MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Fonction de puissance d'un test et fonction de puissance asymptotique

Smans, Michel

Award date:
1978

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

Année académique 1977 - 1978

FONCTION DE PUISSANCE D'UN TEST

ET

FONCTION DE PUISSANCE ASYMPTOTIQUE

Promoteur :

E. HARDING

Mémoire présenté par :

Michel SMANS

ABSTRACT

Généralement, le calcul explicite de la fonction de puissance d'un test est long et donc coûteux. C'est pourquoi on a recours à des tables construites grâce à des résultats asymptotiques. On peut cependant se poser deux questions :

1) jusqu'où ces résultats sont-ils exacts ?

2) les progrès de l'informatique ne remettent-ils pas en question l'utilité de ces résultats ?

L'étude du test d'indépendance dans les tables de contingence 2 x 2 montrera que les résultats asymptotiques ne sont valables que " dans un voisinage " de l'hypothèse nulle.

De plus, en regard des erreurs commises et du temps passé à consulter les tables pour les calculs asymptotiques, je ne pense pas que le coût du calcul explicite soit un argument en sa défaveur.

PLAN

O. INTRODUCTION

I. TEST D'INDEPENDANCE DANS LES TABLES DE CONTINGENCE 2 x 2
- I.1 Introduction
- I.2 Formalisation
- I.3 Test d'indépendance
- I.4 Echantillon
- I.5 Construction du test
- I.6 Distribution de T (sous H_0)

II. FONCTION DE PUISSANCE
- II.1 Introduction
- II.2 Distribution de T (sous H_1)
- II.3 Calcul de la fonction de puissance

III. CAS ASYMPTOTIQUE
- III.1 Introduction
- III.2 Distribution asymptotique de T (sous H_0)
- III.3 Distribution asymptotique de T (sous H_1)
- III.4 Fonction de puissance asymptotique

IV. RESULTATS NUMERIQUES
- IV.1 Introduction
- IV.2 Résultats pour le calcul exact
- IV.3 Confrontation avec les résultats asymptotiques

V. CONCLUSIONS

VI. ANNEXES

INTRODUCTION

Apparemment, peu de gens portent un grand intérêt à la fonction de puissance d'un test. Peut-être est-ce simplement parce que son calcul est en général difficile.

Quoi qu'il en soit, si la fonction de puissance permet d'analyser les qualités d'un test, il ne faut pas perdre de vue qu'elle peut servir également à autre chose. Par exemple, on peut construire des intervalles de confiance pour le paramètre testé.

Il semblait donc intéressant de faire les calculs pour un exemple de test et ainsi, de se rendre compte des difficultés rencontrées. D'autre part, cela permet de vérifier les résultats asymptotiques existants et de voir s'ils ne mènent pas à des conclusions erronées.

Le test choisi fut celui d'indépendance dans les tables de contingence 2 x 2 (une version particulière du test chi - carré). Les résultats de cette analyse qui figurent dans les conclusions furent assez inattendus.

Je tiens à remercier Monsieur Harding qui a bien voulu me guider dans l'élaboration de ce mémoire et sans qui ce travail ne serait pas ce qu'il est.

Je voudrais également remercier Messieurs Rasson et Schifflers qui ont toujours accepté de bonne grâce de me consacrer leur temps précieux, de même que Philippe Dontaine et Daniel Standaert qui furent d'une aide efficace pour certains détails techniques.

I. TEST D'INDEPENDANCE DANS LES TABLES DE CONTINGENCE 2 x 2

I.1 Introduction

Dans une population, on envisage de classer les individus d'après deux critères :

1) ils portent ou non le caractère A
2) ils portent ou non le caractère B

Le problème qu'on se pose est celui de l'indépendance des deux caractères, c.à.d. :

" le fait qu'un individu porte le caractère A influence-t-il ou non le fait qu'il porte le caractère B?"

I.2 Formalisation

Décrivons la population par le tableau 1 :

	A	$\bar{A}$	
B	π_{AB}	$\pi_{\bar{A}B}$	π_B
$\bar{B}$	$\pi_{A\bar{B}}$	$\pi_{\bar{A}\bar{B}}$	$\pi_{\bar{B}}$
	π_A	$\pi_{\bar{A}}$	1

tab. 1

où les π représentent les proportions d'individus.
Par ex. :

$\pi_{A\bar{B}}$ = proportion des individus portant le caractère A mais pas le caractère B.

On a :

$$\pi_A = \pi_{AB} + \pi_{A\bar{B}}$$

$$\pi_{\bar{A}} = \pi_{\bar{A}B} + \pi_{\bar{A}\bar{B}}$$

$$\pi_B = \pi_{AB} + \pi_{\bar{A}B}$$

$$\pi_{\bar{B}} = \pi_{A\bar{B}} + \pi_{\bar{A}\bar{B}}$$

et

$$\pi_A + \pi_{\bar{A}} = \pi_B + \pi_{\bar{B}} = 1$$

Remarquons que la population est totalement décrite par

$$\boxed{\pi_A \, , \, \pi_B \, , \, \pi_{AB}}$$

Définition :

On dit que les caractères A et B sont indépendants si les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\pi_{AB} = \pi_A \cdot \pi_B$$

$$\pi_{A\bar{B}} = \pi_A \cdot \pi_{\bar{B}}$$

$$\pi_{\bar{A}B} = \pi_{\bar{A}} \cdot \pi_B$$

$$\pi_{\bar{A}\bar{B}} = \pi_{\bar{A}} \cdot \pi_{\bar{B}}$$

Introduisons le paramètre ρ :

$$\rho = \frac{\pi_{AB} \cdot \pi_{\bar{A}\bar{B}}}{\pi_{A\bar{B}} \cdot \pi_{\bar{A}B}} \qquad \text{(I.2.a)}$$

qu'on appelle mesure d'association.

La population est également décrite par :

$$\boxed{\pi_A \ , \ \pi_B \ , \ \rho}$$

puisque π_{AB} et ρ sont liés par la relation :

$$\rho = \frac{\pi_{AB}(1-\pi_A-\pi_B+\pi_{AB})}{(\pi_A-\pi_{AB})(\pi_B-\pi_{AB})} \qquad \text{(I.2.b)}$$

I.3 Test d'indépendance

Si dans la relation (I.2.b) on remplace π_{AB} par $\pi_A \cdot \pi_B$ on obtient

$$\rho = 1$$

qui est donc la valeur du paramètre ρ caractérisant l'indépendance des caractères.

Pour tester l'indépendance des caractères on va donc faire un test paramétrique sur les valeurs de ρ :

tester

H_o : $\rho = 1$ (situation d'indépendance)

contre

H_1 : $\rho > 1$

Remarque :

On peut se contenter des valeurs $\rho > 1$ puisque les valeurs $\rho \in]0,1[$ décrivent des situations analogues : il suffit d'échanger A et $\overline{A}$ ou B et $\overline{B}$ pour obtenir des valeurs de ρ inverses l'une de l'autre.

I.4 Echantillon

On extrait de la population un échantillon de taille n que l'on représente par le tableau 2 :

	A	$\overline{A}$	
B	a	b	p
$\overline{B}$	c	d	q
	r	s	n

tab. 2

où a représente le nombre d'individus portant à la fois le caractère A et le caractère B.
De même pour b, c et d.
On a évidemment :

$$a + b = p \ , \ c + d = q$$

$$a + c = r \ , \ b + d = s$$

$$p + q = r + s = n$$

On étudiera le cas où p et q sont fixés avant d'extraire l'échantillon.

I.5 Construction du test

On se propose de faire le test sur les valeurs de la statistique bien connue :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n\pi_{0i})^2}{n\pi_{0i}}$$

Avec les notations du tableau 2, cette expression se simplifie en :

$$\frac{n\,(\,ad - bc\,)^2}{pqrs} \qquad (I.5.a)$$

que l'on notera T.

La théorie de Neyman et Pearson suggère de prendre pour région de rejet : (°)

$$R = \{\, x : T(x) > q_\alpha \,\}$$

où q_α est tel que :

$$\Pr(\,T(x) \leq q_\alpha \mid \rho = 1\,) = 1 - \alpha \qquad (I.5.b)$$

pour obtenir le test de niveau α :

" Rejeter H_0 si $T(x) > q_\alpha$ "

Tout le problème consiste maintenant à calculer la distribution exacte de la statistique T.

(°) voir Kendall & Stuart Vol.II p.439 n° 30.5 et 30.6

I.6 Distribution de T (sous H_o)

En premier lieu, constatons que a est une variable aléatoire binomiale de paramètres p et π_A :

$$a \sim Bi\ (p\ , \pi_A)$$

puisque a est le nombre d'individus portant le caractère A parmi les p choisis portant B (le fait de savoir qu'ils portent B ne modifie rien).

De même

$$c \sim Bi\ (q\ , \pi_A)$$

En notant P(a) la probabilité d'obtenir a individus portant A et B et avec une convention analogue pour c on obtient :

$$P(a) = C_p^a\ \pi_A^a\ \pi_{\bar{A}}^{p-a}$$

et

$$P(c) = C_q^c\ \pi_A^c\ \pi_{\bar{A}}^{q-c}$$

On a maintenant la probabilité d'observer la configuration du tableau 2 :

$$P(a).P(c) = C_p^a\ \pi_A^a\ \pi_{\bar{A}}^{p-a}\ .\ C_q^c\ \pi_A^c\ \pi_{\bar{A}}^{q-c}$$

La distribution de T sera donc :

$$Pr(\ T \leq t\ ) = \sum_{(a,c)} P(a).P(c) \qquad (I.6.a)$$

où l'on fait la somme pour tous les couples (a,c) donnant une valeur de $T \leq t$.

Connaissant la distribution de T, on peut maintenant construire le test en déterminant q_α vérifiant (I.5.b).

Remarques :

1) Ce calcul est long puisqu'il faut estimer les valeurs de T pour tous les couples (a,c) possibles, ensuite calculer les distributions binomiales et enfin la somme des produits (I.6.a).

2) Les paramètres π_A et π_B sont supposés connus. Ce sont en fait des paramètres de nuisance pour le test sur ρ.

3) Dans la formule (I.5.b) il est possible de ne pas pouvoir obtenir l'égalité puisque T est une variable aléatoire discrète. On supposera donc que le niveau α est un de ceux autorisés ou bien on fera plutôt le test randomisé (c'est ce qu'on fera pour les résultats numériques).

II. FONCTION DE PUISSANCE

II.1 Introduction

Pour se faire une idée des "qualités" d'un test, on dispose de deux concepts :

1) le niveau α (probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie) dont il a déjà été question plus haut.

2) la puissance du test (probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse - H_1 vraie -).

Souvent, et en particulier ici, on fixe α et on en déduit la puissance. Comme H_1 est composée, on va calculer la probabilité de rejet de H_0 si le paramètre ρ prend la valeur ρ_1 ($\rho_1 > 1$).

On parlera donc de la fonction de puissance :

$$p_\alpha(\rho_1) = \Pr(T > q_\alpha \mid \rho = \rho_1) \qquad \text{(II.1.a)}$$

où q_α vérifie la relation (I.5.b).

Pour calculer la fonction de puissance, il "suffit" donc de pouvoir déterminer la distribution de T pour la valeur ρ_1 du paramètre ρ .

II.2 Distribution de T (sous H_1)

Ici, a et c sont toujours des variables aléatoires binomiales, mais les paramètres sont changés :

$$a \sim Bi\left(p , \frac{\pi_{AB}}{\pi_B} \right)$$

et

$$c \sim \mathrm{Bi}\left(q \, , \, \frac{\pi_{A\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}} \right)$$

π_{AB} et ρ_1 étant liés par la relation :

$$\rho_1 = \frac{\pi_{AB}\,(1 - \pi_A - \pi_B + \pi_{AB})}{(\pi_A - \pi_{AB})(\pi_B - \pi_{AB})} \qquad \text{(II.2.a)}$$

il est possible de déterminer π_{AB}.

De la même manière qu'au chapitre précédent, on obtiendra la distribution de T (dépendante de ρ_1) :

$$\Pr_{\rho_1}(T \leq t) = \sum_{(a,c)} P(a).P(c) \qquad \text{(II.2.b)}$$

II.3 Calcul de la fonction de puissance

Pour mener à bien ce calcul, on procèdera de la manière suivante :

1) Etant donné n , p et q - respectivement la taille de l'échantillon et les totaux marginaux pour le caractère B - il faut dans un premier temps déterminer toutes les valeurs de T pour les couples (a,c) (a = 0,1,...,p et c = 0,1,...,q).

2) Pour le test de niveau α , déterminer q_α vérifiant (I.5.b).
Il faut donc calculer la distribution de T sous H_0.

3) Pour calculer la fonction de puissance en ρ_1 fixé, il faut :

a) déterminer π_{AB} grâce à la relation (II.2.a)

b) calculer la distribution de T (II.2.b)

On a alors (enfin!)

$$p_\alpha(\rho_1) = 1 - \Pr(T \leq q_\alpha \mid \rho = \rho_1)$$

III. CAS ASYMPTOTIQUE

III.1 Introduction

Souvent, les calculs exacts des distributions ne sont pas difficiles mais sont très longs. Pour cette raison, on cherche les distributions asymptotiques avec l'espoir de pouvoir remplacer les calculs exacts par d'autres calculs moins longs ou qui permettent l'usage de tables et qui donnent des résultats suffisamment proches de la réalité.

Dans le cas présent, il existe un résultat asymptotique bien connu dont on a plusieurs démonstrations.

En voici une que m'a proposée le Professeur Harding et qui est particulièrement bien adaptée à ce problème.

III.2 Distribution asymptotique de T (sous H_0)

Partant des premières constatations du § I.6 :

$$a \sim Bi\ (p\ ,\ \pi_A)$$

et

$$c \sim Bi\ (q\ ,\ \pi_A)$$

On a que a et c tendent en distribution vers des variables aléatoires normales.
Donc, pour p et q assez grands :

$$a \approx N\ (p\pi_A\ ,\ p\,\pi_A\pi_{\bar{A}})$$

et

$$c \approx N\ (q\,\pi_A\ ,\ q\,\pi_A\pi_{\bar{A}})$$

Puisque

$$\begin{aligned} ad - bc &= a(q-c) - c(p-a) \\ &= qa - pc \end{aligned}$$

On a donc

$$ad - bc \approx N\,(\,qp\,\pi_A - pq\pi_A\,,\ v^2\,).$$

où

$$v^2 = q^2 p\,\pi_A \pi_{\bar{A}} + p^2 q\,\pi_A \pi_{\bar{A}}$$

La moyenne est nulle et la variance v^2 devient successivement :

$$\begin{aligned} v^2 &= pq\,\pi_A \pi_{\bar{A}}(p+q) \\ &= npq\,\pi_A \pi_{\bar{A}} \\ &\cong \frac{pqrs}{n} \end{aligned}$$

que l'on obtient en remplaçant π_A et $\pi_{\bar{A}}$ par r/m et s/m (estimateurs de π_A et $\pi_{\bar{A}}$)

Dès lors :

$$ad - bc \approx N\,(\,0\,,\frac{pqrs}{n}\,)$$

donc :

$$\frac{\sqrt{n}\,(\,ad - bc\,)}{\sqrt{pqrs}} \approx N\,(\,0\,,\,1\,)$$

et enfin :

$$\frac{n\,(\,ad - bc\,)^2}{pqrs} \approx \chi^2_1$$

ce qui n'est guère surprenant.

III.3 Distribution asymptotique de T (sous H_1)

A nouveau, en partant de

$$a \sim Bi\left(p , \frac{\pi_{AB}}{\pi_B}\right)$$

et

$$c \sim Bi\left(q , \frac{\pi_{A\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}}\right)$$

a et c tendent en distribution vers des variables aléatoires normales, c.à.d. pour p et q assez grands :

$$a \approx N\left(p\frac{\pi_{AB}}{\pi_B}, \ p\frac{\pi_{AB}\pi_{\bar{A}B}}{\pi_B^2}\right)$$

et

$$c \approx N\left(q\frac{\pi_{A\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}}, \ q\frac{\pi_{A\bar{B}}\pi_{\bar{A}\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}^2}\right)$$

On aura alors :

$$ad - bc = qa - pc$$

$$\approx N (m , v^2)$$

où l'on a :

$$m = pq\left(\frac{\pi_{AB}}{\pi_B} - \frac{\pi_{A\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}}\right)$$

et

$$v^2 = q^2 p\frac{\pi_{AB}\pi_{\bar{A}B}}{\pi_B^2} + p^2 q\frac{\pi_{A\bar{B}}\pi_{\bar{A}\bar{B}}}{\pi_{\bar{B}}^2}$$

Posons $\pi_{AB} = \pi_A . \pi_B + \varepsilon$

donc

$$\pi_{A\bar{B}} = \pi_A . \pi_{\bar{B}} - \varepsilon$$

$$\pi_{\bar{A}B} = \pi_{\bar{A}} . \pi_B - \varepsilon$$

$$\pi_{\bar{A}\bar{B}} = \pi_{\bar{A}} . \pi_{\bar{B}} + \varepsilon$$

Avec ces conventions, m devient successivement :

$$m = pq \left(\frac{\pi_A \pi_B + \varepsilon}{\pi_B} - \frac{\pi_A \pi_{\bar{B}} - \varepsilon}{\pi_{\bar{B}}} \right)$$

$$= pq \, \frac{\pi_A \pi_B \pi_{\bar{B}} - \pi_A \pi_B \pi_{\bar{B}} + \varepsilon (\pi_B + \pi_{\bar{B}})}{\pi_B \cdot \pi_{\bar{B}}}$$

$$= \frac{pq}{\pi_B \pi_{\bar{B}}} \varepsilon$$

La variance quant à elle devient :

$$v^2 = pq \left(\frac{q(\pi_A \pi_B + \varepsilon)(\pi_{\bar{A}} \pi_B - \varepsilon)}{\pi_B^2} + \frac{p(\pi_A \pi_{\bar{B}} - \varepsilon)(\pi_{\bar{A}} \pi_{\bar{B}} + \varepsilon)}{\pi_{\bar{B}}^2} \right)$$

$$= pq \left(\frac{q(\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B^2 + \varepsilon(\pi_A - \pi_{\bar{A}})\pi_B - \varepsilon^2)}{\pi_B^2} + \frac{p(\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_{\bar{B}}^2 + \varepsilon(\pi_A - \pi_{\bar{A}})\pi_{\bar{B}} - \varepsilon^2)}{\pi_{\bar{B}}^2} \right)$$

$$= pq \left(q \pi_A \pi_{\bar{A}} + p \pi_A \pi_{\bar{A}} \right) + O(\varepsilon)$$

$$= npq \, \pi_A \pi_{\bar{A}} + O(\varepsilon)$$

$$= \frac{pqrs}{n} + O(\varepsilon)$$

Si l'on néglige le terme en ε on a donc :

$$ad - bc \approx N \left(\frac{pq}{\pi_B \pi_{\bar{B}}} \varepsilon , \frac{pqrs}{n} \right)$$

En définitive :

$$\frac{\sqrt{n}\ (\ ad - bc\ )}{\sqrt{pqrs}} \approx N\ (\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pqrs}}\ \frac{pq}{\pi_B \pi_{\bar{B}}}\ \varepsilon,\ 1\ )$$

$$\approx N\ (\sqrt{n\ \pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}}\ \frac{\varepsilon}{\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}},\ 1\ )$$

En reprenant la définition de ρ :

$$\frac{\pi_{AB}\ \pi_{\bar{A}\bar{B}}}{\pi_{A\bar{B}}\ \pi_{\bar{A}B}} = \rho = \frac{(\pi_A \cdot \pi_B + \varepsilon)(\ \pi_{\bar{A}} \pi_{\bar{B}} + \varepsilon\ )}{(\pi_A \pi_{\bar{B}} - \varepsilon)(\ \pi_{\bar{A}} \pi_B - \varepsilon\ )}$$

et en développant en série de Taylor au voisinage de $\varepsilon = 0$, on a :

$$\rho = 1 + \frac{\varepsilon}{\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}} + O(\varepsilon^2)$$

Si on néglige le terme en ε^2 on trouve :

$$\frac{\varepsilon}{\pi_A\ \pi_{\bar{A}}\ \pi_B\ \pi_{\bar{B}}} = \rho - 1$$

et donc finalement

$$\frac{\sqrt{n}\ (\ ad - bc\ )}{\sqrt{pqrs}} \approx N\ (\ (\rho - 1)\sqrt{n\ \pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}},\ 1\ )$$

ou

$$\frac{n\ (\ ad - bc\ )^2}{pqrs} \approx \chi^2_{1,\delta}$$

Donc, T est distribuée asymptotiquement comme une variable aléatoire chi-carré décentrée à un degré de liberté, avec paramètre de non-centralité δ^2

où $$\delta = (\rho - 1)\sqrt{n\, \pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}}$$

Remarque :

Il ne faudra pas s'attendre à un résultat très précis pour l'approximation de la distribution de T sous H_1. En effet, ayant négligé des termes en ε et ε^2, on ne peut espérer un résultat valable que pour ε petit, c.à.d. ρ proche de 1 (dans H_1 mais pas trop loin de H_0).
On reviendra sur ce point ultérieurement.

III.4 Fonction de puissance asymptotique

Connaissant la distribution asymptotique de T (sous H_0 et sous H_1), on peut maintenant déterminer la fonction de puissance asymptotique.

Pour le test de niveau α :

" Rejeter H_0 si $T > q'_\alpha$ "

il faut trouver q'_α vérifiant la relation :

$$\Pr(\chi^2_1 \leq q'_\alpha) = 1 - \alpha$$

ou encore

$$\Pr(-\sqrt{q'_\alpha} \leq N(0,1) \leq \sqrt{q'_\alpha}) = 1 - \alpha$$

ce qui permet de déterminer q'_α aisément (en consultant les tables de la distribution normale).

Ceci étant fait, la fonction de puissance asymptotique vaut donc :

$$p'_\alpha(\rho_1) = 1 - \Pr(\chi^2_{1,\delta^2} \leq q'_\alpha)$$

où l'on a :

$$\delta = (\rho_1 - 1)\sqrt{n\, \pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}}$$

En constatant que

$$\Pr(\chi^2_{1,\delta^2} \leq q'_\alpha) = \Pr(-\sqrt{q'_\alpha} \leq N(\delta,1) \leq \sqrt{q'_\alpha})$$

$$= \Pr(-\delta - \sqrt{q'_\alpha} \leq N(0,1) \leq -\delta + \sqrt{q'_\alpha})$$

on obtient à nouveau la réponse en consultant les tables.

IV. RESULTATS NUMERIQUES

IV.1 Introduction

Ayant mis en place les bases théoriques nécessaires à ce travail, il s'agit maintenant de pouvoir analyser les résultats du calcul exact d'une part, et d'être en mesure de comparer ces résultats avec ceux du calcul asymptotique d'autre part. Pour cette raison, les calculs ont été faits sur ordinateur pour différentes valeurs des paramètres π_A et π_B. Avec chacune de ces valeurs, on a choisi plusieurs tailles d'échantillons n, et en se limitant pour une première analyse au cas où p/n égale π_B approximativement.

Voici le détail de ces choix :

1) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$

	n =	p +	q
a)	20	10	10
b)	30	15	15
c)	40	20	20
d)	50	25	25

2) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.4$

	n =	p +	q
a)	30	12	18
b)	40	16	24
c)	50	20	30
d)	60	24	36

3) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.333$

	n =	p +	q
a)	30	10	20
b)	45	15	30
c)	60	20	40
d)	75	25	50

Pour chacun de ces cas, on a construit les tables de la distribution exacte et asymptotique de T (pour cinq valeurs de ρ : 1. , 1.5 , 2. , 2.5 et 3.) et aussi les tables de la fonction de puissance (pour ρ = 1. (0.04) 3. et deux valeurs du niveau du test : α = 0.1 et 0.2).

Afin de pouvoir comparer les résultats des différents cas, il fallait que le niveau du test soit toujours le même. Pour cette raison, on a choisi de faire les calculs pour le test randomisé.

Quelques unes des tables sont présentées en annexe, de même que quelques graphiques (nettement plus "parlants" que des tables) reprenant certains de ces résultats.

IV.2 Résultats pour le calcul exact

De l'analyse de ces résultats ne ressort qu'une chose importante à laquelle on s'attendait :

pour ρ fixé, la puissance augmente avec la taille de l'échantillon.

ex.: 1) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$,

test de niveau $\alpha = 0.1$

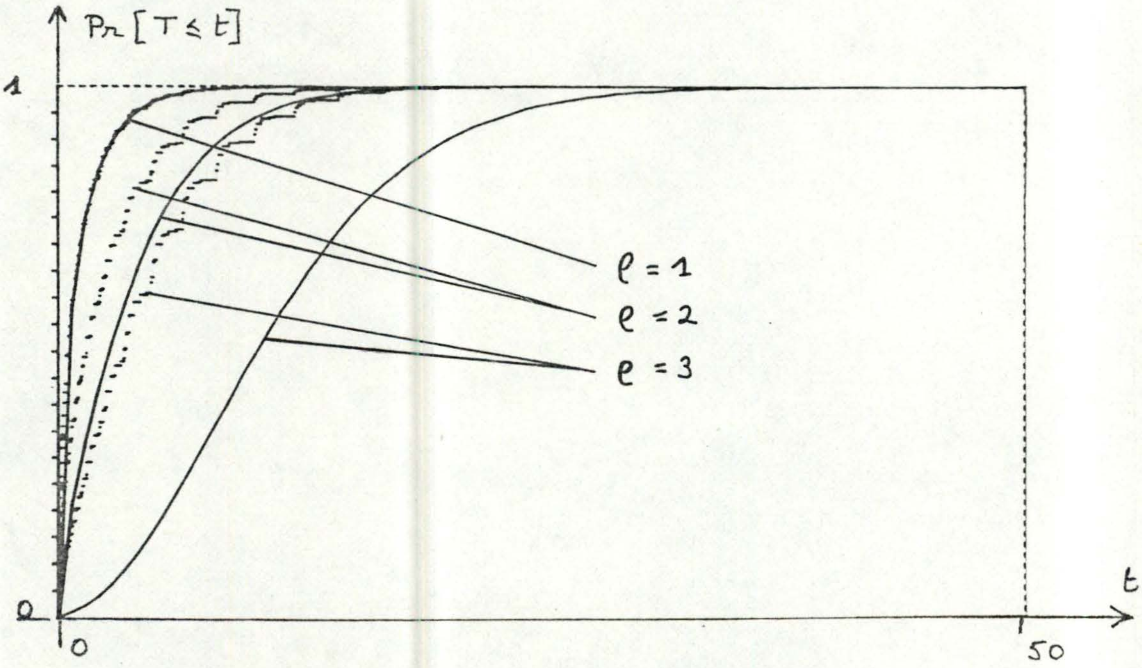
n	$p_\alpha(1.4)$	$p_\alpha(2.0)$	$p_\alpha(2.6)$
20	.12	.18	.25
30	.13	.22	.32
40	.14	.26	.39
50	.15	.30	.45

2) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.333$,
test de niveau $\alpha = 0.1$

n	$p_\alpha(1.4)$	$p_\alpha(2.0)$	$p_\alpha(2.6)$
30	.13	.22	.32
45	.15	.28	.42
60	.16	.33	.50
75	.17	.38	.58

IV.3 Confrontation avec les résultats asymptotiques

Un seul regard sur un des graphiques des distributions exactes et asymptotiques donne déjà le résultat de cette confrontation.

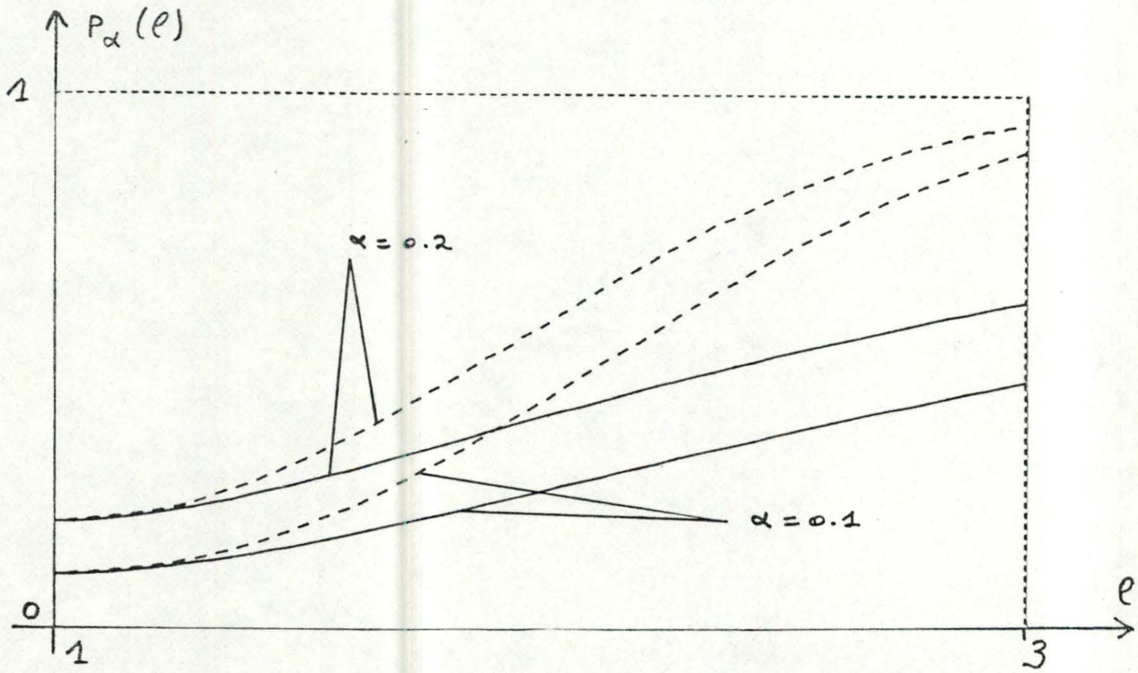


Distributions exactes (---) et asymptotiques (——) de T

n = 50 $\pi_A = 0.3$ $\pi_B = 0.4$

La distribution exacte de T sous H_0 est très bien approchée par la distribution asymptotique mais la situation pour H_1 se dégrade franchement et apparemment d'autant plus que ρ est loin de 1.

L'analyse des fonctions de puissance exactes et asymptotiques donnera une idée plus précise de cette dégradation. Ici aussi, un regard sur un graphique donne déjà beaucoup d'enseignements.



Fonctions de puissance exactes (——)
et asymptotiques (---)

n = 40 π_A = 0.3 π_B = 0.5

Partant du même point, la fonction de puissance asymptotique "décolle" très vite pour croître vers 1 beaucoup plus rapidement que la fonction de puissance exacte. L'approximation n'est bonne que dans un petit intervalle à droite de $\rho = 1$.

Si l'on compare en plus les résultats pour différentes tailles d'échantillons, on constate que l'erreur commise grandit avec n.

ex.: 1) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$,
test de niveau $\alpha = 0.2$

n	différence avec le résultat asymptotique		
	$\rho = 1.4$	$\rho = 2.0$	$\rho = 2.6$
20	.013	.110	.256
30	.020	.147	.302
40	.023	.170	.314
50	.028	.195	.308

2) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.4$,
test de niveau $\alpha = 0.2$

n	différence avec le résultat asymptotique		
	$\rho = 1.4$	$\rho = 2.0$	$\rho = 2.6$
30	.017	.133	.285
40	.019	.156	.300
50	.023	.177	.293
60	.025	.188	.273

Ceci rejoint également le fait que l'intervalle de valeurs de ℓ sur lequel on admet une certaine erreur entre la puissance exacte et la puissance asymptotique diminue quand n grandit.

ex.: 1) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.4$,

test de niveau $\alpha = 0.1$

n	ℓ maximum pour une erreur < que 0.01	0.05	0.1	0.2
30	1.32	1.68	1.88	2.24
40	1.28	1.60	1.80	2.08
50	1.28	1.56	1.76	2.04
60	1.28	1.56	1.72	2.00

2) $\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.333$,

test de niveau $\alpha = 0.1$

n	ℓ maximum pour une erreur < que 0.01	0.05	0.1	0.2
30	1.40	1.72	1.96	2.32
45	1.36	1.64	1.84	2.16
60	1.32	1.56	1.76	2.04
75	1.28	1.52	1.68	1.96

CONCLUSIONS

Comme on pouvait s'y attendre au vu de la remarque page III.6, les résultats numériques montrent que la fonction de puissance asymptotique constitue une mauvaise approximation de la puissance exacte.

En fait, cette approximation n'est bonne que dans un " voisinage de H_0 ", ce voisinage diminuant lorsque n grandit. Ceci rejoint le résultat annoncé dans Kendall & Stuart (vol.II p.453 n° 30.27) :

> " Suppose that we allow H_1 to approach H_0 as n increases (...). Then the distribution of X^2 is asymptotically a non-central χ^2 (...). "

Cependant, ce résultat est tellement mauvais, qu'on ne peut l'accepter et on en vient ainsi à la conclusion que la distribution de T sous H_1 n'est pas un chi-carré décentré.

Si on reprend l'expression de la distribution asymptotique de ad - bc (page III.3) :

$$ad - bc \approx N(m, v^2)$$

les valeurs exactes de m et v^2 sont donc :

$$m = \frac{pq}{\pi_B \pi_{\bar{B}}} \varepsilon$$

et

$$v^2 = \frac{pqrs}{n} + O(\varepsilon)$$

et donc

$$\frac{\sqrt{n}\ (\ ad - bc\ )}{\sqrt{pqrs}} \approx N\ \left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}}},\ 1 + O(\varepsilon)\ \right)$$

c.à.d. que T est distribué comme le carré d'une variable aléatoire normale de moyenne non nulle et de variance différente de l'unité.

Il se fait qu'il existe une classe de distributions qui répond à ce problème : les lois gamma décentrées (°).

On peut montrer que si n variables aléatoires indépendantes X_j suivent les lois normales $N(\mu_j, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $U = \sum_j X_j^2$ suit la loi :

$$\Gamma\ (n/2,\ m^2/2\sigma^2,\ 1/2\sigma^2)$$

où l'on a posé $m^2 = \sum_j \mu_j^2$

Remarquons que si $\sigma = 1$ on retrouve la loi chi-carré décentrée à n degrés de liberté et que si en plus $m = 0$ on a alors un chi-carré à n degrés de liberté.

Dans le cas présent, $n = 1$ et on trouve donc

$$T \approx \Gamma\ (1/2,\ m^2/2\sigma^2,\ 1/2\sigma^2)$$

où

$$m = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\pi_A \pi_{\bar{A}} \pi_B \pi_{\bar{B}}}}$$

et

$$\sigma^2 = 1 + O(\varepsilon)$$

(°) voir notamment J.R. BARRA & A. BAILLE " Problèmes de statistique mathématique " (p.52)

Si ce résultat n'apporte pas de simplification dans les calculs, il devrait au moins permettre une approximation nettement meilleure.

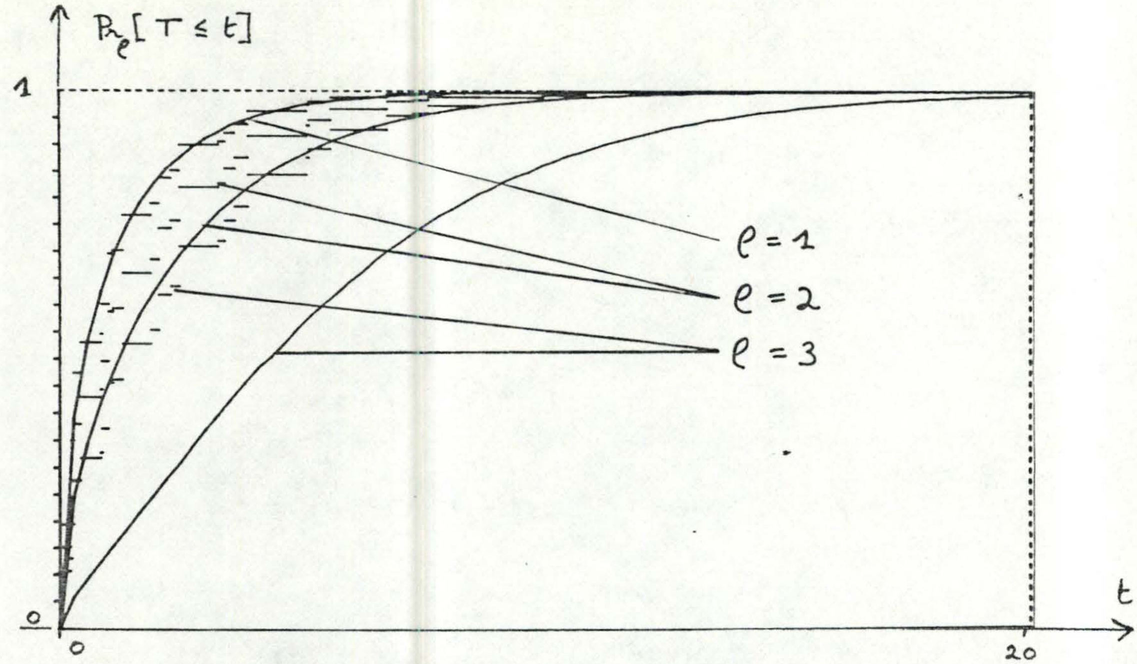
On peut se demander pourquoi on a conservé un résultat avec les chi-carrés décentrés qui n'est valable qu'avec des hypothèses très contraignantes alors qu'il existe un résultat plus général.

En fait, c'est probablement dû aux difficultés de calcul (et notamment de tabulation) qui pouvaient exister à l'époque de cette première découverte, mais maintenant que l'on a à notre disposition des ordinateurs qui simplifient très fort ces ennuis, il n'y a plus aucune raison de ne pas utiliser un résultat apparemment plus correct.

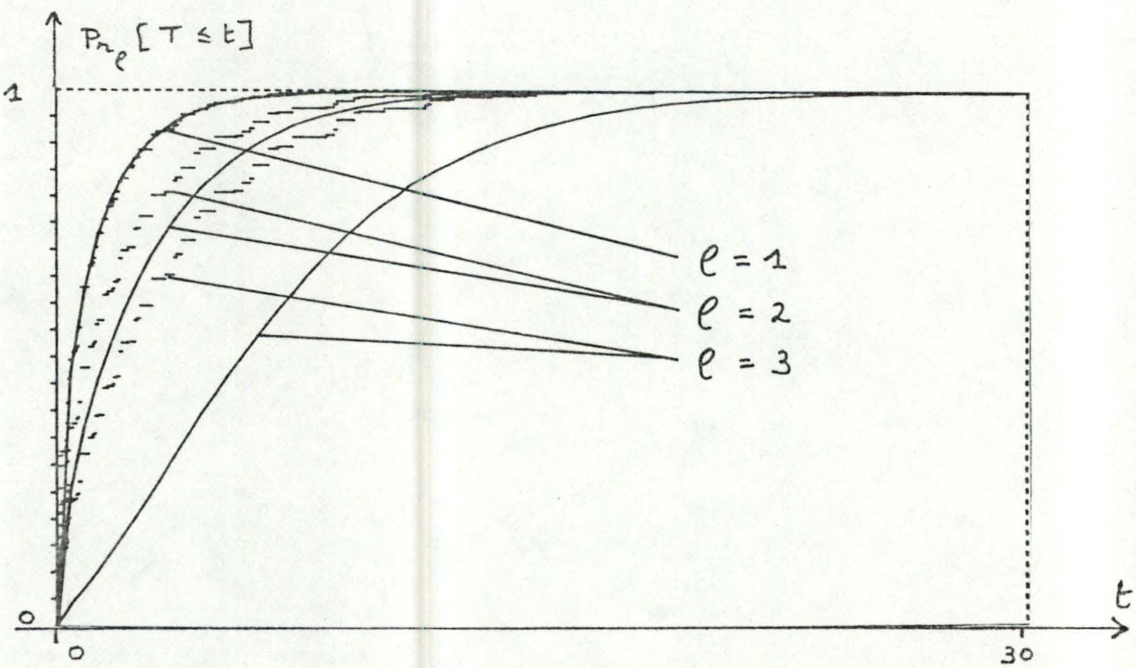
ANNEXE A

Graphes des distributions exactes et asymptotiques de T (quelques exemples).

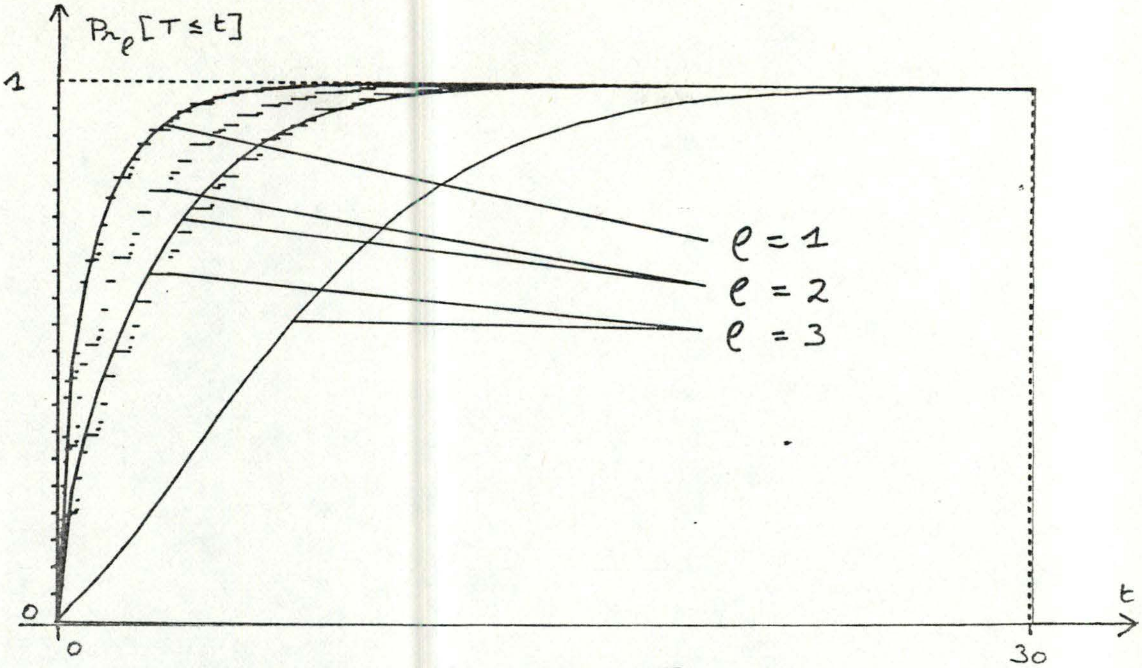
Trait discontinu : distribution exacte
Trait continu : distribution asymptotique



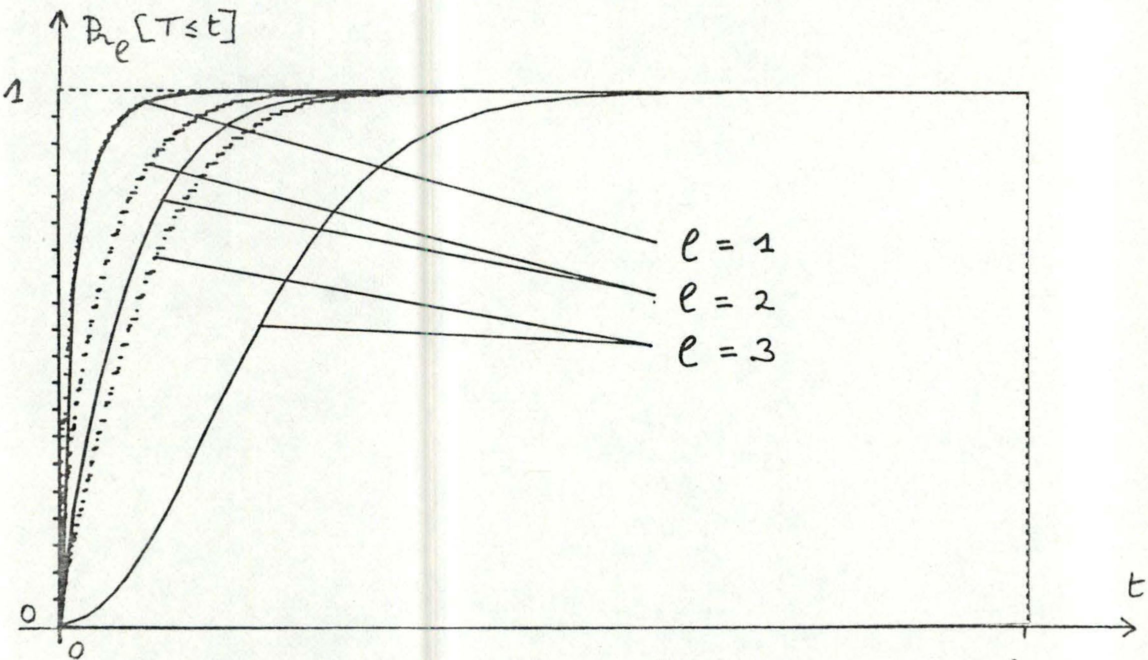
$m = 20 \qquad \pi_A = 0.3 \qquad \pi_B = 0.5$



$m = 30 \qquad \pi_A = 0.3 \qquad \pi_B = 0.333$



$n = 30 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.5$

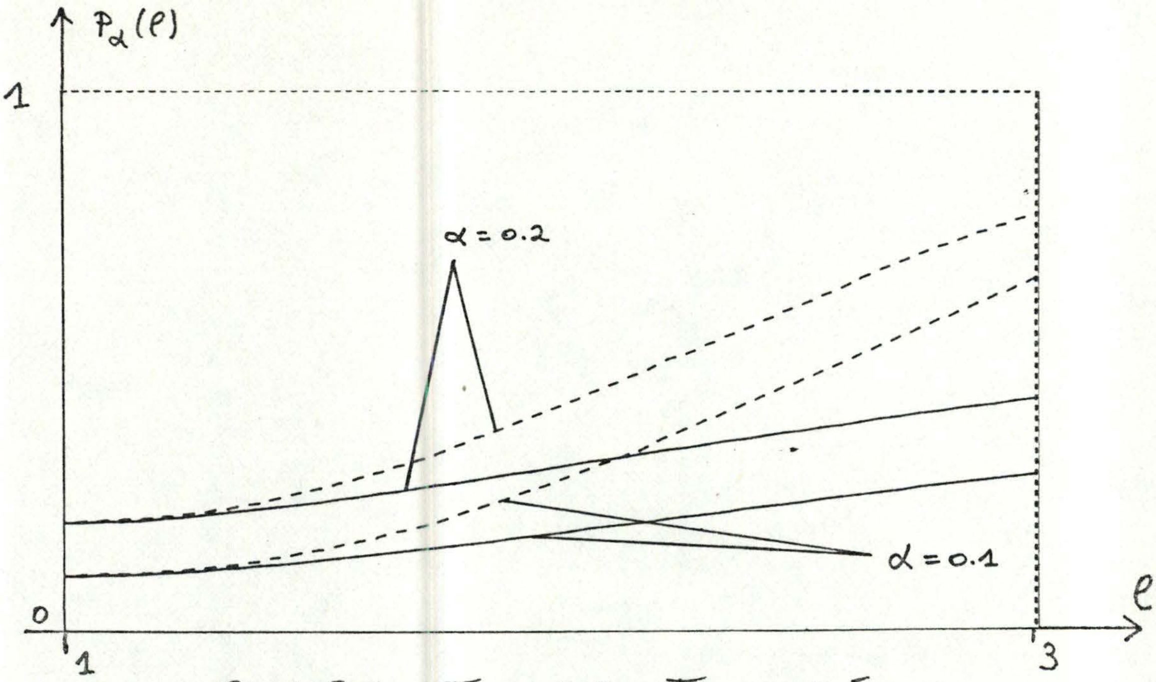


$n = 60 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.333$

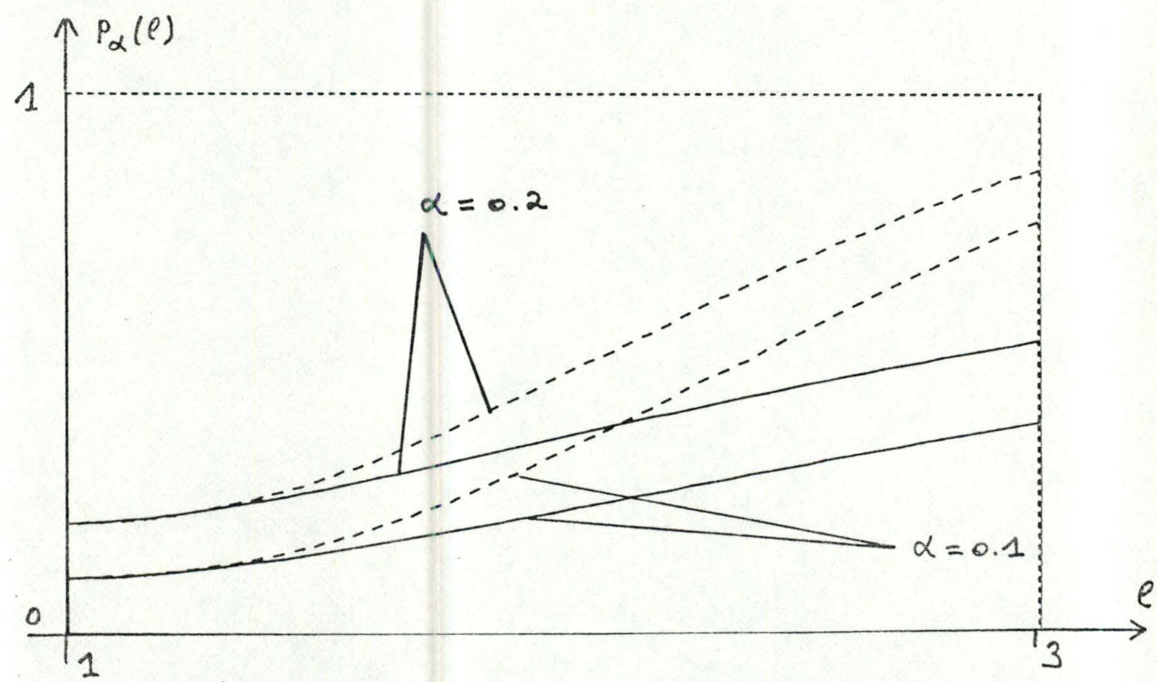
ANNEXE B

Graphes des fonctions de puissance exactes et asymptotiques (quelques exemples).

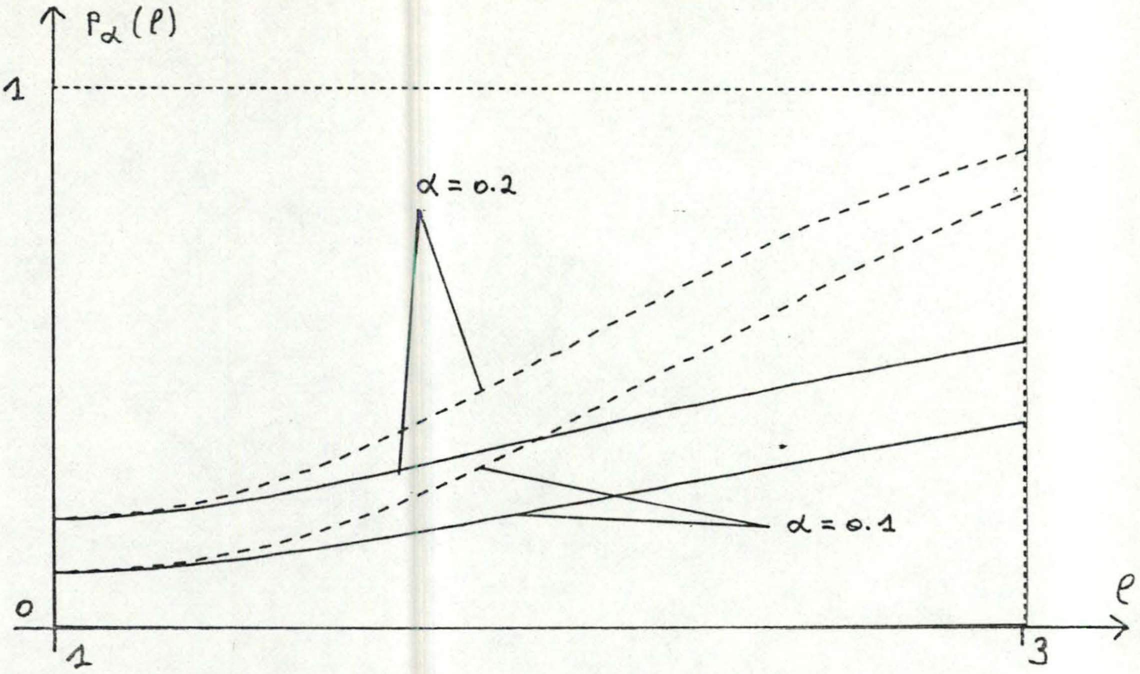
Trait continu : puissance exacte
Trait discontinu : puissance asymptotique



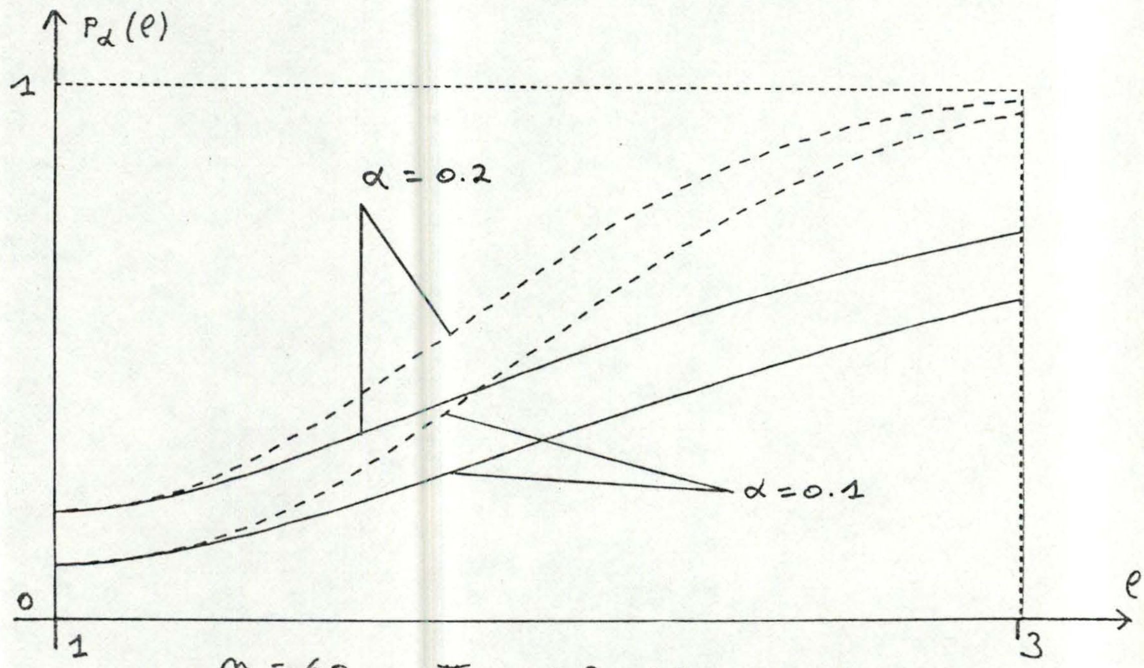
$n = 20 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.5$



$n = 30 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.333$



$n = 30 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.5$



$n = 60 \quad \pi_A = 0.3 \quad \pi_B = 0.333$

ANNEXE C

Tables de la distribution de T (exemples).

Colonne 1 : valeur de T

Colonne 2 : probabilité d'observer cette valeur

Colonne 3 : probabilité que T soit inférieur à cette valeur

Colonne 4 : différence avec la distribution asymptotique

C.1

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$

$n = 20$, $e = 1$

0.0000	0.1932	0.1932	0.1932
0.2020	0.0488	0.2420	-0.0980
0.2198	0.1075	0.3495	-0.0049
0.2667	0.1246	0.4741	0.0841
0.3922	0.0565	0.5306	0.0658
0.8000	0.0147	0.5453	-0.0813
0.8333	0.0568	0.6021	-0.0351
0.9524	0.0936	0.6956	0.0276
1.0526	0.0068	0.7025	0.0103
1.2500	0.0646	0.7671	0.0341
1.8182	0.0232	0.7903	-0.0295
1.9780	0.0484	0.8387	0.0003
2.2222	0.0132	0.8519	-0.0119
2.4000	0.0485	0.9003	0.0239
3.2000	0.0048	0.9051	-0.0199
3.3333	0.0177	0.9229	-0.0083
3.5294	0.0151	0.9379	-0.0007
3.8095	0.0249	0.9629	0.0141
5.0000	0.0113	0.9742	-0.0000
5.0505	0.0050	0.9792	0.0042
5.4945	0.0090	0.9881	0.0073
6.6667	0.0058	0.9939	0.0037
7.2000	0.0007	0.9946	0.0020
7.5000	0.0023	0.9969	0.0033
8.5714	0.0021	0.9989	0.0025
9.8990	0.0004	0.9994	0.0010
10.7692	0.0005	0.9999	0.0009
12.8000	0.0000	0.9999	0.0003
13.3333	0.0001	1.0000	-0.0000
16.3636	0.0000	1.0000	-0.0000
20.0000	0.0000	1.0000	-0.0000

c. 2

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$

$n = 20$, $\rho = 2$

0.0000	I	0.1514	I	0.1514	I	0.1514
0.2020	I	0.0372	I	0.1886	I	-0.0249
0.2198	I	0.0865	I	0.2751	I	0.0520
0.2667	I	0.1054	I	0.3805	I	0.1338
0.3922	I	0.0502	I	0.4307	I	0.1319
0.8000	I	0.0130	I	0.4437	I	0.0235
0.8333	I	0.0525	I	0.4962	I	0.0668
0.9524	I	0.0910	I	0.5872	I	0.1260
1.0526	I	0.0064	I	0.5936	I	0.1138
1.2500	I	0.0660	I	0.6596	I	0.1399
1.8182	I	0.0266	I	0.6861	I	0.0695
1.9780	I	0.0584	I	0.7445	I	0.1040
2.2222	I	0.0141	I	0.7587	I	0.0875
2.4000	I	0.0615	I	0.8202	I	0.1268
3.2000	I	0.0072	I	0.8274	I	0.0535
3.3333	I	0.0279	I	0.8553	I	0.0694
3.5294	I	0.0201	I	0.8753	I	0.0749
3.8095	I	0.0413	I	0.9166	I	0.0969
5.0000	I	0.0196	I	0.9362	I	0.0499
5.0505	I	0.0104	I	0.9467	I	0.0584
5.4945	I	0.0198	I	0.9665	I	0.0620
6.6667	I	0.0135	I	0.9800	I	0.0408
7.2000	I	0.0019	I	0.9820	I	0.0315
7.5000	I	0.0068	I	0.9887	I	0.0323
8.5714	I	0.0066	I	0.9953	I	0.0240
9.8990	I	0.0017	I	0.9970	I	0.0140
10.7692	I	0.0022	I	0.9992	I	0.0114
12.8000	I	0.0002	I	0.9994	I	0.0048
13.3333	I	0.0005	I	0.9999	I	0.0043
16.3636	I	0.0001	I	1.0000	I	0.0013
20.0000	I	0.0000	I	1.0000	I	0.0003

C. 3

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$

$n = 20$, $e = 3$

0.0000	I	0.1060	I	0.1060	I	0.1060
0.2020	I	0.0247	I	0.1307	I	0.0812
0.2198	I	0.0625	I	0.1932	I	0.1421
0.2667	I	0.0821	I	0.2753	I	0.2175
0.3922	I	0.0421	I	0.3174	I	0.2434
0.8000	I	0.0103	I	0.3277	I	0.2042
0.8333	I	0.0446	I	0.3724	I	0.2447
0.9524	I	0.0837	I	0.4560	I	0.3150
1.0526	I	0.0058	I	0.4618	I	0.3090
1.2500	I	0.0653	I	0.5271	I	0.3517
1.8182	I	0.0275	I	0.5546	I	0.3129
1.9780	I	0.0657	I	0.6202	I	0.3594
2.2222	I	0.0151	I	0.6353	I	0.3443
2.4000	I	0.0745	I	0.7098	I	0.4015
3.2000	I	0.0092	I	0.7190	I	0.3216
3.3333	I	0.0381	I	0.7571	I	0.3442
3.5294	I	0.0262	I	0.7833	I	0.3508
3.8095	I	0.0610	I	0.8443	I	0.3802
5.0000	I	0.0312	I	0.8755	I	0.3041
5.0505	I	0.0171	I	0.8926	I	0.3172
5.4945	I	0.0353	I	0.9280	I	0.3139
6.6667	I	0.0260	I	0.9539	I	0.2520
7.2000	I	0.0038	I	0.9578	I	0.2221
7.5000	I	0.0144	I	0.9721	I	0.2203
8.5714	I	0.0151	I	0.9872	I	0.1794
9.8990	I	0.0043	I	0.9915	I	0.1294
10.7692	I	0.0060	I	0.9975	I	0.1068
12.8000	I	0.0006	I	0.9981	I	0.0624
13.3333	I	0.0016	I	0.9997	I	0.0545
16.3636	I	0.0003	I	1.0000	I	0.0233
20.0000	I	0.0000	I	1.0000	I	0.0078

ANNEXE D

Tables de la fonction de puissance (exemples).

Colonne 1 : valeur de ℓ

Colonne 2 : puissance exacte

Colonne 3 : puissance asymptotique

Colonne 4 : différence

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.5$, $n = 50$

	$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.2$		
RO	PUIS	PUISA	DIF	PUIS	PUISA	DIF
1.0000	0.100	0.100	0.000	0.200	0.200	0.000
1.0400	0.101	0.103	0.002	0.201	0.203	0.002
1.0800	0.103	0.105	0.002	0.203	0.206	0.002
1.1200	0.106	0.108	0.003	0.207	0.211	0.003
1.1600	0.110	0.113	0.004	0.213	0.217	0.004
1.2000	0.115	0.120	0.006	0.219	0.226	0.007
1.2400	0.120	0.127	0.007	0.227	0.235	0.009
1.2800	0.127	0.137	0.011	0.235	0.248	0.013
1.3200	0.134	0.147	0.014	0.244	0.260	0.017
1.3600	0.141	0.160	0.019	0.253	0.277	0.023
1.4000	0.149	0.172	0.023	0.264	0.292	0.028
1.4400	0.158	0.188	0.031	0.274	0.311	0.037
1.4800	0.166	0.203	0.037	0.285	0.329	0.044
1.5200	0.175	0.221	0.046	0.296	0.351	0.054
1.5600	0.185	0.238	0.053	0.308	0.370	0.062
1.6000	0.195	0.259	0.065	0.320	0.394	0.075
1.6400	0.204	0.278	0.074	0.332	0.416	0.084
1.6800	0.214	0.301	0.087	0.344	0.441	0.097
1.7200	0.225	0.322	0.097	0.356	0.464	0.108
1.7600	0.235	0.347	0.112	0.368	0.490	0.122
1.8000	0.245	0.369	0.123	0.380	0.509	0.129
1.8400	0.256	0.395	0.139	0.392	0.536	0.144
1.8800	0.266	0.418	0.152	0.404	0.559	0.155
1.9200	0.277	0.445	0.168	0.416	0.586	0.170
1.9600	0.287	0.469	0.181	0.428	0.609	0.181
2.0000	0.298	0.497	0.199	0.440	0.635	0.195
2.0400	0.309	0.516	0.208	0.451	0.657	0.206
2.0800	0.319	0.540	0.221	0.463	0.678	0.216
2.1200	0.330	0.568	0.238	0.474	0.703	0.229
2.1600	0.340	0.591	0.251	0.485	0.723	0.238
2.2000	0.350	0.618	0.268	0.496	0.746	0.250
2.2400	0.361	0.641	0.280	0.507	0.765	0.257
2.2800	0.371	0.666	0.296	0.518	0.786	0.268
2.3200	0.381	0.688	0.307	0.528	0.803	0.274
2.3600	0.391	0.712	0.321	0.539	0.821	0.283
2.4000	0.401	0.732	0.331	0.549	0.837	0.288
2.4400	0.411	0.755	0.344	0.559	0.853	0.294
2.4800	0.421	0.773	0.353	0.569	0.866	0.298
2.5200	0.430	0.794	0.364	0.578	0.881	0.303
2.5600	0.440	0.811	0.371	0.587	0.892	0.305
2.6000	0.449	0.829	0.380	0.597	0.905	0.308
2.6400	0.458	0.844	0.386	0.606	0.915	0.309
2.6800	0.467	0.860	0.393	0.614	0.925	0.311
2.7200	0.476	0.873	0.397	0.623	0.933	0.310
2.7600	0.485	0.887	0.402	0.632	0.942	0.310
2.8000	0.494	0.898	0.404	0.640	0.948	0.309
2.8400	0.503	0.910	0.407	0.648	0.955	0.308
2.8800	0.511	0.919	0.408	0.656	0.961	0.305
2.9200	0.519	0.929	0.410	0.663	0.966	0.303
2.9600	0.528	0.937	0.409	0.671	0.971	0.300
3.0000	0.536	0.945	0.409	0.678	0.975	0.297

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.4$, $n = 50$

	$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.2$		
RO	PUIS	PUISA	DIF	PUIS	PUISA	DIF
1.0000	0.100	0.100	0.000	0.200	0.200	0.000
1.0400	0.101	0.103	0.002	0.201	0.203	0.002
1.0800	0.103	0.105	0.001	0.204	0.206	0.002
1.1200	0.106	0.108	0.002	0.209	0.211	0.002
1.1600	0.111	0.113	0.003	0.214	0.217	0.003
1.2000	0.116	0.119	0.003	0.221	0.224	0.004
1.2400	0.122	0.127	0.006	0.228	0.235	0.007
1.2800	0.128	0.136	0.008	0.237	0.246	0.009
1.3200	0.135	0.145	0.010	0.246	0.258	0.012
1.3600	0.143	0.158	0.016	0.256	0.274	0.019
1.4000	0.151	0.170	0.020	0.266	0.289	0.023
1.4400	0.159	0.183	0.024	0.277	0.305	0.029
1.4800	0.168	0.200	0.032	0.288	0.326	0.038
1.5200	0.177	0.216	0.038	0.299	0.344	0.045
1.5600	0.187	0.233	0.046	0.311	0.364	0.053
1.6000	0.197	0.253	0.056	0.323	0.387	0.065
1.6400	0.207	0.272	0.065	0.335	0.408	0.074
1.6800	0.217	0.291	0.074	0.347	0.430	0.083
1.7200	0.227	0.315	0.088	0.359	0.456	0.097
1.7600	0.238	0.336	0.098	0.371	0.479	0.108
1.8000	0.248	0.358	0.109	0.383	0.502	0.118
1.8400	0.259	0.384	0.125	0.395	0.524	0.129
1.8800	0.269	0.406	0.137	0.408	0.548	0.140
1.9200	0.280	0.433	0.153	0.420	0.574	0.155
1.9600	0.291	0.457	0.166	0.432	0.597	0.166
2.0000	0.302	0.481	0.179	0.443	0.620	0.177
2.0400	0.312	0.504	0.192	0.455	0.646	0.191
2.0800	0.323	0.528	0.205	0.467	0.668	0.201
2.1200	0.334	0.552	0.218	0.478	0.689	0.211
2.1600	0.344	0.580	0.235	0.489	0.713	0.224
2.2000	0.355	0.603	0.248	0.501	0.733	0.233
2.2400	0.366	0.626	0.260	0.512	0.752	0.241
2.2800	0.376	0.652	0.276	0.522	0.774	0.252
2.3200	0.386	0.674	0.287	0.533	0.791	0.258
2.3600	0.397	0.695	0.298	0.543	0.808	0.265
2.4000	0.407	0.719	0.312	0.554	0.827	0.273
2.4400	0.417	0.739	0.322	0.564	0.841	0.278
2.4800	0.427	0.758	0.331	0.573	0.855	0.282
2.5200	0.437	0.779	0.343	0.583	0.871	0.288
2.5600	0.446	0.797	0.350	0.593	0.883	0.290
2.6000	0.456	0.813	0.357	0.602	0.894	0.293
2.6400	0.465	0.831	0.366	0.611	0.907	0.296
2.6800	0.475	0.846	0.371	0.620	0.916	0.296
2.7200	0.484	0.862	0.378	0.628	0.926	0.298
2.7600	0.493	0.875	0.382	0.637	0.934	0.297
2.8000	0.502	0.887	0.385	0.645	0.942	0.296
2.8400	0.511	0.900	0.389	0.653	0.949	0.296
2.8800	0.520	0.910	0.390	0.661	0.955	0.294
2.9200	0.528	0.919	0.391	0.669	0.961	0.292
2.9600	0.537	0.929	0.393	0.677	0.966	0.290
3.0000	0.545	0.937	0.392	0.684	0.971	0.286

$\pi_A = 0.3$, $\pi_B = 0.333$, $n = 60$

	$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.2$		
RO	PUIS	PUISA	DIF	PUIS	PUISA	DIF
1.0000	0.100	0.100	0.000	0.200	0.200	0.000
1.0400	0.102	0.103	0.001	0.202	0.203	0.002
1.0800	0.104	0.105	0.001	0.205	0.206	0.001
1.1200	0.109	0.109	0.001	0.210	0.212	0.002
1.1600	0.114	0.114	0.000	0.216	0.218	0.002
1.2000	0.120	0.121	0.001	0.224	0.227	0.003
1.2400	0.127	0.130	0.003	0.232	0.239	0.006
1.2800	0.134	0.139	0.005	0.242	0.250	0.008
1.3200	0.143	0.151	0.008	0.252	0.265	0.012
1.3600	0.151	0.164	0.013	0.263	0.281	0.018
1.4000	0.161	0.177	0.016	0.275	0.297	0.022
1.4400	0.171	0.193	0.022	0.287	0.317	0.030
1.4800	0.181	0.211	0.029	0.299	0.338	0.039
1.5200	0.192	0.227	0.035	0.312	0.357	0.045
1.5600	0.203	0.247	0.044	0.325	0.381	0.055
1.6000	0.214	0.268	0.054	0.339	0.405	0.066
1.6400	0.226	0.291	0.065	0.352	0.430	0.078
1.6800	0.237	0.311	0.074	0.365	0.452	0.087
1.7200	0.249	0.336	0.087	0.379	0.479	0.100
1.7600	0.261	0.361	0.100	0.393	0.505	0.113
1.8000	0.273	0.384	0.110	0.406	0.524	0.118
1.8400	0.285	0.410	0.125	0.420	0.551	0.132
1.8800	0.297	0.437	0.140	0.433	0.578	0.145
1.9200	0.310	0.461	0.151	0.446	0.601	0.155
1.9600	0.322	0.489	0.167	0.459	0.627	0.168
2.0000	0.334	0.512	0.178	0.472	0.653	0.181
2.0400	0.346	0.536	0.190	0.485	0.675	0.190
2.0800	0.358	0.564	0.206	0.498	0.699	0.202
2.1200	0.370	0.591	0.221	0.510	0.723	0.213
2.1600	0.382	0.618	0.236	0.523	0.746	0.223
2.2000	0.394	0.641	0.247	0.535	0.765	0.230
2.2400	0.406	0.666	0.261	0.546	0.786	0.239
2.2800	0.417	0.691	0.274	0.558	0.805	0.247
2.3200	0.429	0.712	0.283	0.569	0.821	0.252
2.3600	0.440	0.736	0.295	0.581	0.839	0.259
2.4000	0.452	0.758	0.306	0.591	0.855	0.264
2.4400	0.463	0.776	0.314	0.602	0.869	0.266
2.4800	0.474	0.797	0.323	0.613	0.883	0.270
2.5200	0.484	0.816	0.332	0.623	0.896	0.273
2.5600	0.495	0.831	0.337	0.633	0.907	0.274
2.6000	0.505	0.848	0.343	0.643	0.918	0.275
2.6400	0.516	0.864	0.349	0.652	0.928	0.276
2.6800	0.526	0.879	0.353	0.661	0.937	0.276
2.7200	0.536	0.891	0.355	0.670	0.944	0.274
2.7600	0.546	0.903	0.358	0.679	0.951	0.272
2.8000	0.555	0.915	0.359	0.688	0.958	0.270
2.8400	0.565	0.924	0.359	0.696	0.963	0.267
2.8800	0.574	0.933	0.359	0.704	0.969	0.264
2.9200	0.583	0.942	0.359	0.712	0.973	0.261
2.9600	0.592	0.948	0.356	0.720	0.977	0.257
3.0000	0.601	0.955	0.355	0.728	0.980	0.253

ANNEXE E

Programme MSM01

Ce programme a été élaboré pour pouvoir obtenir les tables et graphiques des distributions et des fonctions de puissance exactes et asymptotiques.

E. 1

```
      PROGRAM MSM01
C     =============
C
      IMPLICIT INTEGER (A-Z)
      REAL CHI2,PROA*8,PROC*8
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
C
      CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      WRITE(2,9000)
   10 WRITE(2,9010)
      READ 8000,N,P,Q
      IF ( N.EQ.P+Q ) GOTO 20
      WRITE(2,9015)
      GOTO 10
   20 CALL CONSTR(&30,&40,&50)
      GOTO 70
   30 WRITE(2,9030)
      GOTO 510
   40 WRITE(2,9040)
      GOTO 510
   50 WRITE(2,9050) CHI2(NVAL)
      GOTO 510
   70 WRITE(2,9070)
   80 READ 8080,AS
      GOTO (100,200,300,400),AS
      WRITE(2,9075)
      GOTO 80
  100 CALL TDIS
      GOTO 500
  200 CALL GDIS
      GOTO 500
  300 CALL TPUIS
      GOTO 500
  400 CALL GPUIS
  500 WRITE(2,9500)
      READ 8999,AS
      IF ( AS.EQ.-398442432 ) GOTO 70
  510 WRITE(2,9M10)
      READ 8999,AS
      IF ( AS.EQ.-398442432 ) GOTO 10
      STOP
C
C         FORMATS DE LECTURE
C         ------------------
C
 8000 FORMAT(3I2)
 8080 FORMAT(I1)
 8999 FORMAT(A1)
```

E.2

```
C
C         FORMATS D'IMPRESSION
C         --------------------
C
 9000 FORMAT(///,' PROGRAMME MSM01 :'//,' RENSEIGNEMENTS',
     1          ' POUR LE TEST D''INDEPENDANCE'/,
     2          ' DANS LES TABLES 2 X 2'//)
 9010 FORMAT(/' VALEURS POUR N,P ET Q ? ( 3I2 )')
 9015 FORMAT(/' IL FAUT QUE N = P + Q ! CORRECTION :')
 9030 FORMAT(/' IL Y A PLUS DE 600 VALEURS DIFFERENTES.')
 9040 FORMAT(/' IL Y A PLUS DE 49 COUPLES DONNANT 0.')
 9050 FORMAT(/' IL Y A PLUS DE 12 COUPLES DONNANT ',F6.3)
 9070 FORMAT(/' QUE VOULEZ-VOUS ?'/,
     1          ' 1 : AVOIR DES TABLES DE LA DISTRIBUTION'/,
     2          ' 2 : AVOIR DES GRAPHES DE LA DISTRIBUTION'/,
     3          ' 3 : AVOIR DES TABLES DE LA FONCTION DE PUISSANCE'/,
     4          ' 4 : AVOIR DES GRAPHES DE LA FONCTION DE PUISSANCE')
 9075 FORMAT(/' DONNEZ UNE REPONSE SENSEE S.V.P !')
 9500 FORMAT(/' VOULEZ-VOUS AUTRE CHOSE AVEC LES MEMES N,P,Q ? (Y,N)')
 9510 FORMAT(/' VOULEZ-VOUS D''AUTRES N,P,Q ? (Y,N)')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.3

```
      SUBROUTINE CONSTR(*,*,*)
C     ========================
C
C        *1 : PLUS DE 600 VALEURS DIFFERENTES
C        *2 : PLUS DE 49 COUPLES DONNANT 0
C        *3 : PLUS DE 12 COUPLES DONNANT UNE MEME VALEUR
C
C        NVAL : NOMBRE TOTAL DE VALEURS POUR CHI2
C               ( Y COMPRIS 0 )
C
      IMPLICIT INTEGER (A-Z)
      REAL CHI2,CHI21
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
C
      NVAL=1
      NZPOS(1)=0
      DO 10 I=1,600
      NPOS(I,1)=0
   10 CHI2(I)=0.
      NP=P+1
      NQ=Q+1
      DO 70 I=1,NP
      A=I-1
      DO 70 J=1,NQ
      C=J-1
      NCH=A*Q-P*C
      IF ( NCH.NE.0 ) GOTO 20
      IF ( NZPOS(1).EQ.49 ) RETURN2
      CHI21=0.
      NZPOS(1)=NZPOS(1)+1
      IND=2*NZPOS(1)
      NZPOS(IND)=A+1
      NZPOS(IND+1)=C+1
      GOTO 70
   20 NCH=N*NCH*NCH
      CHI21=1.*NCH/(1.*P*Q*(A+C)*(N-A-C))
      N1=NVAL-1
      DO 30 K=1,N1
      IF ( CHI21 - CHI2(K) ) 50,40,30
   30 CONTINUE
      IF ( NVAL.EQ.601 ) RETURN1
      CHI2(NVAL)=CHI21
      NPOS(NVAL,1)=1
      NPOS(NVAL,2)=A+1
      NPOS(NVAL,3)=C+1
      NVAL=NVAL+1
      GOTO 70
   40 IF ( NPOS(K,1).EQ.12 ) GOTO 80
      NPOS(K,1)=NPOS(K,1)+1
      IND=2*NPOS(K,1)
```

E.4

```
      NPOS(K,IND)=A+1
      NPOS(K,IND+1)=C+1
      GOTO 70
   50 IF ( NVAL.EQ.601 ) RETURN1
      K1M=NVAL-K
      DO 60 K1=1,K1M
      IND1=NVAL-K1
      CHI2(IND1+1)=CHI2(IND1)
      DO 60 K2=1,17
   60 NPOS(IND1+1,K2)=NPOS(IND1,K2)
      CHI2(K)=CHI21
      NPOS(K,1)=1
      NPOS(K,2)=A+1
      NPOS(K,3)=C+1
      NVAL=NVAL+1
   70 CONTINUE
      WRITE(2,9000)
      READ 8000,AS
      IF ( AS.NE.-398442432 ) RETURN
   71 WRITE(2,9001)
      READ 8001,S
      IF ( S.NE.2.AND.S.NE.6 ) GOTO 71
      NN1=2*NZPOS(1)+1
      WRITE(S,9002) (NZPOS(II1),II1=2,NN1)
      NN1=NVAL-1
      DO 72 II1=1,NN1
      NN2=2*NPOS(II1,1)+1
   72 WRITE(S,9003)CHI2(II1),(NPOS(II1,II2),II2=2,NN2)
      READ 8000,NN1
      RETURN
   80 NVAL=K
      RETURN3
C
C          FORMATS DE LECTURE
C          ------------------
C
 8000 FORMAT(A1)
 8001 FORMAT(I1)
C
C          FORMATS D'IMPRESSION
C          --------------------
C
 9000 FORMAT(' ICI CONSTR , VOULEZ-VOUS UN PRINT ? (Y,N)')
 9001 FORMAT(' ICI (2) OU SUR LISTING (6) ?')
 9002 FORMAT(1H1/,(T1,6(3X,2I3)))
 9003 FORMAT(1X,F8.4,(T14,4(3X,2I3)))
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><<
      END
```

E.5

```
      SUBROUTINE ROOT(A,B,C,R1,R2,*,*,*)
C     ==================================
C
C         *1 : PAS DE RACINES
C         *2 : UNE RACINE
C         *3 : 2 RACINES
C
      DEL=B*B-4.*A*C
      IF ( DEL ) 1,2,3
    1 RETURN1
    2 R1=-1.*B/2./A
      R2=R1
      RETURN2
    3 DEL=SQRT(DEL)
      R1=(-1.*B-DEL)/2./A
      R2=(-1.*B+DEL)/2./A
      RETURN3
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
      END
```

```
      SUBROUTINE CALCUL(P,P1,PA,PAA,QAA,PCC,QCC,*)
C     ============================================
C
C         *1 : P NE CONVIENT PAS
C
      IF ( P.LE.O..OR.P.GE.1. ) RETURN1
      PAA1=P/P1
      IF ( PAA1.LE.O..OR.PAA1.GE.1. ) RETURN1
      PCC1=(PA-P)/(1.-P1)
      IF ( PCC1.LE.O..OR.PCC1.GE.1. ) RETURN1
      PAA=PAA1
      PCC=PCC1
      QAA=1.-PAA
      QCC=1.-PCC
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
      END
```

E.6

```
      SUBROUTINE ERR1(RO,P1,PA)
C     =========================
C
      WRITE(2,9000)RO,P1,PA
      RETURN
C
 9000 FORMAT(' LES VALEURS RO,P1,PA :',3F8.3/,
     1       ' SONT INCOMPATIBLES')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

```
      SUBROUTINE ERR2(RO,P1,PA)
C     =========================
C
      WRITE(2,9000)RO,P1,PA
      RETURN
C
 9000 FORMAT(' LES VALEURS RO,P1,PA :',3F8.3/,
     1       ' DONNENT 1 RACINE NE CONVENANT PAS')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

```
      SUBROUTINE ERR3(RO,P1,PA)
C     =========================
C
      WRITE(2,9000)RO,P1,PA
      RETURN
C
 9000 FORMAT(' LES VALEURS RO,P1,PA :',3F8.3/,
     1       ' DONNENT 2 RACINES CONVENANT')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

```
      SUBROUTINE ERR4(RO,P1,PA)
C     =========================
C
      WRITE(2,9000)RO,P1,PA
      RETURN
C
 9000 FORMAT(' LES VALEURS RO,P1,PA :',3F8.3/,
     1       ' DONNENT 2 RACINES NE CONVENANT PAS')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.7

```
      SUBROUTINE PREPR(RO,P1,PA,N,P,Q,*,*,*,*)
C     ========================================
C
C        *1 : RO,P1,PA INCOMPATIBLES
C        *2 : 1 RACINE NE CONVENANT PAS
C        *3 : 2 RACINES CONVENANT
C        *4 : 2 RACINES NE CONVENANT PAS
C
      INTEGER P,Q
      REAL*8 PROA,PROC
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
C
      IF ( ABS(RO-1.).GT.1.E-04 ) GOTO 2
      PAA=PA
      PCC=PA
      QAA=1.-PA
      QCC=QAA
      GOTO 7
    2 EQA=RO-1.
      EQB=-1.*(1.+EQA*(P1+PA))
      EQC=RO*P1*PA
      CALL ROOT(EQA,EQB,EQC,RP1,RP2,&10,&3,&4)
    3 CALL CALCUL(RP1,P1,PA,PAA,QAA,PCC,QCC,&11)
      GOTO 6
    4 CALL CALCUL(RP1,P1,PA,PAA,QAA,PCC,QCC,&5)
      CALL CALCUL(RP2,P1,PA,PAA,QAA,PCC,QCC,&6)
      GOTO 12
    5 CALL CALCUL(RP2,P1,PA,PAA,QAA,PCC,QCC,&13)
      PP=RP2
      GOTO 7
    6 PP=RP1
    7 PROA(1)=QAA
      PROA(1)=PROA(1)**P
      DO 8 I=1,P
    8 PROA(I+1)=PROA(I)*PAA*(P-I+1)/QAA/I
      PROC(1)=QCC
      PROC(1)=PROC(1)**Q
      DO 9 I=1,Q
    9 PROC(I+1)=PROC(I)*PCC*(Q-I+1)/QCC/I
      RETURN
   10 RETURN1
   11 RETURN2
   12 RETURN3
   13 RETURN4
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
      END
```

```
      SUBROUTINE TDIS
C     ===============
C
      INTEGER P,Q
      REAL*8 PROA,PROC,PRC,PRCHI2,DIF,DA
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
      DIMENSION RO(9)
C
      CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      WRITE(2,9000)
    1 WRITE(2,9001)
      READ 8000,P1,PA
      WRITE(2,9002)
      READ 8001,NRO
      WRITE(2,9003)
      DO 3 I=1,NRO
    3 READ 8003,RO(I)
      DO 20 I=1,NRO
      CALL PREPR(RO(I),P1,PA,N,P,Q,&7,&8,&9,&10)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 4 J=1,JL
    4 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      WRITE(6,7000)N,P,Q,P1,PA,RO(I)
      PRCHI2=0.D0
      WRITE(6,7001)PRCHI2,PRC,PRC,PRC
      K=NVAL-1
      NL=1
      DO 6 J=1,K
      PRCHI2=0.
      JL=NPOS(J,1)
      DO 5 J1=1,JL
    5 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(J,2*J1))*PROC(NPOS(J,2*J1+1))
      PRC=PRC+PRCHI2
      IF ( MOD(NL,40).EQ.0 ) WRITE(6,7010)
      NL=NL+1
      DIF=PRC-DA(CHI2(J),RO(I),P1,PA,N)
    6 WRITE(6,7001)CHI2(J),PRCHI2,PRC,DIF
      GOTO 20
    7 CALL ERR1(RO(I),P1,PA)
      GOTO 20
    8 CALL ERR2(RO(I),P1,PA)
      GOTO 20
    9 CALL ERR3(RO(I),P1,PA)
      GOTO 20
   10 CALL ERR4(RO(I),P1,PA)
   20 CONTINUE
      WRITE(2,9004)
```

E.9

```
      READ 8004,I
      IF ( I.EQ.-398442432 ) GOTO 1
      RETURN
C
C         FORMATS D'IMPRESSION SUR LISTING
C         ---------------------------------
C
 7000 FORMAT(1H1,//' TABLE DE LA DISTRIBUTION DE CHI2'//,
     1          ' N = ',I2,' P = ',I2,' Q = ',I2/,
     2          ' P1 = ',F5.3,' PA = ',F5.3,' RO = ',F8.3//)
 7001 FORMAT(1X,F10.4,'    I ',F10.4,'    I ',F10.4,'    I ',F10.4)
 7010 FORMAT(1H1,///////)
C
C         FORMATS DE LECTURE
C         ------------------
C
 8000 FORMAT(2F10.0)
 8001 FORMAT(I1)
 8003 FORMAT(F10.0)
 8004 FORMAT(A1)
C
C         FORMATS D'IMPRESSION SUR VIDEO
C         -------------------------------
C
 9000 FORMAT(//' TABLES DE LA DISTRIBUTION DE CHI2'/)
 9001 FORMAT(' VALEURS DE P1,PA ? (2F10.0)')
 9002 FORMAT(' COMBIEN DE VALEURS POUR RO ? (I1)')
 9003 FORMAT(' VALEURS DE RO ? (F10.0)')
 9004 FORMAT(' VOULEZ-VOUS D''AUTRES TABLES ? (Y,N)')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.10

```
      SUBROUTINE GDIS
C     ===============
C
      INTEGER P,Q,CONT,SUR
      REAL*8 PROA,PROC,PRC,PRCHI2
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
      DIMENSION RO(9)
C
      CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      WRITE(2,9000)
    1 WRITE(2,9001)
      READ 8000,P1,PA
      WRITE(2,9002)
      READ 8001,NRO
      WRITE(2,9003)
      DO 2 I=1,NRO
    2 READ 8002,RO(I)
    3 WRITE(2,9004)
      READ 8001,MODE
      WRITE(2,9005)
      READ 8001,CONT
      WRITE(2,9006)
      READ 8003,SUR
      WRITE(2,9007)
      READ 8004,ITRAIT
      CALL INITT(55)
      XMAX=CHI2(NVAL-1)
      IF ( MODE.EQ.1 ) XMAX=ALOG(1.+XMAX)
      CALL DWINDO(0.,XMAX,0.,1.)
      CALL TWINDO(50,950,100,600)
      CALL MOVEA(0.,0.)
      CALL DRAWA(XMAX,0.)
      CALL DASHA(XMAX,1.,21)
      CALL DASHA(0.,1.,21)
      CALL DRAWA(0.,0.)
      DO 4 I=1,19
      CALL MOVEA(0.,0.05*I)
    4 CALL DRWREL(-5,0)
      K=NVAL-2
      DO 9 I=1,NRO
      CALL PREPR(RO(I),P1,PA,N,P,Q,&13,&14,&15,&16)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 6 J=1,JL
    6 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      CALL MOVEA(0.,0.)
      IF ( CONT.NE.1 ) CALL MOVEA(0.,PRC)
      X=CHI2(1)
```

```
      IF ( MODE.EQ.1 ) X=ALOG(1.+X)
      CALL DRAWA(X,PRC)
      DO 8 J=1,K
      PRCHI2=0.D0
      JL=NPOS(J,1)
      DO 7 J1=1,JL
    7 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(J,2*J1))*PROC(NPOS(J,2*J1+1))
      PRC=PRC+PRCHI2
      IF ( CONT.NE.1 ) CALL MOVEA(X,PRC)
      X=CHI2(J+1)
      IF ( MODE.EQ.1 ) X=ALOG(1.+X)
    8 CALL DRAWA(X,PRC)
      IF ( CONT.NE.1 ) CALL MOVEA(X,1.)
    9 CALL DRAWA(XMAX,1.)
      CALL VCURSR(CONT,X,XMAX)
      IF ( SUR.NE.-398442432 ) GOTO 11
      DO 10 I=1,NRO
   10 CALL GDISA(RO(I),P1,PA,N,MODE,ITRAIT)
      CALL VCURSR(CONT,X,XMAX)
   11 CALL INITT(55)
      CALL ANMOFE
      WRITE(2,9008)
      READ 8003,I
      IF ( I.EQ.-398442432 ) GOTO 3
   12 WRITE(2,9009)
      READ 8003,I
      IF ( I.EQ.-398442432 ) GOTO 1
      RETURN
   13 CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      CALL ERR1(RO(I),P1,PA)
      GOTO 12
   14 CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      CALL ERR2(RO(I),P1,PA)
      GOTO 12
   15 CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      CALL ERR3(RO(I),P1,PA)
      GOTO 12
   16 CALL INITT(55)
      CALL ANMOFE
      CALL ERR4(RO(I),P1,PA)
      GOTO 12
C
C          FORMATS DE LECTURE
C          ------------------
C
 8000 FORMAT(2F10.0)
 8001 FORMAT(I1%
```

```
 8002 FORMAT(F10.0)
 8003 FORMAT(A1)
 8004 FORMAT(I2)
C
C           FORMATS D'IMPRESSION
C           --------------------
C
 9000 FORMAT(//' GRAPHES DE LA DISTRIBUTION DE CHI2'/)
 9001 FORMAT(' VALEURS DE P1,PA ? (2F10.0)')
 9002 FORMAT(' COMBIEN DE VALEURS POUR RO ? (I1)')
 9003 FORMAT(' VALEURS DE RO ? (F10.0)')
 9004 FORMAT(' ECHELLE LIN OU LOG ? (0 OU 1)')
 9005 FORMAT(' TRAIT CONTINU OU NON ? (1 OU 0)')
 9006 FORMAT(' VOULEZ-VOUS EN SURIMPRESSION LES GRAPHES'/,
     1       ' DE LA DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE ? (Y,N)')
 9007 FORMAT(' TRAIT POUR LA SURIMPRESSION ? (I2)')
 9008 FORMAT(' VOULEZ-VOUS D''AUTRES MODES ? (Y,N)')
 9009 FORMAT(' VOULEZ-VOUS D''AUTRES GRAPHES ? (Y,N)')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.13

```
      SUBROUTINE TPUIS
C     ================
C
      INTEGER P,Q,SUR
      REAL*8 PROA,PROC,PRC,PRCHI2,T,T1,TAILLE(9),DIF,PUISA
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
      COMMON /TP/ PUISA(50)
C
      WRITE(2,9000)
    1 WRITE(2,9001)
      READ 8000,NTAI
      WRITE(2,9002)
      DO 2 I=1,NTAI
    2 READ 8001,TAILLE(I)
      WRITE(2,9007)
      READ 8004,P1,PA
      WRITE(2,9003)
      READ 8001,ROMAX
      PAS=(ROMAX-1.)/50.
      DO 13 I=1,NTAI
      RO=1.
      DIF=0.D0
      WRITE(6,7000)N,P,Q,TAILLE(I)
      WRITE(6,7001)RO,TAILLE(I),TAILLE(I),DIF
      CALL TPUISA(N,P1,PA,ROMAX,TAILLE(I))
      CALL PREPR(RO,P1,PA,N,P,Q,&16,&17,&18,&19)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 3 J=1,JL
    3 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      T1=1.-TAILLE(I)
      II=0
    4 II=II+1
      JL=NPOS(II,1)
      PRCHI2=0.D0
      DO 5 J=1,JL
    5 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(II,2*J))*PROC(NPOS(II,2*J+1))
      IF ( PRC+PRCHI2-T1 ) 6,7,8
    6 PRC=PRC+PRCHI2
      GOTO 4
    7 T=1.D0
      GOTO 9
    8 T=(T1-PRC)/PRCHI2
    9 DO 13 I1=1,50
      RO=RO+PAS
      CALL PREPR(RO,P1,PA,N,P,Q,&16,&17,&18,&19)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 10 J=1,JL
```

E. 14

```
   10 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      II1=II-1
      DO 11 J1=1,II1
      JL=NPOS(J1,1)
      DO 11 J=1,JL
   11 PRC=PRC+PROA(NPOS(J1,2*J))*PROC(NPOS(J1,2*J+1))
      PRCHI2=0.D0
      JL=NPOS(II,1)
      DO 12 J=1UJL
   12 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(II,2*J))*PROC(NPOS(II,2*J+1))
      PRC=PRC+T*PRCHI2
      PRC=1.D0-PRC
      DIF=PUISA(I1)-PRC
   13 WRITE(6,7001)RO,PRC,PUISA(I1),DIF
      WRITE(2,9006)
      READ 8002,I
      IF ( I.EQ.-398442432 ) GOTO 1
      RETURN
   16 CALL ERR1(RO,P1,PA)
      RETURN
   17 CALL ERR2(RO,P1,PA)
      RETURN
   18 CALL ERR3(RO,P1,PA)
      RETURN
   19 CALL ERR4(RO,P1,PA)
      RETURN
C
C          FORMATS D'IMPRESSION SUR LISTING
C          --------------------------------
C
 7000 FORMAT(1H1///,' TABLES DE LA FONCTION DE PUISSANCE'/,
     1        ' N,P,Q = ',3I3,'  TAILLE = ',F5.3//,
     2        '    RO         PUIS        PUISA        DIF'/)
 7001 FORMAT(1X,F6.4,5X,F5.3,5X,F5.3,5X,F6.3)
C
C          FORMATS DE LECTURE
C          ------------------
C
 8000 FORMAT(I1)
 8001 FORMAT(F10.0)
 8002 FORMAT(A1)
 8003 FORMAT(I2)
 8004 FORMAT(2F10.0)
C
C          FORMATS D'IMPRESSION
C          --------------------
C
 9000 FORMAT(' TABLES DE LA FONCTION DE PUISSANCE'/)
 9001 FORMAT(' COMBIEN DE VALEURS POUR LA TAILLE ? (I1)')
 9002 FORMAT(' VALEURS DE LA TAILLE ? (F10.0)')

 9003 FORMAT(' RO MAXIMUM ? (F10.0)')
 9006 FORMAT(' VOULEZ-VOUS D''AUTRES TABLES ? (Y,N)')
 9007 FORMAT(' VALEURS DE P1,PA ? (2F10.0)')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.15

```
      SUBROUTINE GPUIS
C     ================
C
      INTEGER P,Q,SUR
      REAL*8 PROA,PROC,PRC,PRCHI2,T,T1,TAILLE(9)
      COMMON /TOUT/ CHI2(600),NPOS(600,25),NZPOS(99),N,P,Q,NVAL
      COMMON /PREP/ PROA(50),PROC(50)
C
      CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      WRITE(2,9000)
    1 WRITE(2,9001)
      READ 8000,NTAI
      WRITE(2,9002)
      DO 2 I=1,NTAI
    2 READ 8001,TAILLE(I)
      WRITE(2,9007)
      READ 8004,P1,PA
      WRITE(2,9003)
      READ 8001,ROMAX
      WRITE(2,9004)
      READ 8002,SUR
      WRITE(2,9005)
      READ 8003,ITRAIT
      CALL INITT(55)
      CALL DWINDO(1.,ROMAX,0.,1.)
      CALL TWINDO(50,950,100,600)
      CALL MOVEA(1.,0.)
      CALL DRAWA(ROMAX,0.)
      CALL DASHA(ROMAX,1.,21)
      CALL DASHA(1.,1.,21)
      CALL DRAWA(1.,0.)
      PAS=(ROMAX-1.)/50.
      DO 13 I=1,NTAI
      CALL MOVEA(1.,TAILLE(I))
      RO=1.
      CALL PREPR(RO,P1,PA,N,P,Q,&16,&17,&18,&19)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 3 J=1,JL
    3 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      T1=1.-TAILLE(I)
      II=0
    4 II=II+1
      JL=NPOS(II,1)
      PRCHI2=0.D0
      DO 5 J=1,JL
    5 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(II,2*J))*PROC(NPOS(II,2*J+1))
      IF ( PRC+PRCHI2-T1 ) 6,7,8
    6 PRC=PRC+PRCHI2
```

```
      GOTO 4
    7 T=1.D0
      GOTO 9
    8 T=(T1-PRC)/PRCHI2
    9 DO 13 I1=1,50
      RO=RO+PAS
      CALL PREPR(RO,P1,PA,N,P,Q,&16,&17,&18,&19)
      PRC=0.D0
      JL=NZPOS(1)
      DO 10 J=1,JL
   10 PRC=PRC+PROA(NZPOS(2*J))*PROC(NZPOS(2*J+1))
      II1=II-1
      DO 11 J1=1,II1
      JL=NPOS(J1,1)
      DO 11 J=1,JL
   11 PRC=PRC+PROA(NPOS(J1,2*J))*PROC(NPOS(J1,2*J+1))
      PRCHI2=0.D0
      JL=NPOS(II,1)
      DO 12 J=1,JL
   12 PRCHI2=PRCHI2+PROA(NPOS(II,2*J))*PROC(NPOS(II,2*J+1))
      PRC=PRC+T*PRCHI2
   13 CALL DRAWA(RO,1.-PRC)
      CALL VCURSR(I,X,Y)
      IF ( SUR.NE.-398442432 ) GOTO 15
      DO 14 I=1,NTAI
   14 CALL GPUISA(N,P1,PA,ROMAX,TAILLE(I),ITRAIT)
      CALL VCUR SR(I,X,Y)
   15 CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      WRITE(2,9006)
      READ 8002,I
      IF ( I.EQ.-398442432 ) GOTO 1
      RETURN
   16 CALL INITT(55)
      CALL ANMO IE
      CALL ERR1(RO,P1,PA)
      RETURN
   17 CALL INITT(55)
      CALL ANMODE
      CALL ERR2(RO,P1,PA)
      RETURN
   18 CALL INITT(55)
      CALL ANMOFE
      CALL ERR3(RO,P1,PA)
      RETURN
   19 CALL INITT(55)
      CALL ANMOFE
      CALL ERR4(RO,P1,PA)
      RETURN
C
```

E.17

```
C         FORMATS DE LECTURE
C         ------------------
C
 8000 FORMAT(I1)
 8001 FORMAT(F10.0)
 8002 FORMAT(A1)
 8003 FORMAT(I2)
 8004 FORMAT(2F10.0)
C
C         FORMATS D'IMPRESSION
C         --------------------
C
 9000 FORMAT(' GRAPHES DE LA FONCTION DE PUISSANCE'/)
 9001 FORMAT(' COMBIEN DE VALEURS POUR LA TAILLE ? (I1)')
 9002 FORMAT(' VALEURS DE LA TAILLE ? (F10.0)')
 9003 FORMAT(' RO MAXIMUM ? (F10.0)')
 9004 FORMAT(' VOULEZ-VOUS EN SURIMPRESSION LES GRAPHES'/,
     1       ' DE LA FONCTION DE PUISSANCE ASYMPTOTIQUE ? (Y,N)')
 9005 FORMAT(' QUEL TRAIT POUR LA SURIMPRESSION ? (I2)')
 9006 FORMAT(' VOULEZ-VOUS D''AUTRES GRAPHES ? (Y,N)')
 9007 FORMAT(' VALEURS DE P1,PA ? (2F10.0)')
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><<
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
      END
```

```
      SUBROUTINE GDISA(RO,P1,PA,N,MODE,ITRAIT)
C     ========================================
C
      RAC=SQRT(P1*PA*(1.-P1)*(1.-PA)*N)
      CALL MOVEA(0.,0.)
      PAS=1.*N/75.
      DELTA=RAC*(RO-1.)
      X=0.
      DO 1 I=1,75
      X=X+PAS
      Y=SQRT(X)
      PR=FG(Y-DELTA,1)+FG(Y+DELTA,1)
      Y=X
      IF ( MODE.EQ.1 ) Y=ALOG(1.+Y)
    1 CALL DASHA(Y,PR,ITRAIT)
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><<
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
      END
```

E.18

```
      REAL FUNCTION DA*8 (X,RO,P1,PA,N)
C     ==================================
C
      RAC=SQRT(P1*PA*(1.-P1)*(1.-PA)*N)
      RAC=RAC*(RO-1.)
      Y=SQRT(X)
      DA=FG(Y-RAC,1)+FG(Y+RAC,1)
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

```
      SUBROUTINE GPUISA(N,P1,PA,ROMAX,ALPHA,ITRAIT)
C     ===============================================
C
      REAL*8 ALPHA
C
      RAC=SQRT(P1*PA*(1.-P1)*(1.-PA)*N)
      CALL MOVEA(1.,ALPHA)
      X=FG((1.-ALPHA)/2.,-1)
      PAS=(ROMAX-1.)/50.
      RO=1.
      DO 1 I=1,50
      RO=RO+PAS
      DELTA=RAC*(RO-1.)
      PR=1.-FG(X-DELTA,1)-FG(X+DELTA,1)
    1 CALL DASHA(RO,PR,ITRAIT)
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

```
      SUBROUTINE TPUISA(N,P1,PA,ROMAX,ALPHA)
C     ========================================
C
      REAL*8 ALPHA,PUISA
      COMMON /TP/ PUISA(50)
C
      RAC=SQRT(P1*PA*(1.-P1)*(1.-PA)*N)
      X=FG((1.-ALPHA)/2.,-1)
      PAS=(ROMAX-1.)/50.
      RO=1.
      DO 1 I=1,50
      RO=RO+PAS
      DELTA=RAC*(RO-1.)
      PR=1.-FG(X-DELTA,1)-FG(X+DELTA,1)
    1 PUISA(I)=PR
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><
      END
```

E.19

```
      FUNCTION FG(X,J)
C     ================
C
      DIMENSION P(362)
      DATA P/.004,.0080,.0120,.0160,.0199,.0239,.0279,.0319,.0359,.0398,
     S      .0438,.0478,.0517,.0557,.0596,.0636,.0675,.0714,.0754,.0793,
     S      .0832,.0871,.0910,.0948,.0987,.1026,.1064,.1103,.1141,.1179,
     S      .1217,.1255,.1293,.1331,.1368,.1406,.1443,.1480,.1517,.1554,
     S      .1591,.1628,.1664,.1700,.1736,.1772,.1808,.1844,.1879,.1915,
     S      .1950,.1985,.2019,.2054,.2088,.2123,.2157,.2190,.2224,.2258,
     S      .2291,.2324,.2357,.2389,.2422,.2454,.2486,.2518,.2549,.2580,
     S      .2612,.2642,.2673,.2704,.2734,.2764,.2794,.2823,.2852,.2881,
     S      .2910,.2939,.2967,.2996,.3023,.3051,.3078,.3106,.3133,.3159,
     S      .3186,.3212,.3238,.3264,.3289,.3315,.3340,.3365,.3389,.3413,
     S      .3438,.3461,.3485,.3508,.3531,.3554,.3577,.3599,.3621,.3643,
     S      .3665,.3686,.3708,.3729,.3749,.3770,.3790,.3810,.3830,.3849,
     S      .3869,.3888,.3907,.3925,.3944,.3962,.3980,.3997,.4015,.4032,
     S      .4049,.4066,.4082,.4099,.4115,.4131,.4147,.4162,.4177,.4192,
     S      .4207,.4222,.4236,.4251,.4265,.4279,.4292,.4306,.4319,.4332,
     S      .4345,.4357,.4370,.4382,.4394,.4406,.4418,.4429,.4441,.4452,
     S      .4463,.4474,.4484,.4495,.4505,.4515,.4525,.4535,.4545,.4554,
     S      .4564,.4573,.4582,.4591,.4599,.4608,.4616,.4625,.4633,.4641,
     S      .4649,.4656,.4664,.4671,.4678,.4686,.4693,.4699,.4706,.4713,
     S      .4719,.4726,.4732,.4738,.4744,.4750,.4756,.4761,.4767,.4772,
     S      .4778,.4783,.4788,.4793,.4798,.4803,.4808,.4812,.4817,.4821,
     S      .4826,.4830,.4834,.4838,.4842,.4846,.4850,.4854,.4857,.4861,
     S      .4864,.4868,.4871,.4875,.4878,.4881,.4884,.4887,.4890,.4893,
     S      .4896,.4898,.4901,.4904,.4906,.4909,.4911,.4913,.4916,.4918,
     S      .4920,.4922,.4925,.4927,.4929,.4931,.4932,.4934,.4936,.4938,
     S      .4940,.4941,.4943,.4945,.4946,.4948,.4949,.4951,.4952,.4953,
     S      .4955,.4956,.4957,.4959,.4960,.4961,.4962,.4963,.4964,.4965,
     S      .4966,.4967,.4968,.4969,.4970,.4971,.4972,.4973,.4974,.4974,
     S      .4975,.4976,.4977,.4977,.4978,.4979,.4979,.4980,.4981,.4981,
     S      .4982,.4982,.4983,.4984,.4984,.4985,.4985,.4986,.4986,.4987,
     S      .4987,.4987,.4988,.4988,.4989,.4989,.4989,.4990,.4990,.4990,
     S      .4991,.4991,.4991,.4992,.4992,.4992,.4992,.4993,.4993,.4993,
     S      .4993,.4994,.4994,.4994,.4994,.4994,.4995,.4995,.4995,.4995,
     S      .4995,.4995,.4996,.4996,.4996,.4996,.4996,.4996,.4997,.4997,
     S      .4997,.4997,.4997,.4997,.4997,.4997,.4997,.4997,.4998,.4998,
     S      .4998,.4998,.4998,.4998,.4998,.4998,.4998,.4998,.4998,.4998,
     S      .4998,.4999/
C
      IF ( J.EQ.-1 ) GOTO 6
      IF ( X ) 3,1,2
    1 FG=0
      RETURN
    2 I=X*100
      IF ( I.GT.362 ) GOTO 4
      IF ( I.EQ.0 ) GOTO 1
      FG=P(I)
```

E.20

```
      RETURN
    3 I=-X*100
      IF ( I.GT.362 ) GOTO 5
      IF ( I.EQ.0 ) GOTO 1
      FG=-P(I)
      RETURN
    4 FG=0.5
      RETURN
    5 FG=-0.5
      RETURN
    6 IF ( X.GE.0.5 ) GOTO 8
      DO 7 I=1,362
      IF ( P(I)-X ) 7,9,10
    7 CONTINUE
    8 FG=3.9
      RETURN
    9 FG=0.01*I
      RETURN
   10 IF ( P(I)-X.LT.X-P(I-1) ) GOTO 9
      FG=0.01*(I-1.)
      RETURN
C<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
C><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><<
      END
```