

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Problèmes d'estimation en stéréologie

Dhanis, A.

Award date:
1979

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

PROBLEMES D'ESTIMATION EN
STEREOLOGIE

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de licencié en Sciences
mathématiques
par

Promoteur : J.P. Rasson

Anne DHANIS

Année académique 1978-1979



94625

"L'essentiel est invisible pour les yeux,
répéta le Petit Prince, afin de se
souvenir".

St. Exupéry (Le Petit Prince)

A Mamy, mon premier professeur, qui m'a
donné le goût des mathématiques !

PREFACE

Au début de cette étude sur les problèmes d'estimation en stéréologie, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis, par leurs conseils et leurs indications, d'entreprendre ce mémoire.

En particulier, je suis très reconnaissante envers Monsieur J.P. Rasson, professeur aux Facultés Notre-Dame de la Paix à Namur. C'est de tout coeur que je le remercie pour sa grande aide, et pour la peine qu'il s'est donné tout au long de l'année.

Je remercie également Monsieur J.M. Boudrenghien, assistant aux Facultés Notre-Dame de la Paix à Namur, pour sa précieuse collaboration.

J'adresse un tout grand merci à Thomas Bruss, pour l'aide qu'il m'a fournie en éclairant mes idées sur quelques points précis.

J'admire la précision avec laquelle Madame Oger-Le Roy a frappé mon travail, malgré le grand nombre d'expressions mathématiques.

Enfin, et surtout, je ne voudrais pas oublier de remercier mes parents qui m'ont donné l'occasion et la chance de choisir et de mener à bien les études que je désirais entreprendre. J'ai été marquée par leurs encouragements et leur compréhension.

o
o o

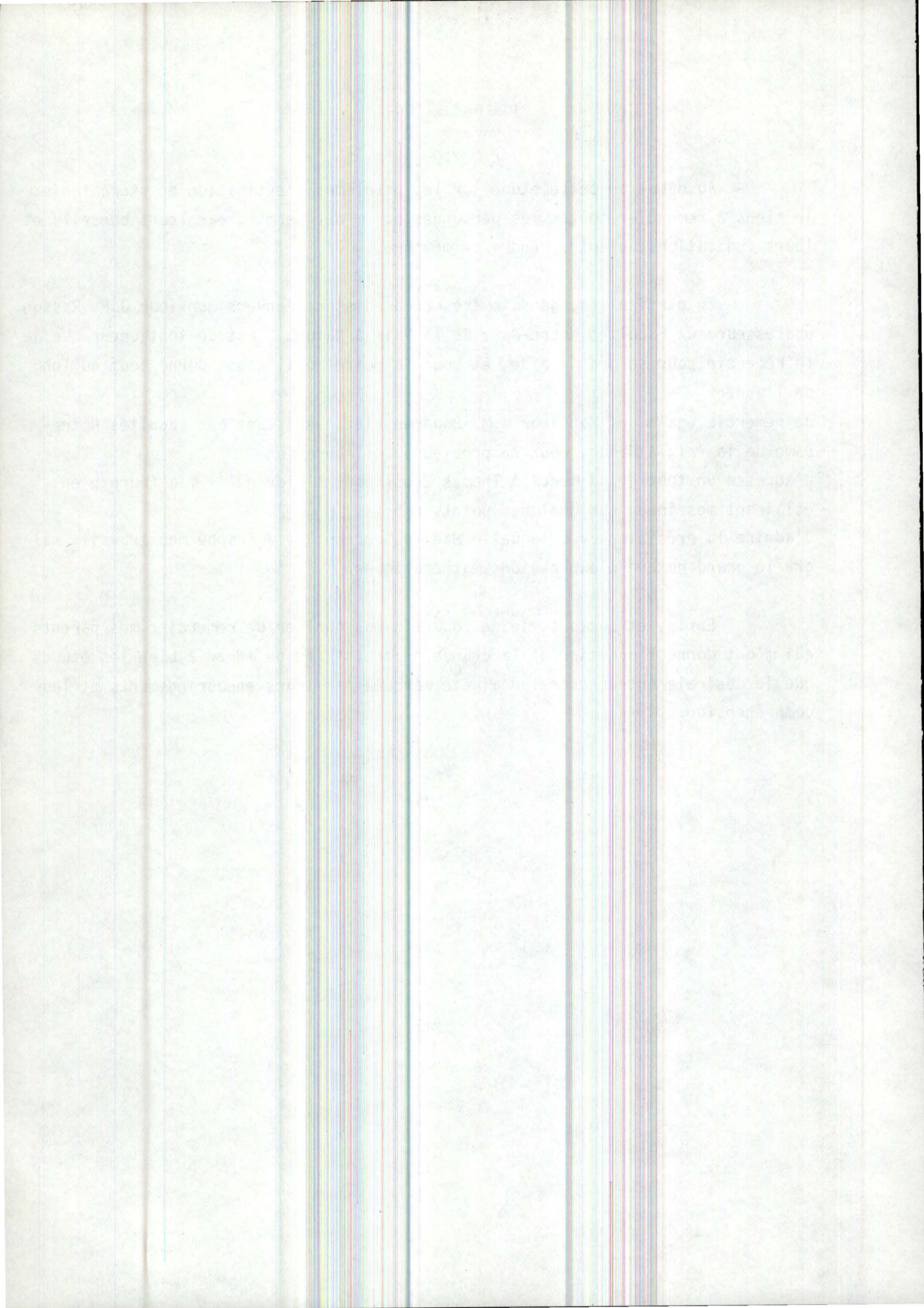
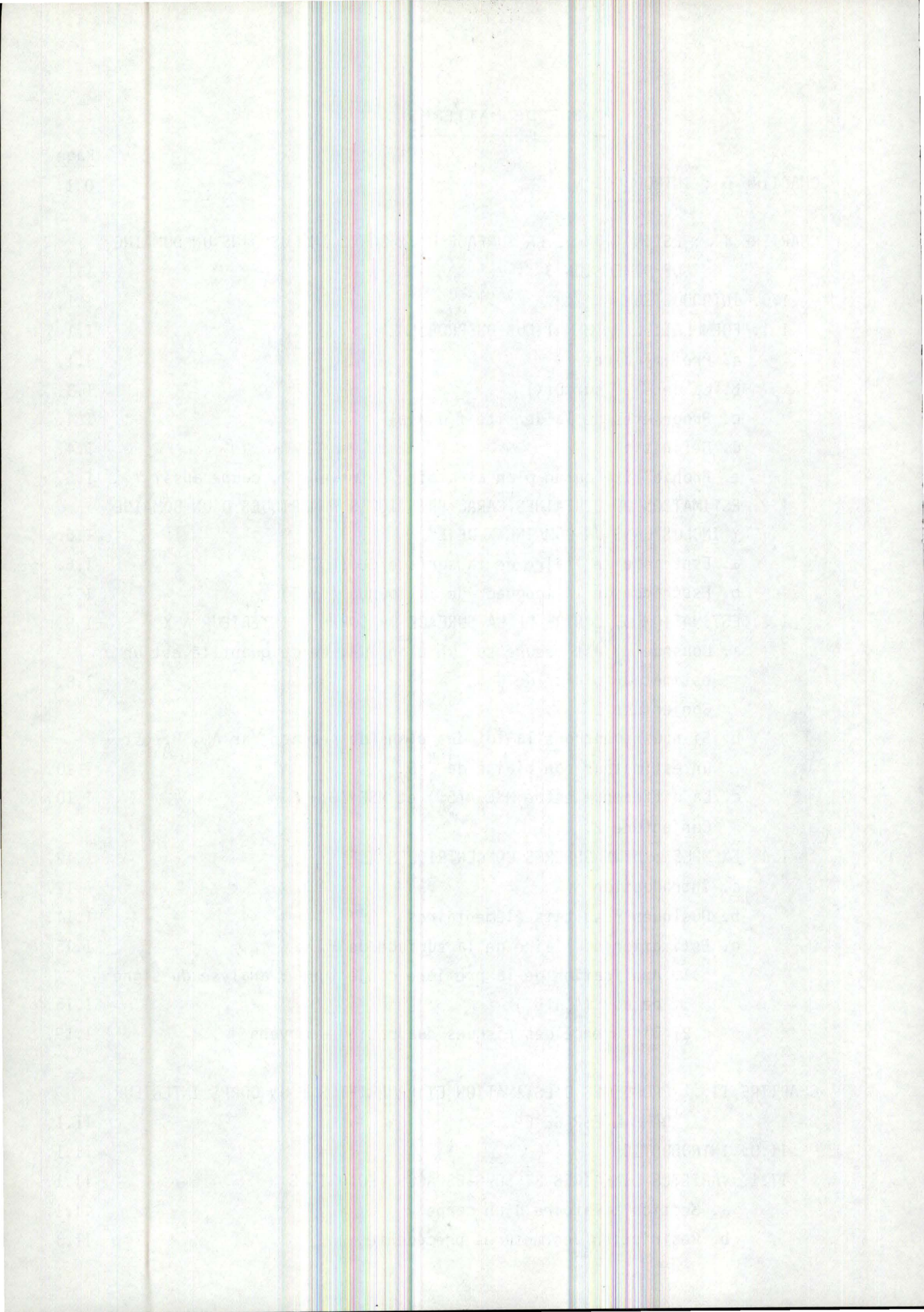
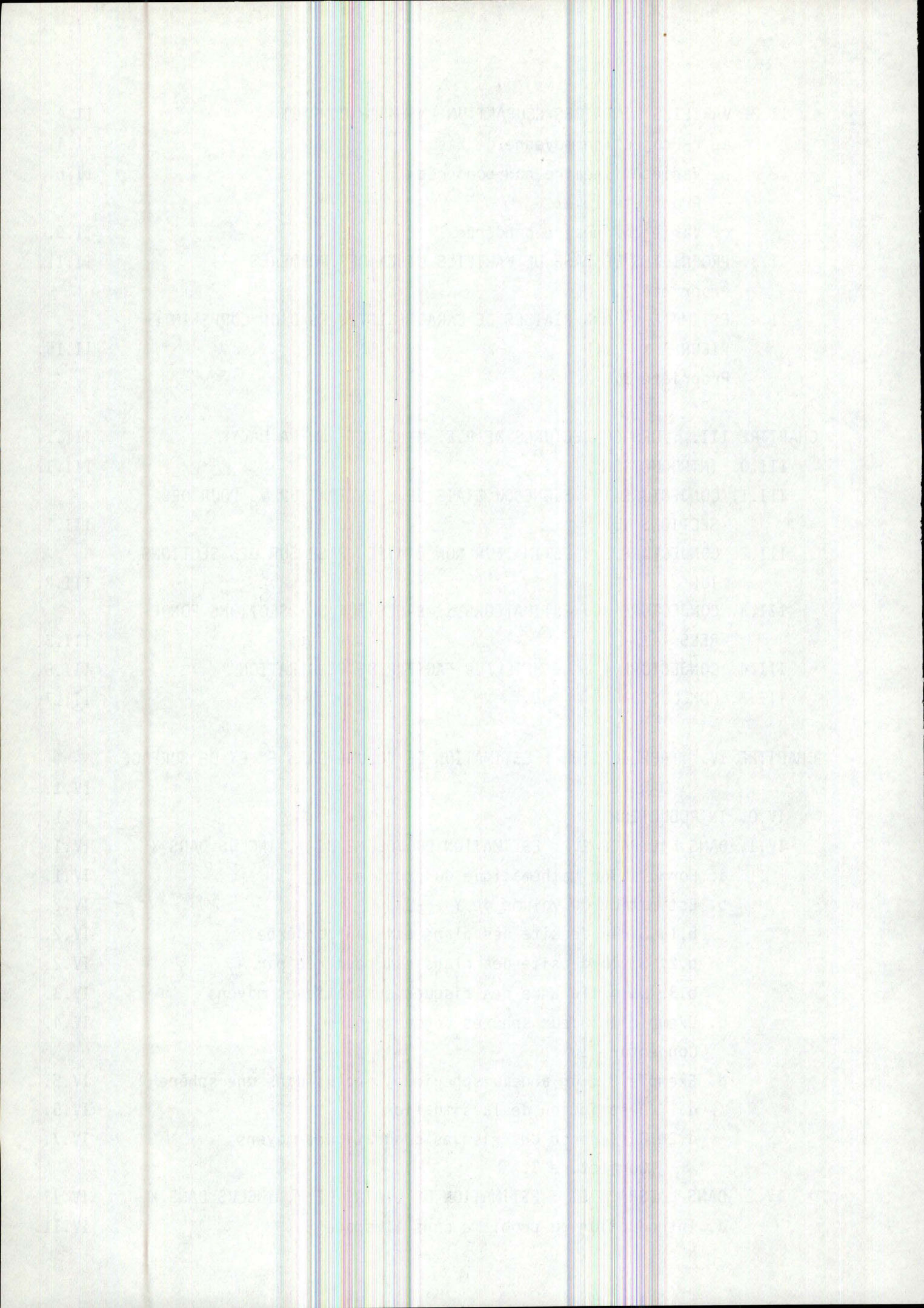


TABLE DE MATIERES

	<u>Page</u>
CHAPITRE 0 : INTRODUCTION	0.1.
CHAPITRE I. : ESTIMATION DE LA SURFACE D'UN CORPS INCLUS DANS UN DOMAINE DE DIMENSION 3	I.1.
I.0. INTRODUCTION	I.1.
I.1. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME	I.1.
a. Préliminaires	I.1.
b. La densité sur $D(X)$	I.3.
c. Propriétés de la densité $f(\theta, \phi, p)$	I.4.
d. Définition	I.4.
e. Probabilité qu'un plan aléatoire à travers X , coupe aussi Y	I.5.
I.2. ESTIMATION DE CERTAINES CARACTÉRISTIQUES NUMÉRIQUES D'UN DOMAINE Y INCLUS DANS UN DOMAINE X DE E^3	I.6.
a. Espérance de l'aire de la surface de $(X \cap T)$	I.6.
b. Espérance de la longueur de la courbe $(\delta Y \cap T)$	I.7.
I.3. ESTIMATION DE L'AIRES DE LA SURFACE DU CORPS Y INTÉRIEUR À X	I.8.
a. Lorsque B_A est mesuré sur un plan IUR, cette quantité est un estimateur biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$	I.8.
Conjecture 1.	
b. Si nous pondérons la loi des plans de section par A_X , B_A est un estimateur non biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$	I.10.
c. La différence entre $MSE_A(B_A)$ et $MSE(B_A)$	I.10.
Conjecture 2.	
I.4. EXEMPLE : DEUX SPHERES CONCENTRIQUES X ET Y	I.12.
a. Introduction	I.12.
b. Quelques résultats élémentaires	I.14.
c. Estimation de l'aire de la surface de Y	I.15.
c.1. Application de la première conjecture : analyse du signe de $\text{cov}(A_X, B_A)$	I.15.
c.2. Différence des risques quadratiques moyens	I.19.
CHAPITRE II. : PROBLÈMES D'ESTIMATION ET PROPRIÉTÉS D'UN CORPS INTÉRIEUR DANS L'ESPACE E^n	II.1.
II.0. INTRODUCTION	II.1.
II.1. VARIÉTÉS LINÉAIRES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS	II.1.
a. Section aléatoire d'un corps	II.1.
b. Restriction des mesures précédentes	II.3.

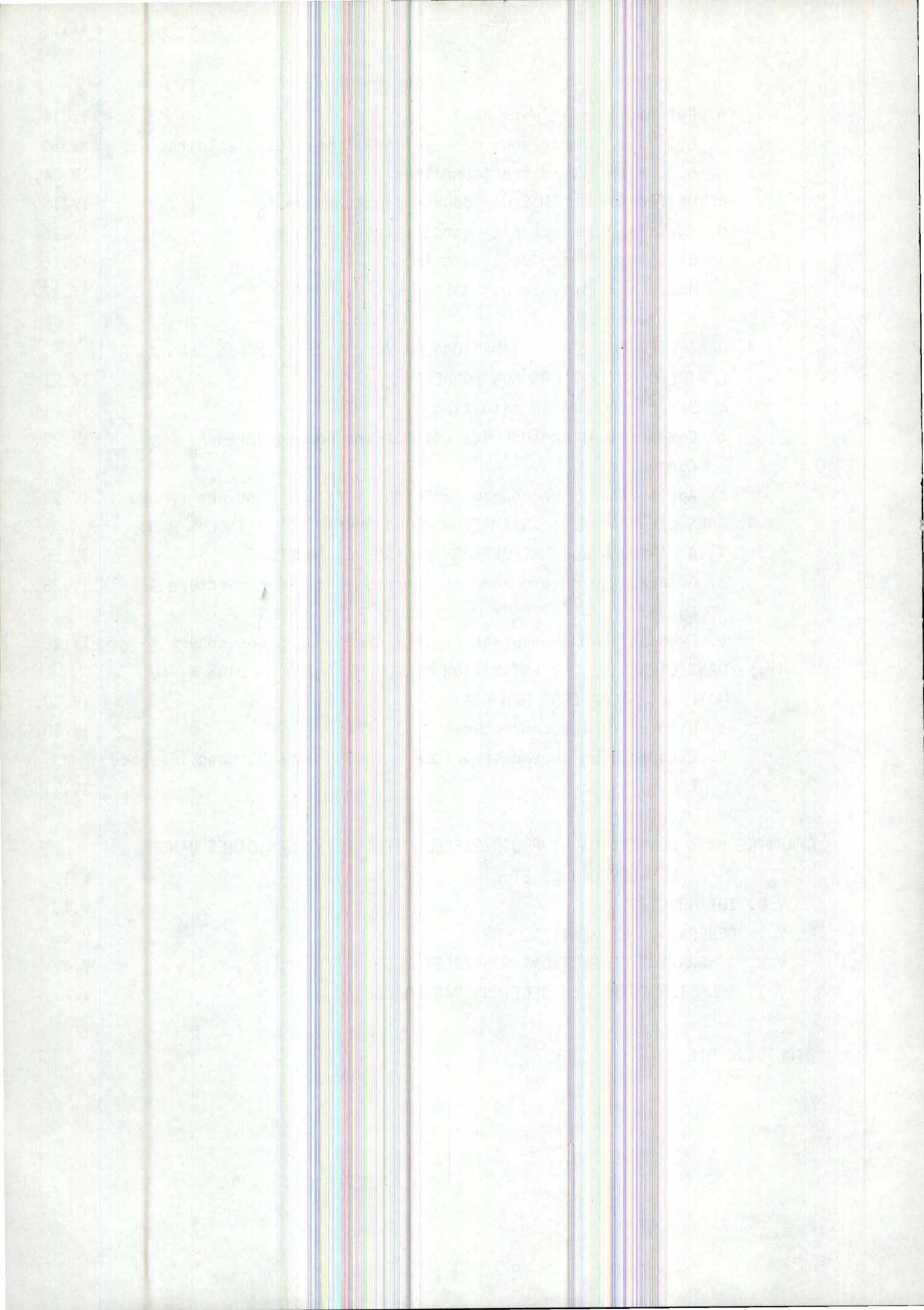


II.2. VARIETES LINEAIRES COUPANT UN ENSEMBLE COMPACT	II.4.
a. r -Projection moyenne de X sur L_r^n	II.4.
b. Variété linéaire non pondérée	II.6.
Propriété 1.	
c. Variété linéaire pondérée	II.9.
II.3. PROPRIETES DE BASE DE VARIETES LINEAIRES PONDERES	II.11.
Propriété 2.	
II.4. ESTIMATEURS NON BIAISES DE CARACTERISTIQUES D'UN CORPS INTERIEUR A X	II.15.
Propriété 3.	
CHAPITRE III. : LES CONJECTURES DE R.E. MILES ET PAMELA DAVY	III.1.
III.0. INTRODUCTION	III.1.
III.1. CONJECTURE 1 : SIGNE DU BIAIS DE L'ESTIMATEUR α_β POUR DES SECTIONS IUR	III.1.
III.2. CONJECTURE 2 : ESTIMATEUR NON BIAISE, BASE SUR DES SECTIONS IUR	III.2.
III.3. CONJECTURE 3 : ESTIMATEURS α_β BASES SUR DES SECTIONS PONDEREES	III.3.
III.4. CONJECTURE 4 : LE MEILLEUR FACTEUR DE PONDERATION	III.5.
III.5. CONCLUSION	III.7.
CHAPITRE IV. : APPLICATION : ESTIMATION DE VOLUME DANS E^3 ET DE SURFACE DANS E^2	IV.1.
IV.0. INTRODUCTION	IV.1.
IV.1. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DU VOLUME DE Y , INCLUS DANS X	IV.1.
a. Formulation mathématique du problème	IV.1.
b. Estimation du volume de Y	IV.2.
b.1. Si la densité des plans est non pondérée	IV.2.
b.2. Si la densité des plans est pondérée par A_X	IV.2.
b.3. La différence des risques quadratiques moyens	IV.3.
c. Exemple 1 : deux sphères concentriques	IV.4.
Conjecture 1.	
d. Exemple 2 : un anneau sphérique, inclus dans une sphère	IV.5.
d.1. Description de la situation	IV.5.
d.2. Différence des risques quadratiques moyens	IV.7.
Conjecture 3.	
IV.2. DANS L'ESPACE E^2 : ESTIMATION DE L'AIRE DE Y , INCLUS DANS X	IV.11.
a. Introduction du problème dans l'espace E^2	IV.11.



b. Estimation de l'aire de Y	IV.14.
b.1. Une formule pour des sections linéaires aléatoires	IV.14.
b.2. Estimateurs fractionnaires de $A(Y)$	IV.14.
c. Différence des MSE des deux estimateurs de A_A	IV.15.
d. Exemple : deux cercles concentriques X et Y	IV.16.
d.1. Description de l'exemple	IV.16.
d.2. La différence des MSE de L_L	IV.17.
Conjecture 3.	
IV.3. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATIONS DU VOLUME DE Y INCLUS DANS X, A L'AIDE D'ESTIMATEURS NON PONDERES	IV.21.
a. Description de la situation	IV.21.
b. Comparaisons des MSE des estimateurs non pondérés A_A et ϵ	IV.22.
Conjecture 2.	
c. Application : un anneau sphérique Y inclus dans une sphère X	IV.23.
IV.4. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DE LA SURFACE DE Y INCLUS DANS X, A L'AIDE D'ESTIMATEURS NON BIAISES ET PONDERES	IV.25.
a. Description du problème et expression de la conjecture 4	IV.25.
Conjecture 4.	
b. Exemple : un anneau sphérique Y inclus dans une sphère X	IV.26.
IV.5. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DU VOLUME Y INCLUS DANS X, AU MOYEN D'ESTIMATEURS NON BIAISES	IV.30.
a. Lien entre les conjectures 2, 3 et 4	IV.30.
b. Exemple : un anneau sphérique Y inclus dans X, dans l'espace E^3	IV.31.
CHAPITRE V. : GENERATION ET PROPRIETES DES SECTIONS ALEATOIRES DANS LES ESPACES E^3 ET E^2	V.1.
V.0. INTRODUCTION	V.1.
V.1. GENERATION DE SECTIONS IUR	V.1.
V.2. GENERATION DE SECTIONS PONDEREES	V.4.
V.3. RELATION ENTRE LES SECTIONS PONDEREES	V.7.

BIBLIOGRAPHIE



INTRODUCTION

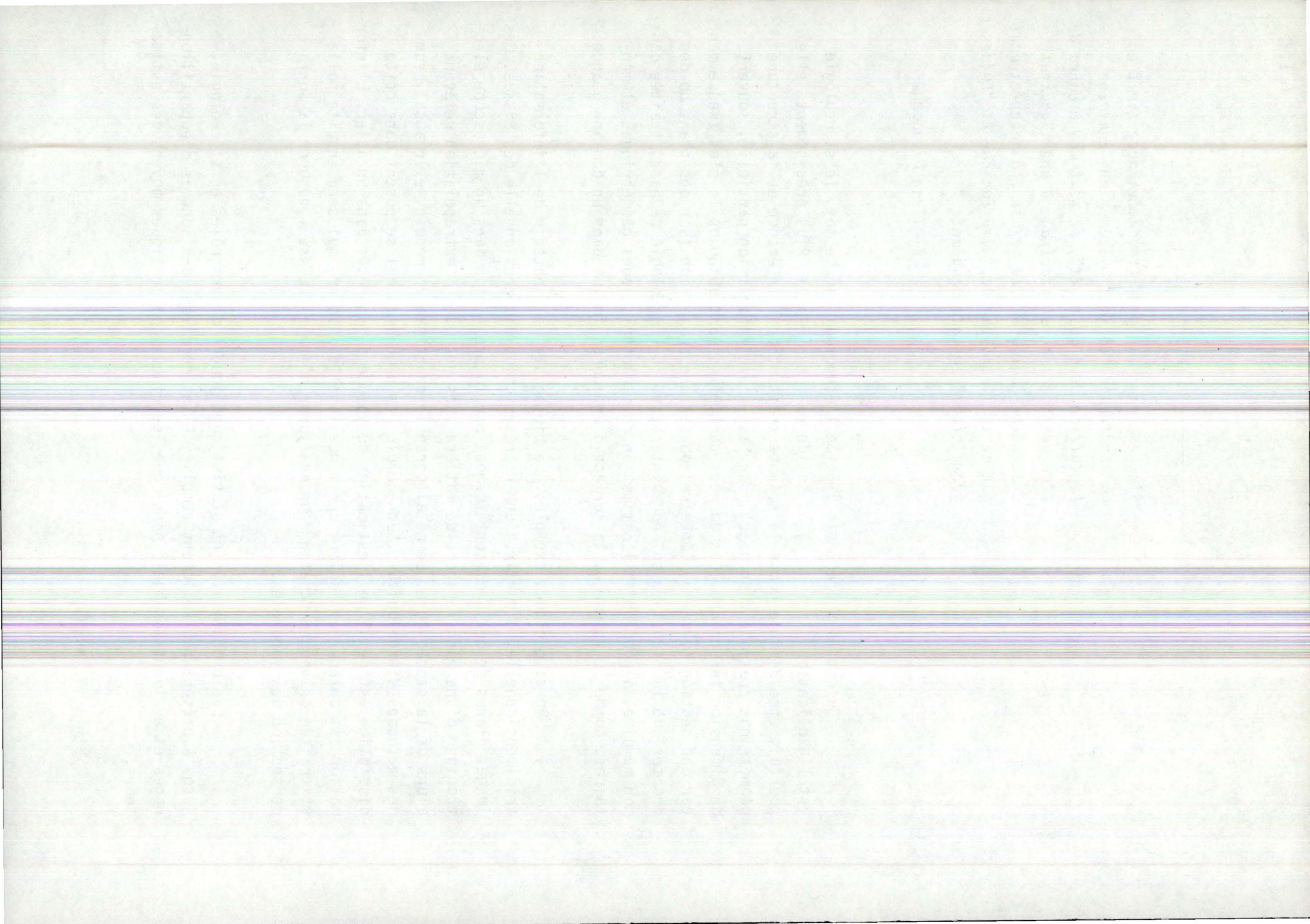
"S'il est vrai que pour travailler avec fruit en mathématiques, il faut posséder une certaine "intuition de l'abstrait", le seul moyen connu de l'acquérir est de s'astreindre à une rigoureuse discipline logique en se refusant à accepter quoi que ce soit sans preuve, même lorsque l' "évidence géométrique" en est aveuglante."

Jean Dieudonné

Qu'est la stéréologie ? Selon l'étymologie de ce mot, la stéréologie est l'explication ($\lambda \omicron \gamma \omicron \varsigma$) du solide ($\sigma \tau \epsilon \rho \epsilon \omicron \varsigma$). Plus précisément, elle pourrait être définie comme la science traitant de l'inférence de la structure géométrique spatiale d'un objet, sur base d'une information partielle, souvent de dimension inférieure. Ces données partielles sont obtenues le plus fréquemment par une section (plane ou linéaire) ou par une projection (sur des plans ou des droites) de la structure qui nous intéresse. La stéréologie de base, traitée dans mon mémoire, a pour objet l'estimation de caractéristiques géométriques élémentaires, comme le volume ou la surface d'une corps inclus dans un domaine opaque.

Voici quelques exemples. Le biologiste veut obtenir de l'information tridimensionnelle, à partir d'une représentation bidimensionnelle des tissus. Ces images planes de cellules sont formées par la projection dans un microscope électronique d'une mince tranche de matière. Les méthodes d'extrapolation relèvent alors de la stéréologie. Le métallographie quantitative repose, elle aussi, sur des méthodes stéréologiques. Un exemple des problèmes qui se posent dans cette discipline est celui de l'estimation du volume d'impuretés dans un acier. L'information est obtenue en isolant une mince lamelle d'acier, qui sera ensuite polie et traitée chimiquement afin qu'un analyseur d'images puisse y mesurer la surface de section des impuretés.

Les probabilités et statistiques jouent divers rôles en stéréologie, jusqu'à présent partiellement remplis. Elles décrivent des schémas d'échantillonnages et évaluent les biais ainsi que les risques quadratiques moyens des estimateurs.



Nous avons, dans ce mémoire, étudié un article de R.E. Miles et Pamela Davy, qui traite des conditions de validité des formules fondamentales en stéréologie. Les auteurs analysent ce problème en étudiant l'une de ces formules et nous exhortent à entreprendre des démarches parallèles pour les autres. Au chapitre I, nous avons repris leur exemple en modifiant cependant la présentation là où, entre autre, nous pouvions montrer que certaines contraintes au niveau de l'échantillonnage n'aient en fait que des propriétés d'un schéma classique.

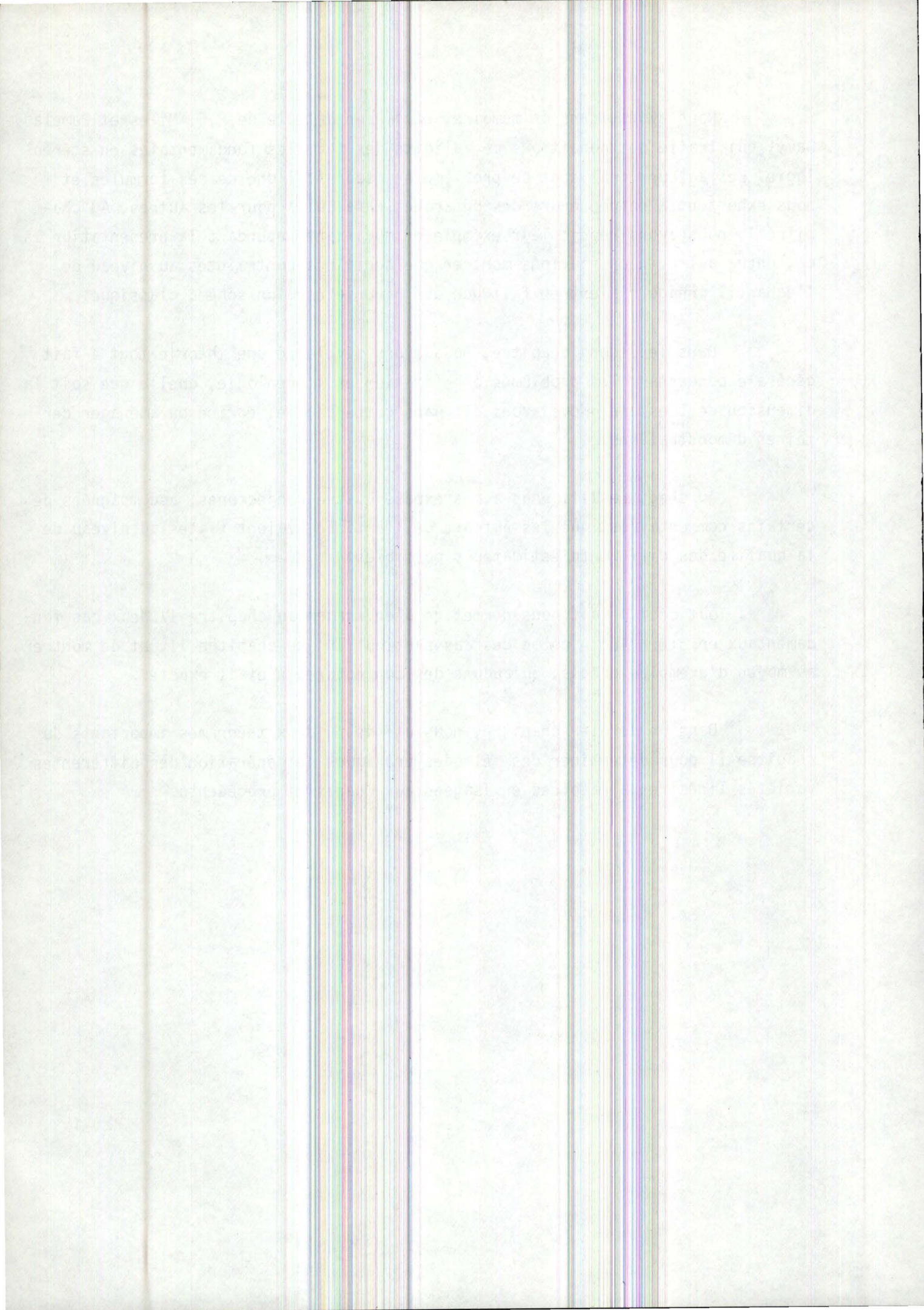
Dans le second chapitre, nous avons développé une théorie tout à fait générale concernant les problèmes d'estimation en stéréologie, quelle que soit la dimension de l'espace. Nous avons dû, dans cette partie, écrire ou aménager certaines démonstrations.

Au chapitre III, nous avons exposé quatre conjectures, accompagnées de certains commentaires, que les auteurs de l'article avaient faites au niveau de la qualité des différents estimateurs possibles.

Tout ceci devait nous permettre d'envisager au chapitre IV deux cas fondamentaux en stéréologie, comme des cas particuliers du chapitre II, et de montrer, au moyen d'exemples précis, qu'aucune des conjectures n'était exacte.

Dans un dernier chapitre, nous utilisons deux théorèmes importants du chapitre II pour déterminer des méthodes pratiques de génération des différentes variétés linéaires aléatoires envisagées aux chapitres précédents.

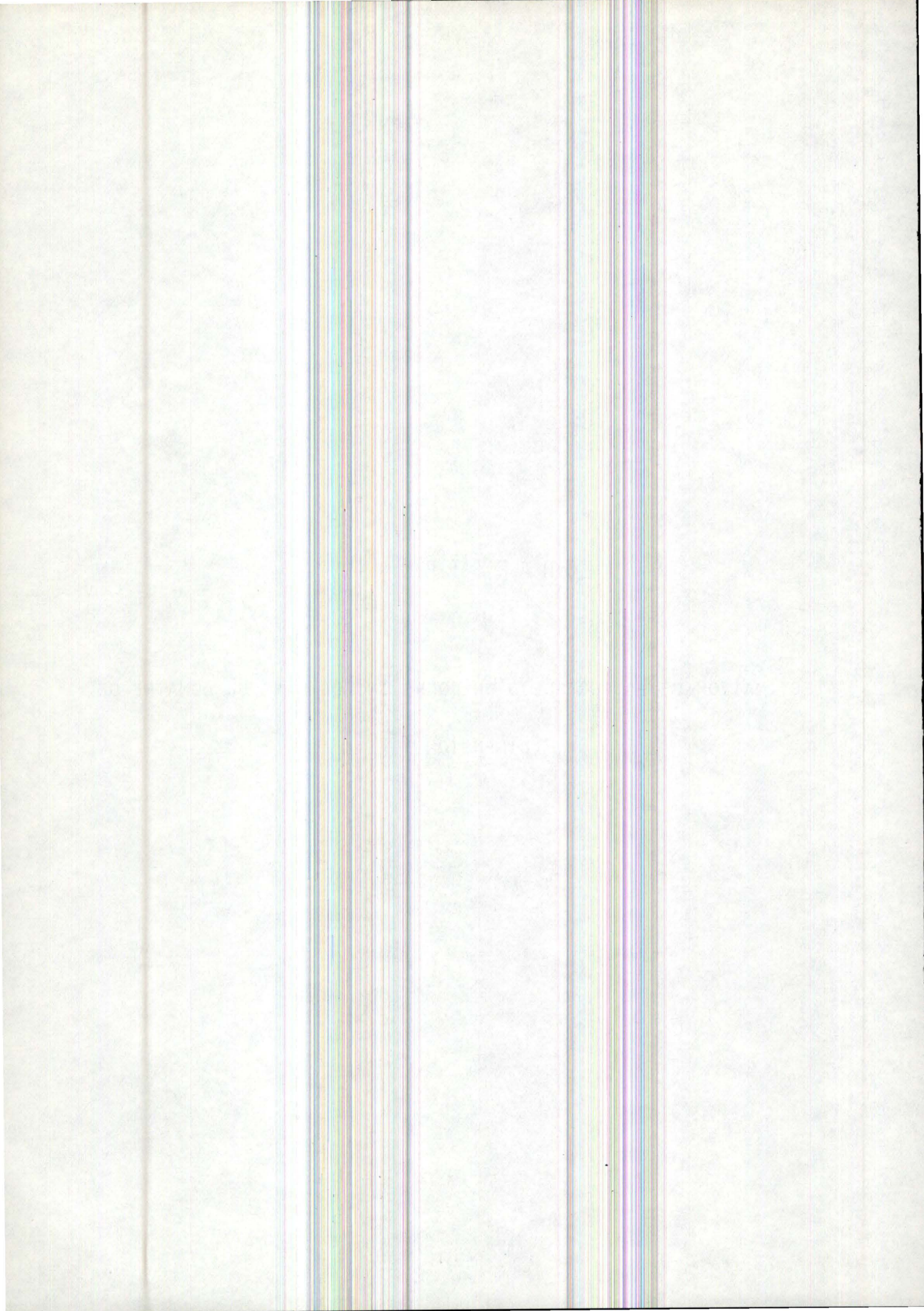




CHAPITRE I

ESTIMATION DE LA SURFACE D'UN CORPS INCLUS DANS UN DOMAINE DE

DIMENSION 3



CHAPITRE I

ESTIMATION DE LA SURFACE D'UN CORPS INCLUS DANS UN DOMAINE DE DIMENSION 3

I.0. INTRODUCTION

Commençons cet exposé par un cas particulier souvent rencontré en stéréologie. Il nous permet de bien percevoir les raisonnements de R.E. Miles et de Pamela Davy, ainsi que le noeud du problème d'estimation de certaines caractéristiques d'un corps inclus dans un autre.

Nous allons être confronté à la sélection du meilleur estimateur de la surface d'un corps intérieur à un corps X . R.E. Miles et Pamela Davy ont énoncé des conjectures à ce propos. Les deux premières sont reprises dans ce chapitre et appliquées à un exemple. Cependant, il s'avère que leur intention n'est pas fondée (voir I.4).

Remarquons que nous prenons un des exemples (deux sphères concentriques) des plus favorables aux hypothèses (d'homogénéité) !

I.1. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

a. Préliminaires

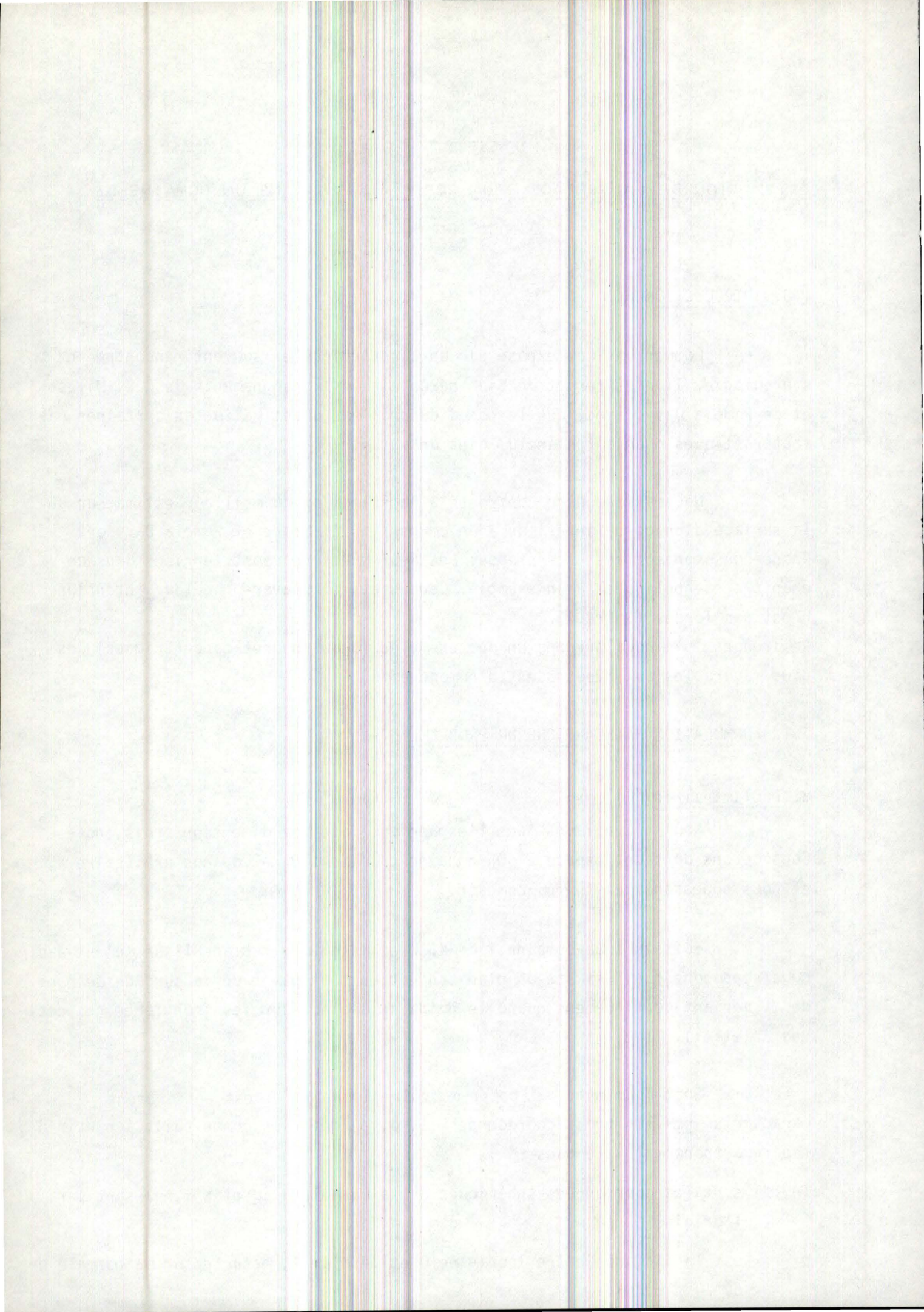
Nous travaillons dans l'espace euclidien de dimension trois, noté E^3 . Considérons dans cet espace E^3 un domaine tridimensionnel opaque arbitraire X , et nous supposons qu'il est compact.

Soit un sous-domaine Y de X . X et Y sont de surface lisse (c'est-à-dire nous supposons qu'il existe un plan tangent en tout point de la surface de X et de Y , variant continuellement quand le point se déplace sur les frontières respectives δX et δY).

Soit T un plan qui coupe X (voir figure 1). T est entièrement caractérisé par les trois coordonnées (θ, ϕ, p) définies comme suit, à partir d'un repère orthonormal fixé dans E^3 :

(θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques de la normale N au plan T , passant par l'origine O , où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi < 2\pi$,

p est la distance entre l'origine O et le plan T , mesurée sur la normale N où $-\infty < p < \infty$.



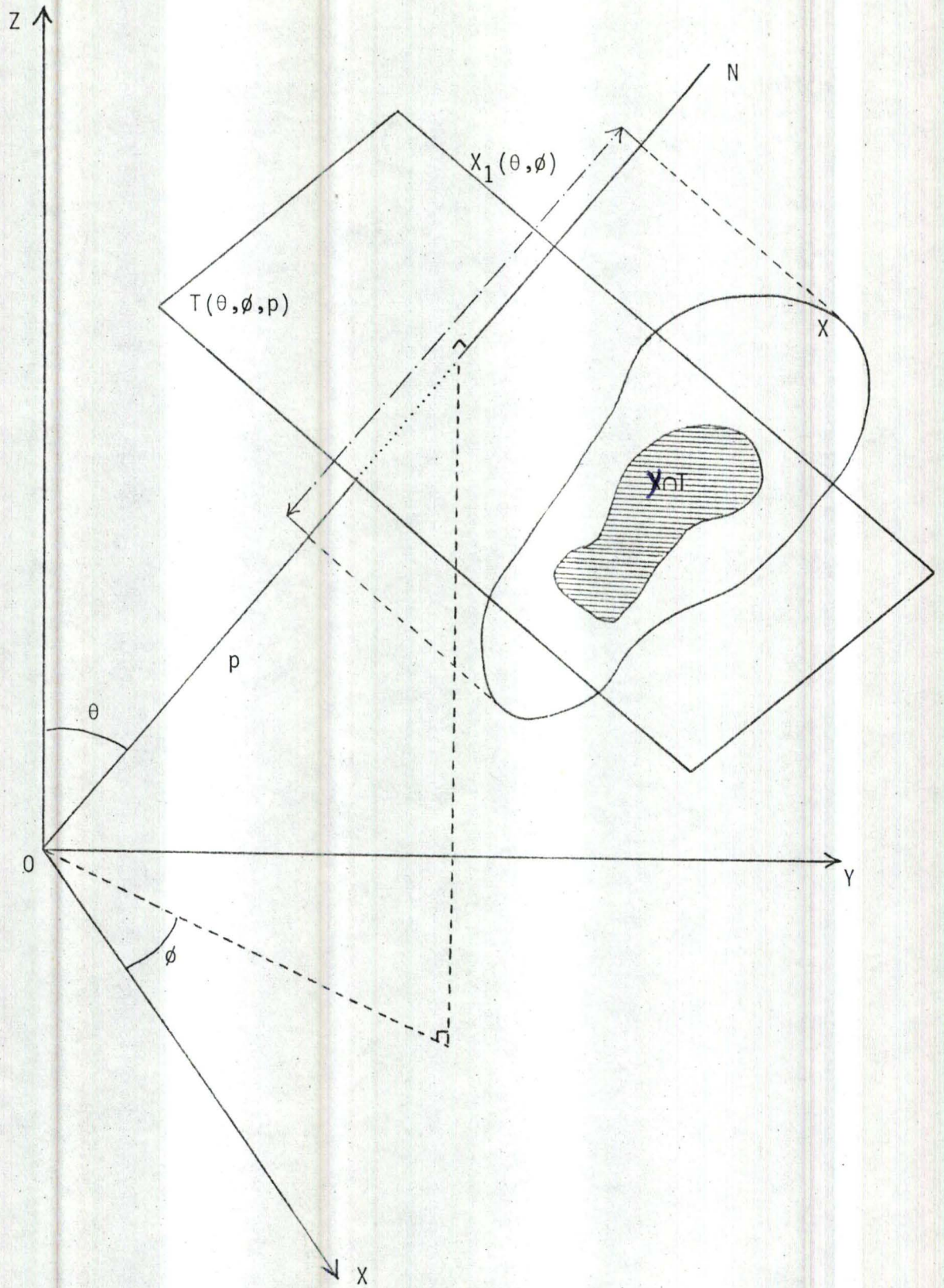
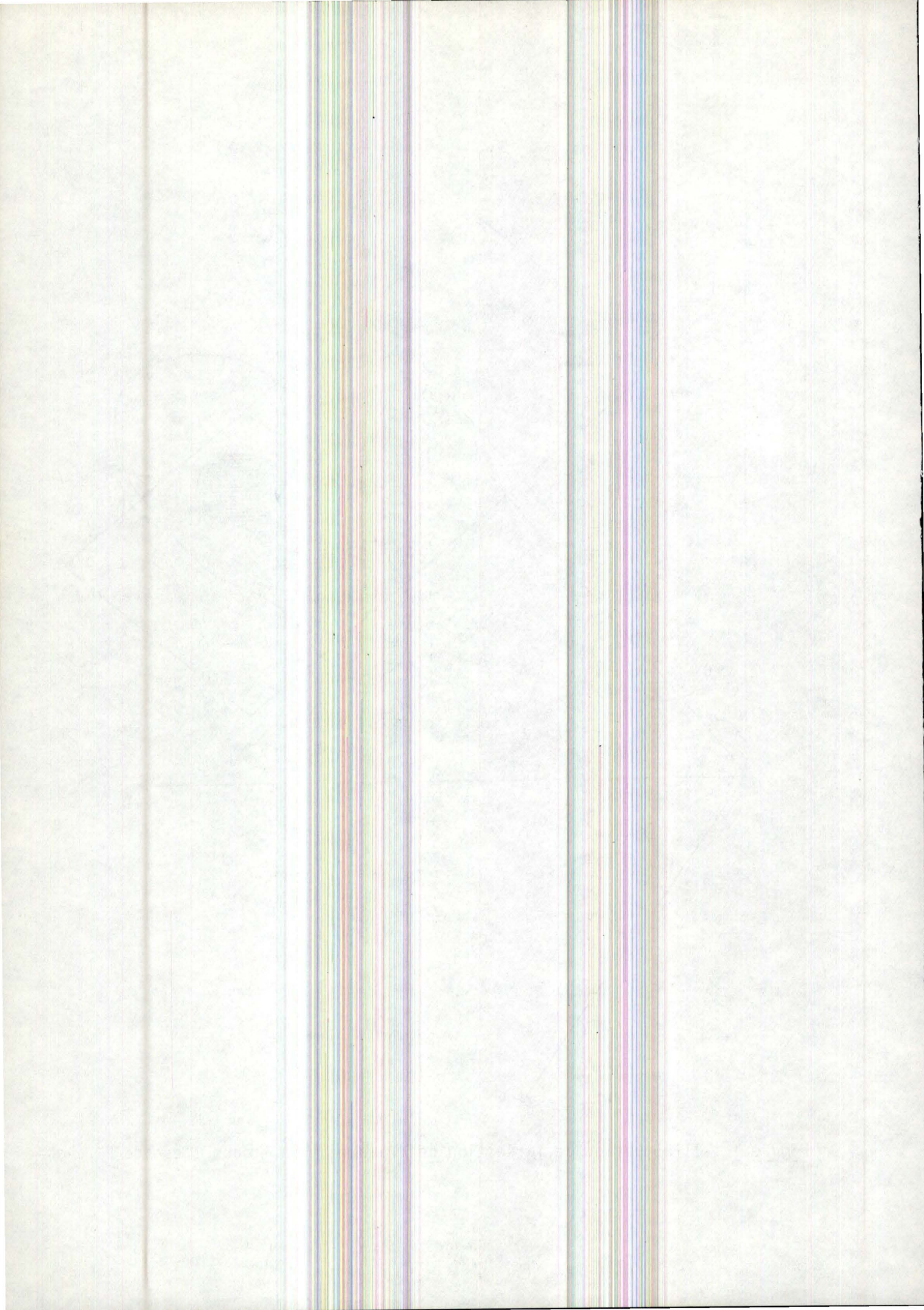


Figure 1 : Illustration de la section de X par un plan T dans l'espace E^3



Désignons par $(X \cap T)$ la région plane commune à T et à X . Projetons tous les points de X perpendiculairement sur la normale N . Cette projection sur la droite N sera notée $X_1(\theta, \phi)$ et $L(X_1(\theta, \phi))$ est la mesure de Lebesgue de cet ensemble linéaire, c'est-à-dire la longueur de $X_1(\theta, \phi)$.

b. La densité sur $D(X)$

Soit $D(X)$ l'ensemble des triplets (θ, ϕ, p) définis de la manière suivante :

$$D(X) \subseteq [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi[\times]-\infty, +\infty[\text{ tel que}$$

$$(\theta, \phi, p) \in D(X) \Leftrightarrow T(\theta, \phi, p) \uparrow X,$$

où \uparrow signifie "coupe", c'est-à-dire tout point de $D(X)$ correspond à un plan dans E^3 coupant X . Nous voulons introduire la notion de plans aléatoires. Il faut donc mettre une mesure sur l'ensemble $D(X)$. La mesure sur l'ensemble des plans dans E^3 , invariante par rotation et translation est donnée par Kendall et Moran [1], p. 20, par Stoka [10], p. 41 et par Deltheil [8].

L'élément de mesure est :

$$dJ = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp.$$

La densité associée à dJ sera donc :

$$f(\theta, \phi, p) = c \sin \theta \text{ telle que } \iiint_{T \uparrow X} c \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp = 1,$$

où c est une constante à déterminer.

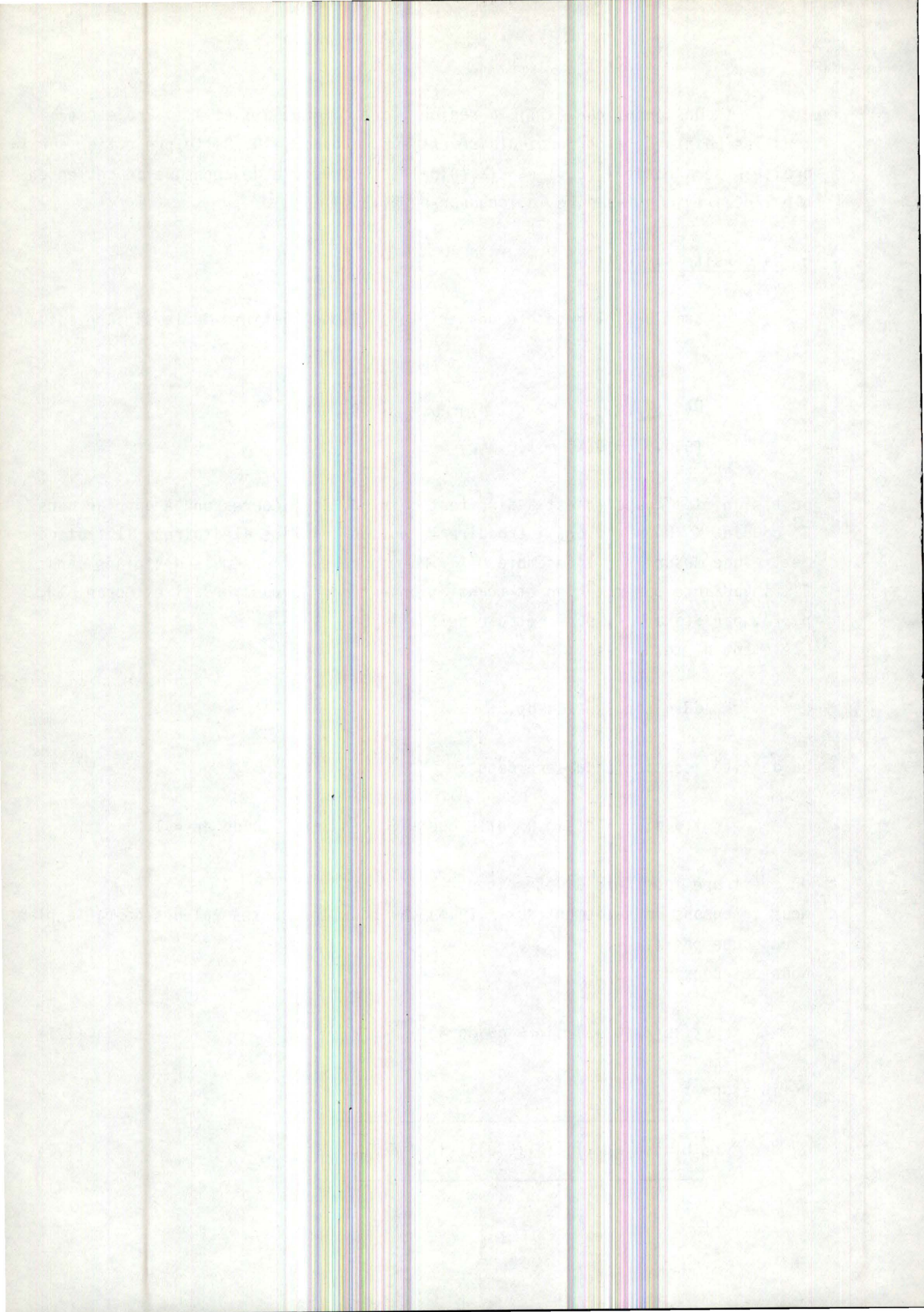
Nous intégrons dp seulement sur $X_1(\theta, \phi)$ car pour les autres valeurs de p , le plan T ne coupe pas X .

Nous obtenons dès lors :

$$\iint L(X_1(\theta, \phi)) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{c}. \quad (\text{I.1})$$

Définissons :

$$H(X) = \frac{1}{2\pi} \iint L(X_1(\theta, \phi)) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{I.2})$$



où $H(X)$ est appelé *la projection linéaire* (c'est-à-dire sur la droite N) *moyenne de X* .

La densité ainsi déterminée par la mesure invariante par rotation et translation est :

$$f(\theta, \phi, p) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{2\pi H(X)} & \text{si } (\theta, \phi, p) \in D(X) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

c. Propriétés de la densité $f(\theta, \phi, p)$

De (I.3), nous pouvons immédiatement déduire la relation suivante :

$$f(\theta, \phi) = \int_{T \uparrow X} f(\theta, \phi, p) dp.$$

D'où :

$$f(\theta, \phi) = \frac{L(X_1(\theta, \phi)) \sin \theta}{2\pi H(X)} \quad (\text{I.4})$$

où $f(\theta, \phi)$ est une densité pondérée par $L(X_1(\theta, \phi))$, c'est-à-dire plus la projection de X sur la normale N d'orientation (θ, ϕ) est grande, plus il lui est attaché d'importance. La densité correspondante non pondérée, i.e. $\frac{\sin \theta}{2\pi}$ pour $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \phi < 2\pi)$ coïncide avec la mesure invariante par rotation sur la demi-sphère (voir Mardia [3], p. 227).

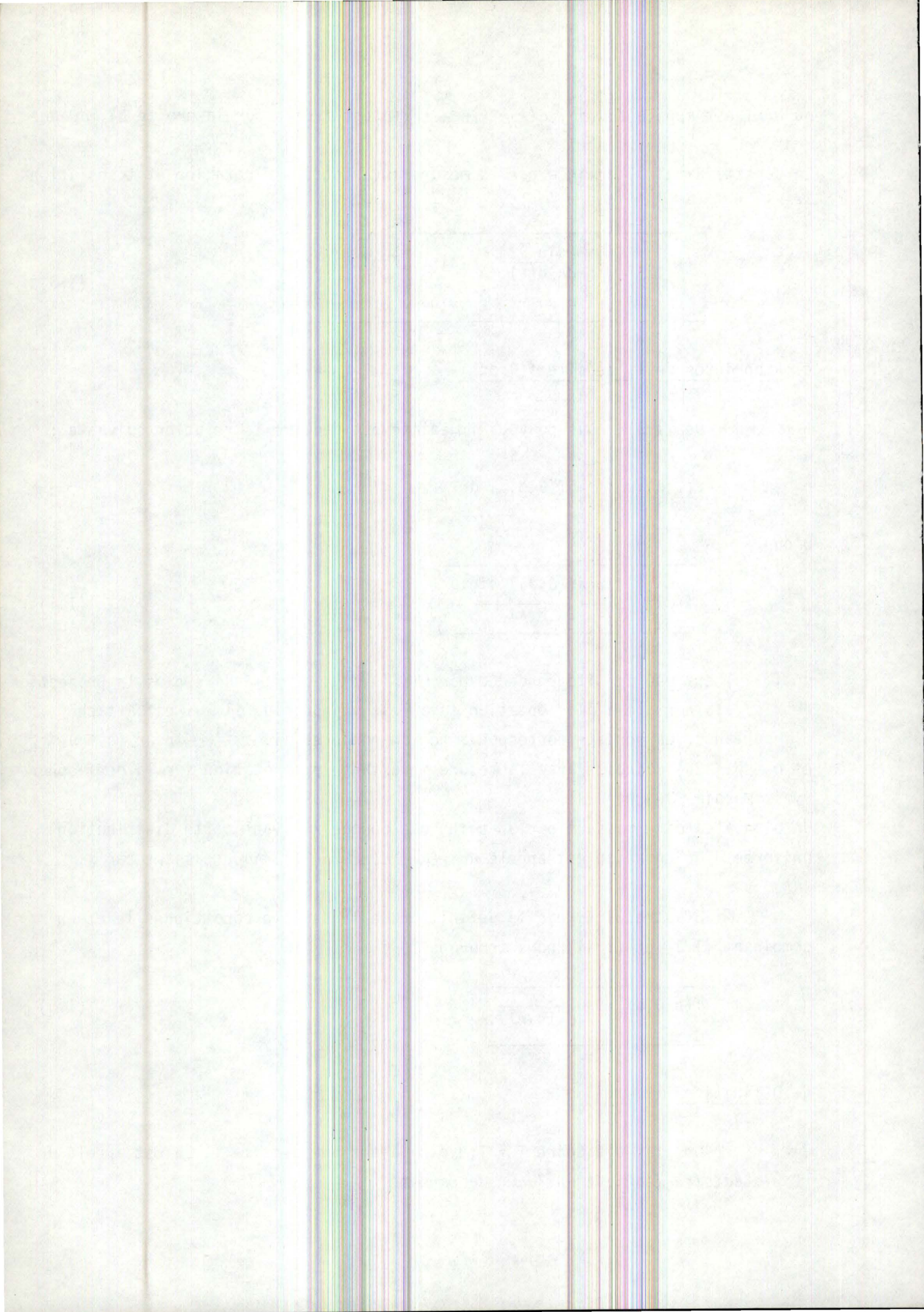
Un plan aléatoire passant par un point quelconque x , ayant cette distribution uniforme d'orientation est appelé *un plan aléatoire isotrope* passant par x .

D'autre part, par la définition de la densité conditionnelle et en combinant (I.3) et (I.4), nous trouvons :

$$f(p|\theta, \phi) = \frac{1}{L(X_1(\theta, \phi))} \quad (\text{I.5})$$

d. Définition

Un plan aléatoire $T = T(\theta, \phi, p)$ ayant une densité (I.3) est appelé *un plan aléatoire isotrope uniforme* coupant X .



En anglais, ce plan est appelé : "an isotropic uniform random plane through X" ; de là, la notation : un plan IUR coupant X.

En conclusion, nous pouvons donc dire qu'un plan IUR est un plan aléatoire avec une orientation ayant une distribution isotrope pondérée par $L(X_1(\theta, \phi))$ et avec, conditionnellement à (θ, ϕ) , une localisation uniformément distribuée sur l'ensemble des positions de section possible.

e. Probabilité qu'un plan aléatoire à travers X, coupe aussi Y

La probabilité conditionnelle que $T(\theta, \phi, p)$ coupe Y, étant donné l'orientation (θ, ϕ) est :

$$P(T \uparrow Y | (\theta, \phi)) = \frac{L(Y_1(\theta, \phi))}{L(X_1(\theta, \phi))} . \quad (I.6)$$

Dès lors :

$$P(T \uparrow Y) = \iint \frac{L(Y_1(\theta, \phi))}{L(X_1(\theta, \phi))} f(\theta, \phi) d\theta d\phi .$$

D'où, par (I.4), nous obtenons :

$$P(T \uparrow Y) = \frac{1}{2\pi H(X)} \iint L(Y_1(\theta, \phi)) \sin \theta d\theta d\phi .$$

D'où

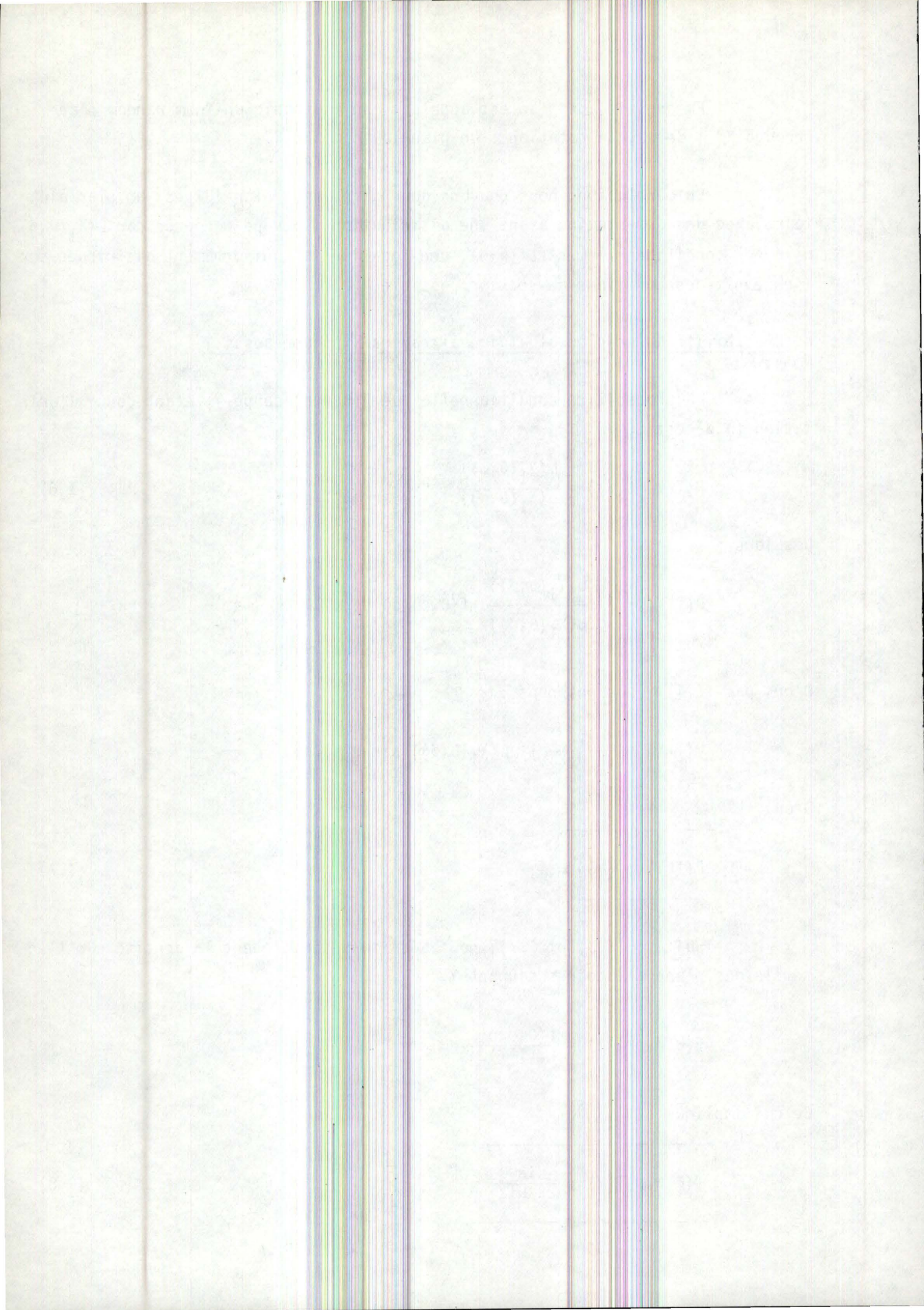
$$\boxed{P(T \uparrow Y) = \frac{H(Y)}{H(X)}} . \quad (I.7)$$

Suite à (I.3) et (I.7), nous déduisons directement la densité sur l'ensemble des plans aléatoires coupant Y.

$$f(\theta, \phi, p | T \uparrow Y) = \frac{f(\theta, \phi, p)}{P(T \uparrow Y)} .$$

Ce qui implique :

$$\boxed{f(\theta, \phi, p | T \uparrow Y) = \frac{\sin \theta}{2\pi H(Y)}} . \quad (I.8)$$



En conclusion, nous avons les deux propriétés suivantes, respectivement les conséquences de (I.8) et de (I.7).

Propriété 1 :

Si un plan IUR qui coupe X , coupe un corps Y contenu dans X , alors ce plan est aussi un plan IUR à travers Y .

Propriété 2 :

Pour tous les corps Y contenus dans X , la probabilité que T coupe Y est indépendante de la localisation et de l'orientation de Y dans X .

Les propriétés 1 et 2, pourraient nous faire croire que, comme un plan IUR coupe tout endroit de X de manière équiprobable, il donne la section stéréologique idéale. Or, la conjecture de Miles et Davy [4] nous affirme le contraire.

I.2. ESTIMATION DE CERTAINES CARACTERISTIQUES NUMERIQUES D'UN DOMAINE Y INCLUS DANS UN DOMAINE X DE E^3

a. Espérance de l'aire de la surface de $(X \cap T)$

Si $T = T(\theta, \phi, p)$ est un plan IUR coupant X et,
si A_X dénote l'aire aléatoire de $(X \cap T)$,

alors la valeur moyenne de A_X sera :

$$E(A_X) = \iiint A_X f(\theta, \phi, p) d\theta d\phi dp.$$

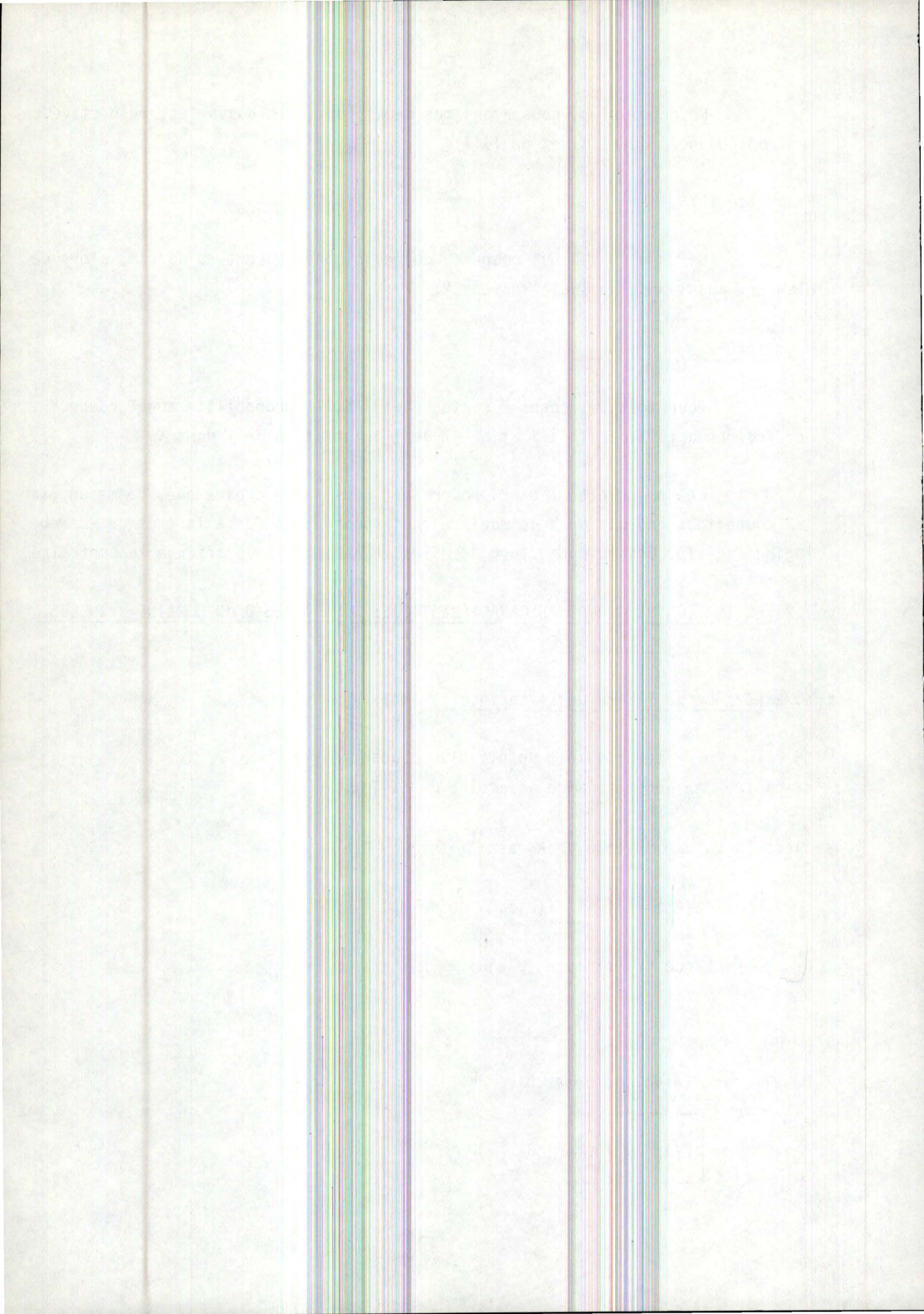
Or, pour chaque orientation (θ, ϕ) :

$$\int A_X dp = V(X),$$

où $V(X)$ est le volume de X . D'où

$$E(A_X) = \frac{V(X)}{H(X)} .$$

(I.9)



b. Espérance de la longueur de la courbe ($\delta Y \cap T$)

Soient deux corps, X et Y, avec les hypothèses données au début du paragraphe I.1.a.

Notons par $S(Y)$ l'aire de la surface de Y. B_Y désigne la longueur aléatoire de ($\delta Y \cap T$). $B_Y = 0$ si T ne coupe pas Y.

Soit dS l'élément infinitésimal de surface de Y et soit B_{dS} la longueur aléatoire du segment de droite ($dS \cap T$) (égale à 0, si T ne coupe pas dS). Nous obtenons :

$$B_Y = \int_Y B_{dS} \cdot \quad (I.10)$$

Calculons $E(B_Y)$, à l'aide de quelques propriétés fondamentales des probabilités :

$$\begin{aligned} E(B_Y) &= \int_Y E(B_{dS}), \\ &= \int_Y [E(B_{dS} | T \uparrow dS) P(T \uparrow dS) + E(B_{dS} | T \nmid dS) P(T \nmid dS)] \end{aligned}$$

où \nmid signifie : "ne coupe pas". Suite à (I.7), nous trouvons :

$$E(B_Y) = \int_Y E(B_{dS} | T \uparrow dS) \frac{H(dS)}{H(X)}. \quad (I.11)$$

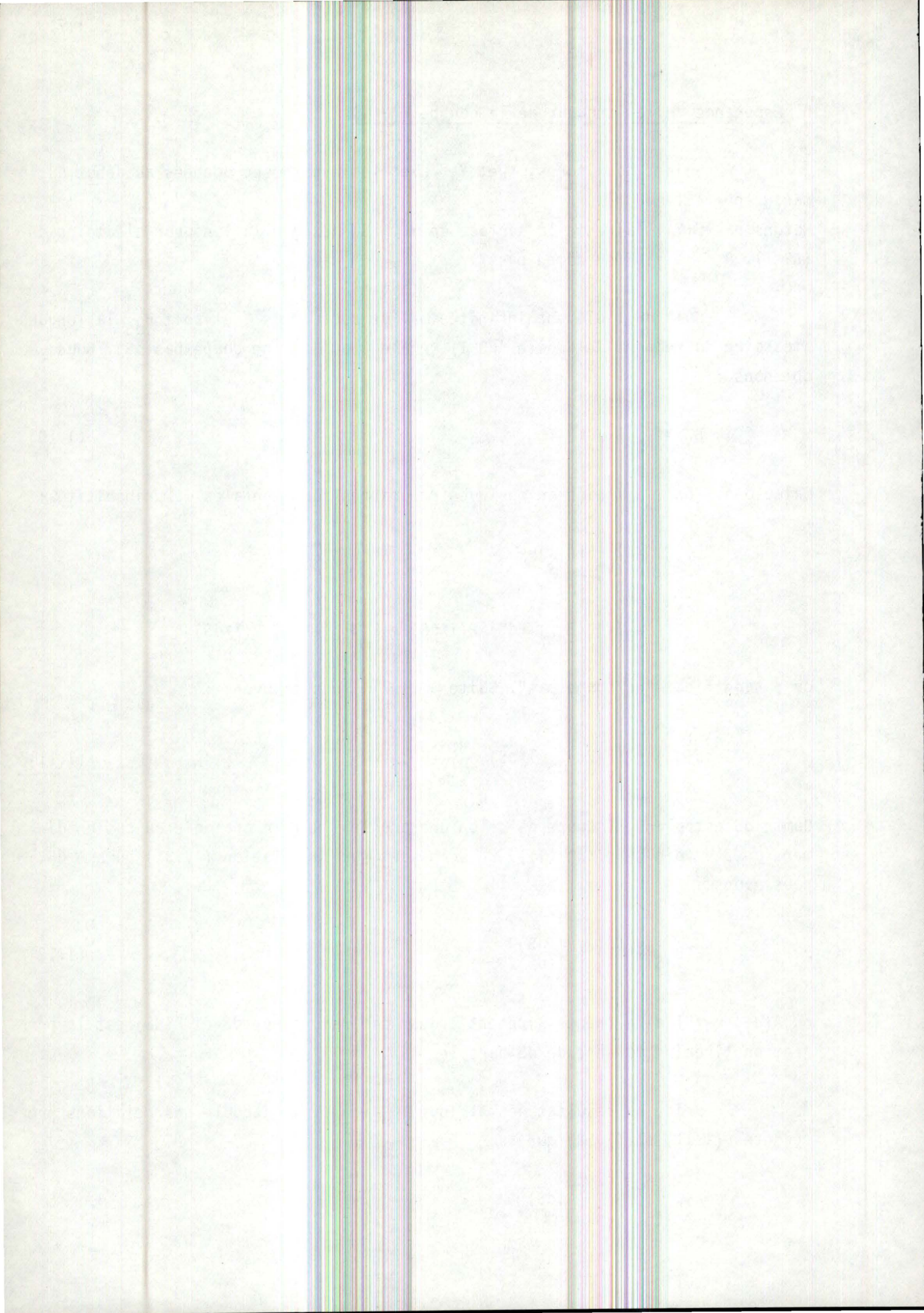
Comme dS est plane, T coupe dS selon une droite IUR (par analogie au cas en dimension 2 - voir chapitre III). En se basant sur la relation (IV.31) où $X = dS$, nous avons :

$$E(B_{dS} | T \uparrow dS) = \frac{A(dS)}{F(dS)} \quad (I.12)$$

où $A(dS)$ est l'aire (nécessairement à deux dimensions) de dS et $F(dS)$ est la projection linéaire moyenne de dS dans le plan.

Grâce au résultat géométrique $\frac{H(dS)}{F(dS)} = \frac{\pi}{4}$, il découle des relations précédentes (I.11) et (I.12) que :

$$E(B_Y) = \int_Y \frac{\pi}{4} \frac{A(dS)}{H(X)},$$



Ce qui implique :

$$E(B_Y) = \frac{\pi}{4} \frac{S(Y)}{H(X)}$$

(I.13)

I.3. ESTIMATION DE L'AIRE DE LA SURFACE DU CORPS Y INTERIEUR A X

Nous désirons connaître la surface extérieure de Y, soit $S(Y)$, en supposant connus ou mesurables (par déplacement de fluides par exemples) les éléments suivants : B_Y et $V(X)$. Nous cherchons un "bon" estimateur de $S(Y)$.

Notons :

$$\frac{S(Y)}{V(X)} = S_V$$

et le rapport de la longueur de $(\delta Y \cap T)$ sur l'aire de $(X \cap T)$:

$$\frac{B_Y}{A_X} = B_A$$

qui sont des symboles courantes en stéréologie.

Remarquons que B_A est un rapport aléatoire, tandis que S_V n'en est pas un.

a. Lorsque B_A est mesuré sur un plan IUR, cette quantité est un estimateur biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$

En effet, la décomposition de la covariance en termes d'espérances mathématiques, nous donne :

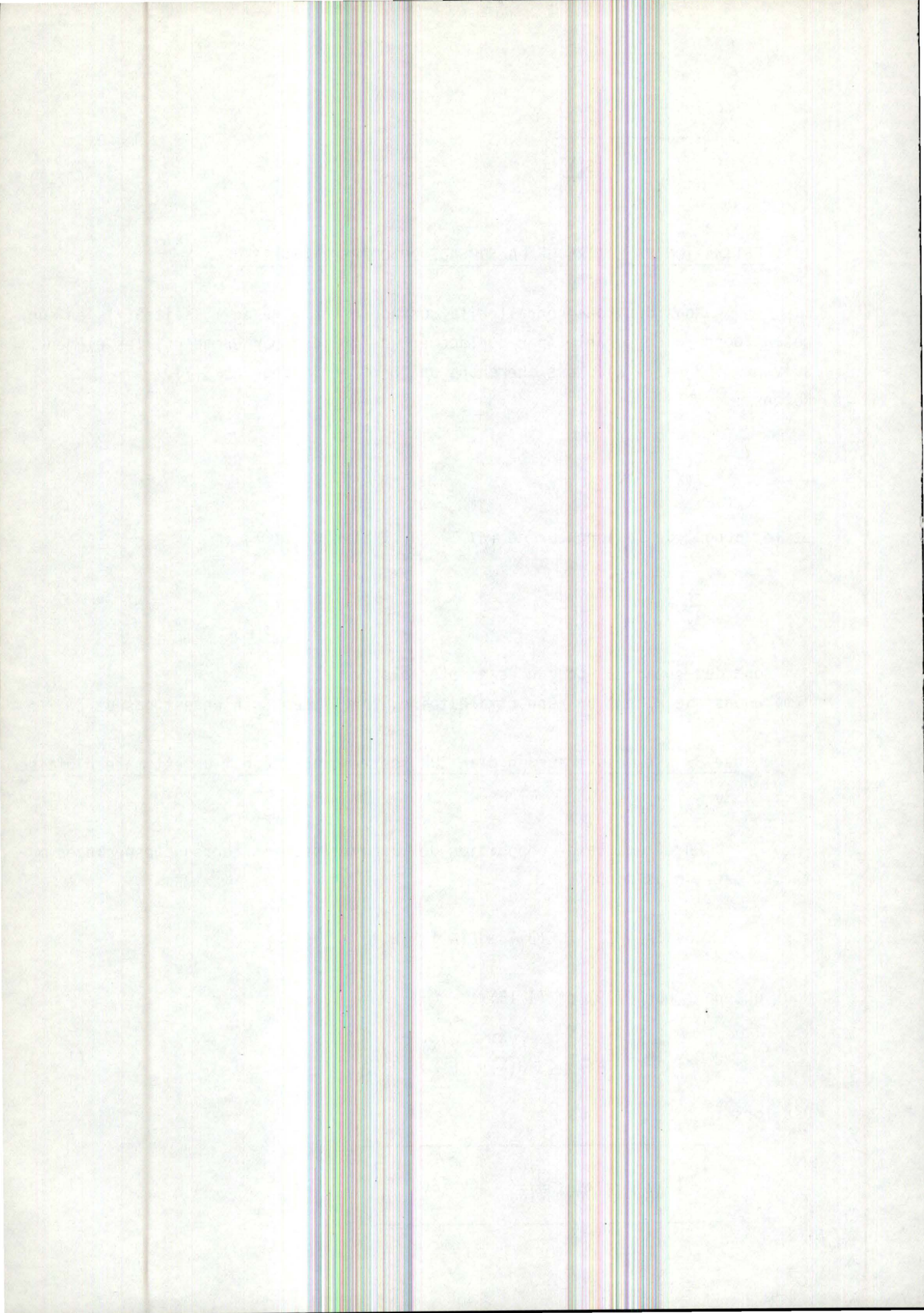
$$\text{cov}(A_X, B_A) = E(B_Y) - E(A_X) E(B_A).$$

Nous obtenons par (I.9) et (I.13) :

$$\text{cov}(A_X, B_A) = \frac{\pi}{4} \frac{S(Y)}{H(X)} - \frac{V(X)}{H(X)} E(B_A). \quad (I.14)$$

Dès lors :

$$E(B_A) = \frac{\pi}{4} S_V - \frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, B_A) \quad (I.15)$$



L'expression (I.15), nous dit que pour une section de X par un plan IUR, B_A est un estimateur biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$ de biais égal à :

$$- \frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, B_A). \quad (\text{I.16})$$

Le biais sera positif ou négatif selon la distribution géométrique de la surface de Y dans X . Pour expliquer ceci, R.E. Miles et Pamela Davy partent de deux situations extrêmes pour énoncer leur première conjecture :

- la $\text{cov}(A_X, B_A)$ est positive quand Y est central dans X , ce qui donne un biais négatif (voir fig. 2).

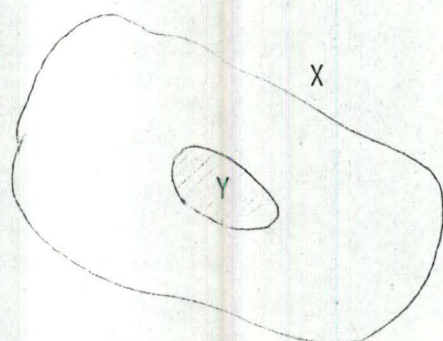


Figure 2. : cas central

- la $\text{cov}(A_X, B_A)$ est négative, et donc le biais de signe positif, si Y est réparti sur la périphérie de X (voir figure 3).

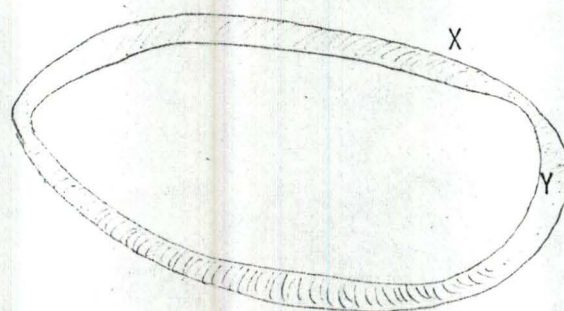
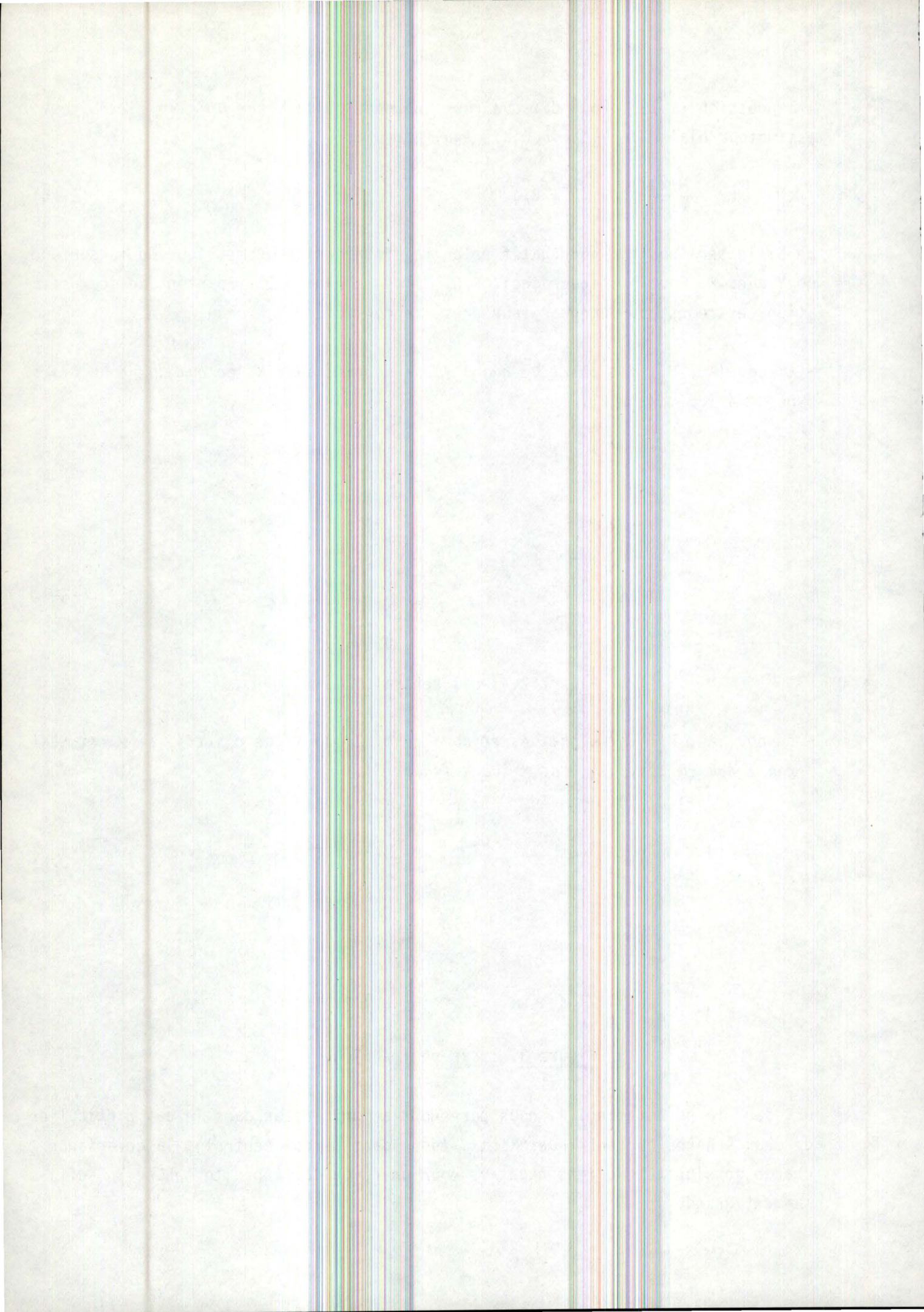


Figure 3. : cas périphérique

Or, dans le paragraphe I.4, nous parvenons à montrer que dans le cas particulier de deux sphères concentriques X et Y (donc dans le cas central), la covariance change de signe et devient négative pour un rayon de la petite sphère Y suffisamment grand.



b. Si nous pondérons la loi des plans de section par A_X , B_A est un estimateur non biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$

Pour trouver un estimateur non biaisé de S_V , nous pondérons la distribution sur les plans IUR T par la valeur A_X . Ceci nous donne la densité de probabilité pondérée :

$$f_A(\theta, \phi, p) = \begin{cases} \frac{A_X \sin \theta}{\iiint A_X \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp} & \text{si } (\theta, \phi, p) \in D(X) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

où l'indice inférieur A indique la pondération de la densité par A_X . (Si nous omettons l'indice A, c'est que nous parlons de sections IUR). L'espérance de B_A par rapport à cette densité pondérée f_A est :

$$E_A(B_A) = \frac{\iiint B_Y \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp}{\iiint A_X \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp}, \quad (\text{I.18})$$

ce qui implique :

$$E_A(B_A) = \frac{E(B_Y)}{E(A_X)}. \quad (\text{I.19})$$

Et donc par (I.9) et (I.13), nous avons l'expression :

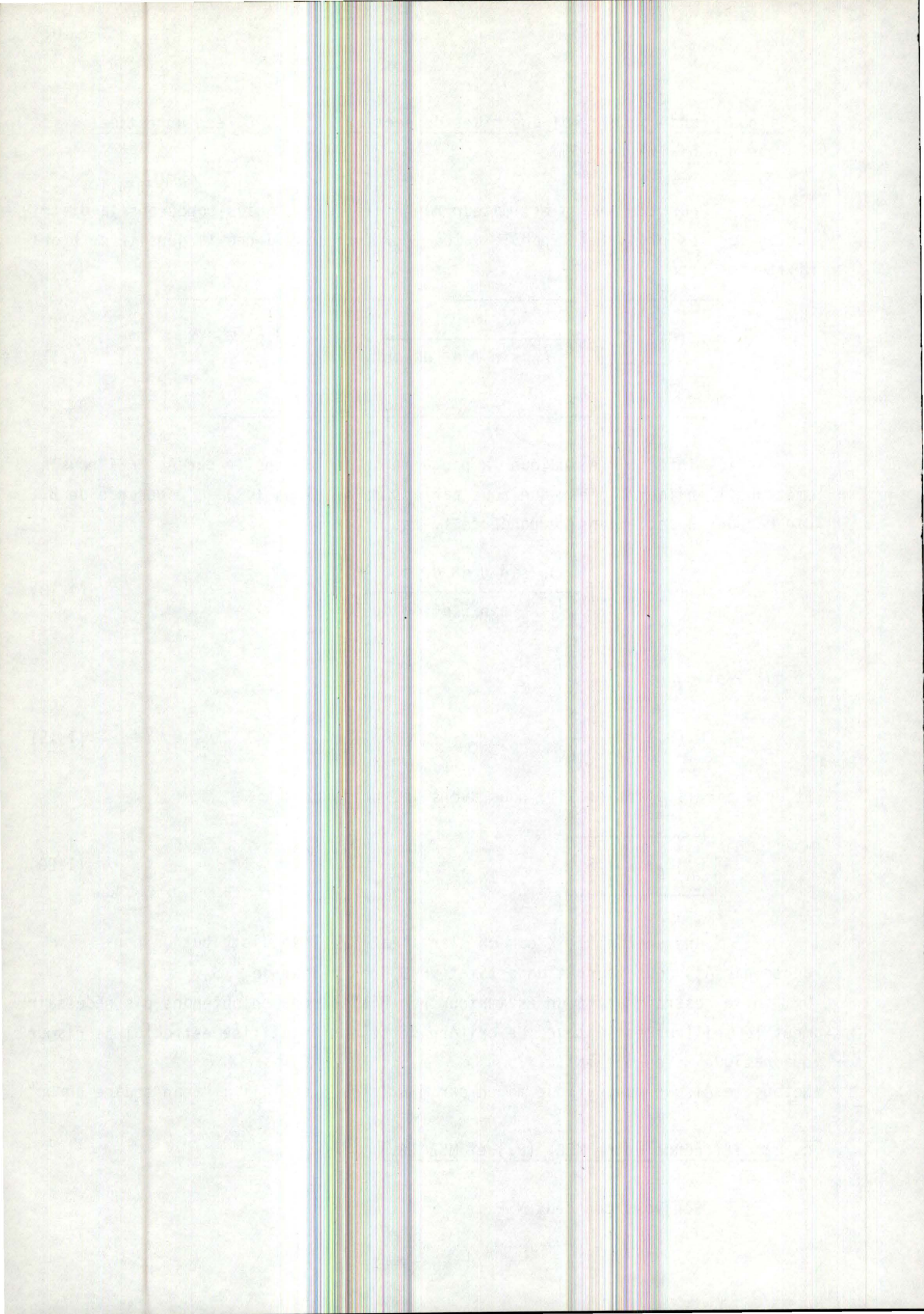
$$E_A(B_A) = \frac{\pi}{4} S_V. \quad (\text{I.20})$$

Une section de X par un plan aléatoire T de distribution pondérée par A_X , nous fournit un estimateur B_A non biaisé de $\frac{\pi}{4} S_V$. Or, en se restreignant à un estimateur non biaisé, nous n'obtenons pas nécessairement le meilleur estimateur. Le critère de sélection utilisé est celui de risque quadratique moyen minimal.

Notons le risque quadratique moyen par MSE (cfr. : anglais : "mean square error").

c. La différence entre $MSE_A(B_A)$ et $MSE(B_A)$

Ecrivons ces deux MSE :



$$\text{MSE}(B_A) = E[(B_A - \frac{\pi}{4} S_V)^2],$$

$$\text{MSE}_A(B_A) = \frac{E[A_X(B_A - \frac{\pi}{4} S_V)^2]}{E(A_X)}.$$

Et la différence donne :

$$\begin{aligned} \text{MSE}_A(B_A) - \text{MSE}(B_A) &= E\left[\frac{A_X}{E(A_X)}(B_A - \frac{\pi}{4} S_V)^2\right] - E[(B_A - \frac{\pi}{4} S_V)^2] \frac{E(A_X)}{E(A_X)}, \\ &= \text{cov}\left(\frac{A_X}{E(A_X)}, (B_A - \frac{\pi}{4} S_V)^2\right). \end{aligned}$$

Or, comme S_V n'est pas un rapport aléatoire,

$$\text{MSE}_A(B_A) - \text{MSE}(B_A) = \frac{1}{E(A_X)} \text{cov}(A_X, B_A(B_A - \frac{\pi}{2} S_V)). \quad (\text{I.21})$$

Donc un (I.9) :

$$\boxed{\text{MSE}_A(B_A) - \text{MSE}(B_A) = \frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, \tau)} \quad (\text{I.22})$$

où

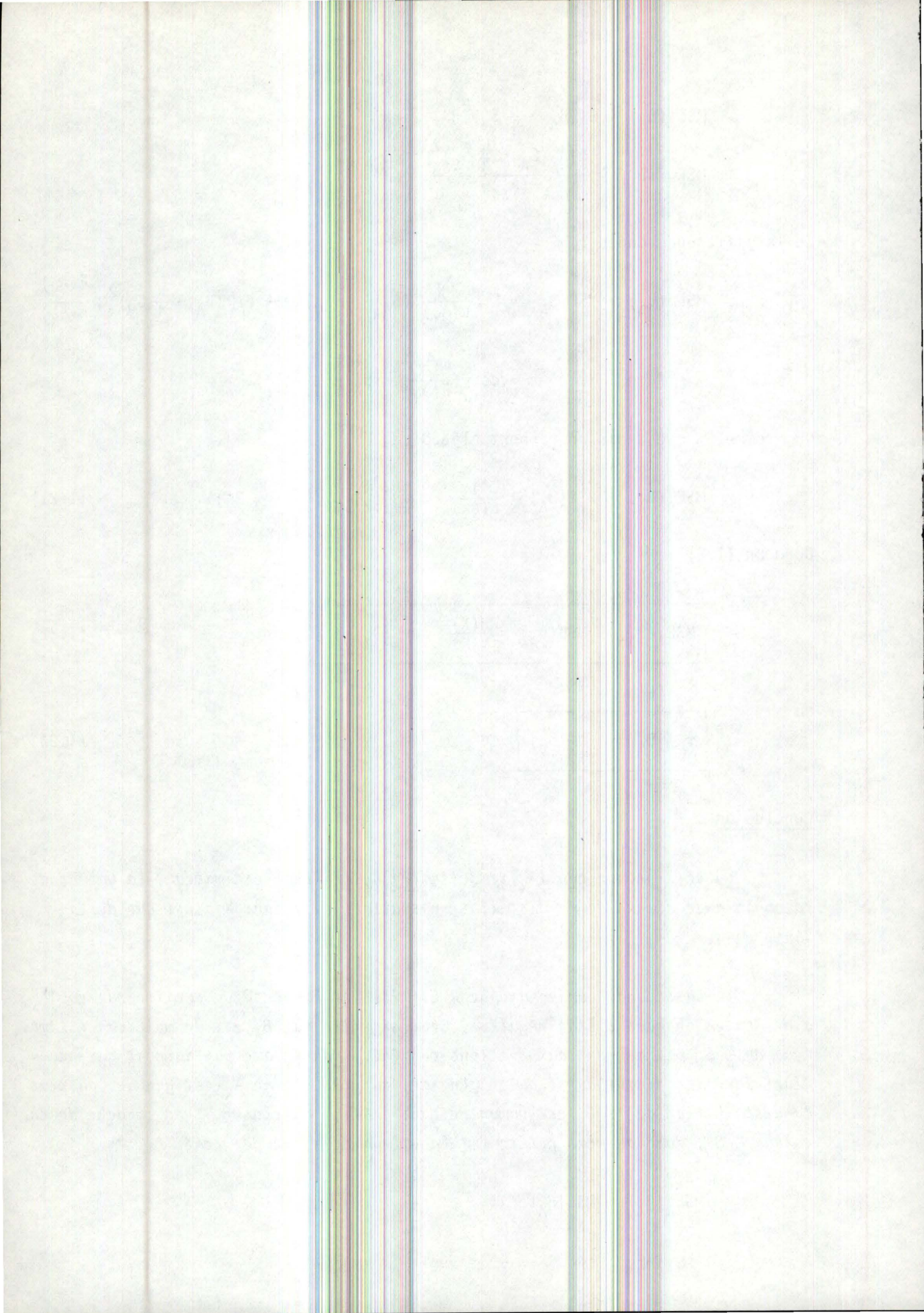
$$\boxed{\tau = B_A(B_A - \frac{\pi}{2} S_V)} \quad (\text{I.23})$$

Conclusion :

Le signe de $\text{cov}(A_X, \tau)$ détermine le meilleur estimateur. La valeur de la covariance dépend de la distribution spatiale de Y dans X ainsi que de la forme de X .

La seconde conjecture de R.E. Miles et Pamela Davy exprime que $\text{cov}(A_X, \tau)$ a de fortes chances d'être négative. Ceci signifie que B_A est un meilleur estimateur de $\frac{\pi}{4} S_V$ par rapport aux sections pondérées par A_X que par rapport aux sections IUR. Ils disent aussi qu'en général, au plus l'aire A_X est grande, au plus la distribution de $(Y \cap T)$ est homogène dans $(X \cap T)$, au plus B_A sera proche de la valeur $\frac{\pi}{4} S_V$, donc au plus petite est la valeur de τ , et dès lors

$$\text{MSE}_A(B_A) < \text{MSE}(B_A).$$



Ils concluent que pour des distributions suffisamment homogènes (et peut-être pour TOUTES les distributions) de Y dans X , le MSE de B_A est moindre pour des sections pondérées par A_X que pour des sections IUR.

Le paragraphe suivant donne un contre-exemple à ce qui est annoncé ci-dessus : Si X et Y sont deux sphères concentriques et si Y est incluse dans X , alors pour un petit rayon de Y , l'estimateur donne un meilleur résultat quand les sections sont pondérées par A_X .

I.4. EXEMPLE : DEUX SPHERES CONCENTRIQUES X ET Y

a. Introduction

Appliquons les résultats dégagés dans les pages précédentes dans un cas particulier.

Soient deux sphères concentriques, centrées en l'origine O :

- X de rayon R ;
- Y incluse dans X , de rayon r ($r \leq R$).

Pour faciliter les calculs, prenons $R = 1$.

Soit T le plan aléatoire qui coupe la grande sphère X . Les sections $(X \cap T)$ et $(Y \cap T)$ sont deux cercles concentriques de rayon respectif R_T et r_T (voir figure 4). Les coordonnées de $T(\theta, \phi, p)$ sont définies comme au début de ce chapitre. Ces deux sections circulaires ont leur centre O_T à une distance p de l'origine. Remarquons que les deux sections ne dépendent que de cette coordonnée p et sont indépendantes de l'orientation (θ, ϕ) , grâce à la symétrie des corps X et Y .

En regardant la figure 4, nous distinguons deux triangles rectangles ayant le segment OO_T en commun. Ces deux triangles définis par leurs sommets sont :

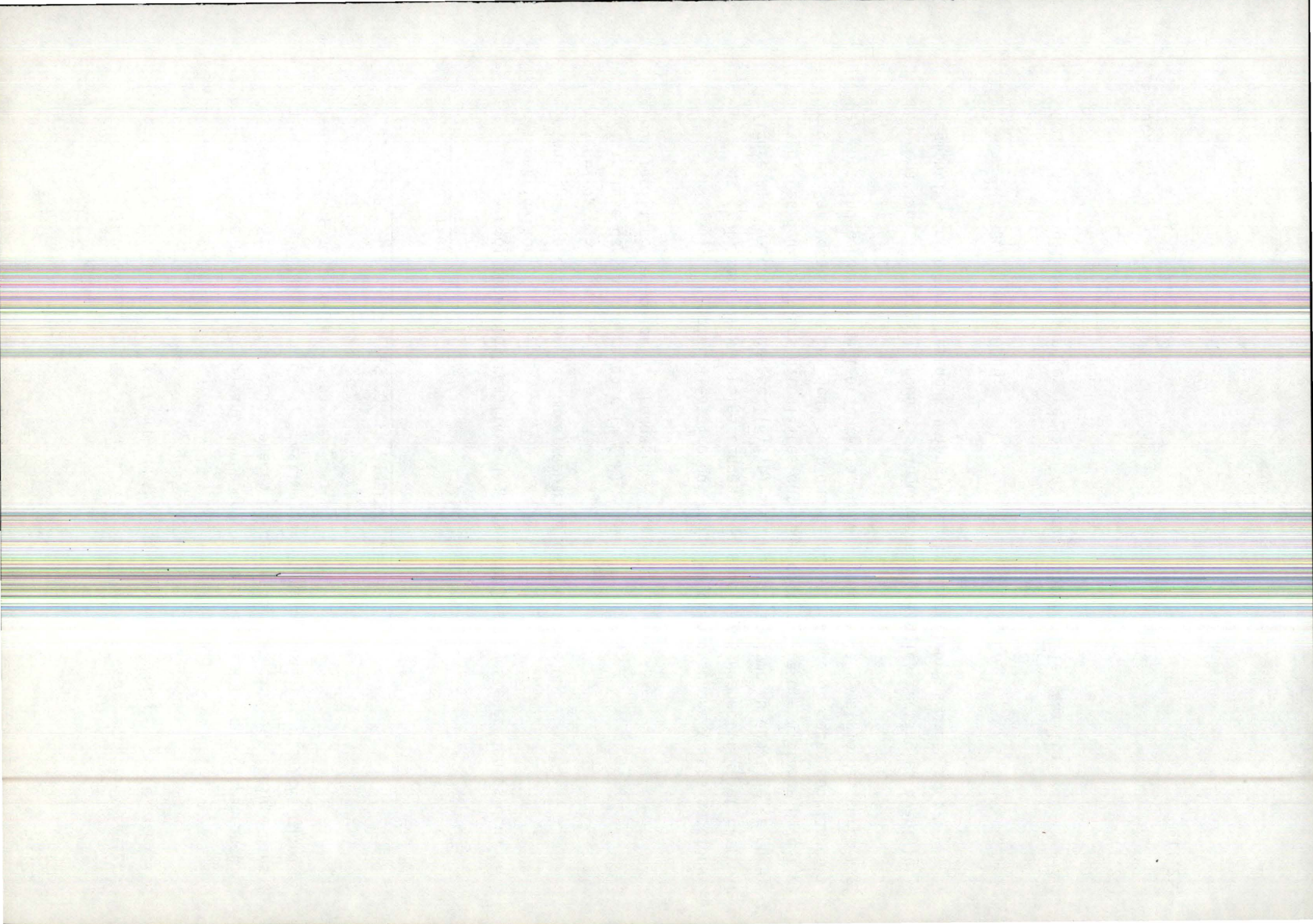
$$OO_T A \quad \text{et} \quad OO_T B.$$

Comme il s'agit de triangles rectangles, nous obtenons les égalités :

$$R_T = \sqrt{1 - p^2} \tag{I.24}$$

et

$$r_T = \sqrt{r^2 - p^2} . \tag{I.25}$$



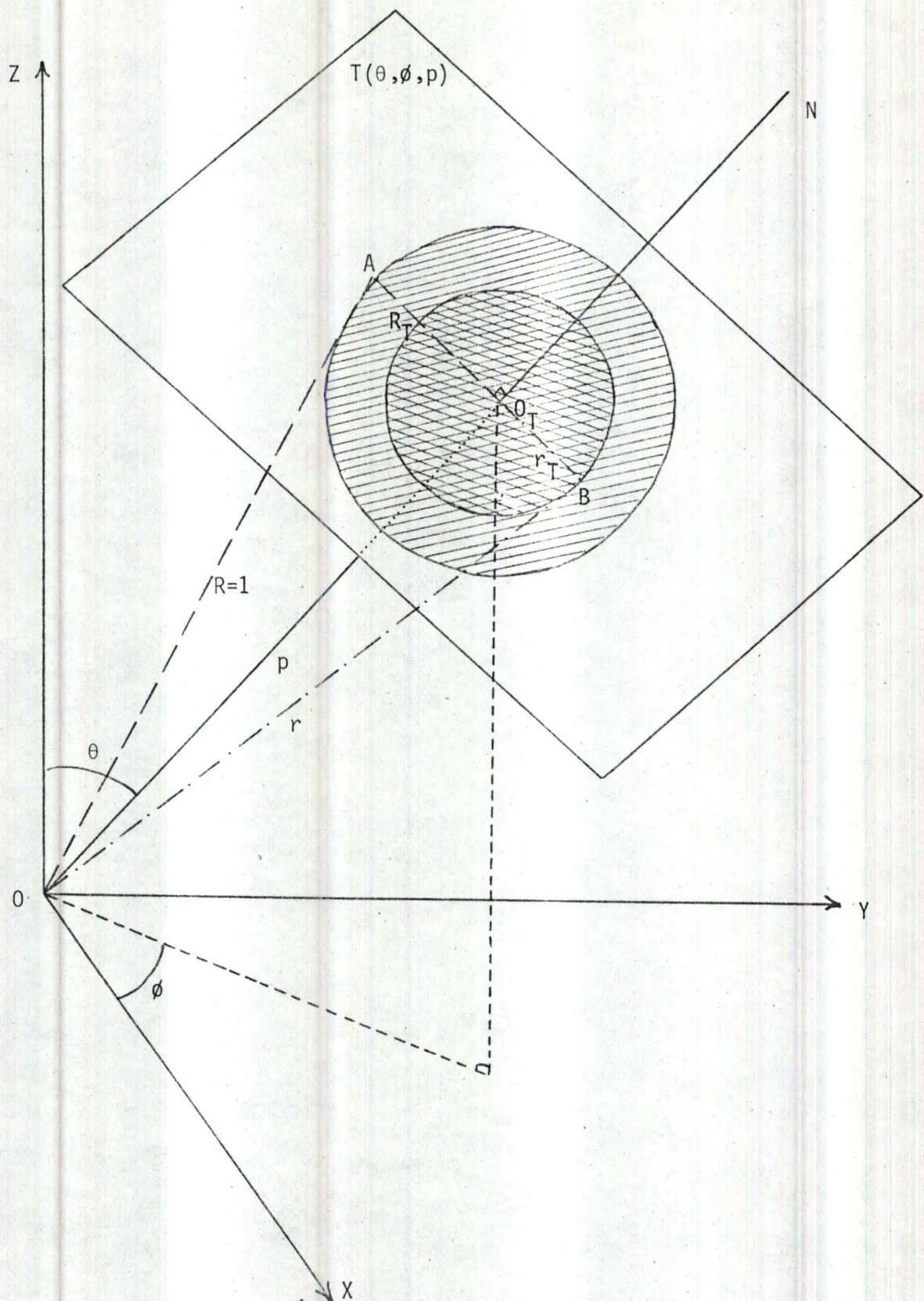
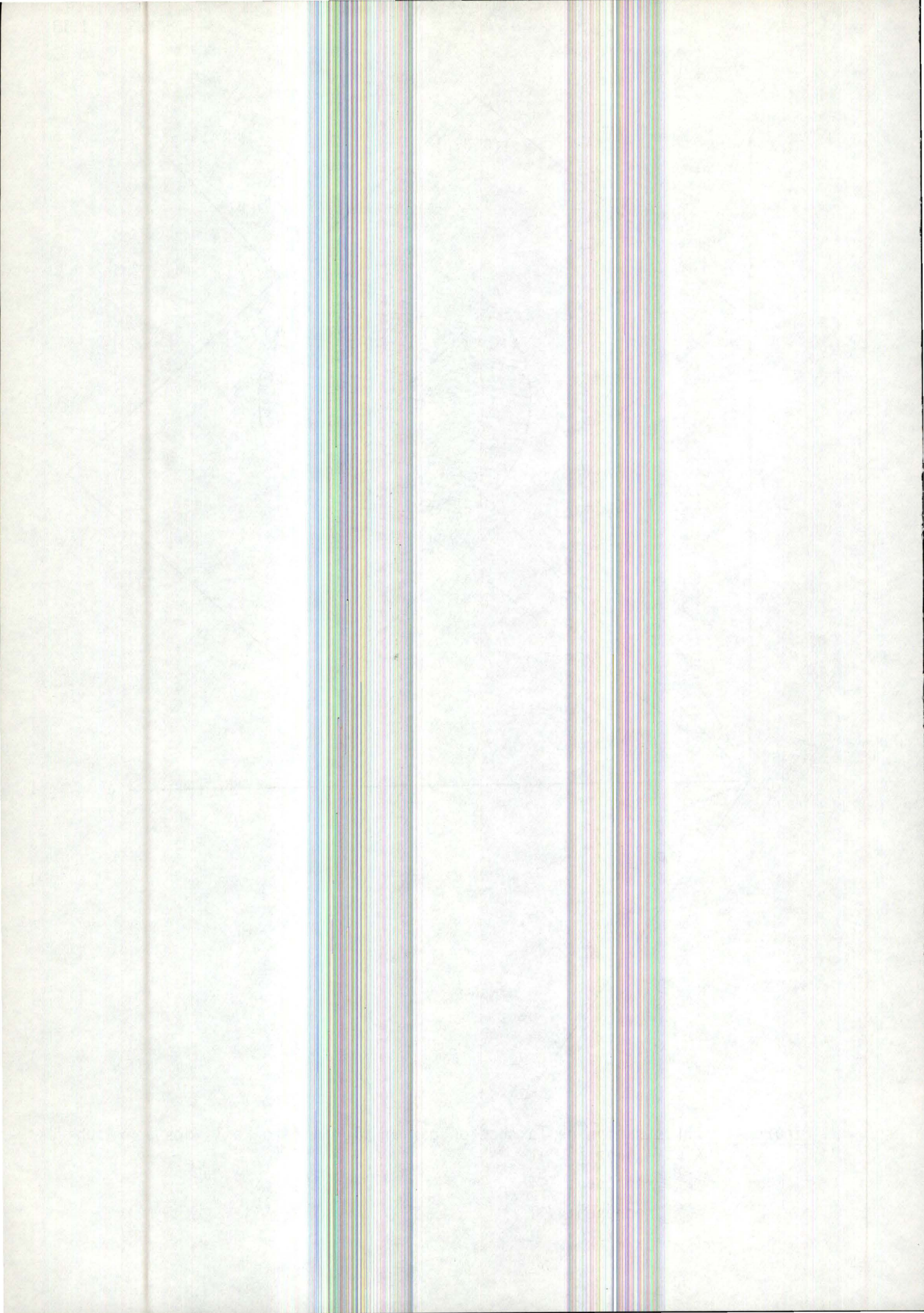


Figure 4 : Illustration de la section par un plan aléatoire T , des deux sphères X et Y dans E^3 .

▨ représenter $X \cap T$

▤ représenter $Y \cap T$



b. Quelques résultats élémentaires

Exploitions les particularités géométriques de cet exemple, exprimées au paragraphe a., pour écrire les formules suivantes.

- les aires des sections circulaires ($X \cap T$) et ($Y \cap T$) valent respectivement :

$$A_X = \Pi(1 - p^2). \quad (I.26)$$

$$A_Y = \begin{cases} \Pi(r^2 - p^2) & \text{si } p \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (I.27)$$

- la longueur du cercle ($\delta Y \cap T$) vaut :

$$B_Y = \begin{cases} 2\Pi \sqrt{r^2 - p^2} & \text{si } p \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (I.28)$$

- (I.26) et (I.28) donnent l'expression du rapport B_A :

$$B_A = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2 - p^2}}{1 - p^2} & \text{si } p \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (I.29)$$

- la projection de X sur la droite N, étant donné l'orientation (θ, ϕ) du plan T, égale à deux fois le rayon de la sphère X, et donc

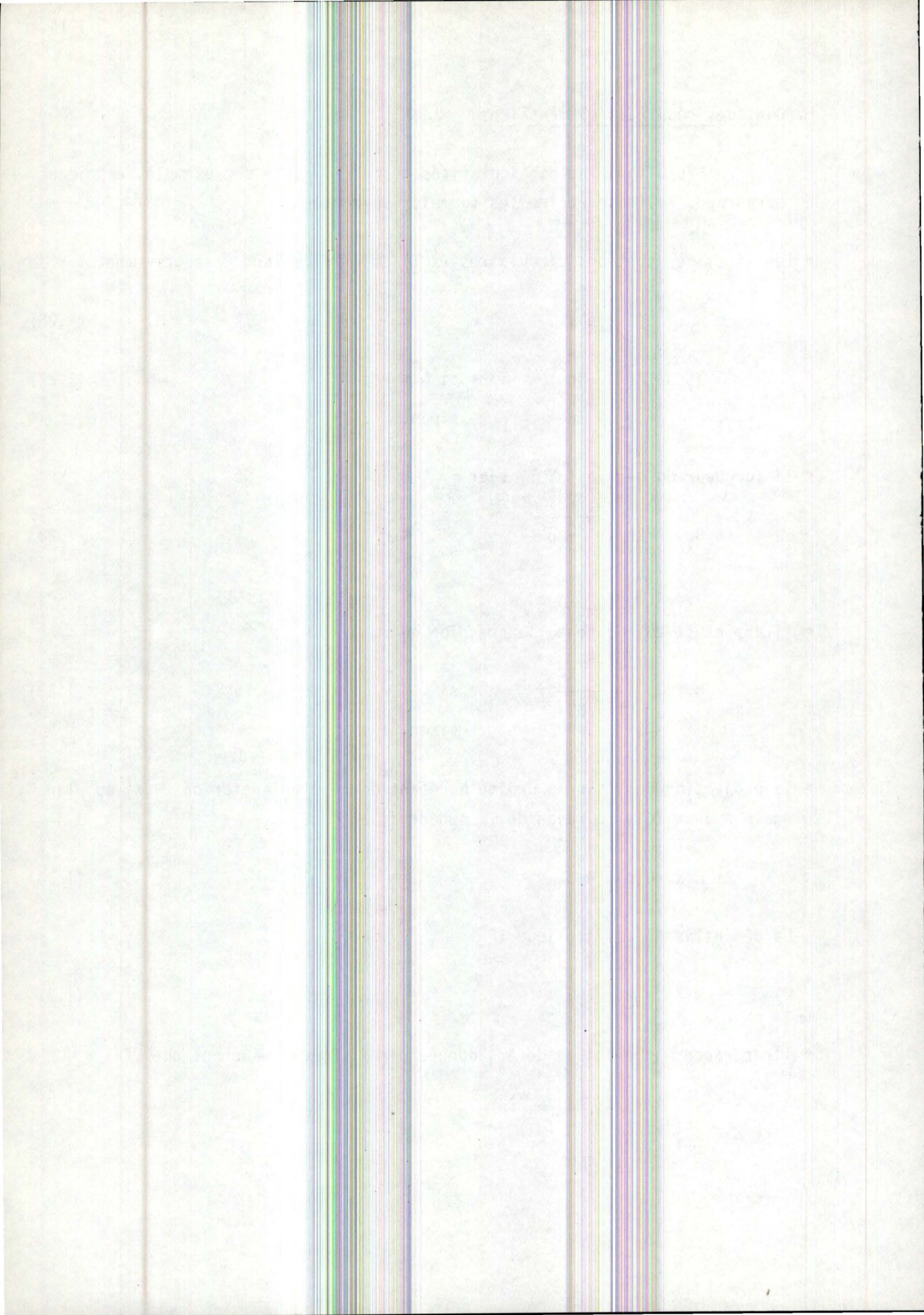
$$L(X_1(\theta, \phi)) = 2. \quad (I.30)$$

La définition (I.2) implique :

$$H(X) = 2. \quad (I.31)$$

- l'espérance mathématique de A_X , donnée par (I.9) est, sachant que $V(X) = \frac{4}{3} \Pi$:

$$E(A_X) = \frac{2\Pi}{3}. \quad (I.32)$$



c. Estimation de l'aire de la surface de Y

c.1. Application de la première conjecture : analyse du signe de $cov(A_X, B_A)$

Pourquoi cette intuition de R.E. Miles et de Pamela Davy ? Essayons de l'expliquer dans le cas, central, de deux sphères concentriques X et Y. De manière schématique, nous pouvons dire que la $cov(U, V)$ est positive si les deux variables aléatoires évoluent de la même façon, c'est-à-dire :

à de grandes (petites) valeurs de U correspondent de grandes (petites) valeur de V.

Comme Y est central dans X, il faut étudier la $cov(A_X, B_A)$ dans deux sous-domaines : dans le cas où le plan T

- a) coupe aussi Y,
- b) ne coupe pas Y.

Dans la situation a), quand A_X augmente, B_Y croît aussi et il nous faut dès lors étudier le comportement de B_A .

Dans la situation b), nous pressentons déjà que nous aurons des difficultés (dont R.E. Miles et Pamela Davy n'ont probablement pas tenu compte). En effet : à une variation de A_X ne correspond aucun changement de B_A ($B_Y = 0$ si T ne coupe pas Y). Il suffira donc d'intégrer B_Y et B_A au $[0, r]$ et non sur l'intervalle $[0, 1]$ tout entier.

Dès lors :

$$cov(A_X, B_A) = E(B_Y) - E(A_X) E(B_A)$$

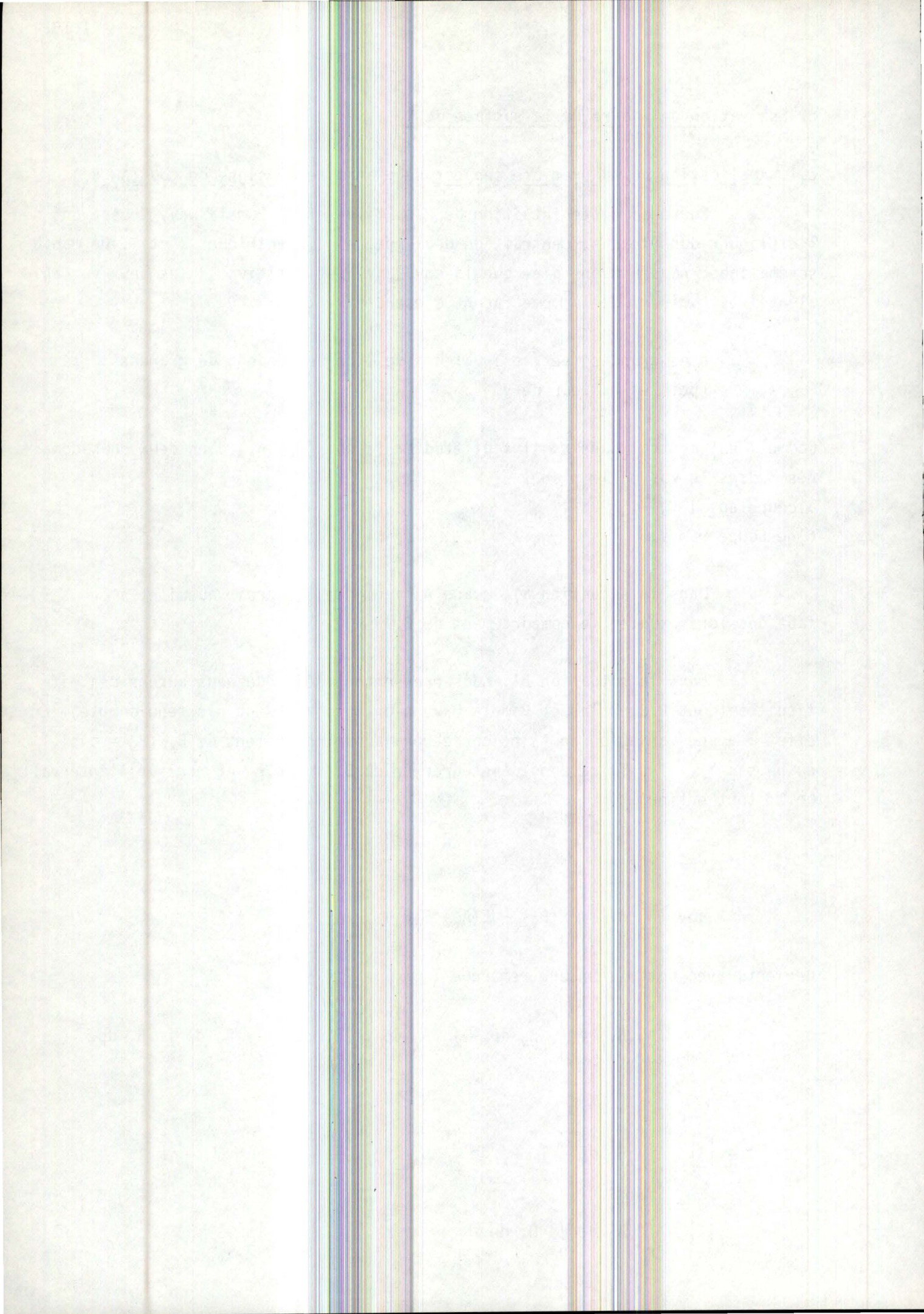
devient, avec cette dernière remarque :

$$cov(A_X, B_A) = \int_0^r B_Y dp - \int_0^r A_X dp \int_0^r B_A dp - \int_r^1 A_X dp \int_0^r B_A dp.$$

Posons :

$$\boxed{1} = \int_0^r B_Y dp - \int_0^r A_X dp \int_0^r B_A dp.$$

$$\boxed{2} = \int_r^1 A_X dp \int_0^r B_A dp.$$



Nous pouvons nous attendre à ce que [1] soit positive si A et B_A sont des fonctions décroissantes de p. Ceci implique probablement la conjecture, mais ne justifie en rien le signe de la covariance car, par la présence du terme [2], il faut toujours ajouter des quantités négatives.

A_X est bien une fonction décroissante de p : en effet :

$$\frac{dA_X}{dp} = -2\pi p \leq 0 \quad \forall p.$$

Cependant B_A n'est pas une fonction décroissante pour toutes les valeurs de p :

$$\frac{dB_A}{dp} = \frac{-2p}{(1-p^2)^2 \sqrt{r^2-p^2}} (1 + p^2 - 2r^2).$$

B_A est décroissante pour les valeurs suivantes, pour un rayon r fixé :

$$p^2 \geq 2r^2 - 1.$$

Nous constatons donc que pour $r \leq 0,7071067$, B_A est une fonction décroissante de p sur tout l'intervalle $[0, r]$. Cependant, si r devient grand, B_A n'est décroissant que sur un intervalle très petit et croissante partout ailleurs. C'est donc dans cette région de variation de r que nous nous attendons à trouver des contre-exemples à la conjecture. Ceci se vérifie dans l'exemple suivant.

Calculons les différents termes de la relation :

$$\text{cov}(A_X, B_A) = E(B_Y) - E(A_X) E(B_A). \quad (\text{I.33})$$

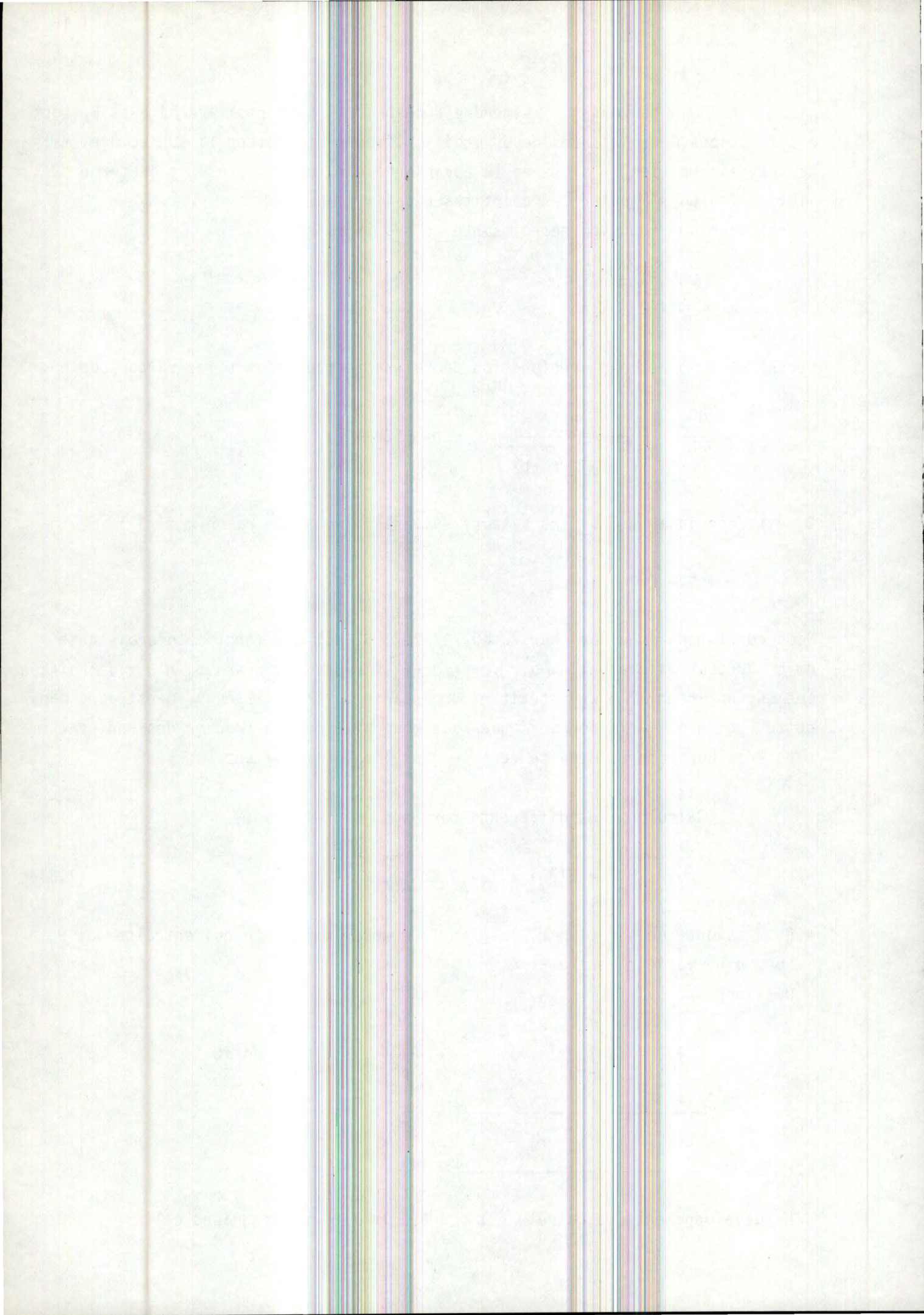
- Nous savons que si $|p| > r$, le plan T ne coupe pas Y, ce qui entraîne que $B_Y = 0$. Donc p ne varie qu'entre -r et r.

Dès lors :

$$E(B_A) = \frac{1}{4\pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{r^2-p^2}}{1-p^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp,$$

$$\boxed{E(B_A) = \pi (1 - \sqrt{1 - r^2})}. \quad (\text{I.34})$$

Le développement des calculs est donné à la fin du paragraphe c.1.



- Comme $S(Y) = 4\pi r^2$ la relation (I.13) devient :

$$E(B_Y) = \frac{\pi^2 r^2}{2} . \quad (I.35)$$

L'expression (I.33) avec les résultats (I.32), (I.34) et (I.35) s'écrit :

$$\text{cov}(A_X, B_A) = \pi^2 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3} (1 - \sqrt{1 - r^2}) \right] . \quad (I.36)$$

Cherchons la variation de signe de $\text{cov}(A_X, B_A)$. Les zéros de l'équation $\text{cov}(A_X, B_A) = 0$ se situent aux points :

$$r = 0 ;$$

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.943.$$

Conclusion :

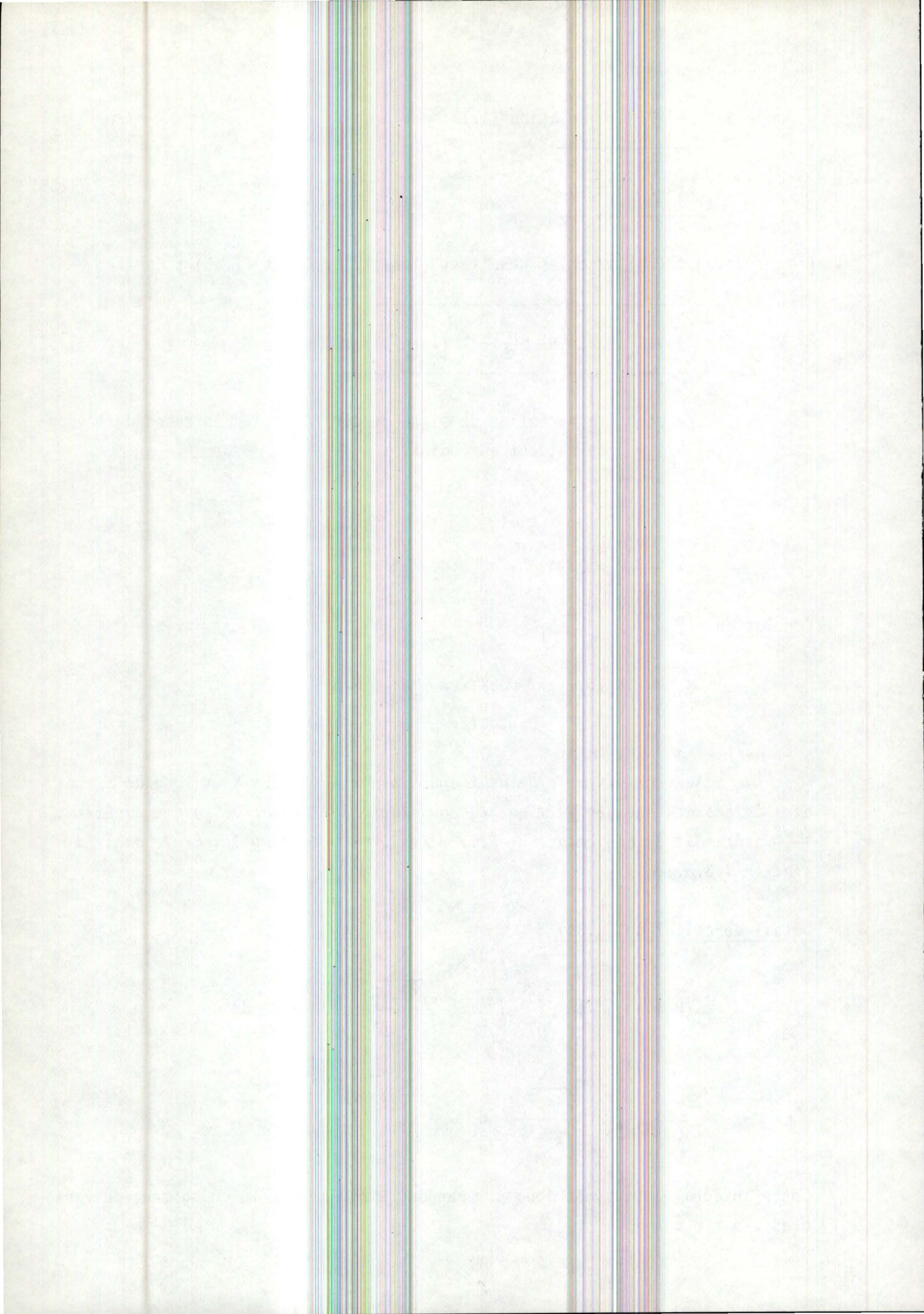
La $\text{cov}(A_X, B_A)$ est positive pour $0 \leq r \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$
négative $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq r \leq 1$.

Avec cet exemple de deux sphères concentriques X et Y , nous sommes dans le cas central. Le fait que la covariance soit négative pour r supérieur à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ contredit la conjecture de R.E. Miles et Pamela Davy (exprimée dans la section I.3.a.).

Détail de calcul de (I.34) :

$$\begin{aligned} E(B_A) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{r^2 - p^2}}{1 - p^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp, \\ &= \int_{-r}^r \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{1 - p^2} \, dp \end{aligned}$$

Cette intégrale est symétrique par rapport à r . Faisons le changement de variables : $p = r \cos \alpha$.



Nous obtenons :

$$E(B_A) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{1 - r^2 \cos^2 \alpha} d\alpha.$$

Appliquons les formules : $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1)$.
 $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$.

$$E(B_A) = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \cos 2\alpha} d\alpha.$$

Posons $2\alpha = x$:

$$E(B_A) = \frac{r^2}{2} [\boxed{1} - \boxed{2}]$$

où $\boxed{1} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \cos x}$.

$$\boxed{2} = \int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{1 - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \cos x}$$

Les tables de Dwight [2] nous donnent les résultats :

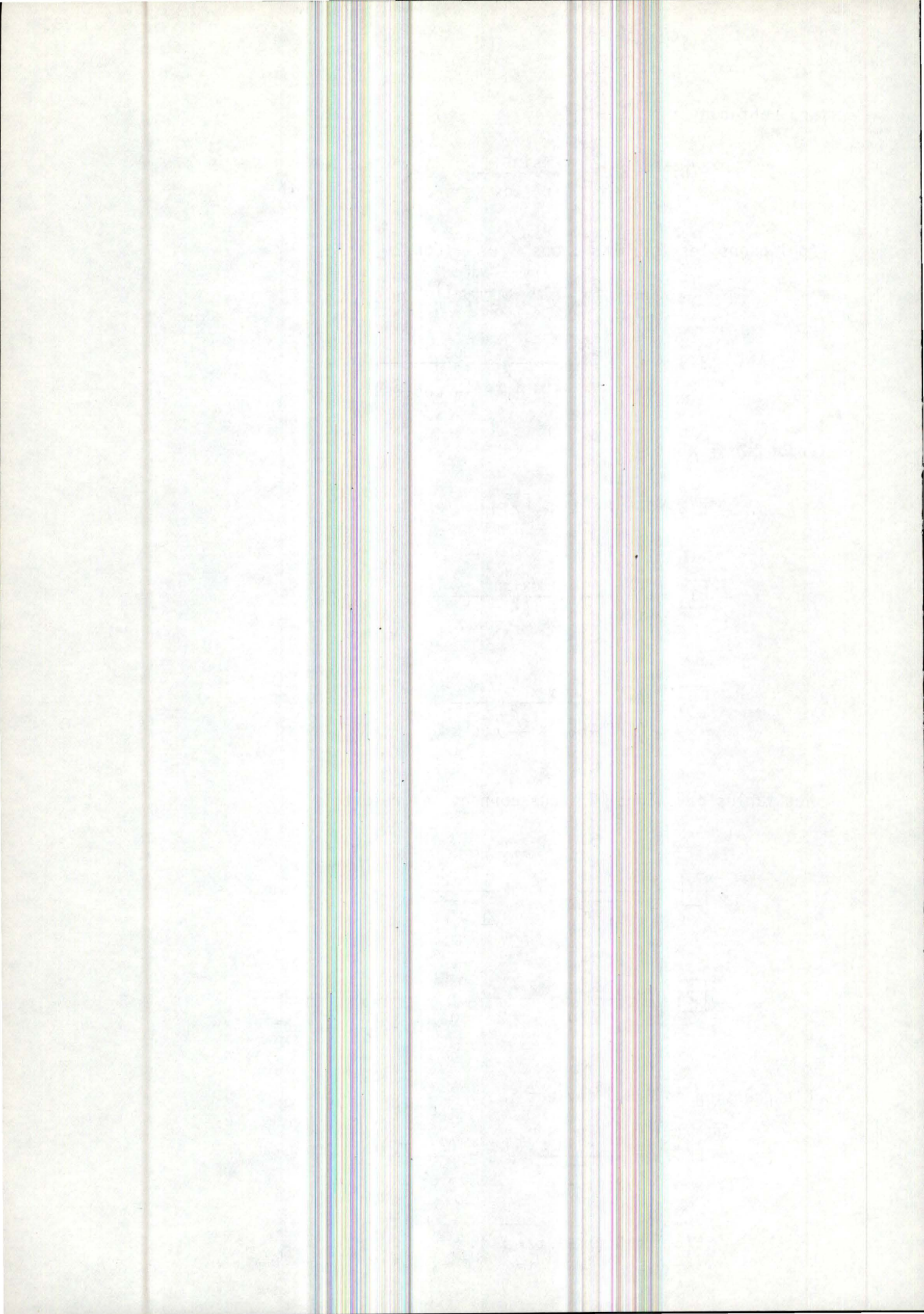
$$\boxed{1} = \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - r^2}} \right]_0^{\pi} \quad \text{comme } r^2 < 1.$$

$$\boxed{2} = \left[-\frac{2x}{r^2} \right]_0^{\pi} + \frac{2 - r^2}{r^2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \cos x}.$$

L'expression de $E(B_A)$ devient :

$$E(B_A) = \frac{r^2 \pi}{2 \sqrt{1 - r^2}} + \pi - \frac{(2 - r^2)\pi}{2 \sqrt{1 - r^2}}.$$

$$E(B_A) = \pi (1 - \sqrt{1 - r^2})..$$



c.2. Différence des risques quadratiques moyens

Exprimons la différence $MSE_A(B_A) - MSE(B_A)$ dans ce cas particulier-ci :

$$\begin{aligned} MSE_A(B_A) - MSE(B_A) &= \frac{1}{E(A_X)} E(B_Y(B_A - \frac{\Pi}{2} S_V)) - E(B_A(B_A - \frac{\Pi}{2} S_V)) \\ &= \frac{1}{E(A_X)} E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) - \frac{1}{E(A_X)} \frac{\Pi}{2} S_V E(B_Y) - E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) \\ &\quad + \frac{\Pi}{2} S_V E(B_A). \end{aligned} \quad (I.37)$$

Les deux termes soulignés valent (détail: voir fin du paragraphe c.2) :

$$\bullet E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) = \frac{1}{4\Pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{4\Pi^2 (r^2 - p^2)}{\Pi(1 - p^2)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp.$$

$$\boxed{E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) = 2\Pi \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| (r^2 - 1) + 4\Pi r} \quad (I.38)$$

$$\bullet E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) = \frac{1}{4\Pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{4\Pi^2 (r^2 - p^2)}{\Pi^2 (1 - p^2)^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp.$$

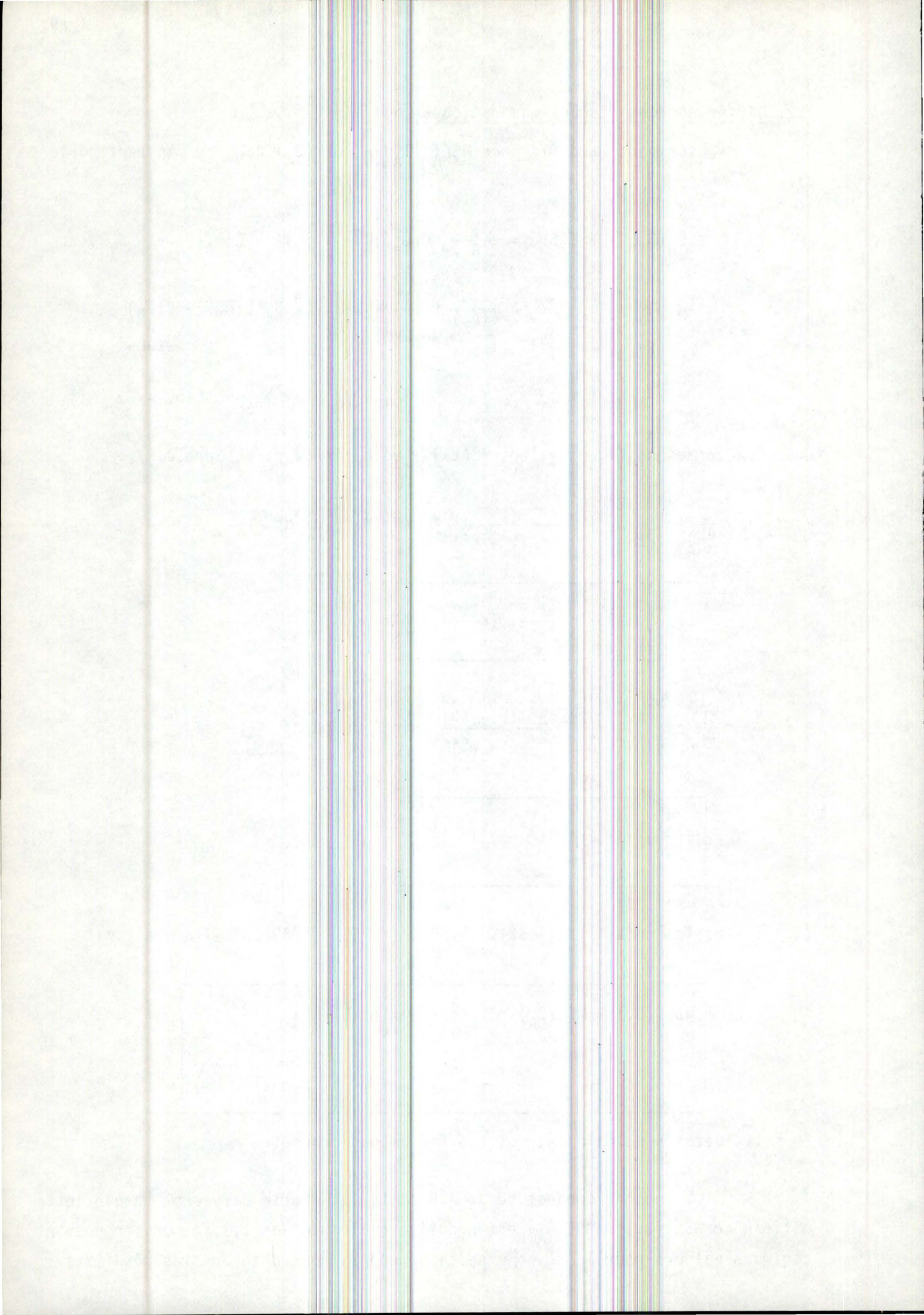
$$\boxed{E(\frac{B_Y^2}{A_X^2}) = -2r + (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|} \quad (I.39)$$

(I.37) avec les résultats (I.32), (I.38), (I.35), (I.39), (I.34) s'écrit :

$$\boxed{MSE_A(B_A) - MSE(B_A) = 2(r^2 - 2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 8r + \frac{3}{2} r^2 \Pi^2 \left(-\frac{3}{4} r^2 + 1 - \sqrt{1 - r^2} \right)} \quad (I.40)$$

Pour les détails de calculs, voir en fin de paragraphe.

La seconde conjecture de R.E. Miles et Pamela Davy exprime que cette différence $MSE_A(B_A) - MSE(B_A)$ est négative (voir section I.3.c). Or, en prenant quelques valeurs pour le rayon r de la sphère Y , nous obtenons les résultats :



r	MSE _A (B _A) - MSE(B _A)	signe
0.1	0.9628 E - 03	+
0.2	4.7761 E - 03	+
0.3	6.7052 E - 03	+
0.4	- 4.5493 E - 03	-
0.5	- 0.0432	-
0.9	- 0.3281	-

Conclusion :

Pour des petites valeurs du rayon de Y, la conjecture n'est pas vérifiée, c'est-à-dire dans le cas le moins homogène. Ceci signifie que dans le cas de deux sphères concentriques dont la sphère intérieure Y est de rayon 0.1, par exemple, et la sphère X de rayon 1, B_A est un meilleur estimateur de $\frac{\pi}{4} S_V$ si la densité est non pondérée !

Détails de calcul de (I.38), de (I.39) et de (I.40) :

(I.38) :

$$E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) = \frac{1}{4\pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi^2 (r^2 - p^2)}{\pi(1 - p^2)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp.$$

$$= 2\pi [r^2 \boxed{1} - \boxed{2}]$$

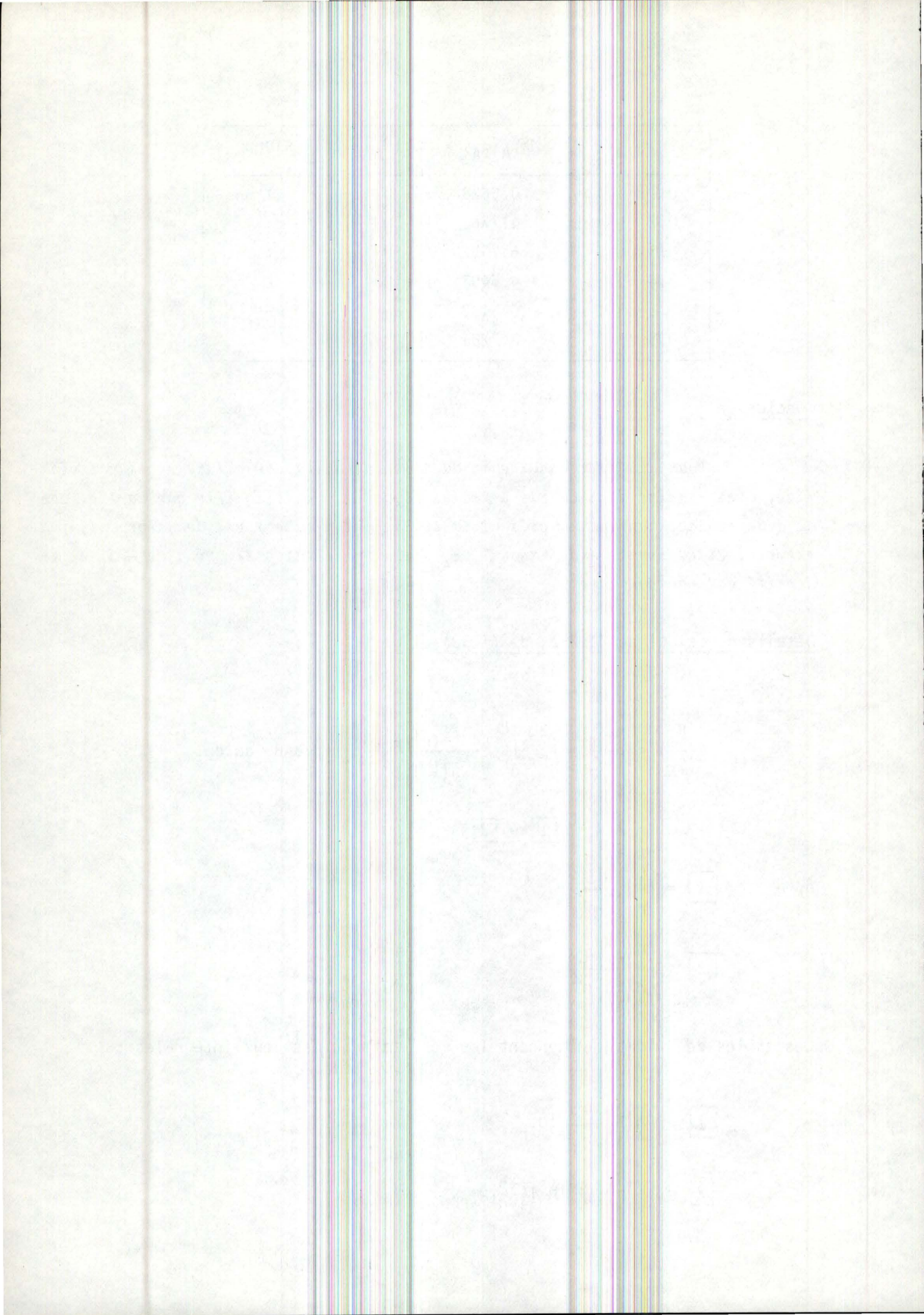
où $\boxed{1} = \int_{-r}^r \frac{dp}{1-p^2}$

$$\boxed{2} = \int_{-r}^r \frac{p^2 dp}{1-p^2}.$$

Les tables de Dwight [2] donnent les résultats de ces deux intégrales :

$$\boxed{1} = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_{-r}^r.$$

$$\boxed{2} = \left[-p + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_{-r}^r.$$



Dès lors :

$$E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) = 2\pi (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 4\pi r.$$

(I.39) :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-r}^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi^2 (r^2 - p^2)}{\pi^2 (1 - p^2)^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp, \\ &= 2 [r^2 \boxed{1} - \boxed{2}]. \end{aligned}$$

où $\boxed{1} = \int_{-r}^r \frac{dp}{(1 - p^2)^2},$

$$\boxed{2} = \int_{-r}^r \frac{p^2 dp}{(1 - p^2)^2}.$$

Ces deux intégrales sont résolues dans les tables de Dwight [2] :

$$\boxed{1} = \left[\frac{p}{2(1 - p^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_{-r}^r.$$

$$\boxed{2} = \left[\frac{p}{2(1 - p^2)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_{-r}^r.$$

Et nous trouvons :

$$E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) = -2r + (r^2 + 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|.$$

(I.40) : Les quatre termes de $MSE_A(B_A) - (MSE(B_A))$ sont :

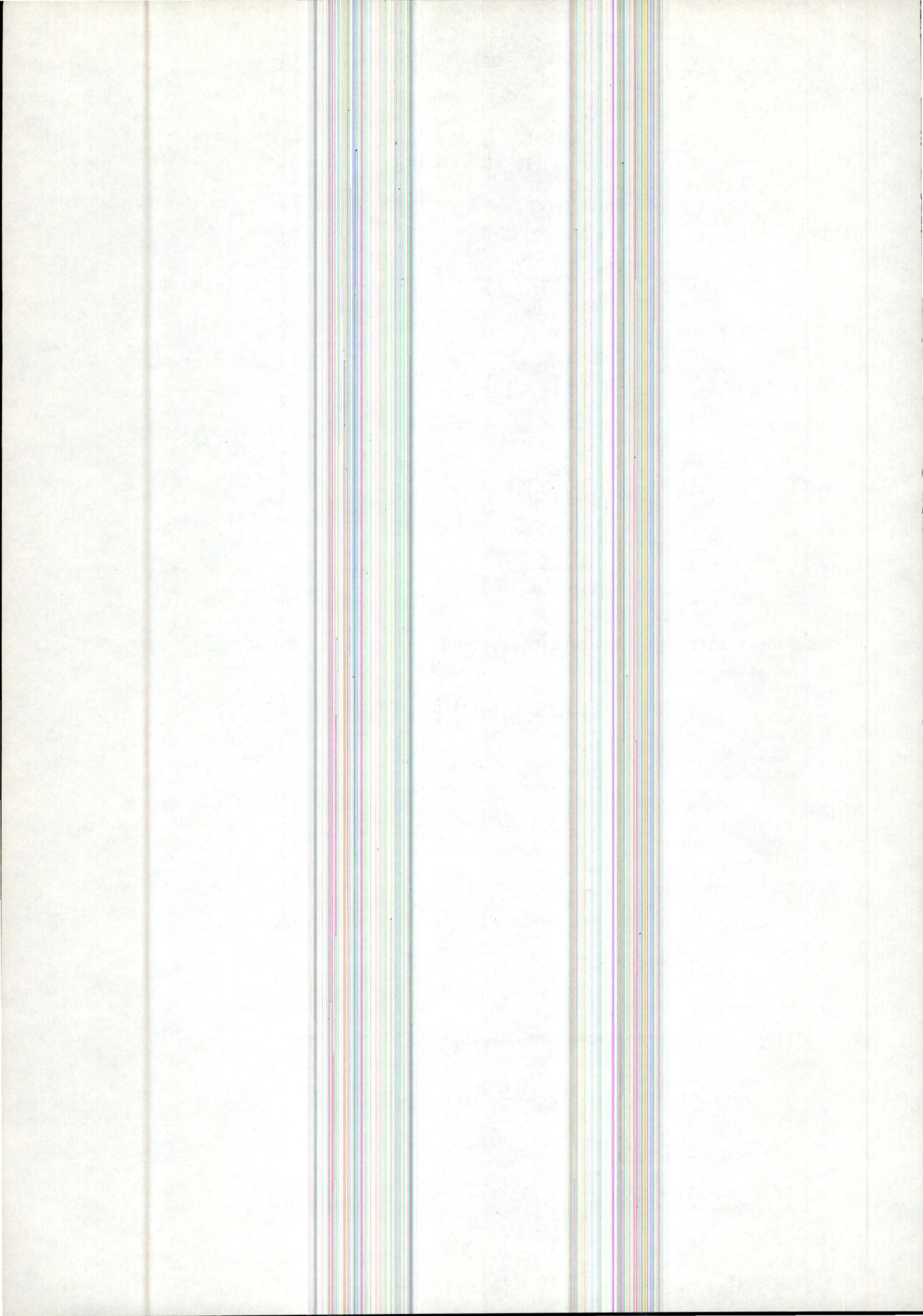
$$\boxed{1} = 3(r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 6r$$

$$\boxed{2} = -\frac{9}{8} \pi^2 r^4$$

$$\boxed{3} = 2r - (r^2 + 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|$$

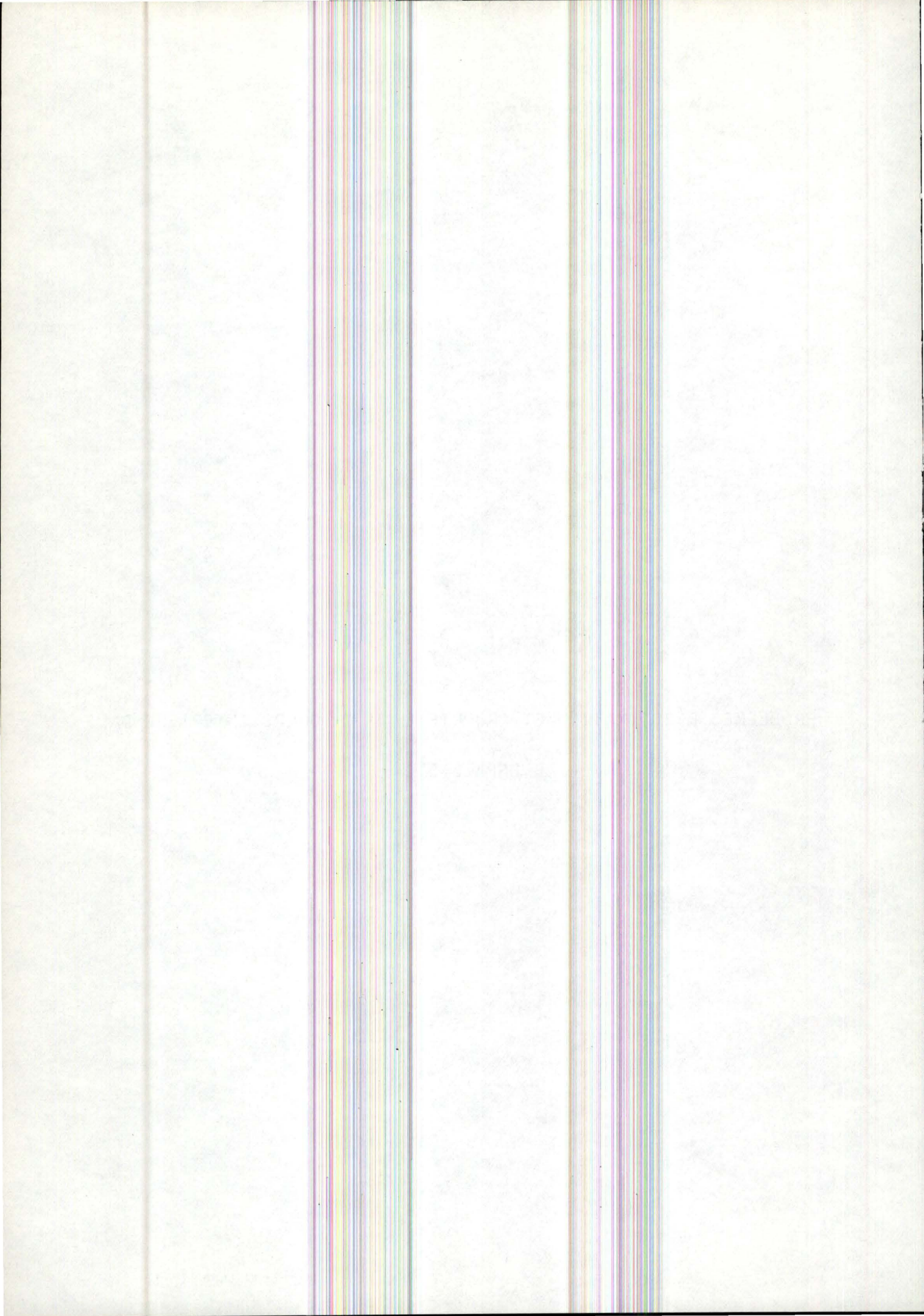
$$\boxed{4} = \frac{3}{2} \pi^2 r^2 (1 - \sqrt{1 - r^2})$$

$$\text{et } MSE_A(B_A) - (MSE(B_A)) = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}.$$



CHAPITRE II

PROBLEMES D'ESTIMATION ET PROPRIETES D'UN CORPS INTERIEUR, DANS
L'ESPACE E^N



CHAPITRE II

PROBLEMES D'ESTIMATION ET PROPRIETES D'UN CORPS INTERIEUR, DANS
L'ESPACE E^n

II.0. INTRODUCTION

La raison la plus importante pour laquelle nous travaillons en dimension n , est que cela donne la possibilité de construire une théorie compacte, résumant un grand nombre de cas différents.

Dans un premier temps, nous donnons quelques notions propres à la stéréologie (comme les éléments de mesure, la r -projection moyenne, ...), qui permettent de définir des variétés IUR et pondérées. Ensuite, nous énonçons et démontrons trois propriétés fondamentales : la première caractérise les éléments de probabilité des r -variétés linéaires, la suivante donne le moyen de générer les variétés linéaires pondérées, la dernière donne des estimateurs non biaisés, de certaines caractéristiques du corps intérieur de X .

II.1. VARIETES LINEAIRES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

a. Section aléatoire d'un corps

Plaçons-nous dans l'espace euclidien de dimension n : E^n . Soient les notations :

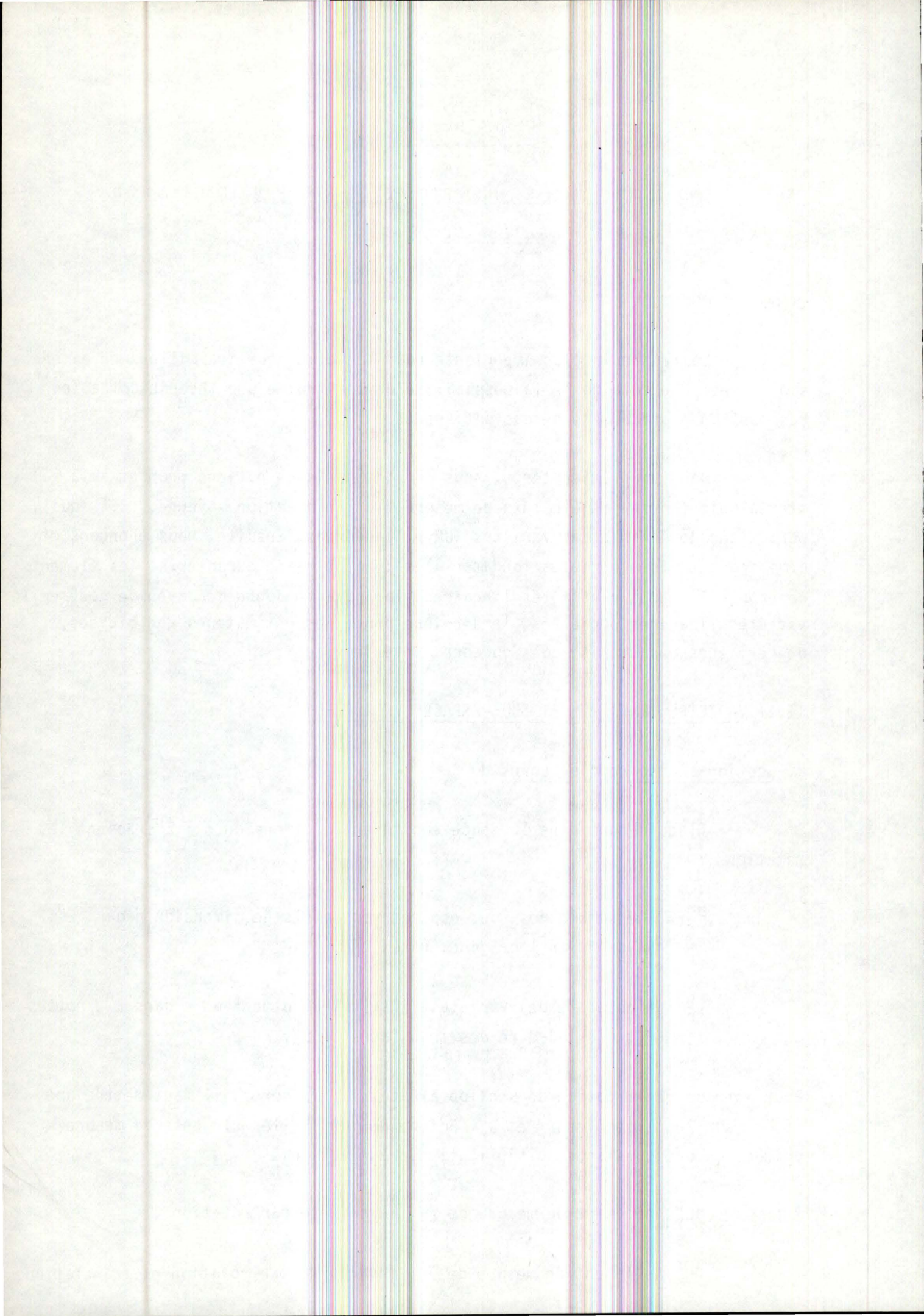
\mathcal{L}_r^n = l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension r dans E^n , passant par l'origine, notés L_r^n ;

\mathcal{F}_r^n = l'ensemble des variétés linéaires de dimension r dans E^n , notées F_r^n , c'est-à-dire des translatés de L_r^n .

Pour introduire la notion de section aléatoire d'un corps, il faut mettre une mesure sur les ensembles \mathcal{L}_r^n et \mathcal{F}_r^n . Soient dL_r^n et dF_r^n les éléments de mesure uniques (à une constante multiplicative près) tels que

dL_r^n = élément de mesure de \mathcal{L}_r^n invariante par rotation ;

dF_r^n = élément de mesure de \mathcal{F}_r^n invariante par rotation et translation.



dL_r^n et dF_r^n jouent le rôle attribué par la mesure de Lebesgue dans la théorie des variables réelles.

Nous nous intéresserons aux mesures s'écrivant sous la forme

$$\boxed{dF_r^n = dL_r^n \cdot dV_{n-r}}, \quad (\text{II.1})$$

avec $0 < r < n$,

où dV_{n-r} = élément de volume dans L_{n-r}^n , sous-espace vectoriel de E^n orthogonal à F_r^n .

La relation (II.1) exprime, en gros, l'indépendance de l'orientation et de la localisation.

Exemple 1 :

Reprenons le cas traité au chapitre I et vérifions que l'élément de mesure sur l'ensemble des plans aléatoires satisfasse la relation (II.1).

Nous avons ici :

$$n = 3 \quad \text{et} \quad r = 2.$$

Ce qui nous donne :

$$dL_2^3 = \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

$$\text{où } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \phi < 2\pi.$$

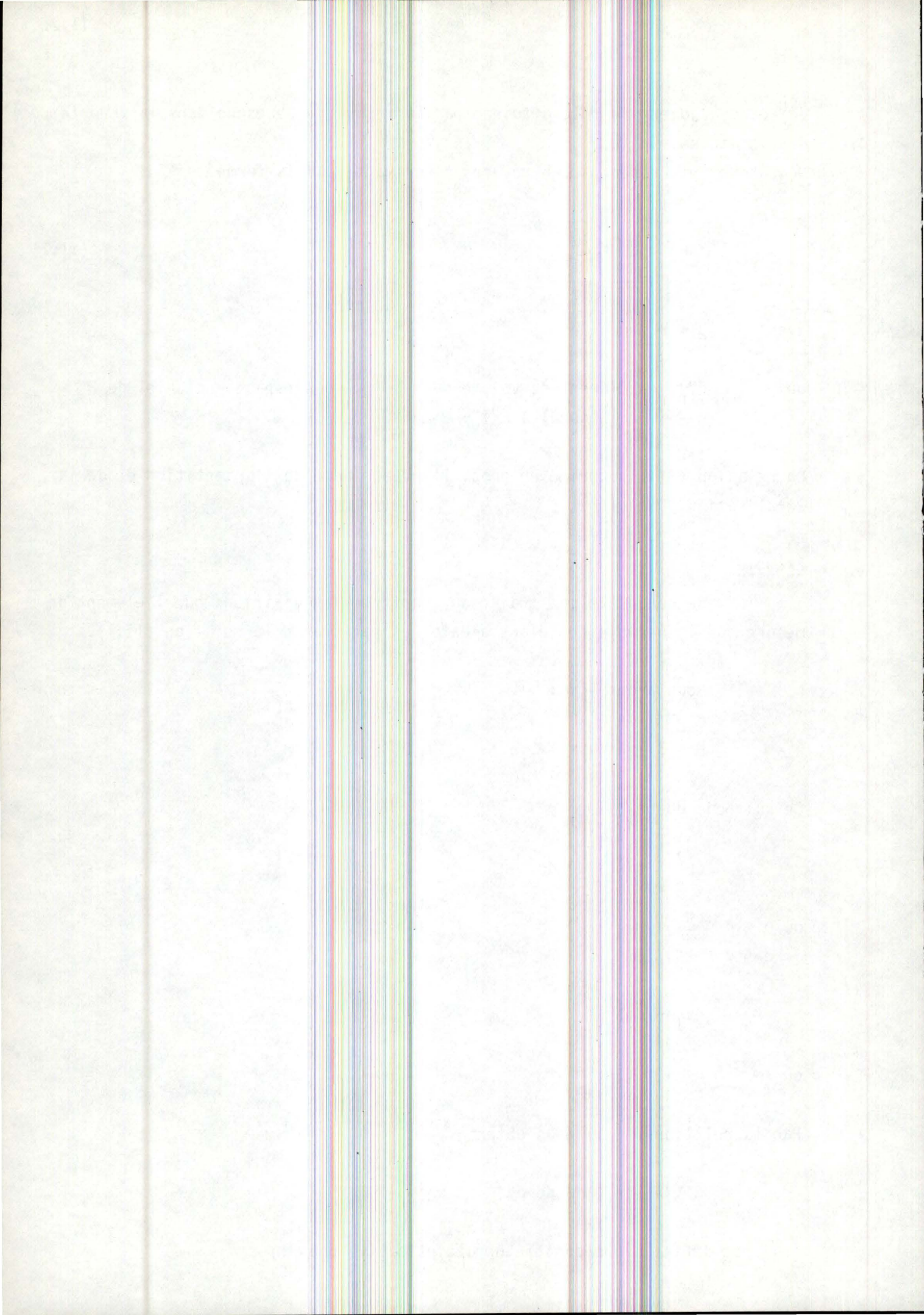
$$dV_1 = dh,$$

$$\text{où } -\infty < h < +\infty.$$

Par la relation (II.1) nous obtenons :

$$dF_2^3 = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dh.$$

(qui est défini à une constante multiplicative près !)



Or, nous avons vu au premier chapitre que la mesure dF_2^3 sur l'ensemble de plans aléatoires était invariante par rotation et translation et que la mesure dL_2^3 sur l'ensemble des orientations sur la demi-sphère est invariante par rotation. Ceci correspond bien à ce qui est annoncé dans cette section-ci.

Exemple 2 :

Cet exemple-ci fait référence au chapitre IV.2.

Considérons les sections de corps à deux dimensions par une droite. Nous sommes donc dans le cas où :

$$n = 2 \quad \text{et} \quad r = 1,$$

$$dL_1^2 = d\theta \quad 0 \leq \theta < \pi,$$

$$dV_1 = dp \quad -\infty < p < +\infty.$$

Ce qui implique par (II.1) :

$$dF_1^2 = d\theta dp.$$

dL_1^2 et dF_1^2 sont respectivement invariant par rotation, et par rotation et translation. (cfr. Santalo [7], p. 10 et Kendall et Moran [1], p. 16.)

Remarques :

- 1) Les variétés linéaires et les sous-espaces vectoriels, de dimension r , sont appelés respectivement des r -variétés linéaires et des r -sous-espaces.
- 2) Une extension commode et naturelle est de définir une 0 -variété linéaire comme un point de E^n . La relation (II.1) devient alors :

$$\begin{aligned} dF_0^n &= dV_n, \\ &= dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

ce qui est l'élément de mesure de Lebesgue en dimension n .

b. Restriction des mesures précédentes

Considérons les restrictions des éléments de mesure dL_r^n et dF_r^n aux éléments de mesure $dL_{r(q)}^n$ et $F_{r(q)}^n$ respectivement, où :

$L_{r(q)}^n$ = r-sous-espace vectoriel L_r^n , contenant un q-sous-espace vectoriel fixé ;

$F_{r(q)}^n$ = r-variété linéaire F_r^n , contenant une q-variété linéaire fixée.

La formule :

$$\boxed{dF_r^n \cdot dF_q^r = dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n} \quad (II.2)$$

$0 \leq q < r < n$

est donnée par Santalo [6],

où

F_q^n = q-variété linéaire contenue dans F_r^n .

De (II.2) découle la formule suivante :

$$\boxed{\int dL_{r(q)}^n = \frac{\int dL_r^n \cdot \int dL_q^r}{\int dL_q^n}} \quad (II.3)$$

$1 \leq q < r < n.$

en effet : par (II.2) :

$$dF_r^n \cdot dF_q^r = dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n.$$

Appliquons (II.1) aux deux membres et en sachant que $dF_{r(q)}^n = dL_{r(q)}^n$ (car les contraintes imposées sont telles qu'il n'y a pas d'élément de volume qui intervient).

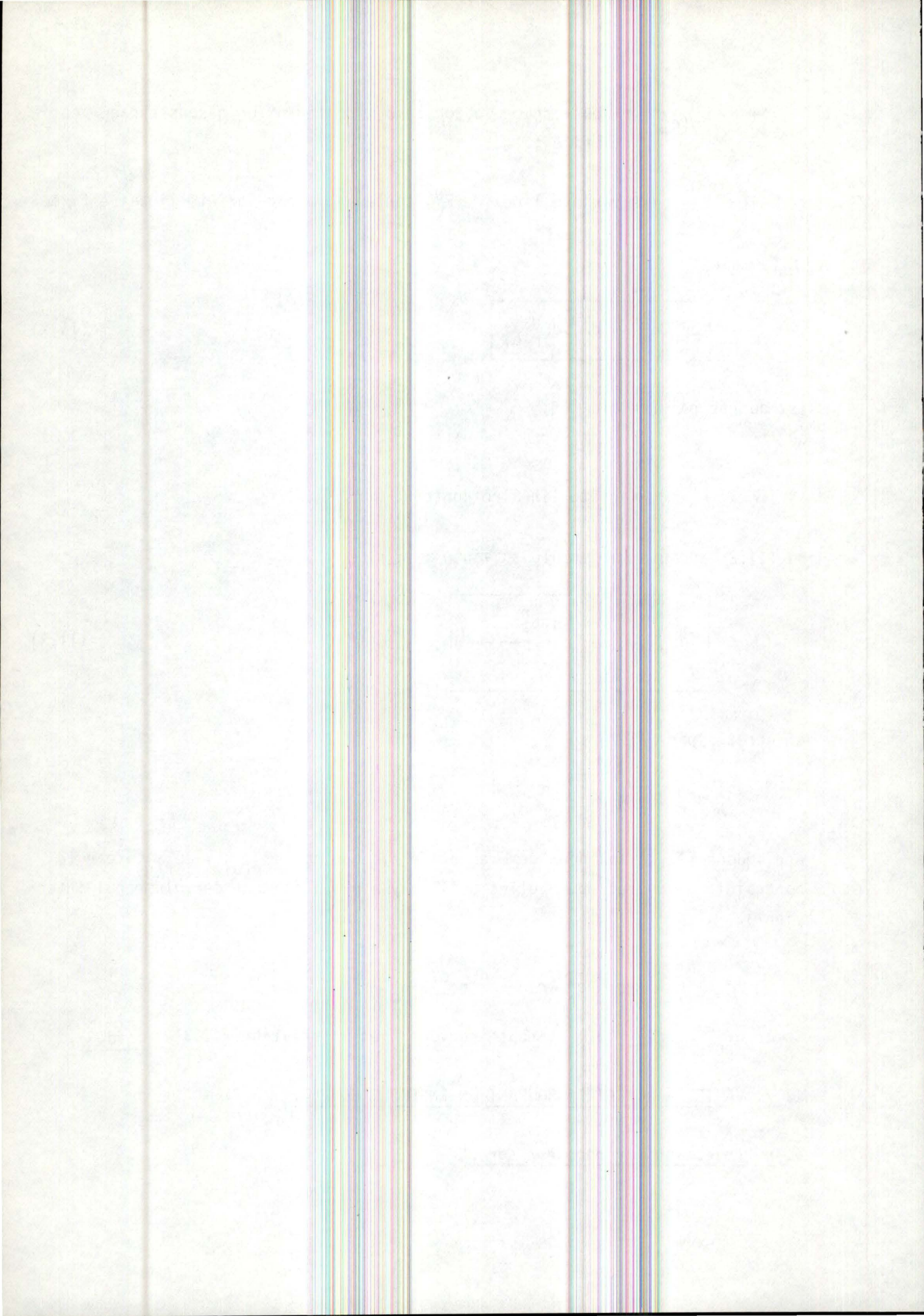
$$dL_r^n \cdot dV_{n-r} \cdot dL_q^r \cdot dV_{r-q} = dL_q^n \cdot dV_{n-q} \cdot dL_{r(q)}^n.$$

Comme $dV_{n-q} = dV_{n-r} \cdot dV_{r-q}$, nous trouvons bien la relation (II.3). cqfd.

II.2. VARIETES LINEAIRES COUPANT UN ENSEMBLE COMPACT

a. r-Projection moyenne de X sur L_r^n

Soit :



X = un ensemble compact de E^n ;

$\mathfrak{F}_r^n(X)$ = l'ensemble des r -variétés linéaires coupant X , c'est-à-dire
 $F_r^n \in \mathfrak{F}_r^n(X) \Leftrightarrow (F_r^n \cap X) \neq \emptyset$.

Exemple :

$\mathfrak{F}_0^3(X)$ = ensemble des points de X dans E^3 ;

$\mathfrak{F}_1^3(X)$ = ensemble des sécantes de X dans E^3 ;

$\mathfrak{F}_2^3(X)$ = ensemble des sections planes de X dans E^3 .

Définition :

La r -projection moyenne de X , notée $M_r^n(X)$, est la moyenne de la mesure de Lebesgue en dimension r de la projection orthogonale de X sur un sous-espace vectoriel aléatoire isotrope L_r^n :

$$M_r^n(X) = \frac{\int |X(L_r^n)|_r \cdot dL_r^n}{\int dL_r^n} \quad 1 \leq r < n, \quad (\text{II.4})$$

où

$X(L_r^n)$ = la projection orthogonale de X sur L_r^n ;

$|\dots|_r$ = la mesure de Lebesgue dans un espace de dimension r .

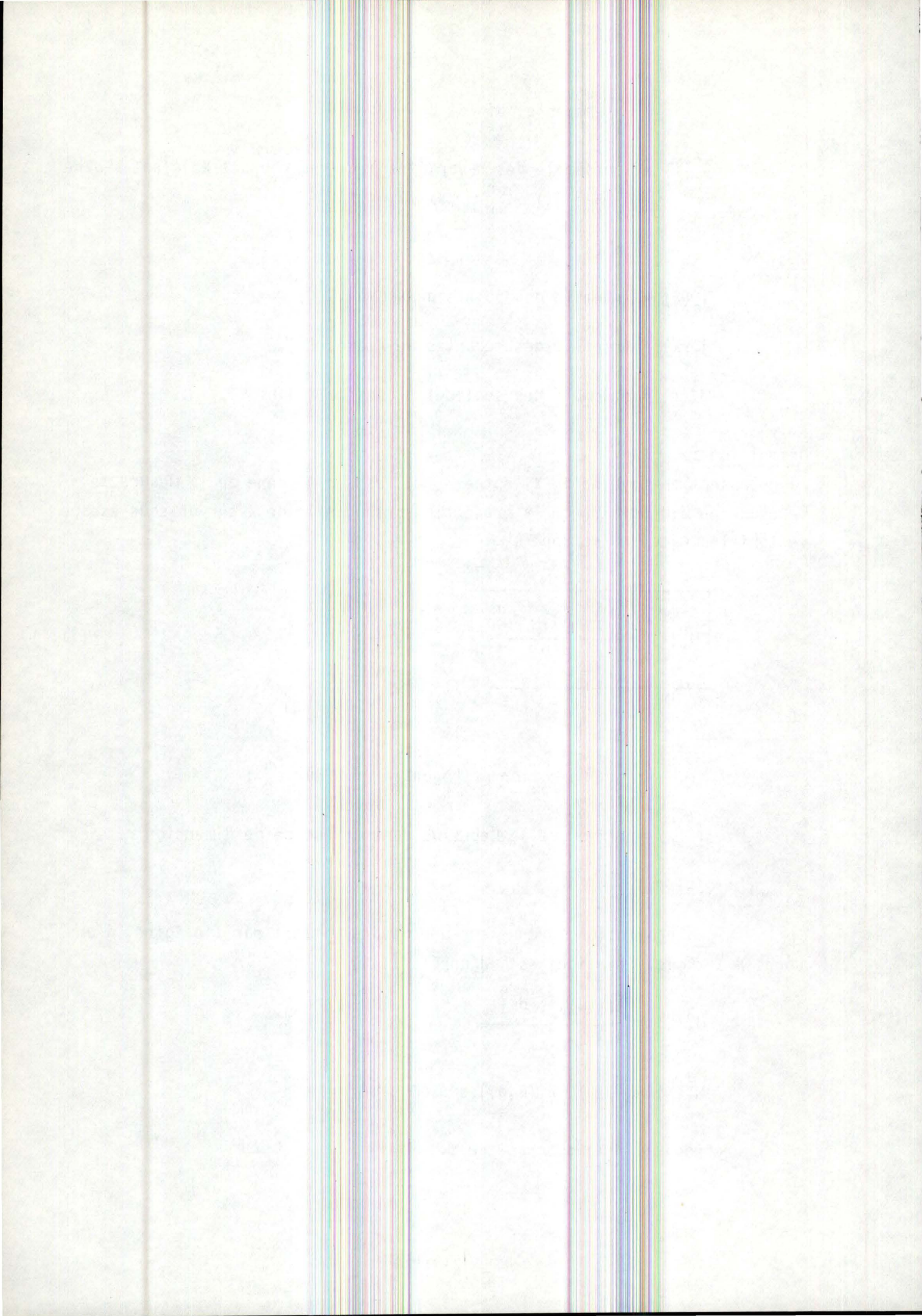
Exemple 1 :

La projection moyenne sur une droite passant par l'origine, d'un corps X à trois dimensions est, d'après (II.4) :

$$M_1^3(X) = \frac{\int |X(L_1^3)|_1 \cdot dL_1^3}{\int dL_1^3},$$

$$M_1^3(X) = \frac{1}{2\pi} \int L(X_1(\theta, \phi)) \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

qui correspond au $H(X)$ du chapitre I.



Exemple 2 :

Projettons un corps X à deux dimensions sur une droite passant par l'origine. Par (II.4), nous obtenons :

$$M_1^2(X) = \frac{\int |X(L_1^2)|_1 \cdot dL_1^2}{\int dL_1^2},$$

$$= \frac{1}{\Pi} \int L(X_1(\theta)) d\theta,$$

où

$M_1^2(X)$ sera noté $F(X)$ au chapitre IV.

Cas particuliers :

Une extension naturelle et commode est la suivante. Posons :

$$M_0^n(X) = 1 \quad \text{pour tout corps } X, \text{ compact et non vide ;}$$

$$M_n^n(X) = |X|_n,$$

$$M_r^n(\emptyset) = 0 \quad \text{pour tout } r \text{ tel que } 0 \leq r < n.$$

b. Variété linéaire non pondérée

- *Element de probabilité non pondéré, sur $\mathcal{F}_h^n(X)$*

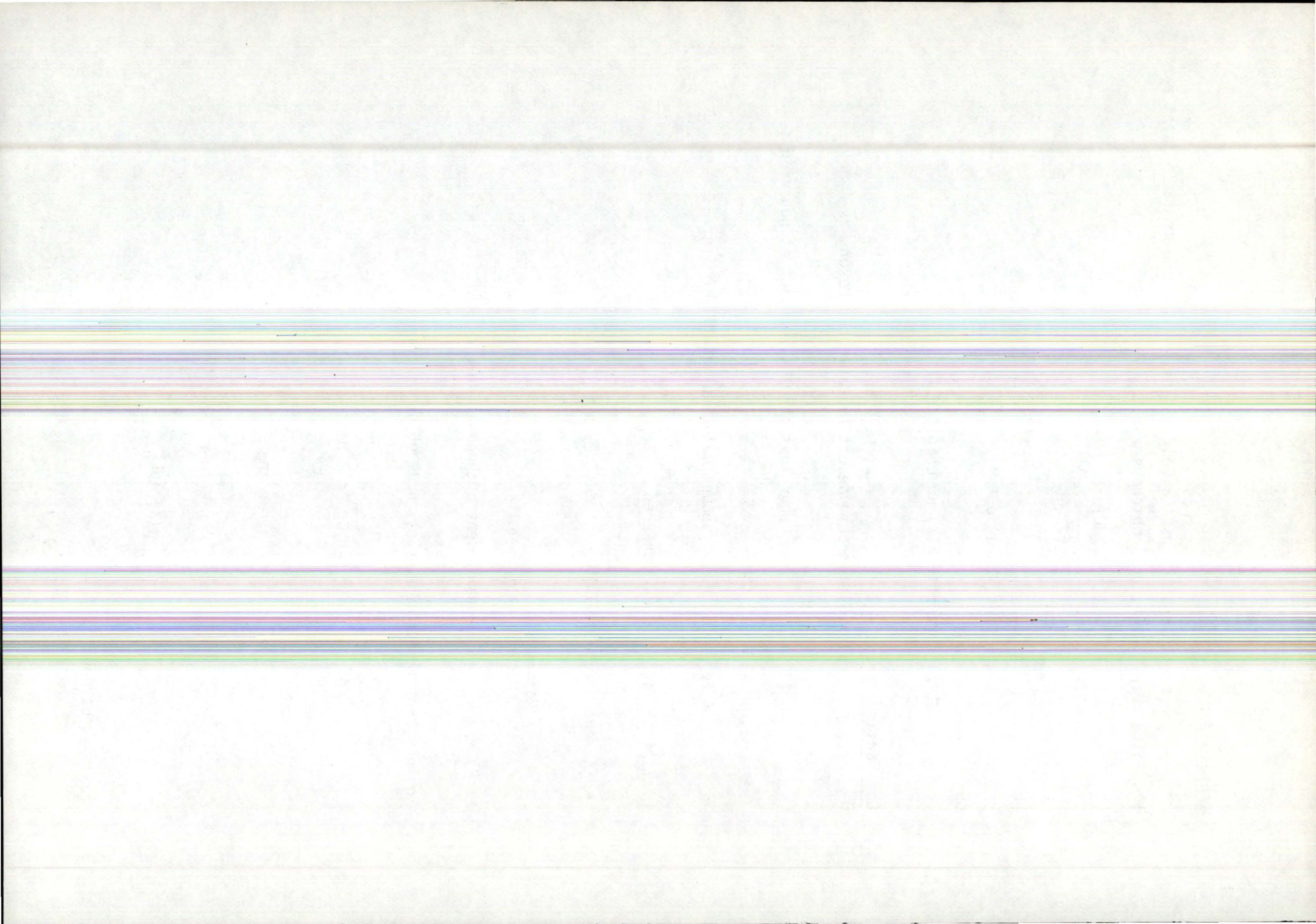
Notons :

$$L_{n-r}^n = \text{le complement orthogonal de } L_r^n.$$

En intégrant la formule (II.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{F_r^n \uparrow X} dF_r^n &= \int_{F_r^n \uparrow X} dL_r^n \cdot dV_{n-r}, \\ &= \int |X(L_{n-r}^n)|_{n-r} dL_r^n, \\ &= \int |X(L_{n-r}^n)|_{n-r} dL_{n-r}^n, \\ &= M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_{n-r}^n. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :



$$\int_{F_r^n \uparrow X} dF_r^n = M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_r^n \quad (II.5)$$

$$0 \leq r < n,$$

où nous avons employé la relation intuitive : $dL_{n-r}^n = dL_r^n$ (en effet, ces deux espaces se déterminent biunivoquement par orthogonalité).

Si $M_{n-r}^n(X) > 0$, ce qui est le cas quand X est non vide, nous pouvons, par la relation (II.5) déterminer la mesure de probabilité sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$, en normalisant la mesure invariante donnée par (I.1).

L'élément de probabilité sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$ correspondant est :

$$\frac{dF_r^n}{M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_r^n} \quad (II.6)$$

Exemple 1 :

Vérifions que (II.6) corresponde à la mesure sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$ définie au chapitre précédant pour $n = 3$ et $r = 2$. Il faut donc justifier l'égalité suivante :

$$\frac{dF_2^3}{M_1^3(X) \cdot \int dL_2^3} = \frac{\sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp}{2\pi H(X)} ;$$

en effet :

$$\begin{aligned} dF_2^3 &= \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp, \\ M_1^3(X) &= H(X), \\ \int dL_2^3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi. \end{aligned}$$

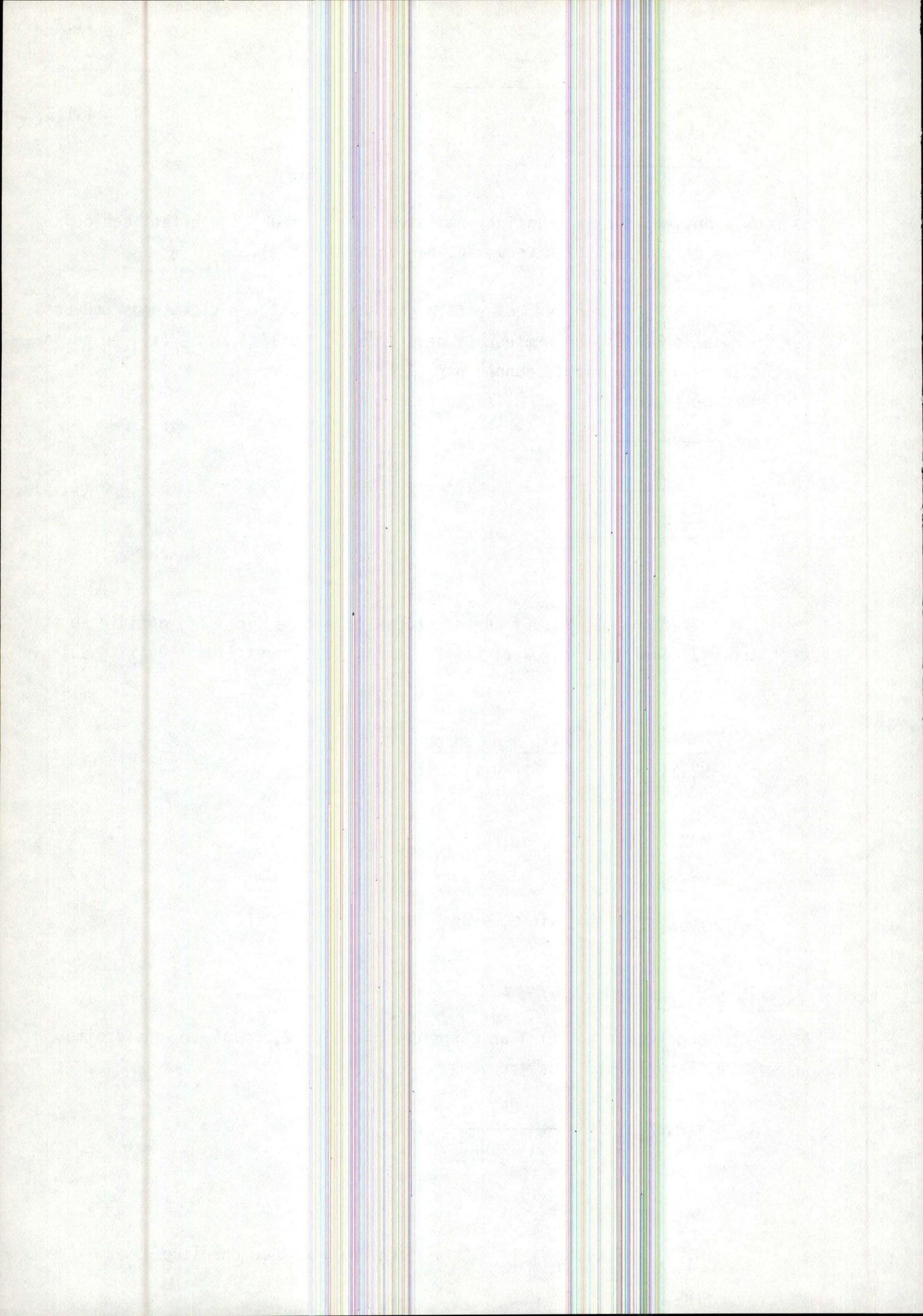
Exemple 2 :

Appliquons (II.6) à un corps de dimension 2, coupé par une droite aléatoire. Par (II.6), nous trouvons :

$$f(\theta, p) \, d\theta \, dp = \frac{dF_1^2}{M_1^2(X) \cdot \int dL_1^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} dF_1^2 &= d\theta \, dp, \\ M_1^2(X) &= F(X), \\ \int dL_1^2 &= \int_0^\pi d\theta = \pi. \end{aligned} \quad (\text{cfr. notation au chapitre IV})$$



Et nous obtenons :

$$f(\theta, p) d\theta dp = \frac{1}{\Pi F(X)} d\theta dp.$$

Propriété 1 :

- (i) La probabilité qu'une r -variété linéaire aléatoire d'élément de probabilité (II.6), coupe un sous-ensemble fermé Y de X est :

$$\frac{M_{n-r}^n(Y)}{M_{n-r}^n(X)}, \quad (II.7)$$

invariante pour un mouvement euclidien de Y dans X .

- (ii) Si la r -variété linéaire aléatoire coupe Y , son élément de probabilité conditionnelle est donné par :

$$\frac{dF_r^n}{M_{n-r}^n(Y) \cdot \int dL_r^n}. \quad (II.8)$$

Démonstration :

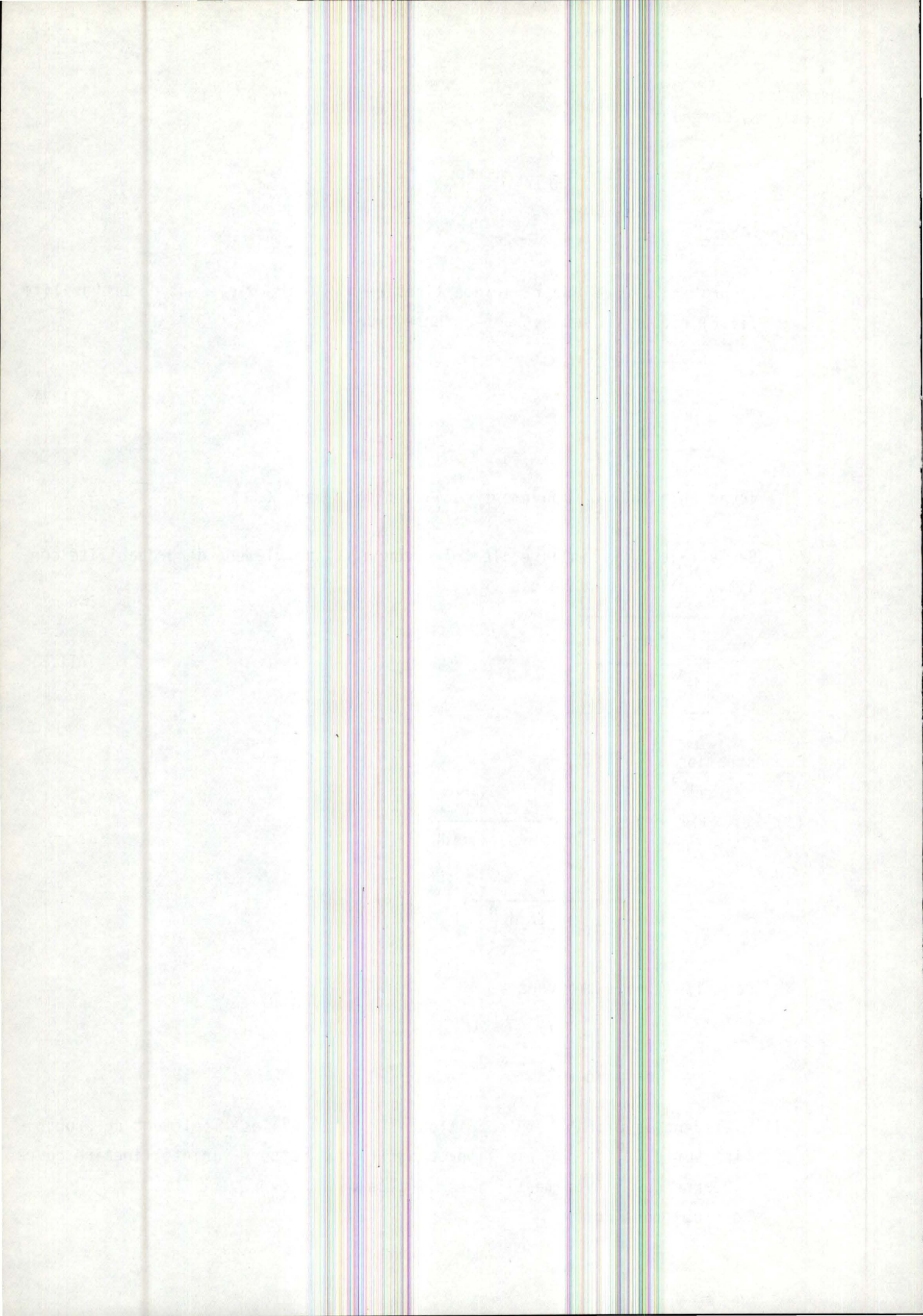
$$\begin{aligned} (i) \quad P[F_r^{n \uparrow Y}] &= \int_{F_r^{n \uparrow Y}} \frac{dF_r^n}{M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_r^n}, \\ &= \frac{1}{M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_r^n} \cdot \int_{F_r^{n \uparrow Y}} dF_r^n. \end{aligned}$$

Par (II.4), nous trouvons :

$$P[F_r^{n \uparrow Y}] = \frac{M_{n-r}^n(Y)}{M_{n-r}^n(X)}. \quad \underline{\text{cqfd.}}$$

- (ii) L'élément de probabilité conditionnelle sur $\mathfrak{F}_r^n(Y)$ est l'élément de probabilité sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$ divisé par la probabilité que cette r -variété linéaire coupe Y , parce que l'événement $T \uparrow Y$ est inclus dans l'événement $T \uparrow X$.

Nous obtenons donc :



$$\frac{dF_r^n}{M_{n-r}^n(X) \cdot \int dL_r^n} \cdot \frac{1}{P[F_r^n \uparrow Y]} = \frac{dF_r^n}{M_{n-r}^n(Y) \cdot \int dF_r^n}, \quad \text{par (II.7).}$$

cqfd.

Définition :

Une r -variété linéaire ayant (II.6) comme élément de probabilité est appelée une r -variété linéaire IUR à travers X , c'est-à-dire une r -variété linéaire aléatoire isotrope et uniforme (en anglais : Isotropic Uniform Random r -flat).

Nous verrons que sectionner par des IUR r -variétés linéaires est un instrument fondamental pour estimer la structure interne du corps X . Plusieurs facteurs de pondération peuvent être employées, pour échantillonner X . Par exemple : Si une section plane est pondérée par l'aire de cette section (comme au chapitre I), au plus cette aire est grande, au plus nous attacherons d'importance à ce plan.

c. Variété linéaire pondérée

- *Elément de probabilité pondérée sur $\mathcal{F}_r^n(X)$:*

Remarquons tout d'abord que nous avons les deux relations suivantes :

$$1) \quad \int_{F_r^n \uparrow X, F_q^r \uparrow (X \cap F_r^n)} dF_r^n \cdot dF_q^r = \int_{F_r^n \uparrow X} [M_{r-q}^r(X \cap F_r^n) \cdot \int dL_q^r] dF_r^n, \quad (\text{II.9})$$

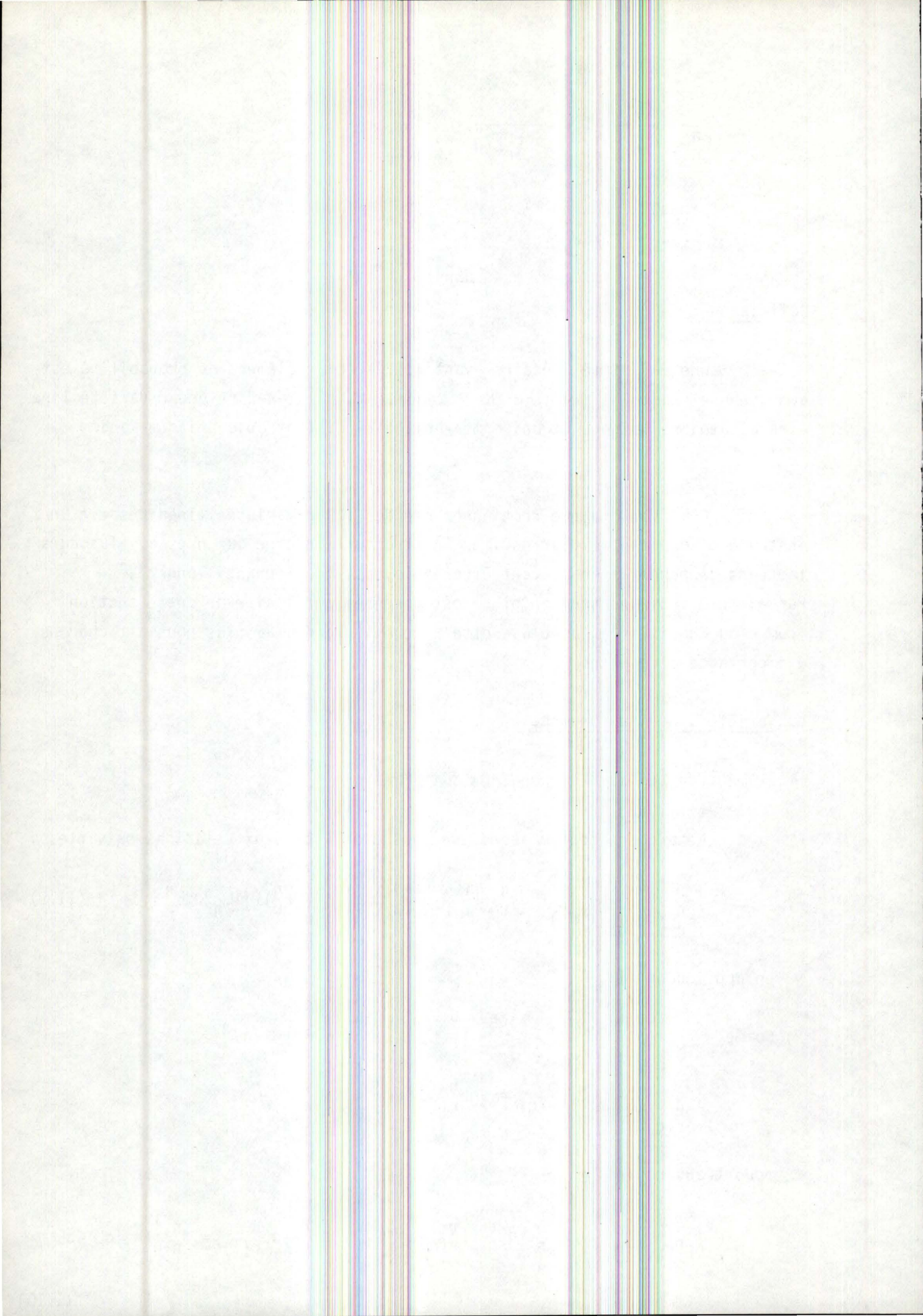
en appliquant (II.5).

2) Comme

$$\int_{F_r^n} dF_r^n \supset F_q^n \quad dF_{r(q)}^n = \int dL_{r(q)}^n,$$

nous trouvons :

$$\int_{F_q^n \uparrow X, F_{r(q)}^n \supset F_q^n} dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n = \int_{F_q^n \uparrow X} dF_q^n \cdot \int dL_{r(q)}^n = M_{n-q}^n(X) \cdot \int dL_q^n \cdot \int dL_{r(q)}^n$$



en appliquant (II.5).

Ces deux égalités nous permettent de trouver différentes lois de probabilité pondérées sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$. En effet :

$$\begin{aligned} \int_{F_r^n \uparrow X} M_{r-q}^r(X \cap F_r^n) \cdot dF_r^n &= \int_{F_r^n \uparrow X, F_q^r \uparrow (X \cap F_r^n)} \frac{dF_r^n \cdot dF_q^r}{\int dL_q^r} \quad \text{par (II.9),} \\ &= \int_{F_q^n \uparrow X, F_{r(q)}^n \supset F_q^n} \frac{dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n}{\int dL_q^r} \quad \text{par (II.2),} \\ &= \frac{M_{n-q}^n(X) \cdot \int dL_{r(q)}^n \cdot \int dL_q^n}{\int dL_q^r} \quad \text{par (II.10).} \end{aligned}$$

Et à nouveau par (II.2) :

$$\boxed{\int_{F_r^n \uparrow X} M_{r-q}^r(X \cap F_r^n) \cdot dF_r^n = M_{n-q}^n(X) \cdot \int dL_r^n} \quad \text{(II.11)}$$

$0 \leq q \leq r < n.$

(II.11) généralise la relation (II.5).

De (II.11), nous déduisons :

Si $M_{n-q}^n(X) > 0,$

alors

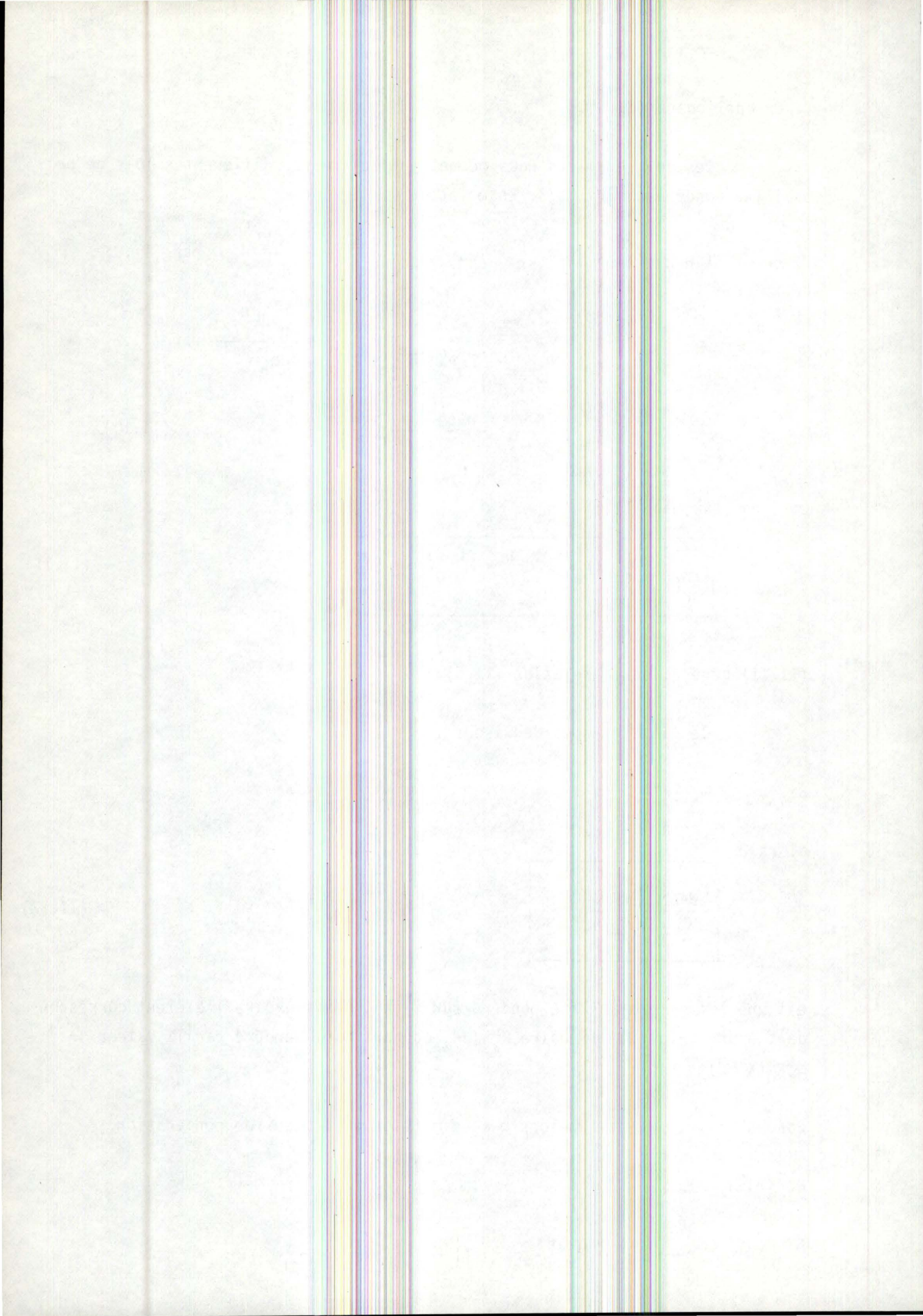
$$\boxed{\frac{M_{r-q}^r(X \cap F_r^n)}{M_{n-q}^n(X) \cdot \int dL_r^n} \cdot dF_r^n} \quad \text{(II.12)}$$

est une loi de probabilité pondérée sur $\mathfrak{F}_r^n(X)$, c'est-à-dire l'élément correspondant à une r -variété linéaire F_r^n IUR, coupant X et pondéré par la valeur $M_{r-q}^r(X \cap F_r^n)$.

Posons $p = r - q$, et appelons p la dimension du facteur de pondération.

Définition :

Si $M_{n-r+p}^n(X) > 0$ et



Si $M_p^r(X \cap F_r^n) > 0$

pour presque tout F_r^n coupant X , nous dirons que ce plan F_r^n est une r -variété linéaire p -pondérée, coupant X .

Remarque :

Une variété IUR est une variété linéaire 0-pondérée (donc une variété linéaire non pondérée).

Exemple : (illustrant (II.12))

Plaçons-nous dans le cas où :

$$n = 3 \quad r = 2 \quad q = 0.$$

(II.12) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{M_2^2(X \cap F_2^3)}{M_3^3(X) \cdot \int dL_2^3} \cdot dF_2^3 &= \frac{A(X \cap F_2^3)}{V(X) \cdot \iint \sin \theta \, d\theta \, d\phi} \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp, \\ &= \frac{A(X \cap F_2^3) \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp}{\iiint A(X \cap F_2^3) \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dp}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à ce que nous avons établi au chapitre I.

II.3. PROPRIETES DE BASE DE VARIETES LINEAIRES PONDEREES

Considérons toutes les variétés linéaires dont la différence entre la dimension r et le facteur de poids p est une constante. La propriété suivante donne le lien qu'il y a entre ces variétés linéaires.

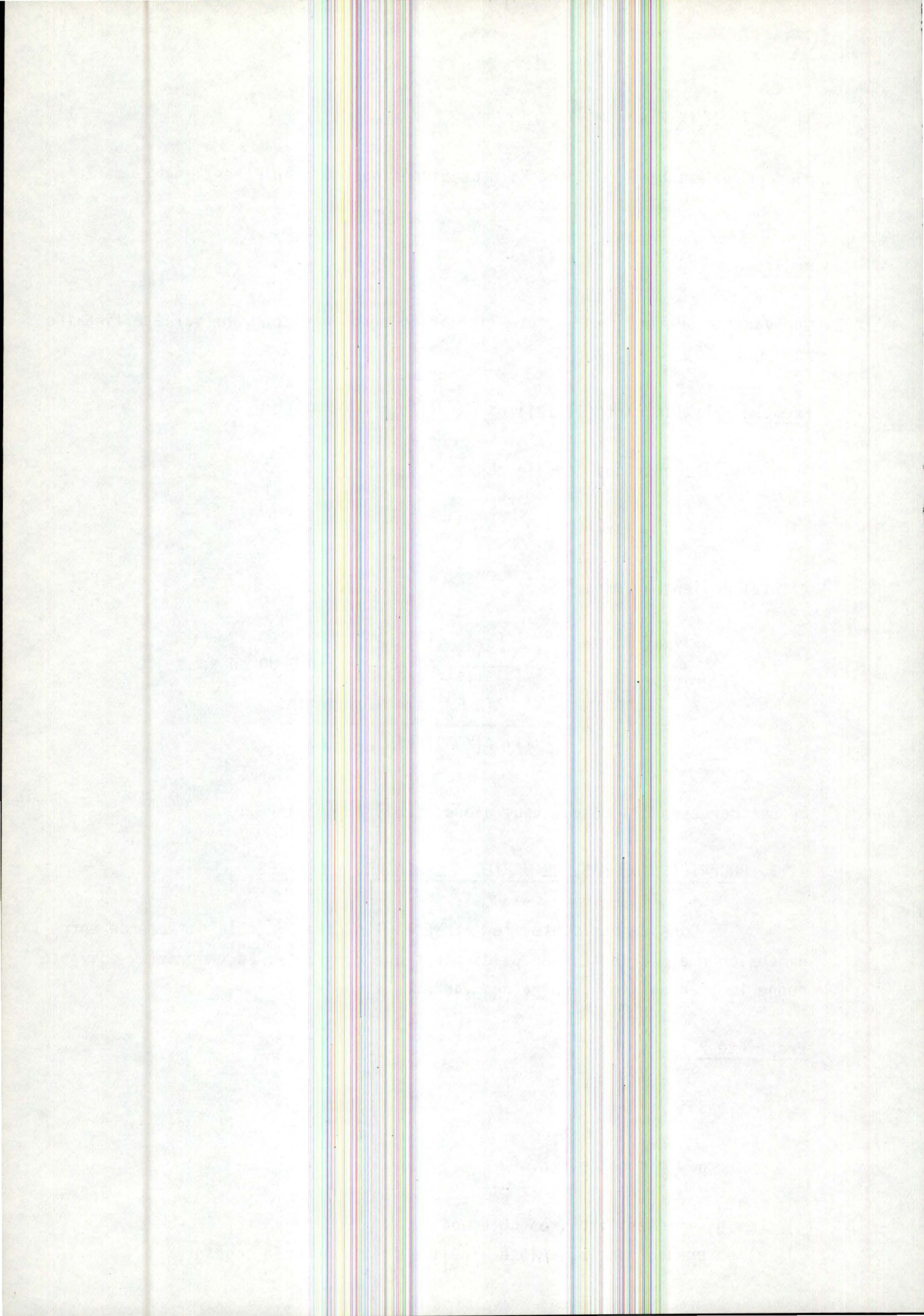
Propriété 2 :

Soit :

$$0 \leq t \leq q < r < n.$$

(i) Les q -variétés linéaires obtenues

a) en prenant une r -variété linéaire $(r-t)$ -pondérée coupant X ;



b) puis en prenant une q -variété linéaire $(q-t)$ pondérée, coupant la r -variété linéaire du point a ;
sont des q -variétés linéaires $(q-t)$ -pondérées, coupant X .

(ii) Les r -variétés linéaires obtenues

a') en prenant une q -variété linéaire $(q-t)$ pondérée, coupant X ;

b') puis en générant une r -variété linéaire aléatoire contenant cette q -variété linéaire et ayant une orientation isotrope, sont des r -variétés linéaires $(r-t)$ pondérées, coupant X .

De plus, les démarches décrites en (i) et (ii) sont stochastiquement équivalentes.

Exemple :

Soient :

$$n = 3 \quad r = 2 \quad q = 1 \quad t = 0.$$

Notons : A = l'aire de la section $(X \cap \text{plan})$ (correspond à : $p = 2$) ;

L = la longueur de la section $(X \cap \text{droite})$ (correspond à : $p = 1$).

La proposition 2 s'énonce dès lors :

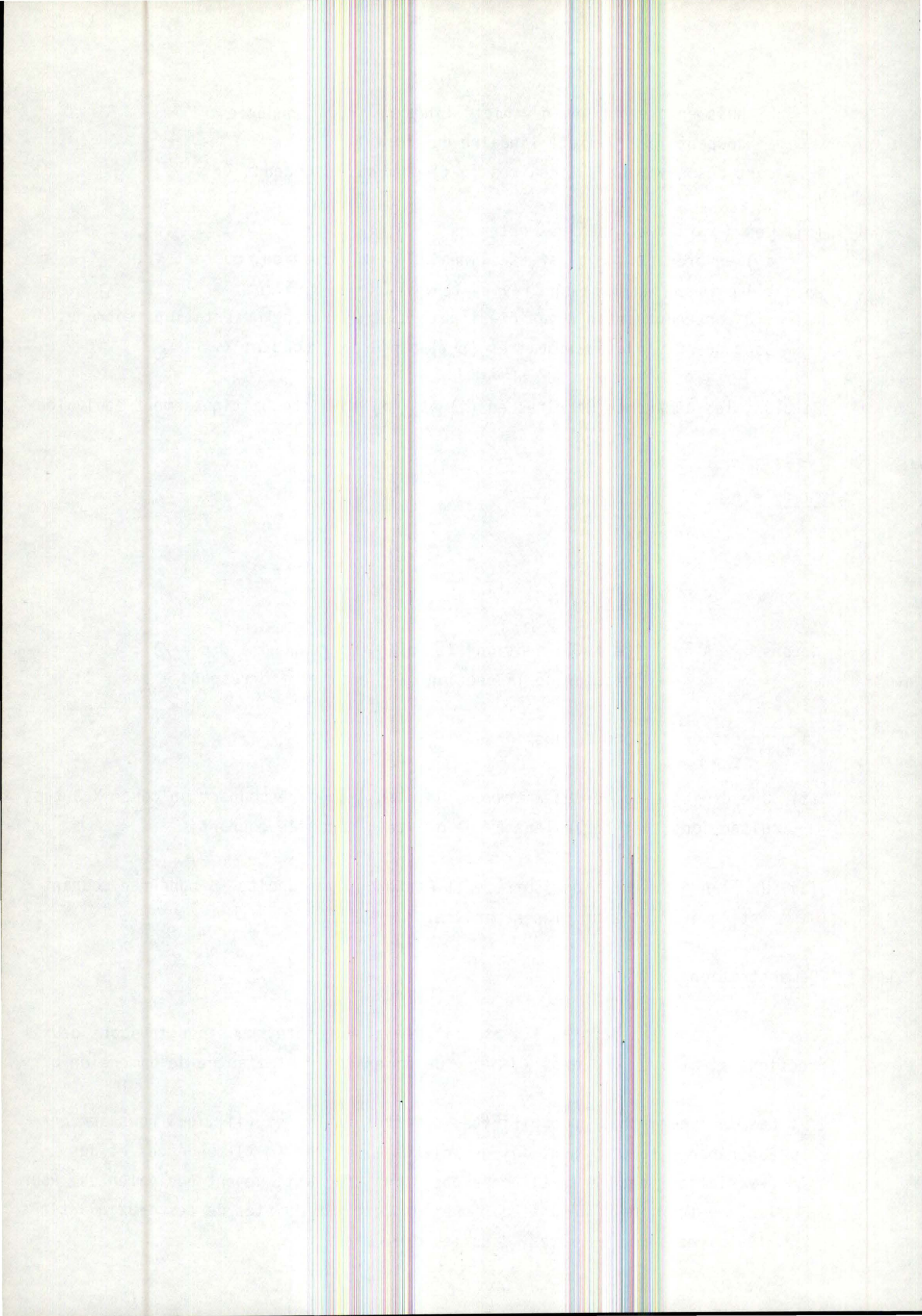
(i) Une droite L -pondérée, à travers un plan A -pondéré coupant un corps X à trois dimensions, est équivalent à une droite L -pondérée coupant X .

(ii) Un plan d'orientation isotrope et contenant une droite L -pondérée coupant X est équivalent à un plan A -pondéré.

Démonstration :

Dans les parties (i) et (ii) de la propriété, nous construisons deux sections aléatoires du corps X , l'une de dimension r et l'autre de dimension q .

A_1 . Ces deux démarches probabilistes, décrites en (i) et (ii), qui nous servent à générer respectivement des q -variétés linéaires $(q-t)$ -pondérées et des r -variétés linéaires $(r-t)$ -pondérées, sont stochastiquement équivalentes. Pour le démontrer, nous devons voir que les densités jointes de ces deux quantités aléatoires sont les mêmes, dans les deux cas.



Dans la démarche (i), nous nous donnons :

a) la loi de la section de dimension r :

$$\frac{M_{r-t}^r (X \cap F_r^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_r^n} \cdot dF_r^n, \quad \text{par (II.2),}$$

b) la loi de la section de dimension q , étant donné la section de dimension r

$$\frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^r)}{M_{r-t}^r (X \cap F_r^n) \cdot \int dL_q^r} dF_q^r, \quad \text{par (II.12).}$$

Nous obtenons donc la loi jointe de ces deux quantités, en effectuant le produit de la marginale a) par la loi conditionnelle b), ce qui nous donne :

$$\frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^r)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_r^n \cdot \int dL_q^r} \cdot dF_r^n \cdot dF_q^r.$$

Dans la seconde démarche, nous nous donnons :

a') la loi de la section de dimension q :

$$\frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_q^n} \cdot dF_q^n, \quad \text{par (II.12),}$$

b') la loi de la section de dimension r , étant donné la section de dimension q , qui est IUR :

$$\frac{dF_r^n(q)}{\int dL_r^n(q)}.$$

Par une nouvelle factorisation, cette fois de a') et de b'), nous obtenons la loi jointe de ces deux sections aléatoires qui vaut :

$$\frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_q^n \cdot \int dL_r^n(q)} \cdot dF_q^n \cdot dF_r^n(q),$$

et nous voyons immédiatement que ces deux lois jointes sont égales, par les relations (II.2) et (II.3). cqfd.

B₁ : Démontrons la partie (i) de la propriété.

Pour montrer que la q-section obtenue est une q-variété linéaire (q-t)-pondérée coupant X, il faut trouver la loi de cette variable aléatoire, alors que nous nous sommes donnés une loi conditionnelle. Pour ce faire, il nous faudrait en principe calculer sa loi marginale, par intégration de la loi jointe de cette quantité et de la section de dimension r :

$$\int_{F_r^n \uparrow X} \frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_r^n \cdot \int dL_q^r} \cdot dF_r^n \cdot dF_q^r.$$

Employons l'équivalence démontrée ci-dessus.

Nous obtenons, dès lors, directement la version désirée de la loi jointe ; à savoir, sa décomposition en le produit de la loi marginale de la section de dimension q, par la loi conditionnelle de la section de dimension r, étant donné la section de dimension q :

$$\int_{F_r^n} \supset_{F_q^n} \frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^r)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_q^n \cdot \int dL_{r(q)}^n} \cdot dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n.$$

Cette loi marginale est donc bien, en fonction du point a') de la propriété, celle d'une q-variété linéaire (q-t) pondérée coupant X. cqfd.

B₂ : Par un raisonnement identique, nous montrons que la loi de la section de dimension r, obtenue dans la seconde partie de la propriété, est bien celle que nous propose le point a) de la première affirmation. Il s'agit, en effet, d'une r-variété linéaire (r-t)-pondérée.

$$\int_{F_q^n \uparrow X} \frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^r)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_q^n \cdot \int dL_{r(q)}^n} \cdot dF_q^n \cdot dF_{r(q)}^n,$$

et par l'équivalence nous obtenons ce qu'il faut :

$$\int_{F_q^r \uparrow (X \cap F_r^n)} \frac{M_{q-t}^q (X \cap F_q^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_r^n \cdot \int dL_q^r} \cdot dF_r^n \cdot dF_q^r$$

qui est égale à, par (II.11) :

$$\frac{M_{r-t}^r (X \cap F_r^n)}{M_{n-t}^n (X) \cdot \int dL_r^n} dF_r^n \quad \text{cqfd.}$$

II.4. ESTIMATEURS NON BIAISES DE CARACTERISTIQUES D'UN CORPS INTERIEUR A X

Adaptons le point de vue stéréologique suivant :

- La frontière δX du corps opaque X est connue et est directement observable. Supposons que Y soit un sous-ensemble de X . Construisons la section $(X \cap F_r^n)$ de X , qui sera supposée observable. Ajoutons aussi l'hypothèse que cette section contient une information mesurable de $(Y \cap F_r^n)$.

Nous cherchons de bons estimateurs de certaines caractéristiques de Y , basés sur les données contenues dans les sections observables de $(X \cap F_r^n)$. Cet estimateur sera un estimateur non biaisé, donné par la proposition suivante :

Proposition 3 :

Soit F_r^n une r -variété linéaire p -pondérée, coupant X , contenant une section du sous-ensemble Y de X .

Alors :

$$\xi = \frac{M_{n-r+p}^n (X) \cdot M_s^r (Y \cap F_r^n)}{M_p^r (X \cap F_r^n)} \quad \begin{array}{l} 0 \leq s \leq r \\ 0 \leq p \leq r < n \end{array} \quad \text{(II.13)}$$

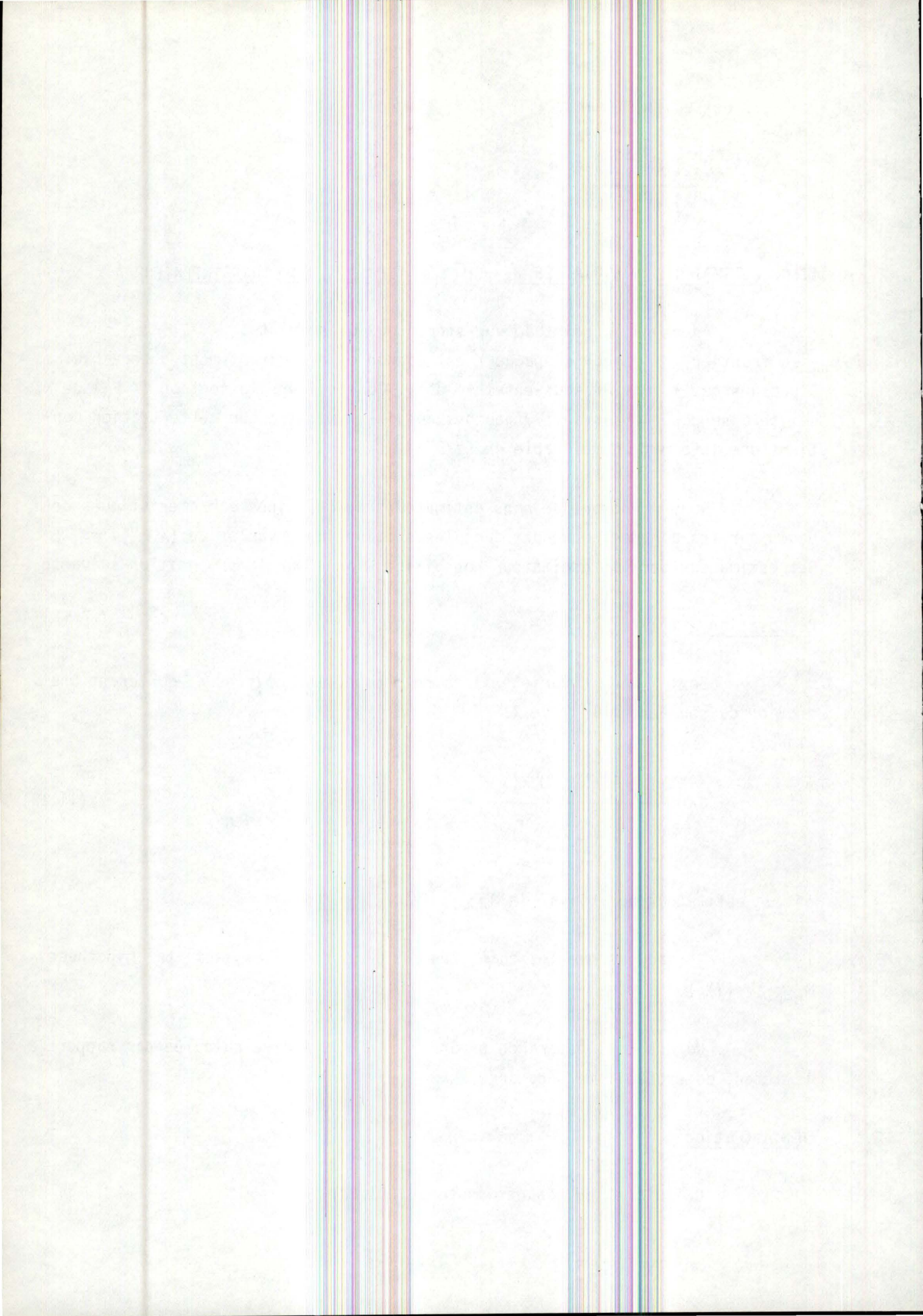
est un estimateur non biaisé de $M_{n-r+s}^n (Y)$.

Remarquons que les quantités M sont observables, sauf, par hypothèse, $M_{n-r+s}^n (Y)$!

Notons E_p l'espérance p -pondérée, c'est-à-dire calculée par rapport à l'élément de probabilité p -pondéré.

Démonstration :

Calculons, en tenant compte de (II.12) :



$$E_p \left(\frac{M_s^r (Y \cap F_r^n)}{M_p^r (X \cap F_r^n)} \right) = \int M_s^r (Y \cap F_r^n) \frac{dF_r^n}{M_{n-r+p}^n (X) \cdot \int dL_r^n} .$$

Par la relation (II.11) nous obtenons :

$$E_p \left(\frac{M_s^r (Y \cap F_r^n)}{M_p^r (X \cap F_r^n)} \right) = \frac{M_{n-r+s}^n (Y)}{M_{n-r+p}^n (X)} .$$

Et comme $M_{n-r+p}^n (X)$ est une quantité non aléatoire, nous pouvons écrire :

$$E_p \left(\frac{M_{n-r+p}^n (X) \cdot M_s^r (Y \cap F_r^n)}{M_p^r (X \cap F_r^n)} \right) = M_{n-r+s}^n (Y) . \quad (II.14)$$

cqfd.

Remarques :

- 1) L'estimateur ξ est une réelle fraction dans tous les cas, sauf quand $p = 0$.
En effet, si $p = 0$, (II.3) devient :

$$\xi = M_{n-r}^n (X) \cdot M_s^r (Y \cap F_r^n) ,$$

car $M_0^r (X \cap F_r^n) = 1$. (cfr. cas particulier dans II.2.a)

- 2) C'est une habitude en stéréologie de changer $M_{n-r+p}^n (X)$ de membre dans (II.14), de façon à avoir une seconde fraction.

Exemple : qui illustre (IV.5)

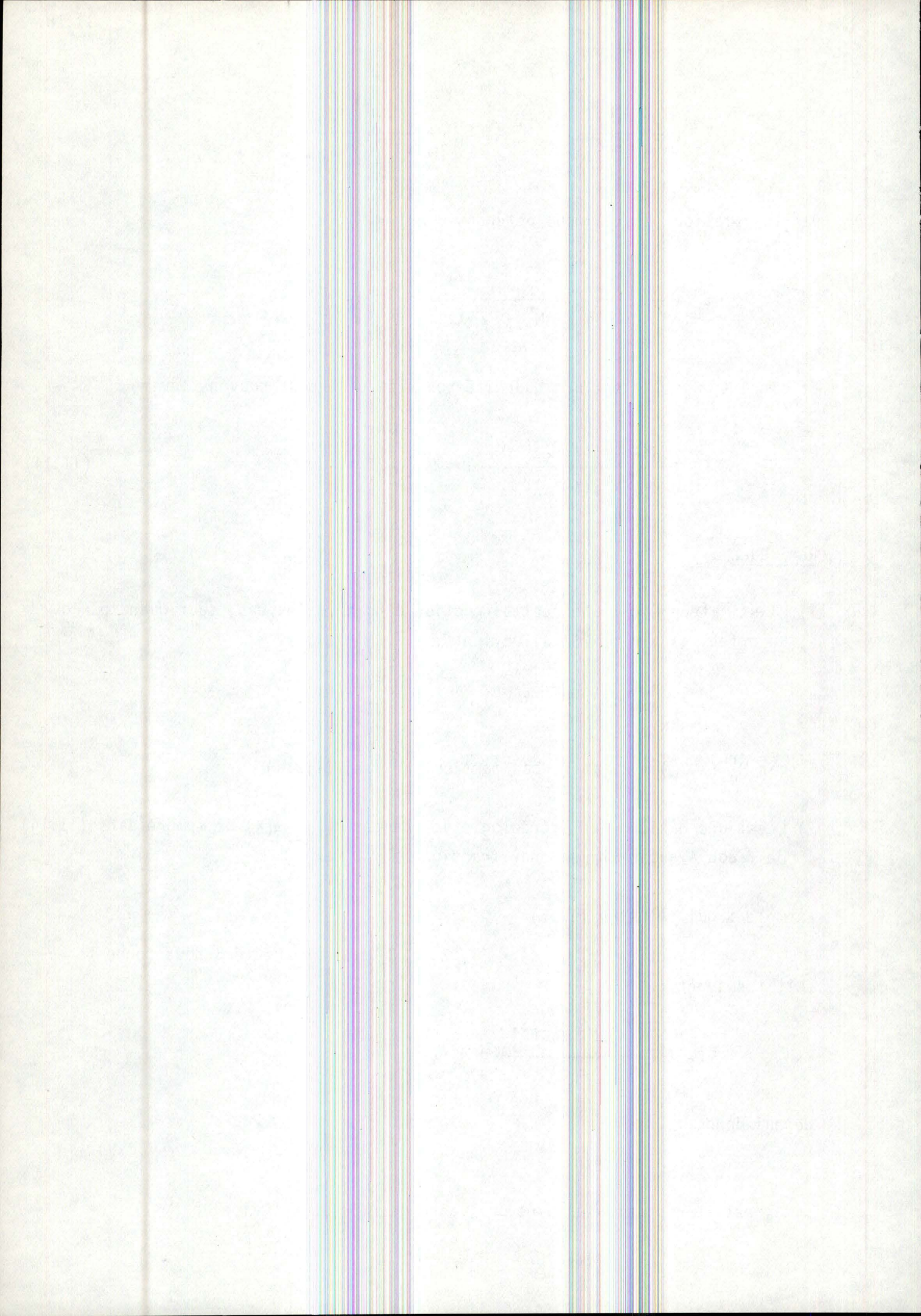
Soient $(n, r, p, s) = (3, 2, 2, 2)$. La propriété 3 nous donne le résultat suivant :

$$E_2 \left(\frac{M_3^3 (X) \cdot M_2^2 (Y \cap F_2^3)}{M_2^2 (X \cap F_2^3)} \right) = M_3^3 (Y) ,$$

ce qui donne :

$$E_A (A_A) = V_V ,$$

si A_A est le rapport aléatoire de l'aire de $(Y \cap T)$ sur l'aire de $(X \cap T)$.



CHAPITRE III

LES CONJECTURES DE R.E. MILES ET PAMELA DAVY

CHAPITRE III

LES CONJECTURES DE R.E. MILES ET PAMELA DAVY

III.0. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous énumérons les quatre conjectures de R.E. Miles et Pamela Davy, exprimées dans l'article [4]. Nous les formulerons dans un cadre général, et nous les expliciterons ensuite dans les chapitres suivants dans des cas souvent rencontrés en pratique : des sections planes dans E^3 et des sections linéaires dans E^2 .

Ces quatre conjectures sont faites dans l'esprit d'une recherche de meilleurs estimateurs de certaines caractéristiques numériques d'un corps Y contenu dans un domaine X , suivant le critère du risque quadratique moyen minimal. Dans le chapitre IV, nous montrerons qu'aucune des conjectures n'est vérifiée.

III.1. CONJECTURE 1 : SIGNE DU BIAIS DE L'ESTIMATEUR α_β , POUR DES SECTIONS IUR

Au chapitre I, nous avons estimé $\frac{\pi}{4}S_V$ par B_A . Pour des sections IUR, cet estimateur était biaisé, de biais

$$- \frac{1}{E(A_X)} \text{cov}(A_X, B_A).$$

De façon analogue, nous pouvons obtenir un certain nombre d'expressions de la forme :

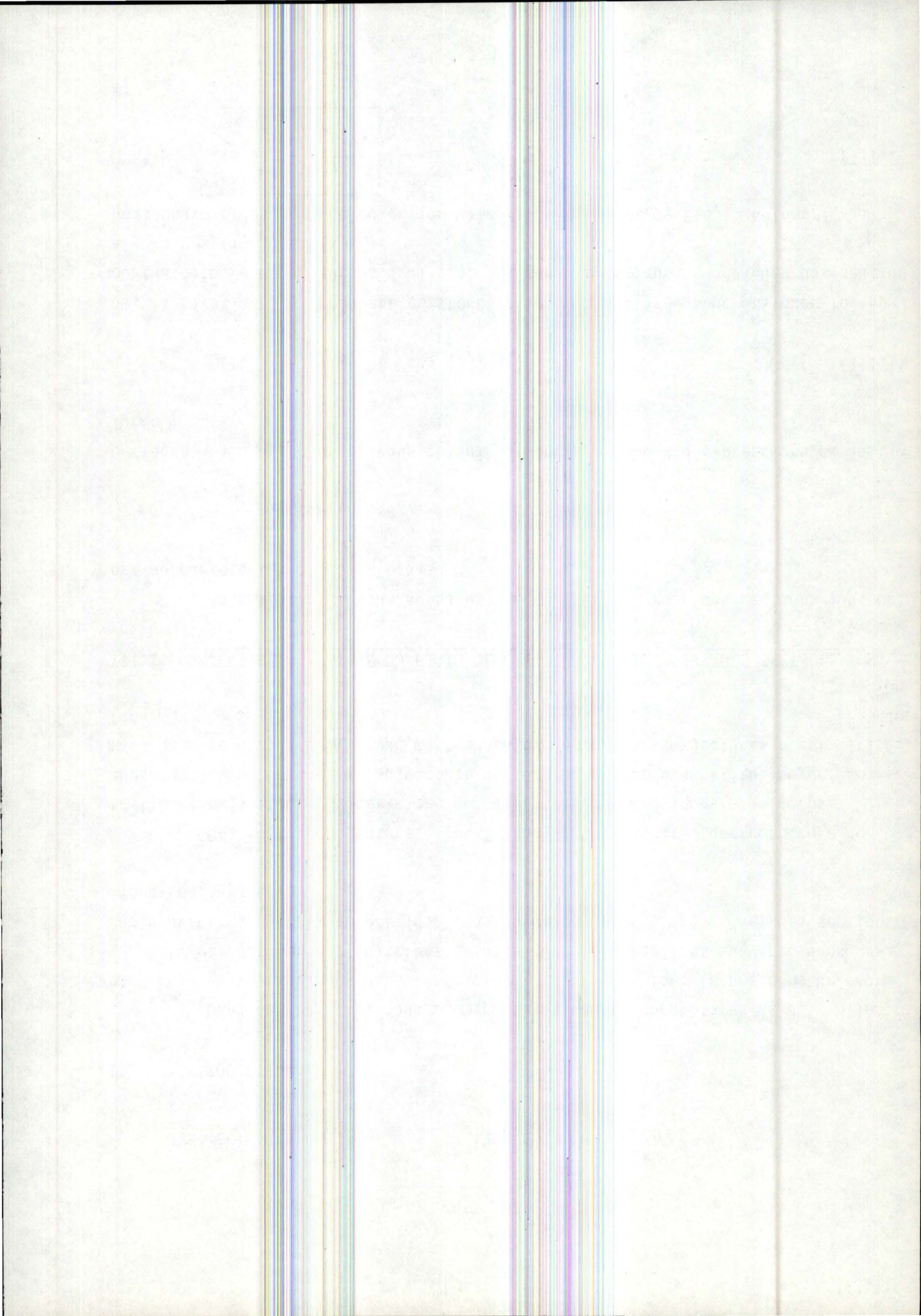
$$E(\alpha_\beta) = \lambda_\mu - \frac{1}{E(\beta_X)} \text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta) \quad (\text{III.1})$$

où, la notation α_β , fréquente en stéréologie, est utilisée pour désigner le rapport aléatoire de α_Y sur β_X , qui sont des caractéristiques numériques des sections aléatoires $(Y \cap F_r^n)$ et $(X \cap F_r^n)$.

Nous pouvons dès lors calculer les valeurs de $E(\alpha_Y)$ et de $E(\beta_X)$. Notons :

$$E(\alpha_Y) = \frac{\lambda_Y}{M_{n-r}^n(X)} \quad (\text{III.2})$$

et



$$E(\beta_X) = \frac{\mu_X}{M_{n-r}^n(X)}.$$

(III.3)

Le premier terme du second membre de la relation (III.1), λ_μ est simplement le rapport (non aléatoire) de $E(\alpha_Y)$ sur $E(\beta_X)$. La relation (III.1) résulte alors simplement de l'expression de la covariance en termes d'espérances mathématiques.

La conjecture 1 concerne le signe du biais $\frac{1}{E(\beta_X)} \text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta)$ de l'estimateur α_β de la quantité λ_μ . Selon l'article [4] de R.E. Miles et de Pamela Davy,

$$\text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta) \geq 0 \quad \text{si } Y \text{ est central dans } X,$$

$$\text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta) \leq 0 \quad \text{si } Y \text{ est périphérique dans } X.$$

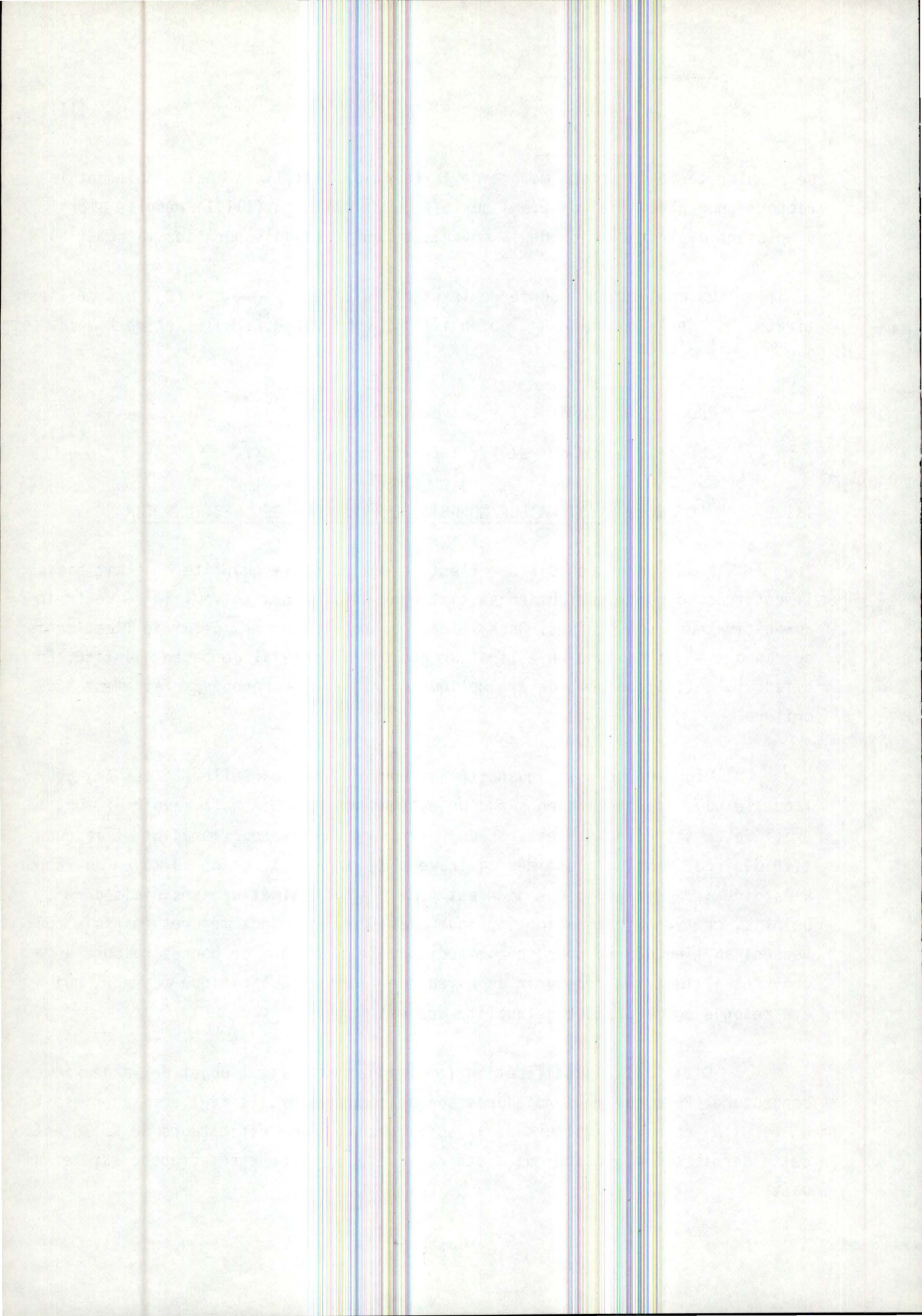
(III.4)

III.2. CONJECTURE 2 : ESTIMATEUR NON BIAISE, BASE SUR DES SECTIONS IUR

Nous venons de voir que l'estimateur α_β de la quantité λ_μ était biaisé. Il est très courant, surtout en statistiques appliquées, de vouloir se restreindre aux estimateurs non biaisés. Dans le cas qui nous concerne, celui de l'estimation du rapport λ_μ , il existe un estimateur non biaisé trivial de cette quantité. En effet, la définition même de λ_μ implique que $\varepsilon = \frac{\alpha_Y}{E(\beta_X)}$ répond parfaitement à ce critère.

Signalons que la quantité qui nous intéresse réellement est λ_μ , pour laquelle nous disposons bien sûr d'un estimateur sans biais, à savoir α_Y . Or, la pratique en stéréologie n'est pas de retenir cet estimateur immédiat de la quantité désirée, mais de l'estimer au travers du rapport λ_μ et ce au moyen du rapport aléatoire α_β . Remarquons que α_β n'est même pas un estimateur sans biais de λ_μ . De plus, ce type d'estimation implique que l'on fasse deux mesures (parfois coûteuses) au lieu d'une, pour chaque section. Il faut donc de bonnes raisons à ce choix et il faut les découvrir au niveau de l'erreur quadratique moyenne, qui a été retenue comme critère de qualité des estimateurs.

C'est cette justification (empirique) qui fait l'objet de la deuxième conjecture. Pour que les procédures soient comparables, il faut envisager, soit α_Y et $\mu_X \cdot \alpha_\beta$ comme estimateurs de λ_Y , soit ε et α_β comme estimateurs de λ_μ . C'est cette dernière comparaison qui a été retenue. Le raisonnement proposé est le suivant :



"La MSE de ϵ , $E((\epsilon - \lambda_\mu)^2)$ qui vaut, puisque ϵ est un estimateur sans biais de λ_μ ,

$$\text{var} (\epsilon) = \frac{\text{var} (\alpha_Y)}{E^2 (\beta_X)}, \quad (\text{III.5})$$

est bien trop grande pour que ϵ soit un estimateur acceptable. En effet, la variation de α_Y est due en grande partie à la variation de β_X et c'est pour réduire cette source de variation supplémentaire que les stéréologues utilisent des estimateurs du type α_β . En fait, si Y est distribué de façon homogène dans X , α_Y et β_X seront proportionnels et la division de α_Y par β_X devrait permettre d'éliminer substantiellement la variabilité de l'estimateur. En conclusion, la conjecture peut s'énoncer comme suit :

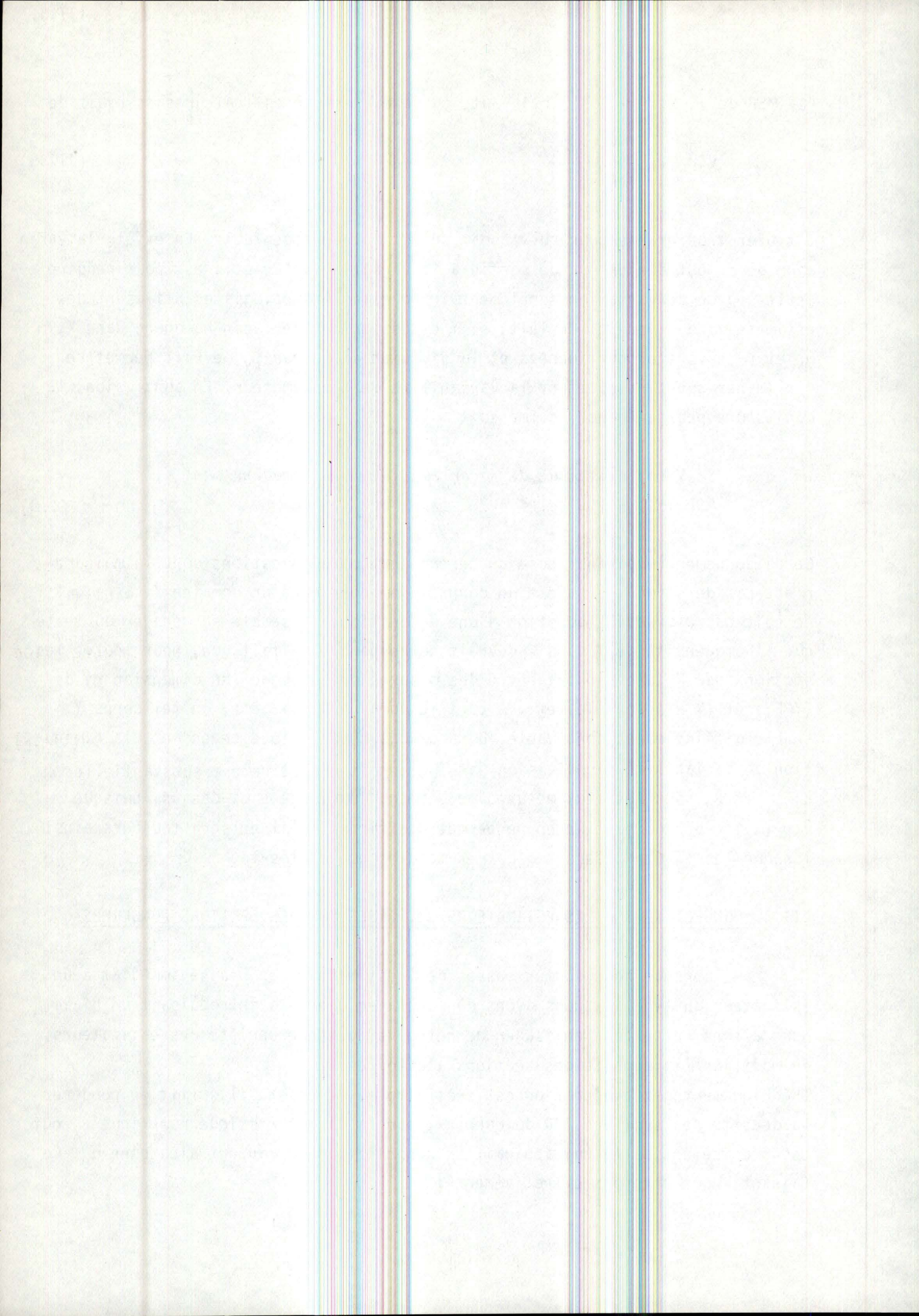
$$\begin{aligned} & \text{Si } Y \text{ est distribué de façon suffisamment homogène dans } X, \\ & \text{MSE} (\alpha_\beta) - \text{MSE} (\epsilon) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Ce raisonnement empirique pose un certain nombre de questions dont la moindre n'est pas de savoir ce qu'est un corps Y homogène dans un domaine X . Sans qu'il ne soit pas clairement question d'une définition, il semble se dégager du texte que l'homogénéité de Y dans X devrait correspondre au fait que, pour toutes les sections par F_r^n , le rapport entre des mesures de Lebesgue (en dimension r) de $(Y \cap F_r^n)$ et $(X \cap F_r^n)$ soit le même. A part le domaine X lui-même, un tel corps Y semble difficilement concevable. Dans ce cas hypothétique cependant, la diminution de variabilité par division par β_X , serait effectivement substantielle si α_Y et β_X sont les deux mesures de Lebesgue envisagées ci-dessus, puisque $\text{var} (\alpha_\beta) = 0$. Pourtant, rien ne permet d'affirmer qu'il en sera toujours ainsi lorsque les α_Y et β_X seront d'autres mesures que celles-là.

III.3. CONJECTURE 3 : LES ESTIMATEURS α_β , BASES SUR DES SECTIONS PONDEREES

Lorsque nous sommes passés de l'estimateur non biaisé immédiat à un estimateur du type α_β , nous avons dû constater que cela introduisait un biais. Nous allons cette fois envisager de retrouver cette propriété des estimateurs, en modifiant la densité des sections aléatoires F_r^n .

Théoriquement cette opération est très simple. En effet, il suffit de pondérer la densité des sections IUR du corps X , par la caractéristique numérique β_X qui est précisément celle qui apparaît au dénominateur du rapport aléatoire α_β . Ce faisant, nous obtenons effectivement :



$$E_{\beta}(\alpha_{\beta}) = \frac{E(\alpha_{\beta} \cdot \beta_X)}{E(\beta_X)} = \frac{E(\alpha_Y)}{E(\beta_X)}.$$

D'où :

$$\boxed{E_{\beta}(\alpha_{\beta}) = \lambda_{\mu}} \quad (\text{III.7})$$

où le suffixe β indique que l'espérance mathématique est calculée par rapport à la densité des variétés linéaires F_r^n pondérées par β_X .

Cette propriété (le côté non biaisé) n'est cependant pas gage d'une meilleure estimation, ce qui ne peut se vérifier qu'en comparant les risques quadratiques moyens. C'est cette comparaison qui fait l'objet de la troisième conjecture.

Plus précisément, elle prévoit que :

$$MSE_{\beta}(\alpha_{\beta}) - MSE(\alpha_{\beta}) \leq 0 \quad (\text{III.3})$$

sûrement pour Y suffisamment homogène dans X (et peut être même pour toutes les distributions de Y dans X).

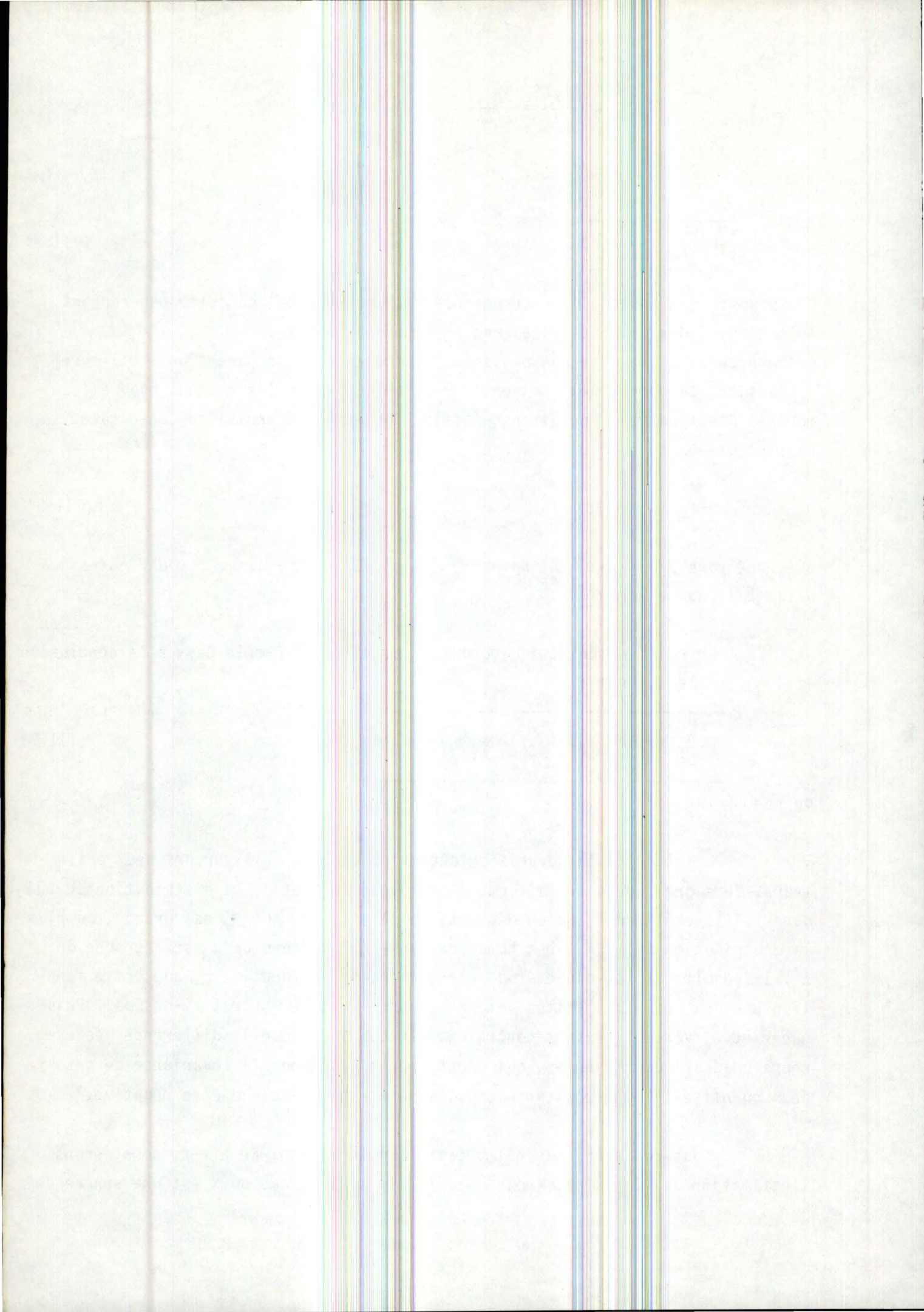
Le raisonnement qui a conduit R.E. Miles et Pamela Davy à la conclusion (III.8) est le suivant :

$$" \quad \boxed{MSE_{\beta}(\alpha_{\beta}) - MSE(\alpha_{\beta}) = \frac{1}{E(\beta_X)} \text{cov}(\beta_X, \eta)} \quad (\text{III.9})$$

où $\eta = \alpha_{\beta}(\alpha_{\beta} - 2\lambda_{\mu})$.

Le signe de la covariance détermine donc le meilleur des deux estimateurs. Ce signe dépend de la forme géométrique de X et de la distribution de Y dans X. Ils expliquent, qu'en général, au plus la section β_X est grande, au plus la distribution de $(Y \cap F_r^n)$ est homogène dans $(X \cap F_r^n)$, au plus α_{β} sera proche de λ_{μ} . Il résulte alors, d'une étude élémentaire de la fonction η , que cette fonction prendra ses plus petites valeurs dans ce cas-là (décrit ci-dessus). Puisque η et β_X varient en sens contraire, ils concluent que la différence des erreurs quadratiques moyennes, qui n'est rien d'autre que la covariance de ces deux quantités, à une constante près, a de fortes chances d'être négative."

Nous ne ferons pas nôtre cette argumentation. En effet, considérons l'estimation de $\frac{\Pi}{4}S_V$ par B_A (voir chapitre I) dans le cas où X est une sphère de



rayon 1 et Y le corps X lui-même (peut-on imaginer un corps Y plus homogène dans X ?). Un simple calcul nous montre que la valeur de B_A n'est pas forcément plus proche de $\frac{\Pi}{4}S_V$ pour de grandes sections, que pour des sections plus petites. En effet :

$$\frac{\Pi}{4}S_V = \frac{3\Pi}{4} = 2,3562$$

et pour la section de surface Π (c'est-à-dire si $p = 0$), le rapport B_A vaut 2, tandis que pour la section de surface $\Pi (1 - (0.5)^2)$ (c'est-à-dire si $p = 0.5$), le rapport B_A vaut 2,3094.

III.4. CONJECTURE 4 : LE MEILLEUR FACTEUR DE PONDERATION

Dans la section précédente, nous avons envisagé la pondération de la loi des sections IUR par un facteur β_X , dont la valeur n'avait pas dû être précisée. Cela conduisait déjà, si l'on en croit les conjectures 2 et 3, à une meilleure estimation de λ_Y , que celle obtenue par α_Y , et ce, quel que soit le choix de β_X . L'objet de cette conjecture 4 est de déterminer le meilleur facteur de pondération en fonction de la quantité λ_Y à estimer et du α_Y qui servira de base à cette estimation.

Il nous faut pour cela connaître les erreurs quadratiques moyennes des différents estimateurs qui peuvent être proposés.

Pour un simple estimateur non fractionnaire et non biaisé, nous obtenons (voir III.2) :

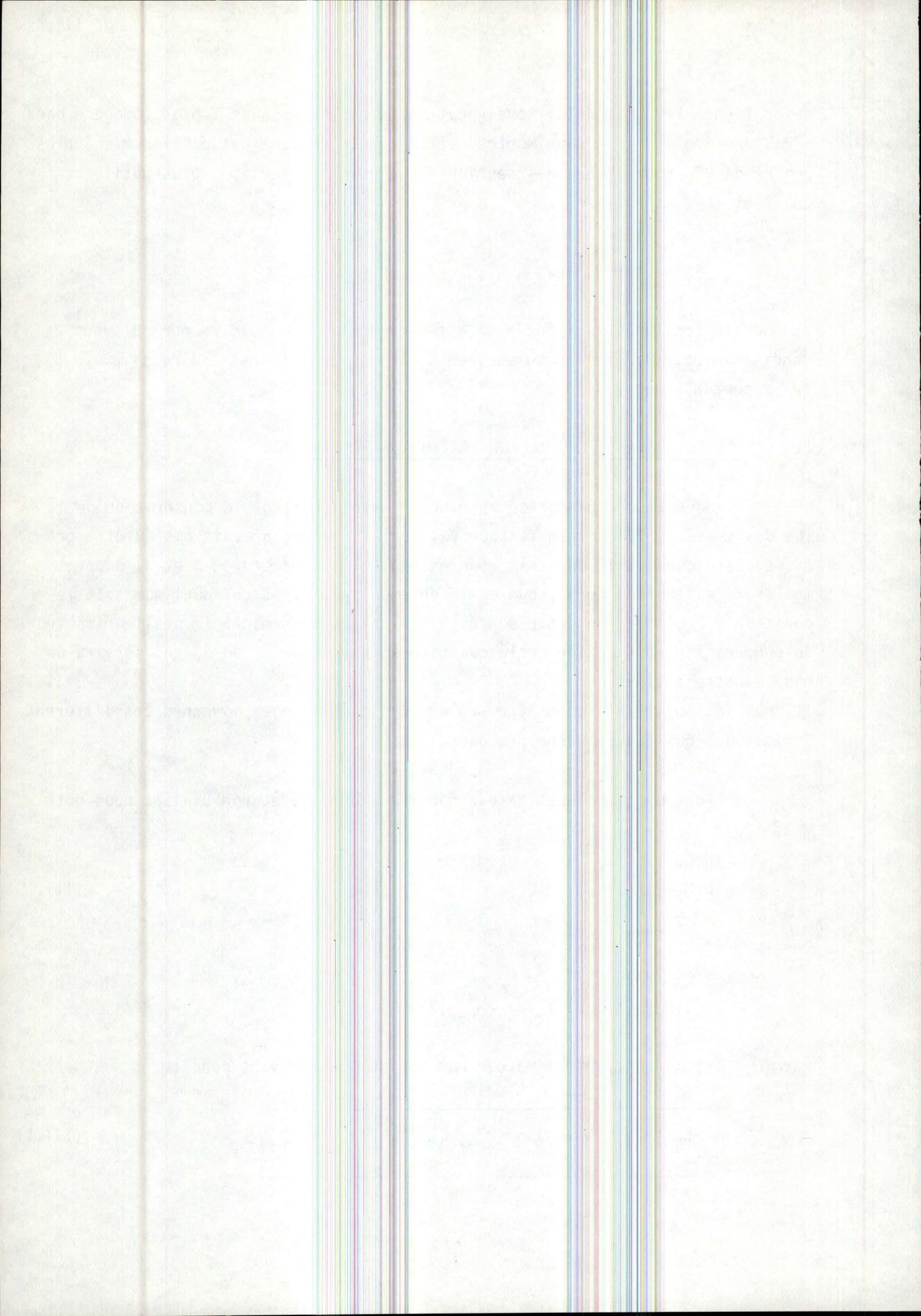
$$E(M_{n-r}^n(X) \cdot \alpha_Y) = \lambda_Y \quad (\text{III.10})$$

Dès lors :

$$\text{MSE}(M_{n-r}^n(X) \cdot \alpha_Y) = \text{var}(M_{n-r}^n(X) \cdot \alpha_Y)$$

car $(M_{n-r}^n(X) \cdot \alpha_Y)$ est un estimateur non biaisé. La MSE vaut donc :

$$\text{MSE}(M_{n-r}^n(X) \cdot \alpha_Y) = (M_{n-r}^n(X))^2 \cdot E(\alpha_Y^2) - \lambda_Y^2 \quad (\text{III.11})$$



Pour un estimateur fractionnaire, non biaisé et β -pondéré, nous déduisons :

$$E_{\beta} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = \frac{E(\mu_X \cdot \alpha_Y)}{E(\beta_X)}.$$

D'où, par (III.2) et par (III.3) :

$$\boxed{E (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = \lambda_Y} \quad (III.12)$$

La MSE β -pondérée vaut :

$$MSE_{\beta} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = \text{var} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta})$$

comme $\mu_X \cdot \alpha_{\beta}$ est un estimateur non biaisé. En considérant (III.12), nous avons :

$$MSE_{\beta} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = \frac{\mu_X^2}{E(\beta_X)} \cdot E\left(\frac{\alpha_Y^2}{\beta_X}\right) - \lambda_Y^2.$$

Remplaçons (III.3), nous pouvons encore écrire cette MSE pondérée de la manière suivante :

$$\boxed{MSE_{\beta} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = (M_{n-r}^n (X))^2 E(\beta_X) \cdot E\left(\frac{\alpha_Y^2}{\beta_X}\right) - \lambda_Y^2} \quad (III.13)$$

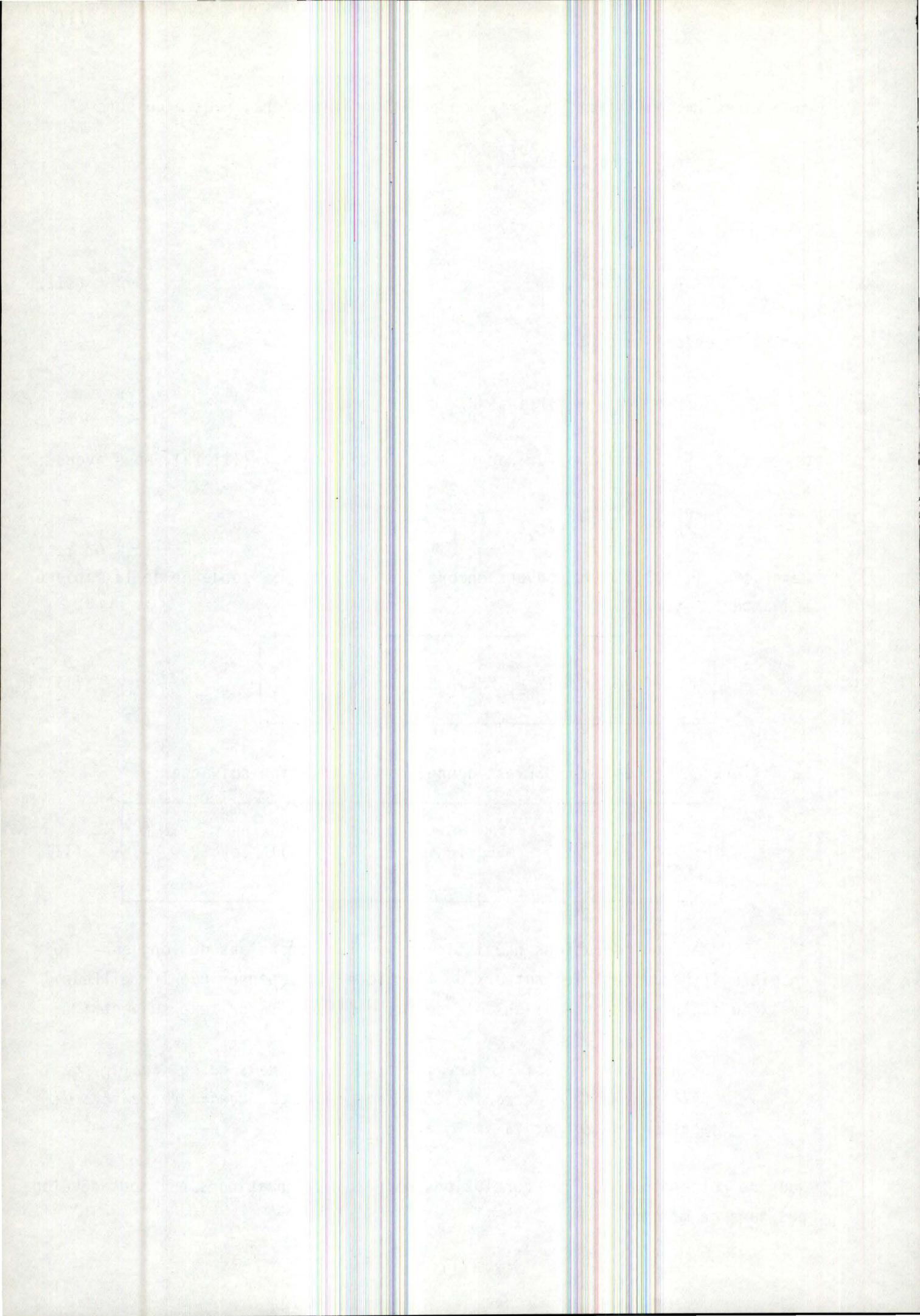
La différence de ces deux MSE est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{MSE (M_{n-r}^n (X) \cdot \alpha_Y) - MSE_{\beta} (\mu_X \cdot \alpha_{\beta}) = (M_{n-r}^n (X))^2 \text{cov} \left(\beta_X, \frac{\alpha_Y}{\beta_X} \right)} \quad (III.14)$$

Des considérations heuristiques sur les dimensions de longueurs (voir chapitre II) conduisent les auteurs de l'article [4] à penser que le meilleur choix du facteur de pondération doit se faire d'après le critère suivant :

"Si nous voulons estimer une quantité λ_Y , en nous basant sur α_Y , le meilleur facteur de pondération sera celui qui rendra égales les dimensions de longueurs de β_X et de $\frac{\alpha_Y}{\beta_X}$."

Nous ne retiendrons que les conclusions pour les cas pratiques qui sont développés dans ce mémoire :



- Si nous voulons estimer S_Y , à partir de B_Y , le meilleur facteur de pondération sera A_X ;
- Si nous voulons estimer V_Y , à partir de A_Y , le meilleur facteur de pondération sera A_X .

(III.15)

Remarque :

Il est cependant possible de pondérer par d'autres facteurs (exemple : β_X^2 , β_X^n , $\log \beta_X$, $\theta - \emptyset$, ...). Le choix du facteur de pondération dépend de l'information reçue sur la structure de Y . S'il n'y a que peu d'information antérieure, les facteurs β , considérés dans (III.15), semblent donner de bons résultats. Bien entendu, il est concevable qu'il y a, outre α_β , d'autres estimateurs se rapportant à des sections pondérées et qui possèdent aussi les propriétés désirées.

Pourtant, ceci semble improbable selon R.E. Miles et Pamela Davy, comme la théorie IUR présentée, est assez naturelle, unique et valable pour tout corps X et tout corps Y .

III.5. CONCLUSION

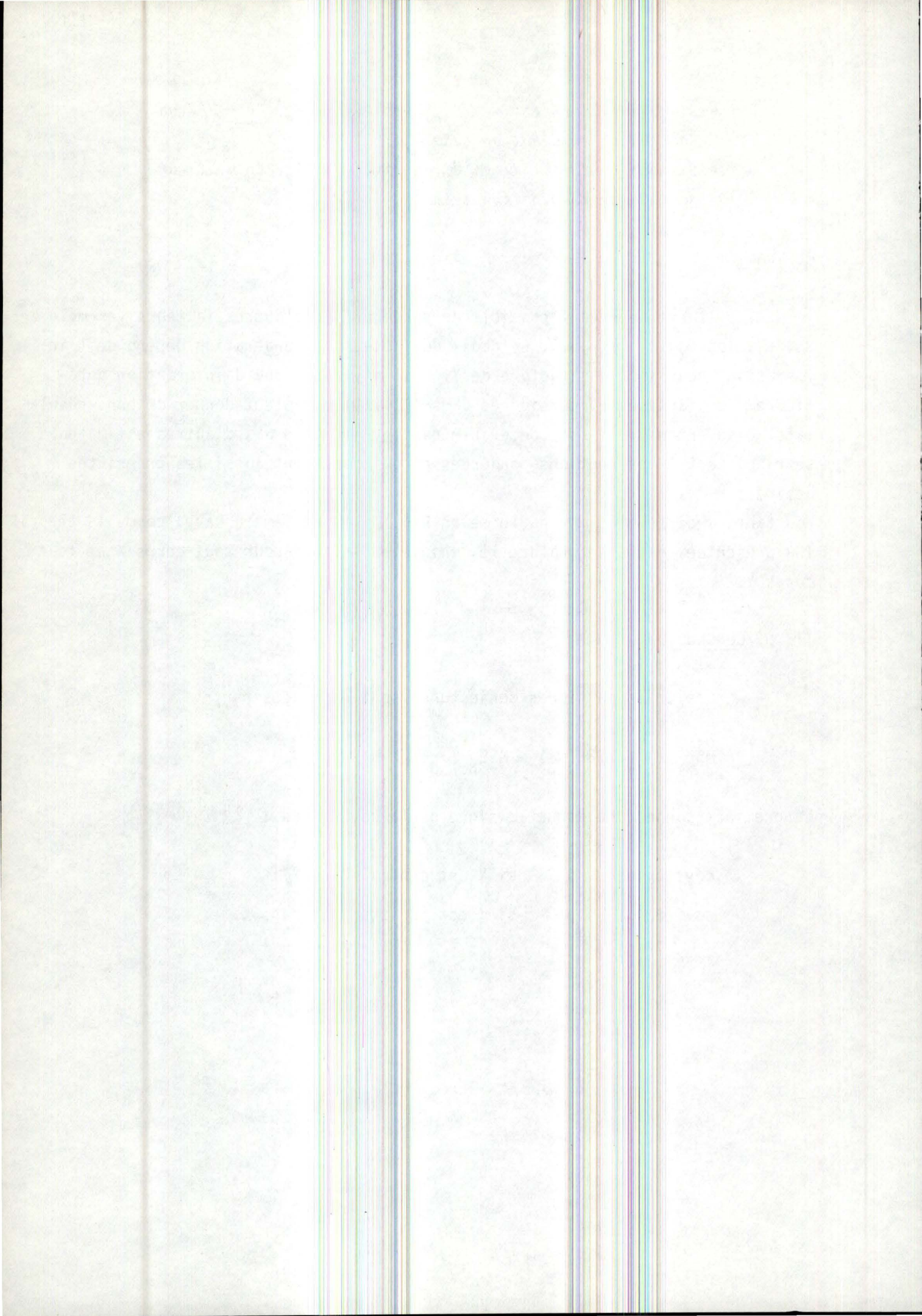
Les trois dernières conjectures sont exprimées par :

$$\text{MSE}(\epsilon) \leq \text{MSE}(\alpha_\beta) \leq \text{MSE}_\beta(\alpha_\beta).$$

La première conjecture donne le signe de la covariance :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta) &\geq 0 && \text{si } Y \text{ est central dans } X ; \\ \text{cov}(\beta_X, \alpha_\beta) &\leq 0 && \text{si } Y \text{ est périphérique dans } X. \end{aligned}$$

◦
◦ ◦



CHAPITRE IV

APPLICATION : ESTIMATION DE VOLUME DANS E^3 ET DE SURFACE DANS E^2

CHAPITRE IV

APPLICATION : ESTIMATION DE VOLUME DANS E^3 ET DE SURFACE DANS E^2

IV.0. INTRODUCTION

Au chapitre I, nous avons introduit le problème d'estimation en stéréologie au moyen du cas particulier traité dans l'article [4]. Dans ce chapitre, nous détaillons nous-même les développements théoriques du chapitre II, dans quelques cas concrets. Des exemples numériques montrent qu'aucune des quatre conjectures n'est vérifiée ; les sections IV.1 et IV.2 contiennent des contre-exemples des conjectures 1 et 2, la section suivante contredit la seconde conjecture et la partie IV, la dernière conjecture. Nous terminons le chapitre, en énonçant à partir des trois dernières conjectures, une nouvelle conjecture plus faible, qui n'est pas non plus satisfaite !

IV.1. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DU VOLUME DE Y, INCLUS DANS X

a. Formulation mathématique du problème

Comme au chapitre I, considérons deux corps X et Y dans l'espace E^3 , où Y est inclus dans X et analysons des sections aléatoires planes à travers X.

Soient A_X , le rapport aléatoire de l'aire de $(Y \cap T)$ sur l'aire de $(X \cap T)$,

V_Y , le rapport (non aléatoire !) du volume de Y sur le volume de X.

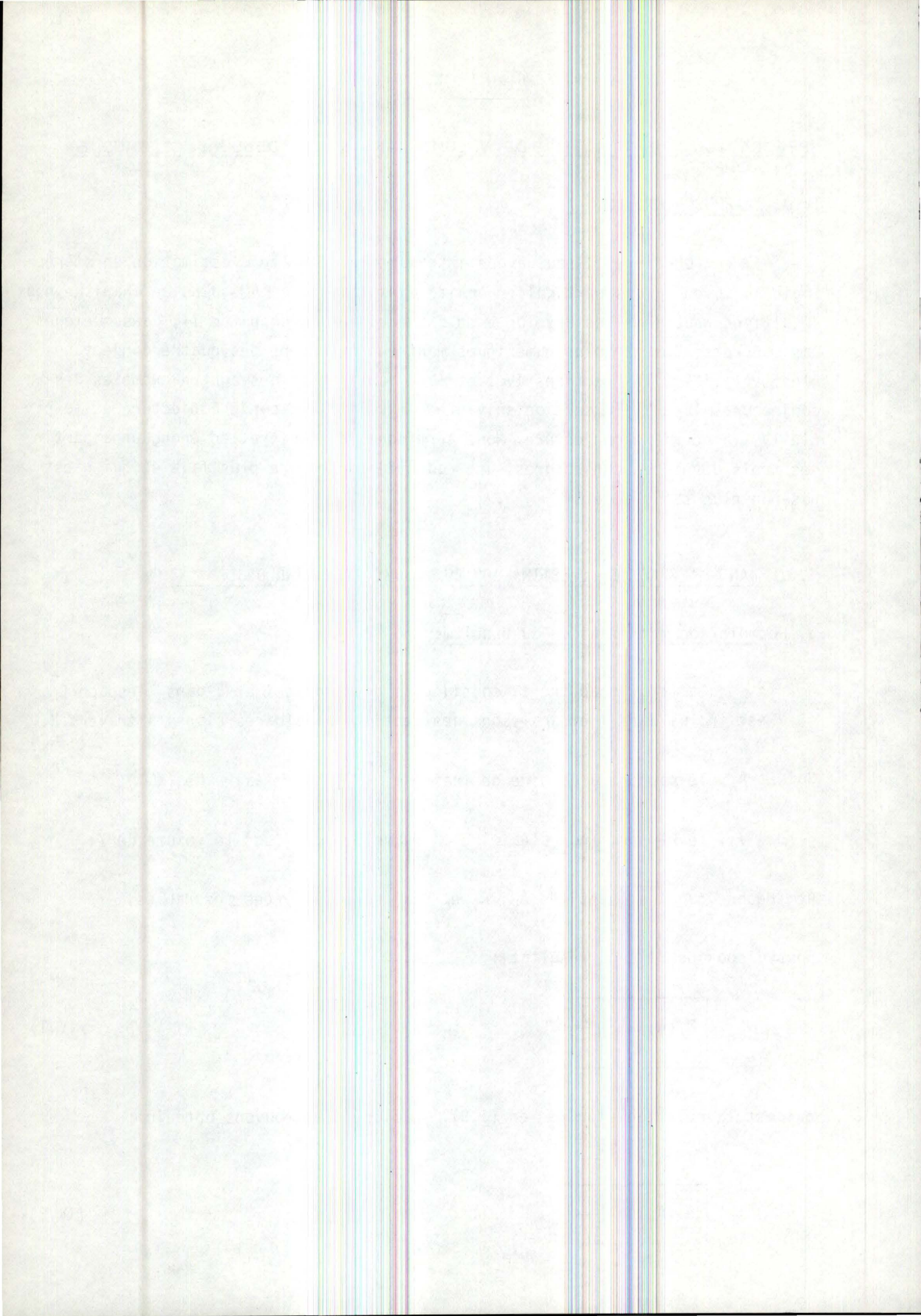
Remarquons que les quantités A_X , A_Y et $V(X)$ sont supposées mesurables.

Nous disposons déjà du résultat :

$$\boxed{E(A_X) = \frac{V(X)}{H(X)}} \quad (IV.1)$$

qui est la relation exprimée en (I.9). De plus, nous pouvons obtenir :

$$\boxed{E(A_Y) = \frac{V(Y)}{H(X)}} \quad (IV.2)$$



par un calcul analogue à celui de $E(A_X)$ ou en appliquant la propriété 3 du chapitre II : en effet, (II.13) devient : ($n = 3, r = 2, p = 0, s = 2$).

$$E_0 \left(\frac{M_1^3(X) \cdot M_2^2(Y \cap F_2^3)}{M_0^3(X \cap F_2^3)} \right) = M_3^3(Y).$$

Or, $M_1^3(X) = H(X)$, $M_2^2(Y \cap F_2^3) = A_X$ et $M_3^3(Y) = V(Y)$.

De plus, d'après l'extension de (II.4), $M_0^3(X \cap F_2^3) = 1$.

b. Estimation du volume de Y

Nous choisissons des estimateurs de la forme α_β , en raison des conjectures exprimées au chapitre III. Nous allons trouver un premier estimateur de $V(Y)$ par le même raisonnement qu'au chapitre I.

b.1. Si la densité des plans est non pondérée

$$\text{cov}(A_X, A_A) = E(A_Y) - E(A_X) \cdot E(A_A).$$

Nous obtenons, par (IV.1) et (IV.2) :

$$\text{cov}(A_X, A_A) = \frac{V(Y)}{H(X)} - \frac{V(X)}{H(X)} E(A_A). \quad (\text{IV.3})$$

D'où :

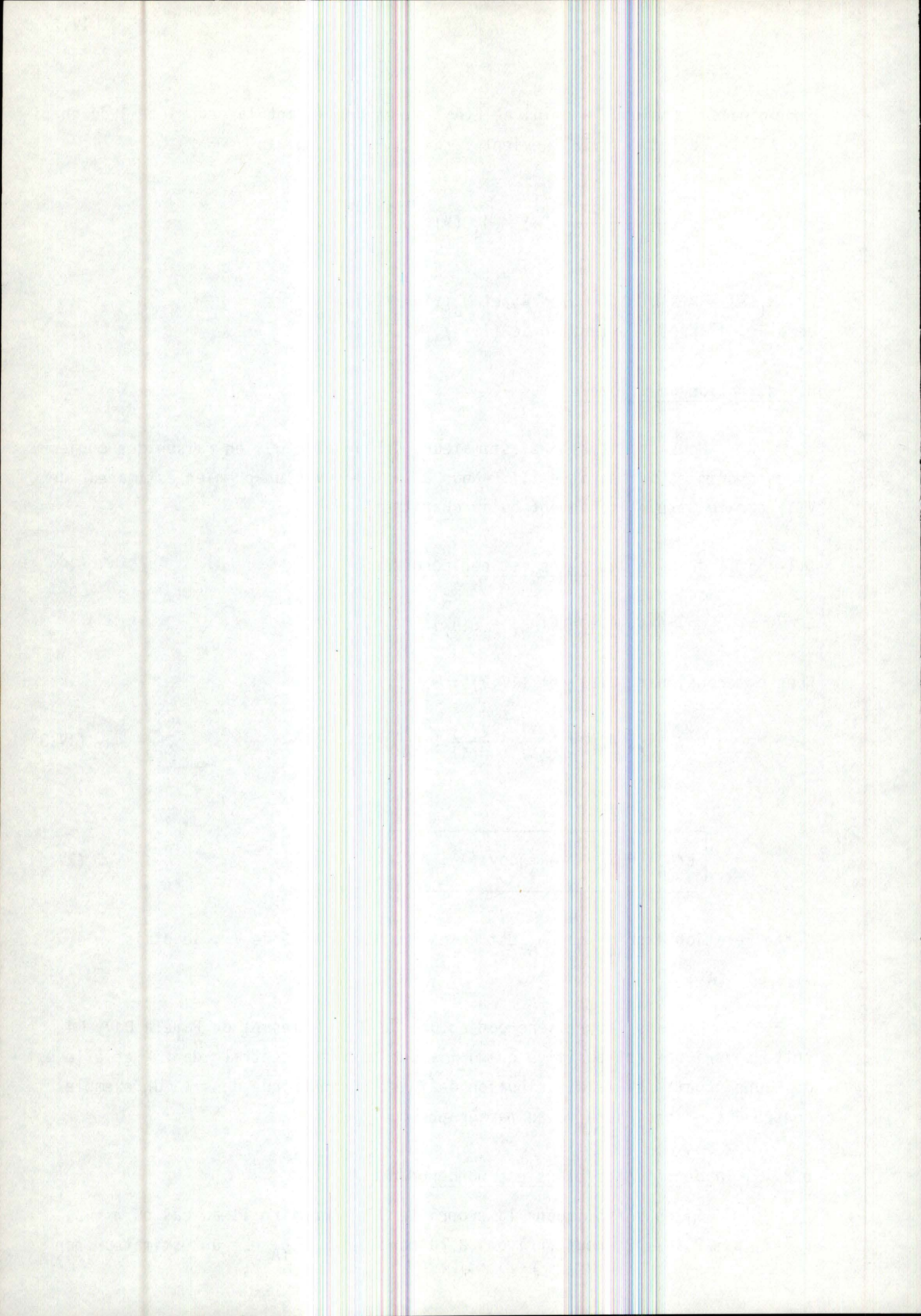
$$E(A_A) = V_V - \frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, A_A). \quad (\text{IV.4})$$

Cette relation exprime que A_A est un estimateur biaisé de V_V , de biais $\frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, A_A)$.

D'après la première conjecture de R.E. Miles et de Pamela Davy [4], cette covariance est positive quand Y a une position centrale dans X et elle est de signe négatif si la distribution de Y est périphérique dans X. Un exemple contre-disant ceci sera vu au paragraphe c.

b.2. Si la densité des plans est pondérée par A_X

Si nous appliquons la propriété 3 du chapitre II au cas où $n = 3, r = 2, p = 2, s = 2$, nous arrivons à la conclusion : A_A est un estimateur non



biaisé de V_V , lorsque la densité des plans est pondérée par A_X . En effet (II.13) s'exprime dans ce cas par :

$$E_2 \left(\frac{M_3^3(X) \cdot M_2^2(Y \cap F_2^3)}{M_2^2(X \cap F_2^3)} \right) = M_3^3(Y),$$

ce qui donne, en changeant $M_3^3(X)$ de membre :

$$E_A \left(\frac{A_Y}{A_X} \right) = V_V. \quad (IV.5)$$

b.3. La différence des risques quadratiques moyens

Nous calculons cette différence pour connaître le meilleur des deux estimateurs précédents. Nous allons ainsi pouvoir appliquer la troisième conjecture. Ecrivons ces deux MSE :

$$\begin{aligned} \text{MSE}(A_A) &= E[(A_A - V_V)^2], \\ \text{MSE}_A(A_A) &= \frac{E[A_X(A_A - V_V)^2]}{E(A_X)}. \end{aligned}$$

Leur différence vaudra :

$$\text{MSE}_A(A_A) - \text{MSE}(A_A) = \text{cov} \left(\frac{A_X}{E(A_X)}, (A_A - V_V)^2 \right).$$

Comme V_V n'est pas une quantité aléatoire, nous pouvons écrire :

$$\text{MSE}_A(A_A) - \text{MSE}(A_A) = \frac{1}{E(A_X)} \text{cov}(A_X, A_A(A_A - 2V_V)). \quad (IV.6)$$

Nous obtenons, par (IV.1) :

$$\text{MSE}_A(A_A) - \text{MSE}(A_A) = \frac{H(X)}{V(X)} \text{cov}(A_X, \sigma) \quad (IV.7)$$

où

$$\sigma = A_A(A_A - 2V_V). \quad (IV.8)$$

La troisième conjecture appliquée ici, nous dit que cette différence est négative, c'est-à-dire que l'estimateur A_A par rapport aux sections pondérées est meilleur que l'autre. Nous verrons au paragraphe d. que, dans l'exemple d'une sphère contenant un anneau sphérique, la différence est positive dans certains cas (c'est-à-dire pour de petites valeurs du petit rayon de l'anneau sphérique).

c. Exemple 1 : deux sphères concentriques

Analysons le signe de la covariance donnée par (IV.3) :

$$\text{cov}(A_X, A_A) = \frac{V(Y)}{H(X)} - \frac{V(X)}{H(X)} E(A_A). \quad (\text{IV.8})$$

Le calcul des termes du membre de droite nous donne les résultats suivants (pour plus de détails voir en fin de paragraphe).

$$\bullet E(A_A) = \frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{r^2 - p^2}{1 - p^2} dp.$$

$$E(A_A) = \frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + r. \quad (\text{IV.9})$$

• Comme Y et X sont des sphères de rayon r et 1 respectivement, les volumes valent :

$$V(Y) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{4}{3} \pi.$$

Dès lors (IV.3) s'écrit :

$$\text{cov}(A_X, A_A) = \frac{2\pi}{3} \left[r^3 - r + \frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \right]. \quad (\text{IV.10})$$

Comme,

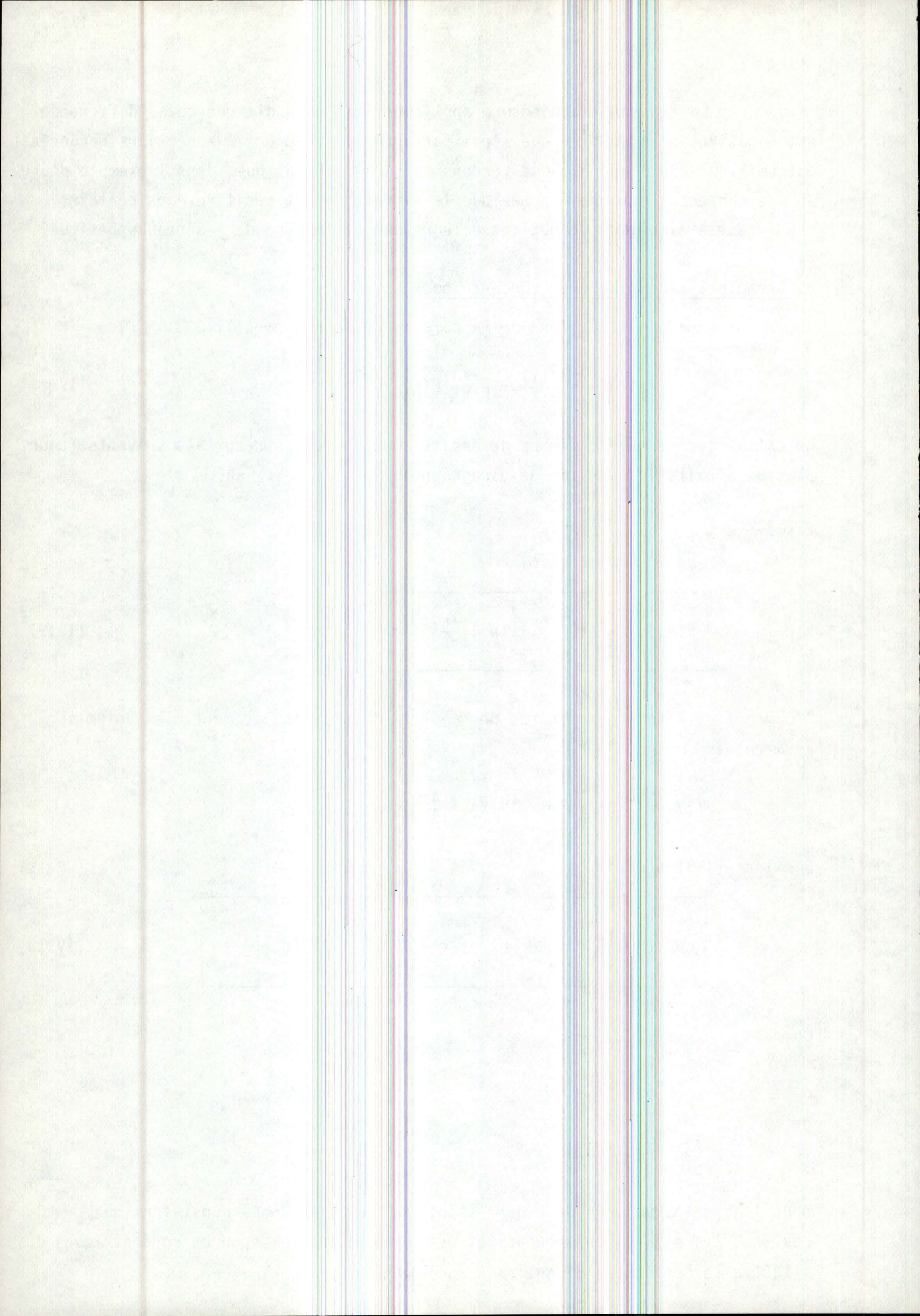
$$r^3 \leq r,$$

$$r^2 \leq 1,$$

et

$$\ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \geq 0$$

pour toutes les valeurs de r dans l'intervalle [0,1], nous constatons que $\text{cov}(A_X, A_A)$ est toujours négative. Cet exemple de deux sphères concentriques qui illustre le cas central, contredit donc la première conjecture.



Remarque :

Dans ce cas, et comme prévu par la conjecture 3,

$$MSE_A(A_A) - MSE(A_A)$$

reste négative pour toutes les valeurs de r .

d. Exemple 2 : un anneau sphérique, inclus dans une sphère

d.1. Description de la situation

Prenons dans E^3 , une sphère X de centre l'origine O et de rayon 1 . L'anneau sphérique Y est le complément dans la sphère X d'une sphère X' , de même centre O et de rayon r . ($0 \leq r \leq 1$).

Par la géométrie de Y , le plan aléatoire T à travers X , coupe toujours Y . La section du corps Y par T est une couronne, si T coupe X' et est un cercle sinon. (voir figure 7). Si nous adoptons les mêmes notations qu'au chapitre I, nous retrouvons les expressions (I.24) et (I.25) :

$$R_T = \sqrt{1 - p^2},$$

$$r_T = \sqrt{r^2 - p^2}.$$

L'aire de la section circulaire ($X \cap T$) vaut dès lors :

$$A_X = \pi (1 - p^2). \quad (\text{IV.11})$$

Le volume de Y est égal à la différence des volumes de X et de X' :

$$V(Y) = \frac{4}{3} \pi (1 - r^3).$$

Envisageons deux cas selon la position de T :

• Si $0 \leq |p| \leq r$

Pour ces valeurs de p , ($Y \cap T$) est une couronne de centre O_T , de rayon extérieur R_T et de rayon intérieur r_T . L'aire de cette couronne est la différence entre l'aire de ($X \cap T$) et l'aire de ($X' \cap T$) :

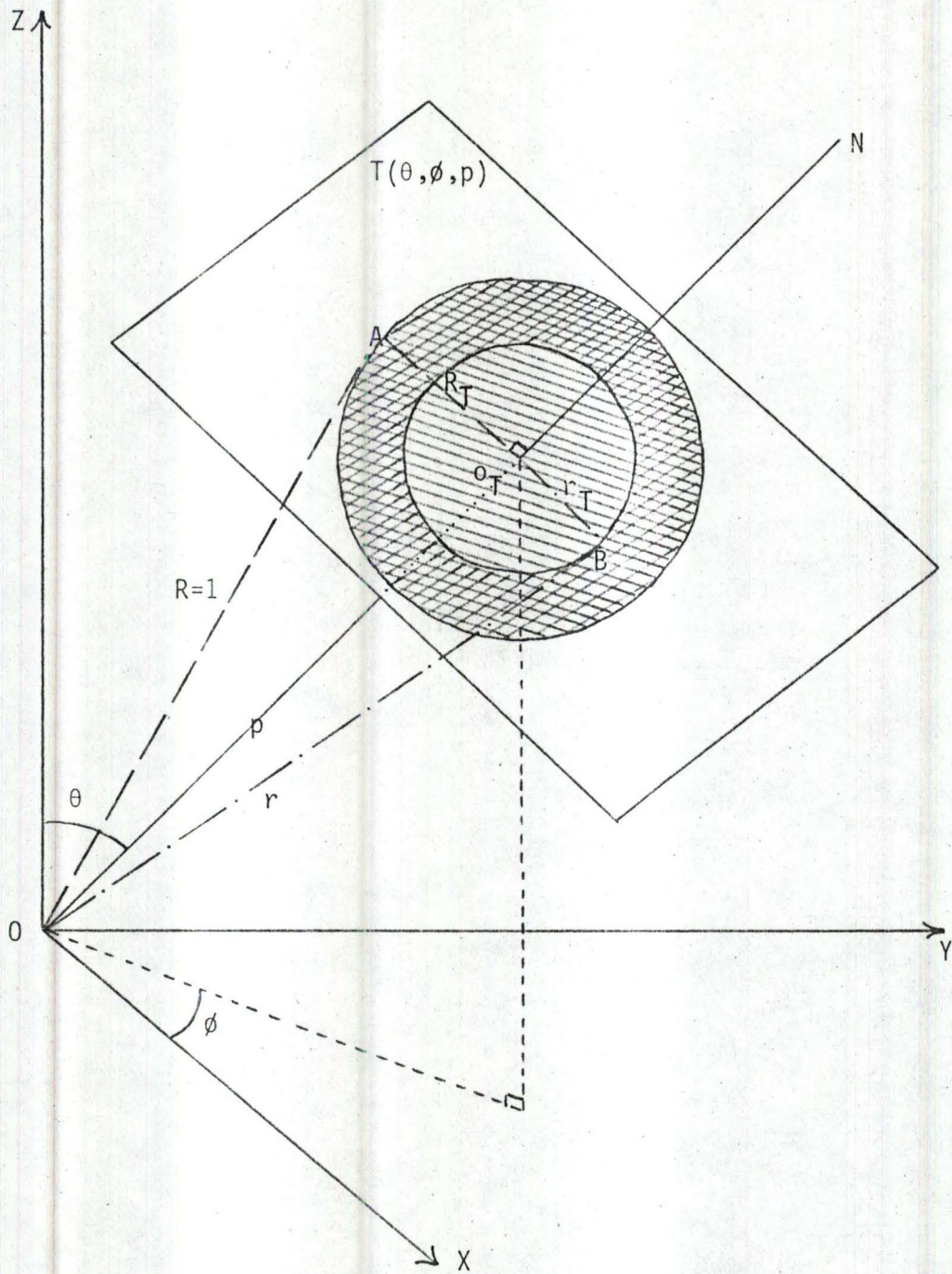


Figure 7 : Illustration de la section par un plan T , d'une sphère X contenant un anneau sphérique Y , dans E^3

Si T coupe la sphère X (de rayon r) :

 représente $(X \cap T)$

 représente $(Y \cap T)$

Si T ne coupe pas X

 } représente $(X \cap T)$ et aussi $(Y \cap T)$.



$$A_Y = \pi (1 - r^2). \quad (\text{IV.12})$$

(Remarquons que dans ce cas-ci, A_Y n'est pas une quantité aléatoire !)
Le rapport des aires est :

$$A_A = \frac{1 - r^2}{1 - p^2}. \quad (\text{IV.13})$$

• Si $r \leq |p| \leq 1$:

($Y \cap T$) est un cercle de centre O_T et de rayon R_T . L'aire de ($Y \cap T$) est donc égale à l'aire de ($X \cap T$) :

$$A_Y = \pi (1 - p^2) \quad (\text{IV.14})$$

et le rapport des aires vaut :

$$A_A = 1. \quad (\text{IV.15})$$

L'espérance mathématique de A_X est donnée par (I.32) :

$$E(A_X) = \frac{2\pi}{3}. \quad (\text{IV.16})$$

d.2. Différence des risques quadratiques moyens

Exprimons $MSE_A(A_A) - MSE(A_A)$ et analysons l'application de la seconde conjecture dans ce cas-ci. L'expression (I.21) nous permet d'écrire :

$$MSE_A(A_A) - MSE(A_A) = \frac{1}{E(A_X)} E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) - \frac{2}{E(A_X)} V_V E(A_Y) - E\left(\frac{A_Y^2}{A_X^2}\right) + 2 V_V E(A_A). \quad (\text{IV.17})$$

Les quatre termes soulignés valent (voir détail en fin de paragraphe) :

$$\bullet E(A_Y) = \frac{2\pi}{3} (1 - r^3). \quad (\text{IV.18})$$

$$\bullet E(A_A) = \frac{1}{2} (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + (1 - r). \quad (\text{IV.19})$$

$$\bullet E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) = \frac{\pi}{2} (1 - r^2)^2 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + \frac{2\pi}{3} - \pi r + \frac{\pi r^3}{3}. \quad (\text{IV.20})$$

$$\bullet E\left(\frac{A_Y^2}{A_X^2}\right) = \frac{(1 - r^2)^2}{4} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 1 - \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2}. \quad (\text{IV.21})$$

Par (IV.18), (IV.19), (IV.20), (IV.21), (IV.16), la relation (IV.17) s'écrit, suite au développement à la fin du paragraphe d.2.

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{A(A_A)} - \text{MSE}(A_A) &= (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} r^2 - r^3 \right] \\ &\quad - 3r + 3r^3 + 2r^4 - 2r^6 \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Cet exemple ne vérifie pas la seconde conjecture. En effet, regardons le tableau :

r	$\text{MSE}_{A(A_A)} - \text{MSE}(A_A)$	signe
0.1	0.017 E - 04	+
0.2	0.428 E - 04	+
0.3	1.708 E - 04	+
0.4	1.140 E - 04	+
0.5	- 0.0013	-
0.8	- 0.0407	-
0.9	- 0.0589	-

Les résultats contredisent la conjecture des MSE. Pour des rayons r assez grands ($r = 0.5, 0.8, 0.9$), c'est-à-dire dans la situation où Y est le moins homogène dans X , nous trouvons le signe désiré. Cependant, pour de plus petits rayons r , A_A est un meilleur estimateur de V_Y si les sections ne sont pas pondérées par A .

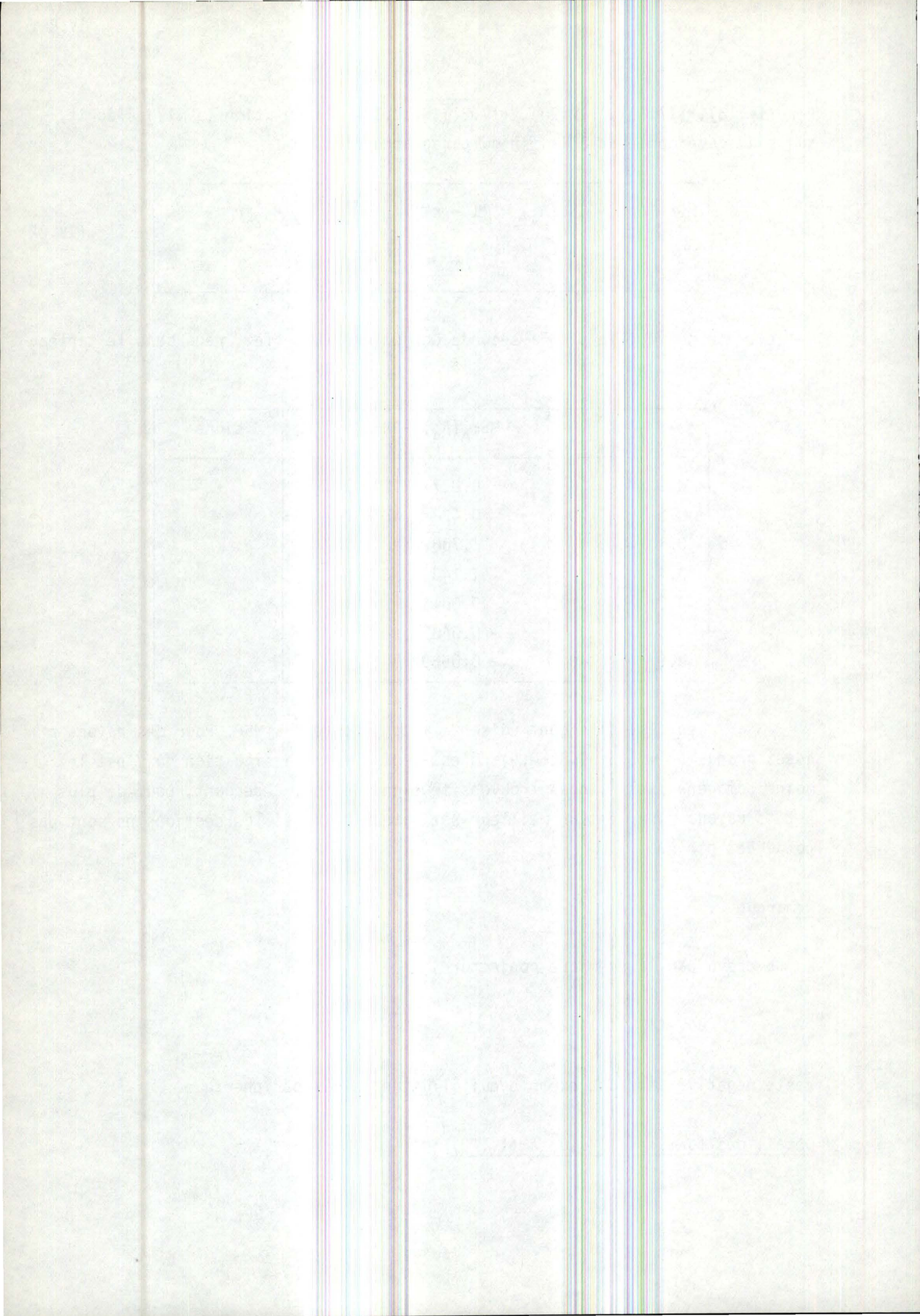
Remarque :

Comme prévu par la première conjecture,

$$\text{cov}(A_X, A_A)$$

reste négative dans cet exemple qui illustre le cas périphérique.

Détail des formules (IV.18) à (IV.22) :



(IV.18) :

$$\begin{aligned}
 E(A_Y) &= 2 \int_0^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \Pi(1 - r^2) \frac{\sin \theta}{2\Pi \cdot 2} d\theta d\phi dp + \\
 &\quad 2 \int_r^1 \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \Pi(1 - p^2) \frac{\sin \theta}{2\Pi \cdot 2} d\theta d\phi dp, \\
 &= \Pi(1 - r^2) \cdot r + \Pi \int_r^1 dp - \Pi \int_r^1 p^2 dp, \\
 &= \Pi(r - r^3) + \Pi(1 - r) - \Pi\left(\frac{1}{3} - \frac{r^3}{3}\right),
 \end{aligned}$$

$$E(A_Y) = \frac{2\Pi}{3} (1 - r^3) .$$

(IV.19) :

$$\begin{aligned}
 E(A_A) &= \int_0^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{1 - r^2}{1 - p^2} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp, \\
 &\quad + \int_r^1 \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp, \\
 &= (1 - r^2) \int_0^r \frac{dp}{1 - p^2} + (1 - r),
 \end{aligned}$$

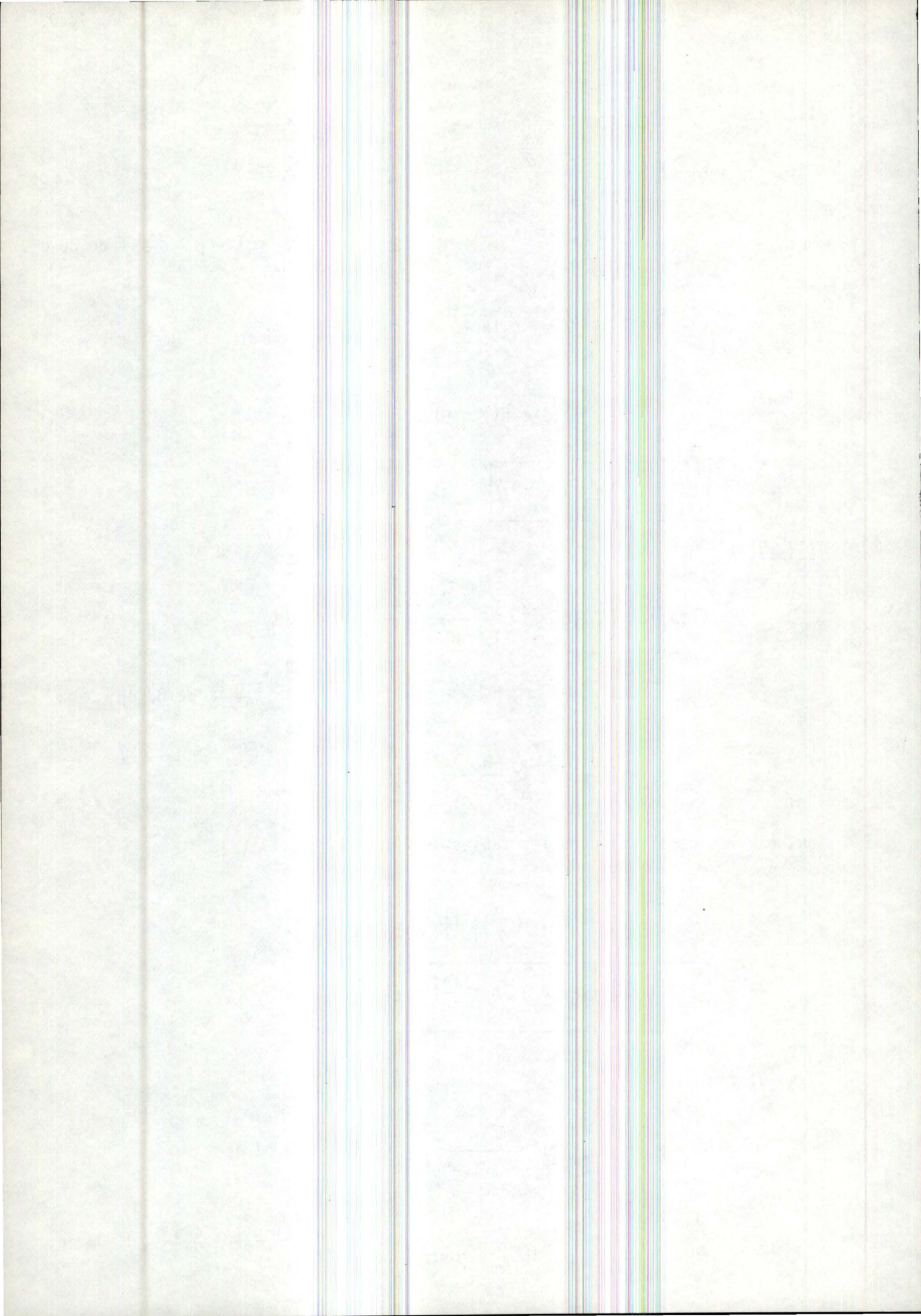
ou, par les résultats dans les tables de Dwight [2],

$$= (1 - r^2) \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_0^r + (1 - r),$$

$$E(A_A) = \frac{1}{2} (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + (1 - r) .$$

(IV.20) :

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) &= \int_0^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\Pi^2(1 - r^2)^2}{\Pi(1 - p^2)} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp \\
 &\quad + \int_r^1 \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\Pi^2(1 - p^2)^2}{\Pi(1 - p^2)} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \Pi(1 - r^2)^2 \int_0^r \frac{dp}{1 - p^2} + \Pi \int_r^1 (1 - p^2) dp, \\
&= \frac{\Pi}{2} (1 - r^2)^2 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + \Pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \Pi \left(r - \frac{r^3}{3}\right),
\end{aligned}$$

$$E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) = \frac{\Pi}{2} (1 - r^2)^2 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + \frac{2\Pi}{3} - \Pi r + \frac{\Pi r^3}{3}.$$

(IV.21) :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) &= \int_0^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - p^2)^2} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp, \\
&\quad + \int_r^1 \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\sin \theta}{2\Pi} d\theta d\phi dp, \\
&= (1 - r^2)^2 \int_0^r \frac{dp}{(1 - p^2)^2} + \int_r^1 dp, \\
&= (1 - r^2)^2 \left[\frac{p}{2(1 - p^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| \right]_0^r + (1 - r),
\end{aligned}$$

$$E\left(\frac{A_Y^2}{A_X}\right) = \frac{r(1 - r^2)}{2} + \frac{(1 - r^2)^2}{4} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + (1 - r).$$

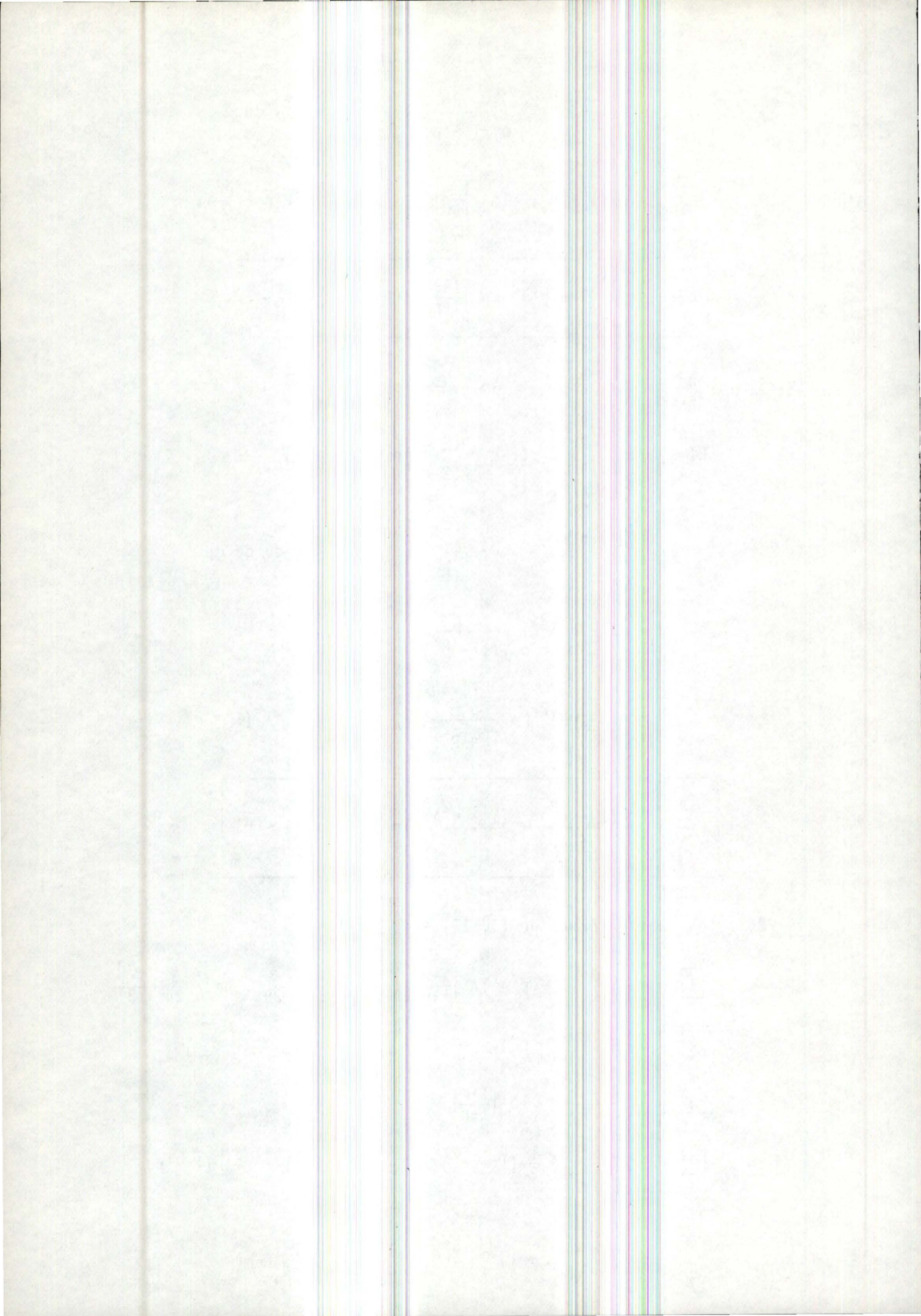
(IV.22) : les quatre termes de (IV.17) sont :

$$\boxed{1} = \frac{3}{2\Pi} \cdot \frac{\Pi}{2} (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + \frac{3}{2\Pi} \cdot \frac{2\Pi}{3} - \frac{3}{2\Pi} \cdot \Pi r + \frac{3}{2\Pi} \cdot \frac{\Pi r^3}{3}.$$

$$\boxed{2} = \frac{-2 \cdot 3}{2\Pi} \cdot (1 - r^3) \cdot \frac{2\Pi}{3} (1 - r^3).$$

$$\boxed{3} = - \left(\frac{1 - r^2}{4} \right)^2 \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 1 + \frac{r}{2} + \frac{r^3}{2}.$$

$$\boxed{4} = 2 (1 - r^3) \frac{1}{2} (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 2 (1 - r^3) (1 - r).$$



Regroupons les \ln et les différentes puissances de r :

$$\begin{aligned} \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} &= (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \left[\frac{3}{4} (1 - r^2) - \frac{(1 - r^2)}{4} + (1 - r^3) \right] \\ &\quad + 1 - 1 - 2 + 2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 \right) r \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + 2 + 2 + \frac{1}{2} - 2 \right) r^3 + 2r^4 - 2r^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MSE}_A(A_A) - \text{MSE}(A_A) &= (1 - r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} r^2 - r^3 \right] - 3r + 3r^3 \\ &\quad + 2r^4 - 2r^6 \end{aligned}$$

IV.2. DANS L'ESPACE E^2 : ESTIMATION DE L'AIRES DE Y, INCLUS DANS X

a. Introduction du problème dans l'espace E^2

Dans l'espace E^2 , nous considérons un corps compact arbitraire X . Ce corps contient un corps Y .

Soit T une droite coupant X et repéré par les coordonnées (θ, p) où θ est l'angle polaire de la normale N au plan T et p la distance de l'origine O au plan T , mesurée sur N . ($0 \leq \theta < \pi$ et $-\infty < p < \infty$) (voir figure 8).

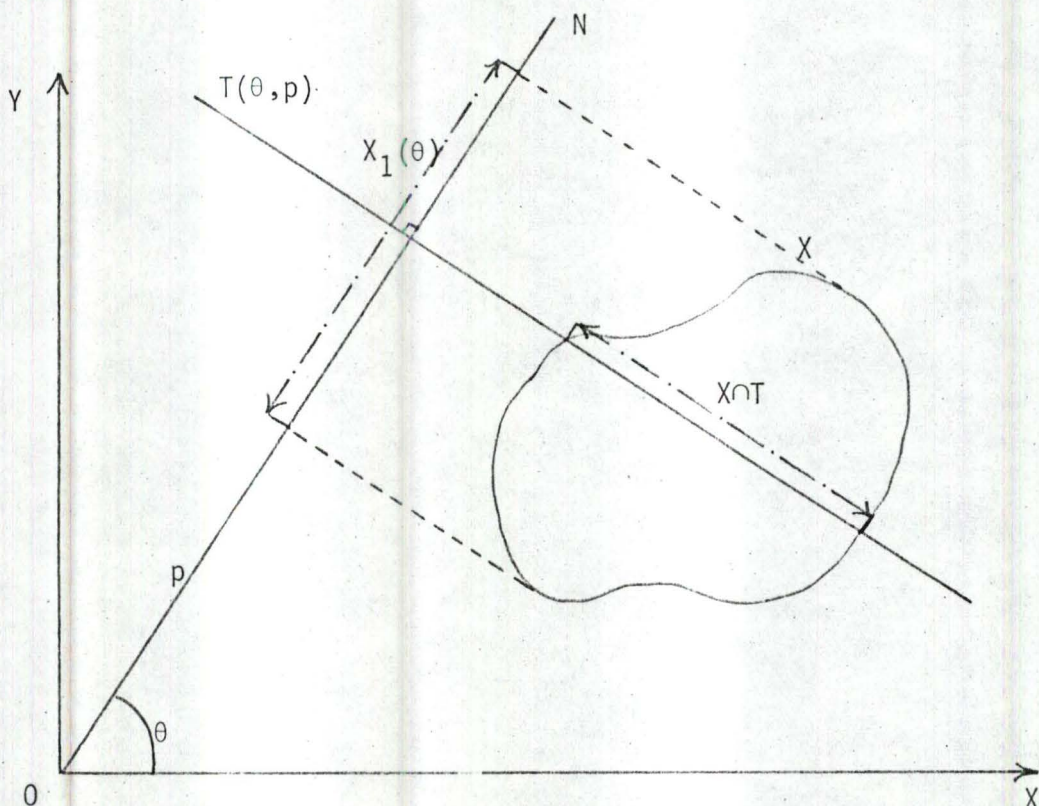
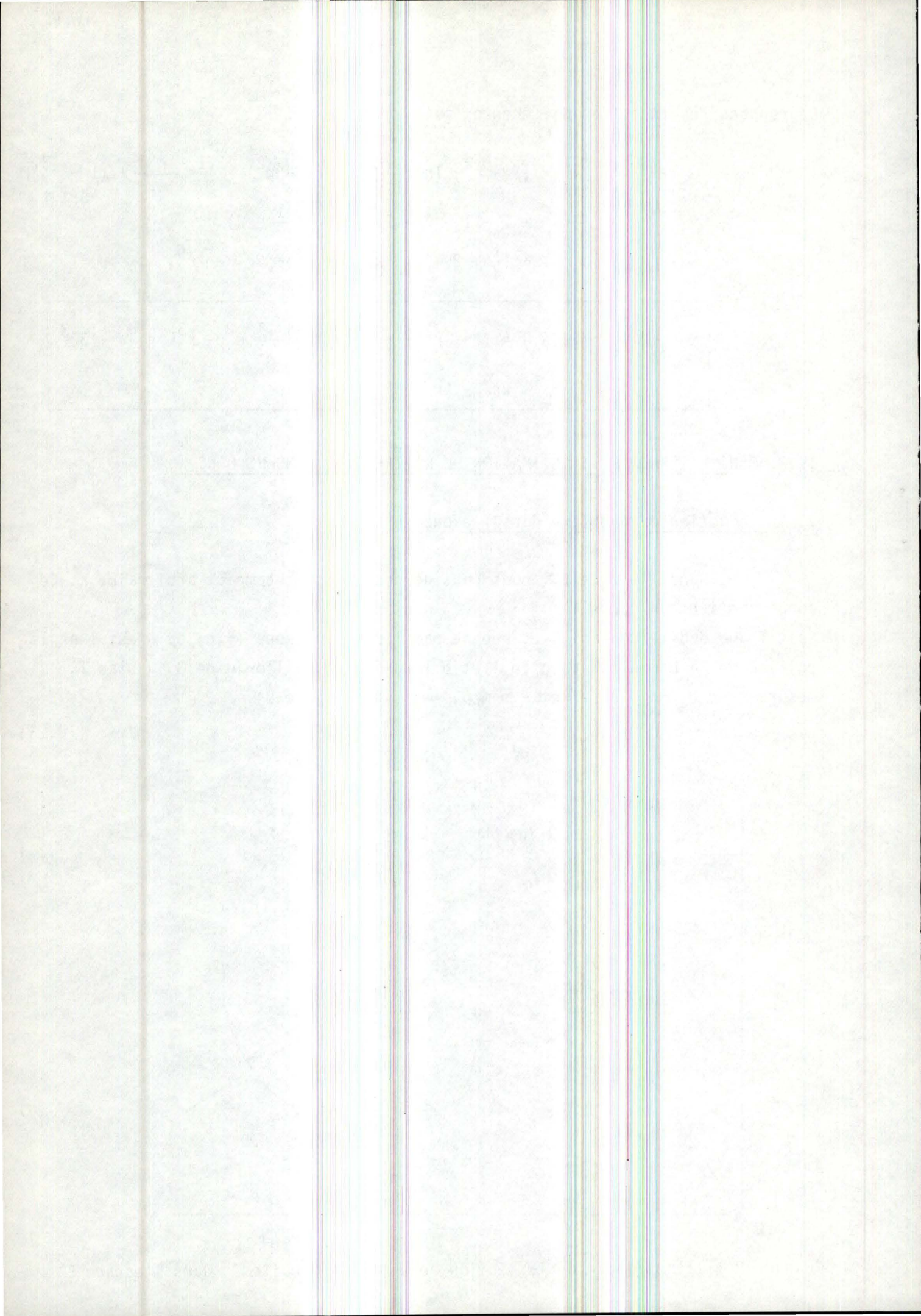


Figure 8 : Illustration de la section de X par une droite T , dans l'espace E^2



La projection orthogonale de X sur la normale N est notée $X_1(\theta)$ et $L(X_1(\theta))$ est sa mesure de Lebesgue (c'est-à-dire la longueur de $X_1(\theta)$).

Soit $D(X)$ l'ensemble des couples (θ, p) tel que $T(\theta, p)$ coupe X . Ici nous voulons introduire des droites aléatoires, suivant une démarche analogue à celle utilisée pour les plans aléatoires au chapitre I. Soit $D(X)$ l'ensemble des triplets (θ, p) , tels que (θ, \emptyset) corresponde à une droite $T(\theta, p)$ qui coupe X . Il est donc nécessaire de définir une mesure sur l'ensemble des droites coupant X dans E^2 , qui soit invariante pour les mouvements euclidiens de E^2 . L'élément de mesure sera donc :

$$dJ = d\theta dp.$$

(voir chapitre II, section 1.a. exemple 2).

La densité de probabilité associée à dJ sera :

$$f(\theta, p) = c \text{ telle que } \int_{T \uparrow X} c d\theta dp = 1.$$

Nous déterminons la constante c , en sachant que la coordonnée p ne varie que dans $X_1(\theta)$:

$$\int L(X_1(\theta)) d\theta = \frac{1}{c}. \quad (\text{IV.23})$$

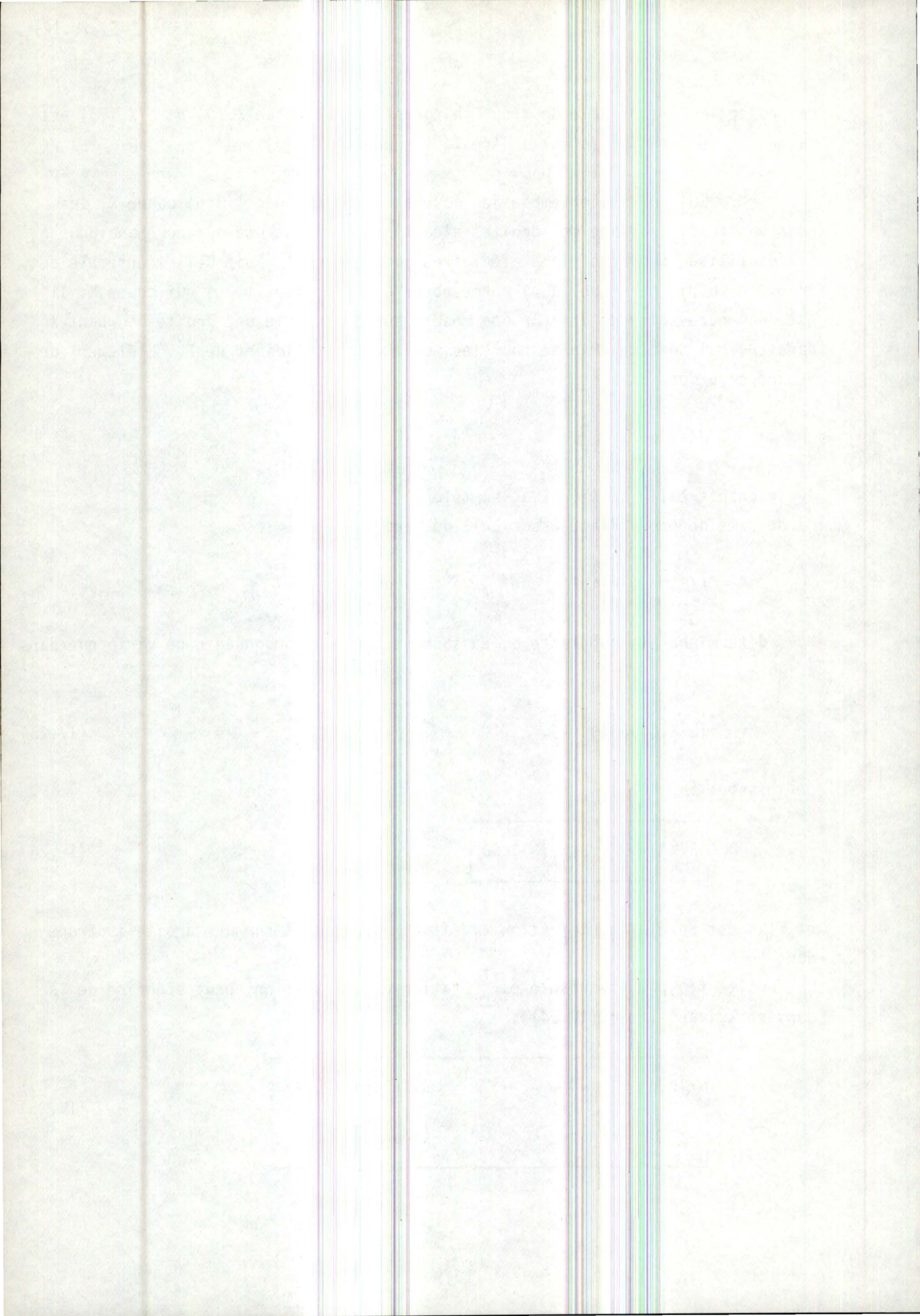
Définissons :

$$F(X) = \frac{1}{\Pi} \int L(X_1(\theta)) d\theta \quad (\text{IV.24})$$

et $F(X)$ est appelé *la projection linéaire moyenne de X sur une droite isotrope dans le plan.*

La densité $f(\theta, p)$, invariante par rotation et translation, peut s'écrire de la manière suivante, par (IV.24) :

$$f(\theta, p) = \begin{cases} \frac{1}{\Pi F(X)} & \text{si } (\theta, p) \in D(X) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$



Propriété de la densité $f(\theta, p)$

- Nous avons la densité marginale

$$f(\theta) = \frac{L(X_1(\theta))}{F(X)}, \quad (IV.26)$$

obtenue par l'égalité $f(\theta) = \int_{T \uparrow X} f(\theta, p) dp$ et par (IV.25).

- Par la définition de la densité conditionnelle, nous obtenons :

$$f(p|\theta) = \frac{1}{L(X_1(\theta))}. \quad (IV.27)$$

Probabilité fondamentale d'une droite aléatoire coupant YPropriété 1 :

$$p(T \uparrow Y) = \frac{H(Y)}{H(X)}. \quad (IV.28)$$

en effet, il suffit d'appliquer (II.7) au cas où $n = 2$ et $r = 1$.

Propriété 2 :

Conditionnellement au fait qu'une droite à travers X coupe Y, cette droite est une section IUR de Y.

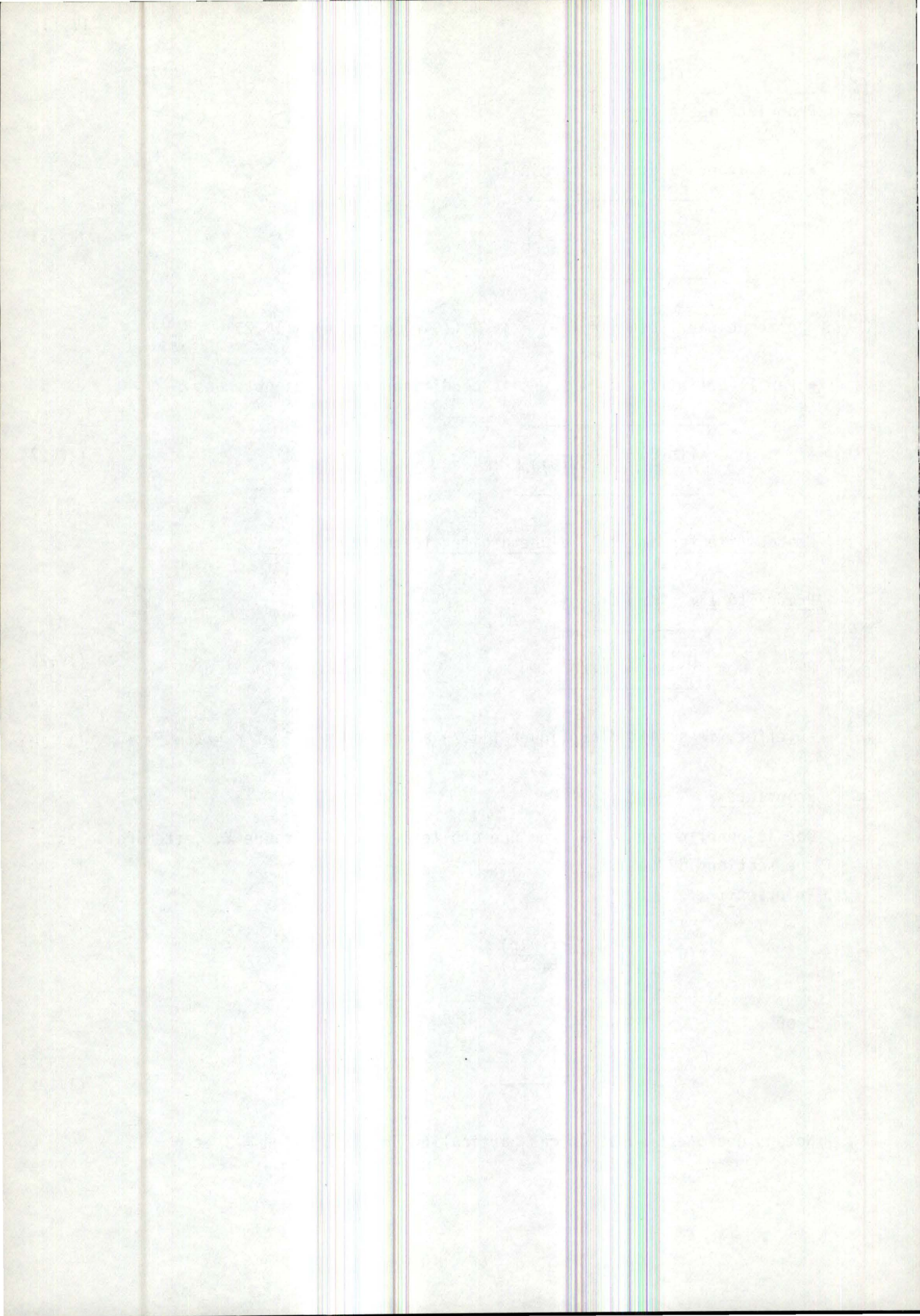
En effet :

$$f(\theta, p | T \uparrow Y) = \frac{f(\theta, p)}{P(T \uparrow Y)}.$$

D'où :

$$f(\theta, p | T \uparrow Y) = \frac{1}{\Pi F(X)}. \quad (IV.29)$$

Notons que c'est aussi un cas particulier de (II.8) si $n = 3$ et $r = 1$.



b. Estimation de l'aire de Yb.1. Une formule pour des sections linéaires aléatoires

Bien que la structure des corps planes soit souvent entièrement visible, les formules suivantes permettent de trouver des estimateurs rapides et faciles de certaines de leurs caractéristiques. Nous utiliserons les notations suivantes :

$A(Y)$ = l'aire de Y,

$L_X [L_Y]$ = la longueur du segment de droite $(X \cap T)$, $[(Y \cap T)]$,

L_L = le rapport L_Y sur L_X ,

A_A = le rapport $A(Y)$ sur $A(X)$.

Prenons $(n, r, p, s) = (2, 1, 0, 1)$ dans la propriété 3 du chapitre II (ou bien suivons le même raisonnement qu'au chapitre I.2). Nous obtenons :

$$E_0 \left(\frac{M_1^2(X) \cdot M_1^2(Y \cap F_1^2)}{M_0^2(X \cap F_1^2)} \right) = M_2^2(Y),$$

ce qui implique :

$$\boxed{E(L_Y) = \frac{A(Y)}{F(X)}} \quad (IV.30)$$

Notons que, puisque $E(L_X)$ est un cas particulier de (IV.30), où Y est le sous-ensemble X de X, nous avons :

$$\boxed{E(L_X) = \frac{A(X)}{F(X)}} \quad (IV.31)$$

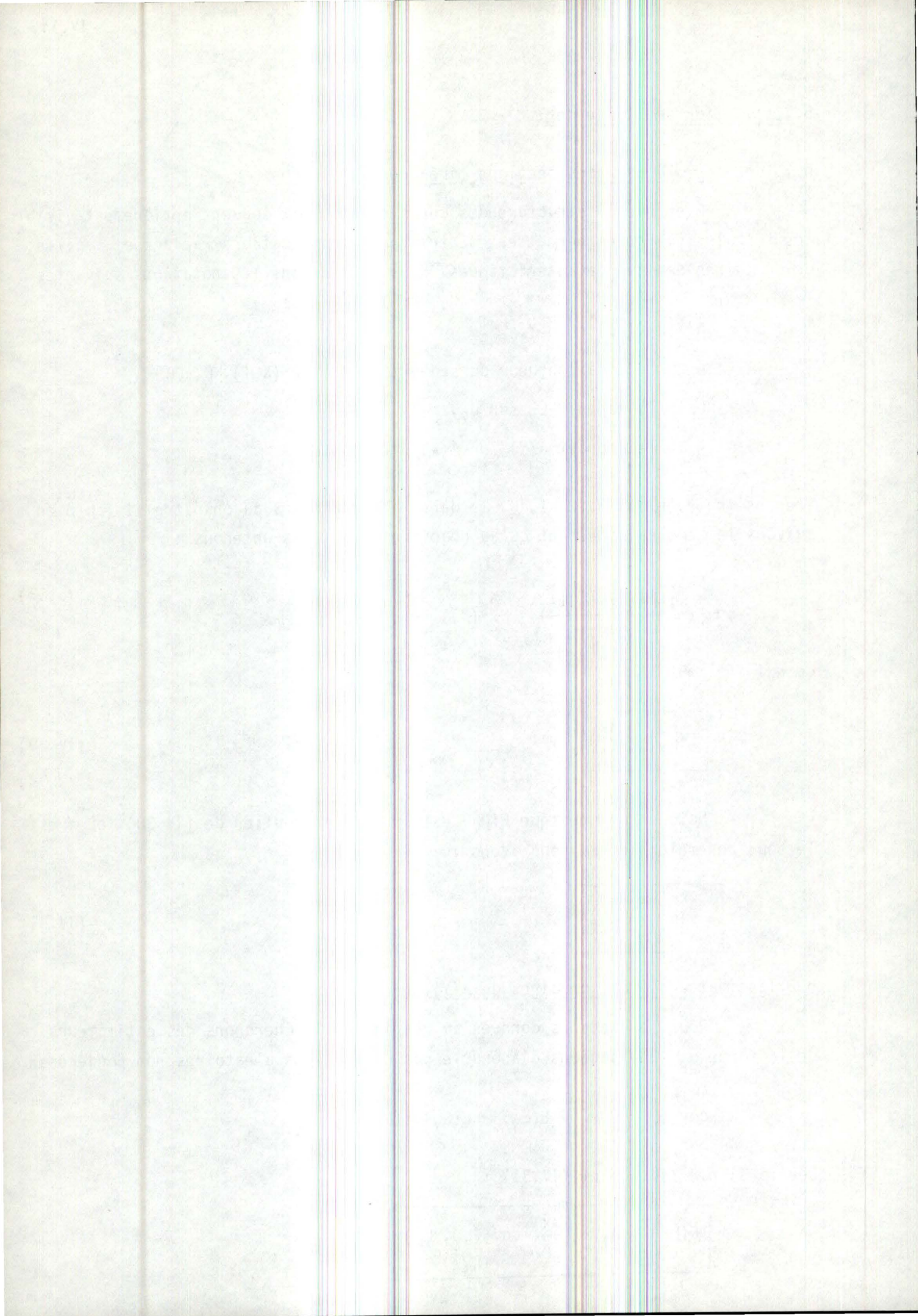
b.2. Estimateurs fractionnaires de A(Y)

Pour les raisons données au chapitre III, cherchons des estimateurs de la forme α_β . Envisageons d'abord le cas de sections aléatoires non pondérées :

$$\text{cov}(L_X, L_L) = E(L_Y) - E(L_X) \cdot E(L_L).$$

Dès lors, par (IV.30) et (IV.31) :

$$\boxed{E(L_L) = A_A - \frac{F(X)}{A(X)} \text{cov}(L_X, L_L)} \quad (IV.32)$$



Par conséquent, L_L est un estimateur biaisé de A_A de biais :

$$- \frac{F(X)}{A(X)} \text{cov} (L_X, L_L)$$

où le signe de la covariance devrait être donnée par la conjecture 1 (voir contre-exemple au paragraphe d).

Nous voulons un estimateur non biaisé de A_A . C'est pourquoi nous pondérons la densité $f(\theta, p)$ (voir conjecture 2). Si nous appliquons (II.12), avec $(n, r, q) = (2, 1, 0)$, l'élément de probabilité pondéré sur $D(X)$ est :

$$\frac{L_X}{A(X)\Pi} d\theta dp = \frac{L_X d\theta dp}{\iint L_X d\theta dp}.$$

La densité de probabilité pondérée par L_X vaut donc :

$$\boxed{f_L(\theta, \phi) = \frac{L_X}{\iint L_X d\theta dp}} \quad (IV.33)$$

Si $(n, r, p, s) = (2, 1, 1, 1)$, la relation (II.13) donne un estimateur non biaisé de A_A par rapport aux sections pondérées par L_X :

$$\boxed{E_L(L_L) = A_A} \quad (IV.34)$$

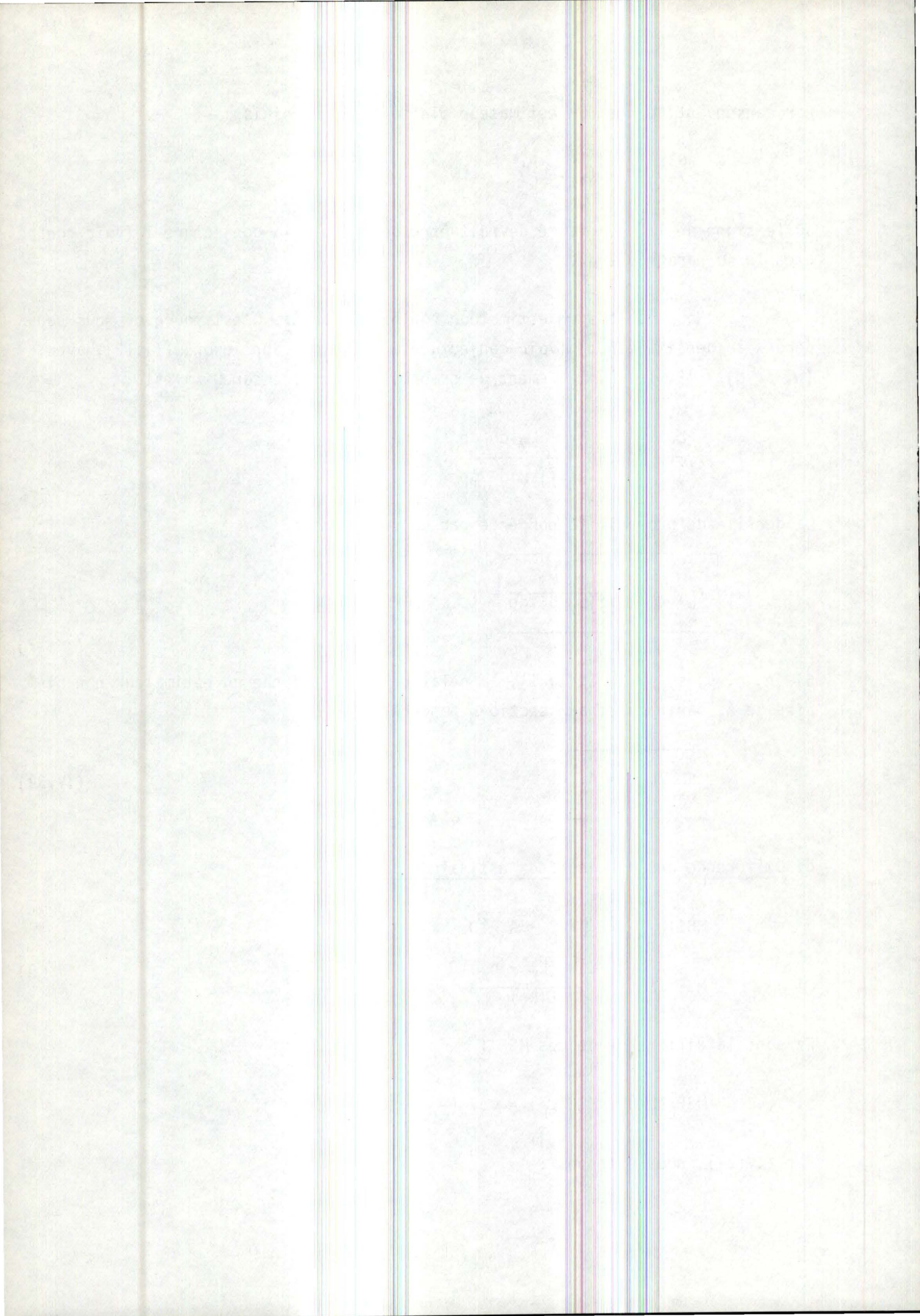
c. Différence des MSE des deux estimateurs de A_A

$$\begin{aligned} \text{MSE}(L_L) &= E[(L_L - A_A)^2] \\ \text{MSE}_L(L_L) &= \frac{E[L_X(L_L - A_A)^2]}{E(L_X)}. \end{aligned}$$

Faisons la différence de ces MSE :

$$\text{MSE}_L(L_L) - \text{MSE}(L_L) = \text{cov} \left(\frac{L_X}{E(L_X)}, (L_L - A_A)^2 \right).$$

Par (IV.31), nous obtenons :



$$\boxed{\text{MSE}_{L_L}(L_L) - \text{MSE}(L_L) = \frac{F(X)}{A(X)} \text{cov}(L_X, \delta)} \quad (\text{IV.35})$$

où

$$\boxed{\delta = L_L(L_L - A_A)} \quad (\text{IV.36})$$

d. Exemple : deux cercles concentriques X et Yd.1. Description de l'exemple

Soient deux cercles concentriques X et Y de rayon respectif 1 et r, dans l'espace E^2 . ($0 \leq r \leq 1$) T est une droite à travers X. Les sections $(X \cap T)$ et $(Y \cap T)$ sont des cordes respectivement du cercle X et Y. La droite T et la normale N forment deux triangles rectangles ABO et BCO (voir figure 9). Le segment $(X \cap T)$ et la somme de AB et de BC. En faisant appel à des propriétés géométriques nous déterminons :

$$L_X = 2 \sqrt{1 - p^2} \quad (\text{IV.37})$$

et

$$L_Y = \begin{cases} 2 \sqrt{r^2 - p^2} & \text{si } p \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

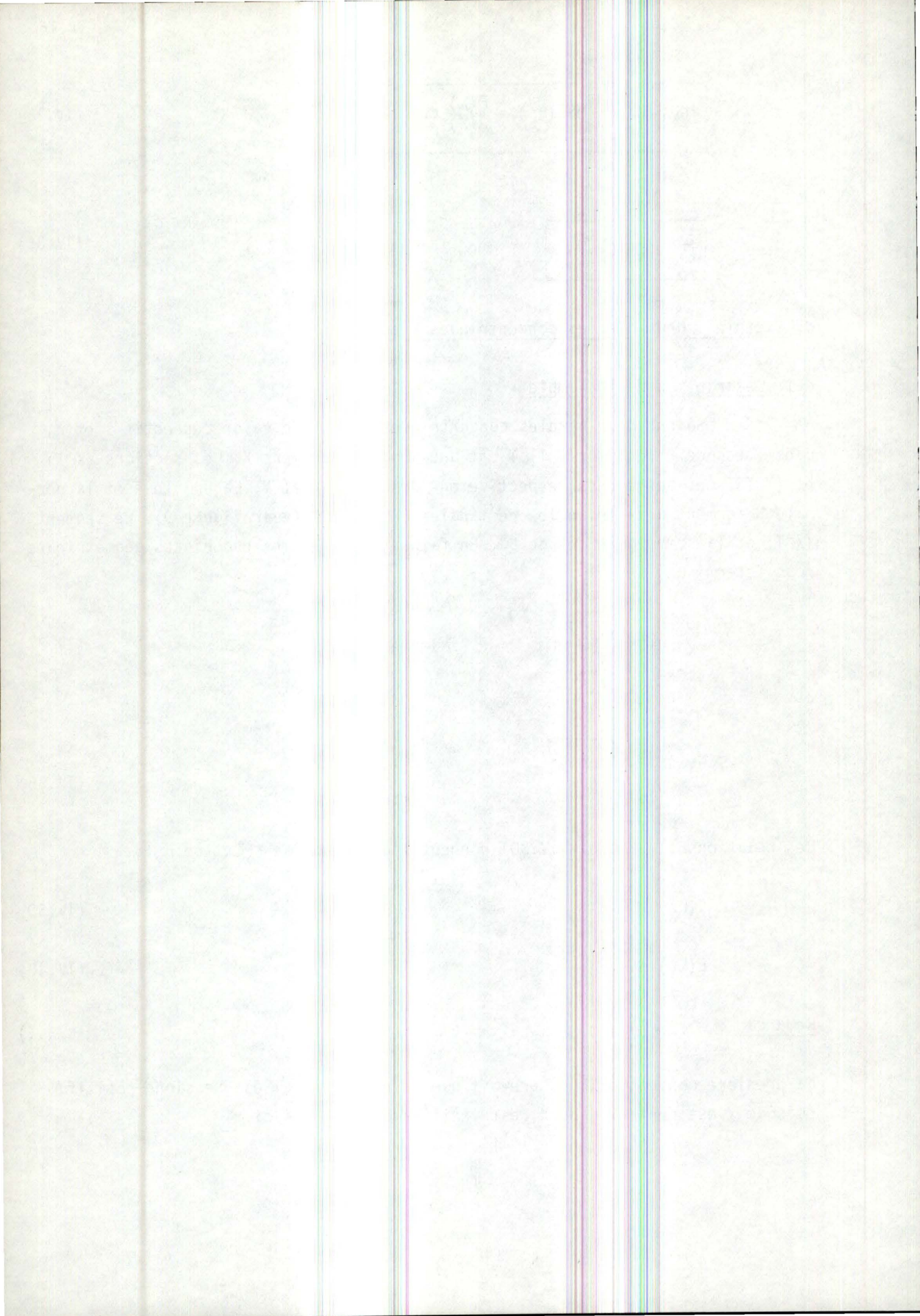
Les relations (IV.31) et (IV.30) donnent l'espérance de L_X et de L_Y :

$$E(L_X) = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{IV.39})$$

$$E(L_Y) = \frac{\pi r^2}{2}. \quad (\text{IV.40})$$

Remarque :

La première conjecture, qui prévoit que la $\text{cov}(L_X, L_L)$ est de signe positif, puisque Y est central dans X, est vérifiée dans ce cas-ci.



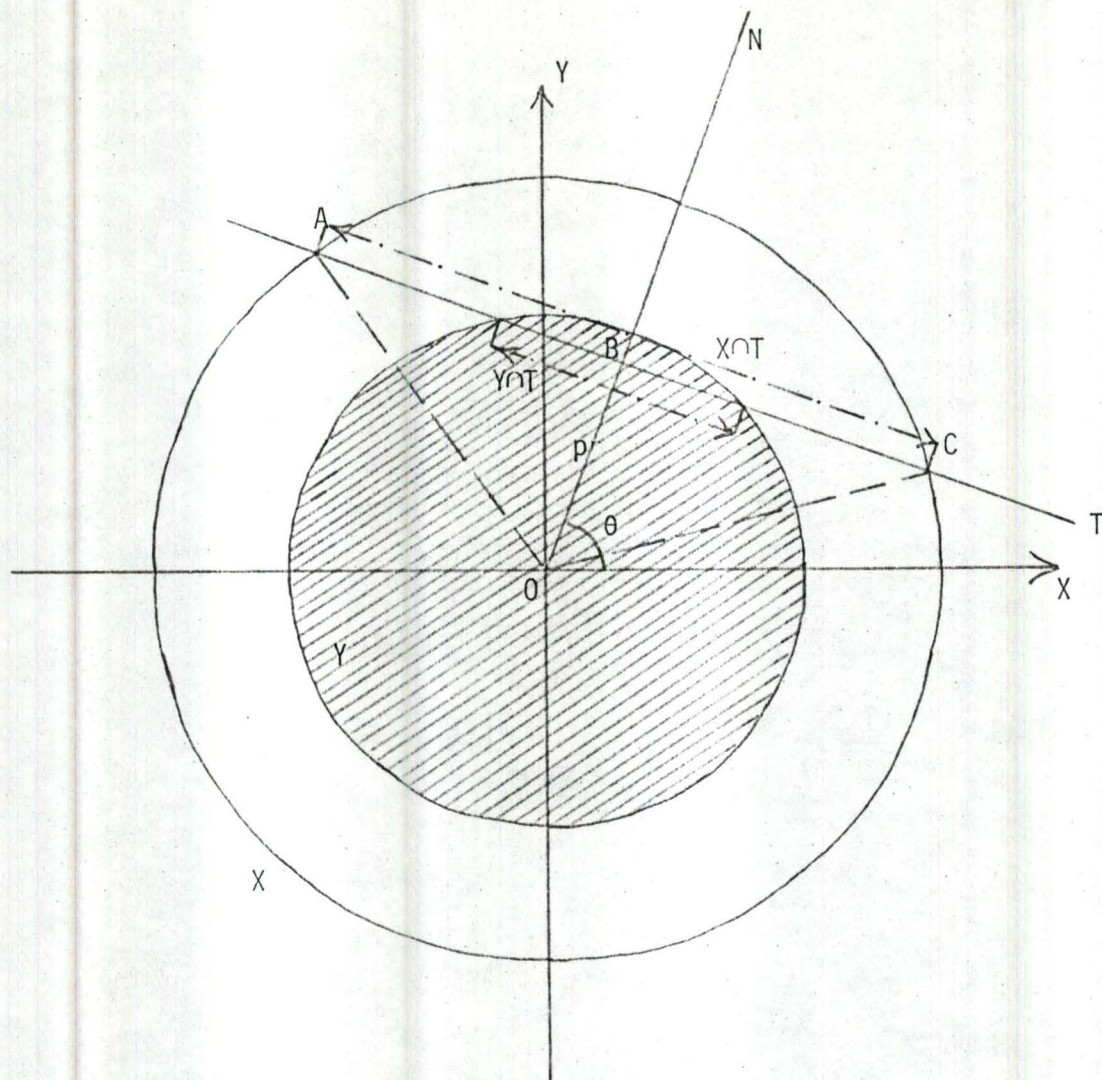


Figure 9 : Illustration de l'exemple de deux cercles concentriques, coupés par une droite T.

d.2. La différence des MSE de L_L

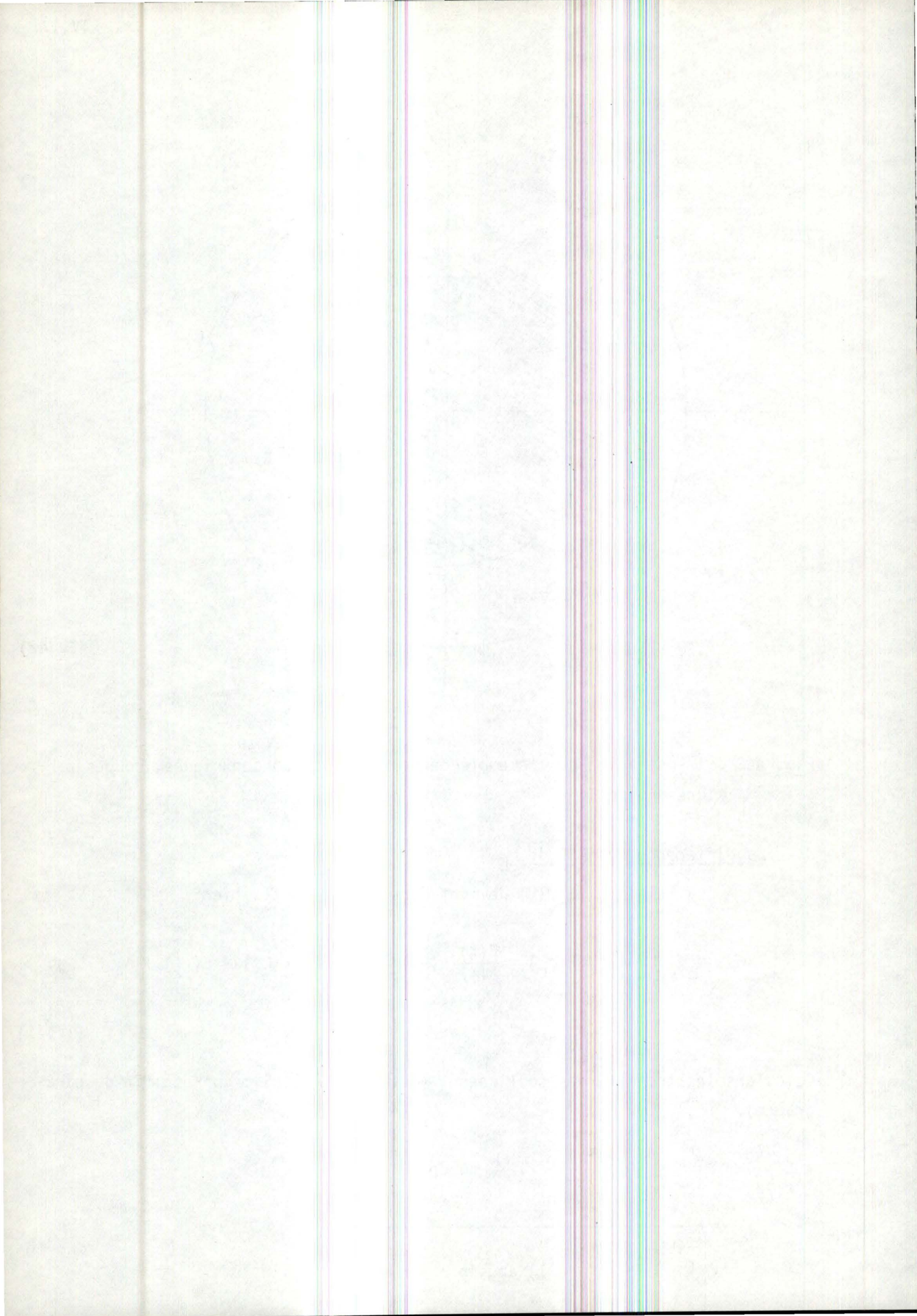
La relation (IV.35) devient dans ce cas particulier :

$$\text{MSE}_L(L_L) - \text{MSE}(L_L) = \frac{F(X)}{A(X)} \underline{E\left(\frac{L_Y^2}{L_X}\right)} - \frac{F(X)}{A(X)} A_A \underline{E(L_Y)} - \underline{E\left(\frac{L_Y^2}{2}\right)} + A_A \underline{E(L_L)}. \quad (\text{IV.41})$$

Calculons les trois termes soulignés : (détail de calcul : voir en fin de paragraphe).

$$\bullet E\left(\frac{L_Y^2}{L_X}\right) = \int_{-r}^r \int_0^\pi \frac{4(r^2 - p^2)}{2\sqrt{1-p^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta dp.$$

$$\boxed{E\left(\frac{L_Y^2}{L_X}\right) = (2r^2 - 1) \arcsin r + r \sqrt{1 - r^2}}.$$



$$\bullet E\left(\frac{L_Y}{L_X}\right) = \int_{-r}^r \int_0^\pi \frac{4(r^2 - p^2)}{4(1 - p^2)} \frac{1}{2\pi} d\theta dp.$$

$$E\left(\frac{L_Y}{L_X}\right) = \frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + r.$$

$$\bullet E(L_L) = \int_{-r}^r \int_0^\pi \frac{2\sqrt{r^2 - p^2}}{2\sqrt{1 - p^2}} \frac{1}{2\pi} d\theta dp.$$

$$E(L_L) = \pi \left\{ \frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right\}.$$

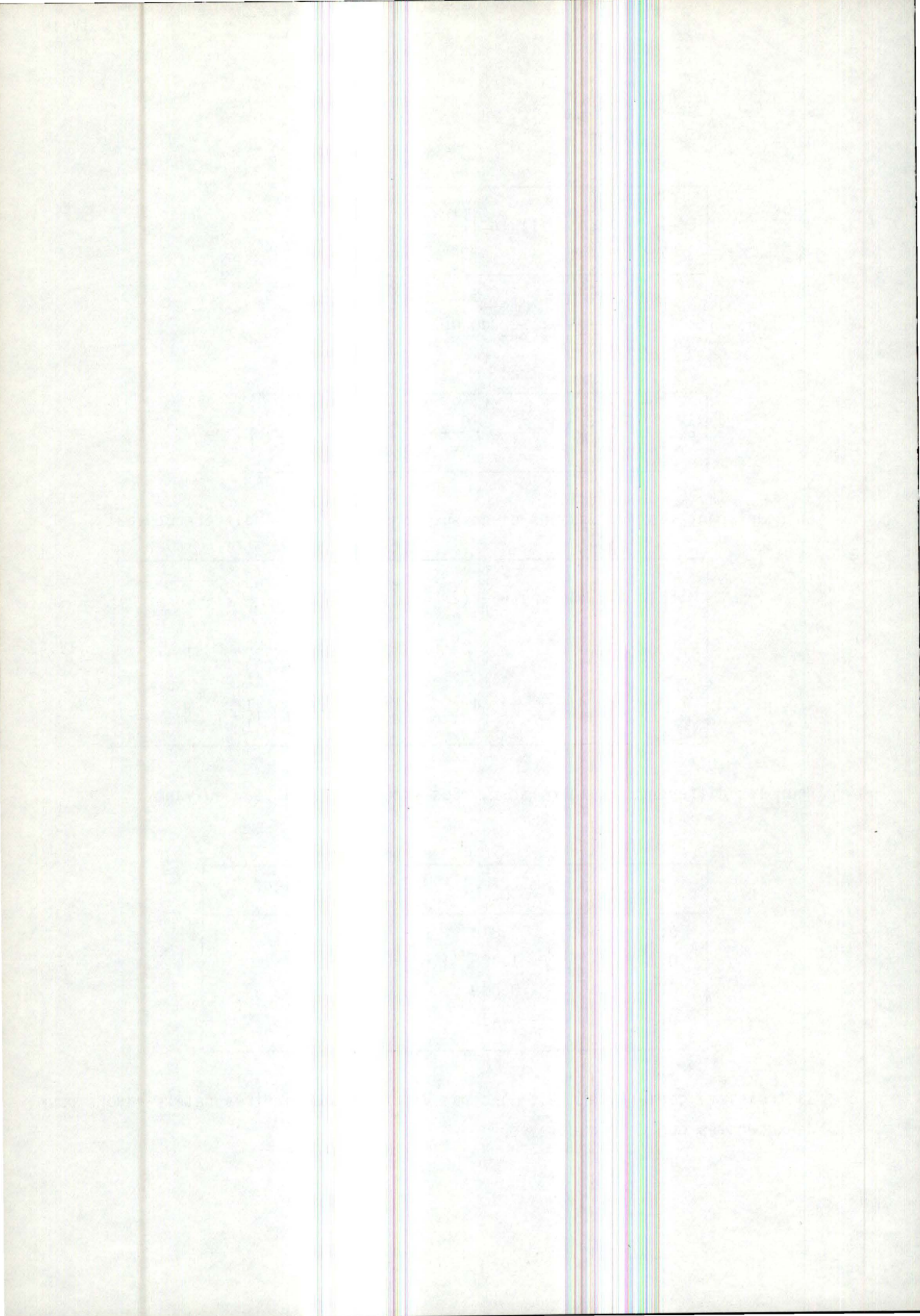
En remplaçant les expressions ci-dessus dans (IV.41), la différence vaut :

$$\begin{aligned} \text{MSE}_L(L_L) - \text{MSE}(L_L) &= \frac{2}{\pi} (2r^2 - 1) \arcsin r + \frac{2r}{\pi} \sqrt{1 - r^2} \\ &+ \pi r^6 \left\{ \frac{3}{64} + \frac{5}{128} r^2 + \frac{525}{(128)^2} r^4 + \dots \right\} \\ &- r^4 - r - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|. \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Pour les différentes valeurs de r , nous trouvons le tableau suivant :

r	$\text{MSE}_L(L_L) - \text{MSE}(L_L)$	signe
0.1	0.818 E - 04	+
0.2	- 1.489 E - 04	-
0.5	- 0.039	-
0.9	- 0.418	-

La troisième conjecture n'est donc pas vérifiée pour de très petits rayons pour deux cercles concentriques.



Détails de calcul :

(IV.42) :

$$E\left(\frac{L_Y^2}{L_X^2}\right) = 2 \int_0^r \int_0^\pi \frac{4(r^2 - p^2)}{2\sqrt{1-p^2}} \frac{1}{2\pi} d\theta dp$$

$$= 2 [r^2 \cdot \boxed{1} - \boxed{2}]$$

où :

$$\boxed{1} = \int_0^r \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$\boxed{2} = \int_0^r \frac{p^2 dp}{\sqrt{1-p^2}}$$

Avec les résultats dans la table de Dwight [2] nous obtenons :

$$\boxed{1} = \arcsin r.$$

$$\boxed{2} = \frac{-r\sqrt{1-r^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin r.$$

Dès lors :

$$E\left(\frac{L_Y^2}{L_X^2}\right) = (2r^2 - 1) \arcsin r + r\sqrt{1-r^2}.$$

(IV.43) :

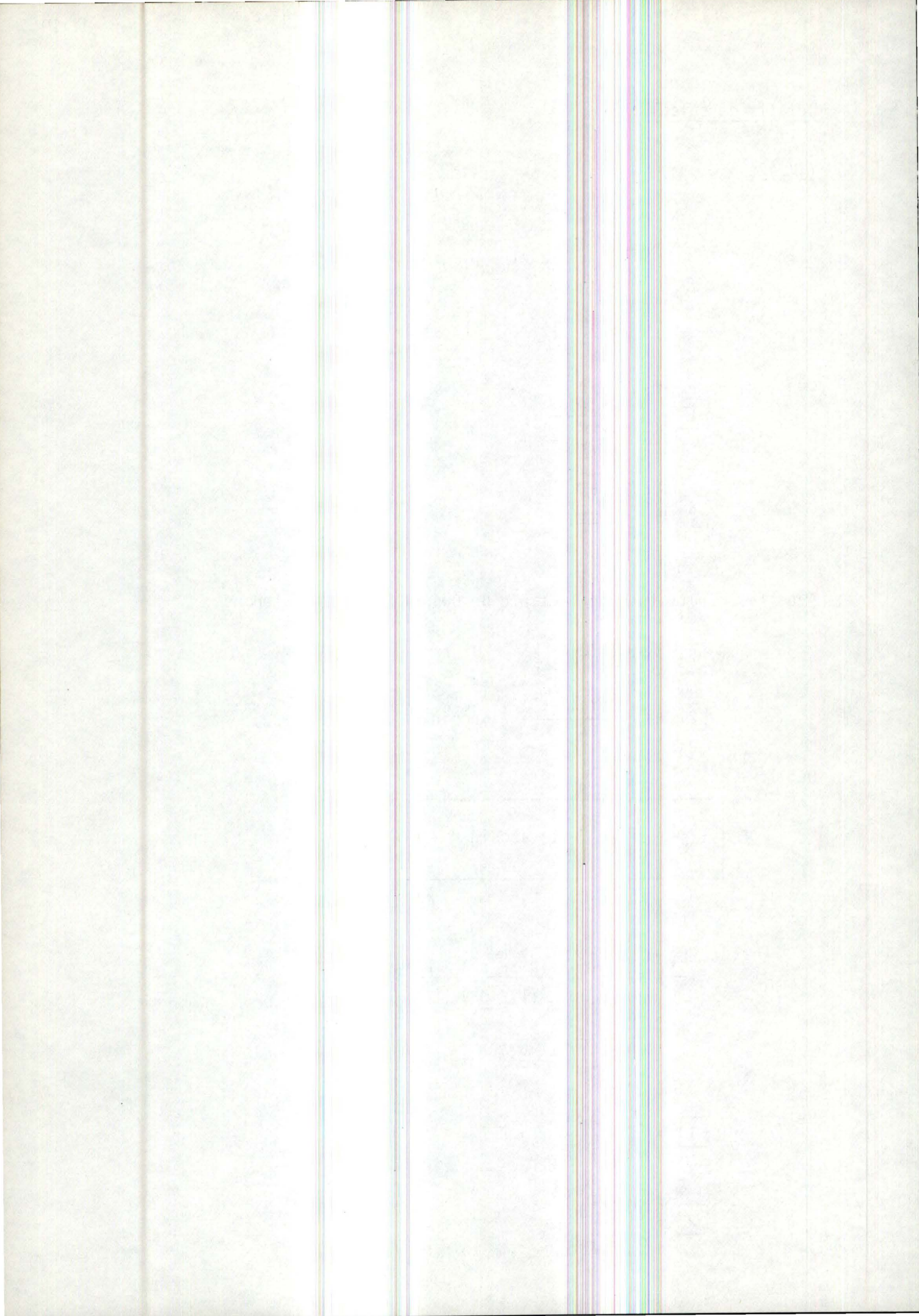
$$E\left(\frac{L_Y^2}{L_X^2}\right) = 2 \int_0^r \int_0^\pi \frac{(r^2 - p^2)}{(1-p^2)} \frac{1}{2\pi} d\theta dp$$

$$= r^2 \cdot \boxed{1} - \boxed{2}$$

où :

$$\boxed{1} = \int_0^r \frac{dp}{1-p^2}$$

$$\boxed{2} = \int_0^r \frac{p^2 dp}{1-p^2}$$



Les tables de Dwight [2] donnent les résultats de [1] et de [2] :

$$[1] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|.$$

$$[2] = -r + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|.$$

Donc :

$$E\left(\frac{L_Y}{L_X}\right) = \frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + r.$$

(IV.44) :

$$\begin{aligned} E(L_L) &= 2 \int_0^r \int_0^\Pi \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{\sqrt{1 - p^2}} \frac{1}{2\Pi} d\theta dp \\ &= \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{1 - p^2} dp, \end{aligned}$$

ou, par les tables de Dwight [2]:

$$E(L_L) = F\left(\frac{\Pi}{2}, r\right) - E\left(\frac{\Pi}{2}, r\right),$$

où

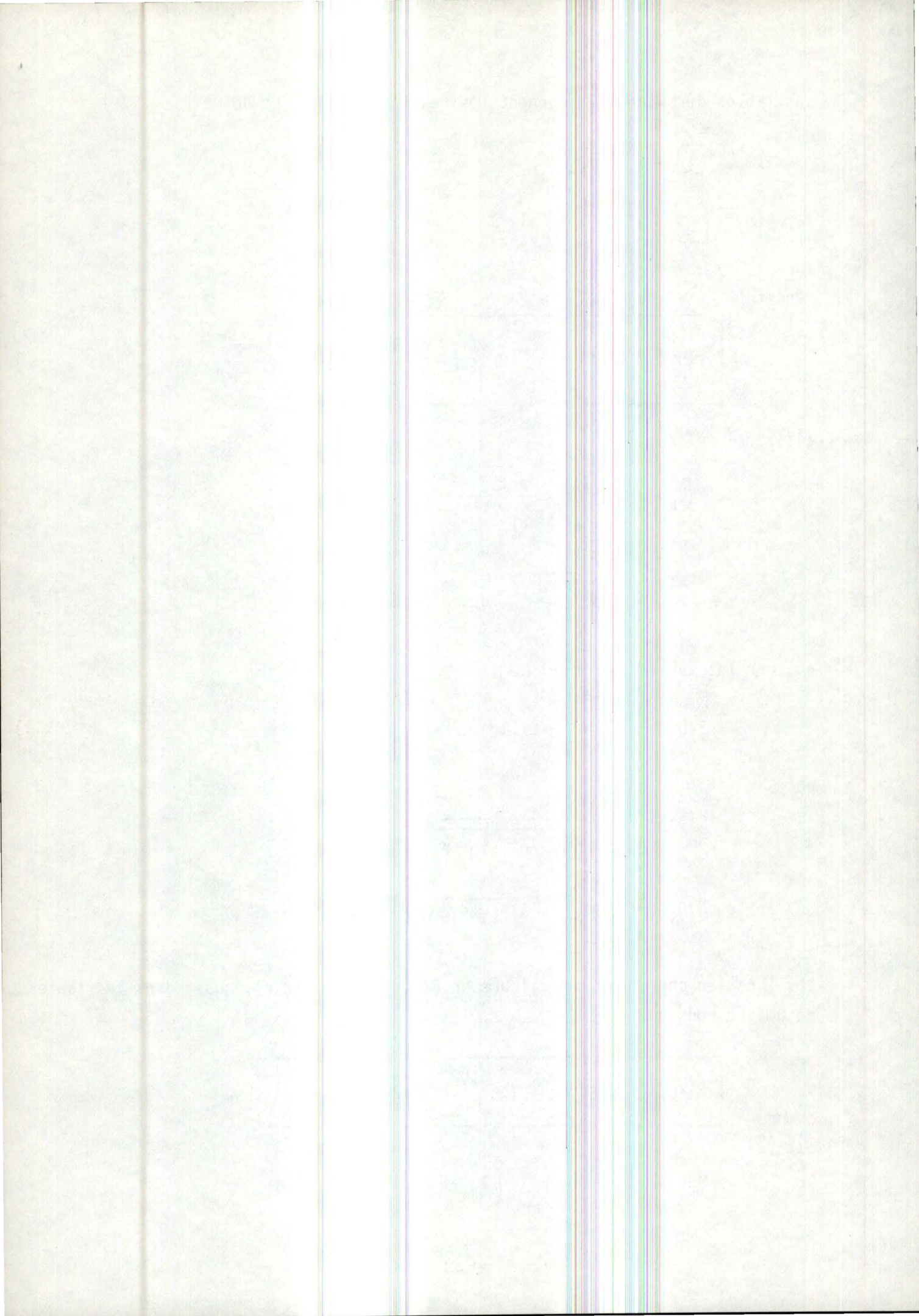
$$\begin{aligned} F\left(\frac{\Pi}{2}, r\right) &= \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi}} \\ E\left(\frac{\Pi}{2}, r\right) &= \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Dès lors, en cherchant les valeurs de $F\left(\frac{\Pi}{2}, r\right)$ et de $E\left(\frac{\Pi}{2}, r\right)$, aussi dans les tables de Dwight, nous obtenons :

$$E(L_L) = \Pi \left\{ \frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right\}.$$

(IV.42) :

$$MSE_L(L_L) - MSE(L_L) = [1] + [2] + [3] + [4] ;$$



où :

$$\boxed{1} = \frac{2}{\pi} (2r^2 - 1) \arcsin r + \frac{2r}{\pi} \sqrt{1 - r^2}.$$

$$\boxed{2} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2}.$$

$$\boxed{3} = -\frac{1}{2} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - r.$$

$$\boxed{4} = \frac{\pi r^2}{\pi} \cdot \pi \left\{ \frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right\}.$$

IV.3. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATIONS DU VOLUME DE Y INCLUS DANS X, A L'AIDE D'ESTIMATEURS NON PONDERES

a. Description de la situation

Reprenons le cas particulier décrit dans la première section de ce chapitre : soient dans l'espace E^3 , deux corps X et Y, où Y est inclus dans X et considérons des sections aléatoires planes à travers X.

Nous avons montré que A_A était, pour des sections non pondérées, un estimateur du rapport des volumes de Y et de X, dont le biais était donné par (IV.4)

$$E(A_A) = V_V - \frac{1}{E(A_X)} \text{cov}(A_X, A_A) \quad (\text{IV.43})$$

où l'estimateur A_A est le rapport l'aire de $(Y \cap T)$ sur l'aire de $(X \cap T)$.

Cherchons un estimateur non biaisé de V_V , basé sur des sections IUR. Nous le trouvons immédiatement par (IV.43).

En effet : (IV.43) implique, si nous décomposons la covariance en espérances mathématiques :

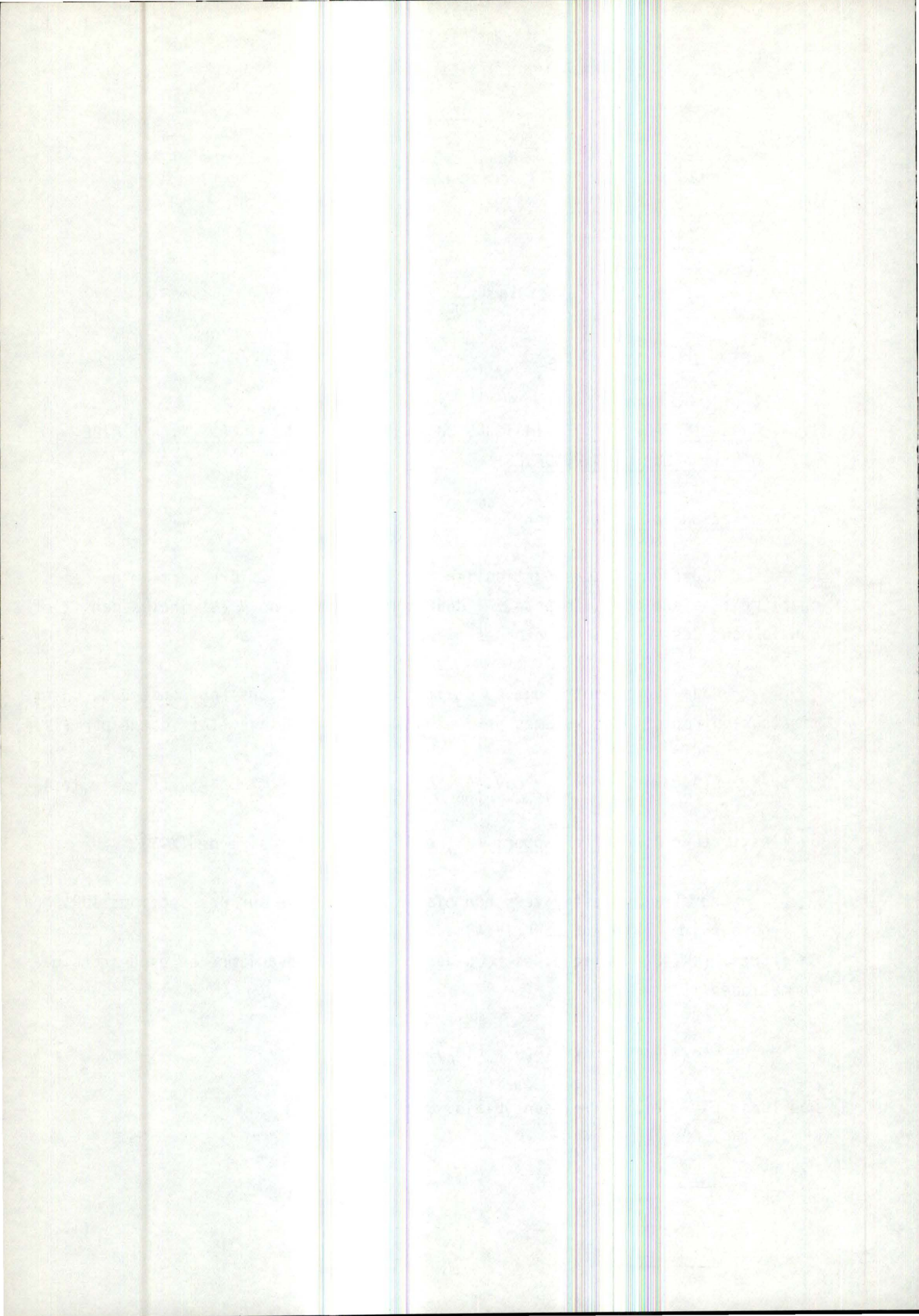
$$E(A_A) + \frac{1}{E(A_X)} \cdot E(A_Y) - E(A_A) = V_V.$$

Dès lors, $\frac{A_Y}{E(A_X)}$ estime V_V , sans biais.

Posons :

$$\boxed{\epsilon = \frac{A_Y}{E(A_X)}}.$$

(IV.44)



b. Comparaisons des MSE des estimateurs non pondérés A_A et ϵ

Analysons la seconde conjecture, dans ce cas particulier. Elle s'exprime par l'inégalité :

$$\text{MSE}(A_A) - \text{MSE}(\epsilon) \leq 0, \quad (\text{IV.45})$$

ce qui signifie que l'estimateur A_A est meilleur que ϵ .
Explicitons la relation (IV.45) : les deux MSE sont :

$$\text{MSE}(A_A) = E\left(\frac{A_Y^2}{A_X^2}\right) - 2 V_V E(A_A) + (V_V)^2 \quad (\text{IV.46})$$

et

$$\text{MSE}(\epsilon) = \frac{1}{E^2(A_X)} \text{var}(A_Y)$$

puisque ϵ est un estimateur non biaisé. La propriété fondamentale : $\text{var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$, nous donne :

$$\text{MSE}(\epsilon) = \frac{E(A_Y^2)}{E^2(A_X)} - \left[\frac{E(A_Y)}{E(A_X)}\right]^2. \quad (\text{IV.47})$$

Si nous remplaçons (IV.46) et (IV.47) dans l'expression (IV.45), nous déduisons que la différence des MSE est :

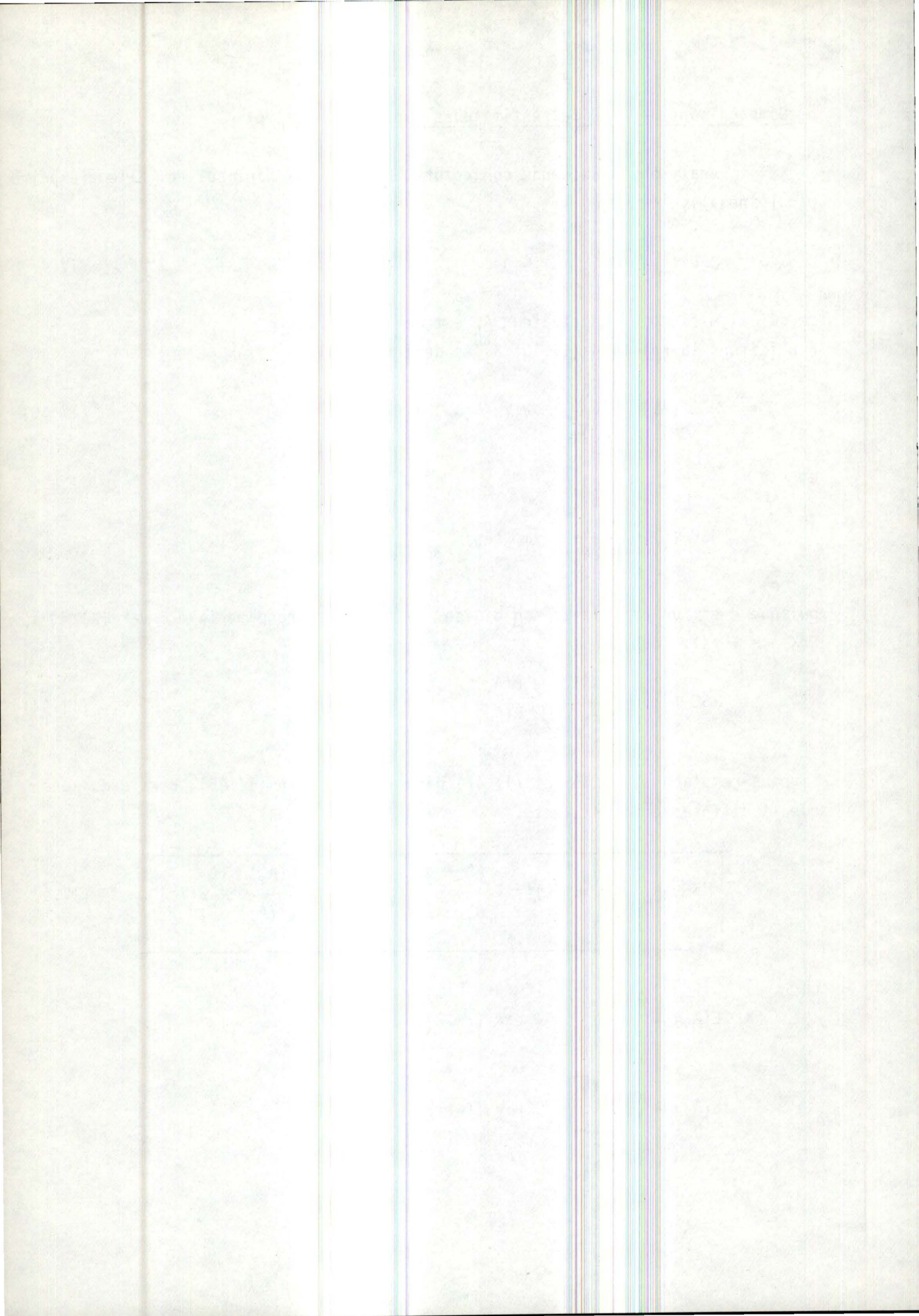
$$\text{MSE}(A_A) - \text{MSE}(\epsilon) = E\left(\frac{A_Y^2}{A_X^2}\right) - 2 V_V E(A_A) - \frac{E(A_Y^2)}{E^2(A_X)} + 2(V_V)^2 \quad (\text{IV.48})$$

car

$$E(A_Y) = \frac{V(Y)}{H(X)} \quad \text{par (IV.2),}$$

et

$$E(A_X) = \frac{V(X)}{H(X)} \quad \text{par (IV.1).}$$



c. Application : un anneau sphérique Y inclus dans une sphère X

Soit l'exemple décrit au paragraphe IV.1.d.. Nous avons obtenu les résultats suivants (voir IV.1.d.2.) :

$$E\left(\frac{A_Y^2}{A_X^2}\right) = \frac{(1-r^2)^2}{4} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 1 - \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2}, \quad (\text{IV.49})$$

$$E(A_A) = \frac{1}{2} (1-r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + (1-r). \quad (\text{IV.50})$$

et au paragraphe IV.1d.1. :

$$E(A_X) = \frac{2\pi}{3}, \quad (\text{IV.51})$$

$$V_V = (1-r^3). \quad (\text{IV.52})$$

La justification de l'égalité

$$E(A_Y^2) = 4\pi^2 \left(\frac{2}{15} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} \right) \quad (\text{IV.53})$$

se trouve à la fin de ce paragraphe.

Remplaçons les expressions ci-dessus dans (IV.48), nous obtenons :

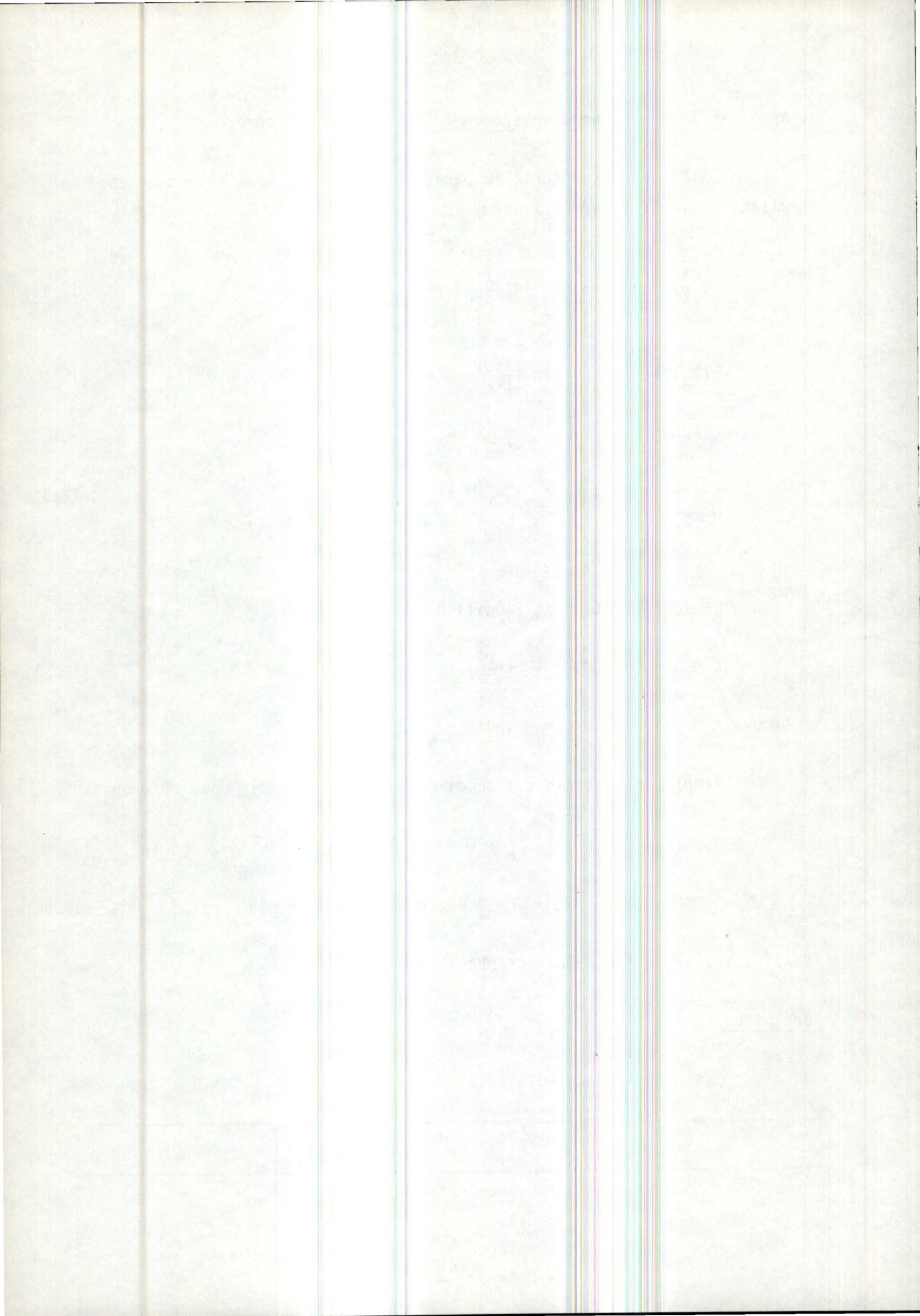
$$\begin{aligned} \text{MSE}(A_A) - \text{MSE}(\epsilon) = & -\frac{1}{5} + \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r^3 - 2r^4 - \frac{9}{5}r^5 + 2r^6 + \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \\ & \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}r^2 + r^3 + \frac{r^4}{4} - r^5 \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

(détails : voir en fin de paragraphe.)

Conclusion :

Suite au tableau suivant :

r	MSE (A _A) - MSE (ε)	signe
0.1	- 0.199	-
0.2	- 0.192	-
0.2	- 0.176	-
0.4	- 0.146	-



0.5	- 0.104	-
0.8	0.056	+
0.9	0.077	+

nous voyons que la seconde conjecture est contredite, car la différence des MSE est positive pour de grandes valeurs de r . Dans ce cas-ci, l'estimateur non biaisé ε est donc meilleur que A_A .

Détail de calcul :

(IV.53) :

$$\begin{aligned}
 E(A_Y^2) &= \int_0^r \Pi^2 (1-r^2)^2 dp + \int_r^1 \Pi^2 (1-p^2)^2 dp, \\
 &= \Pi^2 (1-r^2)^2 r + \Pi^2 \left[p - \frac{2}{3}p^3 + \frac{p^5}{5} \right]_r^1, \\
 &= \Pi^2 \left(r - 2r^3 + r^5 + \frac{8}{15} - r + \frac{2}{3}r^3 - \frac{r^5}{5} \right), \\
 &= \Pi^2 \left(\frac{8}{15} - \frac{4}{3}r^3 + \frac{4}{5}r^5 \right).
 \end{aligned}$$

(IV.54) :

$$\text{MSE}(A_A) - \text{MSE}(\varepsilon) = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}$$

où

$$\boxed{1} = \frac{(1-r^2)^2}{4} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 1 - \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2},$$

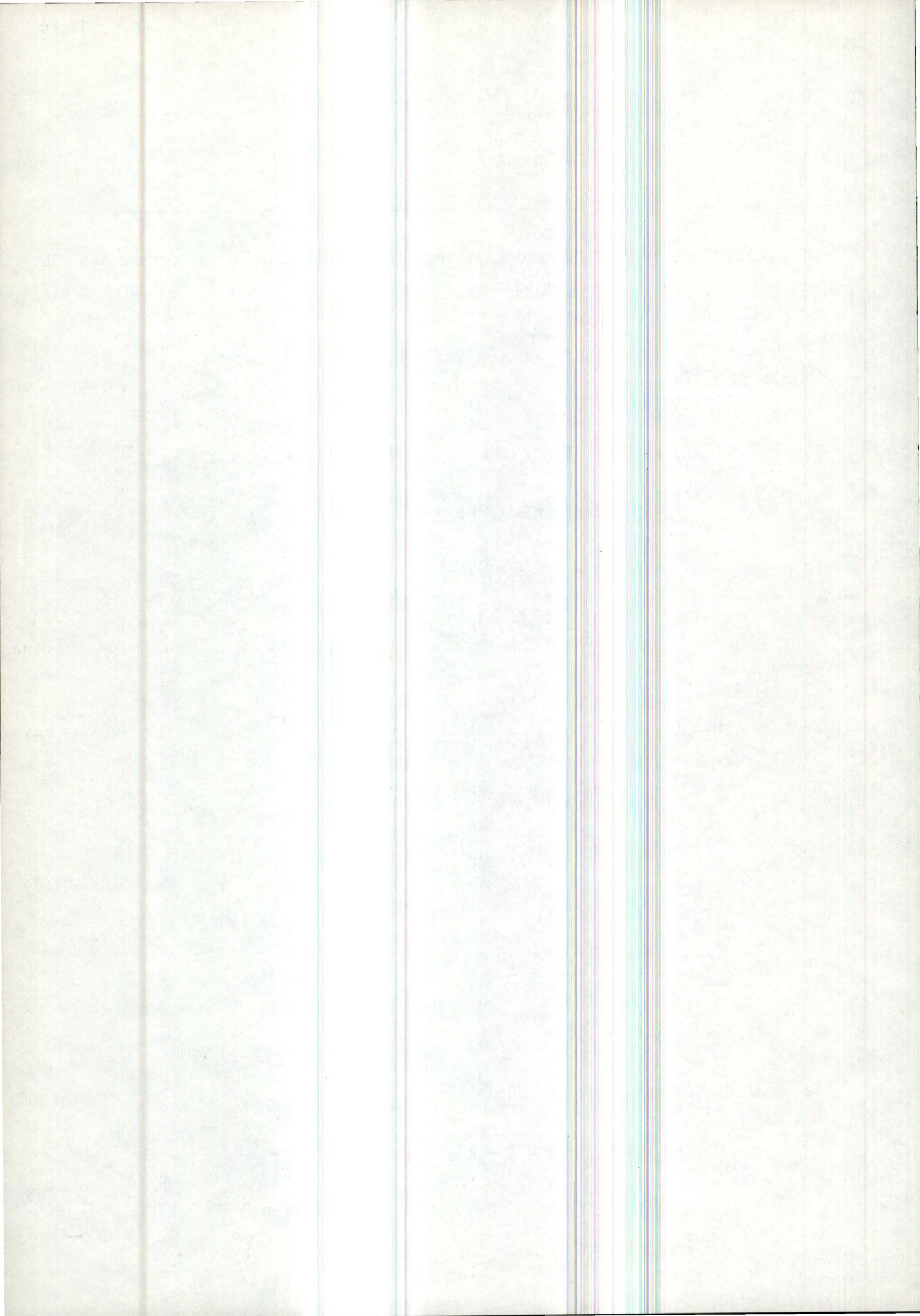
$$\boxed{2} = - (1-r^3)(1-r^2) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - 2(1-r^3)(1-r),$$

$$\boxed{3} = -9 \left(\frac{2}{15} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} \right),$$

$$\boxed{4} = 2(1-r^3)^2.$$

la somme de ces quatre termes donne :

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}(A_A) - \text{MSE}(\varepsilon) &= 1 - 2 - \frac{18}{15} + 2 - \frac{r}{2} + 2r - \frac{r^3}{2} + 2r^3 + 3r^3 - 4r^3 - 2r^5 \\
 &\quad - \frac{9}{5}r^5 + 2r^6 + \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} - 1 + r^2 + r^3 - r^5 \right].
 \end{aligned}$$



IV.4. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DE LA SURFACE DE Y INCLUS DANS X, A L'AIDE D'ESTIMATEURS NON BIAISES ET PONDERES

a. Description du problème et expression de la conjecture 4

Plaçons-nous dans le même cadre qu'au chapitre I. Nous considérons donc, dans l'espace E^3 un corps Y inclus dans le domaine X . Nous envisageons, à nouveau, des sections aléatoires planes T à travers X .

Cherchons deux estimateurs non biaisés de $S(Y)$ pour des sections IUR. Remarquons qu'afin de rendre les comparaisons possibles, nous n'estimons plus le rapport aléatoire S_V ou V_V , mais bien $S(Y)$. La relation (I.20) nous donne immédiatement un premier estimateur sans biais de $S(Y)$:

$$E_A \left(\frac{4}{\Pi} \cdot V(X) \cdot B_A \right) = S(Y) \quad (\text{IV.55})$$

Un second estimateur de $S(Y)$ non biaisé et pondéré est $S(X) \cdot B_B$, où B_B est le rapport des longueurs des deux courbes $(\delta Y \cap T)$ et $(\delta X \cap T)$, δY et δX étant respectivement les frontières de Y et de X . En effet, nous avons par (I.13)

$$E(B_Y) = \frac{\Pi}{4} \frac{S(Y)}{H(X)}. \quad (\text{IV.56})$$

Notons que, puisque $E(B_X)$ est un cas particulier de (IV.56), où Y est le sous-ensemble X de X , nous avons :

$$E(B_X) = \frac{\Pi}{4} \frac{S(X)}{H(X)}. \quad (\text{IV.57})$$

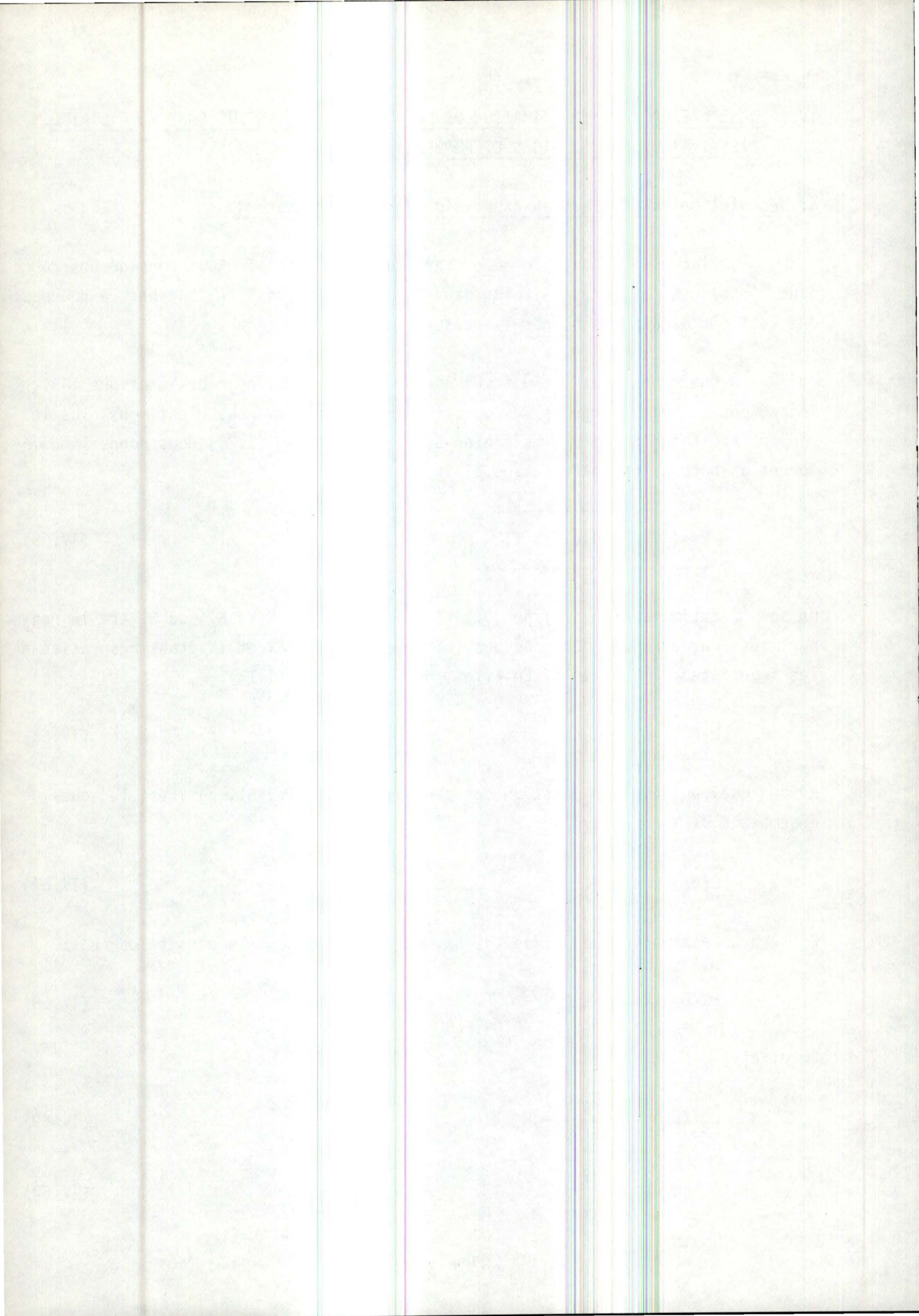
B_B sera un estimateur non biaisé de S_S , si nous pondérons la densité par B_X :

$$E_B(B_B) = S_S. \quad (\text{IV.58})$$

En effet :

$$E_B(B_B) = \frac{E(B_B \cdot B_X)}{E(B_X)}, \quad (\text{IV.59})$$

$$= \frac{E(B_Y)}{E(B_X)}, \quad (\text{IV.60})$$



et donc

$$E_B (S(X) \cdot B_B) = S(Y). \quad (IV.61)$$

Quel est le meilleur de ces deux estimateurs (IV.55) et (IV.61), si nous admettons toujours la MSE minimale comme critère de sélection. La quatrième conjecture prévoit que la meilleure pondération est obtenue par A_X . Autrement dit, la différence

$$MSE_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) - MSE_B (S(X) \cdot B_B) \quad (IV.62)$$

devrait être négative ! Analysons cette différence dans le cas particulier d'un anneau sphérique Y inclus dans une sphère X . (cet exemple a déjà été traité dans la section IV.1.)

Explicitons (IV.62) :

$$MSE_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) - MSE_B (S(X) \cdot B_B) = \text{var}_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) - \text{var}_B (S(X) \cdot B_B) \quad (IV.63)$$

car ces deux estimateurs sont non biaisés.

Par la décomposition de la variance en espérances mathématiques, nous obtenons :

$$\text{var}_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) = \left[\frac{4}{\pi} V(X) \right]^2 \cdot \frac{E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right)}{E(A_X)} - S^2(Y),$$

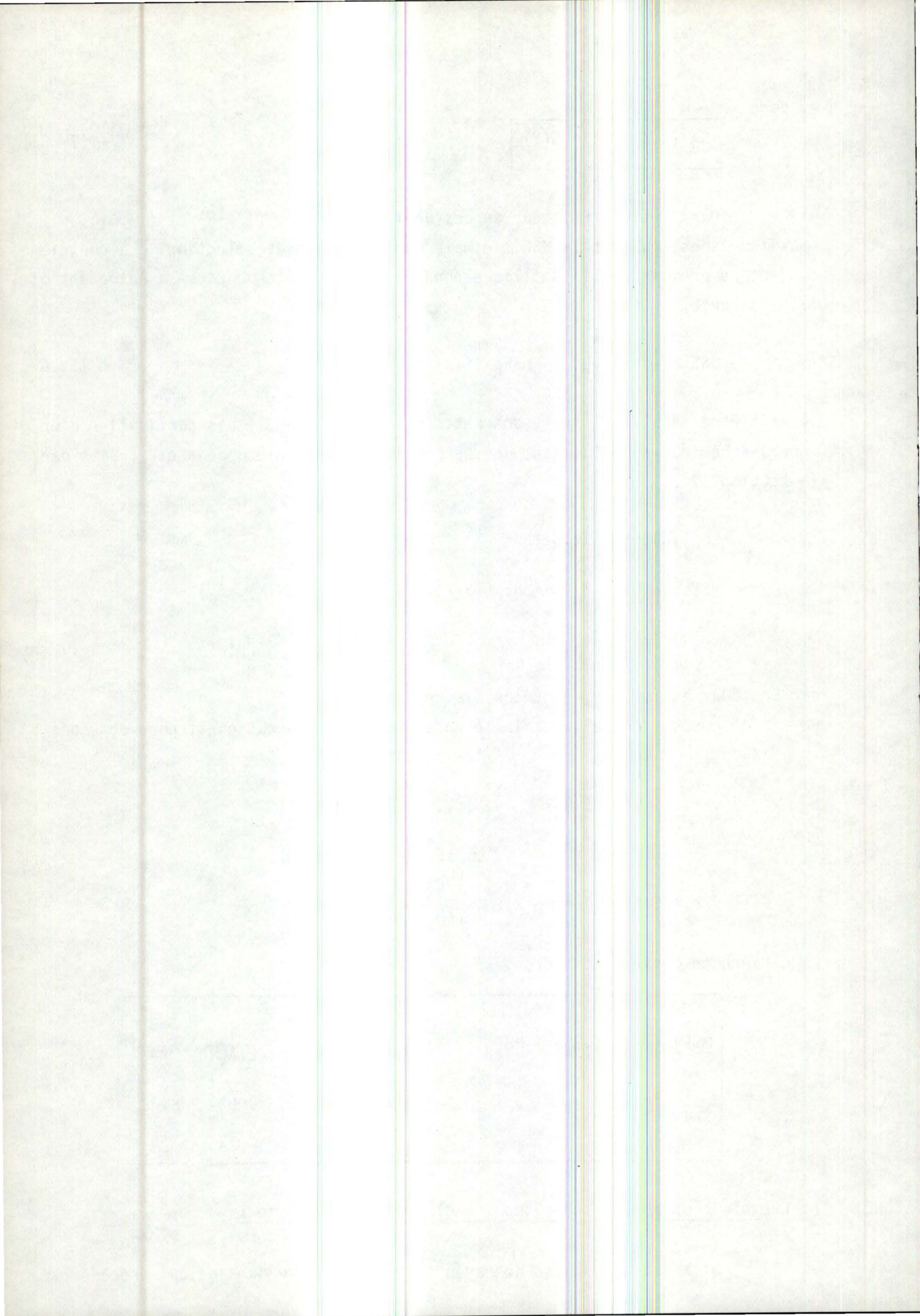
$$\text{var}_B (S(X) \cdot B_B) = [S(X)]^2 \cdot \frac{E\left(\frac{B_Y^2}{B_X}\right)}{E(B_X)} - S^2(Y).$$

La différence devient dès lors :

$$MSE_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) - MSE_B (S(X) \cdot B_B) = \left[\frac{4}{\pi} V(X) \right]^2 \cdot \frac{1}{E(A_X)} \cdot E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) - \frac{[S(X)]^2}{E(B_X)} \cdot E\left(\frac{B_Y^2}{B_X}\right). \quad (IV.64)$$

b. Exemple : un anneau sphérique Y inclus dans une sphère X

Si X est une sphère de rayon 1, nous avons vu dans ce qui précède :



$$V(X) = \frac{4}{3} \Pi, \quad (IV.65)$$

$$E(A_X) = \frac{2\Pi}{3}, \quad \text{par (IV.16)}, \quad (IV.66)$$

$$S(X) = 4\Pi. \quad (IV.67)$$

La relation (IV.57) implique :

$$E(B_X) = \frac{\Pi^2}{2}. \quad (IV.68)$$

Pour toutes les expressions où intervient B_Y , il faut envisager deux cas, selon la position de T. (voir figure 7 dans la section IV.1.d.) Si la coordonnée p est telle que $0 \leq p \leq r$, T coupe la sphère intérieure X'. Dès lors, la courbe $(\delta Y \cap T)$ est formée de deux cercles concentriques de centre O_T et de rayon r_T et R_T . Si $r \leq p \leq 1$, T ne coupe pas X' et $(\delta Y \cap T)$ ne représente plus qu'un cercle de centre O_T et de rayon R_T . La longueur de $(\delta Y \cap T)$ sera donc :

$$B_Y = \begin{cases} 2\Pi (\sqrt{1-p^2} + \sqrt{r^2-p^2}) & \text{si } 0 \leq |p| \leq r \\ 2\Pi \sqrt{1-p^2} & \text{si } r \leq |p| \leq 1 \end{cases} \quad (IV.69)$$

Le détail du calcul des deux expressions suivantes est à la fin de ce paragraphe.

$$E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) = 4\Pi (1+r) + 2\Pi (r^2-1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 8\Pi^2 \left(\frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right). \quad (IV.70)$$

$$E\left(\frac{B_Y^2}{B_X}\right) = \Pi^2 \left(\frac{1}{2} + r^2 \right) + \Pi r \sqrt{1-r^2} + (2r^2 - 1) \Pi \arcsin r. \quad (IV.71)$$

Grâce aux relations ci-dessus (IV.64) peut s'écrire de la manière suivante (détail en fin de paragraphe) :

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}_A \left(\frac{4}{\Pi} V(X) \cdot B_A \right) - \text{MSE}_B (S(X) \cdot B_B) &= 32 \left[\frac{16}{3} (1+r) + \right. \\
 &\frac{8}{3} (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + \frac{32}{3} \Pi \left(\frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right) \\
 &\left. - \Pi^2 \left(\frac{1}{2} + r^2 \right) - \Pi r \sqrt{1-r^2} - (2r^2 - 1) \Pi \arcsin r. \right.
 \end{aligned}$$

(IV.72)

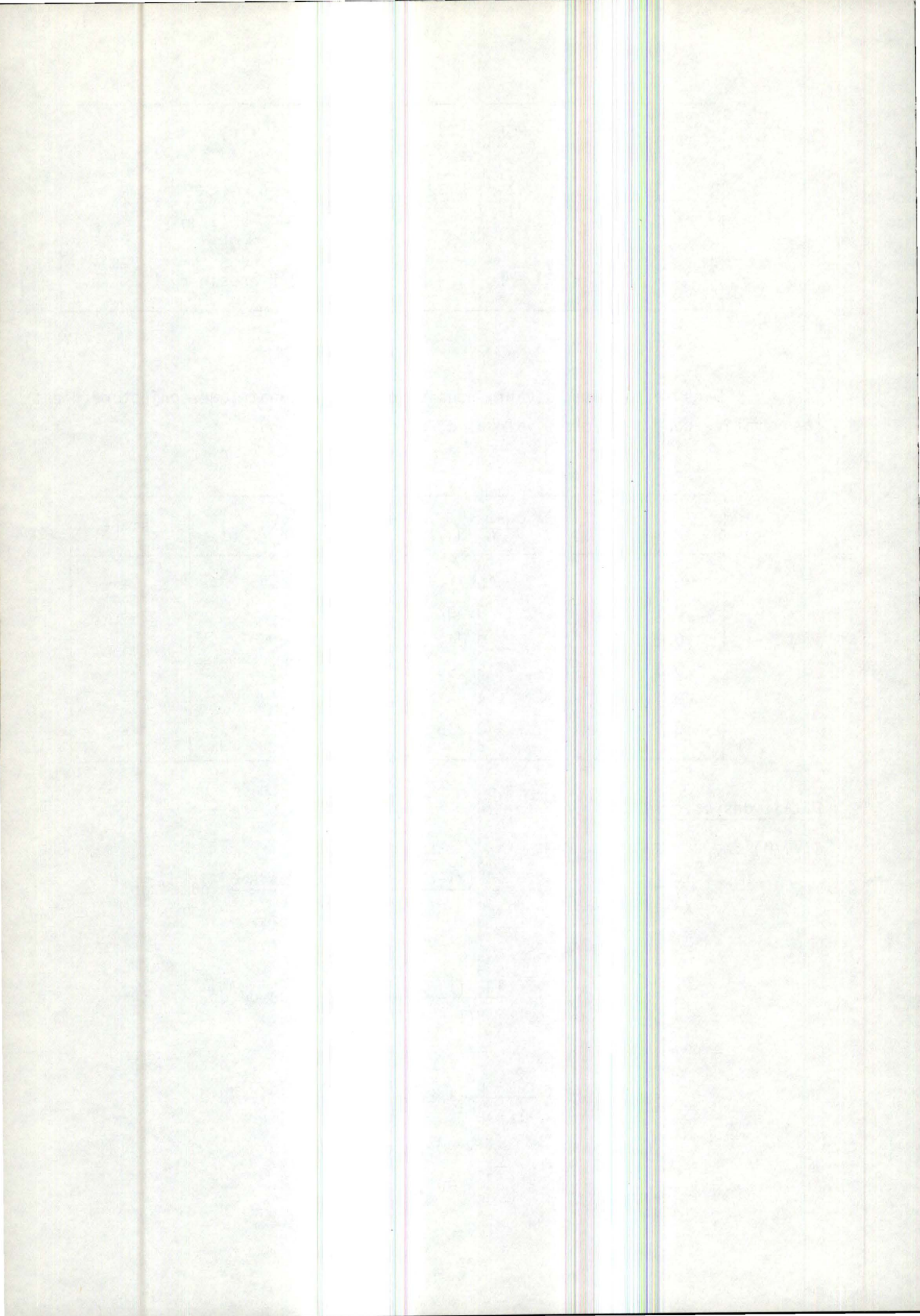
Dans le tableau suivant, nous voyons que la quatrième conjecture n'est pas vérifiée pour de petites valeurs de r , dans ce cas-ci.

r	$\text{MSE}_A \left(\frac{4}{\Pi} V(X) \cdot B_A \right) - \text{MSE}_B (S(X) \cdot B_B)$	signe
0.01	10.711	+
0.1	9.597	+
0.2	0.044	+
0.3	- 15.755	-
0.5	- 114.993	-
0.9	- 140.236	-

Détail des calculs :

(IV.70) :

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) &= 2 \int_0^r \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{4\Pi^2 (\sqrt{1-p^2} + \sqrt{r^2-p^2})^2}{\Pi(1-p^2)} \cdot \frac{\sin \theta}{4\Pi} d\theta d\phi dp \\
 &+ 2 \int_r^1 \int_0^{2\Pi} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{4\Pi^2 (1-p^2)}{\Pi(1-p^2)} \cdot \frac{\sin \theta}{4\Pi} d\theta d\phi dp, \\
 &= 4\Pi \int_0^r \left(1 + \frac{r^2 - p^2}{1-p^2} + 2\sqrt{\frac{r^2 - p^2}{1-p^2}} \right) dp + \int_r^1 4\Pi dp, \\
 &= 4\Pi r + \boxed{1} + \boxed{2} + 4\Pi (1-r).
 \end{aligned}$$



Le calcul de (I.38) au premier chapitre donne le résultat suivant :

$$\boxed{1} = 2\pi (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + 4\pi r,$$

et le calcul (IV.44) de la section IV.2.d., l'expression :

$$\boxed{2} = 8\pi^2 \left(\frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right).$$

Et nous obtenons :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{B_Y^2}{A_X}\right) &= 4\pi (1+r) + 2\pi (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \\ &+ 8\pi^2 \left(\frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right). \end{aligned}$$

(IV.71) :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{B_Y^2}{B_X}\right) &= 2 \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi^2 (\sqrt{1-p^2} + \sqrt{r^2-p^2})^2}{2\pi \sqrt{1-p^2}} \cdot \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\phi dp \\ &+ 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi^2 (1-p^2)}{2\pi \sqrt{1-p^2}} \cdot \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\phi dp, \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-p^2} dp + 2\pi \int_0^r \frac{r^2-p^2}{\sqrt{1-p^2}} dp + 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-p^2} dp, \\ &= \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}. \end{aligned}$$

Dans les tables de Dwight, nous trouvons le résultat de $\boxed{1}$ et $\boxed{3}$:

$$\boxed{1} = 2\pi \left[\frac{p \sqrt{1-p^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin p \right]_0^1$$

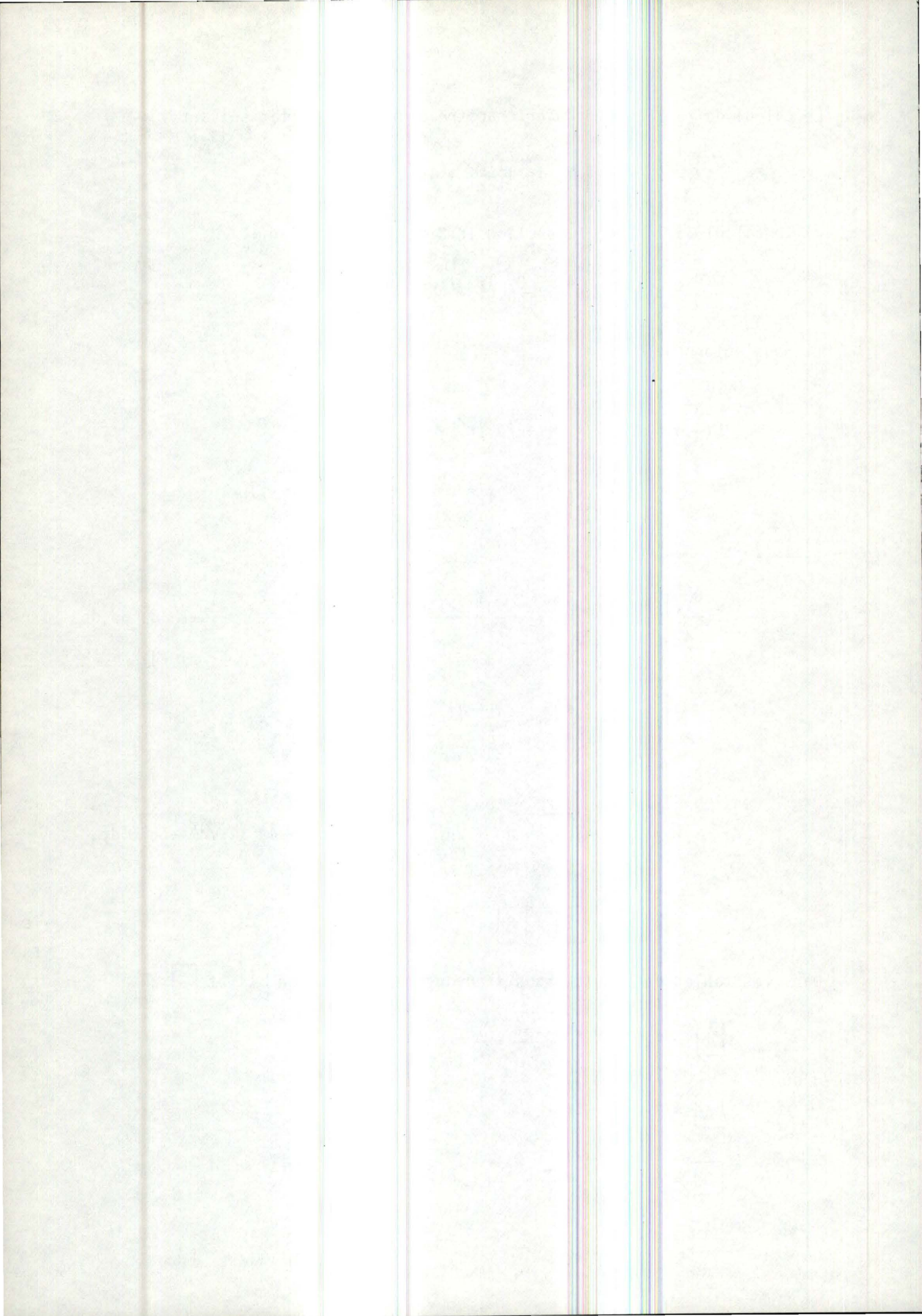
d'où

$$\boxed{1} = \frac{\pi^2}{2}$$

et

$$\boxed{3} = 4\pi \left[\frac{p \sqrt{r^2-p^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{p}{r} \right]_0^r$$

$$\boxed{3} = \pi^2 r^2.$$



Par le calcul de (IV.42) dans la section IV.2.d., nous obtenons que :

$$\boxed{2} = (2r^2 - 1) \pi \arcsin r + \pi r \sqrt{1 - r^2}.$$

La somme de $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ donne bien la relation (IV.71).

(IV.72) :

$$\begin{aligned} \text{MSE}_A \left(\frac{4}{\pi} V(X) \cdot B_A \right) - \text{MSE}_B \left(S(X) \cdot B_B \right) = \\ \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{16}{9} \pi^2 \cdot \frac{3}{2\pi} \cdot 4\pi (1+r) + \frac{8 \cdot 16}{3\pi} 2\pi (r^2 - 1) \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \\ + \frac{8 \cdot 16}{3\pi} 8\pi^2 \left(\frac{3}{64} r^4 + \frac{5}{128} r^6 + \frac{525}{(128)^2} r^8 + \dots \right) \\ - \frac{16\pi^2 \cdot 2}{\pi^2} \cdot \pi^2 \left(\frac{1}{2} + r^2 \right) - 32\pi r \sqrt{1 - r^2} - 32 (2r^2 - 1) \pi \arcsin r. \end{aligned}$$

Si nous simplifions la relation et si nous mettons 32 en évidence, nous obtenons immédiatement (IV.72).

IV.5. DANS L'ESPACE E^3 : ESTIMATION DU VOLUME Y INCLUS DANS X, AU MOYEN D'ESTIMATEURS NON BIAISES

a. Lien entre les conjectures 2, 3 et 4

Replaçons-nous dans la situation décrite dans la section IV.1, à savoir que, dans E^3 , nous considérons un corps Y inclus dans un domaine X. Cherchons, d'après les conjectures 2, 3 et 4, le meilleur estimateur. Dans la situation envisagée ici, ces trois conjectures nous conduisent, de l'estimateur sans biais immédiat $\epsilon = \frac{A_Y}{E(A_X)}$ à l'estimateur A_A , le rapport des surfaces, qui doit être pris par rapport aux sections pondérées par A_X . Puisque ces conjectures prévoient trois améliorations successives, la différence entre les risques quadratiques moyens du dernier estimateur et de ϵ devrait être négative. Cependant, il nous faut noter que ceci reste possible même si l'une des conjectures intermédiaires n'est pas vérifiée. Il peut donc en résulter une nouvelle conjecture plus faible que la somme des trois précédentes, qui exprimerait simplement que

$$\text{MSE}_A (A_A) - \text{MSE} (\epsilon) \leq 0.$$

Nous verrons dans l'exemple suivant que même cette inégalité n'est pas toujours vérifiée.

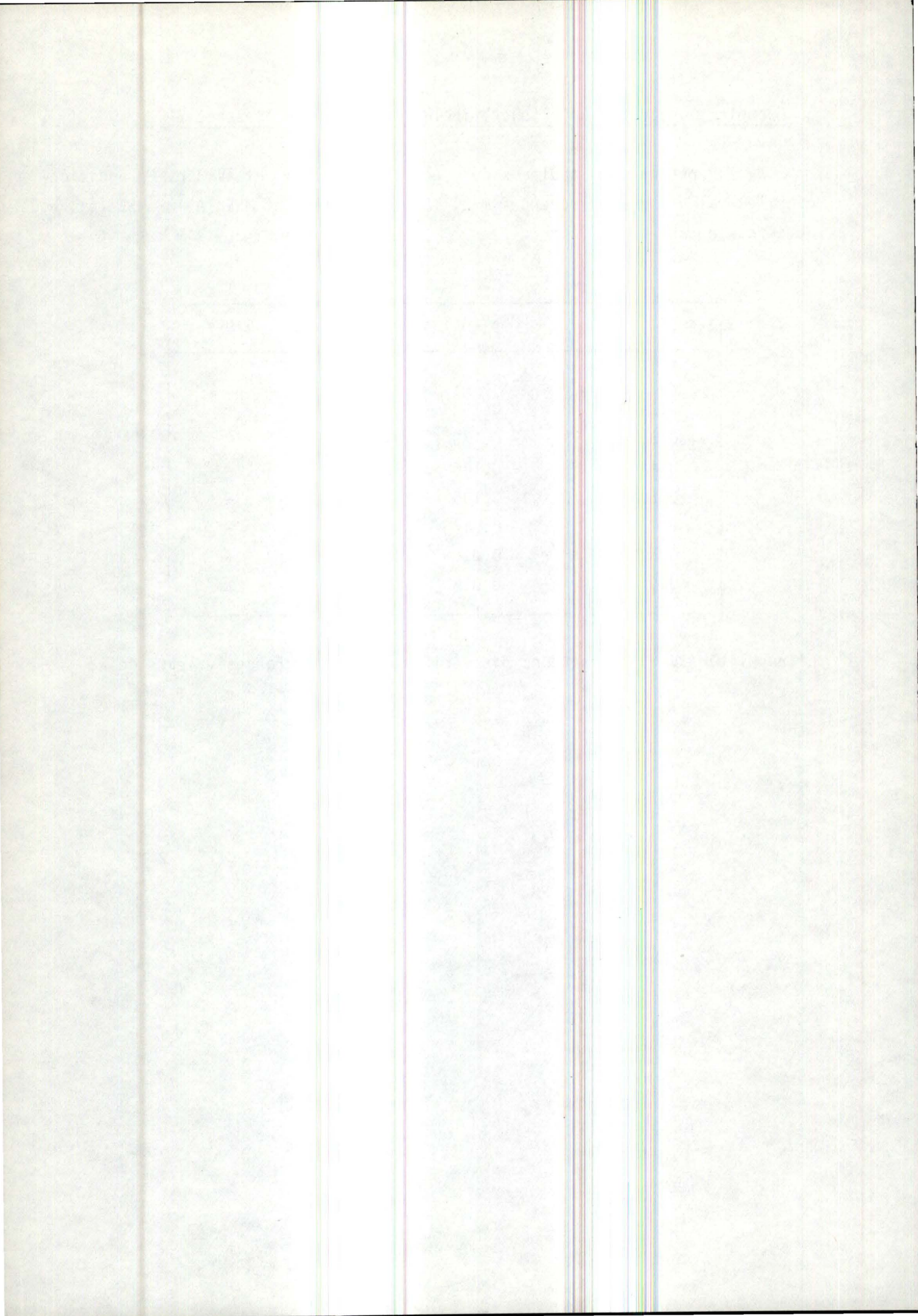
b. Exemple : un anneau sphérique Y inclus dans X , dans l'espace E^3

Reprenons les tableaux des sections : IV.1.d. et IV.3.c. En additionnant les valeurs des différences $MSE_A(A_A) - MSE(\epsilon)$ et $MSE(A_A) - MSE(\epsilon)$, nous obtenons le tableau suivant :

r	$MSE_A(A_A) - MSE(\epsilon)$	signe
0.1	- 0.199	-
0.2	- 0.192	-
0.3	- 0.175	-
0.4	- 0.146	-
0.5	- 0.105	-
0.7	- 0.014	-
0.8	0.016	+
0.9	0.018	+

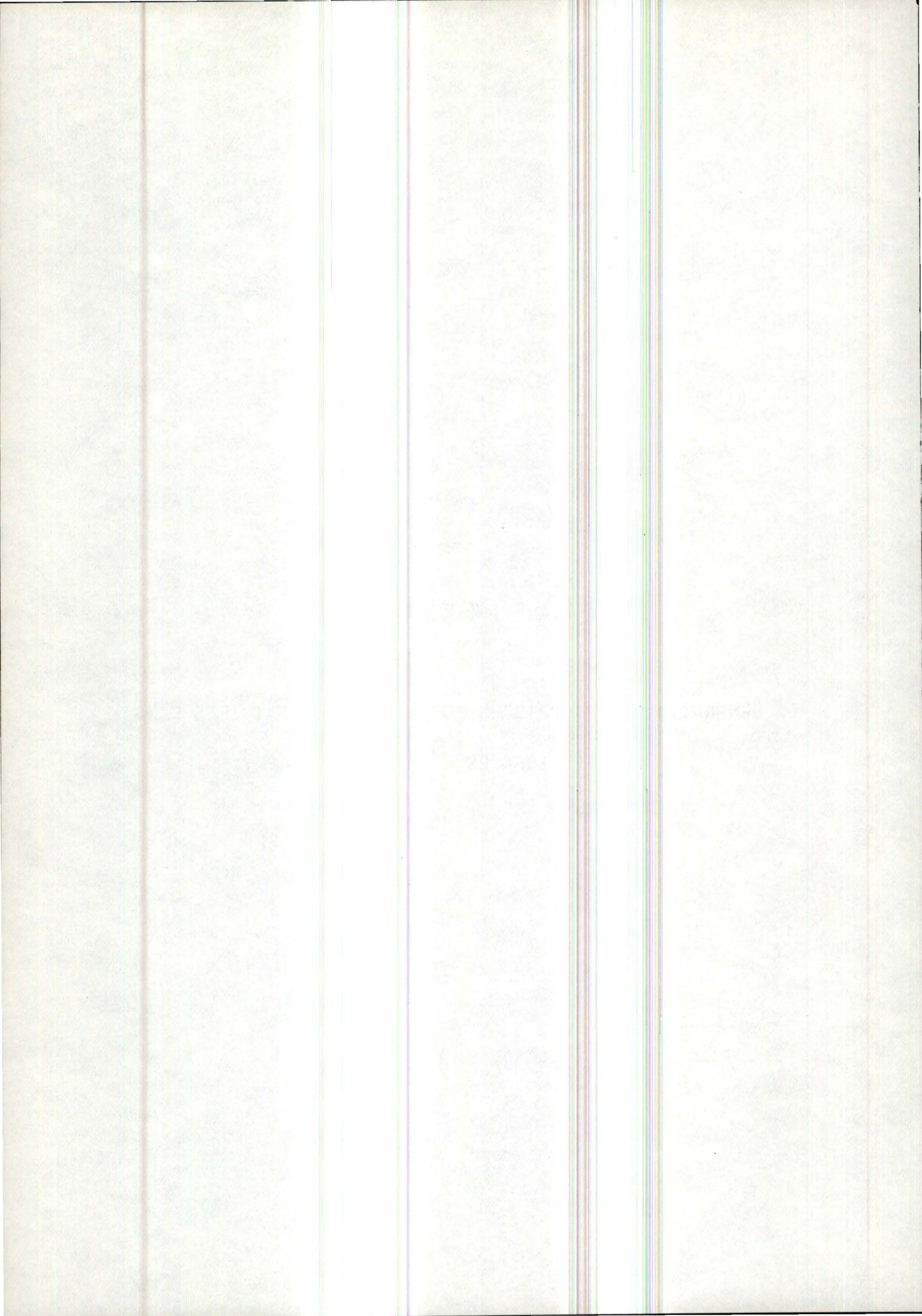
L'inégalité (IV.73) n'est donc pas vérifiée pour les grandes valeurs de r .

°
° °



CHAPITRE V

GENERATION ET PROPRIETES DES SECTIONS ALEATOIRES DANS
LES ESPACES E^3 ET E^2



CHAPITRE V

GENERATION ET PROPRIETES DES SECTIONS ALEATOIRES DANS LES ESPACES E^3 ET E^2

V.0. INTRODUCTION

C'est la génération en pratique des variétés linéaires, pondérées ou non, ainsi que les relations entre elles qui intéressent particulièrement les stéréologistes.

Nous allons déduire de la propriété 2 (ii) du chapitre II une méthode de génération de sections aléatoires pondérées. Il faudra lui apporter quelques modifications pour qu'elle devienne réellement utilisable en pratique. Ensuite, nous verrons qu'il découle de la propriété 2 (i) du second chapitre, certaines relations liant des variétés de dimensions différentes.

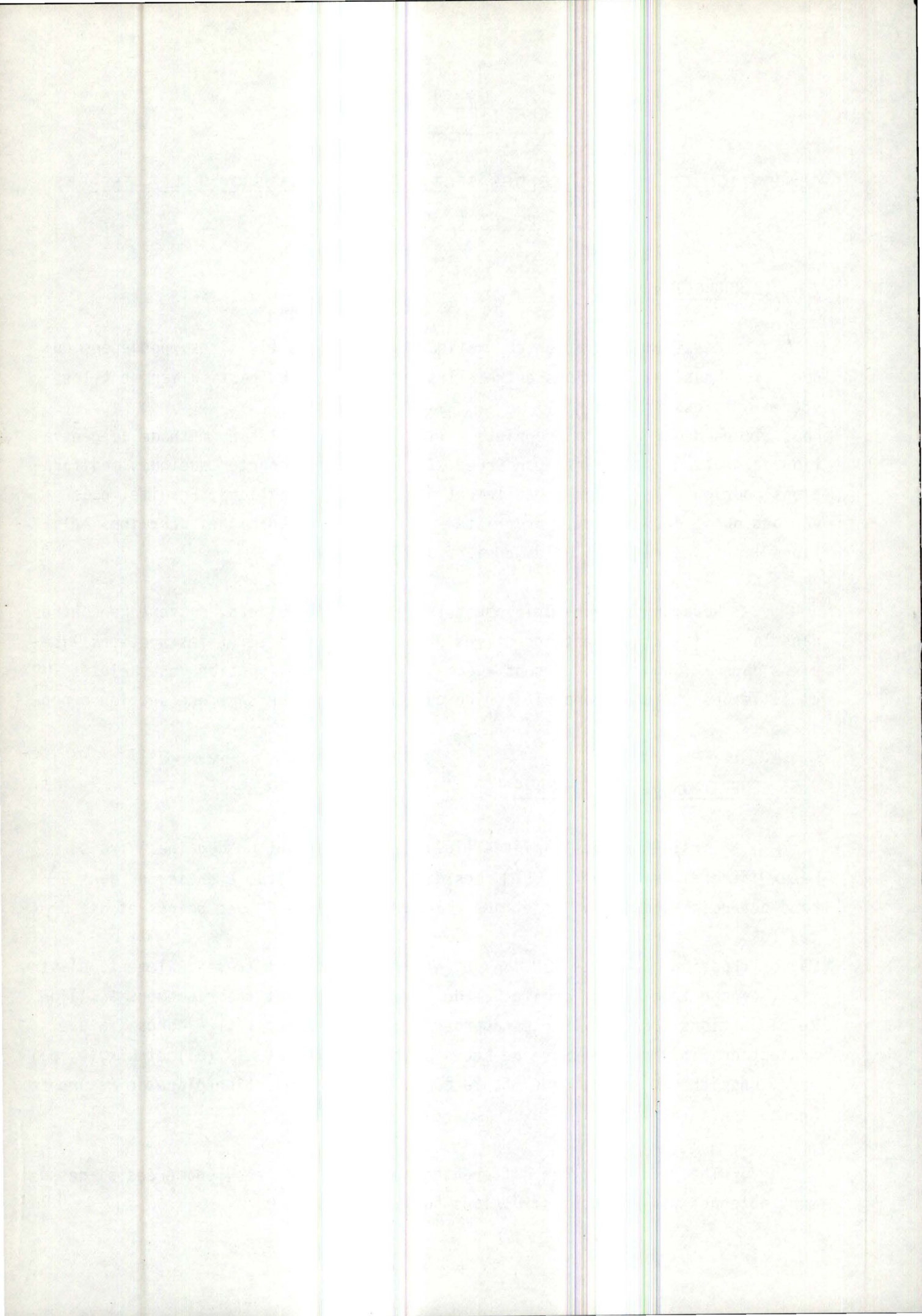
Nous envisageons uniquement trois cas particuliers, souvent rencontrés dans la réalité : des sections planes et linéaires dans E^3 et des sections linéaires dans E^2 . Nous expliquerons successivement la construction des variétés IUR et celle des variétés pondérées (bien qu'une section IUR soit une section o-pondérée !).

V.1. GENERATION DE SECTIONS IUR

Considérons des variétés linéaires IUR coupant un domaine à trois [deux] dimensions X dans E^3 [E^2]. Les différentes variétés à envisager dans E^3 sont des points, des droites et des plans IUR, et dans E^2 des points et des droites IUR.

La construction de points IUR dans E^3 et dans E^2 se fait très facilement. D'autre part, la construction de droites et de plans IUR se fait théoriquement à l'aide de projections sur des variétés appropriées : dans E^2 et E^3 , le corps X a une projection linéaire de mesure de Lebesgue respectivement $L(X_1(\theta))$ et $L(X_1(\theta, \phi))$ (cfr. chapitre IV et I). Dans E^3 , le corps X a une projection plane de mesure de Lebesgue $A(X_2(\theta, \phi))$.

Théoriquement, ces différentes variétés linéaires, énumérées ci-dessus, sont obtenues par les constructions suivantes :



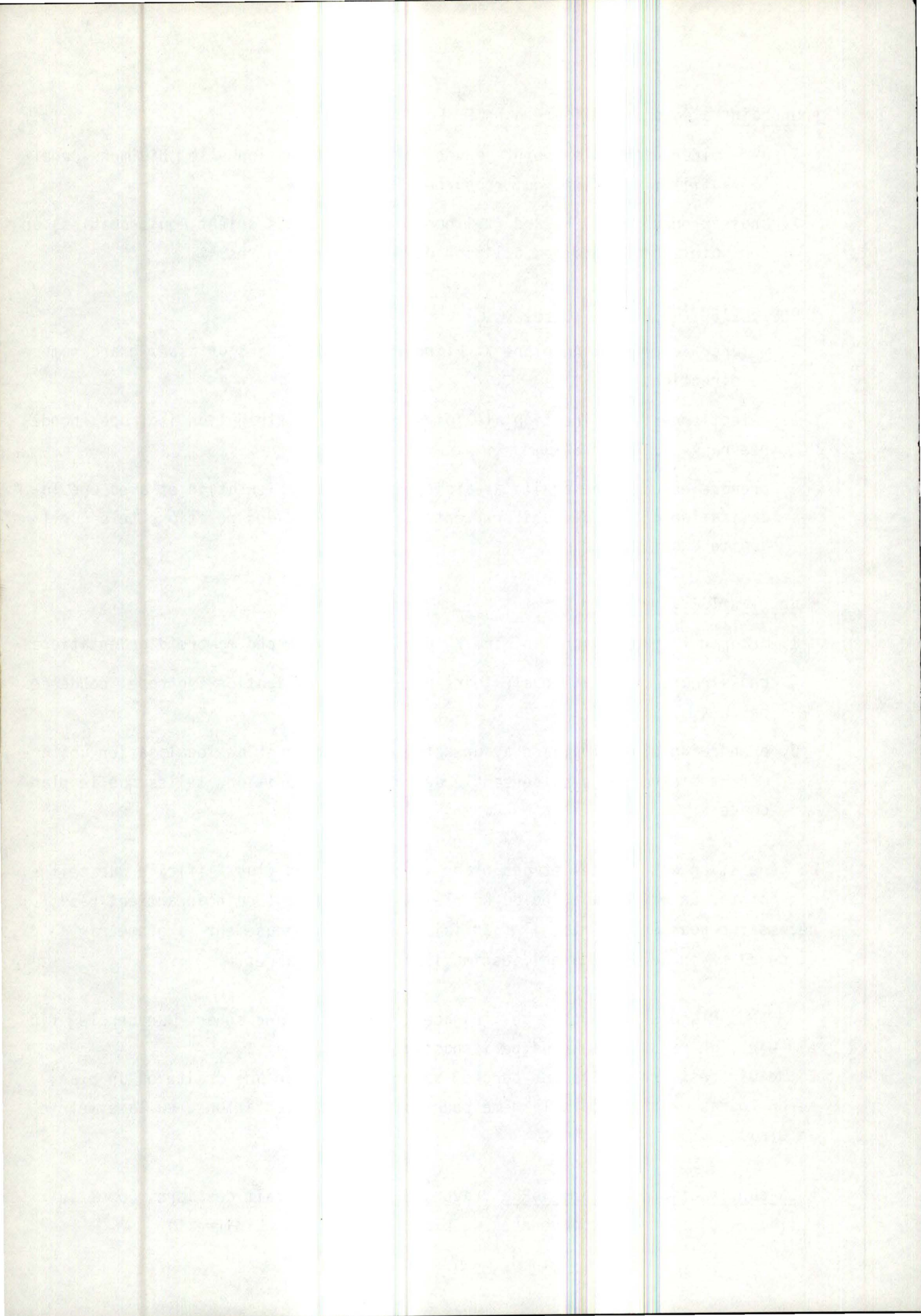
- un point aléatoire uniforme dans E^3 [dans E^2] :
 1. déterminer d'abord les points d'une grille tridimensionnelle [bidimensionnelle] suffisamment fine, qui recouvre entièrement X .
 2. choisir ensuite, au hasard (tel que tous les points soient équiprobables) un des points de la grille, à l'aide de nombres aléatoires.
- une droite IUR dans E^3 [dans E^2] :
 1. mesurer la projection plane X_2 [linéaire X_1] de X dans un assez grand nombre de directions.
 2. sélectionner une direction aléatoire ayant une distribution isotrope, pondérée par $A(X_2)$ [par $L(X_1)$].
 3. prendre ensuite une droite aléatoire avec cette orientation et avec une localisation distribuée uniformément sur l'ensemble des positions tels que la droite coupe X .
- un plan IUR dans E^3 :
 1. mesurer la projection linéaire X , dans un assez grand nombre d'orientations.
 2. choisir une orientation aléatoire ayant une distribution isotrope, pondérée par $L(X_1)$.
 3. prendre un plan aléatoire ayant cette orientation et de localisation uniformément distribuée sur l'ensemble de toutes les positions telles que le plan coupe X .

La génération des droites et des plans semble beaucoup plus difficile que celles des points. En effet, au lieu du simple test "appartient ou n'appartient pas", nécessaire pour les points, il faut ici examiner soigneusement la géométrie de δX , et ce au moyen de procédures d'estimations supplémentaires.

Plaçons le corps X de l'espace E^3 [E^2] dans une sphère [un cercle] fictive $Q(r)$, de rayon r , le plus petit possible.

Comme $Q(r)$ est une sphère [un cercle] sa projection sur une droite ou un plan, selon le cas, est toujours la même pour toutes les orientations, vu la symétrie de $Q(r)$.

- La construction de plans IUR à travers X dans E^3 se fait dès lors, comme suit :
 (θ, ϕ, p) sont les coordonnées du plan, définies au chapitre I).



1. Plonger X dans $Q(r)$, une sphère fictive. Le centre de $Q(r)$ est pris comme origine du repère.
2. Rendre une direction aléatoire (θ, ϕ) de la manière suivante :

ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$.

θ a une densité $\sin \theta$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

θ et ϕ peuvent être choisis par des nombres aléatoires.

3. Choisir p uniformément sur $[-r, r]$.
4. Le plan $T(\theta, \phi, p)$ coupe $Q(r)$. S'il coupe X , il est accepté.
5. Si $T(\theta, \phi, p)$ ne coupe pas X , il faut répéter les opérations de 1 à 4, jusqu'à ce que le plan engendré coupe X .

Ce plan, construit ainsi, est un plan IUR à travers $Q(r)$ et par conséquent aussi un plan IUR à travers X (par la propriété 1 (ii) du chapitre II pour $(X, Y, n, r) = (Q(r), X, 3, 2)$).

• La génération de droites IUR à travers X dans $E^3 [E^2]$

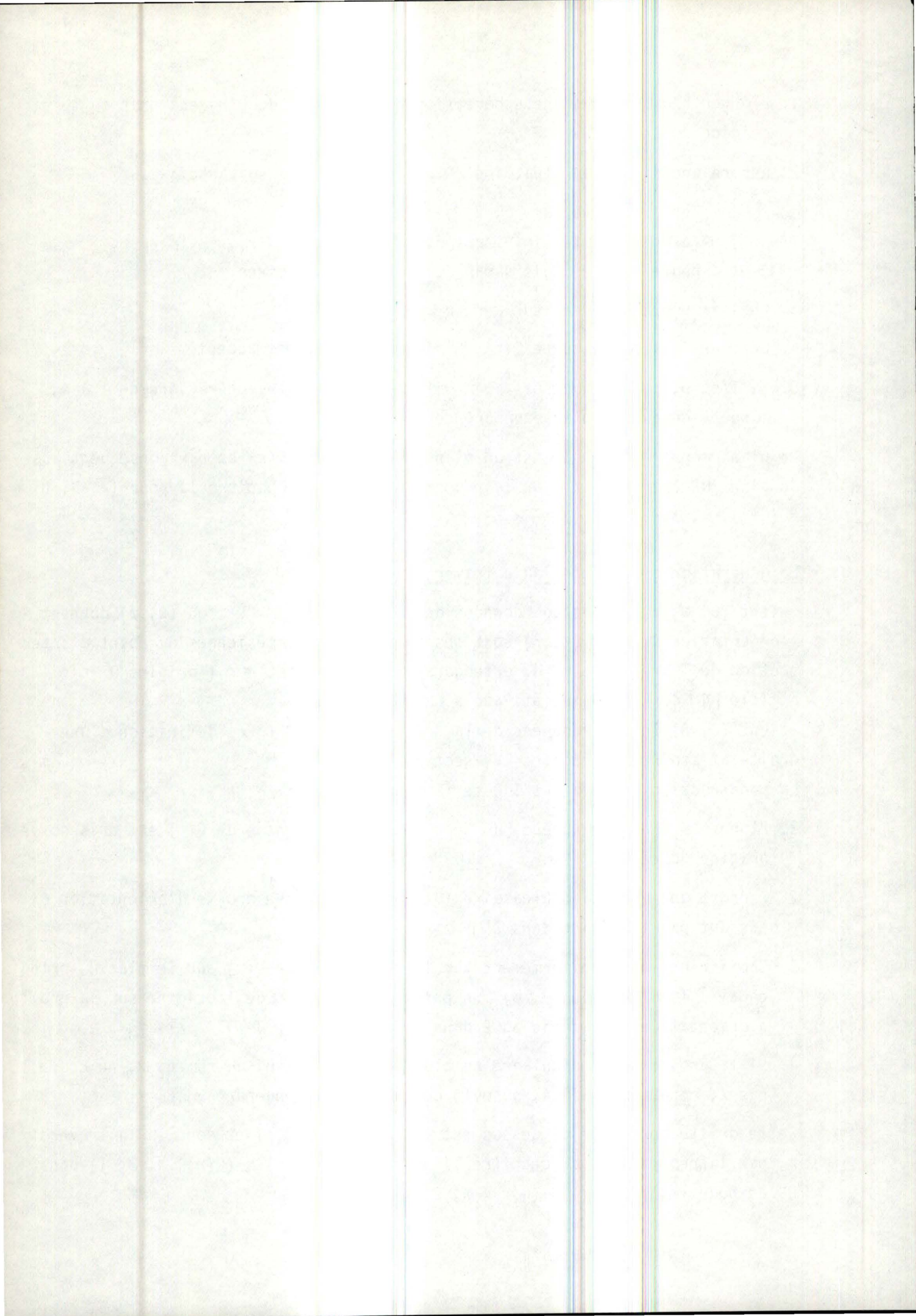
Soient $(\theta, \phi, \zeta, \eta)$ les coordonnées de la droite T dans E^3 , où (θ, ϕ) donnent l'orientation de T et (ζ, η) sont les coordonnées cartésiennes du point d'intersection de T avec le plan U , orthogonal à T et passant par l'origine O (cfr. article [4] de R.E. Miles et Pamela Davy, p. 222).

Soient (θ, p) les coordonnées de la droite T dans E^2 (cfr. définition d'une droite aléatoire au chapitre IV, section IV.2.a.).

La construction des droites IUR se fait comme suit :

1. Plonger X dans une sphère [un cercle] $Q(r)$. Le centre de $Q(r)$ est pris comme origine du repère.
2. Prendre une direction aléatoire (θ, ϕ) dans E^3 [une droite d'orientation θ , passant par l'origine dans E^2].
3. Choisir un point uniformément sur la projection de $Q(r)$ sur le plan U , orthogonal à la direction (θ, ϕ) [un point à distance p de l'origine sur la droite d'orientation θ , définie au 2 dans E^2].
4. Si la droite perpendiculaire au plan [droite] défini au numéro 2, ne coupe pas X , répéter de 1 à 4, jusqu'à ce que le plan engendré coupe X .

Cette droite engendrée ci-dessus est IUR à travers $Q(r)$ et donc IUR à travers X , par la propriété 1 du chapitre II pour $(X, Y, n, r) = (Q(r), X, 3, 1)$ dans E^3 et pour $(X, Y, n, r) = (Q(r), X, 2, 1)$ dans E^2 .



V.2. GENERATION DE SECTIONS PONDEREES

Considérons dans les espaces E^3 et E^2 , les sections aléatoires de la forme $(X \cap F_r^n)$.

Toutes les sections traitées dans ce paragraphe sont des cas particuliers du schéma multidimensionnel, décrit au chapitre II. Nous pondérons ces sections par des $(r - t)$ - projections moyennes de $(X \cap F_r^n)$, notées $M_{r-t}^r(X \cap F_r^n)$. Ces facteurs de pondération se distinguent par leur dimension de longueur $(r - t)$, où r est la dimension de la variété linéaire. Nous envisageons les cas suivants :

- dans E^3 ; des plans A-pondérés (c'est-à-dire que $(n, r, t) = (3, 2, 0)$). Le facteur de pondération sera donc :

$$M_2^2(X \cap F_2^3) = A(X \cap T) = A$$

(voir chapitre I).

- dans E^3 ; des plans F-pondérés $((n, r, t) = (3, 2, 1))$. Dès lors :

$$M_1^2(X \cap F_2^3) = F(X \cap T) = F$$

où F est la projection linéaire moyenne d'un ensemble plane $(X \cap T)$ sur une droite aléatoire isotrope dans le plan (voir chapitre IV, section 2).

- dans E^3 : des droites L-pondérées $((n, r, t) = (3, 1, 0))$:

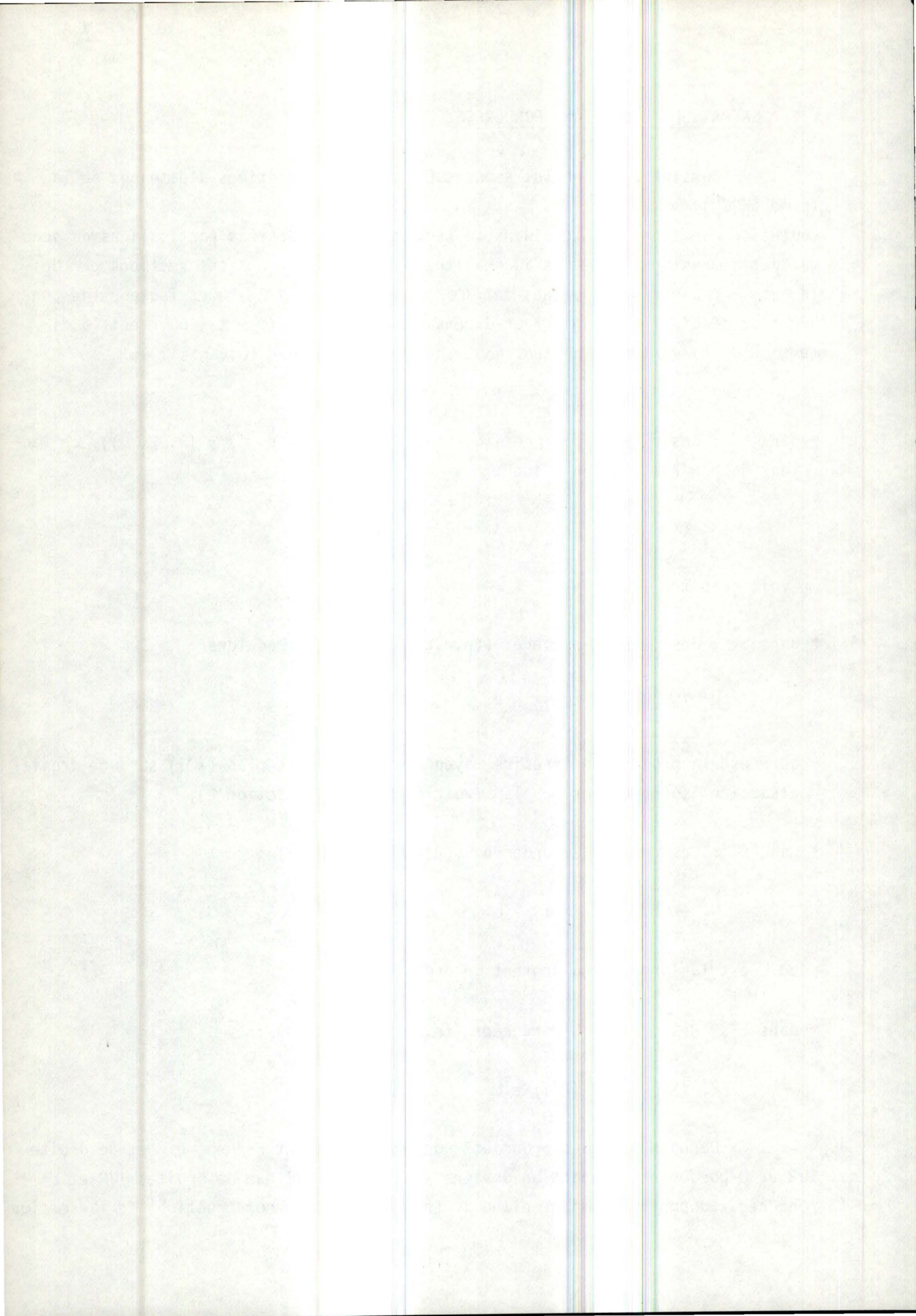
$$M_1^1(X \cap F_1^3) = L(X \cap T) = L$$

où L est la longueur du segment de droite $(X \cap T)$.

- dans E^2 ; des droites L-pondérées $((n, r, t) = (2, 1, 0))$:

$$M_1^1(X \cap F_1^2) = L(X \cap T) = L$$

Donnons quelques propriétés de plans IUR, A et F-pondérés et de droite IUR et L-pondérées, coupant un domaine spatial X ainsi que de droites IUR et L-pondérées coupant un domaine plane X . En utilisant les constructions de la section



précédente V.1 et en appliquant la propriété 2 du second chapitre, nous pouvons démontrer que toutes les sections aléatoires énumérées ci-dessus peuvent, en principe, être générées sans trop de difficultés. Voici la construction (théorique) de diverses sections pondérées, donnée sous forme de théorèmes. Ces théorèmes mettent en évidence l'intérêt pratique de la propriété 2 de II respectivement dans les cas suivants : $(n,r,q,t) = (3,2,0,0)$; $(3,2,1,1)$; $(3,1,0,0)$; $(2,1,0,0)$:

• Théorème 1 :

Un plan aléatoire A-pondéré coupant X dans E^3 est équivalent à un plan aléatoire isotrope contenant un point aléatoire uniforme du corps X.

• Théorème 2 :

Un plan aléatoire F-pondéré coupant X dans E^3 est équivalent à un plan aléatoire isotrope contenant une droite IUR qui coupe le domaine X.

• Théorème 3 :

Une droite aléatoire L-pondérée coupant X dans E^3 est équivalente à une droite aléatoire isotrope contenant un point aléatoire uniforme du domaine X.

• Théorème 4 :

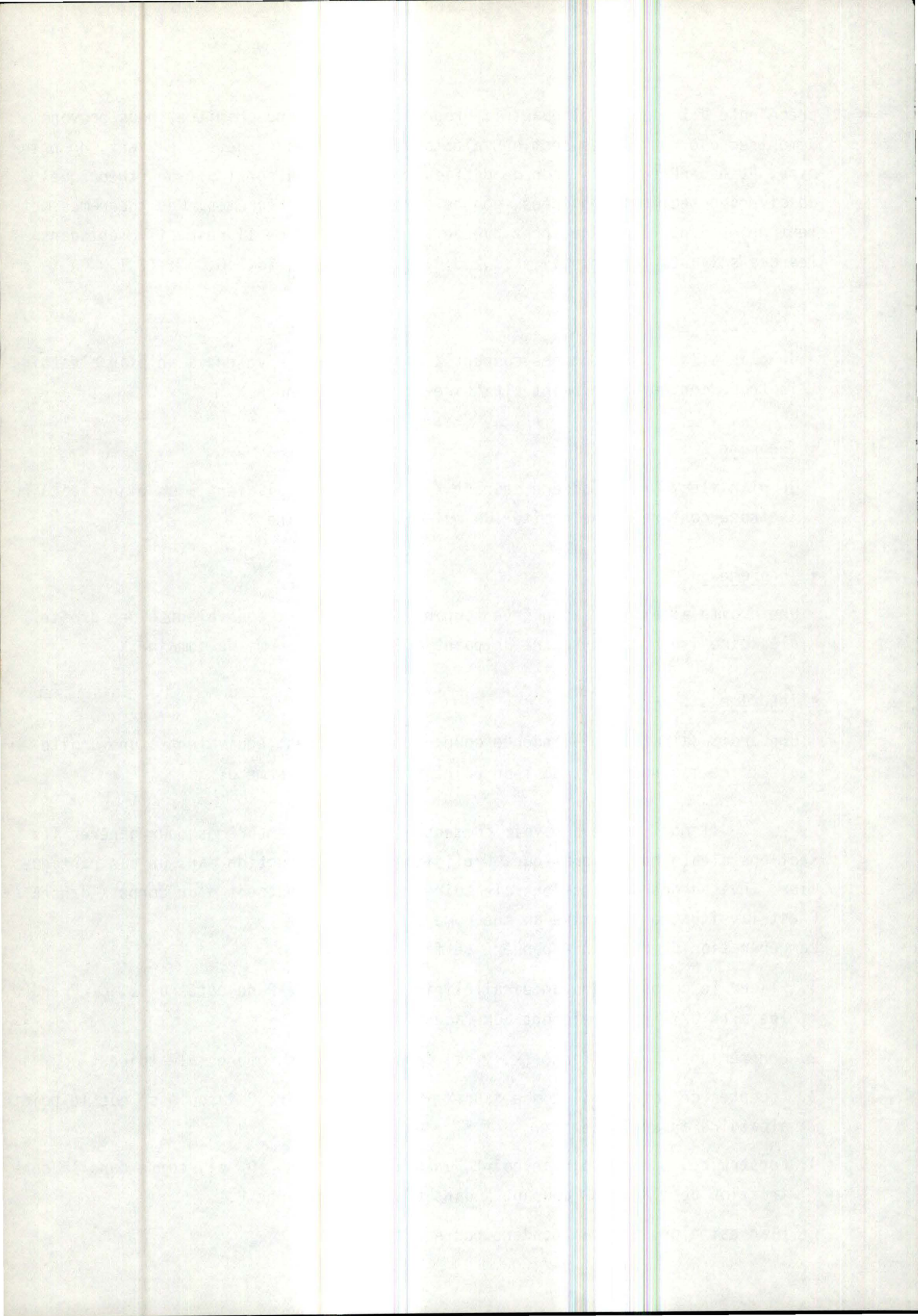
Une droite aléatoire L-pondérée coupant X dans E^3 est équivalente à une droite aléatoire isotrope contenant un point aléatoire uniforme de X.

Il nous reste à savoir comment utiliser ces théorèmes pour générer les sections aléatoires en pratique. Explicitons la construction dans un cas particulier. Envisageons des sections aléatoires planes A-pondérées d'un corps X dans E^3 . C'est la situation relative au théorème 1.

La génération de ce plan A-pondéré se fait comme suit :

1. Placer le corps X dans un parallélépipède rectangle R de côtés a, b, c. Prendre les axes OXYZ parallèlement aux faces.
2. Générer un point uniforme (x, y, z) dans R, par des nombres aléatoires.
3. Accepter ce point s'il tombe dans X. Sinon, reprendre 2 jusqu'à ce que le point aléatoire appartienne à X.
4. Construire, passant par ce point, un plan en prenant (θ, ϕ) , comme dans la construction de plans IUR coupant X dans E^3 , au paragraphe V.1.

Ce plan est alors un plan pondéré par A à travers X.



Remarquons qu'au chapitre IV, dans la section 4, nous avons pondéré la section par B, la longueur de la courbe $(X \cap T)$. Cependant, nous pouvons démontrer que, quand $(X \cap T)$ est un convexe (au chapitre IV, nous avons un cercle) la pondération par B ou par F revient au même, à un facteur multiplicatif près. En effet, nous avons :

Propriété :

Si X est un ensemble convexe dans E^2 , $F(X) = \frac{B(X)}{\Pi}$

où F est la projection linéaire moyenne d'un ensemble plane X sur une droite aléatoire isotrope dans le plan,
B est la longueur d'une courbe dans le plan.

Démonstration :

Prenons un corps convexe X dans E^2 . Nous avons, d'après (IV.24) :

$$F(X) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} L(X_1(\theta)) d\theta.$$

Soit

$dT(\theta, p)$ = élément de mesure invariante par rotation et translation, sur l'ensemble des droites dans E^2 .

Cette mesure est unique, à un facteur constant multiplicatif près.

Utilisons la propriété, donnée par Santalo dans [7], p. 13, (2.13) :

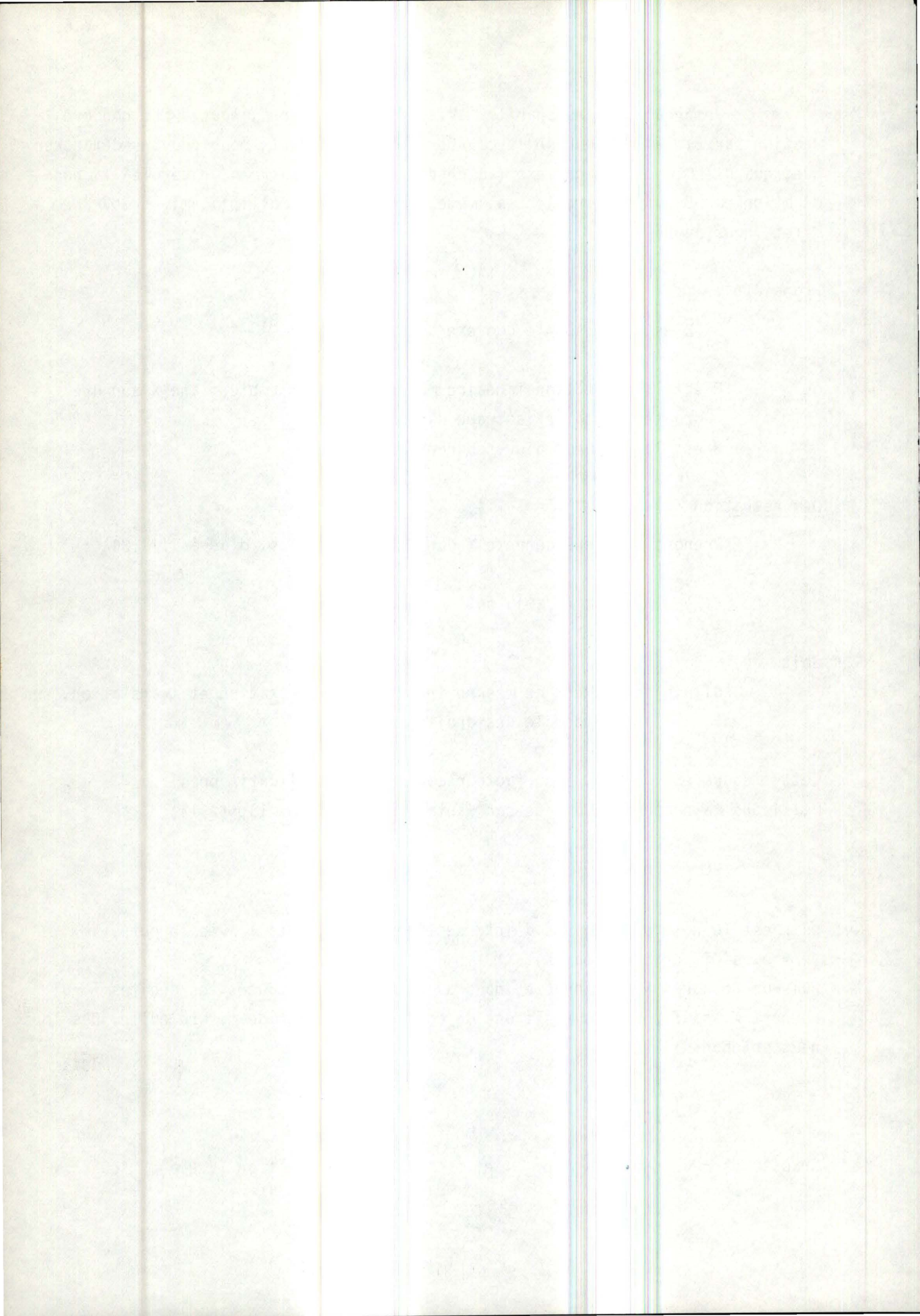
$$2B = \int n dT$$

où n est le nombre de points d'intersection de la droite T avec le corps X.
($n = 0$, si T ne coupe pas X).

Puisque le corps X est convexe, nous avons $n = 2$ pour toutes les droites T qui coupent X, sauf pour les positions de contact, qui sont de mesure nulle. Dès lors, nous obtenons :

$$B = \int_{T \cap X \neq \emptyset} dT.$$

Or $dT(\theta, p) = dp d\theta$; $-\infty < p < \infty$ et $0 \leq \theta < \Pi$ (voir section IV.2.a). D'où :



$$\begin{aligned}
 B &= \int_{T \cap X \neq \emptyset} dp \, d\theta, \\
 &= \int_0^\Pi L(X_1(\theta)) \, d\theta, \\
 &= \Pi F(X).
 \end{aligned}$$

cqfd.

V.3. RELATION ENTRE LES SECTIONS PONDEREES

La propriété 2 du chapitre II montre aussi les liens qu'il y a entre des sections pondérées de dimensions différentes et de facteurs de pondérations différents. Appliquons cette propriété 2 aux trois cas suivants : $(n,r,q,t) = (3,2,1,0)$; $(3,2,1,1)$ et $(3,2,0,0)$.

Théorème 5 :

Une droite L-pondérée coupant X dans E^3 est équivalente à une droite L-pondérée dans un plan A-pondéré du domaine X.

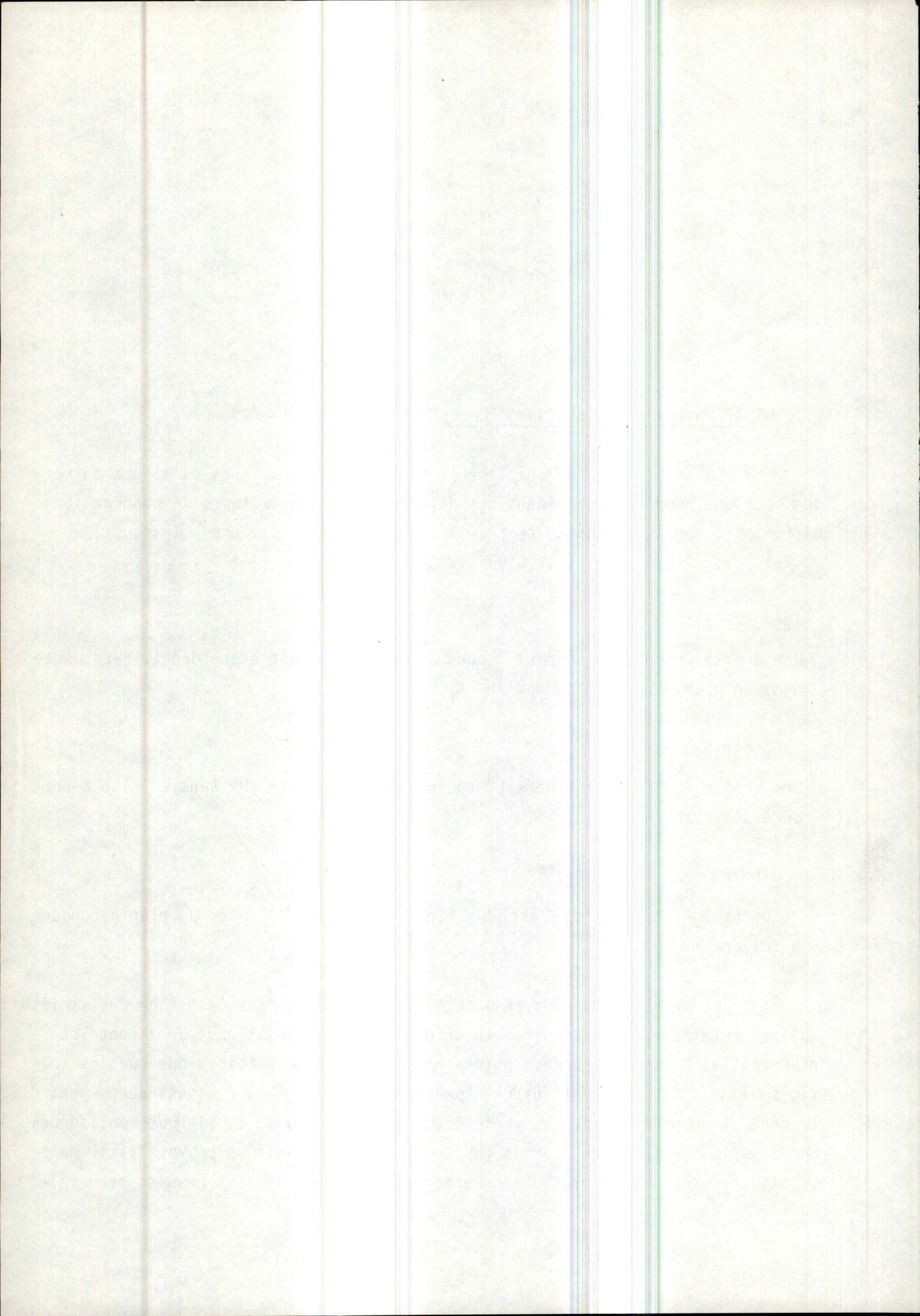
Théorème 6 :

Une droite IUR coupant X dans E^3 équivaut à une droite IUR dans un plan F-pondéré à travers X.

Théorème 7 :

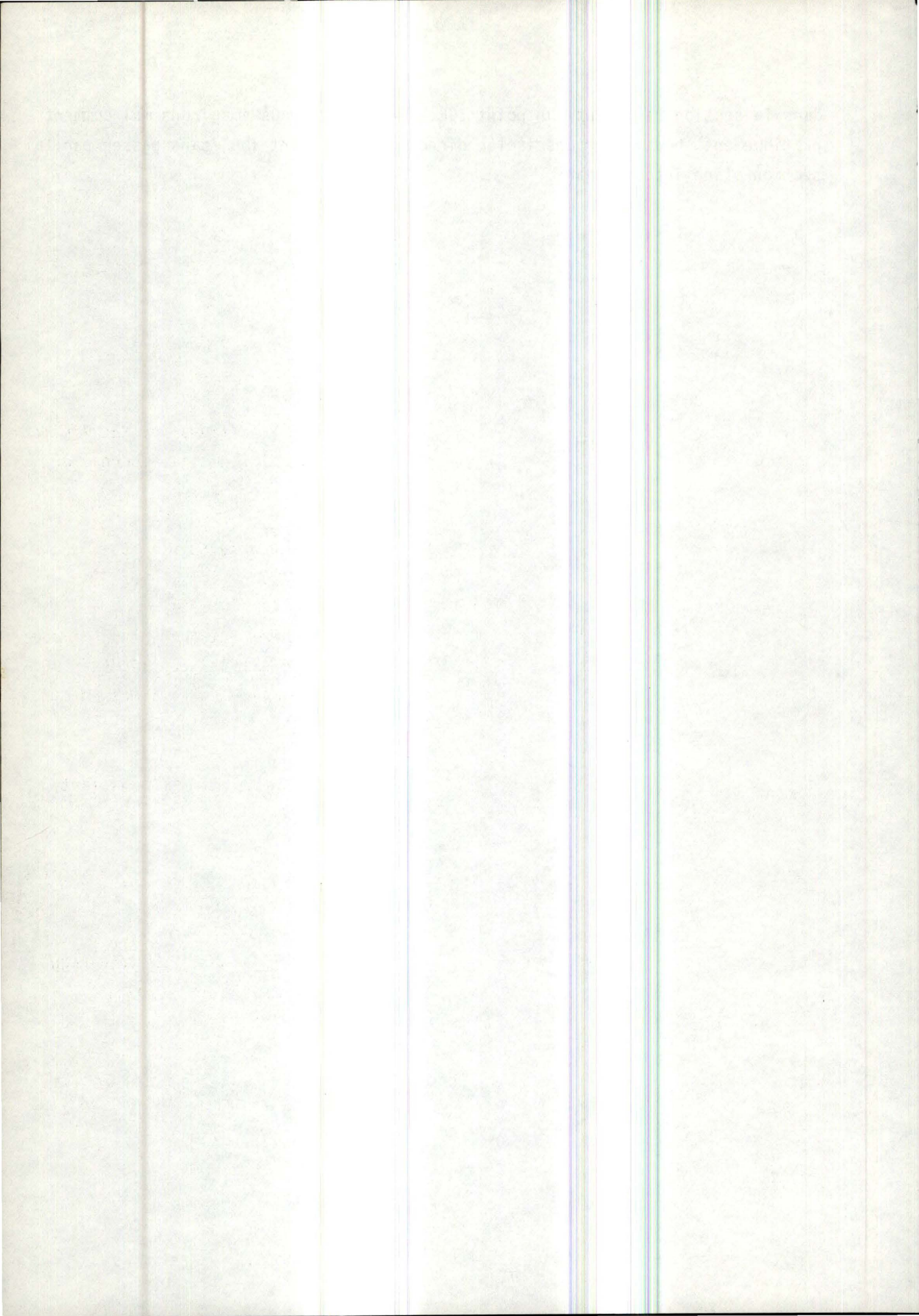
Un point IUR de X, dans E^3 est équivalent à un point IUR dans un plan A-pondéré à travers X.

L'importance de ces résultats réside d'abord dans la nature des variétés qu'ils permettent de construire. En effet, les caractéristiques de Y sont les plus faciles à mesurer sur des points ou des droites aléatoires que sur des sections planes. Cependant, l'intérêt fondamental de ces théorèmes est de permettre la génération pratique de ces variétés de dimensions 0 ou 1. Si nous considérons par exemple, le théorème 7, nous concevons aisément que nous pouvons facilement construire une section plane A-pondérée (voir section V.2) et ensuite prendre,



dans la section résultante un point IUR. Par contre, nous imaginons mal comment pratiquement, nous pourrions isoler directement ce point IUR, sans passer par la section plane intermédiaire.





BIBLIOGRAPHIE

- [1] MG KENDALL et P.A.P. MORAN : *Geometrical Probability*. Griffins's Statistical Monographs and Courses. Ed. by MG Kendall, M.A., 1963.
- [2] DWIGHT, H.B. : *Tables of Integrals and other Mathematical Data*. Fourth edition, The Macmillan Company, 1961.
- [3] MARDIA : *Statistics on Directional Data*. Ed. Academic Press, 1952.
- [4] MILES, R.E. and DAVY, P.J. : *Precise and General Conditions for the Validity of a Comprehensive Set of Stereological Fundamental Formulae*. *Journal of Microscopy*, Vol. 107, pp. 211-226, 1976.
- [5] DAVY, P.J. and MILES, R.E. : *Sampling Theory for Opaque Spatial Specimens*. *J. Royal Statistical Society*, B 39, pp. 56-65, 1977.
- [6] SANATALO, L.A. : *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*. Colloque sur les questions de réalité en géométrie ; Liège 177-190. Ed. Georges Thone - Liège ; Masson et Cie - Paris, 1955.
- [7] SANTALO, L.A. : *Introduction to Integral Geometry*. Hermann - Paris (art. Science et Industrie, n° 1198), 1963.
- [8] DELTHEIL, R. : *Probabilités géométriques. Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [9] MILES, R.E. : *The Importance of Proper Model Specification in Stereology. Geometrical Probability and Biological Structures*. Buffons's 200th Anniversary 23, Lecture Notes in "Biomathematics". Edited by E.R. Miles and J. Serra : Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1978.
- [10] STOKA, M. : *Geométrie intégrale*. Fascicule CLXV. Ed. Paris Gauthier-Villars. 1968.

