phi$

Par conséquent $(\forall_a\Phi)(t/a) \equiv \forall_a\Phi$ Nous obtenons donc

$\models \forall_a\Phi \rightarrow \Phi(t/a)$

Proposition 6.13.

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a une variable.
Si $\models \Phi \to \psi$ (respectivement $\models \Phi \leftrightarrow \psi$); alors
$\models \forall_a \Phi \to \forall_a \psi$ (respectivement $\models \forall_a \Phi \leftrightarrow \forall_a \psi$).

soient $b_1 \ldots b_n$ une suite de variables telle que $b_1 \ldots b_n = \sigma(\Phi) - \{a\}$ et $\{x_1 \ldots x_k\}$une autre suite telle que$\{x_1 \ldots x_k\} = \sigma(\psi) - (\sigma(\Phi) \cup \{a\})$.
la proposition revient à dire : $|\forall_a \Phi|_{b_1 \ldots b_n x_1 \ldots x_n} \leq |\forall_a \psi|_{b_1 \ldots b_n x_1 \ldots x_k}$

c-à-d dans Ens :

si$(s_1 \ldots s_n r_1 \ldots r_k) \in B_1 \times \ldots \times B_n \times X_1 \times \ldots \times X_k$ satisfait $\forall_a \Phi$,
c-à-d si $(s s_1 \ldots s_n r_1 \ldots r_k)$ satisfait Φ, et par conséquent ψ (puisque$\models \Phi \to \psi$), quelque soit $s \in A$, alors évidemment $(s_1 \ldots s_n, r_1 \ldots r_n)$ satisfait aussi $\forall_a \psi$.

Théorème 6.12. qui généralise le théorème 6.1.
Soit $\mathcal{E}$ un topos. Pour tout morphisme $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{E}$, le foncteur $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ admet un adjoint à droit $\forall_f$.
Soit $X \rightarrowtail A$
Posons :

$\forall_f X$:	$\lvert\forall_a (f(a)=b \to a \in X)\rvert_b$
où $b \in V_B$, $a \in V_A$, $a \neq b$	

Dans Ens, quel est le sous-ensemble $\forall_f X$ de B ?
$\forall_f X = \{b \in B$ tel que $f^{-1}(b) \in X\}$

$\forall_f$ doit être adjoint à droite de f^{-1} c-à-d par la caractérisation des adjoints :
$\forall\ Y \longrightarrow B$ et $\forall\ X \longrightarrow A$:
$Y \leq \forall_f X \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(Y) \leq X.$

Remarquons que dans Ens, cette équivalence est triviale. Faisons la démonstration et voyons que dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, elle est assez aisée :

$Y \leq \forall_f X$

$\Leftrightarrow \models b \in Y \to \forall_a (f(a)=b \to a \in X)$

$\Leftrightarrow \models b \in Y \to (f(a)=b \to a \in X)$ par la prop.6.10.

$\Leftrightarrow \models b \in Y \wedge f(a) = b \to a \in X$

D'autre part, $f^{-1}(Y) \leq X$

$\Leftrightarrow \ \models f(a) \in Y \rightarrow a \in X$ car $|f(a) \in Y|_a = f^{-1}(Y)$

Nous devons alors prouver $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ où

$(\alpha) \models b \in Y \wedge f(a)=b \rightarrow a \in X$

$(\beta) \models f(a) \in Y \rightarrow a \in X$

Pour montrer $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$, remplaçons b par f(a) dans (α)

Comme $\models f(a)=f(a)$, nous obtenons (β).

Pour démontrer la réciproque, $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$, nous utilisons :

$\models b \in Y \wedge f(a) = b \rightarrow f(a) \in Y$

et grâce au corollaire 5.9., nous obtenons (α).

cqfd.

Particularisons les nouveaux termes et formules vus dans le paragraphe 6, au cas où $\mathcal{E} = \mathfrak{F}1$

<u>Définition 6.1.</u>

Soit $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ c-à-d le carré

$$\begin{tikzcd} R1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "©"] & A1 \times B1 \arrow[d, "a \times b"] \\ R2 \arrow[r, hook] & A2 \times B2 \end{tikzcd}$$

$\forall_{-\mathbb{A}}\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{B}$ tel que $(\forall_{-\mathbb{A}}\mathbb{R})_1 = \forall_{-A1}R1 \cap b^{-1}_{\mathcal{P}}(\forall_{-A2}R2)$

et $(\forall_{-\mathbb{A}}\mathbb{R})_2 = \forall_{-A2}R2$.

en effet, nous savons que $\forall_{-\mathbb{A}}\mathbb{R} = eg(\ulcorner\varphi_{\mathbb{R}}\urcorner, \ulcorner v_{\mathbb{A}\times\mathbb{B}}\urcorner)$.

Redéfinissons $\ulcorner\varphi_{\mathbb{R}}\urcorner$: c'est le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} B1 \arrow[r, "\ulcorner\varphi_{\mathbb{R}}\urcorner_1"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \mathfrak{F}1(A,\Omega) \arrow[d, "\omega^a"] \\ B2 \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{R}_2}"'] & Appl(A2,\Omega 2) \end{tikzcd}$$

décrit de la manière suivante :

à tout x de B1, $\ulcorner\varphi_{\mathbb{R}_1}\urcorner$ associe le carré :

$$\begin{tikzcd} A1 \arrow[r, "(\varphi_{\mathbb{R}})_1(.,x)"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\ A2 \arrow[r, "(\varphi_{\mathbb{R}})_2(.,\mathbf{b}(x))"'] & \Omega 2 \end{tikzcd}$$

à tout y de B2, $\overline{\varphi_{\mathbb{R}}}_2$ associe l'application :

$$A2 \xrightarrow[(\varphi_R)_2(.,y)]{} \Omega 2$$

Par conséquent, nous définissons $\forall_{\mathbb{A}}\mathbb{R}$ de cette façon :

$(\forall_{\mathbb{A}}\mathbb{R})_1 = \{x \in B1$ tel que pour tout $s \in A1, (\varphi_{\mathbb{R}})_1(s,x)=1$

et pour tout $\mathfrak{a} \in A2$, $(\varphi_{\mathbb{R}})_2(\mathfrak{a},b(x))=1\}$

$= \{x \in B1$ tel que pour tout $s \in A1 : (s,x) \in R1$

et pour tout $\mathfrak{a} \in A2 : (\mathfrak{a},b(x)) \in R2\}$

$= \forall_{A1}R1 \cap b^{-1}_{\mathcal{P}}(\forall_{A2}R2)$.

tandis que $(\forall_{\mathbb{A}}\mathbb{R})_2 = \forall_{A2}R2$.

Nous vérifions alors sans problème la propriété qui caractérise $\forall_{\mathbb{A}}$, à savoir :

$$\begin{array}{l} \forall \quad \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{B} \\ \forall \quad \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{A}\times\mathbb{B} \\ \mathbb{C} \leq \forall_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \pi^{-1}_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}) \leq \mathbb{R} \end{array}$$

c-à-d

$$Ci \leq (\forall_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}))_i \Leftrightarrow \pi^{-1}_{Bi}(Ci) \leq Ri \qquad \text{pour } i=1,2$$

<u>Définition 6.3.</u>

ValΦ est le terme $\varphi_{|\Phi|_{a_1\ldots a_n}}(a_1\ldots a_n)$ tel que $a_1\ldots a_n$ est l'ordre naturel des variables de $\sigma(\Phi)$.

Son interprétation dans $\mathfrak{A}$1 sera la suivante :

$$|\mathrm{val}\Phi|_{a_1\ldots a_n} = \varphi_{|\Phi|_{a_1\ldots a_n}}$$

c-à-d le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 \times \ldots \times A_n^1 \arrow[r, "|val\ \Phi|^1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\
A_1^2 \times \ldots \times A_n^2 \arrow[r, "|val\Phi|^2"'] & \Omega 2
\end{tikzcd}$$

soit $(x_1 \ldots x_n) \in A_1^1 \times \ldots \times A_n^1$

en ce n-uple, $|val\Phi|^1$ vaudra :

1 si $(x_1 \ldots x_n) \in |\Phi|^1$

o si $(x_1 \ldots x_n) \notin |\Phi|^1$ et $(a_1(x_1), \ldots, a_n(x_n)) \notin |\Phi|^2$

2 si $(x_1 \ldots x_n) \notin |\Phi|^1$ et $(a_1(x_1), \ldots, a_n(x_n)) \in |\Phi|^2$

soit $(y_1 \ldots y_n) \in A_1^2 \times \ldots \times A_n^2$:

en ce n-uple, $|val\Phi|^2$ vaudra :

1 si $(y_1 \ldots y_n) \in |\Phi|^2$

o si $(y_1 \ldots y_n) \notin |\Phi|^2$

De nouveau, nous comprenons l'appellation de ce terme puisque valΦ nous donne la valeur de Φ sur $\mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n$

Définition 6.4.

Soit t un terme de type $\mathbb{B}$.

Soit $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables distinctes de type $\mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n$

$t_{a_1 \ldots a_n}$ est un terme de type $\mathbb{B}^{\mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n}$

Par définition, $t_{a_1 \ldots a_n} = \overline{|t|_{a_1 \ldots a_n x_1 \ldots x_m}}(x_1 \ldots x_m)$, où $x_1 \ldots x_m$ est l'ordre naturel des variables de $\sigma(t) - \{a_1 \ldots a_n\}$.

Son interprétation par rapport à $x_1 \ldots x_m$ sera la suivante :

$|t_{a_1 \ldots a_n}|_{x_1 \ldots x_m}$ est le carré

$$\begin{tikzcd}
X_1^1 \times \ldots \times X_m^1 \arrow[r, "|t_{a_1 \ldots a_n}|^1"] \arrow[d, "x_1 \times \ldots \times x_m"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \mathfrak{F}1(\mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n, \mathbb{B}) \arrow[d, "b^{a_1 \times \ldots \times a_n}"] \\
X_1^2 \times \ldots \times X_m \arrow[r, "|t_{a_1 \ldots a_n}|^2"'] & \mathrm{Appl}(A_1^2 \times \ldots \times A_n^2, B2)
\end{tikzcd}$$

Soit $(s_1 \ldots s_m) \in X_1^1 \times \ldots \times X_m^1$;

à ce m-uple, $|t_{a_1 \ldots a_n}|^1$ associe le carré

$$\begin{tikzcd} A_1^1 \times \ldots \times A_n^1 \arrow[r, "|t|^1_{\vec{a},\vec{x}}(-{,}\vec{s})"] \arrow[d, "a_1 \times \ldots \times a_n"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & B1 \arrow[d, "b"] \\ A_1^2 \times \ldots \times A_n^2 \arrow[r, "|t|^2_{\vec{a},\vec{x}}(-{,}x_1(s_1)\ldots x_m(s_m))"'] & B2 \end{tikzcd}$$

où $\vec{a} \equiv a_1 \ldots a_n$ et $\vec{s} \equiv s_1 \ldots s_m$.

Soit $(r_1 \ldots r_m) \in X_1^2 \times \ldots \times X_m^2$;

à ce m-uple, $|t_{a_1 \ldots a_n}|^2$ associe l'application

$$|t|^2_{\vec{a},\vec{x}}(-,r_1 \ldots r_m) : A_1^2 \times \ldots \times A_n^2 \longrightarrow B2$$

observons que $|t_{\vec{a}}|_{\vec{x}}$ est, comme dans Ens, interprété comme étant une "interprétation partielle" de t, sur $\mathbb{A}_1 \times \ldots \times \mathbb{A}_n$, c-à-d par les applications

$|t|^1_{\vec{a},\vec{x}}\ (-,\vec{s})$ et $|t|^2_{\vec{a},\vec{x}}\ (-,\vec{r})$

Définition 6.5.

Soit un terme de type $\Omega^{\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n}$

Et soit $t_1 \ldots t_n$ une suite de termes telle que $\tau(t_i)=\mathcal{X}_i$.

$((t_1 \ldots t_n) \in t)$ est une nouvelle formule de $\mathcal{L}_{\mathfrak{J}1}$.

Si $\{a_1 \ldots a_m\} = \sigma(t) \cup \sigma(t_1) \cup \ldots \cup \sigma(t_n)$, regardons $|(t_1 \ldots t_n) \in t|_{a_1 \ldots a_m}$

Mettons d'abord au point certaines notations :

soit $(s_1 \ldots s_m) \in A_1^1 \times \ldots \times A_m^1$:

$|t|^1_{\vec{a}}\ (\vec{s})$ est le carré

$$\begin{tikzcd} X_1^1 \times \ldots \times X_n^1 \arrow[r, "(|t|^1_{\vec{a}}(\vec{s}))_1"] \arrow[d, "x_1 \times \ldots \times x_n"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\ X_1^2 \times \ldots \times X_n^2 \arrow[r, "(|t|^1_{\vec{a}}(\vec{s}))_2"'] & \Omega 2 \end{tikzcd}$$

soit $(r_1 \ldots r_m) \in A_1^2 \times \ldots \times A_m^2$:

$|t|^1_{\vec{a}}(\vec{r})$ est l'application $X_1^2 \times \ldots \times X_n^2 \xrightarrow{\;|t|^2_{\vec{a}}(\vec{r})\;} \Omega 2$

Remarquons que $(|t|^1_{\vec{a}}(\vec{s}))_2 = |t|^2_{\vec{a}}(a_1(s_1), \ldots a_m(s_m))$.

Par conséquent, $|(t_1 \ldots t_n) \in t|^1_{a_1 \ldots a_m} =$

$\{(s_1 \ldots s_m) \in A_1^1 \times \ldots \times A_m^1 \mid$ en ce m-uple, $(|t|^1_{\vec{a}} \circ |\vec{t}|^1)_1$ vaut 1}

et $|(t_1 \ldots t_n) \in t|^2_{a_1 \ldots a_m} = \{(r_1 \ldots r_m) \in A_1^2 \times \ldots \times A_m^2 \mid$ en ce m-uple, $(|t|^2_{\vec{a}} \circ |\vec{t}|^2)$ vaut 1}

où $\vec{t}$ est une notation pour $(t_1 \ldots t_n)$.

c-à-d grossièrement :

$|(t_1 \ldots t_n) \in t|^i_{a_1 \ldots a_m}$

$= \{(r_1 \ldots r_m) \in A_1^i \times \ldots \times A_m^i)$ en ce m-uple, l'interprétation de t évaluée en celle de $t_1 \ldots t_n$, vaut 1}

pour i=1,2.

<u>Définition 6.6.</u>

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$.

Soient $a_1 \ldots a_n$ une suite de variables distincts

le terme $\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\} = (\mathrm{val}\Phi)_{a_1 \ldots a_n}$

Soit $x_1 \ldots x_m$, les variables de $\sigma(\Phi) - \{a_1 \ldots a_n\}$.

Interprétons $\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}$ par rapport à $x_1 \ldots x_m$, c-à-d définissons le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_1^1 \times \ldots \times X_m^1 \arrow[r, "|\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}|_1"] \arrow[d, "x_1 \times \ldots \times x_m"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \mathfrak{J}1(A_1 \times \ldots \times A_n, \Omega) \arrow[d, "\omega^{a_1 \times \ldots \times a_n}"] \\
X_1^2 \times \ldots \times X_m^2 \arrow[r, "|\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}|_2"'] & \mathrm{Appl}(A_1^2 \times \ldots \times A_n^2, \Omega 2)
\end{tikzcd}$$

à chaque m-uple $(s_1 \ldots s_m)$ de $X_1^1 x \ldots x X_m^1, |\{a_1 \ldots a_n | \Phi\}|_1$ associe le carré :

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 x \ldots x A_n^1 \arrow[r, "\varphi^1 |\Phi|_{\vec{a}\,\vec{x}}(-\text{,}\vec{s})"] \arrow[d, "a_1 \ldots a_n"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\
A_1^2 x \ldots x A_n^2 \arrow[r, "\varphi^2 |\Phi|_{\vec{a}\,\vec{x}}(-\text{,}x_1(s_1) \ldots x_m(s_m))"'] & \Omega 2
\end{tikzcd}$$

à chaque m-uple $(r_1 \ldots r_m)$ de $X_1^2 x \ldots x X_m^2$, $|\{a_1 \ldots a_n | \Phi\}|_2$ associe l'application :

$$A_1^2 x \ldots x A_n^2 \xrightarrow{\varphi^2 |\Phi|_{\vec{a},\vec{x}}(-,\vec{r})} \Omega 2$$

En conclusion, nous remarquons que de nouveau, $\{a_1 \ldots a_n | \Phi\}$ est interprété par rapport à la suite $\vec{x}$, par 2 applidations du genre

$\varphi^1|\Phi|_{\vec{a},\vec{x}}(-,\vec{s})$ et $\varphi^2|\Phi|_{\vec{a},\vec{x}}(-,\vec{r})$; en gros, à chaque m-uple $(s_1 \ldots s_m)$ de $X_1^i x \ldots x X_m^i$, l'interprétation correspondante de $\{a_1 \ldots a_n \mid \Phi\}$est une application qui donne la valeur de Φ en fonction de $a_1 \ldots a_n$. (pour i=1,2).

<u>Définition 6.7.</u>

Soit Φ une formule et soit $a \in V_{/A}$.

$\forall_a \Phi$ est une nouvelle formule.

Soit $a_1 \ldots a_n$ la suite de variables de $\sigma(\Phi)-\{a\}$.

Quelle est $|\forall_a \Phi|_{a_1 \ldots a_n}$?

L'interprétation de la nouvelle formule est le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\forall_{-A1}|\Phi|^1_{aa_1 \ldots a_n} \cap (a_1 x \ldots x a_n)^{-1}(\forall_{-A2}|\Phi|^2_{aa_1 \ldots a_n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "©"] & A_1^1 x \ldots x A_n^1 \arrow[d, "a_1 x \ldots x a_n"] \\
\forall_{-A2}|\Phi|^2_{aa_1 \ldots a_n} \arrow[r, hook] & A_1^2 x \ldots x A_n^2
\end{tikzcd}$$

c-à-d $|\forall_a \Phi|^1_{a_1\ldots a_n}$ est l'ensemble des n-uples $(s_1\ldots s_n)$ de $A^1_1 \times\ldots\times A^1_n$ tel que $(s,s_1\ldots s_n)$ soit dans $|\Phi|^1_{a_1\ldots a_n}$ quelque soit $s \in A1$ et tel que $(r,a_1(s_1)\ldots a_n(s_n))$ soit dans $|\Phi|^2_{a_1\ldots a_n}$ quelque soit $r \in A2$;

tandis que $|\forall_a \Phi|^2_{a_1\ldots a_n}$ est l'ensemble des n-uples $(r_1\ldots r_n)$ de $A^2_1 \times\ldots\times A^2_n$ tel que $(r,r_1\ldots r_n)$ soit dans $|\Phi|^2_{a_1\ldots a_n}$ quelque soit $r \in A2$.

Objet des monomorphismes de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{B}$

Mono($\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$) est un sous-objet de $\mathbb{B}^{\mathbb{A}}$, c-à-d le carré :

$$\begin{array}{ccc}
\{\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B} \text{ tel que } f \text{ est un monomorphisme de } \mathfrak{H}\} & \hookrightarrow & \mathfrak{H}(A,B) \\
\downarrow & © & \downarrow b^a \\
\text{Mono}(A2,B2) & \hookrightarrow & \text{Appl}(A2,B2)
\end{array}$$

où Mono(A2,B2) est l'objet des monomorphismes de A2 à B2 dans Ens.

L'objet des relations d'équivalence sur $\mathbb{B}$

Equiv $\mathbb{B}$ est un sous-objet de $\Omega^{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}$, c-à-d le carré

$$\begin{array}{ccc}
\{\varphi_{\mathbb{R}}:\mathbb{B}\times\mathbb{B} \longrightarrow \Omega \text{ tel que } \mathbb{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathbb{B}, \text{ c-à-d, tel que } Ri, i=1,2 \text{ est une relation d'équivalence sur } Bi, \text{ dans Ens}\} & \longrightarrow & \mathfrak{H}(\mathbb{B}\times\mathbb{B},\Omega) \\
\downarrow & © & \downarrow \\
\{\varphi_R:B2\times B2 \longrightarrow \Omega 2 \text{ tel que } R \text{ est une relation d'équivalence sur } B2, \text{ dans Ens}\} & \longrightarrow & \text{Ens}(B2\times B2,\Omega 2)
\end{array}$$

Le foncteur $\forall_f$, adjoint à droite de f^{-1}, où $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$.

Rappelons la définition de $f^{-1}(\mathbb{X})$ où $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{B}$:

$f^{-}(\mathbb{X})$ est le carré
$$\begin{tikzcd} f_1^{-1}(X1) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "©"] & A1 \arrow[d, "a"] \\ f_2^{-1}(X2) \arrow[r, hook] & A2 \end{tikzcd}$$

Par contre si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{A}$, $\forall_f\mathbb{X}$ est le carré

$$\begin{tikzcd} (\forall_f\mathbb{X})_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "©"] & B1 \arrow[d, "b"] \\ (\forall_f\mathbb{X})_2 \arrow[r, hook] & B2 \end{tikzcd}$$

défini de cette façon :

$(\forall_f\mathbb{X})_1 = \{s \in B1 \text{ tel que } f_{1}^{-1}{}_{\wp}(s) \subseteq X1 \text{ et } f_2^{-1}{}_{\wp}(b(s)) \subseteq X2\}$

$= \forall_{f_1} X1 \cap b^{-1}(\forall_{f_2} X2)$

$(\forall_f\mathbb{X})_2 = \{r \in B2 \text{ tel que } f_2^{-1}(s) \subseteq X2\}$

$= \forall_{f_2} X2$

Comme dans Ens, la caractérisation de ce nouveau foncteur est immédiate :

soient $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{A}$ et $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{B}$:

$\mathbb{Y} \leq \forall_f\mathbb{X} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}.$

°
° °

7. UNIONS ET QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL . APPLICATIONS

Soient A, B 2 ensembles et $R \subseteq A\times B$. Posons

$$\exists_{-A}R = \{b \in B \mid \text{il existe } a \in A \text{ tel que } R(a,b)\}$$
$$= \pi_B(R),$$

où $\pi_B : A\times B \longrightarrow B$ est la projection canonique.
L'application $\exists_{-A} : \mathcal{P}(A\times B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ est fonctorielle et nous démontrons facilement que le foncteur $\exists_{-A}$ est un adjoint à gauche du foncteur π_B^{-1}.
En général si A et B sont 2 objets d'un topos $\mathcal{E}$, alors $\pi_B^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A\times B)$ admet un adjoint à gauche $\exists_{-A} : \mathcal{P}(A\times B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.
Nous voulons définir cet adjoint. Nous remarquons d'abord que pour le topos des ensembles

$$\exists_{-A}R = \bigcup_{a \in A} R_a$$

où $R_a = \{b \in B \mid R(a,b)\}$

Pour définir le sous-objet de B, $\exists_{-A}R$, nous allons définir un terme du langage $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, jouant le rôle de l'union d'une famille d'ensembles.
Si à la palce de R, nous considérons une formule Φ à 2 variables libres a et b, de types respectifs A et B, l'analogue dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, de la famille d'ensembles $\{R_a\}_{a \in A}$ est le terme $\{b \mid \Phi\}$ de type Ω^B, où $b \in V_B$:

> en effet, à l'application $A \longrightarrow \mathcal{P}(B) : a \longmapsto R_a$, correspond l'interprétation du terme $\{b \mid \Phi\}$ par rapport à a :
>
> $$|\{b \mid \Phi\}|_a : A \longrightarrow \mathcal{P}(B) : \alpha \longmapsto \{\beta \text{ tel que } \Phi(\alpha,\beta) \text{ est satisfait}\}$$

A cause de la correspondance entre les morphismes $A \longrightarrow \Omega^B$ et les morphismes $B\times A \longrightarrow \Omega$, à l'application

$$B\times A \longrightarrow \Omega : (a,b) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } R(a,b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

correspond l'interprétation du terme val Φ

$$B\times A \longrightarrow \Omega : (\beta,\alpha) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi(\alpha,\beta) \text{ est satisfait} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il nous suffira donc de définir $\bigvee_a t$ où t est un terme de type Ω.
Comme $\bigcup_{a \in A} R_a$ peut être considérée comme une application

$$B \longrightarrow \Omega : b \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } a \in A \text{ tel que } R(a,b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous définirons $V_a t$ de telle façon que son interprétation par rapport à b soit la suivante, dans Ens :

$$|V_a t|_b \text{ sera une application : } \begin{array}{rcl} B & \longrightarrow & \Omega \\ \beta & \longmapsto & 1 \text{ s'il existe } a \in A \text{ tel que } \Phi(a,\beta) \text{ soit satisfaite} \\ & & 0 \text{ sinon} \end{array}$$

définition 7.1.

Soit t un terme de type Ω de $\mathcal{L}_{\&}$

Alors

$$V_a t \equiv val(\mathcal{V}_x((\mathcal{V}_a t \leqslant x) \rightarrow x = \mathbf{v}))$$

où $x \in V_\Omega$, $a \in V_A$, *où* $A \in |\&|$ *et* $x \notin \sigma(t) \cup \{a\}$

(en vertu du corollaire 6.9., la définition ne dépend pas de x).

$\sigma(V_a t) = \sigma(t) - \{a\}$

$\tau(V_a t) = \Omega$

et par la proposition 6.1.2.,

$$\models V_a t = \mathbf{v} \leftrightarrow \mathcal{V}_x((\mathcal{V}_a t \leqslant x) \leftrightarrow x = \mathbf{v})$$

Nous pouvons remarquer que dans Ens, l'interprétation de ce nouveau terme rejoint celle qui a été annoncée. La preuve est faite entièrement dans l'annexe 4.

Remarque 7.1.

En vertu du corollaire 6.9.

si t est un terme de type Ω, a, $a' \in V_A$ et $a' \notin \sigma(t)$:

$$\models V_a t = V_{a'} t(a'/a)$$

Proposition 7.1.

Soient t, w 2 termes de $\mathcal{L}_{\&}$. Soient a, b 2 variables telles que $a \notin \sigma(w)$ et $a \neq b$. Alors

$$\models (V_a t)(w/b) = V_a(t(w/b))$$

La proposition résulte des propositions 6.2. et 6.8.

Proposition 7.2.

Soient t et w 2 termes de type Ω de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. Soit a une variable de type A telle que $a \in \sigma(w)$. Alors

$$\alpha) \quad \models_{\{A\} \cup \bar{\tau}(\sigma(t))} t \leqslant V_a t$$

$$\beta) \quad \models (V_a t \leqslant w) \leftrightarrow \mathcal{V}_a (t \leqslant w).$$

Corollaire 7.1.

Soient t et w 2 termes de type Ω d'un langage $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, soit a une variable de type A et U un ensemble fini de types tel que $\tau(\sigma(t)) \cup \tau(\sigma(w)) = U$. Si $\models_{U \cup \{A\}} t \leqslant w$. Alor

$$i) \quad \models_{U - \{A\}} V_a t \leqslant w \qquad (si\ a \notin \sigma(w)) \qquad et$$

$$ii) \quad \models_{U - \{A\}} V_a t \leqslant V_a w$$

La démonstration se trouve dans l'annexe 5.

Corollaire 7.2.

Soit t un terme de type Ω d'un langage $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a_1, a_2 2 variables. Alors

$$\models V_{a_2} V_{a_1} t = V_{a_1} V_{a_2} t$$

Définition 7.2.

Soient Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, $A \in |\mathcal{E}|$, $a \in V_A$

Alors $(\exists_a \Phi) \equiv (V_a\ val\ \Phi = \mathbf{v})$

(Nous écrirons souvent $\exists_a \Phi$ au lieu de $(\exists_a \Phi)$).

Nous avons : $\sigma(\exists_a \Phi) = \sigma(\Phi) - \{a\}$

Nous pouvons vérifier que dans Ens :

si $\{a_1 \dots a_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$

alors $|\exists_a \Phi|_{a_1 \dots a_n} = \{(s_1 \dots s_n) \in A_1 \times \dots \times A_n |$ il existe $s \in A$ tel que $(s s_1 \dots s_n$ satisfait $\Phi\}$.

Nous avons imméidatement la propriété suivante :

$\models val\ \exists_a \Phi = V_a\ val \Phi$ en vertu de la prop. 6.1.

Remarque 7.2.

Si Φ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a, a' sont 2 variables telles que $\tau(a) = \tau(a')$ et $a' \in \sigma(\Phi)$ alors

$$\models \exists_a \Phi \leftrightarrow \exists_a \Phi(a'/a)$$

Proposition 7.3.

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a une variable.

Si $\models \Phi \to \psi$ *alors* $\models \exists_a \Phi \to \exists_a \psi$

Proposition 7.4.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et soient a_1, a_2 2 variables. Alors

$$\models \exists_{a_1} \exists_{a_2} \Phi \leftrightarrow \exists_{a_2} \exists_{a_1} \Phi$$

on applique le corollaire 7.2.

Proposition 7.5.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, t un terme et b une variable telle que $\tau(t) = \tau(b)$. Soit a une variable telle que $a \notin \sigma(t)$ et $a \neq b$. Alors

$$\models (\exists_a \Phi)(t/b) \leftrightarrow \exists_a (\Phi(t/b)).$$

on applique la proposition 7.1.

Proposition 7.6.

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, a une variable de type A telle que $a \notin \sigma(\psi)$. Soit un ensemble fini de types tel que $\varsigma(\sigma(\psi) \cup \sigma(\Phi) - \{a\}) = U$. Alors

$$\models_U (\exists_a \Phi) \to \psi \Leftrightarrow \models_{\{A\} \cup U} \Phi \to \psi$$

c-à-d si $\{x_1 \ldots x_n\} = \sigma(\Phi) \cup \sigma(\psi) - \{a\}$,

$$|\exists_a \Phi|_{x_1 \ldots x_n} \leqslant |\psi|_{x_1 \ldots x_n}$$

$$\Leftrightarrow |\Phi|_{ax_1 \ldots x_n} \leqslant |\psi|_{ax_1 \ldots x_n},$$

proposition de nouveau immédiate dans Ens.

Donnons-en une démonstration : nous avons les équivalences suivantes :

$$\models_{\{A\}\cup U} \quad \Phi \to \psi$$

$$\Leftrightarrow \models_{\{A\}\cup U} \quad \mathrm{val}\Phi \leqslant \mathrm{val}\psi \qquad \text{vu le corollaire 5.11.}$$

$$\Leftrightarrow \models_{U} \quad \mathcal{V}_a(\mathrm{val}\Phi \leqslant \mathrm{val}\psi) \quad \text{vu le corollaire 6.8.}$$

$$\Leftrightarrow \models_{U} \bigvee_a \mathrm{val}\,\Phi \leqslant \mathrm{val}\,\psi \qquad \text{vu la proposition 7.2.}$$

$$\Leftrightarrow \models_{U} \quad \mathrm{val}(\exists_a \Phi) \leqslant \mathrm{val}\psi$$

$$\Leftrightarrow \models_{U} \exists_a \Phi \to \psi$$

Remarque 7.3.

Dans les conditions de la proposition précédente, si $a \in \sigma(\Phi)$, alors

$$\models (\exists_a \Phi) \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \Phi \to \psi$$

Corollaire 7.3.

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et soit a une variable de type A. Alors

$$(1) \qquad \models_{\{A\}\cup\tau(\sigma(\Phi))} \quad \Phi \to \exists_a \Phi$$

Si $a \in \sigma(\Phi)$ et t est un terme tel que $\sigma(t) = \sigma(a)$, alors

$$(2) \qquad \models \Phi(t/a) \to \exists_a \Phi$$

En effet, $\models \exists_a \Phi \to \exists_a \Phi$ et donc $\models_{U} \exists_a \Phi \to \exists_a \Phi$; ce qui implique $\models_{U\cup\{A\}} \Phi \to \exists_a \Phi$ par la prop. 7.6.

Nous obtenons donc (1). Si $a \in \sigma(\Phi)$, alors : $\models \Phi \to \exists_a \Phi$

Par conséquent, en substituant a par t, nous obtenons (2).

Définition 7.3.

Soit $\mathcal{E}$ un topos et $A, B \in |\mathcal{E}|$. Soit $R \rightarrowtail A\times B \in \mathcal{P}(A\times B)$. Alors

$$\exists_{-A} R = |\exists_a((a,b) \in R)|_b$$

où $a \in V_A$, $b \in V_B$ et $a \neq b$.

Nous retrouvons donc dans Ens, le résultat annoncé au début de ce chapit

Remarque 7.4.

L'opération $\exists_{-A}$ est fonctorielle

en effet si R et R' sont 2 sous-objets de AxB,

$R \leqslant R' \Rightarrow \exists_{-A}R \leqslant \exists_{-A}R'$.

Dans Ens, ceci est trivial.

Démontrons ce résultat dans le cas général :

Comme $R \leqslant R' \Leftrightarrow\ \models (a,b) \in R \rightarrow (a,b) \in R'$,

nous obtenons $\models \exists_a (a,b) \in R \rightarrow \exists_a (a,b) \in R'$.

c-à-d $\exists_{-A}R \leqslant \exists_{-A}R'$

Nous avons maintenant toutes les notions nécessaires pour démontrer le théorème 7.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Pour tous A, B $\in |\mathcal{E}|$, le foncteur $\pi_B^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(AxB)$ est un adjoint à droite de $\exists_{-A} : \mathcal{P}(AxB) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.

Nous devons donc prouver que pour tout sous-objet $X \rightarrowtail B$ et pour tout $R \rightarrowtail AxB$;

$${}_{-A}R \leqslant X \Leftrightarrow R \leqslant \pi_B^{-1}(X)$$

or, nous avons la suite d'équivalences suivantes :

$$R \leqslant \pi_B^{-1}(X)$$

$\Leftrightarrow\ \models (a,b) \in R \rightarrow b \in X$

$\Leftrightarrow\ \models \exists_a (a,b) \in R \rightarrow b \in X$ vu la rem. 7.3.

$\Leftrightarrow\ \models \exists_{-A}R \leq X$

Corollaire 7.4.

Soit Φ une formule d'un langage $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a une variable de type A. Alors

$$|\exists_a \Phi|_{x_1 \dots x_n} = \exists_{-A} |\Phi|_{a, x_1 \dots x_n}$$

où $x_1 \dots x_n$ est une suite de variables telle que $\{x_1 \dots x_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$.

Dans Ens, par exemple, soit $(s_1 \dots s_n) \in X_1 x \dots x X_n$.

Nous avons : $(s_1 \dots s_n)$ satisfait $\exists_a \Phi$

ssi $\exists\, s \in A$ tel que $(s, s_1 \dots s_n)$ satisfait Φ

ssi $\exists\, s \in A$ tel que $(s, s_1 \dots s_n) \in |\Phi|_{ax_1 \dots x_n}$

ssi $(s_1 \dots s_n) \in \exists_{-A} |\Phi|_{ax_1 \dots x_n}$

Définition 7.4.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie et $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{E}$. L'image de f est le plus petit sous-objet de B à travers lequel f se factorise.

Notation

Nous notons $\mathrm{Im}f \rightarrowtail B$, l'image de f quand elle existe.

Remarquons que dans Ens, $\mathrm{Im}f = f_{\mathcal{P}}(A)$, comme ce qui a toujours été dit.

Remarque 7.5.

Si $R \rightarrowtail A\times B$

alors $\exists_{-A}R = \mathrm{Im}(R \rightarrowtail A\times B \xrightarrow{\pi_B} B)$

Montrons donc que $R \rightarrowtail A\times B \xrightarrow{\pi_B} B$ se factorise à travers $X \rightarrowtail B$ ssi $\exists_{-A}R \leqslant X$.

Or $R \rightarrowtail A\times B \xrightarrow{\pi_B} B$ se factorise à travers $X \rightarrowtail B$ ssi $R \leqslant \pi_B^{-1}(X)$ car nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, tail] & & \\
& \pi_B^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & X \arrow[d, tail] \\
A\times B \arrow[rr, "\pi_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

où le carré est un produit fibré.

Comme $\exists_{-A}$ est adjoint à gauche de π_B^{-1} :

$$R \leqslant \pi_B^{-1}(X) \Leftrightarrow \exists_{-A}R \leqslant X$$

Corollaire 7.5.

qui est une traduction dans $\mathcal{E}$ de la définition de Imf dans Ens.

Pour tout morphisme $A \xrightarrow{f} B$ d'un topos, $\mathrm{Im}f$ existe et l'on a

$$\mathrm{Im}f = |\exists_a (f(a)=b)|_b$$

où $a \in V_A$, $b \in V_B$, $a \neq b$

Démonstration :

puisque id_A est un mono, $< id_A, f >$ en est un aussi. Par conséquent

$$A \xrightarrow{f} B \equiv A \overset{<id_A, f>}{\rightarrowtail} A\times B \xrightarrow{\pi_B} B.$$

Etant donné la rem. 7.5. : $Imf = \exists_{-A} <id_A, f>$.

D'autre part $|\exists_{-A}(f(a)=b)|_b = \exists_{-A} |f(a)=b|_{a,b}$.

Mais $|f(a)=b|_{a,b} = eg(f\circ\pi_A, \pi_B) \overset{?}{=} <id_A, f>$.

Si cette dernière égalité est prouvée,

$|\exists_a(f(a)=b)|_b = \exists_{-A} <id_A, f>$ et le corollaire est démontré.

Il nous reste donc à montrer :

$$<id_A, f> = eg(f\circ \pi_A, \pi_B)$$

Soit donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "<id_A, f>"] & A\times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[rr, bend right, "\pi_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\
{} \arrow[ur, "h"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où h égalise $f\circ\pi_A$ et π_B.

h se factorise à travers $<id_A, f>$ puisque

$$h = <id_A, f> \circ \pi_A \circ h$$

cqfd.

Le théorème 7.2. généralise le théorème 7.1.

Pour tout morphisme $A \xrightarrow{f} B$ *d'un topos, le foncteur* $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ *admet un adjoint à gauche* $\exists_f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.

démonstration :

soit $R \rightarrowtail A$.

Posons $\boxed{\exists_f R = Im(R \rightarrowtail A \xrightarrow{f} B)}$

Il est clair que pour tout $X \rightarrowtail B$:

$$\exists_f R \leqslant X \Leftrightarrow R \leqslant f^{-1} X.$$

Dans Ens par exemple :

$$\exists_f R = f_{\mathcal{P}}(R)$$

par conséquent, $f_{\mathcal{P}}(R) \subseteq X \Leftrightarrow R \subseteq f_{\mathcal{P}}^{-1}(X)$

Dans $\mathcal{E}$, cette propriété est immédiate si nous nous rappelons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dashed] \arrow[rrr, bend left] \arrow[dr, tail] & f^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & X \arrow[d, tail] & \exists_f R \arrow[l, dashed] \arrow[dl, tail] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & B &
\end{tikzcd}$$

où le carré est un produit fibré.

Montrons que le théorème 7.2. est une généralisation du théorème 7.1., comme annoncé :

c-à-d si $f = \pi_B : A \times B \longrightarrow B$, alors $\exists_{\pi_B} = \exists_{-A}$. Ceci est vrai étant donné la remarque 7.5.

Nous devons en effet voir que :

si $R \rightarrowtail A$

alors $\exists_{\pi_B} R \simeq \exists_{-A} R$

c-à-d si $R \rightarrowtail A$

alors $\operatorname{Im}(R \rightarrowtail A \xrightarrow{\pi_B} B) = \exists_{-A} R$

ce qui est l'objet de la remarque 7.5.

Proposition 7.7.

Dans un topos, un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ *est un épimorphisme si et seulement si* $\operatorname{Im} f = B$.

Corollaire 7.6.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos et* $A \xrightarrow{f} B$ *un morphisme de* $\mathcal{E}$.

Alors $A \longrightarrow \operatorname{Im} f$ *est un épimorphisme.*

Théorème 7.3.

Soit $\mathcal{E}$ un topos et $A \xrightarrow{f} B$ un morphisme de $\mathcal{E}$. Alors, il existe un épimorphism e et un monomorphisme i tels que $f = i \circ e$.

En plus, cette factorisation est unique, c-à-d si e_1 est un épimorphisme et i_1 un monomorphisme tels que $f = i_1 \circ e_1$ alors il existe un isomorphisme λ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, "e_1"'] & & B \\
& {} \arrow[ur, "i"] \arrow[d, dashed] & \\
& {} \arrow[uur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Il suffit de prendre $i \equiv \mathrm{Im}f \rightarrowtail B$

$e \equiv A \longrightarrow \mathrm{Im}f$

La démonstration est immédiate et résulte de la définition de Imf.

Corollaire 7.7.

Un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ d'un topos est un épimorphisme si et seulement si

$$\models \forall_b \exists_a (f(a)=b)$$

où $a \in V_A$, $b \in V_B$, $a \neq b$

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'objet des épimorphismes de A à B.

Construction de l'objet des épimorphismes

Soit $\mathcal{E}$ un topos et soient $A, B \in |\mathcal{E}|$

Définition 7.5.

L'objet des épimorphismes de A à B est le sous-objet suivant de B^A :

$$\mathrm{Epi}(A,B) = |\forall_b \exists_a (f(a)=b)|_f$$

où $f \in V_{B^A}$, $a \in V_A$, $b \in V_B$, $b \neq a$ $\quad (f(a) \equiv ev(a,f))$.

dans Ens, Epi(A,B) est évidemment l'ensemble des surjections de A dans B.

Proposition 7.8.

Soit $A \xrightarrow{\lambda} B$ *un morphisme d'un topos. Alors* λ *est un épimorphisme* $\Leftrightarrow$ λ *se factorise à travers* $Epi(A,B)$, *c-à-d il existe* $\theta : 1 \longrightarrow Epi(A,B)$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif* :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\ulcorner\lambda\urcorner"] \arrow[dr, dashed, "\theta"'] & \arrow[d, phantom, "\copyright"] & B^A \\ & Epi(A,B) \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Cette proposition se démontre facilement en suivant le schéma de raisonnement fait à la proposition 6.7.

Théorème 7.4.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos et* Φ *une formule de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *telle que* $\sigma(\Phi) = \{a, b\}$ *où* $a \neq b$, $a \in V_A$ *et* $b \in V_B$. *Supposons que* $b' \in V_B$, $b' \neq b$ *et*

i) $\models \Phi \wedge \Phi\,(b'/b) \rightarrow b = b'$

ii) $\models \forall_a \exists_b \Phi$

Alors il existe un morphisme et un seul $f : A \longrightarrow B$ *de* $\mathcal{E}$ *tel que* $\models f(a) = b \leftrightarrow \Phi$

Ce théorème est un outil important : il assure l'existence et l'unicité d'un morphisme f représentant une relation fonctionnelle. Nous en verrons plusieurs applications dans le chapitre II.

Voyons maintenant comment le tout se particularise dans $\mathfrak{F}1$

Définition 7.2.

Soient Φ une formule, $\mathbb{A} \in |\mathfrak{F}1|$ et $a \in V_{\mathbb{A}}$.

$\exists_a \Phi$ est une nouvelle formule. Si $\{a_1 \dots a_n\} = \sigma(\Phi) - \{a\}$, comment l'interpréter par rapport à $a_1 \dots a_n$? comme dans Ens, nous avons envie de dire que $|\exists_a \Phi|_{a_1 \dots a_n}$ est un sous-objet de $\mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{A}_n$ tel que

$$|\exists_a \Phi|^i_{a_1 \dots a_n} = \{ (s_1 \dots s_n) \in A^i_1 \times \dots \times A^i_n \mid \text{il existe } s \in A^i \text{ tel que } (s s_1 \dots s_n) \text{ soit dans } |\Phi|^i_{a_1 \dots a_n} \}$$

pour $i=1,2$.

Nous pouvons vérifier que ceci rejoint la définition de cette nouvelle formule en introduisant le terme $V_a t$.

Définition 7.3.

Grâce à la formule $\exists_a \Phi$, nous pouvons maintenant définir l'adjoint à gauche de $\pi_{\mathbb{B}}^{-1}$

Soit $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}\times\mathbb{B}$.

$\exists_{\mathbb{A}}\mathbb{R} = |\exists_a((a,b)\in\mathbb{R})|_b$ où $a \in V_{\mathbb{A}}$, $b \in V_{\mathbb{B}}$, $a \neq b$.

c-à-d $(\exists_{\mathbb{A}}\mathbb{R})_i = \exists_{A_i} R_i$, $i=1,2$

Définition 7.4.

Si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, définissons Imf.

Imf est un sous-objet de $\mathbb{B}$, le plus petit à travers lequel f se factorise.

Grâce au corollaire 7.5., nous pouvons définir explicitement Imf:

$$\mathrm{Imf} = |\exists_a(f(a)=b)|_b$$

Par conséquent, $(\mathrm{Imf})_i = \mathrm{Imf}_i$ définie dans Ens.

Voyons par un diagramme commutatif que f se factorise bien à travers Imf :

$$\begin{tikzcd}
A1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr] \arrow[dd, "a"'] & & B1 \arrow[dd, "b"] \\
& \mathrm{Imf}_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "b_1"] & \\
A2 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr] & & B2 \\
& \mathrm{Imf}_2 \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Particularisons quelques propositions

Théorème 7.2.

Si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, $f^{-1} : \mathcal{P}(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$ admet un adjoint à gauche $\exists_f$.

Si $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}$, $\exists_f\mathbb{R}$ est un sous-objet de $\mathbb{B}$ et est défini de cette façon :

$$(\exists_f\,\mathbb{R})_i = f_{i\mathcal{P}}(R_i) \qquad i=1,2.$$

Le foncteur est caractérisé par l'équivalence suivante :

soit $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{A}$

soit $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{B}$

nous avons : $\exists_f \mathbb{R} \leqslant \mathbb{X} \Leftrightarrow \mathbb{R} \leqslant f^{-1}(\mathbb{X})$

Proposition 7.7.

soit $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$

f est un épimorphisme de $\mathfrak{J}1$ ssi f_i, i=1,2 sont des sujections, c-à-d ssi $\mathrm{Im}f_i = B_i$, i=1,2

Corollaire 7.7.

Une autre caractéristation d'un épimorphisme $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ est la suivante :

$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ est un épimorphisme

si et seulement si

$\forall s \in B_i \ , \exists \ r \in A_i$ tel que $f_i(r) = s$ i=1,2

Construction de l'objet des épimorphismes

$\mathrm{Epi}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ est un sous-objet de $\mathbb{B}^{\mathbb{A}}$:

$$\begin{tikzcd}
\text{L'ens des épimorphismes de } \mathbb{A} \text{ dans } \mathbb{B}, \text{ dans } \mathfrak{J}1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "c"] & \mathfrak{J}1(A,B) \arrow[d, "b^a"] \\
\text{L'ensemble des surjections de A2 dans B2, dans Ens} \arrow[r, hook] & B2^{A2}
\end{tikzcd}$$

Conclusion

Nous constatons en avançant dans l'étude de $\mathfrak{J}1$, que $\mathfrak{J}1$ est un couplage de Ens. En effet, considérons par exemple l'inteprétation d'une formule Φ dans l'objet $\mathbb{A}$. Souvent, l'interprétation est un couplage des interprétations de Φ (à savoir $|\Phi|^1$ et $|\Phi|^2$) dans A1 et A2 (où on travaille alors dans Ens).

Une remarque cependant : l'interprétation de Φ dans A1 est parfois plus restrictiv que celle de Ens; ceci se comprend car les éléments de A1 subissent une transforma tion a et l'interprétation doit tenir compte de cette transformation.

Si Φ est vérifiée dans A1, elle doit encore l'être dans A2.

C'est ce qui différencie $\mathfrak{J}1$ de Ens x Ens.

CHAPITRE II

THEOREMES DE BASE DE LA THEORIE DES TOPOS

1. LA REPRESENTABILITE DU FONCTEUR "APPLICATIONS PARTIELLES".

Considérons dans Ens, 2 ensembles A et B. Nous avons l'idée qu'une application partielle est une application définie sur une partie de A et à valeurs dans B. Généralisons cette idée dans $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{E}$ un topos et $A, B \in |\mathcal{E}|$. Nous considérons des couples (m,f) de morphismes de $\mathcal{E}$ où :

$$m : X \rightarrowtail A$$

$$f : X \longrightarrow B$$

Deux tels couples (m,f) et (m',f') sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\lambda : X \longrightarrow X'$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, tail, bend right, "m"'] & X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, tail, "m'"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

m et m' sont donc représentés par le même sous-objet et f et f' sont isomorphes.

Nous sommes alors amenés à donner la <u>définition 1.1</u>

Une application partielle de A à B est un couple (m,f) où $m : X \rightarrowtail A$ est un sous-objet de A et $f : X \longrightarrow B$.

<u>Notation</u>.

$(m,f) : A \dashrightarrow B$ signifie : (m,f) est une application partielle de A à B.

Posons $\mathrm{Par}(A,B) = \{ (m,f) \mid (m,f) : A \dashrightarrow B \}$

Soit $B \in |\mathcal{E}|$. Si pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, $\mathcal{E}(A,B)$ est un ensemble, alors par (A,B) en est un aussi, par le schéma de compréhension.

Par conséquent :

Pour $(-B) : \mathcal{E}^{op} \longrightarrow$ *Ens est un foncteur.*

Il est ainsi défini : à tout objet A de $\mathcal{E}$, il associe l'ensemble Par (A,B).

Au morphisme : $A' \xrightarrow{a} A$, est associé l'application décrite par le schéma suivant :

$$\mathrm{Par}\,(A,B) \xrightarrow{\mathrm{Par}\,(a,B)} \mathrm{Par}\,(A',B)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "m"] \arrow[dr, "f"'] & A & \arrow[r, mapsto] & {} & X' \arrow[r, tail, "m'"] \arrow[dr, "f'"'] & A' \\ & B & & & & B \end{tikzcd}$$

où m est obtenu en faisant

le produit fibré de m et de a :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "x"] \arrow[d, tail, "m'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & X \arrow[d, tail, "m"] \\ A' \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

et où $f' = f \circ x$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer que Par (-,B) est représentable, c-à-d qu'il existe un objet $\tilde{B}$ de $\mathcal{E}$ tel que Par (-,B) $\simeq \mathcal{E}(-,\tilde{B})$.

Pour trouver $\tilde{B}$, nous considérons d'abord le cas $\mathcal{E}$ = Ens. Dans Ens, $\tilde{B}$ sera isomorphe à Appl$(1,\tilde{B})$ qui lui-même doit être isomorphe à Par (1,B).

Mais les applications partielles de 1 à B sont en correspondance avec les sous-ensembles σ de B qui ont au plus un élément, c-à-d tel que

$x \in \sigma \Leftrightarrow \sigma = \{x\}$.

$\tilde{B}$ sera donc l'ensemble des singletons de $\mathcal{P}(B)$ et de l'ensemble vide. Au fond, $\tilde{B}$ est isomorphe à B augmenté d'un point. Nous pourrions aussi dire que $\tilde{B}$ est la somme directe de B avec 1, c-à-d $\tilde{B} = B \amalg 1$.

Nous allons nous servir de cette formule pour définir $\tilde{B}$ dans $\mathcal{E}$. D'abord nous définissons *la fonction singleton*.

Définition 1.2.

Soit B un ensemble.

L'idée intuitive de cette fonction singleton, dans Ens est celle-ci : ce serait une application de B dans $\mathcal{P}(B)$, qui à tout élément b de B associerait le singleton $\{ b \}$.

Ou encore ce serait une application de B dans Ω^B qui à tout élément b de B, associerait le morphisme caractéristique de $\{ b \}$.

Ou encore ce serait une application de B dans Ω^B qui à tout élément b de B, associerait l'application $\varphi_{\Delta_B}(.,b)$.

Nous reconnaissons maintenant cette correspondance entre B et Ω^B. Il s'agit bien sûr de $\ulcorner \varphi_{\Delta_B} \urcorner$.

Dans un topos $\mathcal{E}$ quelconque, si $B \in |\mathcal{E}|$, nous définirions la fonction singleton associée à B de la même façon et nous dirons que :

$$\boxed{\{ - \}_B : B \longrightarrow \Omega^B \underset{def}{=} \ulcorner \varphi_{\Delta_B} \urcorner}$$

Nous observons évidemment que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \models \{b\}_B = \{ b' \mid b' = b \} \\ \text{ou } b, b' \in V_B, \ b' \neq b \end{array}}$$

s'il n'y a pas d'ambiguité, nous écrirons $\{ \}$ au lieu de $\{ \}_B$.

Nous déduisons aisément aussi la proportion 1.1.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos et* $B \in |\mathcal{E}|$

soient $x, b \in V_B$. *Alors* :

$$\models x \in \{b\} \leftrightarrow x = b$$

Corollaire 1.1.

Le morphisme $\{\}$: $B \longrightarrow \Omega^B$ *est un monomorphisme.*

c-à-d donc : $\models \{b\} = \{a\} \leftrightarrow b = a$

ou $a,b \in V_B$

et $a \neq b$

Nous avons maintenant assez d'éléments pour définir l'objet $\tilde{B}$.

Définition 1.3.

Soit B *un objet d'un topos* $\mathcal{E}$.

Posons $\tilde{B} = |\forall_x \ (x \in \sigma \leftrightarrow \sigma = \{x\})|_\sigma$

où $\sigma \in V_{\Omega^B}$, $x \in V_B$ *et* $\{\} \equiv \{\}_B$.

$\tilde{B}$ est donc un sous-objet de Ω^B.

Proposition 1.2.

Le morphisme $\{\ \}$: $B \longrightarrow \Omega^B$ *se factorise à travers* $\tilde{B} \rightarrowtail \Omega^B$

Faisons la démonstration qui est une suite d'équivalences.

$\{\}$: $B \longrightarrow \Omega^B$ se factorise à travers $\tilde{B} \rightarrowtail \Omega^B$

$\Leftrightarrow$ il existe un morphisme θ : $B \longrightarrow \tilde{B}$ tel que

$$\{\ \} = B \xrightarrow{\theta} \tilde{B} \rightarrowtail \Omega^B$$

$\Leftrightarrow$ le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & B \arrow[d, "\{\} = |\{b\}|_B"] \\
\tilde{B} \arrow[r, tail] & \Omega^B
\end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow\ \models \{b\} \in \tilde{B}$

$\Leftrightarrow\ \models \{b\} \in |\forall_x\ (x \in \sigma \leftrightarrow \sigma = \{x\})|_\sigma$

$\Leftrightarrow\ \models \forall_x\ (x \in \{b\} \leftrightarrow \{b\} = \{x\})$

$\Leftrightarrow\ \models x \in \{b\} \leftrightarrow \{b\} = \{x\}$ Vu le cor.6.8.

$\Leftrightarrow\ \models x \in \{b\} \leftrightarrow b = x$ car $\{\ \}$ est un monomorphisme

ce qui est vrai vu la prop. 1.1. du chap. II.

Nous en arrivons donc à <u>la définition 1.4.</u>

Soit $\eta_B : B \rightarrowtail \tilde{B}$ *l'unique morphisme tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, tail, "\{\ \}"] \arrow[dr, tail, "\eta_B"'] & \arrow[d, phantom, "\copyright"] & \Omega^B \\ & \tilde{B} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Voici maintenant <u>le théorème 1.1.</u> qui nous permettra de tirer plusieurs résultats importants.

Soit $\mathcal{E}$ *un topos. Pour tout* $B \in |\mathcal{E}|$, *l'objet B muni du monomorphisme* $B \overset{\eta_B}{\rightarrowtail} B$ *satisfait la propriété universelle suivante :*

Pour toute application partielle $(j,f) : A \dashrightarrow B$ *il existe un morphisme et un seul* $f' : A \longrightarrow \tilde{B}$ *tel que le diagramme suivant soit un produit fibré :*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & B \arrow[d, tail, "\eta_B"] \\ A \arrow[r, "f'"'] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

La démonstration est faite en annexe 6.

Observons que dans Ens, f' est une application qui prolonge f sur A tout entier et est définie de la façon suivante :

$$f' : A \longrightarrow \tilde{B} : a \longmapsto \begin{cases} \{f(a)\} & \text{si } a \in A' \\ \phi & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Insistons plutôt sur les résultats de ce théorème.</u>

1) Définissons un foncteur : $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui à tout objet B, lui associe l'objet $\tilde{B}$.

   A tout morphisme $b : B \longrightarrow B'$ correspond un morphisme $\tilde{b} : \tilde{B} \longrightarrow \tilde{B'}$ défini de cette façon :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, tail, "\eta_B"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & B' \arrow[d, tail, "\eta_{B'}"] \\ \tilde{B} \arrow[r, dashed, "\tilde{b}"'] & \tilde{B}' \end{tikzcd}$$

   Par le théorème 1.1., il existe un et un seul morphisme $\tilde{b}$ tel que le diagramme soit un produit fibré.

2) Les foncteurs Par (-,B) et $\mathcal{E}(-,\tilde{B})$ sont isomorphes. Nous venons de voir au théor. 1.1. que quelque soit l'objet A de $\mathcal{E}$, Par (A,B) et $\mathcal{E}(A,\tilde{B})$ étaient bijectifs.

   Montrons que cette bijection est naturelle en A.

   Soit donc $\alpha : A_1 \longrightarrow A_2$ un morphisme quelconque de $\mathcal{E}$ et voyons que le carré suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Par}(A_2,B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Par}(\alpha,B)"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \mathcal{E}(A_2,\tilde{B}) \arrow[d, "\mathcal{E}(\alpha,\tilde{B})"] \\ \mathrm{Par}(A_1,B) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}(A_1,\tilde{B}) \end{tikzcd}$$

   Soit donc $(j_2,f_2) : A_2 \dashrightarrow B$.

   Notons $(j_1,f_1) \equiv \mathrm{Par}(\alpha,B)\,(j_2,f_2)$

   Nous constatons que $f'_1 = f'_2 \circ \alpha$ car nous avons le diagramme suivant où les 2 carrés sont des produits fibrés :

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, tail, "j_1"'] \arrow[rr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "j_2"] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & B \arrow[d, tail, "\eta_B"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha"'] & A_2' \arrow[r, "f_2'"'] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

Donc le grand rectangle est un produit fibré, c-à-d :

$$f_1' = f_2' \circ \alpha$$

Introduisons maintenant ces nouvelles notions dans $\mathfrak{F}1$

Définition 1.1.

Dans Ens, une application partielle de A dans B est une application définie sur un sous-ensemble de A, à valeurs dans B.

De même, dans $\mathfrak{F}1$, une application partielle de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ sera un carré commutatif défini sur un sous-objet de $\mathbb{A}$ et à valeurs dans $\mathbb{B}$, c-à-d un couple (μ,φ) tel que :

$$\begin{tikzcd}
X1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, hook] \arrow[ddd] & & B1 \arrow[ddd, "b"] \\
& A1 \arrow[d, "a"] & \\
& A2 & \\
X2 \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\varphi_2"'] & & B2
\end{tikzcd}$$

Définition de la fonction singleton.

Pensons à Ens.

Si B était un ensemble, la fonction singleton injectait B dans $\mathcal{P}(B)$ et associait à chaque élément s de B, le singleton $\{ s \}$. B était donc entièrement caractérisé par l'image de la fonction singleton, c-à-d par l'ensemble des singletons de $\mathcal{P}(B)$.

Essayons aussi de caractériser l'objet $\mathbb{B}$ par un ensemble de sous-objets de $\mathbb{B}$:

Nous avons vu que $|\mathbb{B}|_{\mathcal{G}}$ (= $\{(s,b(s)) \mid s \in B1\}$ = l'ensemble des éléments globaux de $\mathbb{B}$) et B2 caractérisaient entièrement l'objet $\mathbb{B}$.

En première approche, définissons donc $\{\}_{\mathbb{B}}$ de cette façon :

$\{\ \}^1_{\mathbb{B}}$ est une application qui à tout $s \in B1$, associe le sous-objet

$\{s\} \longrightarrow b(s)$ de $\mathbb{B}$.

$\{\}^2_{\mathbb{B}}$ est une application qui à tout $t \in B2$, associe le singleton $\{t\}$

Mais comme $\{\ \}_{\mathbb{B}}$ doit être un morphisme de but $\Omega^{\mathbb{B}}$, exprimons les images des applications $\{\ \}^1_{\mathbb{B}}$ et $\{\ \}^2_{\mathbb{B}}$, en termes de morphismes caractéristiques.

$\{\ \}_{\mathbb{B}}$ est donc le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
B1 \arrow[r, "\{\}^1_{\mathbb{B}}"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \mathcal{Fl}(\mathbb{B}, \Omega) \arrow[d, "\omega^b"] \\
B2 \arrow[r, "\{\}^2_{\mathbb{B}}"] & \mathrm{Appl}(B2, \Omega2)
\end{tikzcd}$$

où si $s \in B1$, $\{s\}^1_{\mathbb{B}}$ est le morphisme caractéristique du sous-objet

$\{s\} \longrightarrow \{b(s)\}$, c-à-d :

$$\begin{tikzcd}
B1 \arrow[r, "(\varphi_{\Delta\mathbb{B}})_1(\cdot,\, s)"'] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega1 \arrow[d, "\omega"] \\
B2 \arrow[r, "(\varphi_{\Delta B2})(\cdot,\, b(s))"'] & \Omega2
\end{tikzcd}$$

si $t \in B2$, $\{t\}^2_{\mathbb{B}}$ est l'application $B2 \xrightarrow[\varphi_{\Delta B2}(\cdot,t)]{} \Omega2$

Définition 1.3.

L'objet $\widetilde{\mathbb{B}}$ sera un sous-objet de $\Omega^{\mathbb{B}}$, c-ã-d un carré :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbb{B}}_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \mathfrak{Fl}(\mathbb{B}, \Omega) \arrow[d, "\omega^b"] \\
\widetilde{\mathbb{B}}_2 \arrow[r, hook] & \mathrm{Appl}(B2, \Omega 2)
\end{tikzcd}$$

Rappelons-nous que dans Ens, l'ensemble $\widetilde{B}$ est isomorphe ã Par $(1, \widetilde{B})$.

L'objet $\mathbb{B}$ de $\mathfrak{Fl}$ est défini par 2 sous-ensembles $\widetilde{\mathbb{B}}_1$ et $\widetilde{\mathbb{B}}_2$, reliés par une application.

Comme dans Ens, prenons $\widetilde{\mathbb{B}}_1$ un ensemble isomorphe à Par $(\mathbb{1}, \mathbb{B})$, c-ã-d $\widetilde{\mathbb{B}}_1 \simeq$ l'ensemble des sous-objets de $\mathbb{B}$ du type :

$$\begin{tikzcd}
\{s\} \arrow[d] & \text{ou} & \emptyset \arrow[d] & \text{ou} & \emptyset \arrow[d] \\
\{b(s)\} & & \{t\} & & \emptyset
\end{tikzcd}$$

où s B1 et t B2

Nous exprimerons $\widetilde{\mathbb{B}}_1$ en termes de morphismes caractéristiques de ces sous-objets

Définissons donc $\widetilde{\mathbb{B}}_1$ comme étant l'ensemble des carrés commutatifs du type :

$$\begin{tikzcd}
B1 \arrow[r, "(\varphi_{\Delta\mathbb{B}})^{1}(\cdot{,}\, s)"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\
B2 \arrow[r, "(\varphi_{\Delta B2})(\cdot{,}\, b(s))"'] & \Omega 2
\end{tikzcd}$$

où $s \in B1$

ou bien :

$$\begin{tikzcd}
B1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\
B2 \arrow[r, "(\varphi_{\Delta B2})(\cdot{,}\, t)"'] & \Omega 2
\end{tikzcd}$$

où $t \in B2$

où $\forall s \in B1$: $\varphi(s) = 2$ si $b(s) = t$

$= 0$ sinon

ou bien :

$$\begin{tikzcd} B1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \Omega 1 \arrow[d, "\omega"] \\ B2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & \Omega 2 \end{tikzcd}$$

où φ_1 et φ_2 sont des applications constantes valant toujours 0.

Mais cela ne nous suffit pas pour définir l'objet $\tilde{\mathbb{B}}$ entièrement. Pour que $\tilde{\mathbb{B}}$ soit un sous-objet de $\Omega^{\mathbb{B}}$, nous dirons que $\tilde{\mathbb{B}}_2$ est un ensemble isomorphe à Par (1,B2) de Ens et nous définirons $\tilde{\mathbb{B}}_2$ comme l'ensemble des applications de B2 dans $\Omega 2$ du type :

$$B2 \xrightarrow[\varphi_{\Delta B2(\cdot,t)}]{} \Omega 2$$

où $t \in B2$,

ou bien :

$$B2 \xrightarrow[\varphi]{} \Omega 2$$

où φ est une application constante valant toujours 0.

Définition 1.4.

Nous voyons facilement comment $\{\ \}_{\mathbb{B}}$ se factorise dans $\tilde{\mathbb{B}}$. Nous définissons alors le morphisme $\eta_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrowtail \tilde{\mathbb{B}}$ de cette façon. C'est un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} B1 \arrow[r, tail, "\eta^1_{\mathbb{B}}"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & \tilde{\mathbb{B}}_1 \arrow[d, "\omega^b|"] \\ B2 \arrow[r, tail, "\eta^2_{\mathbb{B}}"'] & \tilde{\mathbb{B}}_2 \end{tikzcd}$$

tel que à $s \in B1$, $\eta^1_{\mathbb{B}}$ associe le morphisme caractéristique du sous-objet : $\{s\} \longrightarrow \{b(s)\}$, et

à $t \in B2$, $\eta^2_{\mathbb{B}}$ associe l'application caractéristique de Ens, du singleton $\{ t \}$ c-à-d $\eta^2_{\mathbb{B}}$ est l'injection η_{B2} définie dans Ens.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'isomorphisme entre les deux foncteurs Par $(-,\mathbb{B})$ et $\mathfrak{F}1(-,\widetilde{\mathbb{B}})$.

Pour chaque objet $\mathbb{A}$ de $\mathfrak{F}1$, la bijection entre Par $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ et $\mathfrak{F}1$ $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ est définie comme suit :

Soit (μ,φ) une application partielle de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$:

$$\begin{tikzcd}
X1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, hook, "\mu_1"'] \arrow[ddd] & & B1 \arrow[ddd, "b"] \\
& A1 \arrow[d, "a"] & \\
& A2 & \\
X2 \arrow[ur, hook, "\mu_2"] \arrow[rr, "\varphi_2"'] & & B2
\end{tikzcd}$$

le carré commutatif φ' de $\mathbb{A}$ à $\widetilde{\mathbb{B}}$ sera le suivant :

$$\begin{tikzcd}
A1 \arrow[r, "\varphi'_1"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "c"] & \widetilde{\mathbb{B}}_1 \arrow[d, "\omega^b_1"] \\
A2 \arrow[r, "\varphi'_2"'] & \widetilde{\mathbb{B}}_2
\end{tikzcd}$$

Les 2 applications φ'_1 et φ'_2 sont définies comme suit :

$\varphi'_1 : A1 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{B}}_1 : s \longmapsto$ le morphisme caractéristique du sous-objet de $\mathbb{B}$ $\equiv$

$$\begin{array}{lll}
\{\varphi_1(s)\} \longrightarrow \{b\circ\varphi_1(s)\} & & \text{si } s \in X1 \\
\phi \longrightarrow \{\varphi_2\circ a(s)\} & & \text{si } a(s) \in X2 \\
\phi \longrightarrow \phi & & \text{sinon}
\end{array}$$

$\varphi'_2 : A2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{B}}_2 : t \longmapsto$ l'application caractéristique du sous-ensemble de $B2$ $\equiv$

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi_2(t)\} & \text{si } t \in X_2 \\
\phi & \text{sinon}
\end{array}$$

Nous vérifions sans peine que φ' ainsi défini est le seul morphisme de $\mathbb{A}$ dans $\widetilde{\mathbb{B}}$ tel que le carré suivant soit un produit fibré de $\mathfrak{F}1$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, tail, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & \mathbb{B} \arrow[d, tail, "\eta_{\mathbb{B}}"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi'"'] & \tilde{\mathbb{B}}
\end{tikzcd}$$

2. THEOREME FONDAMENTAL DE LA THEORIE DES TOPOS

Soit $\mathcal{E}$ *une catégorie ayant des produits fibrés.*

Soit $f : A \longrightarrow B$ *un morphisme de* $\mathcal{E}$.

f *engendre un foncteur* $f^* \ : \ \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$, *appelé le foncteur changement de base.*

Il associe à tout triangle :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & B \\ Y \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

le triangle :

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "x^*"] \arrow[d, "t^*"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A \\ Y^* \arrow[ur, "y^*"'] & \end{tikzcd}$$

où x^* *(resp* y^**) est obtenu en faisant le produit fibré de* x *(resp* y*) avec* f.

t^* *est alors défini grâce au diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[rr] \arrow[dl, dashed, "t^*"'] \arrow[ddl, dashed, "x^*"] & & X \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[ddl, dashed, "x"] \\ Y^* \arrow[rr] \arrow[d, "y^*"'] & & Y \arrow[d, "y"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B & \end{tikzcd}$$

Nous observons que $f \circ x^*$ se factorise à travers x et donc à travers y car $x = y \circ t$. Donc, comme y^* est construit en faisant le produit fibré de y et de f, x^* se factorise à travers y^* grâce à t^*.

Par conséquent : $x^* = y^* \circ t^*$.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de montrer que f^* admet un adjoint à gauche Σ_f et un adjoint à droite π_f. Cela nous permettra de voir que $\mathcal{E}/A$ est un topos, quelque soit $A \in |\mathcal{E}|$.

Nous observerons enfin que f^* est un morphisme logique de topos et que (π_f, f^*) est un morphisme géométrique du topos $\mathcal{E}/A$ au topos $\mathcal{E}/B$.

Proposition 2.1.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie avec produits fibrés. Alors pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$, le foncteur f^* admet un adjoint à gauche $\Sigma_f : \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$.

Σ_f sera défini de la façon suivante :

$$\mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & A \\ Y \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\alpha"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "©"] & B \\ Y \arrow[ur, "f\circ\beta"'] & \end{tikzcd}$$

La proposition résulte de l'isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$\mathcal{E}/B\left(\Sigma_f(\cdot), \cdot\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}/A\left(\cdot, f^*(\cdot)\right)$$

Dans un topos, pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$, le foncteur f^* admet aussi un adjoint à droite. Le théorème est appelé le théorème fondamental de la théorie des topos. Pour le démontrer, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1.

Soit $\mathcal{E}$ un topos, $C \xrightarrow{\alpha} A$, un morphisme de $\mathcal{E}$ et supposons que le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Alors $h = \alpha \circ \lambda \Longleftrightarrow\ \models g(x) = f(a) \longrightarrow \alpha(x) = a.$

où $a \in V_A$, $x \in V_C$.

Dans Ens, en effet, $D = \{ (a,x) \in A \times C \mid f(a) = g(x) \}$

Donc si $g(x) = f(a)$, $(a,x) \in D$. Par conséquent, $h(a,x) = a$ et $\lambda(a,x) = x$.

Comme $h = \alpha \circ \lambda$, $\alpha(x) = a$,

Théorème fondamental de la théorie des topos.

Soit $\mathcal{E}$ un topos, et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{E}$. Alors ce foncteur changement de base $f^* : \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$ admet un adjoint à droite $\pi_f : \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$.

La démonstration étant assez claire dans l'article de référence du mémoire, n'a pas été reprise dans ces notes.

De là on déduit un corollaire très important.

Corollaire 2.1.

Soit $\mathcal{E}$ un topos et $A \in |\mathcal{E}|$. Alors $\mathcal{E}/A$ est un topos.

Dans $\mathcal{E}/A$, le *produit* de deux objets $X \xrightarrow{x} A$ et $Y \xrightarrow{y} A$ sera le morphisme $Z \xrightarrow{x \times y} A$ obtenu en faisant le produit fibré de x et de y :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "x \times y"] & Y \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "x"'] & A
\end{tikzcd}$$

l'*égalisateur* de 2 morphismes (y,s,x) et (y,t,x) est ce morphisme (x, eg(s,t) k) où eg(s,t) est l'égalisateur dans $\mathcal{E}$ de s et t et où $k = x \circ eg(s,t)$.

Nous avons donc la représentation suivante :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "eg(s,t)"'] & A \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] & \\
Y \arrow[uur, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

l'objet terminal est id_A.

l'objet classifiant les monomorphismes de $\mathcal{E}/A$ est $\Omega \times A \xrightarrow{\pi_A} A$ et *le morphisme* v *de* $\mathcal{E}/A$ est :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, equal] \arrow[d, "{\langle v_A, A\rangle}"'] & \arrow[d, phantom, "©"] & A \\ \Omega\times A \arrow[urr, "\pi_A"'] & & \end{tikzcd}$$

soit un monomorphisme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, tail, "t"'] & A \\ Y \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

ce monomorphisme dans $\mathcal{E}/A$ est donc déterminé grâce au sous-objet X de Y et grâce au morphisme y défini sur Y.

Considérons alors $\langle \varphi_t, y\rangle$ et montrons qu'il est le morphisme caractéristique de (y,t,x) :

le carré suivant est un produit fibré de $\mathcal{E}/A$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "x"] \arrow[dd, tail, "t"'] & & A \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "{\langle v_A, A\rangle}"] \\ & A & \\ Y \arrow[ur, "y"] \arrow[rr] & & \Omega\times A \arrow[ul, "\pi_A"'] \end{tikzcd}$$

les exponentielles existent dans $\mathcal{E}/A$ car pour tout $X \xrightarrow{\alpha} A$, le foncteur produit $\alpha \times - \ : \ \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/A$ admet un adjoint à droite : en effet

$$\alpha \times - \ = \ \mathcal{E}/A \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{E}/X \xrightarrow{\Sigma\alpha} \mathcal{E}/A$$

et comme α^* et Σ_α ont des adjoints à droite, $\alpha\times-$ en a un aussi.

Définition 2.1.

Un foncteur F d'un topos $\mathcal{E}_1$ *à un topos* $\mathcal{E}_2$ *est* *__un morphisme logique de topos__* *si F préserve les limites finies, ces exponentielles, l'objet* Ω *et le morphisme* $1 \xrightarrow{v} \Omega$

Proposition 2.2.

Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'un topos $\mathcal{E}$,

alors $f : \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$ est un morphisme logique de topos.

La démonstration se trouve dans l'annexe 7.

Définition 2.2.

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux topos. Un morphisme géométrique de $\mathcal{E}_1$ à $\mathcal{E}_2$ est un couple $U = (U_*, U^*)$ de foncteurs tels que :

(i) $U_* : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$.

(ii) U^* est adjoint à gauche de U_*.

(iii) U^* conserve les limites finies.

Les foncteurs U_*, U^* s'appellent respectivement l'image directe et l'image réciproque du morphisme géométrique U.

Proposition 2.3.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'un topos $\mathcal{E}$.

Alors (π_f, f^*) est un morphisme géométrique du topos $\mathcal{E}/A$ au topos $\mathcal{E}/B$.

La proposition résulte du théorème fondamental et du fait que Σ_f est adjoint à gauche de f^*.

° ° °

3. EXISTENCE D'UN OBJET INITIAL
DEFINITION DE LA VALEUR "FAUX"
DE LA NEGATION
TOPOLOGIE DE LA DOUBLE NEGATION

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

Commençons par démontrer l'existence d'un objet initial dans $\mathcal{E}$.

Remarquons que dans Ens, cet objet est l'ensemble vide puisque pour tout ensemble A, la seule application de source ϕ et de but A est l'application de graphe vide.

Généralisons.

Définition 3.1.

Posons $0 \rightarrowtail 1 \equiv |\forall_x \ x = v|_\phi \rightarrowtail 1$ *où* $x \in V\,\Omega$

Constatons que dans Ens, cette formule n'est pas valide : en effet, $\Omega = \{0,1\}$ et $|v|_\phi$ prend toujours la valeur 1.

Par conséquent $|\forall_x \ x = v|_\phi = \phi$.

Le théorème 3.1. va nous affirmer que $0 \rightarrowtail 1$ est un objet initial de $\mathcal{E}$.

Nous avons besoin du lemme 3.1.

Soient $A \in |\mathcal{E}|$ *et* $A \xrightarrow{\gamma} 0$. *Alors :*

i) A a un seul sous-objet :

c-à-d les seuls monomorphismes dans A sont les isomorphismes dans A.

ii) si $B \in |\mathcal{E}|$ *alors il existe au plus un morphisme* $A \longrightarrow B$.

En particulier, 0 n'a pas de sous-objets propres (c-à-d $\neq id_0$*).*

Si $B \in |\mathcal{E}|$ *alors il existe au plus un morphisme* $0 \longrightarrow B$.

Démonstration :

i) Montrons qu'il existe un seul morphisme caractéristique de A dans Ω.

Il suffit donc de prouver que si $\lambda : A \longrightarrow \Omega$, alors $\lambda = A \longrightarrow 1 \xrightarrow{v} \Omega$.

Soit le diagramme où le carré est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\mu"] \arrow[drr, "\lambda"] \arrow[ddr, "\gamma"'] & & \\
& 0' \arrow[r, tail, "\eta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.f."] & \Omega \arrow[d, "\pi"] \\
& 0 \arrow[r, tail] & 1
\end{tikzcd}$$

Donnons un petit mot d'explication :

. $\Omega = \Omega \times 1$ par conséquent : $\pi : \Omega \longrightarrow 1$ est la projection canonique.

. 1 est un objet final donc $\pi_0 \circ \lambda = A \xrightarrow{\gamma} 0 \rightarrowtail 1$.

Comme le carré est un produit fibré, λ et γ se factorisent à travers respectivement $0' \rightarrowtail \Omega$ et $0' \longrightarrow 0$, grâce à μ.

Rappelons-nous que $\forall_{\Omega}$ est adjoint à gauche de π^{-1} :

comme $\eta = \pi^{-1}(0 \rightarrowtail 1)$

$= \pi^{-1}(\,|\forall_x \;(x = v)\,|\,\phi)$

$= \pi^{-1}(\forall_{\Omega}\;|x = v|_x)$

$= \pi^{-1}\,\forall_{\Omega}\;(1 \xrightarrow{v} \Omega)$

nous avons que $\eta \leq 1 \xrightarrow{v} \Omega$.

Donc il existe $\theta : 0' \longrightarrow 1$ tel que $\eta = v \circ \theta$.

Par conséquent, $\lambda = \eta \circ \mu = v \circ \theta \circ \mu = A \longrightarrow 1 \xrightarrow{v} \Omega$

ii) Supposons que f et g soient 2 morphismes de A dans B, montrons que $f = g$. Pour cela, considérons $eg(f,g)$: c'est un sous-objet de A; donc, par i) $eg(f,g) \cong id_A$, c-à-d $f = g$.

Théorème 3.1.

Dans un topos $\mathcal{E}$, l'objet 0 est initial.

Démonstration :

A cause du lemme, il suffit de prouver que si $X \in |\mathcal{E}|$, il existe un morphisme $0 \longrightarrow X$.

Considérons la projection $\pi_0 : 0 \times X \longrightarrow 0$.

Comme 0 n'a pas de sous-objets propres, du théorème de factorisation 7.3., il résulte que π_0 est un épimorphisme.

π_0 est aussi un monomorphisme, en effet :

si $A \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} 0 \times X$, si $\pi_0 \circ \lambda = \pi_0 \circ \mu$,

alors nous avons un morphisme $A \longrightarrow 0$ et par le point ii) du lemme, nous obtenons $\lambda = \mu$.

Donc, par la prop. 1.1. du chap. I, π_0 est un isomorphisme. Par conséquent, il existe un morphisme $f : 0 \longrightarrow 0 \times X$ tel que $\pi_0 \circ f = id_0$ et $f \circ \pi_0 = id_{0 \times X}$

La composition de ce monomorphisme f avec π_X est un morphisme :

$$0 \xrightarrow{f} 0 \times X \xrightarrow{\pi_X} X$$

cqfd.

Définition 3.2.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Un objet X de $\mathcal{E}$ est <u>un objet initial strict</u> si X est un objet initial et si tout morphisme $A \longrightarrow X$ de $\mathcal{E}$ est un isomorphisme.

Proposition 3.1.

Dans un topos $\mathcal{E}$, 0 est un objet initial strict.

En effet, soit $A \xrightarrow{\gamma} 0$. 0 étant un objet initial, γ est un épimorphisme.

γ est aussi un monomorphisme :

car si $B \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\gamma} 0$ tel que $\gamma \circ \lambda = \gamma \circ \mu$,

$eg(\lambda, \mu)$ est un sous-objet de B qui, par le lemme, ne peut être que id_B,

donc $\lambda = \mu$.

Donc, γ est un isomorphisme.

<u>Nous en déduisons le corollaire 3.1.</u>

Dans un topos $\mathcal{E}$, pour tout $X \in |\mathcal{E}|$,

$\mathcal{P}(X)$ possède un plus petit élément, à savoir $0 \overset{o_X}{\rightarrowtail} X$

Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de $\mathcal{E}$, f^{-1} préserve le plus petit élément, c-à-d

$f^{-1}(o_X) = o_Y$

Remarquons tout d'abord que $0 \overset{o_X}{\rightarrowtail} X$ est un monomorphisme : si f est g sont deux morphismes de même source et de but 0, f = g en vertu de la 2ème partie du lemme.

Il est évident que o_X est le plus petit élément de $\mathcal{P}(X)$:

pour tout $\alpha : A \rightarrowtail X$ de $\mathcal{P}(X)$, $o_X = \alpha \circ 0_A$

$f^{-1}(o_X) = o_Y$ car le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "o_Y"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & 0 \arrow[d, tail, "o_X"] \\
& Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

a) le carré est évidemment commutatif.

b) soit s et t 2 morphismes tels que $f \circ s = o_X \circ t$

Montrons que $s = o_Y \circ t$: mais comme $t : T \longrightarrow 0$

et que s et $o_Y \circ t$ sont 2 morphismes de source T et de même but, il en résulte par le lemme que $s = o_Y \circ t$.

<u>Nous avons maintenant tous les éléments pour définir la valeur "faux".</u>

Rappelons-nous que dans Ens, Ω est une paire :

$\Omega = \{0,1\}$ où 0 est appelé le "faux" et 1, le "vrai";

ou encore ces 2 valeurs peuvent être considérées comme 2 constantes, c-à-d 2 applications de source 1 et de but Ω :

la première associe à 0 la valeur "faux",

la deuxième associe à 0 la valeur "vrai".

Notons faux et v ces deux applications.

faux et v étant des applications de but Ω sont aussi des morphismes caractéristiques :

$$\text{faux} = \varphi_{0 \rightarrowtail 1}$$

$$v = \varphi_{1 \rightarrowtail 1}$$

ces notations sont généralisées dans un topos quelconque.

<u>Définition 3.3.</u>

faux $= \varphi_{0 \rightarrowtail 1}$

Faux est la formule (*faux* $= v$)

faux est un morphisme : $1 \longrightarrow \Omega$ et Faux est une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. $\sigma(\text{Faux}) = \phi$.

<u>Notation.</u>

Notons faux_X, le morphisme : $X \longrightarrow 1 \xrightarrow{\text{faux}} \Omega$

Dans Ens, ce morphisme vaut partout 0 et donc est le morphisme caractéristique du sous-objet $0 \overset{o_X}{\rightarrowtail} X$.

Il est clair qu'en général :

$$\boxed{faux_X = \varphi_{0 \rightarrowtail X}}$$

puisque dans le diagramme suivant, les 2 carrés sont des produits fibrés :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & 0 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.f.}"] & 1 \arrow[d, tail, "v"] \\ X \arrow[r] & 1 \arrow[r, "\text{faux}"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Donc, étant donné l'ordre défini sur $\mathcal{E}(X,\Omega)$,

$$\boxed{faux_X \leq \lambda \qquad \forall\ \lambda : X \longrightarrow \Omega}$$

Remarque :

Si $x_1 \ldots x_n$ est une suite de variables distinctes de types $X_1 \ldots X_n$:

$$\boxed{|Faux|_{x_1 \ldots x_n} = 0 \rightarrowtail X_1 x \ldots x X_n}$$

Dans Ens par exemple, aucun n-couple de $X_1 x \ldots x X_n$ ne satisfera jamais cette formule.

Proposition 3.2.

Soit Φ *une formule et* t *un terme de type* Ω *de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. *Alors*

i) $\models$ Faux $\rightarrow \Phi$

ii) $\models$ *faux* $\leq t$ (c-à-d $\models$ Faux $\rightarrow t = v$)

Définition 3.4.

Soient $X \in |\mathcal{E}|$ *et* $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} X \in \mathcal{P}(X)$

Par conséquent $\alpha \rightarrow 0_X$ *est aussi un sous-objet de* X.

Nous le notons : $\neg\alpha$

s'il n'y a pas de confusion, nous le noterons $\neg A$ *ou encore* : $A \rightarrow 0$.

<u>Remarque 3.1.</u>

Comment interpréter ce nouveau sous-objet de X? Rappelons-nous que pour A, B, Y $\in \mathcal{P}(X)$ nous avons :

$$A \wedge Y \leq B \iff Y \leq A \to B$$

Donc $A \to B$ est le plus grand sous-objet de X tel que son intersection avec A soit B.

Par conséquent : $\boxed{A \wedge \neg A = 0}$

$\neg A$ s'appelle le pseudo-complément de A dans X. A juste titre d'ailleurs puisque dans Ens, $\neg A = \complement_X A$, c-à-d le complémentaire de A dans X.

Nous déduisons de cette remarque <u>la proposition 3.3.</u>

Soit $X \in |\mathcal{E}|$ *et* $A, B \in \mathcal{P}(X)$. *Alors* :

i) $A \leq \neg B \iff A \wedge B = 0$

ii) $A \leq \neg\neg A$

Nous avons défini une transformation naturelle $\neg : \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P}$ définie par la famille d'applications $(\neg_X)_{X \in |\mathcal{E}|}$.

où $\neg_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ qui à tout sous-objet α, associe le sous-objet $\neg\alpha$.

Elle est naturelle car pour tout X, $Y \in |\mathcal{E}|$ et $f : X \longrightarrow Y$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\neg_X"] & \mathcal{P}(X) \\
\mathcal{P}(Y) \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[r, "\neg_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

En effet, quelque soit $\beta : B \rightarrowtail Y$, $\boxed{\neg f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\neg\beta)}$

Comme le foncteur $\mathcal{P}$ est représentable et isomorphe du foncteur $\mathcal{E}(-,\Omega)$, nous pouvons transporter l'opération $\neg$ sur $\mathcal{E}(-,\Omega)$ et définir une nouvelle transformation naturelle $\neg : \mathcal{E}(-,\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(-,\Omega)$.

Elle sera définie par $(\neg_X)_{X \in |\mathcal{E}|}$ où $\neg_X : \mathcal{E}(X,\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(X,\Omega)$ qui à chaque morphisme caractéristique φ_α, associe le morphisme caractéristique $\neg\varphi_\alpha$ tel que :

$$\boxed{\begin{aligned} \neg\varphi_\alpha &= \varphi_{\neg\alpha} \\ &= \varphi_\alpha \to \mathit{faux}_X \end{aligned}} \qquad \text{car } \neg\alpha = \alpha \to 0_X$$

Cette transformation étant naturelle, nous en conluons :

pour tout X, Y $\in |\mathcal{E}|$ et $f : X \longrightarrow Y$

$$\boxed{\neg(\varphi_\alpha \circ f) = \neg\varphi_\alpha \circ f}$$

La proposition 3.3. peut aussi être transcrite dans $\mathcal{E}(X,\Omega)$ et devient :

Soient φ_α, $\varphi_\beta \in \mathcal{E}(X,\Omega)$

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_{\neg\beta} \Leftrightarrow \varphi_{\alpha\wedge\beta} = \mathit{faux}_X$$

$$\varphi_\alpha \wedge \neg\varphi_\alpha = \mathit{faux}_X$$

$$\varphi_\alpha \leq \neg\neg\varphi_\alpha$$

Comme toujours, chaque fois que nous définissons une opération sur $\mathcal{P}(X)$, nous aimons la représenter par l'opération correspondante sur Ω.

Il y a plusieurs manières d'agir, équivalentes :

1) La première est d'appliquer le lemme de Yonoda à la transformation naturelle $\neg : \mathcal{E}(-,\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(-,\Omega)$; ce lemme nous fournira un morphisme de Ω dans Ω représentant cette opération.

2) La deuxième, la plus intéressante ici car elle construit ce morphisme en suivant pas à pas notre intuition ensembliste.

Considérons cette deuxième façon.

Soit un sous-ensemble A de X : il lui correspond intuitivement un énoncé a à une variable libre dans X et A serait l'ensemble des éléments de X satisfaisant cet énoncé.

Le sous-ensemble $\neg A$ de X est alors associé à l'énoncé $\neg a$ qui est vrai ssi a est faux.

Il est alors logique de représenter l'opération $(A \longmapsto \neg A)$ par l'application de Ω dans Ω qui :

à la valeur "vrai" associe la valeur "faux",

à la valeur "faux" associe la valeur "vrai".

c-à-d si on note cette application par $\neg$, $\neg$ est définie par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \neg \ : \ \{0,1\} &\longrightarrow \{0,1\} \\ 0 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Donc $\neg$ est le morphisme caractéristique du singleton $\{0\} \subseteq \{0,1\}$

c-à-d : $\neg = \varphi_{\{0\}}$

$= \varphi_{\neg\{1\}}$

$= \varphi_{\neg(1 \xrightarrow{v} \Omega)}$

$= \varphi_{1 \xrightarrow{v} \Omega} \rightarrow \text{faux}_\Omega$

$= id_\Omega \rightarrow \text{faux}_\Omega$

Dans un topos $\mathcal{E}$ quelconque, cette opération $\neg$ sera aussi représentée par le morphisme de Ω dans Ω :

$$\boxed{\neg = id_\Omega \rightarrow faux_\Omega}$$

remarquons que ce morphisme jouit d'une propriété intéressante puisque :

pour tout $\varphi_\alpha : X \longrightarrow \Omega$

$$\boxed{\neg\varphi_\alpha = \neg \circ \varphi_\alpha}$$

c-à-d dans Ens : si α est associé à un énoncé a, puisque φ_α donne la valeur de vérité de a sur X,

la prop. $\varphi_{\neg\alpha} = \neg\circ\varphi_\alpha$ veut dire : donner la valeur de vérité de l'énoncé a, c'est nier celle de a, résultat qui avait été annoncé et qui nous avait permis de définir le morphisme $\neg$.

Démontrons ce résultat dans le cas général :

puisque : $\neg = \mathrm{id}_\Omega \rightarrow \mathrm{faux}_\Omega$ nous en déduisons que $\neg = \neg\, \mathrm{id}_\Omega$

où id_Ω est un morphisme caractéristique de $\mathcal{E}(X,\Omega)$.

Par conséquent, soit $\varphi_\alpha \in \mathcal{E}(X,\Omega)$ montrons que :

$$\neg\, \mathrm{id}_\Omega \circ \varphi_\alpha = \neg\, \varphi_\alpha$$

or l'opération $\neg$ est naturelle.

Donc : $\neg\, \mathrm{id}_\Omega \circ \varphi_\alpha = \neg\,(\mathrm{id}_\Omega \circ \varphi_\alpha)$

$= \neg\, \varphi_\alpha$

Proposition 3.4.

i) $\neg\, \mathit{faux} = v$

ii) $\neg\, v = \mathit{faux}$

iii) $\neg = \varphi_{\mathit{faux}}$

Faisons d'abord une remarque à propos de faux et v.

Nous savons que faux $= \varphi_{0 \rightarrowtail 1} = 1 \rightarrowtail \Omega$

$$v = \varphi_{1 \rightarrowtail 1} = 1 \rightarrowtail \Omega$$

donc faux et v peuvent être considérés, soit comme sous-objets de Ω, soit comme morphismes caractéristiques.

Voyons que dans ces 2 cas, les propriétés i) et ii) sont satisfaites.

Considérons d'abord le cas où faux et v sont des morphismes caractéristiques.

faux $= \varphi_{0 \rightarrowtail 1}$ et est donc associé à un énoncé à une variable dans 1 qui n'est jamais satisfait.

L'énoncé associé à $\neg$ faux le sera toujours et donc : $\boxed{\neg \text{ faux} = \varphi_{id_1} = \mathcal{V}}$.

Le raisonnement inverse aboutit au résultat $\boxed{\neg \mathcal{V} = \text{faux}}$.

Si $\mathcal{V}$ est un sous-objet de Ω, nous aurons aussi : $\boxed{\neg \mathcal{V} = \text{faux}}$,

c-à-d : si $i = 0 \rightarrowtail \Omega$, alors $\mathcal{V} \Rightarrow i$ = faux .

Il suffit alors de prouver : $eq\ (\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega},\ id_\Omega\ ) = \varphi_{\ 0 \rightarrowtail 1}$

c-à-d si $X \xrightarrow{f} \Omega$ égalise id_Ω et $\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega}$, il faut que f se factorise à travers $\varphi_{\ 0 \rightarrowtail 1}$.

Cependant, nous avons les équivalences successives suivantes :

$$
\begin{aligned}
& f \text{ égalise } id_\Omega \quad \text{ et } \varphi_{0 \rightarrowtail \Omega} \\
\Leftrightarrow\ & f = \varphi_{f^{-1}(0 \rightarrowtail \Omega)} \\
& \quad = \varphi_{0 \rightarrowtail X} \\
& \quad = \varphi_{0 \rightarrowtail 1} \circ c \qquad \text{où } c \text{ est l'unique morphisme de } X \text{ dans } 1.
\end{aligned}
$$

cqfd.

Nous avons alors directement le résultat iii) :

en effet puisque $\neg \mathcal{V}$ = faux , $\varphi_{\text{faux}} = \neg\, \varphi_{\mathcal{V}}$

$$
\begin{aligned}
& = \neg\, id_\Omega \\
& = \neg
\end{aligned}
$$

Il nous reste encore à voir que si faux est un sous-objet de Ω, alors

$\boxed{\neg \text{ faux} = \mathcal{V}}$.

Dans Ens, ceci est immédiat puisque faux $\simeq \{0\}$ et $\mathcal{V} \simeq \{1\}$. Ils sont donc complémentaires.

Vérifions dans le cas général :

dans $\mathcal{P}(\Omega)$, $\neg$ faux $=$ faux $\to 0 \rightarrowtail \Omega$

$= \mathrm{eg}\,(\varphi_{\text{faux}} \wedge 0 \rightarrowtail \Omega, \varphi_{\text{faux}})$

$= \mathrm{eg}\,(\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega}, \varphi_{\text{faux}})$

$= \mathrm{eg}\,(\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega}, \neg)$

pour que $\neg$ faux $= \mathcal{V}$, il faut que tout morphisme égalisant $\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega}$ et $\neg$ se factorise à travers $\mathcal{V}$.

Soit donc $\varphi_\alpha : X \longrightarrow \Omega$ tel que $\varphi_{0 \rightarrowtail \Omega} \circ \varphi_\alpha = \neg \circ \varphi_\alpha$

c-à-d tel que : $\varphi_{0 \rightarrowtail X} = \varphi_{\neg\alpha}$

Donc $0 \overset{0_X}{\rightarrowtail} X = \alpha \to 0_X$. Nous tirons alors la conclusion suivante :

Etant donné la caractérisation de l'objet $\alpha \to 0_X$)

(pour tout $\beta \in \mathcal{P}(X)$: $\beta \leq \alpha \to 0_X \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = 0_X$)

α est tel que le seul sous-objet de $\mathcal{P}(X)$ ayant une intersection vide avec α est 0_X.

Donc : $\alpha = id_X$.

Par conséquent, $\varphi_\alpha = X \longrightarrow 1 \xrightarrow{\mathcal{V}} \Omega$ c-à-d que φ_α se factorise à travers $\mathcal{V}$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4.

<u>Définition 3.6.</u>

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}_\mathcal{E}$.

Nous voudrions nier cette formule, c-à-d exprimer que "non Φ" est toujours satisfaite sauf quand Φ l'est.

Dans Ens, si $\{a_1 \ldots a_n\} = \sigma(\Phi)$, il faudrait alors que $|\text{non}\,\Phi|_{a_1 \ldots a_n} = A_1 x \ldots x A_n - |\Phi|_{a_1 \ldots a_n}$

c-à-d $|\text{non}\,\Phi|_{a_1\ldots a_n} = |\Phi|_{a_1\ldots a_n} \rightarrow \Phi$

$= |\Phi \rightarrow \text{Faux}|_{a_1\ldots a_n}$

Nous allons alors poser cette nouvelle formule :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{non } \Phi \equiv \Phi \rightarrow \textit{Faux} \\[1em] \textit{non } \Phi \textit{ sera noté : } \neg\Phi \end{array}}$$

Remarque.

$|\neg\Phi|_S = \neg|\Phi|_S$ *où S est une suite de variables contenant* $\sigma(\Phi)$

Proposition 3.5.

Si Φ *est une formule et t est un terme de type* Ω *de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *, alors :*

i) $\models$ *val* $\neg\Phi = \neg$ (*val* Φ)

puisque la valeur de vérité de la formule $\neg\Phi$ est la négation de celle de Φ.

ii) $\models t \wedge \neg t$ = *faux*

puisque la conjonction d'une affirmation et d'une négation donne comme valeur de vérité le "faux".

iii) $\models t \leq \neg\neg t$

dans Ens, nous aurions l'égalité. Ne nous satisfaisons donc pas de ce cas particulier pour comprendre la propriété et démontrons-là.

Vérifions que $\models t = v \rightarrow \neg\neg t = v$

c-à-d que $|t| \leq \neg\neg|t|$

Résultat annoncé dans la proposition 3.3.

iv) $\models \neg(\Phi \wedge \neg\Phi)$

c-à-d $\Phi \wedge \neg\Phi$ n'est jamais satisfaite.

v) $\models \Phi \to \neg\neg\Phi$

car $|\Phi| \leq \neg\neg|\Phi|$

Signalons une série de propriétés liant la négation et l'implication.

Proposition 3.6.

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. Alors :

i) $\models (\psi \to \neg\Phi) \leftrightarrow \neg(\Phi \wedge \psi)$

ii) $\models (\neg\psi \to \neg\Phi) \leftrightarrow (\Phi \to \neg\neg\psi)$

iii) $\models (\Phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\Phi)$

iv) $\models \neg\neg(\Phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\Phi \wedge \neg\neg\psi)$

v) $\models \neg\Phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\Phi$

Définition 3.7.

Soit $\mathcal{E}$ un topos. On appelle topologie sur $\mathcal{E}$ un morphisme $j:\Omega \longrightarrow \Omega$ tel que :

i) $j \circ v = v$

ii) $j \circ j = j$

iii) $\wedge \circ (j \times j) = j \circ \wedge$

Constatons que dans Ens, j ne peut être que l'identité.

Proposition 3.7.

Dans un topos $\mathcal{E}$, le morphisme $\neg\neg : \Omega \to \Omega$ est une topologie.

puisque : $\neg\neg v = v$

$\models \neg\neg\Phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg\Phi$

$\models \neg\neg(\Phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\neg\Phi \wedge \neg\neg\psi$

$\boxed{\text{Introduisons le faux et la négation dans } \mathcal{H}}$

Dans $\mathcal{H}$, *l'objet initial* 0 est l'application vide : $\phi \longrightarrow \phi$

Considérons cette application comme un sous-objet de $\mathbb{1}$:

Nous avons donc le carré :

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "©"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\ \phi \arrow[r, hook] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Ce sous-objet, je peux l'associer à un énoncé à une variable (qui peut prendre une seule valeur), qui n'est jamais satisfait.

Quel est son morphisme caractéristique :

Puisque l'énoncé associé à $0 \rightarrowtail \mathbb{1}$ n'est jamais satisfait, sa valeur de vérité sera toujours le "faux", c-à-d que le carré

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "(\varphi_{0 \rightarrowtail \mathbb{1}})_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "©"] & \{0,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\ \{0\} \arrow[r, "(\varphi_{0 \rightarrowtail \mathbb{1}})_2"'] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

sera tel que : $(\varphi_{0 \rightarrowtail \mathbb{1}})_i\,(0) = 0 \quad , \; i = 1,2.$

Ce carré est le morphisme que l'on note *faux*.

A ce morphisme qui est d'ailleurs une constante, on associe une nouvelle formule : $(\text{faux} = v)$ que l'on note *Faux*.

Faux n'étant jamais satisfaite, quelque soit la suite de variables $a_1 \dots a_n$, par rapport à laquelle on l'interprète, il est évident que $|Faux|_{a_1 \dots a_n} = 0 \rightarrowtail A_1 X \dots X A_n$.

Introduisons maintenant la négation.

Soit $A \hookrightarrow X$ un sous-objet de X,

soit $\bar{a}$ l'énoncé associé.

Nous allons définir le sous-objet $\neg\mathbb{A}$ et voir ce que devient l'énoncé "non $\bar{a}$" associé à $\neg\mathbb{A}$.

Comme dans Ens, nous voulons que "non $\bar{a}$" soit vrai, ssi $\bar{a}$ est "faux" et vice-versa.

Par conséquent, $(\neg\mathbb{A})_1$ (qui par définition est $\{s \in X1 \mid s$ satisfait "non $\bar{a}$" et $x(s)$ satisfait aussi "non $\bar{a}$"$\}$)

sera : $\complement_{X1} A1 \cap x^{-1}_{\rho}(\complement_{X2} A2)$

c-à-d : $\complement_{X1}(x^{-1}_{\rho}(A2))$

et : $(\neg\mathbb{A})_2 = \complement_{X2} A2$

En outre, si l'énoncé $\bar{a}$ est possible, (c-à-d faux dans X1 mais vrai dans X2), "non $\bar{a}$" associé sera faux (puisque vrai dans X1 mais devenant faux après la transformation liée à x).

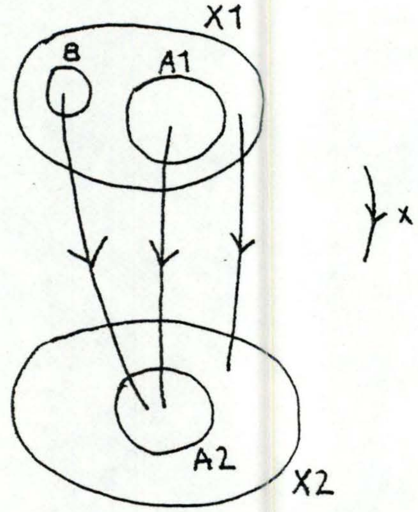
<u>Une remarque concernant la double négation.</u>

Dans Ens, tout ensemble A était égal à sa double négation :

Dans $\mathfrak{Fl}$,il n'en est pas ainsi, en général :

si $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{X}$, $\mathbb{A} \leqq \neg\neg\mathbb{A}$ sans que : $\mathbb{A} = \neg\neg\mathbb{A}$

Nous le comprendrons plus facilement sur le diagramme suivant :



où $B = \{s \in \complement A1 \mid x(s) \in A2\}$

$\neg A$ est l'application : $X1 - (A1 \cup B) \longrightarrow X2 - A2$

d'où : $\neg\neg A$ est l'application : $B \cup A1 \longrightarrow A2$

A partir de ce diagramme, observons aussi que

pour tout $s \in X1 - (A1 \cup B)$: s satisfait "non $\bar{a}$" ssi $x(s)$ le satisfait encore.

pour tout $r \in A1 \cup B$: r rend "non $\bar{a}$" faux ssi $x(r)$ le rend encore faux.

Par conséquent, un énoncé "non $\bar{a}$" ne sera jamais possible.

Nous en déduisons maintenant le morphisme caractéristique : $\varphi_{\neg A} : \mathcal{X} \longrightarrow \Omega$

$(\varphi_{\neg A})_1$ sera l'application $X1 \longrightarrow \{0,1,2\}$

$$s \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } & s \in X1 - x^{-1}(A2) \\ 0 \text{ si } & s \in x^{-1}(A2) \end{cases}$$

$(\varphi_{\neg A})_2$ sera l'application $X2 \longrightarrow \{0,1\}$

$$r \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } & r \in X2 - A2 \\ 0 \text{ si } & r \in A2 \end{cases}$$

Nous nous imaginons la représentation de la négation dans Ω.

Ce sera le carré :

$$\begin{tikzcd} \{0,1,2\} \arrow[r, "\neg_1"] \arrow[d, "\omega"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & \{0,1,2\} \arrow[d, "\omega"] \\ \{0,1\} \arrow[r, "\neg_2"'] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

où $\neg_1$ associe à 0 la valeur 1,

à 1 la valeur 0,

à 2 la valeur 0.

et où $\neg_2$ associe à 0 la valeur 1,

à 1 la valeur 0.

Nous avons aussi défini la formule $\neg\Phi$

qui prend le même sens que l'énoncé "non $\bar{a}$" associé à un sous-objet $\mathbb{A}$ de $\mathbb{X}$.

Par conséquent, si $a_1 \ldots a_n$ est une suite de variables distinctes, telles que

$\sigma(\Phi) \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$

$$|\neg\Phi|_{a_1 \ldots a_n} = \neg|\Phi|_{a_1 \ldots a_n}$$

comme annoncé dans le cas général.

Définition d'une topologie.

Comme topologie dans $\mathfrak{H}$, nous aurons deux possibilités :

la première : $j = (j_1, j_2) = (id_{\Omega 1}, id_{\Omega 2})$

la deuxième : $j = (j_1, j_2)$ tel que : $j_2 = id_{\Omega 2}$

et : $j_1 = \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$: $0 \longmapsto 0$

$1 \longmapsto 1$

$2 \longmapsto 1$

o

o o

4. UNIONS FINIES DE FORMULES OU DE SOUS-OBJETS.
NON VALIDITE DU TIERS-EXCLUS.
STRUCTURE LOGIQUE DE L'OBJET Ω.
AMORCE DES TOPOS BOOLEENS.
EXISTENCE DE SOMMES FINIES.

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désignera un topos.

Nous voulons introduire le symbole $\vee$ (qui est l'équivalent du "ou" non exclusif de Ens) dans la construction des termes, des formules et des sous-objets.

Rappelons-nous la table de vérité du "ou" dans Ens :

	0	1
0	0	1
1	1	1

c-à-d qu'elle définit l'opération $\vee$ sur Ω :

$$\begin{array}{ccc}
\{0,1\} \times \{0,1\} & \xrightarrow{\quad\vee\quad} & \{0,1\} \\
(0,0) & \longmapsto & 0 \\
(0,1) & & \\
(1,0) & \longmapsto & 1 \\
(1,1) & &
\end{array}$$

Si nous nous souvenons de l'ordre $\leq$ (à savoir $0 \leq 1$) sur Ω, nous constatons que $\vee$ associe à chaque couple de $\Omega \times \Omega$, l'élément max. correspondant.

Traduisons cette table de vérité dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, c-à-d définissons un nouveau terme $t \vee w$ où t, w sont deux termes de type Ω de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Posons :

$$\boxed{t \vee w \equiv \operatorname{val} \forall_x ((t \leq x \wedge w \leq x) \rightarrow x = v)}$$

où $x \in V\,\Omega$, $x \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$

Nous voyons par exemple dans Ens :

si t et w valent 0, x ne vaut pas 1 dès que $x \geqslant 0$

donc la formule $\forall_x ((t \leq x \wedge w \leq x) \rightarrow x = v)$

est fausse dans ce cas.

c-à-d $t \vee w$ vaut 0.

Mais dès que l'un des 2 termes (t ou w) vaut 1, la formule est satisfaite,

et le terme $t \vee w$ prend alors la valeur 1.

On a donc : $\boxed{\begin{array}{l} \sigma(t \vee w) = \sigma(t) \cup \sigma(w) \\ \tau(t \vee w) = \Omega \end{array}}$

Nous acceptons sans peine la remarque 4.1.

Si t, t', w, w' sont des termes de type Ω *tels que* $\models t = t'$ *et* $\models w = w'$, *alors* $\models t \vee w = t' \vee w'$.

Proposition 4.1.

Supposons que t_1, t_2, t_3 *soient des termes de type* Ω *de* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. *Alors :*

i) $\models t_j \leq t_1 \vee t_2$ *pour* $j = 1,2$

ii) $\models (t_1 \leq t_2) \wedge (t_2 \leq t_3) \leftrightarrow (t_1 \vee t_2 \leq t_3)$

Cette proposition traduit dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ que $t_1 \vee t_2$ est le maximum(pour l'ordre $\leq$ défini sur Ω) de t_1 et de t_2; résultat annoncé pour introduire la définition de l'union de 2 termes.

Venons-en à l'union de deux formules Φ et ψ.

Dans Ens, la table de vérité de "ou" servira à donner la valeur de la formule $\Phi \vee \psi$, c-à-d $\Phi \vee \psi$ sera satisfaite dès que l'une des 2 formules l'est.

Nous définissons donc, à juste titre, la formule $\Phi \vee \psi$ de cette façon:

Définition 4.2.

Soient Φ *et* ψ *, 2 formules de* $\mathcal{L}_\xi$ *. Posons :*

$$\boxed{\Phi \vee \psi \equiv val\ \Phi \vee val\ \psi = v}$$

On a : $\sigma(\Phi \vee \psi) = \sigma(\Phi) \cup \sigma(\psi)$

Nous obtenons le résultat suivant, étant donné la prop.6.1.

$$\boxed{\begin{array}{l} \models \mathrm{val}\ (\Phi \vee \psi) = \mathrm{val}\ \Phi \vee \mathrm{val}\ \psi \\ \models \Phi \vee \psi \leftrightarrow \forall x\ ((\mathrm{val}\ \Phi \leq x \wedge \mathrm{val}\ \psi \leq x) \rightarrow x = v) \end{array}}$$

où $x \notin \sigma(\Phi) \cup \sigma(\psi)$

c-à-d $\Phi \vee \psi$ est satisfaite ssi l'une des 2 est satisfaite, ou encore si la valeur maximum de Φ et de ψ est le "vrai".

Remarque 4.2.

Si Φ, Φ', ψ, ψ' *sont des formules de* $\mathcal{L}_\xi$ *telles que* $\models \Phi \leftrightarrow \Phi'$ *et* $\models \psi \leftrightarrow \psi'$ *alors :* $\models (\Phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Phi' \vee \psi')$.

Corollaire 4.1.

Soient Φ, ψ *et* θ *trois formules de* $\mathcal{L}_\xi$ *. Alors :*

i) $\models \Phi \rightarrow (\psi \vee \Phi)$ $\qquad \models \Phi \rightarrow (\Phi \vee \psi)$

ii) $\models (\Phi \rightarrow \theta) \vee (\psi \rightarrow \theta) \leftrightarrow (\Phi \vee \psi \rightarrow \theta)$

Ce corollaire résulte de la prop. 4.1., et du fait que :

$$\models (\Phi \rightarrow \theta) \leftrightarrow \mathrm{val}\ \Phi \leq \mathrm{val}\ \theta .$$

De ce corollaire, nous déduisons l'une des deux lois de Morgan :

$$\boxed{\models \neg \Phi \wedge \neg \psi \leftrightarrow \neg(\Phi \vee \psi)}$$

Il reste à définir l'<u>union de 2 sous-objets</u>.

<u>Définition 4.3.</u>

Soient : $A_1 \overset{\alpha_1}{\rightarrowtail} A$ et $A_2 \overset{\alpha_2}{\rightarrowtail} A$ 2 sous-objets de A.

Dans Ens, le sous-objet $A_1 \vee A_2 \overset{\alpha_1 \vee \alpha_2}{\rightarrowtail} A$ sera le sous-ensemble $A_1 \cup A_2$.

Dans le cas général, posons :

$$\boxed{A_1 \vee A_2 \overset{\alpha_1 \vee \alpha_2}{\rightarrowtail} A = |(a \in A_1) \vee (a \in A_2)|_a}$$

où : $a \in V_A$.

L'union de 2 formules est compatible avec l'union de 2 sous-objets, puisque :

<u>Proposition 4.2.</u>

$$\boxed{|\Psi \vee \Phi|_S = |\Psi|_S \vee |\Phi|_S}$$

<u>Corollaire 4.2.</u>

Si $A \in |\mathcal{E}|$, *alors* $\vee$ *est une opération de supremum sur l'ensemble ordonné* $\mathcal{P}(A)$.

Plus précisément si $A_i \rightarrowtail A$, *pour* $i = 1, 2, 3$, *alors :*

$$A_1 \vee A_2 \leq A_3 \iff (A_1 \leq A_3 \text{ et } A_2 \leq A_3)$$

En particulier, pour tout $X \rightarrowtail A \in \mathcal{P}(A)$, $X \vee 0 = X$.

cela grâce à la propriété suivante :

$$\models (a \in A_1 \vee a \in A_2 \rightarrow a \in A_3) \leftrightarrow (a \in A_1 \rightarrow a \in A_3) \wedge (a \in A_2 \rightarrow a \in A_3)$$

L'opération $\vee$ sur $\mathcal{P}(A)$ où $A \in |\mathcal{E}|$ nous permet de définir une transformation naturelle $\vee$ entre les foncteurs $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$. Elle est définie par la famille d'applications : $(\vee_A)_{A \in |\mathcal{E}|}$

telle que $\vee_A : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$

$(X, Y) \longmapsto X \vee Y$

Cette transformation est naturelle car pour tout $A, B \in |\mathcal{E}|$

pour tout $f : A \longrightarrow B$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \arrow[rr, "\vee_A"] & & \mathcal{P}(A) \\ \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) \arrow[u, "f^{-1} \times f^{-1}"] \arrow[rr, "\vee_B"'] & & \mathcal{P}(B) \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

c-à-d : pour tout $X \rightarrowtail B$ et $Y \rightarrowtail B$:

$$\boxed{f^{-1}(X \vee Y) = f^{-1}(X) \vee f^{-1}(Y)}$$

en effet, f^{-1} est adjoint à gauche de $\forall_f$ et en conséquence f^{-1} conserve les limites à droite et en particulier les supremum (qui sont les sommes dans $\mathcal{P}(A)$).

Corollaire 4.3.

Soit $A \in |\mathcal{E}|$ et $A_i \rightarrowtail A \in \mathcal{P}(A)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Puisque $- \wedge A_3$ est adjoint à gauche de $A_3 \to -$ dans $\mathcal{P}(A)$, nous déduisons comme ce qui précède que :

$$\boxed{(A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \vee A_2) \wedge A_3}$$

Corollaire 4.4.

Soient Φ, ψ et θ 3 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

Alors :

$$\boxed{\models (\Phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta) \leftrightarrow (\Phi \vee \psi) \wedge \theta}$$

Comme le foncteur $\mathcal{P}$ est isomorphe à $\mathcal{E}(-, \Omega)$, l'opération $\vee$ sur $\mathcal{P}(A)$ se transporte sur $\mathcal{E}(A,\Omega)$ en posant :

$$\boxed{\varphi_\alpha \vee \varphi_\beta = \varphi_{\alpha \vee \beta}} \qquad \text{pour : } \alpha, \beta \in \mathcal{P}(A)$$

cette opération induit une transformation naturelle $\vee$ de $\mathcal{E}(-,\Omega) \times \mathcal{E}(-,\Omega)$ dans $\mathcal{E}(-,\Omega)$. En effet, quelque soit $f : A \longrightarrow B$

$$\boxed{(\varphi_\alpha \vee \varphi_\beta) \circ f = (\varphi_\alpha \circ f) \vee (\varphi_\beta \circ f)}$$

pour : $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(B)$

Le lemme de Yonoda fournit une représentation de cette transformation naturelle, c-à-d un morphisme

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\ \vee\ } \Omega$$

tel que : $\varphi_\alpha \vee \varphi_\beta = \vee \circ \langle \varphi_\alpha , \varphi_\beta \rangle$ pour tout $x \in |\mathcal{E}|$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$

Mais essayons de construire nous-mêmes ce morphisme.

Soit $\alpha : A \rightarrowtail X$ et $\beta : B \rightarrowtail X$

dans Ens, soit a (resp.b) un énoncé à une variable dans X, associé à A (resp. à B).

$\varphi_{\alpha \vee \beta}$ est dans Ens le morphisme caractéristique associé au sous-ensemble $A \cup B$.

c-à-d que $\varphi_{\alpha \vee \beta}$ fournit la valeur de vérité de l'énoncé "a ou b" sur X.

Par conséquent, $\varphi_{\alpha \vee \beta}$ vaut 1 quand "a ou b" est vrai,

vaut 0 quand "a ou b" est faux.

c-à-d $\varphi_{\alpha \vee \beta}$ vaut 1 dès que l'un des deux énoncés (a ou b) est vrai.

Comme annoncé, nous constatons que l'opération $\vee$ sur Appl(X,Ω) peut être représentée par la table de vérité du "ou non exclusif" décrit au début de ce paragraphe.

Celle-ci peut être considérée comme une application de $\Omega \times \Omega$ dans Ω, c-à-d comme le morphisme caractéristique du sous-objet de Ω:

$$(id_\Omega \times v) \vee (v \times id_\Omega)$$

Nous prouvons que dans ce cas général, cette définition est aussi valable.

C'est l'objet de la <u>proposition 4.4.</u>

Le morphisme $\vee = \varphi(id_\Omega \times v) \vee (v \times id_\Omega)$

représente l'opération "supremum" dans le sens où : pour tout $A \xrightarrow{\alpha} X$

et $B \xrightarrow{\beta} X$ *dans :* $\mathcal{P}(X)$:

$$\varphi_\alpha \vee \varphi_\beta = \vee \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$$

en effet : $\beta = \varphi_\beta^{-1}(v)$ par définition du classificateur des monomorphismes v.

comme : $\varphi_\beta = \pi_2 \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$, $\beta = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle^{-1} \pi_2^{-1}(v)$

De même : $\alpha = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle^{-1} \pi_1^{-1}(v)$

Par conséquent : $\alpha \vee \beta = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta{}^{-1} \rangle \pi_1^{-1}(v) \vee \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle^{-1} \pi_2^{-1}(v)$

$$= \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle^{-1} \left(\pi_1^{-1}(v) \vee \pi_2^{-1}(v) \right)$$

Mais puisque : $\pi_2 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, $\pi_2^{-1}(v) = id_\Omega \times v : \Omega \times 1 \rightarrowtail \Omega \times \Omega$

tandis que : $\pi_1^{-1}(v) = v \times id_\Omega : 1 \times \Omega \rightarrowtail \Omega \times \Omega$

Donc : $\alpha \vee \beta = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle^{-1} (v \times id_\Omega \vee id_\Omega \times v)$

et par conséquent : $\varphi_{\alpha \vee \beta} = \varphi_{v \times id_\Omega \vee id_\Omega \times v} \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$

c-à-d : $\varphi_{\alpha \vee \beta} = \vee \circ \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$

<u>Proposition 4.5.</u>

Soit $A \in |\mathcal{E}|$, $A_i \rightarrowtail A \in \mathcal{P}(A)$ *pour* $i = 1,2$, *et* $A \xrightarrow{f} B$. *Alors* :

$$\exists_f (A_1 \vee A_2) = (\exists_f A_1) \vee (\exists_f A_2)$$

Ceci est immédiat car $\exists_f$ est adjoint à gauche de f^{-1}.

Calculons que si $R \rightarrowtail A$

$$\exists_f R \equiv \mathrm{Im} \; (R \rightarrowtail A \xrightarrow{f} B)$$

et que dans Ens

$$\exists_f R = f_{\mathcal{P}}(R)$$

Nous considérons immédiatement le <u>corollaire suivant</u> :

Soient Φ et Ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ et a une variable, alors :

$$\models \exists_a (\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\exists_a \Phi) \vee (\exists_a \Psi)$$

car : $|\exists_a \ \Phi|_{a_1 \ldots a_n} = \exists_{-A} |\Phi|_{a\, a_1 \ldots a_n}$

et que $\exists$-A est adjoint à gauche de $\pi^{-1}_{A_1 x \ldots x A_n}$ (où $\pi_{A_1 x \ldots x A_n}$ est la projection canonique de Ax $A_1 x \ldots x A_n$ sur $A_1 x \ldots x A_n$).

Nous arrivons à une des conclusions importantes de ce travail :

Le tiers exclu n'est pas valable dans un topos

c-à-d la formule $\Phi \vee \neg \Phi$ n'est en général pas vraie dans un topos. En effet, si B est un sous-objet de A dans un topos, ce n'est pas toujours vrai que $B \vee \neg B = A$

Nous en verrons un exemple dans $\mathfrak{H}$.

Définition 4.4.

Nous avons déjà donné la définition d'une pré-algèbre de Heyting, complétons là.

Un objet A de $\mathcal{E}$ est une algèbre de Heyting ssi il existe un sous-objet

$j : R \rightarrowtail A \times A$ tel que (A, j) soit un objet ordonné,

il existe une opération infimum $\wedge$ par rapport à (A, j),

une opération implication $\rightarrow$ par rapport à (A, j),

une opération suprémum $\vee$ par rapport à (A, j),

il existe un suprémum s par rapport à (A, j),

A possède un plus petit élément.

On observe que pour tout objet A du topos $\mathcal{E}$ $(\mathcal{P}(A), \trianglelefteq)$ est une algèbre de heyting de Ens.

Remarquons qu'une définition équivalente d'une opération suprémum $\vee$ est la suivante.

Si (A,j) est un objet ordonné

L'opération $\vee$: A xA $\longrightarrow$A est une opération suprémum, ssi les axiomes suivants sont vérifiés :

$\models x \vee y = y \vee x$

$\models (x \vee y) \vee z \;=\; x \vee (y \vee z)$

$\models (x \wedge y) \vee y \;=\; y$

$\models x \wedge (y \vee x) = x$

où $x, y, z \in V_A$ telles que $x \neq y \neq z \neq x$

L'existence d'un plus petit élément dans (A,j) est équivalente à l'existence d'une constante $0 : 1 \longrightarrow A$ telle que :

$\models 0 \wedge x \;=\; 0 \qquad$ où $x \in V_A$.

En conclusion :

Puisque $\mathcal{P}$ est un foncteur représentable, isomorphe à $\mathcal{E}(-,\Omega)$ et que $\mathcal{P}$ se factorise à travers la catégorie des ensembles ordonnés qui sont des algèbres de heyting, Ω est une algèbre de heyting dans $\mathcal{E}$.

Nous avons déjà vu que $(\Omega, \leq, \wedge, \rightarrow, \mathit{v})$ était une pré-algèbre de heyting.

Nous avons aussi défini l'opération suprémum $\vee$ sur Ω .

Par le lemme de Yonoda, trouvons une constante qui représente le plus petit élément de $\mathcal{P}(X)$ quelque soit $X \in |\mathcal{E}|$.

Comme $0 \rightarrowtail X$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(X)$ et que $X \longrightarrow 1 \xrightarrow[\text{faux}]{} \Omega$ est $\varphi_{0 \rightarrowtail X}$, nous nous doutons que faux $(= \varphi_{0 \rightarrowtail 1})$ sera cette constante.

Vérifions, soit $X \in |\mathcal{E}|$.

Déterminer $0 \rightarrowtail X$ ou $\varphi_{0 \rightarrowtail X}$, c'est définir une application :

$$\mathcal{E}(X,1) \longrightarrow \mathcal{E}(X,\Omega)$$

qui au seul morphisme $X \longrightarrow 1$, associe le morphisme caractéristique $\varphi_{0 \rightarrowtail X}$.

Cette application est naturelle en X. Elle induit donc une transformation naturelle de $\mathcal{E}(-,1)$ dans $\mathcal{E}(-,\Omega)$.

Par Yonoda, elle est représentée par un morphisme $1 \longrightarrow \Omega$, qui est $\varphi_{0 \rightarrowtail 1}$

Notre conclusion est alors :

$(\Omega, \leq, \wedge, \rightarrow, \mathrm{vr}, \vee$, faux) est une algèbre de heyting.

Rappelons la définition d'<u>une algèbre de Boole.</u>

Un ensemble ordonné $(X,\leq)$ est une algèbre de Boole.

ssi :

$(X, \;)$ est une algèbre de heyting et

$\forall x \in X : x \vee \neg x = 1$ où 1 est le plus grand élément de X,

et où $\neg x \equiv x \rightarrow 0$

Remarquons que $x \vee \neg x = 1$ équivaut à $x = \neg\neg x$

Montrons la CN : $x \vee \neg x = 1 \Rightarrow x = \neg\neg x$

c-à-d : $x \vee \neg x = 1 \Rightarrow \forall a \in X : a \leq x \Leftrightarrow a \wedge \neg x = 0$

c-à-d : $x \vee \neg x = 1 \Rightarrow \forall a \in X : a \wedge \neg x = 0 \Rightarrow a \leq x$

soit donc : $a \in X$ tel que $a \wedge \neg x = 0$

Comme $x \vee \neg x = 1$, prenons son intersection avec a et nous obtenons :

$a = x \wedge a$

c-à-d : $a \leq x$.

Montrons la CS :

cela revient à trouver $\models \Phi \vee \neg \Phi$, où Φ est une formule de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$.

Par hypothèse $\models \neg\neg(\Phi \vee \neg \Phi) \leftrightarrow \Phi \vee \neg \Phi$

Or, $\models \neg\neg(\Phi \vee \neg\Phi) \leftrightarrow \neg(\neg\Phi \wedge \neg\neg\Phi)$ vu le cor. 4.1.

et $\models \neg(\neg\Phi \wedge \neg\neg\Phi)$

Par conséquent, puisque $\models \neg\neg(\Phi \vee \neg\Phi)$, nous avons aussi :

$\models \Phi \vee \neg\Phi$

Par conséquent, si X est un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole.

Définition 4.5.

Un topos est booléen ssi $\neg\neg = id_{\Omega}$

Par conséquent si $\alpha : A \rightarrowtail X$ est dans $\mathcal{P}(X)$, $\neg\neg A = A$, c-à-d :

$A \vee \neg A = X$.

Donc si $\mathcal{E}$ est un topos bodéen, $\Phi \vee \neg\Phi$ est toujours valide, quelque soit la formule Φ de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$. Là alors, nous pouvons admettre le tiers exclu.

Donnons quelques propriétés valables exclusivement dans un topos bodéen.

- $\boxed{\models (\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\neg \Phi \vee \Psi)}$

c-à-d si A,B sont des sous-objets de S

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

c-à-d quelque soit X sous-objet de S

$X \leqslant (\neg A \vee B) \Leftrightarrow X \wedge A \leqslant B$

Montrons la CN :

Nous avons les implications suivantes :

$$X \leq (\neg A \vee B) \Rightarrow X \wedge A \leq (\neg A \vee B) \wedge A$$

$$X \wedge A \leq (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A)$$

$$X \wedge A \leq B \wedge A \leq B$$

$$X \wedge A \leq B$$

Dans un topos quelconque, nous avons donc toujours : $\boxed{\neg A \vee B \leq A \rightarrow B}$

Montrons la CS :

$A \vee \neg A = S$ donc : $X = X \wedge (A \vee \neg A)$ c-à-d :

$X = (X \wedge A) \vee (X \wedge \neg A)$

Or : $X \wedge A \leq B$ et $X \wedge \neg A \leq \neg A$

Donc : $X \leq B \vee \neg A$

- $\boxed{\models ((\Phi \to \Psi) \to \Psi) \leftrightarrow \Phi \vee \Psi}$

c-à-d si A, B sont des sous-objets de X : $(A \to B) \to B = A \vee B$

Dans un topos quelconque, nous avons seulement que :

$$(A \to B) \to B \geqslant A \vee B$$

En particulier $(A \to 0) \to 0 \geqslant A$ puisque $(A \to 0) \to 0 = \neg\neg A$

Vérifions le cas général et montrons que :

$$(A \to B) \to B \geqslant A$$

et : $(A \to B) \to B \geqslant B$

c-à-d : $A \wedge (A \to B) \leqslant B$

et : $B \wedge (A \to B) \leqslant B$

ce qui est immédiat puisque : $A \wedge (A \to B) = A \wedge B$

et : $B \wedge (A \to B) = B$

Montrons maintenant $(A \to B) \to B = A \vee B$ dans un topos booléen.

Or nous avons les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned}(A \to B) \to B &= (\neg A \vee B) \to B && \text{puisque } A \to B = \neg A \vee B\\ &= \neg(\neg A \vee B) \vee B\\ &= (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee B\\ &= (\neg\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)\\ &= \neg\neg A \vee B && \text{car } \neg B \vee B = X\\ &= A \vee B && \text{car } \neg\neg A = A\end{aligned}$$

- $\boxed{\models \Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \neg\Phi \vee \neg\Psi}$

En effet : $\models \neg(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\Phi \to \neg\Psi)$

$\models (\Phi \to \neg\Psi) \leftrightarrow (\neg\Phi \vee \neg\Psi)$

La deuxième loi de Morgan est donc satisfaite aussi.

La suite de ce travail consiste à montrer l'existence des limites à droite dans un topos $\mathcal{E}$. Nous avons déjà déterminé l'objet initial 0.

Nous allons maintenant définir la somme de 2 objets et les coégalisateurs de 2 morphismes.

Nous avons besoin du <u>lemme 4.1.</u>

Les unions disjointes sont les sommes, c-à-d, si $A_i \rightarrowtail A \in \mathcal{P}(A)$, *pour* $i = 1, 2$, $A \in |\mathcal{E}|$ *et si* $A_1 \wedge A_2 = 0$, *alors le diagramme :*

$$A_1 \rightarrowtail A_1 \vee A_2 \leftarrowtail A_2$$

est une somme.

La démonstration du lemme 4.1. est une application du théorème 7.4., elle est faite dans l'annexe 8.

<u>Théorème 4.1.</u>

Soient A_1, $A_2 \in |\mathcal{E}|$ *où* $\mathcal{E}$ *est un topos.*

Alors, la somme $A_1 + A_2$ *existe dans* $\mathcal{E}$.

La démonstration est faite dans l'annexe 9.

Particularisons quelques résultats importants dans $\mathcal{FL}$

Soient t et w, 2 termes de type Ω dans $\mathcal{L}_{\mathcal{FL}}$.

Nous avons défini un nouveau terme, à savoir : $t \vee w$ de type Ω lui aussi.

Comment l'interpréter par rapport à la suite $a_1 \ldots a_n$ telle que

$\sigma(t) \cup \sigma(w) \subseteq \{a_1 \ldots a_n\}$?

$|t \vee w|_{a_1 \ldots a_n}$ sera déterminé grâce au carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 \times A_2^1 \times \ldots \times A_n^1 \arrow[r, "|t v w|_1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "(c)"] & \{0,1,2\} \arrow[d, "w"] \\
A_1^2 \times A_2^2 \times \ldots \times A_n^2 \arrow[r, "|t v w|_2"'] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

où $|t \vee w|_1$ vaut : 1 dès que $|t|_1$ ou $|w|_1$ vaut 1,

2 dès que $|t|_1$ ou $|w|_1$ vaut 2,

0 dès que $|t|_1$ et $|w|_1$ valent 0.

où $|t \vee w|_2$ vaut : 1 dès que $|t|_2$ ou $|w|_2$ vaut 1,

0 dès que $|t|_2$ ou $|w|_2$ vaut 0.

Comme annoncé dans la prop. 4.1., nous retrouvons ce résultat, puisque $|t \vee w|_1$ est le maximum de $|t|_1$ et $|w|_1$ pour l'ordre $\leq_1$ défini sur $\{0,1,2\}$ (où $0 \leq_1 2 \leq_1 1$).
De même, $|t \vee w|_2$ est le maximum de $|t|_2$ et $|w|_2$ pour l'ordre $\leq_2$ défini sur $\{0,1\}$ (où $0 \leq_2 1$).

<u>Définition 4.2.</u>

Soient Φ et ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{FL}}$

$\Phi \vee \Psi$ est une nouvelle formule : $\Phi \vee \psi \equiv \mathrm{val}\ \Phi \vee \mathrm{val}\ \psi = v$

Par conséquent $\Phi \vee \psi$ sera satisfaite dès que l'une des 2 formules le sera.

Donc, si : $\sigma(\Phi) \subseteq \{a_1 \dots a_n\}$ $|\Phi \vee \Psi|^1_{a_1\dots a_n} = |\Phi|^1_{a_1\dots a_n} \cup |\Psi|^1_{a_1\dots a_n}$

Définition 4.3.

Soient $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$, 2 sous-objets de $\mathbb{A}$.

L'union de $\mathbb{A}_1$ et de $\mathbb{A}_2$ sera un nouveau sous-objet de $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_1 \vee \mathbb{A}_2$ défini par le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
A^1_1 \cup A^1_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "©"] & A1 \arrow[d, "\alpha"] \\
A^2_1 \cup A^2_2 \arrow[r, hook] & A2
\end{tikzcd}$$

Déterminons maintenant le morphisme $\vee : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ représentant cette opération suprémum.

Imaginons-nous plutôt ce que serait une représentation idéale :

Soient X et Y 2 sous-objets de $\mathbb{A}$.

Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des énoncés à 1 variable sur $\mathbb{A}$ pouvant être associés à ces 2 sous-objets.

à $X \longrightarrow Y$ correspondra l'énoncé "$\bar{x}$ ou $\bar{y}$" :

sur A 1, il sera satisfait si soit $\bar{x}$ soit $\bar{y}$ l'est, puisque $(X \vee Y)_1 = X1 \cup Y1$

donc : $\vee_1 \{(1,0)(1,1)(1,2)(0,1)(2,1)\} = 1$.

Il sera possible si ni $\bar{x}$ ni $\bar{y}$ n'est vrai sur A1, mais si par contre, après la transformation associée à l'application , soit $\bar{x}$ soit $\bar{y}$ est satisfait sur A2,

donc $\vee_1 \{(2,0)(0,2)(2,2)\} = 2$.

Dans le cas où ni $\bar{x}$ ni $\bar{y}$ n'est satisfait sur A1, même pas après avoir été transformé, l'énoncé $\bar{x}$ ou $\bar{y}$ sera considéré comme faux, c-à-d $\vee_1 \{(0,0)\} = 0$.

Sur A2 , on retrouve le résultat annoncé dans Ens, à savoir :

$V_2\{(1,0)(0,1)(1,1)\} = 1$

$V_2\{(0,0)\} = 0$

Nous pouvons retrouver facilement les 2 applications qui définissent $\vee$ grâce aux 2 tables de vérité suivantes :

	0	2	1
0	0	2	1
2	2	2	1
1	1	1	1

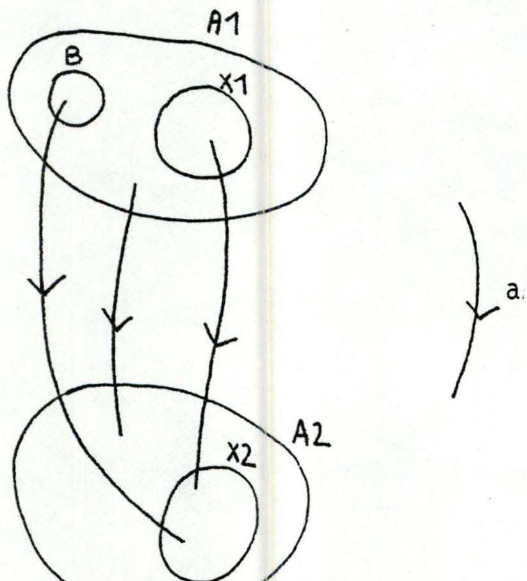
et

	0	1
0	0	1
1	1	1

Remarque.

Dans $\mathcal{A}$, le tiers exclu n'est pas valable; en effet si $\mathbb{X}$ est un sous-objet de $\mathbb{A}$, nous n'obtenons pas nécessairement : $\mathbb{X} \vee \neg\mathbb{X} = \mathbb{A}$.

Prenons par exemple, le sous-objet, défini par le schéma suivant :



où : $B = \{ x \in A1 \mid a(x) \in X2 \}$

nous remarquons que :

$$(\mathbb{X} \vee \neg \mathbb{X})_1 = X1 \cup (A1 \setminus B \cup X1)$$

$$= A1 \setminus B$$

$$(\mathbb{X} \vee \neg \mathbb{X})_2 = A2$$

Nous savons que pour que le tiers exclu soit valide dans un topos, il faut que ce dernier soit boléen, c-à-d que $\neg\neg = id_\Omega$

Nous aurions donc du nous en douter puisque :

$$\neg_1 \neg_1 (0) = 0$$

$$\neg_1 \neg_1 (1) = 1$$

mais : $\neg_1 \neg_1 (2) = 1$

par contre : $\neg_2 \neg_2 = id_{\{0,1\}}$

La valeur de vérité qui fait donc difficulté est le possible, qui ne s'obtient jamais d'une négation.

C'est d'ailleurs cette valeur, intermédiaire entre le vrai et le faux qui différencie $\mathcal{H}$ de Ens x Ens, où là, le tiers exclu est valide comme dans Ens.

Somme de 2 objets $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ de $\mathcal{H}$

Injectons d'abord $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ dans $\Omega^{\mathbb{A}_1} \times \Omega^{\mathbb{A}_2}$ de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
A_1^1 \arrow[r, tail, "i_1"] \arrow[d, "a_1"'] & \mathcal{H}(\mathbb{A}_1,\Omega) \times \mathcal{H}(\mathbb{A}_2,\Omega) \arrow[d, "\omega^{a_1}_{A_1^2} \times \omega^{a_2}_{A_2^2}"] \\
A_1^2 \arrow[r, tail, "i_2"'] & \Omega_2 \times \Omega_2
\end{tikzcd}$$

tel que $\forall\, s \in A_1^1 : i_1(s) = (\{s\}, \varphi_{0 \rightarrowtail \mathbb{A}_2^1})$

où $\{s\}$ et $\varphi_{0 \rightarrowtail \mathbb{A}_2}$ sont singleton et morphisme caractéristique définis dans $\mathcal{H}$.

$\forall t \in A_1^2$: $i_2(t)$ est l'injection dans Ens de A_1^2 dans $\Omega_2^{A_1^2} \times \Omega_2^{A_2^2}$

c-à-d : $i_2(t) = (\{t\}, \varphi_0 \longrightarrow A_2^2)$

au sens ensembliste.

L'injection de $\mathbb{A}_2$ dans $\Omega^{\mathbb{A}_1} \times \Omega^{\mathbb{A}_2}$ se définit de manière similaire.

La somme de $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$, soit $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ est alors l'union de ces 2 sous-objets.

°

° °

5. EXISTENCE DES COEGALISATEURS
THEOREME DE MIKKELSON

Théorème de Mikkelson

Tout topos admet des colimites finies

Nous avons déjà montré l'existence d'un objet initial, 0, et de la somme de 2 objets.

Pour prouver ce théorème, il nous reste à démontrer l'existence des coégalisateurs, en vertu du théorème suivant :

"Si 1 catégorie $\mathcal{C}$ a 1 objet initial, des coégalisateurs de toutes les paires de flèches et les sommes de toutes les paires d'objets, alors toutes les limites à droite finies existent dans $\mathcal{C}$ ".

(ref. : "Categories for the working mathematician, Mac Lane").

Rappelons la preuve dans Ens.

Soient $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, 2 applications, alors le coégalisateur de f et g s'obtient ainsi :

1) on forme une relation R sur B en posant :

$$(b_1,b_2) \in R \Longleftrightarrow \exists\, a\ (f(a) = b_1 \ \wedge\ g(a) = b_2)$$

c-à-d : $R = \mathrm{Im}\ \langle f,g\rangle$

2) On considère la plus petite relation d'équivalence R_0 sur B, telle que $R \subseteq R_0$.

3) On forme le quotient B/R_0. Le coégalisateur de f et g est le morphisme canonique $B \longrightarrow B/R_0$.

Pour que cette preuve marche dans un topos, il faudrait pouvoir effectuer les étapes 2) et 3).

Nous allons prouver que ceci est possible pour un topos élémentaire quelconque.

Proposition 5.1.

Comment définirions-nous R_0 dans Ens ?

R_0 serait l'intersection de toutes les relations d'équivalence R' sur B, contenant R_0.

C-à-d : $(x,y) \in R_0 \Longleftrightarrow$ pour toute relation R' :

si R' est une relation d'équivalence sur B, alors

$(x,y) \in R'$.

Ceci nous permet d'écrire correctement cette relation R_0 dans $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$:

Pour toute relation $R \rightarrowtail B \times B$, il existe une plus petite relation d'équivalence R_0 sur B contenant R. Plus précisément :

$$R_0 = |\forall_{R'} \ (\Phi \rightarrow (x,y) \in R')|_{x,y}$$

où : $x,y \in V_B$, $R' \in V_{\Omega^{B\times B}}$

et : $\Phi \equiv R' \in \text{équiv.}\cdot B \wedge \forall_a \forall_b \ ((a,b) \in R \rightarrow (a,b) \in R')$

où : $a,b \in V_B$, $a \neq b$.

La démonstration de cette proposition comprend 3 parties; on montre que :

i) R_0 est une relation d'équivalence sur B.

ii) $R \subseteq R_0$

iii) si $R \subseteq K$ et K est une relation d'équivalence sur B, alors :

$R_0 \subseteq K$.

Il reste à s'assurer qu'on peut effectuer la construction du point 3) dans un topos.

dans Ens, $B/R_0 = \mathrm{Im}\,(B \longrightarrow \mathcal{P}(B))$

telle que à b, cette application fait correspondre :

$\{ b' \mid (b',b) \in R_0 \}$

Dans un topos, on va donc poser :

$$B/R_0 = \mathrm{Im}\,(B \xrightarrow[\ulcorner \varphi_{R_0} \urcorner]{} \Omega^B)$$

Etant donné le corollaire 7.6. Ch.I, on a un épimorphisme canonique $B \xrightarrow{e} B/R_0$ et on doit prouver que $e = \mathrm{coeg}\,(f,g)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] & B/R_0 \end{tikzcd}$$

cela forme le contenu du corollaire 5.3.

Considérons d'abord la notion de noyau-paire d'un morphisme.

<u>Définition 5.1.</u>

Un noyau-paire $B \xrightarrow{f} C$ *est un couple de morphismes* $N \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$, *tels que le diagramme suivant soit un produit fibré.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Remarquons que dans Ens :

$N = \{ (b_1, b_2) \in B \times B \mid f(b_1) = f(b_2) \}$

$\beta = \pi_{1|N}$

$\alpha = \pi_{2|N}$

où π_1, π_2 sont les 2 projections canoniques de B x B sur B.

c-à-d que $N = eg\ (f \circ \pi_1, f \circ \pi_2)$,

ce résultat se généralise dans $\mathcal{E}$ et nous obtenons que :

le noyau-paire de f est le couple :

$$N \rightarrowtail B \times B \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}$$

où $N = |f(b_1) = f(b_2)|_{b_1, b_2}$

c-à-d $N = eg(f \circ \pi_1; f \circ \pi_2)$

Pour le vrai, il suffit de remarquer que le carré suivant est un produit fibré.

Notons : $eg \equiv eg(f \circ \pi_1, f \circ \pi_2)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, dashed] \arrow[drrr, bend left, "t"] \arrow[dddr, bend right, "s"'] & & & \\
& N \arrow[r, tail, "eg"] \arrow[d, tail, "eg"] & B \times B \arrow[r, "\pi_1"] & B \arrow[dd, "f"] \\
& B \times B \arrow[d, "\pi_2"] & & \\
& B \arrow[rr, "f"] & & C
\end{tikzcd}$$

Le carré est par construction commutatif.

Soient s et t 2 morphismes tels que $f \circ s = f \circ t$.

C-à-d : $f \circ \pi_1 \circ \langle s,t \rangle = f \circ \pi_2 \circ \langle s,t \rangle$

Par conséquent $\langle s,t \rangle$ se factorise à travers eg de manière unique, d'où s et t se factorisent aussi de manière unique à travers $\pi_2 \circ eg$ et $\pi_1 \circ eg$ respectivement.

Par conséquent, on obtient facilement la preuve de la proposition suivante :

Proposition 5.2.

Le noyau-paire $N \rightarrowtail B \times B \underset{\pi_1}{\overset{\pi_2}{\rightrightarrows}} B$ *d'un morphisme* $B \xrightarrow{f} C$ *est une relation d'équivalence.*

Rappelons-nous en effet que : $\models (x, y) \in N \leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Proposition 5.3.

Soit $R \rightarrowtail B \times B$ *une relation d'équivalence sur B.*

Alors $R \rightarrowtail B \times B \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} B$ *est le noyau-paire du morphisme* $B \xrightarrow[\ulcorner \varphi_R \urcorner]{} \Omega^B$

La démonstration se trouve dans l'annexe 10.

Corollaire 5.1.

Soit $R \rightarrowtail B \times B$ *une relation d'équivalence sur B.*

Alors $R \rightarrowtail B \times B \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} B$ *est le noyau-paire de l'épimorphisme canonique*

$B \xrightarrow{e} B/R'$ *où* $B/R = Im \ulcorner \varphi_R \urcorner$

Rappelons la décomposition du morphisme $\ulcorner \varphi_R \urcorner$, définie de cette façon, par application du théorème 7.3:

$$\begin{tikzcd} & B/R \arrow[dr, rightarrowtail, "j"] & \\ B \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "\ulcorner \varphi_R \urcorner"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "©"] & & \Omega^B \end{tikzcd}$$

Par la proposition 5.3., le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \times B \arrow[r, "\pi_1"] & B \arrow[d, "e"] \\
B \times B \arrow[d, "\pi_2"] & & B/_R \arrow[d, tail, "j"] \\
B \arrow[r, "e"] & B/_R \arrow[r, tail, "j"] & \Omega^B
\end{tikzcd}$$

et par conséquent, celui-ci est aussi un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \times B \arrow[r, "\pi_1"] & B \arrow[dd, "e"] \\
B \times B \arrow[d, "\pi_2"] & & \\
B \arrow[rr, "e"] & & B/_R
\end{tikzcd}$$

ce qui achève la preuve de ce corollaire.

Proposition 5.4.

Soit $N \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$ *le noyau-paire d'un épimorphisme* $B \xrightarrow{e} C$. *Alors :*

$e = coeg\ (\alpha,\beta)$.

La démonstration est laissée de côté étant donné qu'elle se fait de la même façon que celle réalisée pour démontrer le lemme 4.1. du chapitre II.

Une conséquence immédiate de cette proposition et du corollaire 5.1. est le corollaire 5.2.

Si $R \rightarrowtail B \times B$ *est une relation d'équivalence sur* B, *alors* $B \xrightarrow{e} B/R$ *est le coégalisateur de* $R \rightarrowtail B \times B \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} B$.

Et enfin le corollaire tant attendu, objet de ce paragraphe.

Corollaire 5.3.

Soient $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, $R = |\exists_a\ (f(a) = b \wedge g(a) = b_1)|_{b,b_1}$

et R_0 *la plus petite relation d'équivalence sur* B *contenant* R.

Alors :

$$\mathrm{coeg}\ (f,g) = B \xrightarrow{e} B/R_0$$

La démonstration se trouve dans l'annexe 11.

Définissons maintenant le coégalisateur de 2 morphismes de $\mathcal{A}$.

Soient σ et τ 2 carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A1 \arrow[r, shift left, "\sigma_1"] \arrow[r, shift right, "\tau_1"'] \arrow[d, "a"'] & B1 \arrow[d, "b"] \\ A2 \arrow[r, shift left, "\sigma_2"] \arrow[r, shift right, "\tau_2"'] & B2 \end{tikzcd}$$

On forme une relation $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{B}$ en posant :

$$R_i = \{ (b_1, b_2) \in Bi \times Bi \mid \exists s \in Ai : \sigma_i(s) = b_1 \text{ et } \tau_i(s) = b_2 \}$$

pour $i = 1,2$.

On considère la plus petite relation d'équivalence $\mathbb{R}_0$ sur $\mathbb{B}$ telle que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_0$.

C-à-d : $\mathbb{R}_0$ est une relation sur $\mathbb{B}$ telle que R_0^i est dans Ens, la plus petite relation d'équivalence sur Bi telle que $Ri \subseteq R_0^i$, $i = 1,2$.

On forme alors le quotient $\mathbb{B}/\mathbb{R}_0$: c'est un sous-objet de $\mathbb{B}$ tel que :

$(\mathbb{B}/\mathbb{R}_0)_i = Bi/R_0^i$ dans Ens.

Le coégalisateur de f et g sera le morphisme canonique $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\mathbb{R}_0$,

c-à-d le carré :

$$\begin{tikzcd} B1 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & (B/_{R_0})^1 \arrow[d, "\hat{b}"] \\ B2 \arrow[r] & (B/_{R_0})^2 \end{tikzcd}$$

où $Bi \xrightarrow{\hat{b}} (\mathbb{B}/\mathbb{R}_0)_i$ est la projection de Bi sur son quotient.

∘

∘ ∘

En guise de conclusion, j'aimerais faire quelques remarques concernant les prolongements possibles de mon mémoire, auxquels je désirerais m'attarder prochainement :

- l'influence de la négation, puisqu'elle joue un rôle important dans la validité du tiers exclu.
  Je me suis rendue compte que dans $\mathfrak{J}1$, la valeur de vérité "possible" faisait souvent difficulté et qu'un énoncé "non Φ" ne prend jamais la valeur possible. Ceci pourrait faire le lien avec la propriété suivante : "si dans un théorème de la logique classique, on remplace chaque variable propositionnelle Φ par sa négation "non Φ", on obtient un théorème de la logique intuitioniste".

- les topologies.
  Il faudrait étudier le lien entre la définition que Scklomiuk en donne et les topologies de Grotkendieck.

°
° °

ANNEXES

ANNEXE 1

Démonstration de la proposition 4.2.

Calculons $|(s)(t/a)|_{s'}$

$(s) = (x_1 \dots a \dots x_n)$. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer pour la démonstration que $(s) = (x_1 \dots x_n\ a)$.

Par conséquent : $(s)\ (t/a) \quad = (x_1 \dots x_n, t) \underset{\text{not}}{=} (\vec{x}, t)$

D'où : $|(s)(t/a)|_{s'} = \langle |\vec{x}|_{s'}, |t|_{s'} \rangle = \langle \pi, |t|_{s'} \rangle$

où $\pi : X^{s'} \longrightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ est la projection canonique et où $\tau(x_i) = X_i$

Supposons que w soit une variable : $w' = w(t/a) = t$ si $a = w$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = w$ si $a \neq w$

α) $a = w$

donc : $|w'|_{s'} = |t|_{s'}$

Montrons que $|w|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'} = |t|_{s'}$

Or $|w|_s \circ |(s)\ (t/a)|_{s'} = |a|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle$

Cependant $|a|_s$ est la projection de X^s sur A si $\tau(a) = A$

Par conséquent $|a|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle = |t|_{s'}$

Schématisons cette explication :

$$\begin{tikzcd}
X^S = X_1 \times \dots \times X_n \times A \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "|a|_S"'] & & \\
X_1 \times \dots \times X_n & & X^{S'} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[ull, "\langle \pi, |t|_{S'} \rangle"'] \arrow[dll, "|t|_{S'}"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

β) $a \neq w$

Donc : $|w'|_{s'} = |w|_{s'} = X^{s'} \longrightarrow X_i$, qui est une projection.

Et : $|w|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'} = |w|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle$

Comme $\sigma(w) \subseteq s$ et que $w \neq a$, w est un des x_i, d'où $|w|_s$ est $X^s \xrightarrow{\pi} X_i$

Par conséquent : $|w|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle$: $X^{s'} \longrightarrow X_i$

est aussi une projection.

C-à-d : $|w|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle = |w|_{s'}$

Supposons que $w = f\,(v)$ où la proposition est vraie pour v :

$$
\begin{aligned}
|w'|_{s'} &= |f\ (v(t/a))|_{s'} \\
&= f \circ |v\ (t/a)|_{s'} \\
&= f \circ |v|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'} \\
&= |f(v)|_s \circ |(s)\ (t/a)|_{s'} \\
&= |w|_s \circ |(s)\ (t/a)|_{s'}
\end{aligned}
$$

Supposons que $w = (w_1 \ldots w_n)$ où la proposition est vraie pour les termes $w_1 \ldots w_n$:

$$
\begin{aligned}
|(w_1 \ldots w_n)'|_{s'} &= |(w_1' \ldots w_n')|_{s'} \\
&= \langle |w_1'|_{s'}, \ldots, |w_n'|_{s'} \rangle \\
&= \langle |w_1|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'}, \ldots, |w_n|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'} \rangle \\
&= \langle |w_1|_s, \ldots, |w_n|_s \rangle \circ |(s)(t/a)|_{s'} \\
&= |(w_1 \ldots w_n)|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'}
\end{aligned}
$$

Supposons que w soit une constante : $1 \xrightarrow{b} B$

$w' = w\,(t/a) = b = w$

$|w'|_{s'} = |b|_{s'} = X^{s'} \longrightarrow 1 \xrightarrow{b} B$

Tandis que $|w|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'} = |w|_s \circ \langle \pi, |t|_{s'} \rangle$

c-à-d le morphisme suivant :

$$X^{s'} \xrightarrow{\langle \pi, |t|_{s'} \rangle} X^s \longrightarrow 1 \xrightarrow{b} B$$

c-à-d : $X^{s'} \longrightarrow 1 \xrightarrow{b} B$

Par conséquent : $|b|_{s'} = |b|_s \circ |(s)(t/a)|_{s'}$

°

° °

ANNEXE 2

Démonstration du corollaire 5.4.'

Supposons $\bigcup_{i=1}^{n} (\sigma(t_i) \cup \sigma(w_i)) = a_1 \ldots a_n \underset{not}{=} \vec{a}$.

Alors $\models (t_1 \ldots t_n) = (w_1 \ldots w_n) \leftrightarrow (t_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge t_n = w_n)$

ssi $eg\,(|(t_1 \ldots t_n)|_{\vec{a}}\,,\, |(w_1 \ldots w_n)|_{\vec{a}})$

$= eg\,(|t_1|_{\vec{a}}\,,\, |w_1|_{\vec{a}}) \wedge \ldots \wedge eg\,(|t_n|_{\vec{a}}\,,\, |w_n|_{\vec{a}})$

ssi $eg\,(\langle |t_1|_{\vec{a}} \ldots |t_n|_{\vec{a}}\rangle, \langle |w_1|_{\vec{a}} \ldots |w_n|_{\vec{a}}\rangle)$

$= eg\,(|t_1|_{\vec{a}}\,,\, |w_1|_{\vec{a}}) \wedge \ldots \wedge eg\,(|t_n|_{\vec{a}}\,,\, |w_n|_{\vec{a}})$

α) supposons $n = 2$

$eg\,(\langle |t_1|, |t_2|\rangle, \langle |w_1|, |w_2|\rangle \overset{?}{=} eg\,(|t_1|, |w_1|) \wedge eg\,(|t_2|, |w_2|)$

Prenons les notations suivantes : $k_1 \equiv eg\,(|t_1|, |w_1|)$

$k_2 \equiv eg\,(|t_2|, |w_2|)$

$k \equiv k_1 \wedge k_2$

- Vérifions que k égalise $\langle |t_1|, |t_2|\rangle$ et $\langle |w_1|, |w_2|\rangle$

or $k \leq k_i$ d'où : $|t_i| \circ k = |w_i| \circ k$, $i = 1,2$

Donc $\langle |t_1|, |t_2|\rangle \circ k = \langle |w_1|, |w_2|\rangle \circ k$

- Soit t qui égalise $\langle |t_1|, |t_2|\rangle$ et $\langle |w_1|, |w_2|\rangle$. Montrons que t se factorise à travers k.

$\langle |t_1|, |t_2|\rangle \circ t = \langle |w_1|, |w_2|\rangle \circ t$

d'où t se factorise à travers k_1 et k_2

Par conséquent, t se factorise à travers k.

β) Supposons que le corollaire est démontré pour n = m,

c-à-d : $\models (t_1 \dots t_m) = (w_1 \dots w_m) \leftrightarrow (t_1 = w_1 \wedge \quad \dots \wedge t_m = w_m)$.

γ) Démontrons le corollaire pour n = m + 1

Or par le corollaire 5.4. $\models (t_1 \dots t_{m+1}) = ((t_1 \dots t_m), t_{m+1})$ et de même pour w. Par conséquent :

$\models (t_1 \dots t_{m+1}) = (w_1 \dots w_{m+1}) \leftrightarrow ((t_1 \dots t_m) = (w_1 \dots w_m) \wedge t_{m+1} = w_{m+1})$

en se servant de α).

En se servant maintenant de β), le corollaire est démontré.

° ° °

ANNEXE 3

Démonstration de la proposition 6.8.

$$(\forall_a \Phi)(t/b) \equiv ((\mathrm{val}\,\Phi)_a = v_a)(t/b)$$

$$\equiv (\mathrm{val}\,\Phi)_a\,(t/b) = v_a$$

$$\forall_a(\Phi\,(t/b)) \equiv \mathrm{val}\,(\Phi\,(t/b))_a = v_a$$

Donc il suffit de prouver : $\models (\mathrm{val}\,\Phi)_a\,(t/b) = \mathrm{val}\,(\Phi\,(t/b)_a$

Or $\models (\mathrm{val}\,\Phi)_a\,(t/b) = (\mathrm{val}\,\Phi)\,(t/b)_a$

Supposons $a_1 \ldots b \ldots a_n$ est l'ordre naturel de $\sigma(\Phi)$.

Sans prendre de généralité, nous pouvons le prendre $a_1 \ldots a_n b$ pour la démonstration et nous le notons $\vec{a}\,b$. $\vec{a}'$ désignera la suite $\vec{a} \setminus \{a\}$

$$\mathrm{val}\,\Phi = \varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}}(\vec{a},b)$$

$$(\mathrm{val}\,\Phi)_a = \overline{\left|\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}}(\vec{a},b)\right|_{a\,\vec{a}'\,b}}\,(\vec{a}',b)$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}} \circ |(\vec{a},b)|_{a\,\vec{a}'\,b}}\,(\vec{a}',b)$$

$$(\mathrm{val}\,\Phi)_a(t/b) = \overline{\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}} \circ |(\vec{a},b)|_{a\,\vec{a}'b}}\,(\vec{a}',t)$$

$$(\mathrm{val}\,\Phi)\,(t/b) = \varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}}(\vec{a},t)$$

$$(\mathrm{val}\,\Phi)\,(t/b)_a = \overline{\left|\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}}|(\vec{a},t)\right|_{\vec{a}\,x}}\,(\vec{x})$$

où x est la suite des variables $\vec{a} \cup \sigma(t) \setminus \{a\}$

$$(\mathrm{val}\,\Phi)\,(t/b)_a = \overline{\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}} \circ |(\vec{a},t)|_{a\,\vec{x}}}\,(\vec{x})$$

$$|(\mathrm{val}\,\Phi)_a\,(t/b)|_{\vec{x}} = \overline{\varphi_{|\Phi|_{\vec{a}\,b}} \circ |(\vec{a},b)|_{a\,\vec{a}'\,b}} \circ |(\vec{a}',t)|_{\vec{x}}$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi|_{a\,\vec{a}'\,b}}} \circ |(a',t)|_{\vec{x}}$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi| a\vec{a}'b} \circ id_A \times |(\vec{a}',t)|_{\vec{x}}}$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi| a\vec{a}'b} \circ |(a,\vec{a}',t)|_{a,\vec{x}}}$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi(t/b)|_{a,\vec{x}}}}$$

$$|(\mathrm{val}\ \Phi)(t/b)_a|_{\vec{x}} = \overline{\varphi_{|\Phi| \vec{a}b} \circ |(\vec{a},t)|_{a\vec{x}}}$$

$$= \overline{\varphi_{|\Phi(t/b)|_{a,\vec{x}}}}$$

Il suffit donc de prouver : $\models (\mathrm{val}\Phi)\ (t/b)_a = \mathrm{val}\ (\Phi(t/b))_a$

Ceci résulte du corollaire 6.2., et du fait que :

$$\models (\mathrm{val}\ \Phi)\ (t/b) = \mathrm{val}\ (\Phi(t/b))$$

: car $(\mathrm{val}\ \Phi)(t/b) = \varphi_{|\Phi| \vec{a},b}(\vec{a},t)$

$$|(\mathrm{val}\ \Phi)(t/b)|_{\vec{x}} = \varphi_{|\Phi| \vec{a}\, b} \circ |(\vec{a},t)|_{\vec{x}} = \varphi_{|\Phi(t/b)|_{\vec{x}}}$$

$$\mathrm{val}\ (\Phi(t/b)) = \varphi_{|\Phi\ (t/b)|_{\vec{x}}}(\vec{x})$$

$$|\mathrm{val}\ (\Phi(t/b))|_{\vec{x}} = \varphi_{|\Phi(t/b)|_{\vec{x}}}$$

ANNEXE 4

Interprétation dans Ens du terme V_a t où $a \in V_A$

où t est un terme de type Ω

$V_a\, t = \mathrm{val}\,(\forall_x((\forall_a t \leq x) \to x = v))$

où $x \in V_\Omega$

$x \notin \sigma(t) \cup \{a\}$

soit $x_1 \ldots x_n = \sigma(t) \setminus \{a\}$

x_i de type X_i

Par conséquent : $|V_a\, t|_{x_1 \ldots x_n} = |\mathrm{val}\, \forall_x((\forall_a t \leq x) \to x = v)|_{x_1 \ldots x_n}$

c-à-d : $|V_a t|_{x_1 \ldots x_n} = \varphi|\forall_x((\forall_a\, t \leq x) \to x = v))|_{x_1 \ldots x_n}$

Or : $|\forall_a\, t \leq x|_{xx_1 \ldots x_n} = \{(\tau, t_1 \ldots t_n) \in \Omega \times X_1 \times \ldots \times X_n \mid$

$\forall s \in A : (s, \tau, t_1 \ldots t_n) \in$

$|t \leq x|_{axx_1 \ldots x_n}\}$

Donc : $|\forall_a\, t \leq x|_{xx_1 \ldots x_n} = \{(o, t_1 \ldots t_n) \in \Omega \times X_1 \ldots \times X_n \mid$

$\forall s \in A : |t|_{axx_1 \ldots x_n}(s, o, t_1 \ldots t_n) = o$

$\cup \{1\} \times X_1 \times \ldots \times X_n\}$

Par conséquent : $|\forall_a t \leq x \to x = v|_{xx_1 \ldots x_n}$

$= \{1\} \times X_1 \times \ldots \times X_n \cup \{(o, t_1 \ldots t_n) \in \Omega \times X_1 \times \ldots \times X_n \mid$

$\exists s \in A : |t|_{axx_1 \ldots x_n}(s, o, t_1 \ldots t_n) = 1\}$

$= \{1\} \times X_1 \times \ldots \times X_n \cup \{(o, t_1 \ldots t_n) \in \Omega \times X_1 \times \ldots \times X_n \mid \exists s \in A \mid |t|_{a, x_1 \ldots x_n}(s, t_1 \ldots t_n) = 1\}$

Par conséquent :

$|\forall x((\forall_a t \leq x) \to x = v)|_{xx_1 \ldots x_n}$

$= \{(t_1 \ldots t_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n \mid \exists s \in A : |t|_{ax_1 \ldots x_n}(s, t_1 \ldots t_n) = 1\}$

En conclusion :

$$\begin{aligned}|V_a t|_{x_1 \dots x_n} \quad X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow \Omega\text{-}\{o,1\}\\ (t_1 \dots t_n) &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \exists s \in A : |t|_{a x_1 \dots x_n}(s t_1 \dots t_n) = 1 \\ o \text{ sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

°
° °

ANNEXE 5

Démonstration du corollaire 7.1.

i) Montrons donc $\models_{\tau(\sigma(t)\cup\sigma(w))-\{A\}} \quad V_a\, t \leq w$

Soit : $x_1 \ldots x_n = (\sigma(t) - \{a\}) \cup \sigma(w)$

$= (\sigma(t) \cup \sigma(w)) - \{a\}$

Montrons donc : $\models_{x_1 \ldots x_{\cancel{n}\,k}} \quad V_a\, t \leq w$

c-à-d : $\models V_a\, t \leq w$

c-à-d : $\models \forall_a\, (t \leq w)$ vu la proposition 7.2, car $a \notin \sigma(w)$

c-à-d : $\models_{a x_1 \ldots x_n} \quad t \leq w$ vu le corollaire 6.8.

On a par hypothèse : $\models_{U \cup \{A\}} \quad t \leq w$

donc cqfd.

ii) Montrons : $\models V_a\, t \leq V_a\, w$, c-à-d $\models \forall_a\, (t \leq V_a\, w)$

par la proposition 7.2.

Vu le corollaire 6.8., montrons : $\models_{a x_1 \ldots x_n} \quad t \leq V_a\, w$, où

$\{x_1 \ldots x_n\} = \sigma(t \leq V_a\, w) - \{a\}$

Montrons donc : $\models_{a x_1 \ldots x_n} \quad t = \nu \rightarrow V_a\, w = \nu$

c-à-d : $\models_{a x_1 \ldots x_n} \quad t = \nu \longrightarrow \forall_x\, ((\forall_a\, w \leq x) \rightarrow x = \nu)$

c-à-d par la proposition 6.10 : $\models_{x a x_1 \ldots x_n} \quad t = \nu \rightarrow ((\forall_a\, w \leq x) \rightarrow x = \nu)$

a

c-ã-d : $\models_{x a x_1 \ldots x_n} (t = v) \wedge (\forall_a \; w \leq x) \rightarrow (x = v)$

Or : $\models_{\mathcal{U} \cup \{A\}} t \leq w$ c-ã-d $\models_{\mathcal{U} \cup \{A\}} t = v \rightarrow w = v$

Soit alors $a, \vec{x}$ une suite de variables et telle que $\tau(a, \vec{x}) = \mathcal{U} \cup \{A\}$.

Nous obtenons donc :

$$|t = v|_{a \vec{x}} \leq |w = v|_{a \cdot \vec{x}}$$

et donc : $|t = v|_{xa\vec{x}} \wedge |\forall_a \; w \leq x|_{xa\vec{x}} \leq |w = v|_{xa\vec{x}} \wedge |\forall_a \; w \leq x|_{xa\vec{x}}$

Montrons alors : $|w = v|_{xa\vec{x}} \wedge |\forall_a \; w \leq x|_{xa\vec{x}} \leq |x = v|_{xa\vec{x}}$

ou encore : $\models_{x a \vec{x}} w = v \wedge (\forall_a \; w \leq x) \rightarrow x = v$

c-ã-d : $\models_{x a \vec{x}} \forall_{\{a\}} w \leq x \rightarrow (w = v \rightarrow x = v)$

c-ã-d : $\models_{x a \vec{x}} \forall_a \; w \leq x \rightarrow (w \leq x)$.

ce qui est vrai par la proposition 6.12.

ANNEXE 6

Lemme 1 :

Soit le carré :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & B \arrow[d, tail, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est un produit fibré

$$\Updownarrow$$

$\models g(a) = h(b) \leftrightarrow \exists_{a'} \, (j(a') = a \wedge f(a') = b)$

où : $a \in V_A$, $b \in V_B$, $a' \in V_{A'}$ et $a \neq b \neq a_1 \neq a$

Démonstration du lemme 1.

Nous avons la suite d'équivalences suivantes :

$$\models g(a) = h(b) \leftrightarrow \exists_{a'} \, (j(a') = a \wedge f(a') = b)$$

$$\Leftrightarrow \ |g(a) = h(b)|_{ab} = |\exists_{a'} \, (j(a_1') = a \wedge f(a') = b|_{ab}$$

$$\Leftrightarrow \ eg\,(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2) = \exists_{-A'} (\,|j(a') = a|_{a'ab} \wedge |f(a') = b|_{a'ab}$$

$$\Leftrightarrow \ eg\,(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2) = \exists_{-A'} \, (eg\,(j \circ P_1, P_2) \wedge eg(f \circ P_1, P_3)$$

$$\Leftrightarrow \ eg\,(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2) = \mathrm{Im}\ (\rightarrowtail_{\substack{eg(j \circ P_1, P_2) \\ \wedge \\ eg(j \circ P_1, P_3)}} A' \times A \times B \xrightarrow{\tilde{\pi}} A \times B)$$

où :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & A \\ A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ & B \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & A' \\ A' \times A \times B \arrow[ur, "P_1"] \arrow[r, "P_2"] \arrow[dr, "P_3"'] & A \\ & B \end{tikzcd}$$

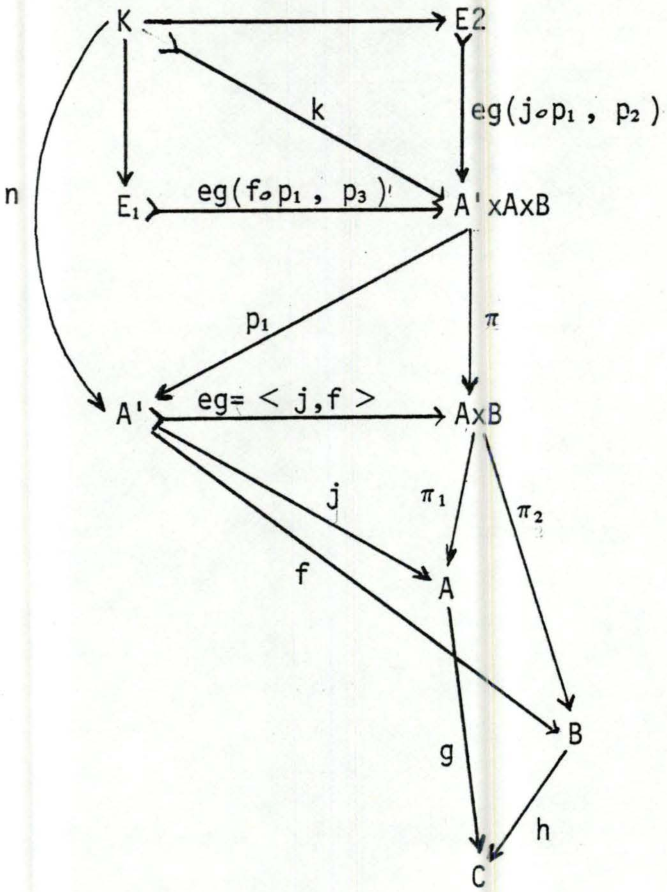
Prenons les notations suivantes :

$$eg \equiv eg\,(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2)$$

$$k \equiv eg\,(j \circ P_1, P_2) \wedge eg\,(f \circ P_1, P_3)$$

Démontrons tout d'abord la condition nécessaire du lemme :

Construisons le diagramme que voici :



Faisons quelques constatations :

a) eg $(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2) = \langle j,f \rangle$

- $\langle j,f \rangle$ égalise $g \circ \pi_1$ et $h \circ \pi_2$, puisque $g \circ j = h \quad f$ par hypothèse
- soit e qui égalise $g \circ \pi_1$ et $h \quad \pi_2$,

  donc : $g \circ (\pi_1 \circ e) = h \circ (\pi_2 \circ e)$

  puisque le carré est un produit fibré,

  $\exists !$ m tel que $\pi_1 \circ e = j \circ m$ et $\pi_2 \circ e = f \circ m$

  donc $e = \langle j \circ m, f \circ m \rangle = \langle j,f \rangle \circ m$

  donc e se factorise à travers $\langle j,f \rangle$

b) $\pi \circ k$ égalise $g \circ \pi_1$ et $h \circ \pi_2$

en effet : $g \circ \pi_1 \circ \pi \circ k = g \circ P_2 \circ k$

$= g \circ j \circ P_1 \circ k$ car k égalise $j \circ P_1$ et P_2

$= h \circ f \circ P_1 \circ k$ par hypothèse

$= h \circ P_3 \circ k$ car k égalise P_3 et $f \circ P_1$

$= h \circ \pi_2 \circ \pi \circ k$ car $P_3 = \pi_2 \circ k$

donc $\pi \circ k$ se factorise à travers eg $(g \circ \pi_1, h \circ \pi_2)$,

c-à-d : $\exists !\, n$ tel que $\pi \circ k = eg \circ n$

$= \langle j,f \rangle \circ n$

pour que eg soit Im $(\pi \circ k)$, il nous reste à prouver que n est un épimorphisme.

a) $k = E_1 \wedge E_2$

$= |j(a') = a|_{a',a,b} \wedge |f(a') = b|_{a',a,b}$

$= |j(a') = a \wedge f(a') = b|_{a',a,b}$

Par conséquent :

$\models (a',a,b) \in k \leftrightarrow j(a') = a \wedge f(a') = b$

b) $\pi \circ k = \langle j,f \rangle \circ P_1 \circ k$

car : $\pi_1 \circ \pi \circ k = \pi_1 \circ \langle j,f \rangle \circ P_1 \circ k$

$= j \circ P_1 \circ k$

$= P_2 \circ k$

et : $\pi_2 \circ \pi \circ k = \pi_2 \circ \langle j,f \rangle \circ P_1 \circ k$

$= f \circ P_1 \circ k$

$= P_3 \circ k$ **donc : $n = P_1 \circ k$**

c) k = Imk

Par conséquent : $\models (a',a,b) \in K \Leftrightarrow \exists_x\, (k(x) = (a',a,b))$

vu le corollaire 7.5.

Donc : $\models (a',j(a'),f(a')) \in K \Leftrightarrow \exists_x\, (k(x) = (a',j(a'),f(a')))$

Or : $\models (a',j(a'),f(a')) \in K$ vu a)

Donc : $\models \exists_x\ (k(x) = (a',j(a'),f(a')))$

Donc : $\models \exists_x (P_1 \circ k(x) = a')$ en se servant de la proposition 7.3.

Donc : $\models \forall_{a'} \exists_x (h(x) = a')$ vu le corollaire 6.8.

Donc h est un épimorphisme, cqfd.

La démonstration de la condition suffisante suivant un même type de raisonnement n'a pas été reprise dans la rédaction du mémoire.

Lemme 2

$$\models (\forall_a\ t(a) = w(a)) \leftrightarrow t = w$$

où a est une notation pour $a_1 \ldots a_n$

telles que $a_i \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$ et $\tau(a_i) = A_i$

et A est une notation pour $A_1 \times \ldots \times A_n$.

t et w sont deux termes de type Ω^A.

Démonstration du lemme 2.

Montrons d'abord : $\boxed{\models (\forall_a\ t(a) = w(a)) \rightarrow t = w}$

c-à-d : $\models \forall_a\ ev(a,t) = ev(a,w)\ ) \rightarrow t = w$

c-à-d : $\models \{a|\ ev(a,t) = ev(a,w) = \mho_a \rightarrow t = w$

Posons $x = \sigma(t) \cup \sigma(w)$

Nous devons alors montrer :

$eg(|\{a\ |ev(a,b) = ev(a,w)\}|_{a,x}, |\mho_a|_{a,x} \leq eg(|t|_{a,x}\ |w|_{a,x})$

Or • $\mho_a : 1 \longrightarrow \Omega^A \equiv \ulcorner|\mho|_a\urcorner$

et : $|\mho_a|_{a,x} : A \times X \longrightarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner|\mho|_a\urcorner} \Omega^A$

• $|\{a|ev(a,t) = ev(a,w)\}|_{a,x}$

$= |val\ (ev(a,t) = ev(a,w)_a|_{a,x}$

$= |\ulcorner|val\ (ev(a,t) = ev(a,w)|_{a,x}\urcorner (x)|_{a,x}$

$$= \ulcorner | \overline{\varphi_{|\,ev(a,t)=ev(a,w)|}}_{a,x} \urcorner (x) |_{a,x}$$

$$= \ulcorner \overline{\varphi_{|\,ev(a,t)=ev(a,w)|}}_{a,x} \urcorner \circ \pi_2$$

Notons $k \equiv eg(|\{a|\,ev(a,t)=ev(a,w)\}|_{a,x}, |v_a|_{a,x})$

et $\ulcorner\varphi\urcorner \equiv \ulcorner \overline{\varphi_{|\,ev(a,t)=ev(a,w)|}}_{a,x} \urcorner$

Donc, nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, tail] & \\
A \times X \arrow[d, "\pi_2"] & \\
X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\ulcorner\varphi\urcorner"'] & 1 \arrow[dl, "\ulcorner|v|\urcorner"] \\
\Omega &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent :

$$\begin{tikzcd}
& A \times K \arrow[d, tail, "A \times (\pi_2 \circ\ )"] & \\
& A \times X \arrow[dl, shift right, "A \times \ulcorner\varphi\urcorner"'] \arrow[dl, shift left, "A \times \ulcorner v_a \urcorner \circ c"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r] & 1 \arrow[dl, "v"] \\
A \times \arrow[r] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, $A \times (\pi_2 \circ k)$ égalise φ et $v_{A \times X}$, c-à-d

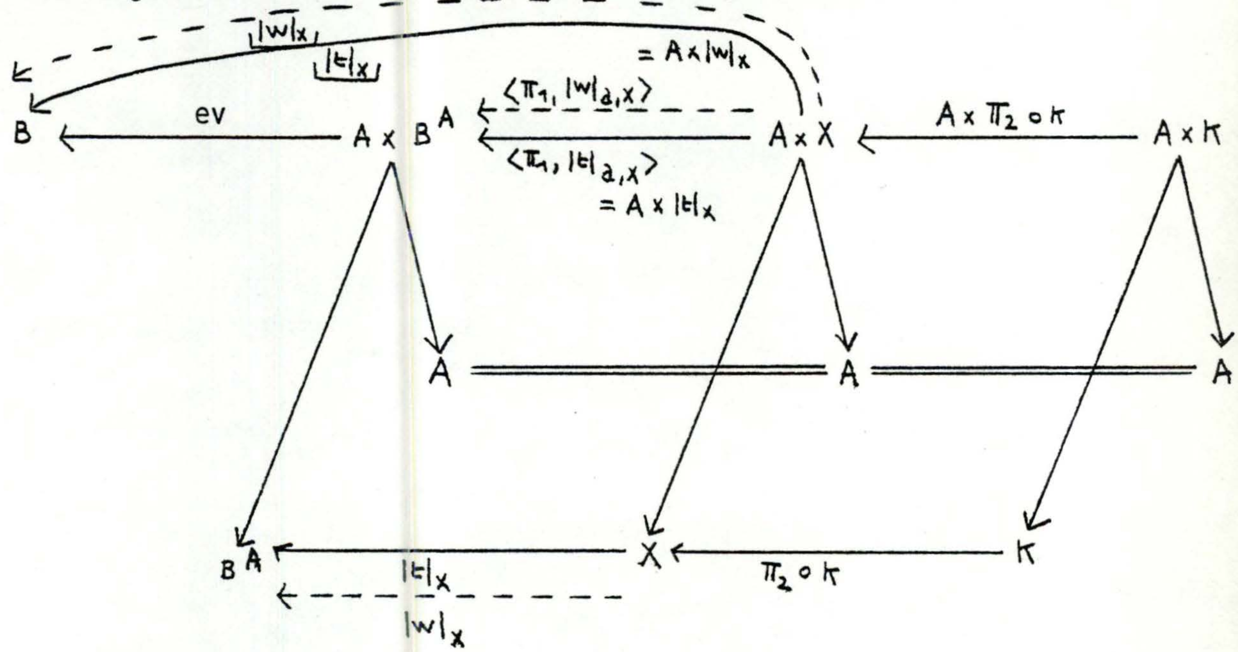
$$A \times (\pi_2 \circ k) \leqslant eg(\varphi, v_{A \times X})$$

ou encore : $A\times(\pi_2\circ k) \leqslant |ev(a,t)=ev(a,w)|_{a,x}$

Or : $|ev(a,t)=ev(a,w)|_{a,x} = eg(ev\circ<\pi_1,|t|_{a,x}>, ev\circ<\pi_1,|w|_{a,x}>)$

$= eg(\underbrace{|t|_x}, \underbrace{|w|_x})$

cette dernière égalité s'obtient en observant le diagramme suivant :



Puisque : $A\,(\pi_2\circ k) \leqslant eg(\underbrace{|t|_x}, \underbrace{|w|_x})$, $A\times(\pi_2\circ k)$

égalise $|t|_x$ et $|w|_x$, par conséquent : $|w|_x\circ\pi_2\circ k = |t|_x\circ\pi_2\circ k$

ou encore : $|w|_{a,x}\circ k = |t|_{\ ,x}\circ k$

c-à-d : $k \leqslant eg(|w|_{a,x} , |t|_{a,x})$

cqfd.

Montrons maintenant : $\boxed{\models t=w \to \forall\,(t(a) = w(a))}$

Par le corollaire 6.1. , $\models t=w \to t(a)=w(a)$

c-à-d : $\models t=w \to t(a)=w$

Puisque $a_i \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$ et que $x = \sigma(t) \cup \sigma(w)$ et par la prop. 6.10. :

$$\models t = w \rightarrow \forall_a \; (t(a) = w(a))$$

Par conséquent, le lemme 2 est démontré.

Lemme 3.

$\models t = w \leftrightarrow \forall_a \; (a \in t \leftrightarrow a \in w)$
où $a = a_i \ldots a_n \notin \sigma(t) \cup \sigma(w)$
où t, w sont 2 termes de type $\mathcal{A}^A$
et où $A = \tau(a)$

Démonstration du lemme 3.

Rappelons que $t(a) \equiv ev(a,t)$ et $w(a) \equiv ev(a,w)$

Donc : $\models t(a) = w(a) \leftrightarrow ev(a,t) = ev(a,w)$

$\models ev(a,w) = ev(a,t) \leftrightarrow (ev(a,w) = v \leftrightarrow ev(a,t) = v)$

par le corollaire 5.7.

$\models ev(a,b) = ev(a,w) \leftrightarrow (a \in t \leftrightarrow a \in w)$

Par le lemme 2, nous obtenons alors directement :

$$\models t = w \leftrightarrow \forall_a (a \in t \leftrightarrow a \in w)$$

Lemme 4.

Soient Φ, ψ 2 formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$,
soient a_1, a_2 2 variables telles que : $a_1 \in \sigma(\Phi) \setminus \sigma(\psi)$
et : $a_2 \in \sigma(\psi) \setminus \sigma(\Phi)$
alors : $\models \exists_{a_1} \Phi \wedge \exists_{a_2} \psi \rightarrow \exists_{a_1} \exists_{a_2} \Phi \wedge \psi$

en effet : $\models \exists_{a_1} \Phi \wedge \exists_{a_2} \psi \rightarrow \exists_{a_1} \Phi \wedge \Phi \wedge \exists_{a_2} \psi \wedge \psi$

car : $\models \exists_a \Phi \rightarrow \Phi$ par la proposition 7.6.

$\models \exists_{a_1} \Phi \wedge \Phi \wedge \exists_{a_2} \psi \wedge \psi \leftrightarrow \exists_{a_1} \Phi \wedge \psi \wedge \exists_{a_2} \psi \wedge \Phi$

Or : $\models \exists_{a_1} \Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \exists_{a_1} (\Phi \wedge \Psi)$

soit en effet : $\vec{x} = \sigma(\Phi) \cup \sigma(\Psi) \setminus \{a_1\}$

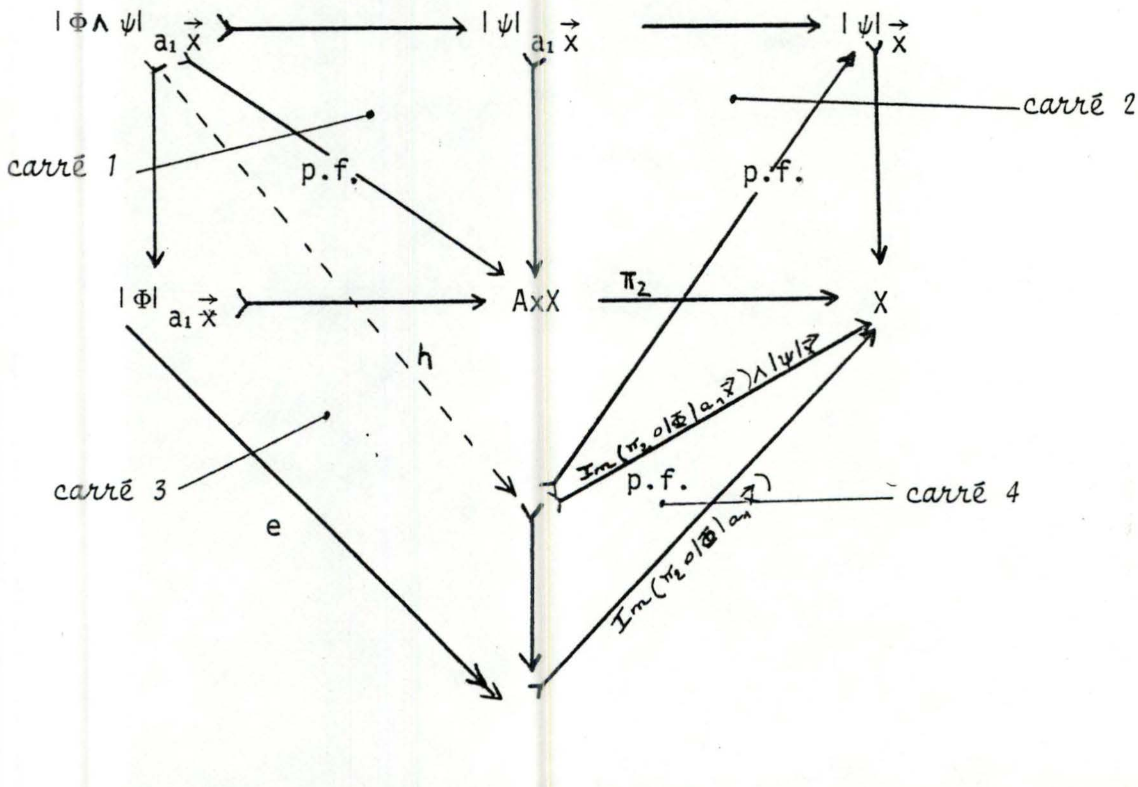
$$|\exists_{a_1} \Phi \wedge \Psi|_{\vec{x}} = (\exists_{-A} |\Phi|_{a_1 \vec{x}}) \wedge |\Psi|_{\vec{x}}$$

$$= \mathrm{Im}\ (|\Phi|_{a_1,\vec{x}} \rightarrowtail A \times X \xrightarrow{\pi_2} X) \wedge |\Psi|_{\vec{x}}$$

et : $$|\exists_{a_1}(\Phi \wedge \Psi)|_{\vec{x}} = \exists_{-A} (|\Phi|_{a_1,\vec{x}} \wedge |\Psi|_{a_1,\vec{x}})$$

$$= \mathrm{Im}\ (|\Phi \wedge \Psi|_{a_1 \vec{x}} \rightarrowtail A \times X \xrightarrow{\pi_2} X)$$

Nous pouvons alors construire le diagramme suivant :



Comme le carré 4 est un produit fibré, il existe une factorisation unique h

et $\pi_2 \circ |\Phi \wedge \Psi|_{a_1 \vec{x}} = (\mathrm{IM}\ (\pi_2 \circ |\Phi|_{a_1,\vec{x}}) \wedge |\Psi|_{\vec{x}}) \circ h$

Le rectangle (1,2) est un produit fibré et est égal au rectangle (3,4).

(3,4) est donc un produit fibré, le carré 3 en est donc un aussi.

Or, e est un épimorphisme, donc h est aussi un épimorphisme.

Donc : $\mathrm{Im}(\pi_2 \circ |\Phi \wedge \psi|_{a_1 \vec{x}}) = \mathrm{Im}(\pi_2 \circ |\Phi|_{a_1 \vec{x}}) \wedge |\psi|_{\vec{x}}$

Donc : $\models \exists_{a_1} \Phi \wedge \Psi \wedge \exists_{a_2} \Psi \wedge \Phi \leftrightarrow \exists_{a_1} (\Phi \wedge \Psi) \wedge \exists_{a_2} (\Phi \wedge \Psi)$

Comme : $\models \exists_{a_1} (\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \exists_{a_2} \exists_{a_1} (\Phi \wedge \Psi)$ par le corollaire 7.3,

nous déduisons $\models \exists_{a_1} (\Phi \wedge \Psi) \wedge \exists_{a_2} (\Phi \wedge \Psi) \longrightarrow \exists_{a_1} \exists_{a_2} (\Phi \wedge \Psi)$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

<u>Démonstration du théorème 1.1.</u>

Observons que :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "n_B"] \\ A \arrow[r, "f'"'] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

est un produit fibré ssi :

le grand rectangle suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "n_B"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & B \arrow[d, tail, "\{\ \}"] \\ A \arrow[r, "f'"'] & \tilde{B} \arrow[r] & \Omega^B \end{tikzcd}$$

c-à-d ssi

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "\{\ \}"] \\ A \arrow[r, "g"'] & \Omega^B \end{tikzcd}$$

est un produit fibré,

et où $g = i \circ f'$.

Par conséquent, il existe un morphisme et un seul $f' : A \longrightarrow B$ tel que le premier carré soit un produit fibré ssi il existe un morphisme et un seul $g : A \longrightarrow \Omega^B$ tel que g se factorise à travers $\tilde{B} \longrightarrow \Omega^B$, et tel que le troisième diagramme soit un produit fibré.

j étant un monomorphisme, le diagramme est un produit fibré $\Longleftrightarrow$

i) $\models g(a) = \{b\} \leftrightarrow \exists_{a'}(j(a')=a \wedge f(a')=b)$

où $a \in V_A$, $a' \in V_{A'}$, $b \in V_B$ et $a \neq b \neq a' \neq a$ (par le lemme 1).

La C.S. de cette formule exprime que le diagramme est commutatif, et la C.N., qu'il jouit de la propriété universelle des produits fibrés.

g se factorise à travers $\tilde{B} \xrightarrow{i} \Omega^B \Longleftrightarrow$

ii) $\models b \in g(a) \leftrightarrow g(a) = \{b\}$

où $a \in V_A$, $b \in V_B$, $a \neq b$

En effet, nous avons les équivalences suivantes :

g se factorise à travers $\tilde{B} \xrightarrow{i} \Omega^B$

$\Leftrightarrow \models g(a) \in \tilde{B} \rightarrowtail \Omega^B$ où $a \in V_A$

$\Leftrightarrow \models g(a) \in |\forall_x(x \in \sigma \leftrightarrow \sigma=\{x\}|_\sigma$ par définition de $\tilde{B}$

$\Leftrightarrow \models \forall_x(x \in g(a) \leftrightarrow g(a) = \{x\})$

$\Leftrightarrow \models x \in g(a) \leftrightarrow g(a) = \{x\}$.

L'existence et l'unicité d'un morphisme g tel que (i) et (ii) équivaut à l'existence d'un unique $g : A \longrightarrow \Omega^B$ tel que (ii) et :

iii) $\models b \in g(a) \leftrightarrow \exists_{a'}(j(a')=a \wedge f(a')=b)$

mais par le corollaire 6.7.,(iii) $\Longleftrightarrow \models g(a)=\{b| \exists_{a'}(j(a')=a \wedge f(a')=b\}$,

ce qui nous donne la définition et l'unicité de g, c-à-d :

$$g = |\{b| \exists_{a'}(j(a')=a \wedge f(a')=b)\}|_a$$

Il reste à prouver (ii)

Montrons d'abord $\models g(a)= \{b\} \rightarrow b \in g(a)$

ceci est vrai car $\models (b \in \{b\} \quad g(a) = \{b\} \rightarrow (b \in g(a))$

Par le corollaire 5.6. et $\models b \in \{b\}$

Montrons $\models b \in g(a) \rightarrow g(a) = \{b\}$.

Or, par le lemme 3, $\models g(a)=\{b\} \leftrightarrow \forall_{b'} (b' \in g(a) \leftrightarrow b' \in \{b\})$

Comme $\models b' \in \{b\} \leftrightarrow b'=b$, il suffit de prouver :

$$\models b \in g(a) \rightarrow \forall_{b'} (b' \in g(a) \leftrightarrow b'=b),$$

où $b' \in V_B$, $a \neq b \neq b' \neq b$.

Ceci revient à prouver, vu la remarque 6.4. :

$$\models b \in g(a) \rightarrow (b' \in g(a) \leftrightarrow b' = b).$$

Il est clair que : $\models b \in g(a) \rightarrow (b'=b \rightarrow b'\in g(a))$.

Il reste à prouver : $\models b \in g(a) \rightarrow (b' \in g(a) \rightarrow b'=b)$

c-à-d : $\models (b \in g(a) \wedge b' \in g(a)) \rightarrow b'=b$

c-à-d : $\models \exists_{a_1} (j(a_1)=a \wedge f(a_1)=b) \wedge \exists_{a_2} (j(a_2)=a \wedge f(a_2)=b') \rightarrow b'=b$

Or, par le lemme 4 :

$$\models \exists_{a_1} (j(a_1) = a \wedge f(a_1)=b) \wedge \exists_{a_2} (j(a_2)=a \wedge f(a_2)=b')$$
$$\rightarrow \exists_{a_1} \exists_{a_2} (j(a_1)=a \wedge f(a_1)=b \wedge j(a_2)=a \wedge f(a_2)=b')$$

et : $\models \exists_{a_1} \exists_{a_2} (j(a_1)=a \wedge f(a_1)=b \wedge j(a_2)=a \wedge f(a_2)=b')$

$$\rightarrow \exists_{a_1} \exists_{a_2} (a_1=a_2 \wedge f(a_1)=b \wedge f(a_2)=b')$$

car j est un monomorphisme,

et : $\models \exists_{a_1} \exists_{a_2} (a_1=a_2 \wedge f(a_1)=b \wedge f(a_2)=b') \rightarrow \exists_{a_1} \exists_{a_2} (b=b')$

et : $\models \exists_{a_1} \exists_{a_2} b=b' \rightarrow b=b'$

Le théorème 1.1. est donc ainsi démontré.

°
° °

ANNEXE 7

Démonstration de la proposition 2.2.

f^* étant un adjoint à droite, conserve les limites. Il en résulte que f^* conserve l'objet Ω et le morphisme v.

Montrons alors que f^* conserve les exponentielles.

Rappelons la définition de f^* : si $f : A \longrightarrow B$,

$$f^* : \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$$

$$X \xrightarrow{x} B \longmapsto \begin{array}{ccc} X^* & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle x^*}\downarrow & \text{P.f.} & \downarrow{\scriptstyle x} \\ A^* & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

Il suffit de voir que $\times B : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/_B$ préserve l'exponentielle, où $\mathcal{T}$ est un topos et $B \in |\mathcal{T}|$

$$\times B : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/_B$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \longmapsto & A \times B & \xrightarrow{Pr} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a \times B} & & \\ C & \longmapsto & C \times B & \xrightarrow{Pr} & B \end{array}$$

(observons que si $\mathcal{T} \equiv \mathcal{E}/_B$, alors $f^* \equiv \times f$).

Comparons alors $\mathcal{T}/_B\,(-, \times B(C^A))$ et $\mathcal{T}/_B\,(-, \times B(C)^{\times B(A)})$

Notons : $\Sigma_B : \mathcal{T}/_B \longrightarrow \mathcal{T}$, le foncteur d'oubli.

Proposition : Σ_B est l'adjoint à gauche de xB

En effet :

$$|\ \mathcal{T}(\Sigma_B(\alpha), X) = \mathcal{T}(A,X) \simeq \mathcal{T}/_B\,(A \xrightarrow{\alpha} B,\ X \times B \xrightarrow{Pr} B)$$

Cette bijection est définie de la manière suivante :

$$A \xrightarrow{x} X \longmapsto \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "<x,\alpha>"'] & & B \\ & X \times B \arrow[ur, "P_2"'] & \end{tikzcd}$$

Cette bijection est naturelle en α et en X, car

soient
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\copyright"] & B \\ A' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$
et
$$\begin{tikzcd} X \\ X' \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

Le carré suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A,X) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}_{/B}(A \xrightarrow{\alpha} B, X \times B \xrightarrow{P_2} B) \\ \mathcal{C}(A',X') \arrow[u, "s\circ - \circ a"] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}_{/B}(A' \xrightarrow{\alpha'} B, X' \times B \xrightarrow{P_1} B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En effet, quelque soit le morphisme $x' : A' \longrightarrow X'$

Montrons que : $s \times B \circ <x',\alpha'> \circ a = < s \circ x' \circ a, \alpha >$

or : $s \times B \circ < x',\alpha'> \circ a = s \times B \circ < x' \circ a, \alpha' \circ a >$

$= s \times B \circ < x' \circ a, \alpha >$

$< s \circ x' \circ a, \alpha >$,

Puisque nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X\times B \arrow[d, "P_2"] \arrow[dd, bend right] & X'\times B \arrow[l, "s\times B"'] \arrow[d, "P_1"] \arrow[dd, bend left] & \\
B \arrow[r, equal] & B & A \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[ul, "< x'\circ a,\ \alpha >"'] \arrow[dl, "x'\circ a"] \\
X & X' \arrow[l, "s"] &
\end{tikzcd}$$

<u>Par conséquent</u> :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}/_B(D \longrightarrow B,\quad xB(C^A)) &\simeq \mathcal{C}(\Sigma_B(D\rightarrow B),\ C^A) \\
&\simeq \mathcal{C}(D, C^A) \\
&\simeq \mathcal{C}(D\times A, C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}/_B(D \longrightarrow B,\quad xB(C)^{xB(A)}) &\simeq \mathcal{C}/_B(D\rightarrow B\times xB(A),\ xB(C)) \\
&\simeq \mathcal{C}(\Sigma_B(D\rightarrow B\times xB(A)), C)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer :

$$D \times A \simeq \Sigma_B(D\rightarrow B \times xB(A))$$

or : $D \longrightarrow B \times xB(A)$ est :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "p.f."] & A\times B \arrow[d, "P_2"] \\
D \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

or :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed, "< P_1\circ h,\ f >"'] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& A\times D \arrow[r, "Axd"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & A\times B \arrow[d, "P_2"] \\
& D \arrow[r, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

Donc : $P = A \times D$

Donc : $\Sigma_B(D\rightarrow B \times xB(A)) = A\times D$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.

$\circ\ \circ\ \circ$

ANNEXE 8

Démonstration du lemme 4.1.

La démonstration du lemme est une application du théorème 7.4. Faisons-là dans les détails.

Construisons un diagramme où $f_i : A_i \longrightarrow B \quad i = 1,2$

m_1, m_2 sont les morphismes rendant commutatifs les triangles.

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
A_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[dr, tail] & A_1 \vee A_2 \arrow[d, tail] & A_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, tail, "m_2"'] \arrow[dl, tail] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

pour que : $A_1 \overset{m_1}{\rightarrowtail} A_1 \vee A_2 \overset{m_2}{\leftarrowtail} A_2$

soit la somme de A_1 et A_2, il faut prouver qu'il existe un et un seul morphisme $A_1 \vee A_2 \xrightarrow{f} B$ tel que $f \circ m_i = f_i$; $i = 1, 2$.

Pour définir f, on va appliquer le théorème 7.4. (Ch.I), à une relation fonctionnelle Φ. Laquelle ? Pour construire Φ explicitement, pensons comment définir f dans Ens.

$$f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow B : a \longmapsto f_i(a) \qquad \text{ssi } a \in A_i \quad i = 1,2$$

donc f coïncide avec f_i sur A_i.

Et comme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, f est définie de cette façon, de manière unique.

Par conséquent, nous avons l'équivalence suivante :

$$f(a) = b \Leftrightarrow \exists\, a_1 \text{ tel que : } a_1 \in A_1 \text{ et } f_1(a_1) = b$$

ou

$$\exists\, a_2 \text{ tel que : } a_2 \in A_2 \text{ et } f_2(a_2) = b$$

C'est le membre gauche de cette équivalence qui va nous permettre de définir Φ dans le cas général.

Posons pour i = 1, 2.

$$\Phi_i = \exists_{a_i} (m_i(a_i) = a \wedge f_i(a_i) = b) \quad \text{où } a_i \in V_{A_i}$$

$$b \in V_B$$

$$a \in V_{A_1 \vee A_2}$$

$$a_1 \neq b \neq a_2 \neq a_1$$

Posons : $\Phi \equiv \Phi_1 \vee \Phi_2$

On va prouver que Φ est une relation fonctionnelle, c-à-d :

(α) $\models \forall_a \exists_b \Phi$

(β) $\models \Phi \wedge \Phi(b'/b) \longrightarrow b = b'$ où $b' \in V_B$

$b' \neq b$

Preuve de (α).

Puisque $a \in \sigma(\exists_b \Phi)$, il suffit de prouver : $\exists_b \Phi$

c-à-d : $\models \exists_b \Phi_1 \vee \exists_b \Phi_2$.

Vu le corollaire 7.3, on a : $\models \Phi_i \rightarrow \exists_b \Phi_i$

c-à-d : $\models \exists a_i \ (m_i(a_i) = a \wedge f_i(a_i) = b \rightarrow \exists_b \Phi_i$

Donc : $\models \exists a_i \ (m_i(a_i) = a \wedge f_i(a_i) = f_i(a_i) \rightarrow \exists_b \Phi_i$

Comme : $\models f_i(a_i) = f(a_i)$,

On obtient : $\models a_i \ m_i(a_i) = a \rightarrow \exists_b \Phi_i$

Par conséquent $\models \exists a_1 \ m_1(a_1) = a \vee \exists a_2 \ m_2(a_2) = a$

$$\downarrow$$

$$\exists_b \Phi_1 \vee \exists_b \Phi_2$$

Montrons que : $\models \exists a_1 \; m_1(a_1) = a \;\vee\; \exists a_2 \; m_2(a_2) = a$

c-à-d : $|\exists a_1 \; m_1(a_1) = a|_a \;\vee\; |\exists a_2 \; m_2(a_2) = a|_a$

$$\underset{A_1 \vee A_2}{\parallel}$$

Or, par le corollaire 7.5. : $|\exists a_i \; m_i(a_i) = a|_a = \operatorname{Im} m_i$

De plus, A_i et $\operatorname{Im} m_i$ sont isomorphes.

Donc : $|\exists a_1 \; m_1(a_1) = a|_a \vee |\exists a_2 \; m_2(a_2) = a|_a = \operatorname{Im} m_1 \vee \operatorname{Im} m_2$

$= A_1 \vee A_2$

Par conséquent, on déduit : $\models \exists_b \Phi_1 \vee \exists_b \Phi_2$

Preuve de (β).

On doit prouver : $\models (\Phi_1 \vee \Phi_2) \wedge (\Phi_1(b'/b) \vee \Phi_2(b'/b)) \rightarrow b = b'$

c-à-d, vu le corollaire 4.4. du Ch.II : $\models \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \Psi_3 \vee \Psi_4 \rightarrow b = b'$

où : $\Psi_1 = \Phi_1 \wedge \Phi_1(b/b')$

$\Psi_2 = \Phi_1 \wedge \Phi_2(b/b')$

$\Psi_3 = \Phi_2 \wedge \Phi_1(b/b')$

$\Psi_4 = \Phi_2 \wedge \Phi_2(b/b')$

On a : $\models \Psi_i \longrightarrow a \in A_1 \wedge a \in A_2$ où $i = 2,3$

$a \in V_A$

En effet : $\models \Phi_i \longleftrightarrow (\exists a_i \; m_i(a_i) = a \wedge f_i(a_i) = b)$

et : $\models \exists a_i (m_i(a_i) = a \wedge f_i(a_i) = b) \longrightarrow \exists a_i \; m_i(a_i) = a$

vu la proposition 7.3.

et : $\models \exists a_i \; m_i(a_i) = a \longleftrightarrow a \in \operatorname{Im} m_i$

or : $\operatorname{Im} m_i = A_i$ où A_i est pris comme un sous-objet de $A_1 \vee A_2$

d'où : $\models \Phi_i \longrightarrow a \in A_i$

Par hypothèse : $A_1 \wedge A_2 = 0$

Donc : $\models a \in \operatorname{Im} m_1 \wedge a \in \operatorname{Im} m_2 \leftrightarrow$ Faux

et : $\models \Psi_i \leftrightarrow$ Faux pour $i = 2,3$

Donc : $\models \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \Psi_3 \vee \Psi_4 \leftrightarrow \Psi_1 \vee \Psi_4$

D'autre part : $\models \Psi_i \rightarrow b = b'$ pour $i = 1, 4$

Par conséquent : $\models \Psi_1 \vee \Psi_4 \rightarrow b = b'$

(β) est donc démontré puisqu'on peut conclure :

$$\models \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \Psi_3 \vee \Psi_4 \rightarrow b = b'$$

Φ étant une relation fonctionnelle, par le théorème 7.4, Ch.I, il exsite une fonction et une seule $f : A_1 \vee A_2 \longrightarrow B$ telle que $\models f(a) = b \leftrightarrow \Phi$

On doit prouver : $f \circ m_i = f_i$ ou bien :

$$\models f\,(m_i(x_i)) = f_i(x_i) \text{ où } x_i \in {}^V A_i$$

$$x_i \neq a_i$$

c-à-d : $\models \Phi\,(m_i(x_i)/a,\ f_i(x_i)/b)$

c-à-d : $\models \exists a_1\,(m_1(a_1) = m_i\,(x_i) \wedge f_1(a_1) = f_i(x_i))$

$\vee \exists a_2\,(m_2(a_2) = m_i\,(x_i) \wedge f_2(a_2) = f_i(x_i))$

ce qui est immédiat, étant donné le lemme suivant :

> soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{E}$
>
> alors : $\models \exists_a (f(a) = f(b))$

Remarquons d'abord que $\Delta_A \leq eg(f \circ \pi_1,\ f \circ \pi_2)$

où π_1, π_2 sont les projections canoniques de $A \times A$ dans A.

En effet, Δ_A égalise $f \circ \pi_1$ et $f \circ \pi_2$, puisque $\Delta_A = \langle id_A, id_A \rangle$

Par conséquent : $\exists_A \Delta_A \leq \exists_A\, eg\,(f \circ \pi_1,\ f \circ \pi_2)$

Or : $\exists_{-A} \Delta_A = \operatorname{Im}(A \xrightarrow{\Delta_A} A \times A \xrightarrow{\pi_2} A)$

c-à-d : $\exists_{-A} \Delta_A = \operatorname{Im}(id_A)$

Donc : $\exists_{-A} \Delta_A = A$

Par conséquent : $\models \exists a_1 \, (m_1(a_1) = m_1(x_1) \wedge f_1(a_1) = f_1(x_1))$

Il reste à prouver que ce f est le seul morphisme vérifiant la propriété :

$f \circ m_i = f_i$, $i = 1,2$.

Pour ce faire, supposons que : $A_1 \vee A_2 \xrightarrow{f'} B$ soit tel que $f' \circ m_i = f_i$

$i = 1,2$ et considérons : $E \equiv eg(f,f')$.

Nous obtenons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, tail, "m_i"] \arrow[dr, dashed] & & A_1 \vee A_2 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] \arrow[dd, tail] & B \\
& E \arrow[ur, tail] & & \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

puisque $f' \circ m_i = f \circ m_i$, m_i se factorise à travers E et donc $A_i \leq E$ (si E est pris comme sous-objet de A).

Par conséquent, $A_1 \vee A_2 \leq E$.

D'autre part, $E \leq A_1 \vee A_2$,

donc : $E = A_1 \vee A_2$ et $f = f'$

cqfd.

$\circ$

$\circ \quad \circ$

ANNEXE 9

Démonstration du théorème 4.1.

En vertu du lemme 4.1., il suffit de pouvoir considérer A , A comme sous-objets disjoints d'un objet x de $\mathcal{E}$.

Dans Ens, il nous vient tout de suite à l'esprit de prendre $X = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2)$: à chaque élément a_1 de A_1, on peut lui associer le couple $(\{a_1\}, \phi)$ et à chaque élément a_2 de A_2, le couple $(\phi, \{a_2\})$. Ces 2 correspondances définissent des injections de A_i dans $\mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2)$. Comme $\mathcal{P}(A)$ est isomorphe à Appl (A, Ω), c-à-d à Ω^A, quelque soit l'ensemble A, travaillons plutôt avec $X = \Omega^{A_1} \times \Omega^{A_2}$.

A chaque élément a_1 de A_1, on lui associe alors le couple $(\{a_1\}, \varphi_{0 \rightarrowtail A_2})$ (où $\{a_i\}$ est maintenant la fonction singleton qui vaut toujours 0 sauf en a_1 où elle vaut 1); et à chaque élément a_2 de A_2, on lui associe le couple $(\varphi_{0 \rightarrowtail A_1}, \{a_1\})$.

Généralisons ce résultat dans $\mathcal{E}$:

prenons $X = \Omega^{A_1} \times \Omega^{A_2}$

Il nous faut des monomorphismes :

$$A_1 \overset{g_1}{\rightarrowtail} \Omega^{A_1} \times \Omega^{A_2} \overset{g_2}{\leftarrowtail} A_2$$

soit $o_i = 1 \xrightarrow{\varphi_{0 \rightarrowtail A_i}} \Omega^{A_i}$ pour i=1,2

soit $t_1 = A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{o_2} \Omega^{A_2}$

soit $t_2 = A_2 \longrightarrow 1 \xrightarrow{o_1} \Omega^{A_1}$

Posons $g_1 = \langle \{\ \}, t_1 \rangle$ et $g_2 = \langle t_2, \{\ \} \rangle$

comme $\{\ \}$ est un monomorphisme, g_1 et g_2 sont aussi des monomorphismes.

Il reste à prouver que $A_1 \wedge A_2 = 0$.

C-à-d : $\models (u_1, u_2) \in A_1 \wedge A_2 \quad \rightarrow \quad$ Faux où: $u_i \in V_\Omega A_i$

Mais : $\models (u_1, u_2) \in A_1 \wedge A_2 \leftrightarrow \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = o_2)$

$\wedge \exists_{a_2} (u_1 = o_1 \wedge u_2 = \{a_2\})$

car : $\models (u_1, u_2) \in A_1 \wedge A_2 \leftrightarrow (u_1, u_2) \in A_1 \wedge (u_1, u_2) \in A_2$

comme : $A_1 = Img_1$, $\models (u_1, u_2) \in A_1 \leftrightarrow \exists_{a_1} (g(a_1) = (u_1, u_2))$

vu le corollaire 7.5.

or : $\models \exists_{a_1} g(a_1) = (u_1, u_2) \leftrightarrow \exists_{a_1} u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = t_1(a_1)$

vu le corollaire 5.4'

comme : $\models t_1(a_1) = o_2$ nous obtenons finalement

$\models (u_1, u_2) \in A_1 \leftrightarrow \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = o_2)$

En résonant de même sur A_2, on obtient la propriété annoncée.

On a aussi : $\models \exists_{o_1} (u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = o_2) \rightarrow \exists_{o_1} u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = o_2$

car : $\models \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\} \wedge u_2 = o_2) \rightarrow \exists_{a_1} u_1 = \{a_1\} \wedge \exists_{a_1} u_2 = o_2$

en vertu de la proposition 7.3.

et : $\models \exists_{a_1} u_2 = o_2 \rightarrow u_2 = o_2$

en vertu de la proposition 7.6.

Analoguement, pour a_2 : $\models \exists_{a_2} (u_1 = o_1 \wedge u_2 = \{a_2\})$

$\rightarrow \exists_{a_2} u_2 = \{a_2\} \wedge u_1 = o_1$

Par conséquent : $\models (u_1, u_2) \in A_1 \wedge A_2 \rightarrow \exists_{a_1} u_1 = \{a_1\} \wedge \exists_{a_2} u_2 = \{a_2\} \wedge u_1 = o_1 \wedge u_2 = o_2$

D'autre part : $\models \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\}) \wedge u_1 = o_1 \rightarrow \exists_{a_1} a_1 \in o_1$

car : $\models \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\}) \wedge u_1 = o_1 \rightarrow \exists_{a_1} o_1 = \{a_1\}$

vu le corollaire 5.6.

or : $\models a_1 \in \{a_1\} \wedge o_1 = \{a_1\} \rightarrow a_1 \in o_1$

comme $\models a_1 \in \{a_1\}$ en vertu de la proposition 1.1., Ch.I., on déduit :

$\models o_1 = \{a_1\} \rightarrow a_1 \in o_1$

par conséquent : $\models \exists_{a_1} o_1 = \{a_1\} \rightarrow \exists_{a_1} a_1 \in o_1$

vu la proposition 7.3.

d'où le résultat annoncé.

De plus, $\models \exists_{a_1}\, a_1 \in o_1 \quad \rightarrow \quad$ Faux

c-à-d : $\models a_1 \in\!\in o_1 \quad \rightarrow \quad$ Faux, vu la remarque 7.3.

ou encore : $\models ev(a_1, o_1) = v \quad \ddot{\rightarrow} \quad$ Faux

Montrons donc : $eg(ev \circ \langle id_{A_1}, A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{\ddot{o}_1} \Omega^{A_1} \rangle, A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{v} \Omega)$

$= o \rightarrowtail A_1$

Or, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Omega & A_1 \times \Omega^{A_1} \arrow[l, "ev"'] \arrow[d] \arrow[dd] & A_1 \arrow[l, "id_{A_1} \check{\times} o_1"'] \arrow[d] \arrow[dd, equal] \\
& \Omega^{A_1} & 1 \arrow[l, "o_1"] \\
& A_1 & A_1 \arrow[l, equal]
\end{tikzcd}$$

On déduit de ce diagramme que :

$$id_{A_1} \times o_1 = \langle id_{A_1}, A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{o_1} \Omega^{A_1} \rangle$$

donc : $ev \circ \langle id_{A_1}, A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{o_1} \Omega^{A_1} \rangle = ev \circ id_{A_1} \times o_1$

$= \varphi_o \rightarrowtail A_1$

puisque : $o_1 = \ulcorner \varphi_{o_1} \rightarrowtail A_1 \urcorner$

Il suffit donc de se rappeler (par la proposition 1.1., Ch.I) que :

$$eg(\varphi_o \rightarrowtail A_1, A_1 \longrightarrow 1 \xrightarrow{v} \Omega) = o \rightarrowtail A_1$$

Par conséquent : $\models \exists_{a_1} (u_1 = \{a_1\}) \wedge u_1 = o_1 \rightarrow$ Faux

Analoguement : $\models \exists_{a_2} (u_2 = \{a_2\}) \wedge u_2 = o_2 \rightarrow$ Faux

On obtient finalement : $\models (u_1, u_2) \in A_1 \wedge A_2 \quad \rightarrow \quad$ Faux

cqfd.

° ° °

ANNEXE 10

Démonstration de la proposition 5.3.

Montrons donc que $R = |\varphi_R(b_1) = \varphi_R(b_2)|_{b_1,b_2}$

c-à-d que : $\models (b_1,b_2) \in R \leftrightarrow \ulcorner\varphi_R\urcorner(b_1) = \ulcorner\varphi_R\urcorner(b_2)$

or, dans Ens : $\ulcorner\varphi_R\urcorner(b_1) = \{b \mid (b,b_1) \in R\}$

Montrons que cela est encore vrai dans $\mathcal{E}$, c-à-d que :

$$\models \ulcorner\varphi_R\urcorner(b_1) = \{b \mid (b,b_1) \in R\}$$

Il suffit alors de montrer que : $|\{b \mid (b,b_1) \in R|_{b_1} = \ulcorner\varphi_R\urcorner$

or : $|\{b \mid (b,b_1) \in R|_{b_1} = |(\mathrm{val}\ (b,b_1) \in R)_b|_{b_1}$

$$= |\ulcorner |\mathrm{val}(b,b_1) \in R|_{b,b_1}\urcorner (b_1)|_{b_1}$$

$$= \ulcorner |\mathrm{val}(b,b_1) \in R|_{b,b_1}\urcorner$$

Comme $|\mathrm{val}(b,b_1) \in R|_{b,b_1} = \varphi_{|(b,b_1) \in R|_{b,b_1}}$

$$= \varphi_R$$

On retrouve que : $|\{b \mid (b,b_1) \in R|_{b_1} = \ulcorner\varphi_R\urcorner$

La proposition se simplifie donc et revient à dire :

$$\models (b_1,b_2) \in R \leftrightarrow \{b \mid (b,b_1) \in R\} = \{b \mid (b,b_2) \in R\}$$

Or R est une relation d'équivalence, donc on a :

$\models \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R) \leftrightarrow (b_1 b_2) \in R$

1) $\models \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R) \rightarrow (b_1,b_2) \in R$

car : $\models \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R) \rightarrow ((b_1,b_1) \in R \leftrightarrow (b_1,b_2) \in R)$

vu le corollaire 6.10.

donc : $\models \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R) \rightarrow ((b_1,b_1) \in R \rightarrow (b_1,b_2) \in R)$

comme : $\models (b_1,b_1) \in R$ car R est réflexif,

on a : $\models \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R) \rightarrow (b_1,b_2) \in R$

2) $\models (b,b_1) \in R \rightarrow \forall_b((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R)$

c-à-d, vu la proposition 6.10.

$\underset{b,b_1,b_2}{\models} (b_1,b_2) \in R \rightarrow ((b,b_1) \in R \leftrightarrow (b,b_2) \in R)$

c-à-d :

$\underset{b,b_1,b_2}{\models} (b_1,b_2) \in R \rightarrow ((b,b_1) \in R \rightarrow (b,b_2) \in R)$

et :

$\underset{b,b_1,b_2}{\models} (b_1,b_2) \in R \rightarrow ((b,b_2) \in R \rightarrow (b,b_1) \in R)$

Il nous suffit donc de voir que :

$\underset{b,b_1,b_2}{\models} (b_1,b_2) \in R \rightarrow ((b,b_1) \in R \rightarrow (b,b_2) \in R)$

ou encore :

$\underset{b,b_1,b_2}{\models} (b_1,b_2) \in R \wedge (b,b_1) \in R \rightarrow (b,b_2) \in R$

ce qui est immédiat, car R est transitive

Etant donné le corollaire 6.6., nous avons aussi que :

$\models (b_1,b_2) \in R \leftrightarrow \forall_b(b \in \{b| \ (b,b_1) \in R\} \leftrightarrow b \in \{b| \ (b,b_2) \in R\})$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que :

$$\models \forall_b(b \in \{b| \ (b,b_1) \in R\} \leftrightarrow b \in \{b| \ (b,b_2) \in R\}) \leftrightarrow \{b| \ (b,b_1) \in R\} = \{b| \ (b,b_2) \in R\}$$

ce qui est satisfait étant donné le lemme 3 démontré dans l'annexe 6.

o
o o

ANNEXE 11

Démonstration du corollaire 5.3.

Soit le diagramme suivant que j'expliquerai par après :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d] & B \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\lambda"] & B/R_0 \\
R \arrow[ur, shift left, "\alpha 1"] \arrow[ur, shift right, "\beta 1"'] \arrow[d] & & \Lambda \\
R_0 \arrow[uur, shift left, "\alpha"] \arrow[uur, shift right, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Explicitons d'abord le triangle supérieur :

successivement, nous construisons les schémas suivants

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & B \\
& \begin{matrix}\mathrm{Imf}\\ \mathrm{Img}\end{matrix} \arrow[ur, tail, shift left] \arrow[ur, tail, shift right] &
\end{tikzcd}$$

puis

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d] & B & \\
\underbrace{\mathrm{Imf} \times \mathrm{Img}}_{\substack{\shortparallel \\ R}} \arrow[rr, tail] & & B \times B \arrow[ul, shift right, "\pi_1"'] \arrow[ul, shift left, "\pi_2"]
\end{tikzcd}$$

c-à-d

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr] & & B \\
& R \arrow[ur, shift left, "\alpha_1"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Enfin R et R_0 sont 2 relations sur B et R est plus petite que R_0 , donc R se factorise à travers R_0.

Les 2 morphismes α et β sont : $R_0 \rightarrowtail B \times B \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} B$

Venons-en maintenant à la démonstration du corollaire :

il suffit de prouver que $\lambda \circ f = \lambda \circ g \Rightarrow \lambda \circ \alpha = \lambda \circ \beta$

puisque $e = \text{coeg}\ (\alpha, \beta)$, vu le corollaire précédent et donc λ se factorise alors à travers e.

Supposons donc $\lambda \circ f = \lambda \circ g$. Alors : $\lambda \circ \alpha_1 = \lambda \circ \beta_1$ car $A \longrightarrow R$ est un épimorphisme.

Soit alors $N \rightrightarrows B$ le noyau-paire de λ. N est une relation d'équivalence sur B, contenant R. En effet : $N = \left| \lambda(b_1) = \lambda(b_2) \right|_{b_1 b_2}$

et par conséquent nous obtenons que :

$$\models \exists_a\ (f(a) = b_1 \wedge g(a) = b_2) \rightarrow \lambda(b_1) = \lambda(b_2)$$

c-à-d :

$$\models f(a) = b_1 \wedge g(a) = b_2 \rightarrow \lambda(b_1) = \lambda(b_2)$$

étant donné la remarque 7.3.

ou encore :

$$\models f(a) = b_1 \wedge g(a) = b_2 \wedge \lambda \circ f(a) = \lambda \circ g(a) \rightarrow \lambda(b_1) = \lambda(b_2)$$

car : $\lambda \circ f = \lambda \circ g$ par hypothèse.

Puisque N contient R, N contient aussi R_0 et nous obtenons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
R_0 \arrow[r, tail] \arrow[rrr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & N \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \times B \arrow[r, "\pi_2"] & B \arrow[dd, "\lambda"] \\
& B \times B \arrow[d, "\pi_1"] & \text{P.f.} & \\
& B \arrow[rr, "\lambda"'] \arrow[rr, shift left=1.5] & & \Lambda
\end{tikzcd}$$

en conclusion $\lambda \circ \alpha = \lambda \circ \beta$

cqfd.

o

o o

INDEX

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter le livre :

"Categories for the working mathematician" - Mac Lane -

Catégorie

Une catégorie $\mathcal{C}$ est aussi notée $(|\mathcal{C}|, \circ)$ où $|\mathcal{C}|$ est la classe d'objets et $\circ$ la loi de composition des morphismes de $\mathcal{C}$. $\circ$ jouit des mêmes propriétés que la loi de composition des applications.

Catégorie duale

La catégorie duale de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C}^{op}$ $(|\mathcal{C}|, *)$ où $f * g = g \circ f$

Coreflet

Notion duale de reflet.

Egalisateur

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

L'égalisateur de deux morphismes f et g est un morphisme h tel que $f \circ h = g \circ h$, et pour tout morphisme l tel que $f \circ l = g \circ l$, il existe un seul morphisme l' tel que $l = h \circ l'$.

h est noté : eg (f,g)

Epimorphisme

est un morphisme simplifiable à droite. Notation : $f : A \twoheadrightarrow B$

Foncteur

Un foncteur est un monomorphisme de catégories.

Foncteur contravariant de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

est un foncteur de $\mathcal{A}^{op}$ dans $\mathcal{B}$.

Monomorphisme

est un morphisme simplifiable à gauche. Notation : $f : A \rightarrowtail B$

Objet final de $\mathcal{C}$

est un objet 1 de $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet A de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme $f : A \longrightarrow 1$.

Objet initial de $\mathcal{C}$

est un objet 0 de $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet M de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme $g : 0 \longrightarrow M$

Produit

Le produit de 2 objets A et B est un objet A xB, muni de 2 morphismes

$A \times B \xrightarrow{\pi_A} A$ et $A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, appelés les projections canoniques.

$\forall\ X \xrightarrow{f} A$ et $X \xrightarrow{g} B$, $\exists !\ h : X \longrightarrow A \times B$

tel que $f = \pi_A \circ h$ et $g = \pi_B \circ h$.

h est noté $\langle f, g \rangle$.

Si $X \xrightarrow{f} A$ et $Y \xrightarrow{g} B$, alors $f \times g : X \times Y \longrightarrow A \times B$

est le seul morphisme tel que $f \circ \pi_X = \pi_A \circ f \times g$ et $g \circ \pi_Y = \pi_B \circ f \times g$.

Reflet

Soit $\mathbb{F} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$ un foncteur et A un objet de $\mathcal{A}$. On appelle $\mathbb{F}$ - reflet de A, le couple (L,l) où L est un objet de $\mathcal{M}$ et $l : A \longrightarrow \mathbb{F}L$, un morphisme de $\mathcal{A}$ tel que : $\forall\ M \in |\mathcal{M}|, \quad \forall a : A \longrightarrow FM \quad \in a,$

$$\exists !\ \tilde{a} : L \longrightarrow M \in \mathcal{M}$$

tel que $a = \mathbb{F}(\tilde{a}) \circ l$,

ce qui se résume par le schéma suivant :

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{A}$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dd, "\exists !"', "\tilde{a}"] & & A \arrow[r, "L"] \arrow[dd, "\forall a"'] & FL \arrow[ddl, "F\tilde{a}"] \\
 & & & \\
M & & FM &
\end{tikzcd}$$

Somme

Notion duale de produit.

Sous-objet

Un sous-objet de $X \in |\mathcal{C}|$ est une classe de monomorphismes de but X, qui sont isomorphes.

Dans ce mémoire, nous ne distinguerons pas 2 monomorphismes isomorphismes.

Transformation naturelle

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$, 2 catégories et $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$, deux foncteurs.

Une transformation naturelle $\varphi : F \Longrightarrow G$ est un triplet $(|\varphi|, G, F)$ où $|\varphi|$ est une famille $(\varphi_A)_{A \in |\mathcal{A}|}$ de morphismes de $\mathcal{M}$, $\varphi_A : F(A) \longrightarrow G(A)$, qui pour tout $a : A \longrightarrow A'$, morphisme de $\mathcal{Q}$, rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(a)"'] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\ F(A') \arrow[r, "\varphi_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

° ° °

BIBLIOGRAPHIE

- Dana I. SCHLOMIUK : Logique des topos (introduction à la théorie des topos élémentaires)

- Mac LANE : Catégories for the working mathematician

- P.T. JOHNSTONE : Topos theory - Academic Press, 1977

- P. FREYD : Aspects of topoi - Bull - Austral - Math - Soc., vol. 7, 1972

- Séminaire donné par J. MERSCH : Introduction aux catégories

°
° °