MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

L'algèbre de Banach à produit de convolution des mesures complexes à variation bornée

Le Lorrain, Patricia

Award date:
1978

Awarding institution:
Universite de Namur

L'ALGEBRE DE BANACH A PRODUIT DE CONVOLUTION DES MESURES COMPLEXES A VARIATION BORNEE.

Patricia LE LORRAIN
Annick WERY 17

Nous remercions Monsieur le Professeur F. CALLIER, d'avoir orienté notre étude et de nous avoir permis de mener à bien cette étude.

Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour l'aide constante et critique qu'il nous a accordée au cours de nos travaux.

Chapitre I

Introduction

Nous nous sommes fixé comme but l'étude d'une algèbre de Banach particulière : une algèbre à produit de convolution dont les éléments sont des mesures complexes à variation bornée.

Dans cette intention, nous avons consacré le chapitre II à l'étude des algèbres de Banach et de leurs propriétés. Celle-ci est basée sur les notions reprises dans les livres de Goffman - Pedrick, de Hille - Phillips et de Gelfand - Raikov - Shilov. Une partie de ce chapitre traite du développement de la structure topologique de l'ensemble des idéaux maximaux et du lien entre ces ensembles particuliers et les formes linéaires multiplicatives.

Le chapitre III présente la mise au point de la théorie des mesures complexes et de leur variation totale

Nous y reprenons certaines propriétés des fonctions mesurables, et nous y introduisons des notes relatives à l'intégration dans le champ des complexes et la mesure produit complexe

Dans ce cadre mathématique, il est dès lors facile de définir des opérations internes et externes sur $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{S}$ étant

l'ensemble des mesures complexes à variation bornée.
C'est ainsi que $\underset{\sim}{S}$, muni de ces opérations possèdera une structure d'algèbre de Banach.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des propriétés des éléments de $\underset{\sim}{S}$. La principale de ces propriétés détermine que toute mesure se décompose de façon unique en trois autres mesures :

- une absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue
- une singulière purement atomique
- une singulière non atomique

Par conséquent, $\underset{\sim}{S}$ pourra s'écrire comme la somme directes de trois ensembles : $\underset{\sim}{L}$ = espace des mesures absolument continues

$\underset{\sim}{A}$ = espace des mesures singulières purement atomiques

$\underset{\sim}{N}$ = espace des mesures singulières non atomiques

Notre travail est basé sur les principaux résultats de l'étude de Hille_Phillips concernant l'algèbre $\underset{\sim}{S}$.
Cependant l'objet essentiel de notre étude concerne l'espace $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ = espace des mesures à partie singulière purement

atomique

L'espace $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ est présenté en fait sous la forme de l'espace $\mathcal{A}$ dans le livre de Desoer Vidyasagar p 246

Nous pouvons établir facilement un isomorphisme entre l'algèbre $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ et l'algèbre $\mathcal{A}$

en effet:

- $\mathcal{A}$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) + \sum_{i=0}^{\infty} g_i\, \delta(t - t_i) & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$

où $g_1(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $g_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=0}^{\infty} |g_i| < \infty$ $\quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$

$\delta(\cdot - t_i)$ est l'impulsion de Dirac appliquée au temps t_i c'est-à-dire la limite en convergence simple d'une suite $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions

$$s_k(\cdot, t_i) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{intégrables}$$
$$t \longrightarrow s_k(t, t_i)$$

telles que 1) $\int_{\mathbb{R}^+} s_k(t, t_i)\, dt = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2) $$\delta(t - t_i) \triangleq \lim_{k \to \infty} s_k(t, t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq t_i \\ \infty & \text{si } t = t_i \end{cases}$$

- Nous savons que $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ $\quad \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2$

où $\underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{E}$

$a_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$

et $\underset{\sim}{a}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$ t.q $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$

$0 = t_0 < t_1 < \dots$

et $\underset{\sim}{\delta}_{t_i}$ est une mesure définie par:

$$\forall E \in \Sigma, \quad \underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \in E \\ 0 & \text{si } t_i \notin E \end{cases}$$

Par conséquent, définissons l'application :

$$T : \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A} \longrightarrow \mathcal{a}$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \longrightarrow a_1(t) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t - t_i) = T(\underset{\sim}{a})$$

Comme $\underset{\sim}{a}$ est une mesure complexe, nous pouvons construire la distribution cumulative associée comme suit : $\hat{a} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longrightarrow \underset{\sim}{a}([0,t]) = \hat{a}(t)$$

Nous constatons que $T(\underset{\sim}{a})$ est tout simplement la dérivée distributionnelle de la distribution cumulative associée à $\underset{\sim}{a}$.

T est surjective car à chaque élément de $\mathcal{a}$, $a(t)$,

$$a(t) = \begin{cases} a_1(t) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t - t_i) & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$, nous pouvons

définir une fonction d'ensembles :

$\underset{\sim}{a}([0,t]) = \int_0^t a_1(t)\, dt + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_0^t \delta(t - t_i)\, dt$, ce qui engendre la mesure complexe $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ t.q.

$$\underset{\sim}{a}(E) = \int_E a(t)\,dt + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\delta_{t_i}(E)$$

Etant donné que cette application est injective, T est une bijection. De plus, elle conserve la norme et les opérations :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

$T(\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}) = \alpha T(\underset{\sim}{a}) + \beta T(\underset{\sim}{b})$

$T(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) = T(\underset{\sim}{a}) * T(\underset{\sim}{b})$

↳ convolution définie dans $\mathcal{A}$

et $\| T(\underset{\sim}{a}) \| = \| a_1 \|_{L^1} + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| = \| \underset{\sim}{a} \|$

Par conséquent, T est un isomorphisme isométrique.

Le Professeur F. Callier dans son article : An algebra of transfer function for distributed linear time invariant system p 658 cite un tel isomorphisme entre les deux algèbres.

Dans la théorie des systèmes à convolution, on remarque qu'il est important que le noyau de convolution soit un élément de $\mathcal{A}$.

Soit le système :

$$\xrightarrow{u} \boxed{\;g*\;} \xrightarrow{y}$$

où u est l'entrée et y, la sortie, s'obtient en prenant la convolution de u et de g

Lorsque $g \in \mathcal{A}$, nous pouvons en déduire que

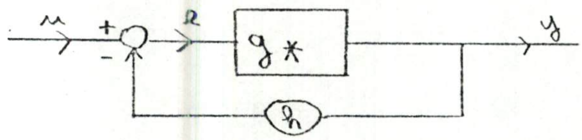
$\forall p \in [1, \infty]$: $\quad u \in L^p \Rightarrow y \in L^p$ car $y = g * u$

$$\Downarrow$$

$$\|y\|_p \leq \|g\|_{\mathcal{A}} \|u\|_p < \infty .$$

[DES]

De plus, si on considère le système asservi suivant :



où u est l'entrée, y la sortie et h une constante non nulle.

Soit $g \in \mathcal{A}$, comme $y = g * e$ et $e = u - hy$, on obtient

$e = u - h\, g * e \Rightarrow (\delta_0 + hg) * e = u \Rightarrow e = (\delta_0 + hg)^{-1} * u$

à condition que $\delta_0 + hg$ soit inversible dans $\mathcal{A}$

or dans $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, nous disposons d'un critère d'inversibilité des éléments.

Par conséquent : $(\delta_0 + hg)^{-1}$ existe ssi $\inf \{ |1 + h\hat{g}(s)|, s \in \mathbb{C}_+ \} > 0$

si $g \in \mathcal{A}$ et si $(\delta_0 + hg)^{-1}$ existe alors le système considéré est $\mathcal{A}$-stable et l'on a : 1) $u \in L^p \Rightarrow e \in L^p \Rightarrow y \in L^p$

2) $u(t) \to 0 \Rightarrow e(t)$ et $y(t) \to 0$

Il est donc utile de développer la notion de convolution de deux éléments de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

Celle-ci sera alors établie dans le chapitre V l'étude de la structure des idéaux maximaux et la caractérisation des formes linéaires multiplicatives correspondantes, permettront d'énoncer des critères d'inversibilité d'un élément de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, notions qui seront reprises dans le chapitre VI

Chapitre II

II Les algèbres de Banach

II Les algèbres de Banach

II.1 Définition

X est une algèbre de Banach si les trois propriétés suivantes sont vérifiées : ① X est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet pour les opérations suivantes :

l'addition $+ : X \times X \longrightarrow X$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

la multiplication scalaire $\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$

$$(a, x) \longrightarrow a \cdot x$$

la norme $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longrightarrow \|x\|$$

② X muni des opérations

$+ : X \times X \longrightarrow X$, $(x, y) \longrightarrow x+y$ et $* : X \times X \longrightarrow X$, $(x, y) \longrightarrow x*y$, la multiplication interne

possède une structure d'anneau

③ La norme définie en ① possède une propriété supplémentaire :

$\forall x, y \in X$; $\|x * y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$(X, +, *, \cdot, \|\cdot\|)$ est alors une algèbre de Banach

Remarque

L'anneau $(X,+,*)$ ne doit pas nécessairement posséder un neutre pour la multiplication, mais s'il en possède un, celui-ci est noté e et comme $\|x\| = \|x * e\|$, $\|x\| \leq \|e\| \cdot \|x\|$, e est tel que sa norme est plus grande ou égale à un.

Mais on peut toujours trouver une norme équivalente pour laquelle $\|e\| = 1$. Nous considérons dans la suite les algèbres de Banach commutatives (la multiplication $*$ est commutative) avec neutre. On désigne $(X, +, *, \cdot, \|.\|)$ par X tout simplement.

X est un espace vectoriel par rapport au champ (corps commutatif) $\mathbb{C}$.

II.2 Les idéaux

II.2.1. Définition

Un sous-ensemble $I \subset X$ est appelé idéal ssi deux propriétés sont vérifiées :

① $\forall x, y \in I$ et $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $a.x + b.y \in I$

② $\forall x \in I$ et $\forall y \in X$, $x * y \in I$

Un idéal est propre si cet idéal est différent de X

Remarque

Toute algèbre X possède un idéal trivial : celui constitué uniquement du neutre additif, noté 0, de X. Il est appelé l'idéal nul.

II.2.2. Proposition

Si X ne possède aucun idéal autre que l'idéal nul, alors X est un champ

Démonstration

Soit $x \in X$ et $x \neq 0$

On considère $I = \{ x * y \ , \ y \in X \}$;

Remarquons que $I \neq \phi$ car $x \in I$

que $I \neq \{0\}$ car $x \in I$ et $x \neq 0$

I est un idéal, en effet:

a) $\forall\, y, y' \in X$ et $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$:

$$a(x * y) + b(x * y') = x * (\underbrace{a.y + b.y'}_{\in X}) \in I$$

b) $\forall\, y, y' \in X$

$$\underbrace{(x * y)}_{\in I} * y' = x * (\underbrace{y * y'}_{\in X}) \in I$$

Comme X ne contient aucun idéal autre que l'idéal nul,

$I = X$. Puisque $I = X$ nous avons qu'il existe un y, élément de X tel que $x * y = e$, par conséquent y est l'inverse de x et comme $x \neq 0$ était un élément arbitraire de X , on peut conclure que X est un champ.

Remarque

Lorsque nous parlons d'idéal, nous sous-entendons que l'idéal est propre.

II. 3. Les idéaux maximaux

II.3.1. Définition

Un idéal maximal est un idéal qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre

Examinons les propositions que nous suggère cette définition

II.3.2. Propositions

Proposition 1

soit X une algèbre de Banach commutative, avec neutre, chaque idéal I dans X est contenu dans un idéal maximal M dans X

Démonstration

on considère que les idéaux contenant I dans X sont ordonnés par l'inclusion

Soit $\{I_\alpha\}$ une chaîne maximale dans cet ensemble ordonné et $M = \bigcup_\alpha I_\alpha$ [ROY p24]

M est un idéal, en effet :

a) $\forall \alpha$, $e \notin I_\alpha \Rightarrow e \notin M \Rightarrow M \neq X$

b) $\forall x, y \in M$ et $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $a.x + by \in M$ car

$x, y \in M \Rightarrow \exists \alpha, \beta$ t.q. $x \in I_\alpha$ et $y \in I_\beta$, sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $I_\alpha \subset I_\beta$ car les ensembles sont ordonnés, donc $x, y \in I_\beta$

Par conséquent $a.x + b.y \in I_\beta$ car I_β est un idéal

Comme $I_\beta \subset M \Rightarrow a.x + b.y \in M$

c) $\forall x \in M$ et $\forall y \in X$, $x * y \in M$ car :

$x \in M \Rightarrow \exists \alpha$ t.q. $x \in I_\alpha$ donc $x * y \in I_\alpha \subset M$

M est un idéal maximal car s'il ne l'était pas, $\{I_\alpha\}$ ne serait pas une chaîne maximale d'idéaux

Démontrons, tout d'abord, une proposition qui nous sera utile plus tard :

Proposition 2
Le neutre e de X est un point intérieur de l'ensemble des éléments qui possèdent un inverse

Démonstration

Nous allons démontrer que $\| e - x \| < 1$ implique que l'élément x a un inverse. Ce qui prouvera la proposition car si $E = \{ x \text{ t.q. } x^{-1} \text{ existe} \}$, on aura alors que $e \in B(e,1) \subset E$ avec $B(e,1)$ = la boule ouverte de centre e, de rayon 1, et donc e sera un point intérieur de E.

Considérons la série $e + (e-x) + (e-x)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (e-x)^i$

On prend un élément x t.q. $\| e - x \| < 1$, la série $\sum_{i=0}^{\infty} \| e - x \|^i$ converge et par la propriété de la norme $\| (e-x)^i \| \leq \| e - x \|^i$. La série $\sum_{i=0}^{\infty} \| (e-x)^i \|$ converge.

et donc $\sum_{i=0}^{\infty} (e-x)^i$ converge aussi vers un point $y \in X$.

mais $x * y = [e - (e-x)] * [e + (e-x) + (e-x)^2 + \dots]$

$= e$

donc y est l'inverse de x, x est donc inversible.

Proposition 3

Soit X une algèbre de Banach commutative avec neutre, alors pour chaque idéal $I \subset X$, la fermeture $\bar{I}$ de I est aussi un idéal.

Cette proposition assure qu'un idéal maximal est nécessairement fermé.

Démonstration de la proposition

Soit I un idéal arbitraire.

I ne contient aucun élément inversible.

en effet : supposons que y ait un inverse $y^{-1} \in X$,

donc $y * y^{-1} \in I \Rightarrow e \in I \Rightarrow \forall x \in X \quad x = e * x \in I$

or $I \neq X$, ce qui implique une contradiction

Par conséquent I ne contient aucun élément inversible.

$\bar{I}$ est un idéal

en effet : a) étant donné que l'ensemble des éléments de X qui ont un inverse contient e comme point intérieur, $e \notin \bar{I} \Rightarrow \bar{I} \neq X$

b) Soient $x, y \in \bar{I}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, montrons que $a.x + b.y \in \bar{I}$

$\sim x \in \bar{I} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in I$

et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$

$\sim y \in \bar{I} \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n \in I$

et $y_n \to y$ quand $n \to \infty$

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in I$

$a.x_n + b.y_n \in I$ et

$a.x_n + b.y_n \to a.x + b.y$

$\Rightarrow a.x + b.y \in \bar{I}$

c) Soit $y \in X$ et $x \in \bar{I}$ $x * y \in \bar{I}$ car

$x \in \bar{I} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in I$ et $\displaystyle x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

or I est un idéal , donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n * y \in I$

et $x_n * y \to x * y$

Par conséquent $x * y \in \bar{I}$

Proposition 4

Soit X , une algèbre de Banach commutative avec neutre, et $x \in X$, alors : x^{-1} existe
ssi
x n'est dans aucun idéal maximal

Démonstration

Nous avons déjà observé que si x^{-1} existe alors x n'est dans aucun idéal, donc dans aucun idéal maximal.

Inversément, démontrons par contraposition :

si x^{-1} n'existe pas, démontrons alors qu'il existe un idéal maximal auquel x appartient.

Soit $I = \{ x * y , y \in X \}$, observons que

a) $e \notin I$ car x^{-1} n'existe pas $\Rightarrow I \neq X$

b) Soient $z, z' \in I$, $a, b \in \mathbb{C}$,

$z \in I \Rightarrow \exists\, y \in X$ t.q. $z = x * y$

$z' \in I \Rightarrow \exists\, y' \in X$ t.q. $z' = x * y'$

$$a.z + b.z' = a.(x*y) + b.(x*y') = x * (\underbrace{a.y + b.y'}_{\in X})$$

$\Rightarrow \quad a.z + b.z' \in I$

c) $\forall z \in I$ et $z' \in X$,

$z \in I \Rightarrow \exists\, y \in X$ t.q. $x * y = z$

donc $z' * x * y = x * \underbrace{z' * y}_{\in X} \Rightarrow z' * z \in I$

a), b), c) $\Rightarrow$ I est un idéal qui contient x, et comme tout idéal est contenu dans un idéal maximal par la proposition 1, il existe un idéal maximal qui contient x.

II.4 L'algèbre de Banach quotient

II.4.1 Définition de l'ensemble quotient X/I et les opérations sur X/I

Soit X une algèbre de Banach avec un neutre et commutative.

Soit I un idéal fermé dans X

On peut définir une relation d'équivalence : deux éléments x, y sont équivalents par rapport à l'idéal I si $x - y \in I$. Nous constatons que

① Cette relation est bien une relation d'équivalence

car $x - x = 0 \in I$ (réflexivité)

$x - y \in I \Rightarrow (-1)(x - y) = y - x \in I$ (symétrie)

$x - y \in I$ et $y - z \in I \Rightarrow x - y + y - z = x - z \in I$

(transitivité)

et cela $\forall x, y, z \in X$

② Les classes d'équivalence sont de la forme

$x + I$ où $x \in X$

X = réunion de ces classes d'équivalence

X/I = l'ensemble quotient, il a pour éléments ces classes d'équivalence

On définit les opérations suivantes dans X/I :

l'addition +

Soient $\xi = x_0 + I$, $\eta = y_0 + I$ deux éléments de $X|I$

$\xi + \eta \triangleq x_0 + y_0 + I \in X|I$ par définition

et si $x \in \xi$ et $y \in \eta$ alors $x + y \in \xi + \eta$ car

$x + y = x_0 + i + y_0 + i' = x_0 + y_0 + \underbrace{i + i'}_{\in I}$ car i et i'

appartiennent à I

De plus $\forall z \in \xi + \eta$ alors z peut s'écrire

comme la somme d'un élément de ξ et d'un

élément de η car $z = x_0 + y_0 + i = \underbrace{x_0 + 0}_{\in \xi} + \underbrace{y_0 + i}_{\in \eta}$

La multiplication scalaire.

Soit $\xi = x_0 + I$ et $a \in \mathbb{C}$

$a \cdot \xi \triangleq a \cdot x_0 + I \in X|I$ par définition

si $x \in \xi$, $a \cdot x = a \cdot x_0 + \underbrace{a \cdot i}_{\in I} \in a \cdot \xi$ ($i \in I$)

De plus $\forall z \in a \cdot \xi$ alors z s'écrit comme

produit de a et d'un élément de ξ à condition que

a soit différent de zéro En effet, si $a \neq 0$ alors

$z = a \cdot x_0 + i = a \cdot x_0 + a \cdot \underbrace{a^{-1} i}_{\in I}$ avec $i \in I$

La multiplication interne •

Soient $\xi = x_0 + I$ et $\eta = y_0 + I$

$\xi \bullet \eta \triangleq x_0 * y_0 + I \in X | I$

si $x \in \xi$ et $y \in \eta$ alors $x * y = (x_0 + i) * (y_0 + i')$

$i, i' \in I$

$$= x_0 * y_0 + \underbrace{x_0 * i'}_{\in I} + \underbrace{i * y_0}_{\in I} + \underbrace{i * i'}_{\in I}$$

$$\Rightarrow x * y \in \xi \bullet \eta$$

La norme $\| \ \|$

$\|\xi\| \triangleq \inf \{ \|x\| : x \in \xi \} \qquad \forall \xi \in X | I$

c'est une norme car :

a) $\|\xi\| = 0 \iff \xi = I$

en effet : ① si $\xi = I$ alors $\|I\| \triangleq \inf \{ \|x\|, x \in I \} = 0$

car $0 \in I$

② $\|\xi\| = 0$, démontrons que $\xi = I$

Pas 1 : $\forall \xi \in X | I$, ξ est un sous-ensemble fermé de X

En effet : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ξ, convergente, soit y la limite démontrons que $y \in \xi$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x + x'_n$ avec $x'_n \in I$, si $\xi = x + I$.

comme $x_n \to y$ quand $n \to \infty$,

$\|x_n - y\| \to 0$ quand $n \to \infty$, ou encore

$\|x - y + x'_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $x'_n \to y - x \in I$ car I est fermé

et on peut écrire $y - x = i \in I$

$\Rightarrow y = x + i$

$\Rightarrow y \in \xi$

Cas 2 : $\|\xi\| = 0 \Rightarrow \xi = I$

En effet : si $\|\xi\| = 0 \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \xi$ t.q.

$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ par définition de la

norme comme infimum

Par conséquent $x_n \to 0$ et comme ξ est

fermé, $0 \in \xi \Rightarrow \xi = I$

b) Si $a = 0$ $\quad \|I\| = 0 = |0|\,\|\xi\| \quad \forall \xi \in X|I$

Si $a \neq 0$ $\quad a.\xi = \{a.x,\ x \in \xi\} \quad \forall \xi \in X|I$

Donc $\forall a \in \mathbb{C}$ $\quad \|a.\xi\| = \inf\{\|a.x\|,\ x \in \xi\}$

$= |a| . \inf\{\|x\|,\ x \in \xi\}$

$= |a| . \|\xi\| \quad \forall \xi \in X|I$

c) $\forall \xi, \eta \in X|I$

$\|\xi + \eta\| \leq \inf\{\|x\| + \|y\|,\ x \in \xi,\ y \in \eta\}$

$= \inf\{\|x\|,\ x \in \xi\} + \inf\{\|y\|,\ y \in \eta\}$

$= \|\xi\| + \|\eta\|$

La norme possède une propriété supplémentaire

$\forall \xi, \eta \in X/I$

$\|\xi \cdot \eta\| \leq \inf\{\|x * y\| , x \in \xi , y \in \eta\}$

$\leq \inf\{\|x\| , x \in \xi\} . \inf\{\|y\| , y \in \eta\}$

$= \|\xi\| . \|\eta\|$

Remarque

$E \stackrel{\Delta}{=} e + I$

$\|E\| = \|E^2\| \leq \|E\|^2 \Rightarrow \|E\| \geq 1$, mais comme $\|e\| = 1$ alors $\|E\| = 1$

Nous verrons que $(X/I , + , \cdot , \cdot , \|.\|)$ sera une algèbre de Banach commutative avec neutre.

Cette algèbre sera notée X/I tout simplement. On travaille toujours dans $\mathbb{C}$ (en ce qui concerne la multiplication scalaire).

Montrons qu'il existe un homomorphisme de X dans X/I:

Un homomorphisme est une application qui conserve les opérations. Considérons l'application : $X \to X/I$

$x \to x + I$, la classe à laquelle x appartient.

Notons F, cette application.

Cette application est un homomorphisme car :

$F(x+y) \triangleq x+y+I$ par définition de F

$= F(x) + F(y)$ par définition de l'addition

et cela $\forall x, y \in X$

$F(\lambda.x) \triangleq \lambda.x + I$ par définition de F

$= \lambda.F(x)$ par définition de la mult. scalaire

et cela $\forall x \in X$ et $\forall c \in \mathbb{C}$

$F(x * y) \triangleq x * y + I$ par définition de F

$= F(x) \bullet F(y)$ par définition de la multiplication

$\forall x, y \in X$

Remarque

Suivant le contexte (qu'on se trouve dans X ou dans X/I), $\dot{x} \triangleq x + I$ désigne parfois un ensemble de X ou désigne un élément de X/I

II.4.2. Théorèmes fondamentaux

Démontrons que X/I muni de ces opérations possède également une structure d'algèbre de Banach

Théorème 1

$(X/I, \mathbb{C}, +, ., \|.\|)$ est un espace vectoriel normé

Démonstration

a) $(X|I, +)$ est un groupe additif abélien (commutatif)

- $\forall \xi, \eta \in X|I$, $\xi + \eta \in X|I$ car nous avons vu que l'addition est interne et partout définie
- $\forall \xi, \eta, \varphi \in X|I$ $\quad (\xi + \eta) + \varphi = \xi + (\eta + \varphi)$

  en effet, si $\xi = x_0 + I$, $\eta = y_0 + I$ et $\varphi = z_0 + I$

$$(\xi + \eta) + \varphi = (x_0 + y_0) + z_0 + I = x_0 + (y_0 + z_0) + I$$
$$= \xi + (\eta + \varphi)$$

  l'addition est associative
- Le neutre : I

  en effet si $\xi = x_0 + I$, $\xi + I = x_0 + I = I + \xi = \xi$
- L'addition est symétrisable

  $\forall \xi \in X|I$, le symétrique est $-\xi$

  Nous avons vu que $-\xi \triangleq (-1).\xi \in X|I$

$$= -x_0 + I \qquad \text{si } \xi = x_0 + I$$

  et $\xi + (-\xi) = I = -\xi + \xi$
- L'addition est commutative

$$\xi + \eta = x_0 + y_0 + I = y_0 + x_0 + I = \eta + \xi \qquad \text{si } \xi = x_0 + I,\ \eta = y_0 + I$$

b) $(X|I, \mathbb{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel car

$\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall \xi \in X|I$, $\alpha . \xi \in X|I$

et $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\, \xi, \eta \in X|I$,

$$(\alpha . \beta) . \xi = (\alpha . \beta) . x_0 + I = \alpha . (\beta\, x_0) + I = \alpha . (\beta . \xi)$$

si $\xi = x_0 + I$

$$1 . \xi = \xi$$

$$(\alpha + \beta) . \xi = (\alpha + \beta)\, x_0 + I = \alpha\, x_0 + \beta . x_0 + I = \alpha . \xi + \beta . \xi$$

$$\alpha(\xi + \eta) = \alpha(x_0 + y_0) + I = \alpha . x_0 + \alpha . y_0 + I = \alpha . \xi + \alpha . \eta$$

si $\eta = y_0 + I$

Théorème 2

$(X|I, \mathbb{C}, +, ., \|.\|)$ est un espace de Banach

Démonstration

Il suffit de démontrer que cet espace est complet

Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $X|I$,

montrons que cette suite converge dans $X|I$.

Cette suite étant de Cauchy, nous pouvons écrire :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ t.q. $n > m > N_\varepsilon$

$$\|\xi_m - \xi_n\| < \varepsilon$$

ou encore $\|\xi_m - \xi_n\| \to 0$ quand $n, m \to \infty$

Pas 1 : Il existe une sous-suite (ξ_{n_k}) telle que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\|$ converge

En effet : Soit $\varepsilon = r^q$, $q \in \mathbb{N}_0$ et $0 < r < 1$

Par conséquent $0 < \varepsilon < 1$ $\quad \forall q \in \mathbb{N}_0$

$\forall q \in \mathbb{N}_0$, $\exists N_q \in \mathbb{N}$ t. q. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $\quad n > m > N_q$

$$\| \zeta_n - \zeta_m \| < r^q$$

Prenons deux indices

$n = n_{k+1}$

$m = n_k$ $\qquad$ avec $n > m > N_q$

Donc $\forall q \in \mathbb{N}_0$, $\exists n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$ t. q. $\| \zeta_{n_{k+1}} - \zeta_{n_k} \| < r^q$

choisissons la suite (n_k) croissante, c'est-à-dire

si $k \to \infty$ $\qquad n_k < n_{k+1} \to \infty$, les n_k sont obtenus

en faisant varier q.

On obtient $\sum_{k=0}^{\infty} \| \zeta_{n_{k+1}} - \zeta_{n_k} \| \leq \sum_{q=1}^{\infty} r^q$ converge

Pas 2 : Soit $x_1 \in \zeta_{n_1}$

Il existe un $x_2 \in \zeta_{n_2}$ t. q. $\| x_2 - x_1 \| \leq 2 \| \zeta_{n_2} - \zeta_{n_1} \|$

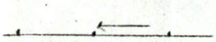
En effet : $\| \zeta_{n_2} - \zeta_{n_1} \| = \inf \{ \| x'_2 - x'_1 \| , \forall x'_2 \in \zeta_{n_2} , \forall x'_1 \in \zeta_{n_1} \}$

$\triangleq M$

Il existe alors une suite $(\| x'_{2k} - x'_{1k} \|)_k$ t. q.

$$\| x'_{2k} - x'_{1k} \| \to M$$

Il existe donc un $K \in \mathbb{N}$ t. q. $\| x'_{2K} - x'_{1K} \| \leq 2M$



Or $x'_{1K} \in \zeta_{n_1}$ et $x_1 \in \zeta_{n_1} \Rightarrow x'_{1K} = x_1 + i$, $i \in I$

$\Rightarrow x'_{2K} - x'_{1K} = x'_{2K} - i - x_1$

On pose $x_2 = x'_{2K} - i$, $x_2 \in \zeta_{n_2}$ et $\| x_2 - x_1 \| \leq 2M$

De même, il existe un x_3 tel que $\|x_3 - x_2\| \leq 2 \| z_{n_3} - z_{n_2} \|$

et ainsi de suite.

Par conséquent $\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \exists x_k \in Z_{n_k}$ tel que

$$\| x_k - x_{k-1} \| \leq 2 \| z_{n_k} - z_{n_{k-1}} \|$$

Pas 3 : La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy

En effet : $\sum_k \| x_{k+1} - x_k \| \leq 2 \sum_k \| z_{n_{k+1}} - z_{n_k} \|$ converge

Par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \| x_{k+1} - x_k \| \triangleq S_n \to N$

quand $n \to \infty$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy

De plus,

$$\| x_n - x_m \| \leq \| x_n - x_{n-1} \| + \dots + \| x_{m+1} - x_m \|$$

$$= S_{n-1} - S_{m-1}$$

Car $S_{n-1} - S_{m-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \| x_{k+1} - x_k \| - \sum_{k=1}^{m-1} \| x_{k+1} - x_k \|$

$$= \| x_{m+1} - x_m \| + \dots + \| x_n - x_{n-1} \|$$

Par conséquent $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, k' \in \mathbb{N}_0$,

$k-1 > k'-1 > N_\varepsilon$ alors $\| S_{k-1} - S_{k'-1} \| = S_{k-1} - S_{k'-1} < \varepsilon$

car (S_n) est de Cauchy

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, k' \in \mathbb{N}_0$,

$k > k' > N'$ $\quad \| x_k - x_{k'} \| < \varepsilon$

Il suffit pour cela de prendre $N' = N + 1$

$\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est de Cauchy

$\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge vers un élément $x \in X$

car X est complet

Pas 4 : Considérons l'application : $X \longrightarrow X / I$

$x \longrightarrow x + I = \xi$ la classe à laquelle x appartient

Cette application est continue

En effet : soit x un élément arbitraire de X, démontrons :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\| x - x' \| < \delta \Rightarrow \| \xi - \xi' \| < \varepsilon$

si $\xi = x + I$ et $\xi' = x' + I$

Or comme $\| \xi - \xi' \| = \inf \{ \| x_0 - x'_0 \| , x_0 \in \xi , x'_0 \in \xi' \}$,

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$

Pas 5 : La suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

En effet : Par le pas 3, on sait que $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$

Puisque $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$, par la continuité de l'application définie au pas 4, et comme $\forall k$, $x_k \in \xi_{n_k}$, nous pouvons écrire que

$\xi_{n_k} \to \xi = x + I$

Par conséquent la sous-suite $(\xi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge

$\Rightarrow$ la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Théorème 3

$(X|I, +, \cdot)$ est un anneau unitaire

Démonstration

Rappelons que $\xi \cdot \eta = x * y + I$ si $\xi = x + I$
$\eta = y + I$

et que $(X|I, +)$ est un groupe abélien

observons

① $(\xi \cdot \eta) \cdot \varphi = (x_0 * y_0) * z_0 + I = x_0 * (y_0 * z_0) + I$
$= \xi \cdot (\eta \cdot \varphi)$

avec $\xi = x_0 + I \quad \eta = y_0 + I \quad \varphi = z_0 + I$

$\Rightarrow$ associativité de la multiplication interne

② $E \triangleq e + I$ est le neutre pour cette multiplication interne $\cdot$

$E \cdot \xi = x_0 + I = \xi \cdot E \qquad \forall \xi \in X|I$

si $\xi = x_0 + I$

③ Distribution de la multiplication $\cdot$ par rapport à l'addition $+$

$\forall \xi, \eta, \varphi \in X|I \quad , \xi = x_0 + I \quad \eta = y_0 + I \quad , \varphi = z_0 + I$

$\xi \cdot (\eta + \varphi) = x_0 * (y_0 + z_0) + I = x_0 * y_0 + x_0 * z_0 + I$
$= \xi \cdot \eta + \xi \cdot \varphi$

ces théorèmes impliquent le théorème 4 :

Théorème 4

Si X est une algèbre de Banach commutative avec neutre,
Si I est un idéal fermé dans X
Alors X/I est une algèbre de Banach avec la norme

$$\|\xi\| = \inf \{ \|x\| \,;\, x \in \xi \}$$

Théorème 5

Si X est une algèbre de Banach commutative avec neutre
Si M est un idéal maximal dans X, alors X/M est un champ.

Démonstration (par l'absurde)

Soit $\xi \in X/M$ et $\xi \neq M$.
Supposons que ξ n'est pas inversible
Considérons l'ensemble des multiples de ξ, I
Donc $I = \{ \xi \cdot \eta \;,\; \eta \in X/M \}$, cet ensemble est un idéal car :

a) $I \neq X/M$

car E = neutre de X/M, n'appartient pas à I

car ζ n'a pas d'inverse

b) $\forall \zeta, \zeta' \in I, \forall a, b \in \mathbb{C}, a\zeta + b\cdot\zeta' \in I$

En effet : $\zeta \in I \Rightarrow \exists \eta \in X/M$ tel que $\zeta = \eta \circ \zeta$

$\zeta' \in I \Rightarrow \exists \eta' \in X/M$ tel que $\zeta' = \eta' \circ \zeta$

$$a.(\eta \circ \zeta) + b.(\eta' \circ \zeta) = \underbrace{(a.\eta + b.\eta')}_{\in X/M} \circ \zeta \in I$$

c) $\forall \zeta \in I \quad \forall \zeta' \in X/M \quad \zeta . \zeta' \in I$

En effet : $\zeta \in I \Rightarrow \exists \eta \in X/M$ tel que $\zeta = \eta . \zeta$

$$\zeta . \zeta' = \eta . \zeta . \zeta' = \underbrace{\eta . \zeta'}_{\in X/M} . \zeta \in I$$

Soit $\bigcup_{\zeta' \in I} \zeta' \triangleq N$, cet ensemble est un idéal de X

En effet :

a) $\bigcup_{\zeta' \in I} \zeta' \neq X$

car $E \notin I \Rightarrow E \not\subset \bigcup_{\zeta' \in I} \zeta'$

b) $N \triangleq \bigcup_{\zeta' \in I} \zeta' = \bigcup_{\eta \in X/M} \eta . \zeta$

si $\zeta = x + M$ alors $N = \{ u \in X$ tel que $u = x * y + z$;

$y \in X, z \in M \}$

$\forall t, t' \in N \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \; a.t + b.t' \in N$ car :

$a.t + b.t' = a.(x * y + z) + b.(x * y' + z')$

avec $y, y' \in X$ et $z, z' \in M$

$= x * (a.y + b.y') + a.z + b.z' \in N$

car $a.y + b.y' \in X$

$a.z + b.z' \in M$

c) $\forall t \in N \quad \forall t' \in X \qquad t * t' \in N$

car $t \in N \Rightarrow \exists\, y \in X$ et $z \in M$ tels que $t = x * y + z$

$$\Rightarrow t * t' = x * \underbrace{y * t'}_{\in X} + \underbrace{z * t'}_{\in M} \quad \in N$$

Par conséquent, nous constatons une contradiction car M est alors un sous-idéal propre de N car :

$M \subset N$, en effet si $y = 0 \Rightarrow x * y = 0 \Rightarrow M \subset N$

$M \neq N$, en effet $x \in N$ et $x \notin N$ car on prend $y = e$, $\xi = x + M$ avec $x \notin M$ ce qui est possible vu que $\xi \neq M$

Le fait que $M \subset N$ (= idéal) contredit le fait que M est un idéal maximal.

Théorème 6

Si l'anneau quotient de l'algèbre de Banach par un idéal I est un corps, alors I est un idéal maximal. Par conséquent I est fermé

Démonstration

S'il existait dans l'algèbre un idéal propre J contenant I

et différent de lui, son image dans $X|I$ par $f : X \rightarrow X|I$
$x \rightarrow x+I$

serait un idéal propre différent de $\{I\}$. Mais ceci est impossible car si $X|I$ est un corps, tout élément est inversible (excepté I) et donc tout idéal propre est $\{I\}$.

En effet : si $I \subset J$

$f : X \rightarrow X|I$

$x \rightarrow \xi = x + I$, la classe à laquelle appartient x

$\forall x \in I$, $f(x) = I$ = le neutre pour l'addition dans $X|I$

Donc $f(I) = \{ f(x) , x \in I \}$

$= \{I\}$

Par conséquent $\forall x \in I \Rightarrow x \in J \Rightarrow f(I) \subset f(J)$

et $f(J) \neq f(I)$ car $I \underset{\text{strict}}{\subset} J$ et par définition de f

montrons que $f(J)$ est un idéal :

a) On sait que $J \neq X \Rightarrow \exists x \notin J \Rightarrow x + I \notin f(J)$

$\Rightarrow f(J) \neq X|I$

b) Si ξ et $\eta \in f(J)$, avec $\xi = x + I$ et $\eta = y + I$

alors $a.\xi + b.\eta = \underbrace{a.x + b.y}_{\in J \text{ (idéal)}} + I \in f(J)$

c) Si $\xi \in f(J)$ et $\eta \in X|I$ avec $\xi = x + I$
$\eta = y + I$

alors $\xi . \eta \in f(J)$

car $z \cdot \eta = \underbrace{x * y}_{\in J \text{ car } x \in J \text{ (idéal)}} + I \in f(J)$

Donc $f(J)$ est un idéal et $f(J) \neq \{I\}$, ce qui est impossible.

Théorème 7
Si X, algèbre de Banach commutative avec neutre, est aussi un champ, alors X est isomorphe au champ des nombres complexes

Démonstration (par l'absurde)

soit e le neutre pour la multiplication dans X

Nous allons voir que tout élément x de X est de la forme $a.e$ où $a \in \mathbb{C}$.

supposons alors qu'il existe un $x \in X$ tel que

$x \neq a.e \quad \forall a \in \mathbb{C}$

Etant donné que X est un champ, ceci implique que $(x - a.e)^{-1}$ existe $\forall a \in \mathbb{C}$.

Comme $\dfrac{(x-(a+h).e)^{-1} - (x-a.e)^{-1}}{h} =$

$$\frac{(x - a.e - (x-(a+h).e))(x-a.e)^{-1}(x-(a+h).e)^{-1}}{h} =$$

$$= \frac{h}{h} \cdot e\,(x - a.e)^{-1}\,(x - (a+h)e)^{-1}$$

$$= (x - (a+h).e)^{-1}\,(x - a.e)^{-1}$$

Si $h \to 0$, l'expression ci-dessus tend vers $(x - a.e)^{-2}$

Donc, la fonction $(x - a.e)^{-1}$ de la variable complexe a , à valeur dans X , est dérivable partout

De plus, comme $\|(x - a.e)^{-1}\| = |a^{-1}|\,\|(\frac{x}{a} - e)^{-1}\|$, si $|a| \to \infty$ alors $\|(x - a.e)^{-1}\| \to 0$ (Dans $\mathbb{C}$, $\frac{1}{a} \triangleq a^{-1}$)

Soit f une forme linéaire continue sur l'espace de Banach X , $f((x-a.e)^{-1})$ est alors une fonction complexe de la variable a, partout dérivable :

en effet : $\dfrac{f((x - (a+h).e)^{-1}) - f((x-a.e)^{-1})}{h} =$

$$f\left(\frac{(x-(a+h).e)^{-1} - (x-a.e)^{-1}}{h}\right)$$

(car f est linéaire)

et donc si $h \to 0$, l'expression ci-dessus tend vers $f((x-a.e)^{-2})$ car f est continue

De plus, lorsque $|a| \to \infty$, $(x - a.e)^{-1} \to 0$ et donc $f((x-a.e)^{-1}) \underset{|a| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ car f est linéaire et continue

Par conséquent $f((x-a\,e)^{-1})$ est bornée car sur D, ensemble compact dans $\mathbb{C}$, cette fonction admet une borne et en dehors de D, elle admet aussi une borne

De plus, nous savons que $f((x-a.e)^{-1})$ est dérivable partout, c'est-à-dire entière.

Par le théorème de Liouville [GRO p113], $f((x-a.e)^{-1})$ est une constante et comme $\lim\limits_{|a|\to\infty} f((x-a.e)^{-1}) = 0$, la constante est donc nulle.

Comme ceci est vrai $\forall f \in X'$ (espace adjoint), par le corollaire du théorème de Hahn-Banach [ROY p191], il existe une forme $f \in X'$ telle que

$$0 = f((x-a.e)^{-1}) = \|(x-a.e)^{-1}\|$$

$$\Rightarrow (x-a.e)^{-1} = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

Par conséquent, l'hypothèse : $\forall a \in \mathbb{C} \quad x \neq a.e$ est fausse et il existe alors un complexe a tel que $x = a.e$.

X est donc isomorphe à $\mathbb{C}$ (X est bijectif et homomorphe à $\mathbb{C}$)

Deux corollaires découlent immédiatement de ces théorèmes

Corollaire 1

Si X est une algèbre de Banach commutative avec neutre, et M un idéal maximal dans X, alors X/M est isomorphe au champ des complexes corollaire 2

Si X est une algèbre de Banach commutative avec neutre qui ne contient aucun idéal propre autre que l'idéal nul, alors X est isomorphe au champ des complexes $\mathbb{C}$.

II 5 Les formes linéaires multiplicatives

Soit X une algèbre de Banach commutative avec neutre
Par le corollaire 1, à chaque $x \in X$, nous pouvons associer une fonction définie sur l'ensemble des idéaux maximaux dans X.
En effet : notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux dans X.
Soit $x \in X$ et $M \in \mathcal{M}$.
$\hat{x}(M)$ désigne l'élément de $X|M$ auquel x appartient
Comme $X|M$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, on peut définir $\hat{x}(M)$ comme un nombre complexe (associé à l'élément de $X|M$ auquel x appartient).
Une correspondance s'établit entre X et l'ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathcal{M}$.

En particulier, nous pouvons déjà associer au $o \in X$, la fonction nulle car $\forall M \in \mathcal{M}, o \in M$, et à $e \in X$, la fonction constante $\equiv 1$

Soient $x, y \in X$, $M \in \mathcal{M}$, $a \in \mathbb{C}$

nous observons que $\widehat{x+y}(M) = \hat{x}(M) + \hat{y}(M)$

$$\widehat{x * y}(M) = \hat{x}(M) . \hat{y}(M)$$

$$\widehat{a . x}(M) = a . \hat{x}(M)$$

Ces trois relations viennent du fait qu'il existe un homomorphisme de X dans $X|M$.

Par conséquent, nous avons un homomorphisme de l'algèbre X dans l'algèbre des fonctions complexes sur $\mathcal{M}$ avec les opérations usuelles (point par point) [1]

Remarque

Soient $M \in \mathcal{M}$, $x \in X$ et $x \in \xi \in X|M$

alors $|\hat{x}(M)| \triangleq \|\xi\| = \inf \{\|y\|, y \in \xi\} \leq \|x\|$, [2]

remarquons aussi que :

$\|\xi\| = |a| \, \|E\|$ et $|\hat{x}(M)| = \|\xi\| = |a|$ car $\|e\| = 1 \Rightarrow \|E\| = 1$

ceci entraîne que $\hat{x}(.)$ est une fonction bornée pour la norme 'sup' et $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$

La fonction qui à $x \in X$ associe la fonction $\hat{x}(.)$ est alors un homomorphisme décroissant en norme (c'est-à-dire $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$) de l'algèbre de X dans l'algèbre des fonctions complexes définies sur $\mathcal{M}$.

II.5.1. Définition

Une fonction à valeur complexe $\mu(x)$ non identiquement nulle est dite être une forme linéaire multiplicative sur X si :

$$\forall x, y \in X \quad 1°)\ \mu(\alpha . x + \beta . y) = \alpha . \mu(x) + \beta . \mu(y)$$

$$2°)\ \mu(x * y) = \mu(x) . \mu(y)$$

II.5.2. Pour une algèbre de Banach commutative avec neutre, chaque idéal maximal M définit une forme linéaire multiplicative à savoir $\mu(x) = \hat{x}(M)$

En effet : $\mu(\alpha . x + \beta . y) = \widehat{\alpha . x + \beta . y}\,(M)$

$$= \alpha . \hat{x}(M) + \beta . \hat{y}(M)$$

$$= \alpha . \mu(x) + \beta . \mu(y)$$

$$\mu(x * y) = \widehat{x * y}\,(M) = \hat{x}(M) . \hat{y}(M)$$

$$= \mu(x) . \mu(y)$$

et cela $\forall x, y \in X$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Nous allons montrer que ceci épuise la classe des formes linéaires multiplicatives pour de telles algèbres par le théorème suivant

Théorème 1

Soit X une algèbre de Banach commutative avec neutre. Si $\mu(x)$ est une forme linéaire multiplicative sur X, alors $M = \{x \text{ tel que } \mu(x) = 0\}$, le noyau de μ, est un idéal maximal et $\mu(x) = \hat{x}(M) \quad \forall x \in X$

Démonstration

Pas 1 : M est un idéal

En effet : a) $\forall x_1, x_2 \in M \quad , \forall a, b \in \mathbb{C}$

$$\mu(a.x_1 + b.x_2) = a.\underbrace{\mu(x_1)}_{=0} + b.\underbrace{\mu(x_2)}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow a.x_1 + b.x_2 \in M$$

b) $\forall y \in X, \quad \forall x \in M$

$$\mu(x * y) = \underbrace{\mu(x)}_{=0} . \mu(y) = 0$$

$$\Rightarrow x * y \in M$$

c) Comme μ est non identiquement nulle, il existe un élément $x \in X$ tel que $\mu(x) \neq 0$ et donc $x \notin M \Rightarrow M \neq X$

(si $\mu \equiv 0$ alors $M = X \Rightarrow M$ est un idéal maximal)

Pas 2 : M est un idéal maximal et $\mu(x) = \hat{x}(M)$

$\forall x \in X$

En effet : Soit $x \in X$ tel que $u(x) \neq 0$, $x = e * x$ et donc

$u(x) = u(e) . u(x)$ $\Rightarrow$ comme $u(x) \neq 0$, $u(e) = 1$

Supposons que M n'est pas maximal , c'est-à-dire qu'il est contenu dans un idéal propre T

$\Rightarrow \exists x_0 \in T \setminus M$ tel que $u(x_0) \neq 0$

or $u(x_0 - u(x_0).e) = u(x_0) - u(x_0).\underbrace{u(e)}_{=1}$

$$= 0$$

Par conséquent $x_0 - u(x_0).e \in M$

Donc $u(x_0).e = \underbrace{x_0}_{\in T} - (\underbrace{x_0 - u(x_0).e}_{\in M \subset T}) \in T$

et donc $e \in T$, ce qui contredit le fait que T est un idéal propre . Donc M est un idéal maximal et définit un homomorphisme :

$X \rightarrow X/M \qquad \longleftrightarrow \mathbb{C}$

$x \rightarrow \hat{x}(M).E \longleftrightarrow \hat{x}(M)$ où $x - \hat{x}(M).e \in M$

Car $\widehat{(x - \hat{x}(M).e)}(M) = \hat{x}(M) - \hat{x}(M)\underbrace{\hat{e}(M)}_{=1} = 0$

Donc $u(x - \hat{x}(M).e) = u(x) - \hat{x}(M)\underbrace{u(e)}_{=1} = 0$

$$0 = u(x) - \hat{x}(M)$$

$$\Downarrow$$

$$u(x) = \hat{x}(M)$$

corollaire
Si $u(x)$ est une forme linéaire multiplicative, alors

u est bornée et appartient à l'espace adjoint X' de X considéré comme espace de Banach ; $\|u\| \leq 1$

En effet, par le théorème 1 de II.5.2, vu précédemment, et par [2], nous savons que $|u(x)| = |\hat{x}(M)| \leq \|x\|$ ce qui implique que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |u(x)| \leqslant 1$.

X' est un espace de Banach par [HIP p41].

Remarques

$\boxed{1}$ $\|u\| = 1$ car $\|e\| = 1$ et $|u(e)| = 1$

Il existe par conséquent une correspondance bijective entre les formes linéaires multiplicatives et les idéaux maximaux d'une algèbre de Banach X commutative avec neutre.

$\boxed{2}$ Pour qu'un élément x de X soit inversible, il faut et il suffit que la fonction $\hat{x}(M)$ ne s'annule sur aucun idéal maximal

II.6. Représentation de Gelfand pour les algèbres avec neutre

Nous allons introduire une topologie dans $\mathcal{M}_0$ = l'ensemble des idéaux maximaux de l'algèbre de Banach X

II.6.1. Définition de cette topologie

$\mathcal{M}$ = ensemble des idéaux maximaux

$\forall x \in X \quad \exists \hat{x} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$

$M \to \hat{x}(M)$ tel que $\hat{x}(M).E$ représente l'élément de X/M auquel x appartient

$\hat{X} \triangleq \{ \hat{x} , \hat{x} : \mathcal{M} \to \mathbb{C} : M \to \hat{x}(M) \ ; \ x \in X \}$

Nous munissons alors $\mathcal{M}$, de la topologie faible τ engendrée par $\hat{X}$. Cette topologie sur $\mathcal{M}$ possède comme sous-base définissante la classe $\mathcal{S}$ de parties de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{S} \triangleq \{ \hat{x}^{-1}[G] , G \in (\mathbb{C}, \tau_{us}) , \hat{x} \in \hat{X} \}$$

Elle possède une base locale $\mathcal{B}_{M_0}$ ayant des éléments $B(M_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$

et $B(M_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{ M \in \mathcal{M} ; |\hat{x}_k(M) - \hat{x}_k(M_0)| < \varepsilon$
$k \in \overline{n} \}$

Elle possède une sous-base locale $\mathcal{S}_{M_0}$ ayant des éléments $S(M_0, x, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$,

$S(M_0, x, \varepsilon) = \{ M \in \mathcal{M} ; |\hat{x}(M) - \hat{x}(M_0)| < \varepsilon \}$

<u>c'est la topologie la moins fine telle que tous les éléments de $\hat{X}$ sont continus</u> [ROY. p 200]

De plus, une suite (M_n) converge faiblement vers

$M \in \mathcal{M}$ ssi $\forall x \in X$, $\hat{x}(M_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \hat{x}(M)$ dans $(\mathbb{C}, \tau_{us})$

La topologie faible τ engendrée par $\hat{X}$ sur $\mathcal{M}$ est <u>séparée</u>

si $M, M' \in \mathcal{M}$ tels que $M \neq M'$, montrons qu'il existe des ouverts G_M et $G_{M'}$ tels que $G_M \cap G_{M'} = \phi$.

Or comme $M \neq M'$, il existe un $x \in X$ tel que $x \in M$ et $x \notin M'$ $\Rightarrow$ $\hat{x}(M) = 0$ et $\hat{x}(M') \neq 0$.

Soit $\varepsilon = |\hat{x}(M')|$, $\varepsilon > 0$

Prenons alors les ouverts $G_M = S(M, x, \varepsilon/3)$

$$= \{ \tilde{M} \in \mathcal{M}, |\hat{x}(\tilde{M})| < \varepsilon/3 \}$$

$$G_{M'} = S(M', x, \varepsilon/3)$$

$$= \{ \tilde{M} \in \mathcal{M}, |\hat{x}(\tilde{M}) - \hat{x}(M')| < \varepsilon/3 \}$$

Il suit immédiatement que $G_M \cap G_{M'} = \phi$

II.6.2. Précisons dans un théorème les propriétés de $(\mathcal{M}, \tau)$

<u>Théorème 1</u>

$(\mathcal{M}, \tau)$ est un espace topologique compact et séparé

Nous avons vu déjà qu'il s'agissait d'un espace séparé, démontrons qu'il est compact

<u>Démonstration</u>

On sait qu'il existe une correspondance bijective entre les idéaux maximaux $M \in \mathcal{M}$ et les formes linéaires multiplicatives μ (nécessairement de norme $\|\mu\| \leq 1$). On obtient donc que $\mathcal{M}$ est une partie de la boule fermée unité $\bar{B}_1$ de X'

Considérons maintenant la topologie faible - $*$ sur X'. Elle est engendrée par la classe $\varphi[X]$ sur X', $\varphi[X]$ est la classe des formes d'évaluation locale:

$$\varphi : X \to X''$$

$$x \to \varphi_x : X' \to \mathbb{C}$$

$$f \to \varphi_x(f) = f(x)$$

et, $x \to \hat{x} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$

$$M \to \hat{x}(M)$$

$$\updownarrow \qquad \quad \shortparallel$$

$$\mu \to \hat{\underset{\sim}{x}}(\mu) = \mu(x) \quad \text{avec } \mu = \text{forme linéaire multiplicative}$$

$\hat{\underset{\sim}{x}}(.)$ définit une forme d'évaluation locale.

La topologie faible τ sur $\mathcal{M}$ engendrée par $\hat{X}$ a comme sous-base définissante.

$$\{ \hat{x}^{-1}(G) \quad G \subset (\mathbb{C}, \tau_{us}) \ ; x \in X \}$$

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ l'ensemble des formes linéaires multiplicatives considérons la classe

$$\underset{\sim}{\hat{X}} = \{ \hat{\underset{\sim}{x}} : \underset{\sim}{\mathcal{M}} \to \mathbb{C} : \underset{\sim}{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$

$$\mu \to M \to \hat{x}(M) = \hat{\underset{\sim}{x}}(\mu) \}$$

la topologie faible $\underset{\sim}{\tau}$ engendrée par $\underset{\sim}{\hat{X}}$ sur $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ a comme sous-base les ensembles $\{\underset{\sim}{\hat{x}}^{-1}(G) : G \subset (\mathbb{C}, \tau_{us}) ; x \in X\}$

<u>Les espaces $(\mathcal{U}, \tau)$ et $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\tau})$ sont équivalents</u>, [a]

il existe une bijection entre les éléments des sous-bases des deux espaces donc aussi entre les ouverts.

<u>$(\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\tau})$ est un sous-espace de $(X'$, topologie faible $*)$</u> [b]

en effet : i) $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \subset X'$

ii) un élément de la sous-base de $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\tau})$ est l'intersection d'un élément de la sous-base de $(X'$, topologie-faible $*)$ et de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$. La sous-base de $(X'$, topologie-faible $*)$ a comme éléments:

$\{f \in X' ; f(x) \in G\}$, $G \subset (\mathbb{C}, \tau_{us})$, $x \in X$

La sous-base de $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}$, topologie faible $\underset{\sim}{\tau})$ a comme éléments :

$$\{\underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{\mathcal{U}} ; \underset{\sim}{u}(x) = \underset{\sim}{\hat{x}}(\underset{\sim}{u}) = \hat{x}(M) \in G\}$$

$$G \subset (\mathbb{C}, \tau_{us}), x \in X$$

Or $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \subset \bar{B}_1$ (car $\|\underset{\sim}{u}\| \leq 1$)

Par conséquent $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\tau})$ est plus précisement un sous-espace de $(\bar{B}_1$, topologie faible $*$ relative$)$.

Comme $\bar{B}_1 \subset X'$ est une partie compacte de $(X'$, topologie faible $*)$ [ROY p 202]

Nous pouvons dire que $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\tau})$ est compact si:

$\underset{\sim}{M}$ est une partie fermée de $\bar{B}_1$ dans la topologie faible * relative [C]

Démontrons le.

Soit u^* un point de fermeture de $\underset{\sim}{M}$ dans la topologie faible * relative sur $\bar{B}_1$

Nous avons que $u^* \in \bar{B}_1$ c'est-à-dire u^* est une forme linéaire telle que $\| u^* \| \leq 1$

Il faut encore montrer que u^* est multiplicative c'est-à-dire $\forall x, y \in X$, $u^*(x * y) = u^*(x) \cdot u^*(y)$

Or u^* est un point de fermeture $\Rightarrow$ tout ouvert contenant u^* a une intersection non vide avec $\underset{\sim}{M}$:

$\forall \underset{\sim}{G}_{u^*} \quad \underset{\sim}{G}_{u^*} \cap \underset{\sim}{M} \neq \phi$

Prenons les ouverts (contenant u^*) suivants :

$\{ f \in \bar{B}_1 ; | f(x) - u^*(x) | < \varepsilon \}$

$\{ f \in \bar{B}_1 ; | f(y) - u^*(y) | < \varepsilon \}$

$\{ f \in \bar{B}_1 ; | f(x * y) - u^*(x * y) | < \varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$

Nous pouvons alors définir la classe d'ouverts $\{ N_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ contenant u^* tels que :

$$N_\varepsilon \triangleq \{ f \in \bar{B}_1 ; | f(x) - u^*(x) | < \varepsilon ; | f(y) - u^*(y) | < \varepsilon ; | f(x * y) - u^*(x * y) | < \varepsilon \}$$

Par conséquent $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_\varepsilon \in \underset{\sim}{M}$ tel que $u_\varepsilon \in N_\varepsilon$, d'où $\forall \varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
|\mu^*(x*y) - \mu^*(x).\mu^*(y)| &\leq |\mu^*(x*y) - \mu_\varepsilon(x*y)| + \\
&\quad |\mu_\varepsilon(x).\mu_\varepsilon(y) - \mu^*(x).\mu^*(y)| \\
&\leq |\mu^*(x*y) - \mu_\varepsilon(x*y)| + \\
&\quad |\mu_\varepsilon(x).(\mu_\varepsilon(y) - \mu^*(y))| + \\
&\quad |\mu^*(y).(\mu_\varepsilon(x) - \mu^*(x))| \\
&\leq |\mu^*(x*y) - \mu_\varepsilon(x*y)| + \\
&\quad \|x\|.|\mu_\varepsilon(y) - \mu^*(y)| + \\
&\quad \|y\|.|\mu_\varepsilon(x) - \mu^*(x)| \\
&\leq (1+\|x\|+\|y\|).\varepsilon
\end{aligned}
$$

ε arbitraire $\Rightarrow \mu^*(x*y) = \mu^*(x)\,\mu^*(y)$

Donc $(\underset{\sim}{\mathcal{M}}, \underset{\sim}{\tau})$ est compact

Par [a] , $(\mathcal{M}, \tau)$ et $(\underset{\sim}{\mathcal{M}}, \underset{\sim}{\tau})$ sont équivalents, et par conséquent $(\mathcal{M}, \tau)$ est un espace compact.

Notons $C(\mathcal{M})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues à valeurs complexes, définies sur l'espace compact séparé $\mathcal{M}$, les opérations étant :

$\forall f, g \in C(\mathcal{M})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

$(f+g)(M) = f(M) + g(M)$

$(\alpha.f)(M) = \alpha.f(M)$

$(f\cdot g)(M) = f(M).g(M)$

$\|f\| = \sup\limits_{M\in\mathcal{M}} |f(M)|$

Théorème 2

La fonction : $X \to C(\mathcal{M})$ est un homomorphisme

$$x \to \hat{x}(\cdot) : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$

continu

Démonstration

Nous savons par [1] que la fonction : $X \to C(\mathcal{M})$ est un

$$x \to \hat{x}(\cdot)$$

homomorphisme.

Il est continu car $\forall x_1 \in X$,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\| x_1 - x_2 \| < \delta \Rightarrow \| \hat{x}_1(M) - \hat{x}_2(M) \| < \varepsilon$

avec $x_2 \in X$ et $\sup\limits_{M \in \mathcal{M}} | \hat{x}_1(M) - \hat{x}_2(M) | = \| \hat{x}_1(M) - \hat{x}_2(M) \|$

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ car $\forall M \in \mathcal{M}$,

$$| \hat{x}_1(M) - \hat{x}_2(M) | = | (\widehat{x_1 - x_2})(M) | \leq \| x_1 - x_2 \|$$

Chapitre III

Mesures complexes

L'algèbre de Banach commutative $(\underset{\sim}{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$

III. 1 Introduction des mesures complexes et de leur variation totale

III. 1. 1 Définition de la variation totale pour une mesure réelle.

III. 1. 2. Théorèmes

III. 1. 3. Définition d'une mesure complexe et de sa variation totale - Propriétés

III. 2. L'algèbre de Banach commutative $(\underset{\sim}{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$

III. 2. 1. Définition de $\underset{\sim}{S}$ et des opérations sur $\underset{\sim}{S}$.

III. 2. 2. Mesurabilité d'une fonction complexe

III. 2. 3 Théorie de l'intégration dans $\mathbb{C}$

III. 2. 4. Mesure produit complexe.

III. 2. 5 Propriétés de $(\underset{\sim}{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$

III. Mesures complexes

L'algèbre de Banach commutative $(\underline{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$

III.1. Introduction des mesures complexes et de leur variation totale

III.1.1. Définition de la variation totale pour une mesure réelle

Soit P, la classe de tous les intervalles bornés, semi-fermés de la forme $[a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}^+$

Soit $\mathcal{E}$, la σ-algèbre engendrée par P.

C'est la σ-algèbre des ensembles boréliens [Appendice 5]

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ et soit a une mesure signée, finie sur l'ensemble des boréliens bornés (noté $\mathcal{E}_B$) :

Définition

$\forall E \in \mathcal{E}_B$, on définit $|a|(E) \stackrel{\Delta}{=} \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a|(E_i)$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions dénombrables de E ($E_i \cap E_j = \phi$ si $i \neq j$, $\forall i \in \mathbb{N}$ $E_i \in \mathcal{E}_B$ et $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$).

III.1.2. Théorèmes

Théorème 1

Si α est une mesure signée, finie sur $\mathcal{E}_B$ alors $|\alpha|$ est une fonction σ-additive sur $\mathcal{E}_B$:

- $|\alpha|(\phi) = 0$.
- Pour toute union dénombrable de boréliens bornés disjoints $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ t.q. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}_B$

$$|\alpha|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|(E_i)$$

$|\alpha|$ est finie sur $\mathcal{E}_B$

Lemme 1 [HAL, p121-123]

Soit $\mathcal{E}$ une σ-algèbre sur un ensemble X et $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une mesure signée (t.q. μ ne peut prendre une des valeurs $+\infty, -\infty$), il existe alors une partition $\{P, N\}$ de X où $P, N \in \mathcal{E}$ telle que les fonctions d'ensemble $\mu_+, \mu_- : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définies par :

$$\left.\begin{array}{l} \mu_+(E) = \mu(E \cap P) \\ \mu_-(E) = -\mu(E \cap N) \end{array}\right. \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

soient des mesures sur $\mathcal{E}$ vérifiant $\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$. Si μ est finie ou σ-finie, alors μ^+ et μ^- le sont aussi et au moins une des 2 mesures μ_+, μ_- est finie.

Lemme 2

Si μ est une mesure signée sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$, finie sur $\mathcal{E}_B$
alors $\forall E \in \mathcal{E}_B \quad |\mu|(E) = \mu_+(E) + \mu_-(E)$.

Démonstration du lemme 2

a) Par le lemme 1, comme μ est une mesure signée sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{E})$ on sait $\exists P, N \in \mathcal{E}$ t.q. si on définit

$\mu_+(E) = \mu(E \cap P)$

$\mu_-(E) = -\mu(E \cap N)$

alors μ_+, μ_- sont deux mesures

et $\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$

b) $$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \quad \forall E \in \mathcal{E}_B$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i \cap P) + \mu(E_i \cap N)|$$

où N, P sont les boréliens qui définissent μ_+ et μ_-

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_+(E_i) - \mu_-(E_i)|$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\mu_+(E_i)| + |\mu_-(E_i)| \right)$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu_+(E_i) + \mu_-(E_i) \right)$$

$$\sup \left(\underbrace{\mu_+\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}_{\mu_+(E)} + \underbrace{\mu_-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}_{\mu_-(E)} \right)$$

$$= \mu_+(E) + \mu_-(E)$$

Inversément :

Soit $E_1 = E \cap P$, $E_2 = E \cap N$; E_1, E_2 sont des ensembles mesurables disjoints t. q. $E_1 \cup E_2 = E$.

ils forment donc une partition de E

donc. $|\mu|(E) \geq |\mu(E_1)| + |\mu(E_2)|$ par définition du sup

$= \mu_+(E) + \mu_-(E)$

<u>Démonstration du théorème 1.</u>

Par les lemmes 1 et 2, puisque a est une mesure signée, il existe 2 mesures a_+ et a_- t.q.

$|a|(E) = a_+(E) + a_-(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_B$

Comme a est finie sur $\mathcal{E}_B$, a_+ et a_- le sont aussi sur $\mathcal{E}_B$ donc $|a|(E) \stackrel{\Delta}{=} \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a(E_i)| = a_+(E) + a_-(E)$

$\forall E \in \mathcal{E}_B$.

Comme a_+ et a_- sont des mesures on a :

$$a_\pm(\phi) = 0$$

$$a_\pm\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_\pm(E_i) \quad \text{avec } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}_B, \ E_i \cap E_j = \phi, \ i \neq j.$$

Donc $|a|(\phi) = a_+(\phi) + a_-(\phi) = 0$

$$|a|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = a_+\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + a_-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}_B$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_+(E_i) + a_-(E_i)\right)}_{|a|(E_i)} \quad \text{le } E_i \text{ disjoints}$$

donc $|\alpha|(.)$ est σ-additive et finie sur $\mathcal{E}_B$.

Extension de $|\alpha|(.)$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$.

Soit $E \in \mathcal{E}$

$$E_k = E \cap [k-1, k] \qquad E_k \in \mathcal{E}_B \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On définit $\quad |\alpha|(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|(E_k)$

où $\quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad$ et $|\alpha|(E_k) < \infty \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.

$|\alpha|(.)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$, c'est-à-dire :

- elle est à valeurs positives
- elle est σ-additive : pour toute subdivision dénombrable $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ de $E \in \mathcal{E}$: $|\alpha|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|(E_i)$

$|\alpha|(.)$ est une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$

Démonstration

Soit
$$\left.\begin{aligned} E_k &= E \cap [k-1, k] \\ E_{ik} &= E_i \cap [k-1, k] \end{aligned}\right\} \in \mathcal{E}_B \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\forall i \in \mathbb{N} \quad (E_{ik})_{k=1}^{\infty}$ est une subdivision dénombrable de E_i

$\forall k \in \mathbb{N} \quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " de E_k

Par la définition de l'extension

$$|a|(E_i) = \sum_{k=1}^{\infty} |a|(E_{ik}) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

$$|a|(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |a|(E_k)$$

Par additivité dénombrable :

$$|a|(E_k) = \sum_{i=1}^{\infty} |a|(E_{ik})$$

donc $|a|(E) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |a|(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a|(E_{ik})$

$$\stackrel{\text{lemme 3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a|(E_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |a|(E_i)$$

$|a|(.)$ est bien σ-finie par définition :

$\forall E \in \mathcal{E}$ $\exists$ une suite $(E_k)_k \in \mathcal{E}$ t.q.

$|a|(E_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ∎

Lemme 3 (Tonnelli sous forme discrète) [WAR p. 44]

Soit $\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right)_{m,n=1}^{\infty}$ une série doublement indexée avec $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$, alors cette série converge dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ et plus précisément :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

Théorème 3

L'extension σ-finie de $|a|(\cdot)$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ est unique

Démonstration

Soit μ une extension σ-finie de $|a|(\cdot)$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$

Soit $E \in \mathcal{E}$ $\quad E_k = E \cap [k-1, k]$ $\quad k \in \mathbb{N}$.

par addition dénombrable et comme μ est une extension $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |a|(E_k)$

donc pour chaque extension μ de $|a|(\cdot)$ et chaque $E \in \mathcal{E}$, il y a une seule valeur de $\mu(E)$ c.à.d. l'extension est unique.

Remarques

- L'extension de $|a|(\cdot)$ peut s'écrire :

  $|a|(\cdot) = a_+(\cdot) + a_-(\cdot)$ puisque :

  $\forall E \in \mathcal{E}_B \ |a|(E) = a_+(E) + a_-(E)$ et que a est une mesure signée sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ donc $a_+(\cdot)$ et $a_-(\cdot)$ sont des mesures définies sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$
- $|a|(\cdot)$ est appelée la variation totale de $a(\cdot)$

III.1.3 Définition d'une mesure complexe et de sa variation totale - Propriétés

Définition 1

1) On appelle mesure complexe sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ une fonction d'ensemble $\underset{\sim}{a}$ définie par :

$\forall E \in \mathcal{E} \quad \hat{a}(E) = \hat{a}_R(E) + i\,\hat{a}_I(E)$

où $\hat{a}_R(.)$ et $\hat{a}_I(.)$ sont des mesures signées dans le sens de Halmos

2) On appelle mesure complexe localement finie toute mesure complexe, finie sur $\mathcal{E}_B$ c-à-d si $\forall E \in \mathcal{E}_B \quad \hat{a}(E) = \hat{a}_R(E) + i\,\hat{a}_I(E)$

$\hat{a}_R$ et $\hat{a}_I$ sont des mesures signées finies sur $\mathcal{E}_B$

Définition 2.

La variation totale $|\underset{\sim}{a}|(.)$ d'une mesure complexe sur $\mathcal{E}_B$ est définie par $|\underset{\sim}{a}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i)| \ \forall E \in \mathcal{E}_B$

où $|\underset{\sim}{a}(E_i)| \overset{\Delta}{=} |\hat{a}_R(E_i)| + |\hat{a}_I(E_i)|$

et le sup est pris sur toutes les subdivisions possibles de E en une union disjointe de E_i boréliens bornés.

Remarque

Dans cette dernière définition, on a choisi la norme somme qui convient particulièrement bien pour l'additivité des mesures. Pourtant, il faut se rappeler que toute norme dans $\mathbb{R}^2$ ($= \mathbb{C}$) est équivalente à la norme somme.

Théorème 4

$$|\underset{\sim}{a}|(E) \leq |\hat{a}_R|(E) + |\hat{a}_I|(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_B$$

Démonstration

$$\forall E \in \mathcal{E}_B \quad |\hat{a}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i)|$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\hat{a}_R(E_i)| + |\hat{a}_I(E_i)| \right)$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a}_R(E_i)| + \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a}_I(E_i)|$$

$$= |\underset{\sim}{a}_R|(E) + |\hat{a}_I|(E)$$

Remarque

Ce théorème implique : $\forall E \in \mathcal{E}_B \; |a|(E) < \infty$

car par ce qu'on a vu précédemment, on sait que

$$\left.\begin{array}{l} |\hat{a}_R|(E) < \infty \\ |\hat{a}_I|(E) < \infty \end{array}\right\} \forall E \in \mathcal{E}_B$$

Théorème 5

$\forall E \in \mathcal{E}_B \qquad |\underset{\sim}{a}|(E) = |\underset{\sim}{a}_R|(E) + |\underset{\sim}{a}_I|(E)$

Démonstration

Par le théorème 4, on a déjà $|a|(E) \leq |\underset{\sim}{a}_R|(E) + |\underset{\sim}{a}_I|(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}_B$

Démontrons que $\forall E \in \mathcal{E}_B$ $|\underset{\sim}{a}|(E) \geq |\underset{\sim}{a}_R|(E) + |\underset{\sim}{a}_I|(E)$

Par définition de $|\underset{\sim}{a}_R|(E)$ et $|\underset{\sim}{a}_I|(E)$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists (E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_B$ et $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_B$: des subdivisions dénombrables de E t.q.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_R(E_i)| \geq |\underset{\sim}{a}_R|(E) - \varepsilon/2$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_I(E_j)| \geq |\underset{\sim}{a}_I|(E) - \varepsilon/2$$

Soit $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ une subdivision dénombrable de E engendrée par la fusion de $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ et $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ c.a.d:

$\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists N(i) \subset \mathbb{N}$ t.q. $E_i = \bigcup_{k \in N(i)} E_k$ où l'union est disjointe et $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k \in N(i)} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists N(j) \subset \mathbb{N}$ t.q. $E_j = \bigcup_{k \in N(j)} E_k$ où l'union est disjointe et $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \in N(j)} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

Par la σ-additivité de $\underset{\sim}{a}_R$ et $\underset{\sim}{a}_I$ et l'inégalité triangulaire :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad |\underset{\sim}{a}_R(E_i)| = |\underset{\sim}{a}_R(\bigcup_{k \in N(i)} E_k)| = |\sum_{k \in N(i)} \underset{\sim}{a}_R(E_k)|$$

$$\leq \sum_{k \in N(i)} |\underset{\sim}{a}_R(E_k)|$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad |\underset{\sim}{a}_I(E_j)| = |\underset{\sim}{a}_I(\bigcup_{k \in N(j)} E_k)| = |\sum_{k \in N(j)} \underset{\sim}{a}_I(E_k)|$$

$$\leq \sum_{k \in N(j)} |\underset{\sim}{a}_I(E_k)|$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_R(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k \in N(i)} |\underset{\sim}{a}_R(E_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_R(E_k)|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_I(E_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in N(j)} |\underset{\sim}{a}_I(E_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_R(E_k)|$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (E_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_B$ subdivision de E

t.q.
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_R(E_k)| \geq |\underset{\sim}{a}_R|(E) - \varepsilon/2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_I(E_k)| \geq |\underset{\sim}{a}_I|(E) - \varepsilon/2 \end{cases}$$

Si on additionne ces 2 inégalités :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(|\underset{\sim}{a}_R(E_k)| + |\underset{\sim}{a}_I(E_k)|\right)}_{|\underset{\sim}{a}(E_k)|} \geq |\underset{\sim}{a}_R|(E) + |\underset{\sim}{a}_I|(E) - \varepsilon$$

$$|\underset{\sim}{a}|(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\underset{\wedge}{a}(E_k)| \geq |\underset{\wedge}{a}_R|(E) + |\underset{\wedge}{a}_I|(E) - \varepsilon$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a :

$$|\underset{\sim}{a}|(E) \geq |\underset{\wedge}{a}_R|(E) + |\underset{\wedge}{a}_I|(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_B$$

Remarque

Si $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ est une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{E}_B$ t.q. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}_B$, alors les séries $\sum_{i=1}^{\infty} \underset{\wedge}{a}_R(E_i)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \underset{\wedge}{a}_I(E_i)$ sont absolument convergentes.

En effet : $|\underset{\wedge}{a}_{\substack{R\\I}}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\wedge}{a}_{\substack{R\\I}}(E_i)| < \infty \; \forall E \in \mathcal{E}_B$

Par les théorème 2 et 3, on sait que $|\underset{\wedge}{a}_R|(.)$ et $|\underset{\wedge}{a}_I|(.)$

- sont finies et σ-additives sur $\mathcal{E}_B$
- admettent une extension unique sur $\mathcal{E}$ comme mesure σ-finie

En conséquence, en utilisant le théorème 4 et une définition d'extension similaire à celle de la f. 6 on obtient que $|a|(.)$

- est finie et σ-additive sur $\mathcal{E}_B$.
- admet une extension unique sur $\mathcal{E}$ comme mesure σ-finie

d'où

> **Théorème 6**
>
> Soit $\underset{\sim}{a}$ une mesure complexe localement finie alors sa variation totale $|a|$ est une mesure σ-finie sur $\mathcal{E}$

III.2. L'algèbre de Banach commutative $(\underset{\sim}{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$

III.2.1. Définition de $\underset{\sim}{S}$ et des opérations sur $\underset{\sim}{S}$

Définition

On dénote par $\underset{\sim}{S}$, l'espace des mesures complexes à variation bornée c'est-à-dire t.q. $|\hat{a}|(\mathbb{R}^+) < \infty$

Considérons le triple $(\underset{\sim}{S}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ pour lequel on a :

1°) la norme définie par : $\|\hat{a}\| = |\hat{a}|(\mathbb{R}^+)$ $\forall \hat{a} \in \underset{\sim}{S}$

2°) l'addition sera l'application : $\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{S} \longrightarrow \underset{\sim}{S}$

$$(\hat{a}, \hat{b}) \rightsquigarrow \hat{a} + \hat{b}$$

où $\hat{a} + \hat{b}\,(E) \triangleq \hat{a}(E) + \hat{b}(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \underset{\sim}{S}$

3°) la multiplication scalaire sera l'application : $\mathbb{C} \times \underset{\sim}{S} \longrightarrow \underset{\sim}{S}$

$$(\alpha, \hat{a}) \rightsquigarrow \alpha \hat{a}$$

où $\alpha \hat{a}(E) \triangleq \alpha \cdot \hat{a}(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$, $\hat{a} \in \underset{\sim}{S}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

4°) la multiplication $*$ appelée <u>convolution</u> (de mesures) sera l'application : $\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{S} \longrightarrow \underset{\sim}{S}$

$$(\hat{a}, \hat{b}) \rightsquigarrow \hat{a} * \hat{b}$$

où $\hat{a} * \hat{b}\,(E) \triangleq \hat{a} \times \hat{b}\,(E^\nabla)$ $\forall E \in \mathcal{E}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \underset{\sim}{S}$

où $E^\nabla \in (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}^2)$ l'espace mesurable qui est produit cartésien de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ par $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ [HAL p. 137] reste à définir et $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ est la mesure complexe produit de $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$ qui sera définie plus tard aussi

<u>Remarque</u>

1) Observez qu'une mesure à variation bornée est une mesure localement finie.

En effet, par définition de variation totale

$$|\underset{\sim}{a}(\mathbb{R}^+)| \leq |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+)$$

Par l'extension du théorème A [HAL. p 118]

$\forall E \in \mathcal{E}_B \qquad E \subset \mathbb{R}^+$ et $|\underset{\sim}{a}(\mathbb{R}_+)| < \infty$.

$$\Rightarrow \quad |\underset{\sim}{a}(E)| < \infty$$

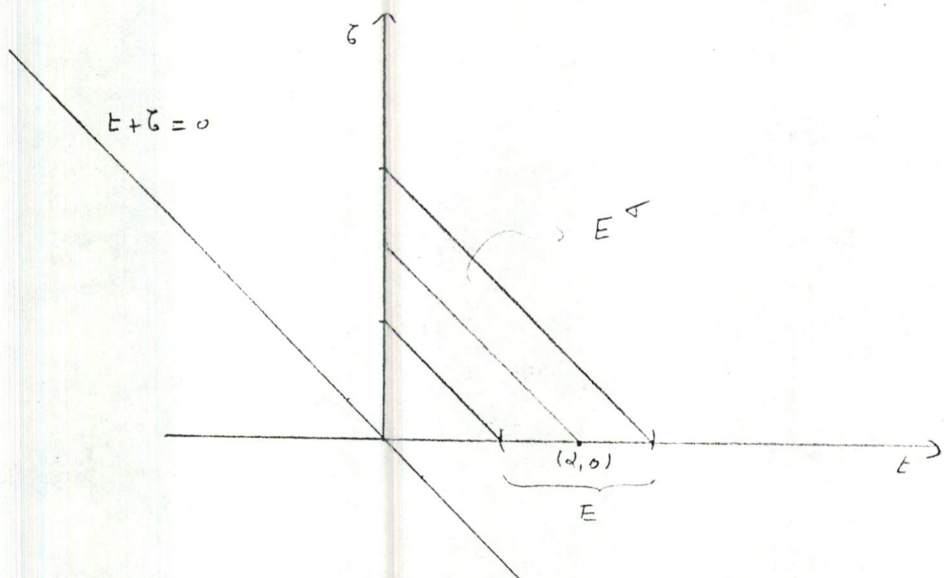
c.à.d $\underset{\sim}{a}$ est une mesure complexe localement finie

2) Par sa définition une mesure $\underset{\sim}{a}$ à variation bornée est une mesure localement finie dont la variation totale est une mesure <u>finie</u>

Définition de E^σ

Soit $E \in \mathcal{E}$, considérons l'ensemble $E^\sigma \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ défini par :

$$E^\sigma = \{ (t, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ , \ t + \tau \in E \}$$



On observe que $\{ (t, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ , \ t + \tau = \alpha , \ \alpha \in \mathbb{R}^+ , \alpha \text{ fixé} \}$ est un segment de droite, dans le plan (t, τ), // à $\{ (t, \tau) \text{ t.q. } t + \tau = 0 \}$ dont l'intersection avec l'axe des t est α. Donc, pour représenter E^σ dans le plan (t, τ) il suffit de faire varier α sur l'axe des t t.q. $\alpha \in E$ et alors dessiner des lignes dans $\mathbb{R}^{+2}$ // à $t + \tau = 0$ pour tout point $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \in E$.

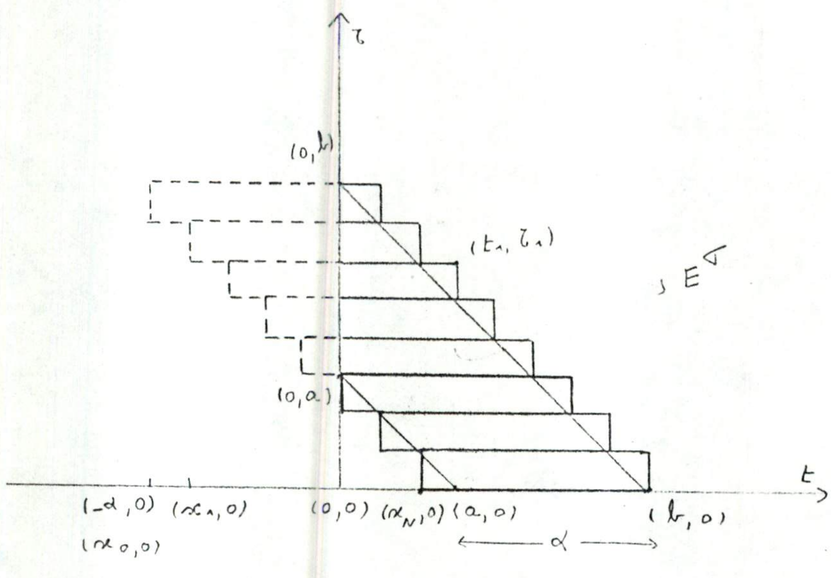
Théorème 1

$E^{\sigma} \in \mathcal{E}^2$ = la plus petite σ-algèbre contenant les rectangles $E \times F$ $E, F \in \mathcal{E}$ c. à d E^{σ} est mesurable dans $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{E}^2)$ produit cartésien de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ par $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$

Démonstration.

Soit $E = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}^+$

On sait que $\forall E \in \mathcal{E}$, E peut être obtenu à partir de segments du type $[a, b]$



On recouvre la section E^{σ} par des rectangles

Pour cela, on prend un pas h t. q.

$$a - h + \alpha = Nh \longrightarrow h = \frac{a + \alpha}{N + 1} = \frac{b}{N + 1} \qquad N \in \mathbb{N}.$$

t. q. $x_0 = -\alpha$

$$x_1 = -\alpha + h$$

$$x_n = -\alpha + nh$$

$$x_N = -\alpha + Nh = -\alpha + a + \alpha - h = a - h.$$

les rectangles du recouvrement sont de la forme :

$$B_i \equiv [[-\alpha + ih, (i+1)h] \cap \mathbb{R}^+] \times [b - ih, b-(i+1)h]$$

$$i = 0, \dots N$$

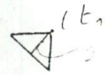
$$E^\sigma \subset \bigcup_{i=0}^{N} B_i$$

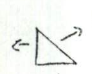
$$E^\sigma = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N} B_i \quad , \text{ en effet :}$$

Soit $(t, \tau) \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N} B_i \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \; (t,\tau) \in \bigcup_{i=1}^{N} B_i$

et $d((t,\tau), E^\sigma) \leq \dfrac{h}{\sqrt{2}} = \underbrace{\dfrac{b}{(N+1)\cdot\sqrt{2}}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ N \to \infty}}$

$\dfrac{h}{\sqrt{2}} = d((t_1,\tau_1), E^\sigma)$ où $(t_1,\tau_1) = 1$ sommet quelconque d'un petit triangle du recouvrement qui n'est pas dans E^σ (cf. dessin)

en effet :  (t_1,τ_1) $d((t_1,\tau_1), E^\sigma)$

 h H h $\qquad H^2 = h^2 + h^2 \Rightarrow H = \sqrt{2h^2} = \sqrt{2}\, h$

$$(d((t_1,\tau_1), E^\sigma))^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\cdot h}{2}\right)^2 = h^2$$

donc $d((t_1, \tau_1), E^\nabla) = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$

Comme $h = \dfrac{b}{N+1}$, on a bien que $d((t_1, \tau_1), E^\nabla) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

et puisque E^∇ est fermé $\Rightarrow (t, \tau) \in E^\nabla$.

$$\Rightarrow \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N} B_i = E^\nabla$$

Nous allons maintenant citer un certain nombre de résultats quant à la mesurabilité et l'intégration de fonctions complexes par rapport à des mesures complexes.

III.2.2. Mesurabilité d'une fonction complexe

Soit $(\overline{IR}, \bar{\mathcal{E}})$ un espace mesurable d'ensembles boréliens de la droite réelle étendue, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre contenant les ensembles du type $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$, $[a, b) \subset IR$.

Soit $(\overline{\mathbb{C}}, \bar{\mathcal{E}}^2)$ l'espace produit mesurable de $(\overline{IR}, \bar{\mathcal{E}})$ par $(\overline{IR}, \bar{\mathcal{E}})$, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre de sous-ensembles de $\overline{IR}^2$ contenant les rectangles $E \times F$
$E \in \bar{\mathcal{E}}$, $F \in \bar{\mathcal{E}}$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition

On dit que $f : (\mathbb{R}^+, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \bar{\mathcal{E}}^2)$

est borel mesurable (borélienne) si

$\forall M \in \bar{\mathcal{E}}^2 \quad f^{-1}(M) \in \mathcal{E}$

En conséquence, si f_R et f_I sont les parties réelles et imaginaires de f alors on a :

Théorème f est Borel mesurable si $f_R : (\mathbb{R}^+, \mathcal{E}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{E}})$ et $f_I : (\mathbb{R}^+, \mathcal{E}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{E}})$ sont borel mesurables c-à-d $\forall E \in \bar{\mathcal{E}}$ $\left.\begin{matrix} f_R^{-1}(E) \\ f_I^{-1}(E) \end{matrix}\right\} \in \mathcal{E}$

Démonstration

Si $f = f_R + i f_I$ est Borel mesurable alors pour chaque rectangle $E \times F$ $E \in \bar{\mathcal{E}}$, $F \in \bar{\mathcal{E}}$ $f^{-1}(E \times F) \in \mathcal{E}$

Soit $F = \bar{\mathbb{R}}$, on obtient que

$\forall E \in \bar{\mathcal{E}} \quad f^{-1}(E \times \bar{\mathbb{R}}) = f_R^{-1}(E) \in \mathcal{E}$

c-à-d. f_R est Borel mesurable

De même en posant $E = \overline{\mathbb{R}}$, on obtient que :

$\forall F \in \overline{\mathcal{E}} \quad f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \times F) = f_I^{-1}(F) \in \mathcal{E}$

c.à.d f_I est Borel mesurable.

Inversément :

Etant donné que $\overline{\mathcal{E}}^2$ est la plus petite σ-algèbre contenant les rectangles $E \times F \quad E, F \in \overline{\mathcal{E}}$

et comme l'image inverse préserve les opérations sur les ensembles, il est suffisant de démontrer que $\forall\ E \times F \in \overline{\mathcal{E}}^2 \quad E, F \in \overline{\mathcal{E}} \quad f^{-1}(E \times F) \in \mathcal{E}$.

or $f^{-1}(E \times F) = f_R^{-1}(E) \cap f_I^{-1}(F)$

f_R, f_I sont mesurables $\Rightarrow f_R^{-1}(E), f_I^{-1}(E) \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow f_R^{-1}(E) \cap f_I^{-1}(E) = f^{-1}(E \times F) \in \mathcal{E}$ par les propriétés d'une σ-algèbre ∎

III. 2.3 Théorie de l'intégration dans $\mathbb{C}$

Soit donné l'espace mesuré $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{a})$ où $\underset{\sim}{a}$ est une mesure complexe finie.

Définition 1

a) Une fonction f borélienne simple par rapport à $\underset{\sim}{a}$ est une fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$$

où

1°) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont des nombres complexes

2°) $E_1, E_2, \ldots E_n$ sont des ensembles boréliens t.q.

$$|\hat{a}(E_k)| < \infty \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

donc aussi $|\hat{a}|(E_k) < \infty$ cfr. [NAR] p 53

3°) χ_E est la fonction caractéristique de E

b) on définit

$$\int f \, d\hat{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \hat{a}(E_k).$$

Les fonctions simples forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Si f est une fonction simple alors $|f|$ est une fonction simple et

$$\left| \int f \, d\hat{a} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, |\hat{a}|(E_k) = \int |f| \, d|\hat{a}|$$

<u>Définition 2</u>

a) Une fonction f Borélienne finie presque partout est intégrable par rapport à $\hat{a}$ s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) t.q.

<u>1°)</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est une fonction borélienne simple par rapport à $\hat{a}$

2°) (f_n) est une suite de Cauchy en moyenne par rapport à $|\underset{\sim}{a}|$, c.à.d

$$\lim_{m,n\to\infty} \int |f_m - f_n| \, d|\underset{\sim}{a}| = 0$$

3°) f_n converge vers f en mesure par rapport à $|\underset{\sim}{a}|$, c.à.d :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} |\underset{\sim}{a}| \left(\{ t : |f(t) - f_n(t)| \geq \varepsilon \} \right) = 0$$

b) Si f est intégrable alors pour toute suite ayant les propriétés 1, 2, 3, la suite $\left(\int f_n \, d\underset{\sim}{a} \right)$ converge et la limite (indépendante du choix de (f_n)) est notée $\int f \, d\underset{\sim}{a}$

Propriétés

Notons la classe des fonctions intégrables par rapport à $\underset{\sim}{a}$ par $L^1(d\underset{\sim}{a})$. $L^1(d\underset{\sim}{a})$ est un espace vectoriel et la fonction $f \longmapsto \int f \, d\underset{\sim}{a}$ est une forme linéaire sur $L^1(d\underset{\sim}{a})$

Remarquons que la fonction borélienne f est dans $L^1(d\underset{\sim}{a})$ si $|f|$ est dans $L^1(d|\underset{\sim}{a}|)$ et si en regardant les parties réelles et imaginaires $f_R \in L^1(d\underset{\sim}{a}_R) \cap L^1(d\underset{\sim}{a}_I)$ et $f_I \in L^1(d\underset{\sim}{a}_R) \cap L^1(d\underset{\sim}{a}_I)$

Dans ce cas :

$$\int f \, d\underset{\sim}{a} = \int f_R \, d\underset{\sim}{a}_R - \int f_I \, d\underset{\sim}{a}_I + i\left(\int f_R \, d\underset{\sim}{a}_I + \int f_I \, d\underset{\sim}{a}_R \right)$$

En regardant les parties positives et négatives de $\underset{\sim}{a}_R$ et $\underset{\sim}{a}_I$, on a encore :

$$\int f\, d\underset{\sim}{a} = \int f_R\, d\underset{\sim}{a}_{R+} - \int f_R\, d\underset{\sim}{a}_{R-} - \int f_I\, d\underset{\sim}{a}_{I+} + \int f_I\, da_{I-}$$

$$+ i \left\{ \int f_R\, d\underset{\sim}{a}_{I+} - \int f_R\, d\underset{\sim}{a}_{I+} + \int f_I\, d\underset{\sim}{a}_{R+} - \int f_I\, d\underset{\sim}{a}_{R-} \right\}$$

où les dernières intégrales sont des intégrales par rapport à des mesures positives dans le sens usuel dont les propriétés sont bien connues [HAL p. 95]

Quand f est dans $L^1(d\underset{\sim}{a})$ alors

$$\left| \int f\, d\underset{\sim}{a} \right| \leq \int |f|\, d|\underset{\sim}{a}|$$

$\forall E \in \mathcal{E} \quad \nu(E) = \int_E f\, d\underset{\sim}{a}$ définit une mesure complexe finie qui est absolument continue c.a.d

si $|a|(E) = 0 \implies |\nu(E)| = 0$

Un résultat de base de la théorie d'intégration est le théorème de Lebesgue dominée.

Si (f_n) est une suite de fonctions $\underset{\sim}{a}$-intégrables t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ existe presque partout et s'il existe une fonction g $\underset{\sim}{a}$-intégrable (donc aussi $|g|$ est $|\underset{\sim}{a}|$-intégrable) telle que $|f_n| \leq |g|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ alors f est intégrable et

$$\int f\, d\underset{\sim}{a} = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\underset{\sim}{a}$$

Un autre théorème de base est <u>le théorème de Fubini</u>

Supposons que $|\underset{\sim}{a}|$ est une mesure finie et que f est une fonction borélienne sur l'espace mesurable produit $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{E}^2)$ alors :

$|f(t,\tau)|$ est $|\underset{\sim}{a}|$ - intégrable en t $\forall \tau$ fixé

$|f(t,\tau)|$ " " " en τ $\forall t$ "

et $\int [\int |f(t,\tau)|\, d_t |\underset{\sim}{a}|]\, d_\tau |\underset{\sim}{a}|$

$$= \int [\int |f(t,\tau)|\, d_\tau |\underset{\sim}{a}|]\, d_t |\underset{\sim}{a}|$$

où la valeur commune des quantités peut être infinie mais dès qu'elle est finie on a :

$$\int [\int f(t,\tau)\, d_t \underset{\sim}{a}]\, d_\tau \underset{\sim}{a} = \int [\int f(t,\tau)\, d_\tau \underset{\sim}{a}]\, d_t \underset{\sim}{a} \in \mathbb{C}$$

III.2.4. <u>Mesure produit complexe</u>

Soient $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ $\in \underset{\sim}{S}$

Soit $E^2 \in (\mathbb{R}_+^2, \mathcal{E}^2)$ l'espace mesurable produit de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ par $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$

Soit $E_\tau^2 = \{ t \cdot (t,\tau) \in E^2 \}$ la τ-section de E^2

$E_t^2 = \{ \tau \cdot (t,\tau) \in E^2 \}$ la t-section de E^2

alors

$\forall \tau \in \mathbb{R}^+ \quad E_\tau^2 \in \mathcal{E}$ [HAL] 1 141

$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad E_t^2 \in \mathcal{E}$

Théorème 1.

Soient $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{a})$ et $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{b})$ t.q. $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

Soit $E^2 \in (\mathbb{R}^+_2\ \mathcal{E}^2)$

alors les fonctions f et g définies par :

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad t \longrightarrow \underset{\sim}{b}(E^2_t) \\ \\ g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad \tau \longrightarrow \underset{\sim}{a}(E^2_\tau) \end{array}\right\} \text{ sont boréliennes}$$

et $\int \underset{\sim}{b}(E^2_t)\, d_t \underset{\sim}{a} = \int \underset{\sim}{a}(E^2_\tau)\, d_\tau \underset{\sim}{b}. \in \mathbb{C}$

de plus $\int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t |\underset{\sim}{a}| = \int |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\underset{\sim}{b}| < \infty$

Démonstration

Observons que par les hypothèses et [Halmos p. 143]

on obtient que $t \longmapsto |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)$ et $t \longmapsto |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)$

sont des fonctions non négatives boréliennes intégrables

et $\int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t |\underset{\sim}{a}| = \int |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\underset{\sim}{b}| < \infty$. (1)

Soit maintenant donné un rectangle mesurable c. à. d

$E^2 = E \times F \qquad E, F \in \mathcal{E}$ alors

$$f = \underset{\sim}{b}(F)\, \chi_E \qquad g = \underset{\sim}{a}(E)\, \chi_F \text{ sont boréliennes}$$

et $\int \underset{\sim}{b}(E^2_t)\, d_t \underset{\sim}{a} = \int f(t)\, d_t \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}(E) \cdot \underset{\sim}{b}(F) = \int g(t)\, dt$

$$= \int \underset{\sim}{a}(E^2_\tau)\, d_\tau \underset{\sim}{b}$$

De même si $E^2 \in \mathcal{E}^2$ est une réunion finie de rectangles mesurables c.à.d $E^2 = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i$

alors $f = \sum_{i=1}^{n} b(F_i)\chi_{E_i}$ et $g = \sum_{i=1}^{n} \underset{\frown}{a}(E_i)\chi_{F_i}$

sont boréliennes et :

$$\int \underset{\frown}{b}(E^2_t)\, d_t \underset{\frown}{a} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\frown}{a}(E_i)\,\underset{\frown}{b}(F_i) = \int \underset{\frown}{a}(E^2_\tau)\, d_\tau \underset{\frown}{b} \quad (2)$$

Finalement tout ensemble mesurable $E^2 \in \mathcal{E}^2$ est limite d'une suite croissante d'ensembles (E^2_n) t.q $\forall n$ E_n est une réunion disjointe de rectangles mesurables

Par la continuité monotone d'une mesure, on obtient que les fonctions

$$f : t \longmapsto \underset{\frown}{b}(E^2_t) = \lim_n \underset{\frown}{b}(E^2_{nt}) \in \mathbb{C}$$

$$g : t \longmapsto \underset{\frown}{a}(E^2_\tau) = \lim_n \underset{\frown}{a}(E^2_{n\tau}) \in \mathbb{C}$$

existent et sont boréliennes car une fonction qui est limite de fonctions boréliennes (mesurables) est elle-même borélienne

En outre

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |\underset{\frown}{b}(E^2_{nt})| \leq |\underset{\frown}{b}|(E^2_{nt}) \leq |b|(E^2_t)$ qui est $\underset{\frown}{a}$-intégrable par (1)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |\underset{\frown}{a}(E^2_{n\tau})| \leq |\underset{\frown}{a}|(E^2_{n\tau}) \leq |\underset{\frown}{a}|(E^2_\tau)$ qui est $\underset{\frown}{b}$-intégrable par (1)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \int \underset{\frown}{b}(E^2_{nt})\, d_t \underset{\frown}{a} = \int \underset{\frown}{a}(E^2_{n\tau})\, d_\tau \underset{\frown}{b}$ par (2)

Il suit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$\forall\, E^2 \in \mathcal{E}^2$

$$\int \underset{\sim}{b}(E^2_t)\, d_t\, \underset{\sim}{a} = \lim_n \int b(E^2_{nt})\, d_t\, \underset{\sim}{a} = \lim_n \int \underset{\sim}{a}(E^2_{n\tau})\, d_\tau\, \underset{\sim}{b}$$
$$= \int \underset{\sim}{a}(E^2_\tau)\, d_\tau\, \underset{\sim}{b}.$$

■

Théorème 2

Soient $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{a})$ et $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{b})$ t.q. $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$ alors la fonction d'ensemble d définie pour tout $E^2 \in \mathcal{E}^2$ par :

$$d(E^2) = \int \underset{\sim}{b}(E^2_t)\, d_t\, \underset{\sim}{a} = \int \underset{\sim}{a}(E^2_\tau)\, d_\tau\, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{C} \quad (I)$$

est une mesure complexe à variation bornée.

De plus, la variation totale $|d|$ de d est une mesure finie donnée $\forall\, E \in \mathcal{E}^2$ par :

$$|d|(E^2) = \int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t\, |\underset{\sim}{a}| = \int |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau\, |\underset{\sim}{b}| \in \mathbb{R}^+ \quad (II)$$

où $|d|(\mathbb{R}^+) = |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) \cdot |\underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+) < \infty$. (II a)

En outre pour tout rectangle mesurable $E \times F \in \mathcal{E}^2$

$$d(E \times F) = a(E) \cdot b(F) \quad (III)$$

Démonstration

Il suit du théorème 1 que (I) définit une fonction d'ensemble $d : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ finie sur tout $\mathcal{E}^2$

On a $d(\phi) = 0$ et d est additif

On a aussi que λ est σ-additive : en effet soit $\bigcup_n E^2_n$ une réunion dénombrable d'éléments E^2_n disjoints de E^2 alors $\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_n\right)_{j=1}^{\infty}$ est une suite monotone croissante t.q. $E^2_n = \lim_j \bigcup_{n=1}^{j} E^2_n$ et par la continuité monotone des mesures, les fonctions :

$$f : t \longmapsto \underset{\sim}{b}(E^2_t) = \lim_j \underset{\sim}{b}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{nt}\right)$$

$$g : t \longmapsto \underset{\sim}{a}(E^2_\tau) = \lim_j \underset{\sim}{a}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{n\tau}\right)$$

existent et sont boréliennes (mesurables).

Comme par le théorème 1 :

$$\int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t |\underset{\sim}{a}| = \int |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\underset{\sim}{b}| < \infty.$$

et comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\underset{\sim}{b}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{nt}\right)\right| \leq |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)$

et $\left|\underset{\sim}{a}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{n\tau}\right)\right| \leq |\underset{\sim}{a}|(E^2_{n\tau})$, on obtient par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\lambda(E^2) = \lim_{j\to\infty} \int \underset{\sim}{b}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{nt}\right) d_t \underset{\sim}{a} \underset{\lambda \text{ est additive}}{=} \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \int \underset{\sim}{b}(E^2_{nt})\, d_t \underset{\sim}{a}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int \underset{\sim}{a}\left(\bigcup_{n=1}^{j} E^2_{n\tau}\right) d_\tau \underset{\sim}{b} = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \int \underset{\sim}{a}(E^2_{nt})\, d_\tau \underset{\sim}{b}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \lambda(E^2_n)$$

Il suit que λ est une mesure complexe finie sur tout $\mathcal{E}^2$ et on a bien que :

$$\forall E \times F \in \mathcal{E}^2 \qquad \lambda(E \times F) = \underset{\sim}{a}(E) \cdot \underset{\sim}{b}(F).$$

En outre pour tout rectangle $E^2 = E \times F \in \mathcal{E}^2$

$$|d|(E^2) = |d|(E \times F) = |a|(E) \cdot |b|(F) \quad (\mathrm{VI})$$

$$= \int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t |\underset{\sim}{a}|$$

$$= \int |\underset{\sim}{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\underset{\sim}{b}|$$

En effet :

Soit (E^2_i) n'importe quelle subdivision dénombrable de $E \times F$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d(E^2_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int \underset{\sim}{b}(E^2_{it})\, d_t \underset{\sim}{a} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int |\underset{\sim}{b}|(E^2_{it})\, d_t |\underset{\sim}{a}|$$

$$= \int |\underset{\sim}{b}|(E^2_t)\, d_t |\underset{\sim}{a}|$$

$$= |\underset{\sim}{b}|(F) \cdot |\underset{\sim}{a}|(E)$$

d'où en prenant le sup sur toutes les subdivisions de $E \times F$

$$|d|(E \times F) \leq |\underset{\sim}{a}|(E) \cdot |\underset{\sim}{b}|(F) \quad (\mathrm{VII})$$

Soient maintenant (E^n_i) et (F^n_j) des suites de subdivisions de E et F telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E^n_i)| \xrightarrow[n \to \infty]{} |\underset{\sim}{a}|(E) \text{ et } \sum_{j=1}^{\infty} |\underset{\sim}{b}(F^n_j)| \xrightarrow[n \to \infty]{} |\underset{\sim}{b}|(F)$$

Alors $(E^n_i \times F^n_j)$ est une suite de subdivisions de $E \times F$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |d(E^n_i \times F^n_j)| = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E^n_i)| \cdot |\underset{\sim}{b}(E^n_j)|$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E^n_i)| \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\underset{\sim}{b}(F^n_j)| \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} |\underset{\sim}{a}|(E) \cdot |\underset{\sim}{b}|(E)$$

Donc en prenant le sup sur toutes les subdivisions

$$|\hat{d}|(E \times F) \geq |\hat{a}|(E) \cdot |\hat{b}|(F) \qquad (\boxed{\text{VIII}})$$

On a donc que $\underline{\text{VI}}$ est une conséquence de $\underline{\text{VII}}$ et ($\underline{\text{VIII}}$)

Finalement en se rappelant la structure de tout ensemble mesurable $E^2 \in \mathcal{E}^2$ et en utilisant ($\underline{\text{IV}}$), la continuité monotone des mesures et le théorème de convergence dominée on obtient que:

$$|\hat{d}|(E^2) = \int |\hat{a}|(E^2_t)\, d_t |\hat{b}| = \int |\hat{b}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\hat{a}|$$

où $|\hat{d}|(\mathbb{R}^2_+) = |\hat{a}|(\mathbb{R}^+)\, |\hat{b}|(\mathbb{R}^+) < \infty$.

est une mesure finie donc $\hat{d}$ est à variation bornée ∎

Nous sommes maintenant en état de définir une mesure produit complexe

Définition

Soient $\hat{a}, \hat{b} \in \underset{\sim}{S}$ deux mesures complexes à variation bornée sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$

alors la mesure complexe produit à variation bornée $\hat{d}$ sur $(\mathbb{R}^2_+, \mathcal{E}^2)$ du théorème 2 est par définition la mesure produit complexe de $\hat{a}$ par $\hat{b}$ notée

$$\hat{d} = \hat{a} \times \hat{b}$$

Théorème 3

Soient $\underset{\sim}{\hat{a}}, \underset{\sim}{\hat{b}} \in \underset{\sim}{S}$ deux mesures complexes sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ alors leur mesure produit complexe $\hat{a} \times \hat{b}$ sur $(\mathbb{R}^2_+, \mathcal{E}^2)$ est une mesure à variation bornée telle que

$\forall E^2 \in \mathcal{E}^2$

$$\underset{\sim}{\hat{a}} \times \hat{b}(E^2) = \int \hat{b}(E^2_t)\, d_t \underset{\sim}{\hat{a}} = \int \hat{a}(E^2_\tau)\, d_\tau \underset{\sim}{\hat{b}} \in \mathbb{C} \qquad (\boxed{IX})$$

$$|\hat{a} \times \hat{b}|(E^2) = \int |\hat{b}|(E^2_t)\, d_t |\hat{a}| = \int |\hat{a}|(E^2_\tau)\, d_\tau |\hat{b}| \in \mathbb{R} \qquad (\boxed{X})$$

$$|\hat{a} \times \hat{b}|(\mathbb{R}^2_+) = |\hat{a}|(\mathbb{R}^+) \cdot |\hat{b}|(\mathbb{R}^+) \qquad (\boxed{XI})$$

En outre $\forall\, E \times F \in \mathcal{E}^2$

$$\hat{a} \times \hat{b}\,(E \times F) = \hat{a}(E) \cdot \hat{b}(F) \in \mathbb{C}$$

Convolution de 2 mesures.

Soient $\hat{a}, \hat{b} \in \underset{\sim}{S}$. , $E \in \mathcal{E}$.

$$E^\triangledown \triangleq \{ (t, \tau) \; ; \; t + \tau \in E \;\; t \geq 0, \; \tau \geq 0 \} \in \mathcal{E}^2$$

On définit comme produit de convolution de $\hat{a}$ par $\hat{b}$ la fonction d'ensembles

$$\hat{a} * \hat{b} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{définie par}$$

$$\hat{a} * \hat{b}\,(E) = \hat{a} \times \hat{b}\,(E^\triangledown) \qquad (\boxed{XII})$$

où $\hat{a} \times \hat{b}$ est la mesure produit complexe définie précédemment.

$E^\triangledown$ est défini 1.16.

Théorème 4

Si $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$ alors $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

et $\forall E \in \mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}(E) = \int \underset{\sim}{a}((E-\tau) \cap \mathbb{R}^+)\, d_\tau \underset{\sim}{b}$$

$$= \int \underset{\sim}{b}((E-t) \cap \mathbb{R}^+)\, d_t \underset{\sim}{a} \qquad (\overline{\text{XIII}})$$

où $E - \tau = \{ t \in \mathbb{R} : t + \tau \in E \}$

$E - t = \{ \tau \in \mathbb{R} : t + \tau \in E \}$.

En outre $\forall E \in \mathcal{E}$

$$|\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}|(E) = \int |\underset{\sim}{a}|((E-\tau) \cap \mathbb{R}^+)\, d_\tau |\underset{\sim}{b}|$$

$$= \int |\underset{\sim}{b}|((E-t) \cap \mathbb{R}^+)\, d_t |\underset{\sim}{a}| \qquad (\overline{\text{XIV}})$$

et $\|\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}\| = |\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+) \leq |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) \cdot |\underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+)$

$$= \|\underset{\sim}{a}\| \cdot \|\underset{\sim}{b}\| \qquad (\overline{\text{XV}})$$

Démonstration

Observez que $(\overline{\text{XIII}})$ est une conséquence immédiate de $(\overline{\text{XII}})$ et de $(\overline{\text{IX}})$ et

$$E_t^\sigma = (E - t) \cap \mathbb{R}^+ \qquad E_\tau^\sigma = (E - \tau) \cap \mathbb{R}^+$$

Comme à toute réunion disjointe dénombrable $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad E_i \in \mathcal{E}$ correspond une réunion disjointe dénombrable $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^\sigma \quad E_i^\sigma \in \mathcal{E}^2$ et comme $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$

est une mesure complexe finie sur $\mathcal{E}$, on obtient que $\hat{a} * \hat{b}$ est une mesure complexe finie sur $\mathcal{E}$.
De même manière comme par définition

$$|\hat{a} * \hat{b}|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a} * \hat{b}(E_i)| \; ; (E_i) \text{ subdivision dénombrable de } E \right\}$$

on a par (XII)

$$|\hat{a} * \hat{b}|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a} \times \hat{b}(E_i^{\sigma})| \; ; (E_i^{\sigma}) \text{ subdivision dénombrable de } E^{\sigma} \right\}$$

$$= |\hat{a} \times \hat{b}|(E^{\sigma})$$

Comme $|\hat{a} \times \hat{b}|$ est une mesure finie par le théorème 3, il suit que $|\hat{a} * \hat{b}|$ est une mesure finie et (XIV) est vrai

Finalement en utilisant (XIV) comme $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{E}$

$$\|\hat{a} * \hat{b}\| = |\hat{a} * \hat{b}|(\mathbb{R}^+) \leq |\hat{a}|(\mathbb{R}^+) \cdot |\hat{b}|(\mathbb{R}^+) = \|\hat{a}\| \cdot \|\hat{b}\|$$

c. à. d (XV) est vrai

■

III.2.5 Propriétés de $(\underset{\sim}{S}, K, \| \cdot \|)$

Au début de III.2. On a défini $\underset{\sim}{S}$, ainsi qu'un certain nombre d'opérations sur $\underset{\sim}{S}$. Nous allons examiner la structure de $\underset{\sim}{S}$ muni de ces opérations.

Théorème 1.

$(\underset{\sim}{S}, K, \| \cdot \|)$ est une algèbre de Banach commutative avec $\underset{\sim}{S}_0$ comme neutre.

Décomposons la démonstration de ce théorème en démontrant 4 autres petits théorèmes

Théorème 1.a

$(\underset{\sim}{S}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

Démonstration

a) $(\underset{\sim}{S}, +)$ est un groupe additif commutatif

1. $\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$ $\quad \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$, en effet :

- $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ est à valeurs complexes car

$\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\,(E) = \underset{\sim}{a}\,(E) + \underset{\sim}{b}\,(E)$

- $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ est une fonction d'ensembles σ-additive

$$(\hat{a} + \hat{b}) \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)}_{\in \mathcal{E}} \overset{\Delta}{=} \underset{\sim}{a} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) + \hat{b} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \hat{a}(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{b}(E_i) \quad \text{car } a, b \in \underset{\sim}{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a}(E_i) + \hat{b}(E_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a} + \hat{b})(E_i).$$

- $|\underset{\sim}{a} + \hat{b}|(\mathbb{R}^+) < \infty$

car : $|\hat{a} + \hat{b}|(\mathbb{R}^+) = \sup \{ |\hat{a} + \hat{b}|(E) \quad E \in \mathcal{E}_B \}$

$$|\hat{a} + \hat{b}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |(\hat{a} + \hat{b})(E_i)|$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} (|\hat{a}(E_i)| + |\hat{b}(E_i)|)$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a}(E_i)| + \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{b}(E_i)|$$

$$\leq |\hat{a}|(E) + |\hat{b}|(E)$$

donc $|\underset{\sim}{a} + \hat{b}|(\mathbb{R}^+) \leq \sup \{ |\hat{a}|(E) + |\hat{b}|(E), E \in \mathcal{E}_B \}$

$$\leq \sup \{ |\hat{a}|(E) \quad E \in \mathcal{E}_B \} + \sup \{ |\hat{b}|(E) \quad E \in \mathcal{E}_B \}$$

$$\leq |\hat{a}|(\mathbb{R}^+) + |\hat{b}|(\mathbb{R}^+)$$

$$< \infty$$

2. Associativité

$\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{S} \quad \forall E \in \mathcal{E} \quad [(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c}](E) = [\underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})](E)$

car : $[(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c}](E) = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})(E) + \underset{\sim}{c}(E)$

$= \underset{\sim}{a}(E) + \underset{\sim}{b}(E) + \underset{\sim}{c}(E)$ par associativité dans $\mathbb{C}$

$= \underset{\sim}{a}(E) + (\underset{\sim}{b}(E) + \underset{\sim}{c}(E))$

$= [\underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})](E)$

donc $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{S} \qquad (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$

3. Neutre

$\underset{\sim}{0}(E) = 0 \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$

$\underset{\sim}{0} \in \underset{\sim}{S}$ et $(\underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{a})(E) = \underset{\sim}{a}(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$

donc $\underset{\sim}{0} + \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a} \qquad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}.$

4. $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \quad \exists \underset{\sim}{a}' \in \underset{\sim}{S} \; : \; \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}' = \underset{\sim}{0}.$

Soit $\underset{\sim}{a}'(E) = -\underset{\sim}{a}(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$

- $\underset{\sim}{a}'$ est à valeurs complexes
- $\underset{\sim}{a}'$ est σ-additive.

$$\underset{\sim}{a}'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = -\underset{\sim}{a}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}'(E_i).$$

- $|\underset{\sim}{a}'|(\mathbb{R}^+) = |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) < \infty$

et on a bien que $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}' = \underset{\sim}{0}$ car $\forall E \in \mathcal{E} \; (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}')(E) = \underset{\sim}{a}(E) + \underset{\sim}{a}'(E)$

5. Commutativité

$\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S} \qquad \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$

car $\forall\, E \in \mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\,(E) = \underset{\sim}{a}\,(E) + \underset{\sim}{b}\,(E).$$

$$= \underset{\sim}{b}\,(E) + \underset{\sim}{a}\,(E) \qquad \text{commutativité dans les complexes.}$$

$$= \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}\,(E)$$

b) <u>Multiplication scalaire</u>

1. $\forall\, \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}, \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \qquad \alpha \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$

Par définition de $\alpha \underset{\sim}{a}$: $\forall\, E \in \mathcal{E} \quad \alpha \underset{\sim}{a}\,(E) = \alpha \cdot \underset{\sim}{a}\,(E)$

- $\alpha \underset{\sim}{a}$ est à valeurs complexes
- $\alpha \underset{\sim}{a}$ est σ-additive

$$\alpha \underset{\sim}{a}\,\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \alpha \cdot \underset{\sim}{a}\,\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{a}\,(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \underset{\sim}{a}\,(E_i)$$

- $\| \alpha \underset{\sim}{a} \| < \infty$:

On démontre d'abord que $\| \alpha \underset{\sim}{a} \| = |\alpha| \cdot \| \underset{\sim}{a} \|$.

$$\| \alpha \underset{\sim}{a} \| = | \alpha \underset{\sim}{a} |\,(\mathbb{R}^+) = \sup \{ |\alpha \underset{\sim}{a}|(E) \quad E \in \mathcal{E}_B \}$$

$$|\alpha \underset{\sim}{a}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |(\alpha \underset{\sim}{a})(E_i)| \qquad (E_i) \text{ subdivision de } E.$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} | \alpha \cdot \underset{\sim}{a}\,(E_i) |$$

$$= |\alpha| \cdot \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}|(E_i).$$

$$= |\alpha| \cdot |\underset{\sim}{a}|(E)$$

donc :

$$|\alpha \underset{\frown}{a}|(\mathbb{R}^+) = \sup \{ |\alpha| \cdot |\underset{\frown}{a}|(E) \quad E \in \mathcal{E}_B \}$$
$$= |\alpha| \cdot |\underset{\frown}{a}|(\mathbb{R}^+)$$
$$= |\alpha| \cdot \|\underset{\frown}{a}\|$$

Comme $\left.\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{C} \\ \underset{\frown}{a} \in \underset{\frown}{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \|\alpha \underset{\frown}{a}\| = \underbrace{|\alpha|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|\underset{\frown}{a}\|}_{<\infty} < \infty.$

2\. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\frown}{a}, \underset{\frown}{b} \in \underset{\frown}{S}$: $(\alpha\beta)\underset{\frown}{a} = \alpha(\beta \underset{\frown}{a})$

car $\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad [(\alpha\beta)\underset{\frown}{a}](E) = \alpha \cdot \beta \cdot \underset{\frown}{a}(E)$

$$= \alpha \cdot (\beta \cdot \underset{\frown}{a}(E))$$
$$= \alpha \cdot (\beta \underset{\frown}{a}(E))$$
$$= [\alpha(\beta \underset{\frown}{a})](E)$$

3\. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\frown}{a} \in \underset{\frown}{S}$, $(\alpha+\beta)\underset{\frown}{a} = \alpha \underset{\frown}{a} + \beta \underset{\frown}{a}$.

car $\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad [(\alpha+\beta)\underset{\frown}{a}](E) = (\alpha+\beta) \cdot \underset{\frown}{a}(E)$

$$= \alpha \cdot \underset{\frown}{a}(E) + \beta \cdot \underset{\frown}{a}(E)$$
$$= \alpha \underset{\frown}{a}(E) + \beta \underset{\frown}{a}(E).$$
$$= [\alpha \underset{\frown}{a} + \beta \underset{\frown}{b}](E)$$

4\. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\frown}{a}, \underset{\frown}{b} \in \underset{\frown}{S}$ $\quad \alpha(\underset{\frown}{a} + \underset{\frown}{b}) = \alpha \underset{\frown}{a} + \alpha \underset{\frown}{b}$.

car $\forall E \in \mathcal{E}$:

$$[\alpha(\underset{\frown}{a} + \underset{\frown}{b})](E) = \alpha \cdot (\underset{\frown}{a} + \underset{\frown}{b})(E) = \alpha \cdot (\underset{\frown}{a}(E) + \underset{\frown}{b}(E))$$
$$= \alpha \underset{\frown}{a}(E) + \alpha \underset{\frown}{b}(E) = (\alpha \underset{\frown}{a} + \alpha \underset{\frown}{b})(E)$$

5. $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \quad 1\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$

car $\forall E \in \mathcal{E} \quad (1\underset{\sim}{a})(E) = 1 . \underset{\sim}{a}(E) = \underset{\sim}{a}(E)$

6. $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \quad 0\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$

car $\forall E \in \mathcal{E} \quad (0\underset{\sim}{a})(E) = 0 . \underset{\sim}{a}(E) = 0 = \underset{\sim}{0}(E)$

7. Si $\alpha \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ et si $\underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0} \implies \alpha = 0$

car $\forall E \in \mathcal{E}$

dire $\alpha \underset{\sim}{a}(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}$

$\iff \alpha . \underset{\sim}{a}(E) = 0$ et comme K ne possède pas de diviseur de zéro, on a que $\alpha = 0$. ■

Théorème 1. b

L'application $\| . \| : \underset{\sim}{S} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\underset{\sim}{a} \longmapsto |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+)$

définit une norme sur $\underset{\sim}{S}$

Démonstration

1. $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \quad \|\underset{\sim}{a}\| = 0 \iff \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$.

- si $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0} \implies \|\underset{\sim}{a}\| = 0$.

- si $\|\underset{\sim}{a}\| = 0$

$\|\underset{\sim}{a}\| = |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) = \sup\{ |\underset{\sim}{a}|(E),\ E \in \mathcal{E}_B \} = 0$.

$\Rightarrow \quad \forall E \in \mathcal{E}_B \qquad |\underset{\sim}{a}|(E) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall E \in \mathcal{E} \qquad |\underset{\sim}{a}|(E) = 0$ car chaque E est une union

$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ de boréliens bornés.

2. $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S} \qquad \|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{a}\| + \|\underset{\sim}{b}\|$

Dans la démonstration du théorème 1.a., pour voir que $|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+) < \infty \quad \forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$, on a utilisé le fait que : $|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+) \leq |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) + |\underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+)$

c.à.d $\quad \|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{a}\| + \|\underset{\sim}{b}\|$

3. $\|\alpha \underset{\sim}{a}\| = |\alpha| \cdot \|\underset{\sim}{a}\| \qquad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}, \forall \alpha \in K.$

: démontré dans le théorème 1.a. lorsqu'on définit $\alpha \underset{\sim}{a}(E) = \alpha \cdot \underset{\sim}{a}(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$.

donc $\|\cdot\| = |\cdot|(\mathbb{R}^+)$ est une norme sur $\underset{\sim}{S}$

Théorème 1.c

$(\underset{\sim}{S}, +, *)$ est un anneau commutatif
et $\|\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{a}\| \cdot \|\underset{\sim}{b}\| \qquad \forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

Démonstration

1. On a déjà vu par le théorème 1.a que $(S, +)$ est un groupe commutatif

2. $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

: par le théorème 4 de III . 2.4

3. Associativité

$\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{S} \quad (\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c})$

Soit $E \in \mathcal{E}$.

$$(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c}\,(E) = \int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}\,[(E-\tau) \cap \mathbb{R}^+]\, d_\tau c.$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \underset{\sim}{b}\,[((E-\tau)-\tau') \cap \mathbb{R}^+]\, d_{\tau'} \underset{\sim}{a}\, d_\tau \underset{\sim}{c}$$

or $\underbrace{\int_0^\infty \underset{\sim}{b}\,[((E-\tau)-\tau') \cap \mathbb{R}^+]\, d_\tau |\underset{\sim}{a}|}_{\text{fct. mesurable cfr th. 1 de III 2.4}} \leq \|\underset{\sim}{a}\| . \|\underset{\sim}{b}\| < \infty$

donc, par Fubini :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \underset{\sim}{b}\,[((E-\tau)-\tau') \cap \mathbb{R}^+]\, d_{\tau'} \underset{\sim}{a}\, d_\tau \underset{\sim}{c} = \int_0^\infty \int_0^\infty \underset{\sim}{b}\,[((E-\tau)-\tau') \cap \mathbb{R}^+]\, d_\tau \underset{\sim}{c}\, d_{\tau'} \underset{\sim}{a}$$

$$= \int_0^\infty \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c}\,((E-\tau') \cap \mathbb{R}^+)\, d_{\tau'} \underset{\sim}{a}$$

$$= \underset{\sim}{a} * (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c})\,(E)$$

4. L'élément neutre : $\delta_0(\cdot)$.

$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_0 = \underset{\sim}{a}.$

Soit $E \in \mathcal{E}$.

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\xi(E) = \int_0^\infty \underset{\sim}{\delta}_\xi\,[(E-t) \cap \mathbb{R}^+]\, d_t \underset{\sim}{a}$$

$\underset{\sim}{\delta}_\xi\,[(E-t) \cap \mathbb{R}^+] = 1$ si $\xi \in (E-t) \cap \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow t \in (E-\xi) \cap \mathbb{R}^+$

on fait une

$= 0$ sinon translation de $t-\xi$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\xi (E) = \int_{(E-\xi)\cap\mathbb{R}^+} d_t \underset{\sim}{a}$$

si $\xi = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_0 (E) = \underset{\sim}{a}(E \cap \mathbb{R}^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } E \subset \mathbb{R}^+}}{=} \underset{\sim}{a}(E)$

5. Distributivité de $*$ par rapport à l'addition.

$\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{S} \qquad (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c}$

En effet.

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c}(E) = \int_0^\infty (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})[(E-t)\cap\mathbb{R}^+]\, d_t \underset{\sim}{c}.$$

$$= \int_0^\infty \underset{\sim}{a}[(E-t)\cap\mathbb{R}^+]\, d_t \underset{\sim}{c} + \int_0^\infty \underset{\sim}{b}[(E-t)\cap\mathbb{R}^+]\, d_t \underset{\sim}{c}$$

$$= \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{c}(E) + \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c}(E).$$

donc $(\underset{\sim}{S}, +, *)$ est un anneau

la commutativité découle de la définition du produit de convolution.

De plus, $\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S} \qquad \|\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{a}\| . \|\underset{\sim}{b}\|$

par le th. 4 de III . 2. 4

<u>Théorème 1. d.</u> $\underset{\sim}{S}$ est un espace complet

Démonstration

Soit $(\hat{a}_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\underset{\sim}{S}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \hat{a}_n \in \hat{S}$, en effet :

$\forall E \in \mathcal{E}$.

$$|\hat{a}_n(E) - \hat{a}_m(E)| \leq |\hat{a}_n - \hat{a}_m|(E)$$
$$\leq |\hat{a}_n - \hat{a}_m|(\mathbb{R}^+)$$
$$= \|\hat{a}_n - \hat{a}_m\|$$

or $\|\hat{a}_n - \hat{a}_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ car $(\hat{a}_n)_n$ est de Cauchy

par hypothèse.

donc $|\hat{a}_n(E) - \hat{a}_m(E)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

or $(\hat{a}_n(E))_n$ avec E fixé, est une suite de Cauchy.

dans $\mathbb{C}$ qui est complet.

$(\hat{a}_n(E))_n$ de Cauchy dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $(\hat{a}_n(E))_n$ est une

suite convergente.

Soit $\hat{a}(E)$ son point de convergence. On définit

une fonction $\hat{a} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$E \longrightarrow \hat{a}(E) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{n\to\infty} \hat{a}_n(E)$$

$\hat{a}$ ainsi définie, est additive

Soit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ t.q. $E_1 \cap E_2 = \phi$

$$\hat{a}(E_1 \cup E_2) = \lim_{n\to\infty} \hat{a}_n(E_1 \cup E_2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\hat{a}_n(E_1) + \hat{a}_n(E_2))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \hat{a}_n(E_1) + \lim_{n\to\infty} \hat{a}_n(E_2)$$

$$= \hat{a}(E_1) + \hat{a}(E_2).$$

- $\hat{a}$ est σ - additive.

Soit $E_i \in \mathcal{E}$ $i=1,\dots$ t.q. $\forall i \neq j$ $E_i \cap E_j = \phi$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$m > n > N$: $\left| \hat{a}_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) - \hat{a}_m\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \right| \leq \|\hat{a}_n - \hat{a}_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\underset{m\to\infty}{n > N}$: $\left| \hat{a}_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) - \hat{a}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

$\hat{a}_n$ et $\hat{a}$ sont additives :

$n > N$ $\left| \sum_{i=1}^{k} \hat{a}_n(E_i) - \sum_{i=1}^{k} \hat{a}(E_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Comme $|\cdot - \cdot|$ est continue et $\hat{a}_n$ σ-additive :

$n > N$ $\left| \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \hat{a}_n(E_i) - \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \hat{a}(E_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ceci veut dire que :

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n(E') = \hat{a}(E') \qquad \forall E' \in \mathcal{E}.$$

$$\Rightarrow \hat{a}(E) = \hat{a}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}(E_i).$$

Il reste donc à voir que $\|\hat{a}\| < \infty$.

or $\hat{a} = \hat{a}_n - (\hat{a}_n - \hat{a})$

Comme cette dernière assertion est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.

si $k \to \infty$ $\quad \sum_{i=1}^{n} |a_m(E_i) - a(E_i)| \leq \varepsilon/2$

$\Rightarrow \quad |a_m - a|(E) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car (E_i) est une subd. qcq. de E

Puisqu'on a démontré cela pour un E qcq dans $\mathcal{E}$.

$\forall E \in \mathcal{E} \quad |a_m - a|(E) \leq \varepsilon/2$

$\Rightarrow \quad \| a_m - a \| \leq \varepsilon/2$ si $E = \mathbb{R}^+$.

$\Rightarrow \quad \| a_m - a \| < \varepsilon$

c. à d. que $\| a_m - a \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

On aura bien alors que $\| a \| < \infty$.

en effet : $\quad a = a_m + (a - a_m)$

donc $\| a \| \leq \| a_m \| + \| a - a_m \|$.

Une suite de Cauchy est bornée :

$\exists K$ constante t.q. $\| a_m \| \leq K \quad \forall m \in \mathbb{N}$

et $\| a - a_m \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.

donc $\| a \| \leq K + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

$\| a \| \leq K$

$\Rightarrow \quad a \in S$ ■

Par les théorèmes 1a, 1b, 1c, 1d, on a bien que $(S, \mathbb{F}, \|.\|)$ est une algèbre de Banach commutative avec S_0 comme neutre.

Chapitre IV

Décomposition d'un élément de $\underset{\sim}{S}$

Les espaces $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$

Définissons tout d'abord ce que nous entendons par mesure absolument continue et par mesure singulière par rapport à une mesure positive (à valeurs réelles positives) et ce que nous entendons par mesure atomique et par mesure purement atomique.

1] Une mesure $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ est dite <u>absolument continue</u> par rapport à μ (mesure positive) ssi :

$\mu(E)=0$, $E \in \Sigma$ implique $\underset{\sim}{a}(E)=0$

Notation $\underset{\sim}{a} \ll \mu$

2] Une mesure $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ est <u>singulière</u> par rapport à μ ssi il existe deux ensembles disjoints A et B dont l'union est $\mathbb{R}^+$ tels que, pour chaque ensemble $E \in \Sigma$, $A \cap E$ et $B \cap E \in \Sigma$ et $\mu(A \cap E) = |\underset{\sim}{a}|(B \cap E) = 0$

Notation : $\underset{\sim}{a} \perp \mu$

3] Une mesure $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ est <u>atomique</u> ssi il existe un atome $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\underset{\sim}{a}(\{x\}) \neq 0$

4] Une mesure $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ est <u>purement atomique</u> ssi il existe un ensemble dénombrable $C \in \Sigma$ tel que $|\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+ \setminus C) = 0$

<u>Remarque :</u>

μ désignera, dans la suite, la mesure de Lebesgue

Montrons qu'une mesure complexe $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ peut s'écrire de façon unique en une somme de trois mesures, l'une absolument continue par rapport à μ, l'autre purement atomique et la troisième non atomique. La somme des deux dernières mesures constitue la partie singulière de $\underset{\sim}{a}$ (singulière par rapport à μ)

IV.1. **Théorème de décomposition d'un élément de $\underset{\sim}{S}$**

Si $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, alors il existe une décomposition de $\underset{\sim}{a}$ en $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a}_3$, des éléments de $\underset{\sim}{S}$ tels que :

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \underset{\sim}{a}_3$$

avec 1] $\underset{\sim}{a}_1$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ

2] $\underset{\sim}{a}_2 + \underset{\sim}{a}_3$ est la partie singulière, par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que :

a) $\underset{\sim}{a}_2$ est la partie purement atomique

$$\underset{\sim}{a}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \quad \text{où } 0 \stackrel{\Delta}{=} t_0 < t_1 < t_2 \dots$$

et $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$

b) $\underset{\sim}{a}_3$ est la partie non atomique

$\underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a}_3$ sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue.

3] Il existe une subdivision de $\mathbb{R}^+$ en trois ensembles boréliens disjoints E_1, E_2, E_3 tels que E_2 est dénombrable E_3 est de mesure de Lebesgue nulle et tels que:

$$\underset{\sim}{a}_1(E) = \underset{\sim}{a}(E \cap E_1) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$\underset{\sim}{a}_2(E) = \underset{\sim}{a}(E \cap E_2) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$\underset{\sim}{a}_3(E) = \underset{\sim}{a}(E \cap E_3) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

Démonstration

Nous savons que $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_R + i\, \underset{\sim}{a}_I$

où $\underset{\sim}{a}_R$ et $\underset{\sim}{a}_I$ sont des mesures finies, signées.

Appliquons le théorème de décomposition à $\underset{\sim}{a}_R$ et $\underset{\sim}{a}_I$ [HAL p 134]

Par conséquent $\underset{\sim}{a}_R = \underset{\sim}{a}_{R1} + \underset{\sim}{a}_{R2}$ où $\underset{\sim}{a}_{R1} \ll \mu$ et $\underset{\sim}{a}_{R2} \perp \mu$

et $\underset{\sim}{a}_{R1}$ et $\underset{\sim}{a}_{R2}$ sont des mesures signées finies

μ : mesure de Lebesgue

$\underset{\sim}{a}_I = \underset{\sim}{a}_{I1} + \underset{\sim}{a}_{I2}$ où $\underset{\sim}{a}_{I1} \ll \mu$ et $\underset{\sim}{a}_{I2} \perp \mu$

et $\underset{\sim}{a}_{I1}$ et $\underset{\sim}{a}_{I2}$ sont des mesures signées, finies

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_{R1} + i\underset{\sim}{a}_{I1} + \underset{\sim}{a}_{R2} + i\,\underset{\sim}{a}_{I2}$$

On définit alors : $\underset{\sim}{a}_1 \triangleq \underset{\sim}{a}_{R1} + i\underset{\sim}{a}_{I1}$

$$\underset{\sim}{b} \triangleq \underset{\sim}{a}_{R2} + i\underset{\sim}{a}_{I2}$$

Pas 1 : $\underset{\sim}{a}_1$ est absolument continue par rapport à μ [1]

$\underset{\sim}{b}$ est la partie singulière de $\underset{\sim}{a}$ [2]

En effet : $\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu$ car si $\mu(E)=0$, $E \in \mathcal{E} \Rightarrow \underset{\sim}{a}_{R1}(E)=0$

$$= \underset{\sim}{a}_{I1}(E)$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{a}_1(E)=0$$

ce qui prouve [1].

Le point [2] se démontre facilement :

$\underset{\sim}{a}_{R2}$ et $\underset{\sim}{a}_{I2}$ sont singulières $\Rightarrow \underset{\sim}{b}$ singulière (par rapport à μ)

car nous savons que

$$|\underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}_{R2}| + |\underset{\sim}{a}_{I2}| ,$$

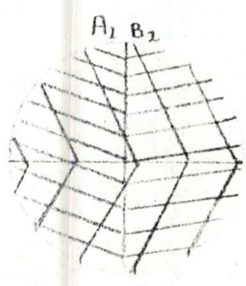
$$|\underset{\sim}{a}_{R2}|(E \cap A_1) = \mu(E \cap B_1) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$|\underset{\sim}{a}_{I2}|(E \cap A_2) = \mu(E \cap B_2) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

avec $A_i \cap B_i = \phi$ et $A_i \cup B_i = R^+$ $i=1,2$

les mesures $\underset{\sim}{a}_{R2}$, $\underset{\sim}{a}_{I2}$ sont $\perp \mu$

$$\Rightarrow R^+ = (B_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$



d'où $|\underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2) = |\underset{\sim}{a}_{R2}|(E \cap A_1 \cap A_2) + |\underset{\sim}{a}_{I2}|(E \cap A_1 \cap A_2)$

$$= \mu((E \cap A_2) \cap B_1) + \mu((E \cap A_1) \cap B_2)$$

$$+ \mu((E \cap B_1) \cap B_2)$$

car $\mu((E \cap B_1) \cap B_2) = 0$

$$= 0$$

$$|b|(E\cap(A_1\cap A_2)) = \mu(E\cap((A_2\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)))$$

$$|b|(E\cap(A_1\cap A_2)) = 0 = \mu(E\cap(A_1\cap A_2)^c) \quad \forall E\in \mathcal{Z}$$

$\Rightarrow$ Nous obtenons la décomposition de $\mathbb{R}^+$ en deux ensembles disjoints

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{b}$ est singulière par rapport à μ

Cas 2 : Il existe deux ensembles A et $B \in \mathcal{Z}$ tels que

$$\underset{\sim}{b}(E) = \underset{\sim}{a}(E\cap B) \qquad \forall E\in\mathcal{Z}$$

$$\underset{\sim}{a}_1(E) = \underset{\sim}{a}(E\cap A) \qquad \forall E\in\mathcal{Z}$$

En effet : Rappelons que $\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu$ et $\underset{\sim}{b}\perp\mu$ c'est-à-dire qu'il existe deux boréliens A et B tels que :

$$|\underset{\sim}{b}|(E\cap A) = \mu(E\cap B) \qquad \forall E\in\mathcal{Z} \text{ et } A\cup B = \mathbb{R}^+$$
$$= 0$$

Nous savons aussi que $\underset{\sim}{a}(E\cap A) = \underset{\sim}{a}_1(E\cap A) + \underset{\sim}{b}(E\cap A)$

or $|\underset{\sim}{b}|(E\cap A) = 0 \quad \forall E\in\mathcal{Z} \Rightarrow \underset{\sim}{b}(E\cap A) = 0 \quad \forall E\in\mathcal{Z}$

d'où
$$\underset{\sim}{a}(E\cap A) = \underset{\sim}{a}_1(E\cap A)$$

or $\underset{\sim}{a}_1(E) = \underset{\sim}{a}_1(E\cap A) + \underset{\sim}{a}_1(E\cap B)$

et $\underset{\sim}{a}_1(E\cap B) = 0$ car $\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu$ et $\mu(E\cap B) = 0$
$\forall E\in\mathcal{Z}$

d'où $\underset{\sim}{a}(E\cap A) = \underset{\sim}{a}_1(E\cap A) = \underset{\sim}{a}_1(E) \quad \forall E\in\mathcal{Z}$

$$\underset{\sim}{a}(E\cap B) = \underset{\sim}{a}_1(E\cap B) + \underset{\sim}{b}(E\cap B) \qquad \forall E\in\mathcal{Z}$$
$$= \underset{\sim}{b}(E\cap B)$$
$$= \underset{\sim}{b}(E) \text{ car } \underset{\sim}{b}(E) = \underset{\sim}{b}(E\cap B) + \underset{\sim}{b}(E\cap A)$$

et $\underset{\sim}{b}(E \cap A) = 0$ car $\underset{\sim}{b} \perp \mu$

et cela $\forall E \in \mathcal{E}$

Cas 3 : Décomposition de $\underset{\sim}{b}$ en deux mesures $\underset{\sim}{a}_2, \underset{\sim}{a}_3$.

Plus précisément, $\underset{\sim}{b}$ s'écrit comme la somme de deux mesures $\underset{\sim}{a}_2, \underset{\sim}{a}_3$ vérifiant les propriétés demandées

En effet : Considérons $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}, \underset{\sim}{a})$, $\underset{\sim}{a}$ est finie dans cet espace

c'est-à-dire $\forall E \in \mathcal{E}, |\underset{\sim}{a}(E)| < \infty$

Considérons l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $\underset{\sim}{b}(\{x\}) \neq 0$

Appelons C cet ensemble donc $C = \{x \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \underset{\sim}{b}(\{x\}) \neq 0\}$

cet ensemble C est dénombrable

En effet, $|\underset{\sim}{a}|$ finie $\Rightarrow |\underset{\sim}{b}|$ finie et donc $|\underset{\sim}{b}|(C) < \infty$

Soit $|\underset{\sim}{b}|(C) = d$, $d \in \mathbb{R}_0^+$

Si on considère l'ensemble des x_i tels que $x_i \in C$,

il existe au plus un x_i tel que $\frac{d}{2} < |\underset{\sim}{b}|(x_i) \leq d$

deux x_i tels que $\frac{d}{3} < |\underset{\sim}{b}|(x_i) \leq \frac{d}{2}$

trois x_i tels que $\frac{d}{4} < |\underset{\sim}{b}|(x_i) \leq \frac{d}{3}$

$\vdots$

n x_i tels que $\frac{d}{n+1} < |\underset{\sim}{b}|(x_i) \leq \frac{d}{n}$

$$\text{or }]0, d] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left] \frac{d}{n+1}, \frac{d}{n} \right]$$

C'est ainsi que l'ensemble des x_i tels que $|\underset{\sim}{b}|(x_i) \in]0, d]$, c'est-à-dire l'ensemble C, est un ensemble dénombrable.

Nous [illegible] alors $\underset{\sim}{a}_2(E) \triangleq \underset{\sim}{b}(E\cap C)$ et $\underset{\sim}{a}_3(E) \triangleq \underset{\sim}{b}(E\setminus C)$

Par conséquent $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \underset{\sim}{a}_3$

$\underset{\sim}{a}_2$ est purement atomique

En effet : $|\underset{\sim}{a}_2|(\mathbb{R}^+ \setminus C) = |\underset{\sim}{b}|((\mathbb{R}^+ \setminus C)\cap C)$

$$= |\underset{\sim}{b}|(\phi)$$

$$= 0$$

il existe donc un ensemble dénombrable

C tel que $|\underset{\sim}{a}_2|(\mathbb{R}^+ \setminus C) = 0$

$\underset{\sim}{a}_2$ est singulière (par rapport à μ)

En effet : $|\underset{\sim}{a}_2|(E\cap C^c) = |\underset{\sim}{b}|(\phi) = 0 = \mu(E\cap C)$

car $E\cap C$ = ensemble dénombrable car C l'est

et la mesure de Lebesgue d'un ensemble

dénombrable est nulle.

d'où la décomposition de $\mathbb{R}^+$ correspondante

est $\{C, C^c\}$

$\underset{\sim}{a}_3$ est singulière (par rapport à μ)

$\underset{\sim}{b}$ est singulière par rapport à μ

$$\Downarrow$$

$\exists A, B \in \Sigma$ tels que $\mathbb{R}^+ = A\cup B$ et $|\underset{\sim}{b}|(E\cap A) = 0 = \mu(E\cap B)$

$\forall E \in \Sigma$ $(E\cap A, E\cap B \in \Sigma)$

Si nous prenons $B' \triangleq C^c \cap B$ et $A' \triangleq B'^c = (B\cap C^c)^c = C\cup B^c$
$= C\cup A$

alors $|\underset{\sim}{a}_3|(E \cap A') = |\underset{\sim}{b}|(E \cap A' \cap C^c)$

$= |\underset{\sim}{b}|((E \cap C^c \cap A) \cup (E \cap \underbrace{C^c \cap C}_{\phi}))$

$= |\underset{\sim}{b}|((E \cap C^c) \cap A)$

$= 0$

$= \mu(E \cap C^c \cap B) = \mu(E \cap B') = 0$

c'est ainsi que il existe deux ensembles $A', B' \in \mathcal{E}$ tels que $A' \cup B' = \mathbb{R}^+$ et tels que :

$\forall E \in \mathcal{E}$, $E \cap A'$, $E \cap B' \in \mathcal{E}$ et $|\underset{\sim}{a}_3|(E \cap A') = \mu(E \cap B')$

$= 0$

$\underset{\sim}{a}_3(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \underset{\sim}{a}_3$ est non atomique

En effet : si $x \in C$ $\quad \underset{\sim}{a}_3(\{x\}) = \underset{\sim}{b}(\{x\} \setminus C)$

$= \underset{\sim}{b}(\phi)$

$= 0$

si $x \notin C$ $\quad \underset{\sim}{a}_3(\{x\}) = \underset{\sim}{b}(\{x\})$ et

comme $C = \{x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\underset{\sim}{b}(\{x\}) \neq 0\}$, et

comme $x \notin C$, nous avons que $\underset{\sim}{b}(\{x\}) = 0$

Par conséquent $\underset{\sim}{a}_3(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Cela entraîne évidemment que pour tout ensemble D dénombrable, $\underset{\sim}{a}_3(D) = 0$

$\underset{\sim}{a}_3$ est non atomique

En effet, $\underset{\sim}{a}_3(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\underset{\sim}{a}_3|(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Par conséquent, pour tout ensemble D dénombrable,

$|\underset{\sim}{a}_3|(D)=0$

S'il existe un ensemble D' dénombrable tel que

$|\underset{\sim}{a}_3|(\mathbb{R}^+\setminus D')=0$ alors $|\underset{\sim}{a}_3|(\mathbb{R}^+)=0$ car $|\underset{\sim}{a}_3|(D')=0$

Par conséquent $|\underset{\sim}{a}_3|(E)=0\ \forall E\in\mathcal{E}$ et donc $\underset{\sim}{a}_3=0$

si $\underset{\sim}{a}_3\neq 0$ alors $\underset{\sim}{a}_3$ est non purement atomique

<u>Pas 4</u> : Décomposition de $\mathbb{R}^+$ en trois ensembles boréliens disjoints E_1, E_2, E_3 tels que

$$\underset{\sim}{a}(E\cap E_1)=\underset{\sim}{a}_1(E)$$
$$\underset{\sim}{a}(E\cap E_2)=\underset{\sim}{a}_2(E)$$
$$\underset{\sim}{a}(E\cap E_3)=\underset{\sim}{a}_3(E)$$

et cela $\forall E\in\mathcal{E}$

En effet : Soit $\{A,B\}$ la décomposition de $\mathbb{R}^+$, définie au pas 2

Nous avons $\underset{\sim}{b}(E)=\underset{\sim}{a}(E\cap B)\quad \forall E\in\mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{a}_1(E)=\underset{\sim}{a}(E\cap A)\quad \forall E\in\mathcal{E}$$

$$\underset{\sim}{a}_2(E)=\underset{\sim}{b}(E\cap C)=\underset{\sim}{a}(E\cap C\cap B)$$

(C = ensemble défini au pas 3) $\forall E\in\mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{a}_3(E)=\underset{\sim}{b}(E\cap C^c)=\underset{\sim}{a}(E\cap C^c\cap B)\quad \forall E\in\mathcal{E}$$

or $\underset{\sim}{a}(E)=\underset{\sim}{a}(E\cap A)+\underset{\sim}{a}(E\cap(B\cap C))+\underset{\sim}{a}(E\cap(B\cap C^c))$

car $B=(B\cap C)\cup(B\cap C^c)$ et $A\cup B=\mathbb{R}^+$

Donc $\underset{\sim}{a}(E)=\underset{\sim}{a}_1(E)+\underset{\sim}{a}_2(E)+\underset{\sim}{a}_3(E)\quad \forall E\in\mathcal{E}$

D'où $E_1\triangleq A$, $E_2\triangleq B\cap C$, $E_3\triangleq B\cap C^c \Rightarrow$ pas 4

<u>Pas 5</u> : $\underset{\sim}{a}_2(E)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E)\quad \forall E\in\mathcal{E}$

En effet : l'ensemble C défini au pas 3 est dénombrable

$\Downarrow$

$C \cap B$ est dénombrable

(B = ensemble défini au pas 2)

$B \cap C$ peut s'écrire comme $\{t_i, i \in \mathbb{N}\} \hat{=} \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$

$B \cap C = E_2 = \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$

Par convention, on pose $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$

Soit $a_i \triangleq \underset{\sim}{a}(\{t_i\})$, $a_i \in \mathbb{C}$

Par conséquent $\forall E \in \mathcal{E}$, $\underset{\sim}{a}(E \cap E_2) = \sum_{t_i \in E} \underset{\sim}{a}(\{t_i\})$

$$= \sum_{t_i \in E} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E)$$

où $\underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E) = 1$ si $t_i \in E$

$= 0$ sinon

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_2(E) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

Pas 7 : E_3 est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue

En effet : $E_3 = B \cap C^c$ avec B et C les ensembles définis respectivement au pas 2 et au pas 3

Nous avons vu que $\mu(E \cap C^c \cap B) = \mu(E \cap B')$

avec $B' = C^c \cap B$

$= 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}$

Par conséquent en prenant $E = B'$ nous avons $\mu(B') = 0$

IV.2 Théorème, caractéristique de la norme d'un élément $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, alors $\| \underset{\sim}{a} \| = \| \underset{\sim}{a}_1 \| + \| \underset{\sim}{a}_2 \| + \| \underset{\sim}{a}_3 \|$

De plus, il existe une fonction unique (excepté pour un ensemble de mesure de Lebesgue nulle) $a_1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$ c'est-à-dire une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs complexes, mesurable, intégrable.

a_1 est telle que $\underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{Z}$

et donc :

$$\| \underset{\sim}{a} \| = \int_0^\infty |a_1(t)|\, dt + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| + \| \underset{\sim}{a}_3 \|$$

Démonstration

Pas 1 : il existe une fonction unique $a_1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$ telle que $\underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{Z}$

En effet : Par le théorème précédent, nous savons que

$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}, \quad \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \underset{\sim}{a}_3$ avec $\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu$ et

$\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{a}_{R1} + i\, \underset{\sim}{a}_{I1}$ où $\underset{\sim}{a}_{R1}$ et $\underset{\sim}{a}_{I1}$ sont $\ll \mu$

Par le théorème de Radon-Nikodym [HAL p 128], il existe une fonction $a_{R1} : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}}$ et une fonction $a_{I1} : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}}$,

Elles sont mesurables et telles que :

$$\underset{\sim}{a}_{R1}(E) = \int_E a_{R1}(t)\, dt \qquad \forall E \in \mathcal{Z}$$

$$\underset{\sim}{a}_{I1}(E) = \int_E a_{I1}(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{Z}$$

Par conséquent $\underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_{R1}(t)\, dt + i\int_E a_{I1}(t)\, dt$

$\forall E \in \mathcal{Z}$

$= \int_E a_1(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{Z}$

avec $a_1(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{C}}$

$: t \to a_{R1}(t) + i a_{I1}(t)$

$\Rightarrow a_1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$

Les fonctions a_{R1} et a_{I1} sont déterminées de façon unique modulo la relation $f = g$ presque partout (p.p.)

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{Z}$ où a_1 est unique

modulo la relation $f = g$ p.p

Pas 2 : $\|\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\underset{\sim}{a}_2\| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

$= \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

$= \int_0^{\infty} |a_1(t)|\, dt + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

En effet : $|\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) = \|\underset{\sim}{a}\|$

$= |\underset{\sim}{a}|(E_1) + |\underset{\sim}{a}|(E_2) + |\underset{\sim}{a}|(E_3)$

$\underset{\sim}{a}_1(E) = \underset{\sim}{a}(E \cap E_1) \Rightarrow |\underset{\sim}{a}_1|(E) = |\underset{\sim}{a}|(E \cap E_1)$

car $\sup \sum_i |\underset{\sim}{a}(E_i \cap E_1)| = \sup \sum_i |\underset{\sim}{a}(w_i)|$

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ subdivision de E, $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ subdivision de $E \cap E_1$

Par conséquent, $|\underset{\sim}{a}_i|(\mathbb{R}^+) = |\underset{\sim}{a}|(E_i)$ $i = 1, 2, 3$

$|\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) = |\underset{\sim}{a}_1|(\mathbb{R}^+) + |\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}|(\mathbb{R}^+) + |\underset{\sim}{a}_3|(\mathbb{R}^+)$

$\|\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\underset{\sim}{a}_2\| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

Observons que $\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{a}_{R1} + j\underset{\sim}{a}_{I1} \quad (j^2 = -1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\Big)_R + j\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\Big)_I$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_{iR}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i} + j \sum_{i=0}^{\infty} a_{iI}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$$

où $\sum_{i=0}^{\infty} a_{iR}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} a_{iI}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$ sont des mesures signées.

Nous appliquons le théorème de décomposition de Jordan à $\underset{\sim}{a}_{R1}$, $\underset{\sim}{a}_{I1}$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_{iR}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_{iI}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$

[HA1, p 123]

$\underset{\sim}{a}_{R1} = \underset{\sim}{a}^+_{R1} - \underset{\sim}{a}^-_{R1}$ $\quad$ $\underset{\sim}{a}^+_{R1}$, $\underset{\sim}{a}^-_{R1}$ sont des mesures positives

$\underset{\sim}{a}_{I1} = \underset{\sim}{a}^+_{I1} - \underset{\sim}{a}^-_{I1}$ $\quad$ $\underset{\sim}{a}^+_{I1}$, $\underset{\sim}{a}^-_{I1}$ sont des mesures positives

Le théorème précise que :

$\underset{\sim}{a}^+_{R1}(E) = \int_E a^+_{R1}(t)\, dt$ et $\underset{\sim}{a}^-_{R1}(E) = \int_E a^-_{R1}(t)\, dt$

$\forall E \in \mathcal{E}$

$\underset{\sim}{a}^+_{I1}(E) = \int_E a^+_{I1}(t)\, dt$ et $\underset{\sim}{a}^-_{I1}(E) = \int_E a^-_{I1}(t)\, dt$

$\forall E \in \mathcal{E}$

or $|\underset{\sim}{a}_{R1}| = \underset{\sim}{a}^+_{R1} + \underset{\sim}{a}^-_{R1}$

$|\underset{\sim}{a}_{I1}| = \underset{\sim}{a}^+_{I1} + \underset{\sim}{a}^-_{I1}$

$\Rightarrow |\underset{\sim}{a}_{R1}|(E) = \int_E a^+_{R1}(t) + a^-_{R1}(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{E}$

$|\underset{\sim}{a}_{I1}|(E) = \int_E a^+_{I1}(t) + a^-_{I1}(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{E}$

or $|\underset{\sim}{a}_1|(E) = |\underset{\sim}{a}_{R1}|(E) + |\underset{\sim}{a}_{I1}|(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow |\underset{\sim}{a}_1|(E) = \int_E |a_{R1}(t)| + |a_{I1}(t)|\, dt$$

$$= \int_E a^+_{R1}(t) + a^-_{R1}(t) + a^+_{I1}(t) + a^-_{I1}(t)\, dt$$

$$\forall E \in \mathcal{Z}$$

$$\Rightarrow |\underset{\sim}{a}_1|(\mathbb{R}^+) = \|\underset{\sim}{a}_1\| = \int_0^\infty |a_1(t)|\, dt \qquad [a]$$

et $\|\underset{\sim}{a}_1\| < \infty$ car $\|\underset{\sim}{a}\| < \infty$ et $\|\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\underset{\sim}{a}_2\| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

$$\left\|\sum_{i=0}^\infty a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right\| = \left|\sum_{i=0}^\infty a_{iR}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right|(\mathbb{R}^+) + \left|\sum_{i=0}^\infty a_{iI}\, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right|(\mathbb{R}^+)$$

$$= \sum_{i=0}^\infty |a_{iR}| + \sum_{i=0}^\infty |a_{iI}|$$

avec $\sum_{i=0}^\infty |a_{iR}| + \sum_{i=0}^\infty |a_{iI}| < \infty$ car $\|\underset{\sim}{a}\| < \infty$

et $\|\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\underset{\sim}{a}_2\| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$

$= \sum_{i=0}^\infty |a_i| < \infty$ (par définition de la norme dans $\mathbb{C}$) $[b]$

$$[a], [b] \Rightarrow \|\underset{\sim}{a}\| = \int_0^\infty |a_1(t)|\, dt + \sum_{i=0}^\infty |a_i| + \|\underset{\sim}{a}_3\|$$

IV.3. Les espaces $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$

IV.3.1 Définition

$\underset{\sim}{L}$: désigne l'espace des éléments de $\underset{\sim}{S}$, absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue

$\underset{\sim}{A}$: désigne l'espace des éléments de $\underset{\sim}{S}$, singuliers par rapport à la mesure de Lebesgue, purement atomiques

$\underset{\sim}{N}$: désigne l'espace des éléments de $\underset{\sim}{S}$, singuliers par rapport à la mesure de Lebesgue, non atomiques

Nous avons déjà montré que $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, cet élément $\underset{\sim}{a}$ se décompose en trois mesures $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a}_3$

Nous savons plus précisement que $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2 + \underset{\sim}{a}_3$

avec $\underset{\sim}{a}_1 \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a}_2 \in \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{a}_3 \in \underset{\sim}{N}$

Montrons que $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\underset{\sim}{S}$, qu'ils sont fermés et tels que :

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} \dotplus \underset{\sim}{N}$$

Nous verrons ainsi que tout élément de $\underset{\sim}{S}$ se décompose de façon unique en trois mesures $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a}_3$ appartenant respectivement à $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$

IV.3.2. $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$ sont des espaces de Banach

Théorème 1
$\underset{\sim}{L}$ est un sous espace vectoriel fermé de $\underset{\sim}{S}$

Munissons $\underset{\sim}{L}$ des opérations $+$, $.$ et de $\|.\|$ induites

Démontrons ainsi que $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$,

$c\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$ et montrons que $\underset{\sim}{L}$ est fermé

or i) $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, $\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}(E) = 0$

$$\Downarrow$$

$$c.\underset{\sim}{a}(E) = 0$$

$\Rightarrow c.\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$

ii) $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a} \ll \mu$ et $\underset{\sim}{b} \ll \mu$

par conséquent si $\mu(E) = 0$ alors $\underset{\sim}{a}(E) = 0 = \underset{\sim}{b}(E)$

$(E \in \mathcal{E})$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}(E) + \underset{\sim}{b}(E) = 0$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$

i) et ii) $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{L}$ est un sous espace vectoriel de $\underset{\sim}{S}$

$\underset{\sim}{L}$ est fermé car si $(\underset{\sim}{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\underset{\sim}{L}$, convergente alors $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$

$\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$ car $\forall E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_n(E) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n(E) = 0 = \underset{\sim}{a}(E)$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$$

Démontrons tout d'abord deux lemmes qui nous serons utiles par la suite

Lemme 1

La somme de deux mesures singulières est singulière (par rapport à la mesure de Lebesgue)

Soient $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ deux éléments de $\underset{\sim}{S}$, singulières par rapport à μ

Montrons que $\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$ est aussi singulière par rapport à μ

En effet : nous avons une décomposition de $\mathbb{R}^+$ en A_1 et B_1 deux ensembles mesurables tels que :

$\forall E \in \mathcal{E}$, $|\underset{\sim}{a}|(E \cap A_1) = \mu(E \cap B_1) = 0$,

et nous avons une décomposition de $\mathbb{R}^+$ en A_2 et B_2 deux ensembles mesurables tels que :

$\forall E \in \mathcal{E}$, $|\underset{\sim}{b}|(E \cap A_2) = \mu(E \cap B_2) = 0$

Rappelons que $A_1 \cup B_1 = \mathbb{R}^+ = A_2 \cup B_2$

$A_1 \cap B_1 = \phi = A_2 \cap B_2$

$\mathbb{R}^+ = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap B_1)$

et

$0 \leq |\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |a+b(E_i \cap A_1 \cap A_2)|$

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ subdivision de E

$$0 \leq |\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i \cap A_1 \cap A_2) + \underset{\sim}{b}(E_i \cap A_1 \cap A_2)|$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i \cap A_1 \cap A_2)| + \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{b}(E_i \cap A_1 \cap A_2)|$$

$$= |\underset{\sim}{a}|(E \cap A_1 \cap A_2) + |\underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2)$$

Par conséquent

$$0 \leq |\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2) \leq \underbrace{\mu((E \cap A_2) \cap B_1)}_{=0} + \underbrace{\mu((E \cap A_1) \cap B_2)}_{=0} + \underbrace{\mu((E \cap B_1) \cap B_2)}_{=0}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow |\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}|(E \cap A_1 \cap A_2) = 0 = \mu(E \cap (A_1 \cap A_2)^c)$

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ est singulière par rapport à μ, mesure de Lebesgue

Lemme 2

La limite d'une suite de mesures singulières est singulière (singulière par rapport à la mesure de Lebesgue)

Démonstration

Soit $(\underset{\sim}{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures singulières par rapport à μ, suite convergente.

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, la limite

Montrons que $\underset{\sim}{a}$ est singulière par rapport à μ

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{\sim}{a}_n$ est singulière par rapport à μ c'est-à-dire

$\exists A_n, A_n^c \in \mathcal{E}$ tels que $|\underset{\sim}{a}_n|(A_n \cap E) = 0 = \mu(A_n^c \cap E)$

$\forall E \in \mathcal{E}$

Considérons $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$A \in \mathcal{E}$ et $A \neq \phi$ car si $A = \phi$ alors $A^c = \mathbb{R}^+$

$\Downarrow$

$$0 \leq \mu(A^c \cap E) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c \cap E)\Big) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^c \cap E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E} \, [i]$$

$\Downarrow$

$$\mu(\mathbb{R}^+ \cap E) = \mu(A^c \cap E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$= \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

$$= 0 \quad \text{par } [i]$$

$\Downarrow$

$\mu \equiv \underset{\sim}{0}$ ce qui est faux

Par conséquent, $\forall E \in \mathcal{E}$:

$$|\underset{\sim}{a}|(E \cap A) = \lim_{n \to \infty} |\underset{\sim}{a}_n|(A \cap E)$$

or $A \cap E \subset A_n \cap E \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$\Downarrow$ $|\underset{\sim}{a}_n|(A \cap E) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|\underset{\sim}{a}|(E \cap A) = 0$

et $[i] \Rightarrow \mu(A^c \cap E) = 0$

Par conséquent $|\underset{\sim}{a}|(E \cap A) = 0 = \mu(A^c \cap E)$

$\Downarrow$

$\underset{\sim}{a}$ est singulière par rapport à μ

Théorème 2

$\underset{\sim}{A}$ est un sous espace vectoriel fermé de $\underset{\sim}{S}$

Démonstration

Soient $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ deux éléments de $\underset{\sim}{A}$

Alors $\underset{\sim}{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$

$\underset{\sim}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \underset{\sim}{\delta}_{t_j}$

$\forall c \in \mathbb{C}$, $\quad c.\underset{\sim}{a} = \sum_{i=0}^{\infty} c\, a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \Rightarrow c.\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$

et $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} + \sum_{j=0}^{\infty} b_i \underset{\sim}{\delta}_{t_j}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \underset{\sim}{\delta}_{t_k}$ où $d_k = a_k + b_k$ avec $a_k = 0$ si $t_k \neq t_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$b_k = 0$ si $t_k \neq t_j \ \forall j \in \mathbb{N}$

Par le lemme 1 et par la forme de la somme de deux éléments de $\underset{\sim}{A}$, nous pouvons dire que $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{A}$

De plus, $\underset{\sim}{A}$ est <u>fermé</u> :

soit $(\underset{\sim}{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\underset{\sim}{A}$

Nous savons par le lemme 2 que la limite est singulière par rapport à μ

Soit $\underset{\sim}{a} = \lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n$, $\underset{\sim}{a} \perp \mu$

Montrons que $\underset{\sim}{a}$ est purement atomique

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{\sim}{a}_n$ est purement atomique, par conséquent:

$\exists D_n \in \mathcal{E}$, ensemble dénombrable tel que $|\underset{\sim}{a}_n|(\mathbb{R}^+ \setminus D_n) = 0$

Prenons $D \triangleq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ $\quad$ D est dénombrable

Par conséquent, $|\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+ \setminus D) = |\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} |\underset{\sim}{a}_n|(\mathbb{R}^+ \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^c))$$

$$= \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

car $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^c \subset D_n^c$

et $\mathbb{R}^+ \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^c) \subset \mathbb{R}^+ \cap D_n^c \ \forall n \in \mathbb{N}$

donc $|\underset{\sim}{a}_n|(\mathbb{R}^+ \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^c))$

est $\leq |\underset{\sim}{a}_n|(\mathbb{R}^+ \cap D_n^c) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Par conséquent, il existe un ensemble D dénombrable tel que $|\underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+ \setminus D) = 0$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}$ est purement atomique

$\Rightarrow \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$

Théorème 3

$\underset{\sim}{N}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\underset{\sim}{S}$

Démonstration

soient $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{N}$, soit $c \in \mathbb{C}$,

alors $c.\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{N}$, en effet $c.\underset{\sim}{a}$ est évidemment singulière par rapport à μ et:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \underset{\sim}{a}(\{x\}) = 0 \Rightarrow c.\underset{\sim}{a}(\{x\}) = 0$$

et $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{N}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}(\{x\}) = 0$

$\hookrightarrow$ $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ est non atomique

et $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ est singulière par rapport à μ

par le lemme 1

$\underset{\sim}{N}$ est fermé :

Soit $(\underset{\sim}{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\underset{\sim}{N}$

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$, la limite de cette suite.

Nous savons que $\underset{\sim}{a}$ est singulière par rapport à μ [c]

par le lemme 2

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\underset{\sim}{a}_n(\{x\}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n(\{x\}) = \underset{\sim}{a}(\{x\}) = 0 \qquad [d]$$

[c], [d] $\Rightarrow \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{N}$

IV.3.3. $\underset{\sim}{S}$ est un espace qui peut s'écrire comme la somme directe des espaces $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$, c'est-à-dire :

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} \dotplus \underset{\sim}{N}$$

Tout d'abord, démontrons un lemme préliminaire :

Lemme 1

Si $\underset{\sim}{a}$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue μ

Si $\underset{\sim}{a}$ est aussi absolument continue par rapport à μ

Alors $\underset{\sim}{a} \equiv \underset{\sim}{0}$

Démonstration

Remarquons que i) $\underset{\sim}{a}$ singulière par rapport à μ

$$\Downarrow$$

$$\exists A, B \in \mathcal{E} \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = \mathbb{R}^+,$$

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad , |\underset{\sim}{a}|(E \cap A) = \mu(E \cap B) = 0$$

ii) $\underset{\sim}{a}$ absolument continue par rapport à μ

$$\Downarrow$$

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}(E) = 0$$

$$\underset{\sim}{a} << \mu$$

Pas 1 : $|\underset{\sim}{a}|$ est absolument continue par rapport à μ

En effet : $\underset{\sim}{a} << \mu \Rightarrow \underset{\sim}{a}_R , \underset{\sim}{a}_I << \mu$

De plus $\underset{\sim}{a}_R << \mu \Rightarrow \underset{\sim}{a}^+_R , \underset{\sim}{a}^-_R << \mu$

$\underset{\sim}{a}_I << \mu \Rightarrow \underset{\sim}{a}^+_I , \underset{\sim}{a}^-_I << \mu$

en effet : $\mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(A' \cap E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_R(A' \cap E) = \underset{\sim}{a}^+_R(E) = 0$

$\mu(B' \cap E) = 0 \Rightarrow -\underset{\sim}{a}_R(B' \cap E) = \underset{\sim}{a}^-_R(E) = 0$

où $\{A', B'\}$ étant la décomposition du théorème de Jordan

[HAL p 123]

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}^+_R , \underset{\sim}{a}^-_R << \mu$

$\mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(A'' \cap E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_I(A'' \cap E) = \underset{\sim}{a}^+_I(E) = 0$

$\Rightarrow \mu(B''\cap E)=0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_I(B''\cap E) = -\underset{\sim}{a}_I^-(E)=0$

où $\{A'', B''\}$ étant la décomposition

du théorème de Jordan.

Ainsi, comme $|\underset{\sim}{a}| = \underset{\sim}{a}_R^+ + \underset{\sim}{a}_R^- + \underset{\sim}{a}_I^+ + \underset{\sim}{a}_I^-$ et comme

$\underset{\sim}{a}_R^+, \underset{\sim}{a}_R^-, \underset{\sim}{a}_I^+, \underset{\sim}{a}_I^-$, mesures positives, sont $<< \mu$.

$\Rightarrow |\underset{\sim}{a}| << \mu$

Soit $E \in \mathcal{Z}$

$|\underset{\sim}{a}|(E) = |\underset{\sim}{a}|(E\cap A) + |\underset{\sim}{a}|(E\cap B)$

$(A, B$ définis en i$)$

$= |\underset{\sim}{a}|(E\cap B)$

$= 0$ car $\mu(E\cap B)=0$ et $|\underset{\sim}{a}| << \mu$ par le pas 1

$\Rightarrow \underset{\sim}{a} \equiv \underset{\sim}{0}$

Théorème 1
$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A} \dot{+} \underset{\sim}{N}$

Démonstration

Par le lemme, $\underset{\sim}{L} \cap \underset{\sim}{A} = \{\underset{\sim}{0}\} = \underset{\sim}{L} \cap \underset{\sim}{N}$

Par définition $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{N} = \{\underset{\sim}{0}\}$

Par le théorème IV.1 $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{N}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A} \dot{+} \underset{\sim}{N}$

Remarquons $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$ sont des sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach $\underset{\sim}{S}$.

Ces sous-espaces $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{N}$ sont donc également des espaces de Banach

Chapitre V

L'espace $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

V L'espace $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

V.1. Intégrales de Bochner.

Nous allons dans cette partie, définir l'intégrale de Bochner pour des mesures complexes.
Nous aurons besoin de cette notion pour l'étude des propriétés de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

Soit T un ensemble quelconque.
X une algèbre de Banach.
$\underset{\sim}{m}$ une mesure complexe telle que $|m|$ est une mesure finie sur $\mathfrak{T}$ = la σ-algèbre engendrée par des sous-ensembles de T
$(T, \mathfrak{T})$ est donc un espace mesurable.

V.1.1 Définitions

Définition 1

Une fonction $x(s)$ à valeurs dénombrables

$$x(\cdot) : T \longrightarrow X$$

$$s \longrightarrow x(s)$$

est Bochner-intégrable si $\|x(s)\|$ est Lebesgue intégrable

Par définition :

$\forall E \in \nabla\xi \qquad B\int_E x(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \underset{\sim}{m}(E_k \cap E)$

$$\text{où} \quad x(\sigma) = x_k \quad \text{sur } E_k \in \nabla\xi$$
$$x_k \in X$$

<u>Remarque</u>

L'intégrale est bien définie sur $E \in \nabla\xi$ et sur ∇ lui-même car la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\, |\underset{\sim}{m}|(E_k \cap E)$ est absolument convergente :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\, |\underset{\sim}{m}|(E_k \cap E) = \int_E \|x(\sigma)\|\, d|\underset{\sim}{m}| < \infty$$

car c'est Lebesgue intégrable par déf.

donc $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \underset{\sim}{m}(E_k \cap E)$ est de Cauchy dans X.

<u>Définition 2</u>

Une fonction $x(\sigma) : \nabla \longrightarrow X$ est Bochner intégrable si il existe une suite de fonctions intégrables à valeurs dénombrables $\{x_n(\sigma)\}_n$ convergeant presque partout vers $x(\sigma)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\nabla \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\|\, d|\underset{\sim}{m}| = 0. \qquad (1)$$

et par définition $(B)\int_E x(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} = \lim_{n\to\infty} (B)\int_E x_n(\sigma)\, d\underset{\sim}{m}$

$\forall E \in \nabla\xi$

Remarques.

1. $\lim_{n\to\infty} \int_T \|x(s) - x_n(s)\| \, d|\tilde{m}| = 0$ a un sens

car $x_n(s) \xrightarrow[\text{p.p.}]{n\to\infty} x(s)$

donc $\|x_n(s) - x(s)\| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.p.}} 0$

$x(s)$ est mesurable, comme limite de fonctions mesurables. $x(s) - x_n(s)$ est mesurable comme différence de fonctions mesurable

$\| \cdot - \cdot \|$ est continue donc mesurable

donc $\|x_n(s) - x(s)\|$ est une fonction mesurable

2. $\lim_{n\to\infty} (B) \int_E x_n(s) \, d\tilde{m}$ a un sens car.

$\left(\int_E x_n(s) \, d\tilde{m}\right)_n$ est de Cauchy dans X

En effet.

$$\left\|\int_E x_n(s) \, d\tilde{m} - \int_E x_m(s) \, d\tilde{m}\right\| = \left\|\int_E (x_n(s) - x_m(s)) \, d\tilde{m}\right\|$$

$$\leq \int_E \|x_n(s) - x_m(s)\| \, d|\tilde{m}|$$

$$\leq \underbrace{\int_T \|x_n(s) - x(s)\| \, d|\tilde{m}|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ par déf.}}$$

$$+ \underbrace{\int_T \|x(s) - x_m(s)\| \, d|\tilde{m}|}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \text{ par déf.}}$$

Cette suite d'intégrales est donc convergente car X est une algèbre de Banach et la limite est indépendante de la suite choisie :

Soient données 2 suites $(x_n(\sigma))_n$ et $(x_m(\sigma))_m$ de fonctions intégrables à valeurs dénombrables convergeant presque partout vers $x(\sigma)$, et vérifiant (1)

Montrons que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{T} x_n(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} = \lim\limits_{m \to \infty} \int_{T} x_m(\sigma)\, d\underset{\sim}{m}$.

$$\left\| \lim_{n} \int_{T} x_n(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} - \lim_{m} \int_{T} x_m(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} \right\| =$$

$$\lim_{n,m \to \infty} \left\| \int_{T} x_n(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} - \int_{T} x_m(\sigma)\, d\underset{\sim}{m} \right\| .$$

$$\leq \lim_{n,m \to \infty} \int_{T} \| x_n(\sigma) - x_m(\sigma) \|\, d|\underset{\sim}{m}|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_{T} \| x_n(\sigma) - x(\sigma) \|\, d|\underset{\sim}{m}|}_{\substack{\to 0 \\ \text{par hypothèse}}} + \underbrace{\lim_{m \to \infty} \int_{T} \| x_m(\sigma) - x(\sigma) \|\, d|\underset{\sim}{m}|}_{\substack{\to 0 \\ \text{par hypothèse}}}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to \infty}} .$$

V.1.2. Théorème

> **Théorème 1**
>
> Une condition nécessaire et suffisante pour que $x(\cdot) : T \longrightarrow X$ soit B-intégrable est que $x(\cdot)$ soit fortement mesurable et que $\int_T \|x(s)\| \, d|\underset{\sim}{m}| < \infty$.

Définition

$x(s)$ est fortement mesurable s'il existe une suite de fonctions à valeurs dénombrables qui converge $\mathcal{I}\mathcal{I}$ dans T vers $x(s)$

Démonstration du théorème 1

1° Condition nécessaire

Si $x(\cdot)$ est B-intégrable, il existe une suite de fonctions à valeurs dénombrables qui converge vers $x(\cdot)$ $\mathcal{I}\mathcal{I}$. dans T $\Rightarrow$ $x(s)$ est fortement mesurable

De plus $\int_T \|x(s)\| \, d|\underset{\sim}{m}| = \underbrace{\int_T \|x(s) - x_n(s)\| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ par déf.}}$

$+ \underbrace{\int_T \|x_n(s)\| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{< \infty}$.

car $x_n(\cdot)$ est B-intégrable

2° Condition suffisante

Soit $S_0 \doteq \{\sigma \in T : \|x(\sigma)\| > 0\}$

$S_0 \in \Sigma$ car $\|x(\cdot)\|$ est mesurable par hypothèse.

Puisque $x(\cdot)$ est fortement mesurable, il existe une suite dénombrable de fonctions à valeurs dénombrables

t.q. $x_n(\sigma) \xrightarrow{n \to \infty} x(\sigma)$ p.p. $\sigma \in T$.

Soit $\varepsilon > 0$

$$E_n \doteq \left\{ \sigma \in T,\ \sigma \in S_0,\ \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| < \frac{\varepsilon}{|m|(S_0)} \right\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad E_n \in \Sigma$

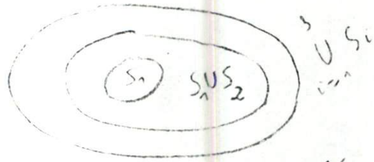
$$E_n = \underbrace{S_0}_{\in \Sigma} \cap \underbrace{\left\{ \sigma ;\ \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| < \frac{\varepsilon}{|m|(S_0)} \right\}}_{\in \Sigma}$$

$$S_n = E_n \setminus \bigcup_{k<n} E_k$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n \in \Sigma$

et $\bigcup_n S_n = S_0$

car $\bigcup_{n=1}^{N} S_n$ est une suite d'ensembles croissants



t.q. $\forall N \in \mathbb{N}$ $\quad \bigcup_{n=1}^{N} S_n \subset S_0$.

donc $\lim_{N \to \infty} \bigcup_{n=1}^{N} S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset S_0$.

En outre $\forall \sigma \in S_0$ on a que $\|x(\sigma)\| > 0$

Comme $\|x_n(\sigma) - x(\sigma)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

étant donné $\dfrac{\varepsilon}{|\underset{\sim}{m}|(S_0)}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n > N \Rightarrow \|x(\sigma) - x_n(\sigma)\| < \frac{\varepsilon}{|\underset{\sim}{m}|(S_0)}$$

c.à.d $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$ $\sigma \in E_n$.

c.à.d. $\sigma \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

On définit alors $\forall \varepsilon > 0$ une fonction à valeurs dénombrables
$$x_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} x_n(\sigma) & \text{sur } S_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\int_\Sigma \|x(\sigma) - x_\varepsilon(\sigma)\| \, d|\underset{\sim}{m}| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{|\underset{\sim}{m}|(S_0)} |\underset{\sim}{m}|(S_n) = \varepsilon.$$

En outre $\forall \varepsilon > 0$.

$$\underbrace{\int_\Sigma \|x_\varepsilon(\sigma)\| \, d|\underset{\sim}{m}| \le \underbrace{\int_\Sigma \|x_\varepsilon(\sigma) - x(\sigma)\| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\int_\Sigma \|x(\sigma)\| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{\substack{< \infty \\ \text{par hypothèse}}}}_{< \infty.}$$

c.à.d $\forall \varepsilon > 0$ $x_\varepsilon(\cdot)$ est une fonction B-intégrable à valeurs dénombrables

Soit $(\varepsilon_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ t.q. $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

alors $(x_{E_n}(\cdot))$ est une suite de fonctions à valeurs dénombrables B-intégrables t.q

$$x_{E_n}(\sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(\sigma) \quad \tilde{\jmath}.\tilde{\jmath}$$

et $\int_{\nabla} \| x_{E_n}(\sigma) - x(\sigma) \| \, d(\underset{\sim}{m}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

c'est-à-dire par définition $x(\cdot)$ est B-intégrable ∎

Théorème 2.

Soit $x(\cdot)$ une fonction B-intégrable et telle que l'intégrale de Bochner de $x(\cdot)$ est définie par la suite $\{x_n(\sigma)\}$ de fonction B-intégrables à valeurs dénombrables.

Alors $\forall x^* \in X^*$ $(x^*(x_n(\sigma)))$ converge $\tilde{\jmath}\tilde{\jmath}$. et en moyenne d'ordre 1 vers $x^*(x(\sigma))$

et on a que $x^* \int_E x(\sigma) \, d\underset{\sim}{m} = \int_E x^*(x(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m} \ \forall E \in \nabla \}$

Démonstration

1. $(x_n(\sigma)) \xrightarrow{n\to\infty} x(\sigma) \quad \tilde{\jmath}.\tilde{\jmath}.\ \sigma \in \nabla.$

donc par continuité de x^*

$$x^*(x_n(\sigma)) \xrightarrow{n\to\infty} x^*(x(\sigma)) \quad \tilde{\jmath}\,\tilde{\jmath} \ \sigma \in \nabla.$$

2. $\displaystyle\int_{\mathcal{T}} \| x^*(x_n(\sigma)) - x^*(x(\sigma)) \| \, d|\underset{\sim}{m}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\int_{\mathcal{T}} \| x^*(x_n(\sigma)) - x^*(x(\sigma)) \| \, d|\underset{\sim}{m}| = \int_{\mathcal{T}} \| x^*(x_n(\sigma) - x(\sigma)) \| \, d|\underset{\sim}{m}|$$

$$\leq \underbrace{\|x^*\|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\underbrace{\int_{\mathcal{T}} \|x_n(\sigma) - x(\sigma)\| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} \text{ par déf. de } x(\cdot) \text{ qui est B-intégrable}}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}$$

donc $x^*(x_n(\sigma)) \longrightarrow x^*(x(\sigma))$ en moyenne d'ordre 1

3. $x^*\left(\int_E x_n(\sigma) \, d\underset{\sim}{m}\right) = \int_E x^*(x_n(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m} \quad \forall E \in \mathcal{T}$

car $x_n(\,)$ est une fonction à valeurs dénombrables, donc $\int_E x_n(\sigma) \, d\underset{\sim}{m}$ est une somme dénombrable et donc, par linéarité et continuité de x^* on a bien l'égalité ci-dessus.

Puisque $\int_E x_n(\sigma) \, d\underset{\sim}{m} \xrightarrow{n\to\infty} \int_E x(\sigma) \, d\underset{\sim}{m}$

par continuité de x^*

$$x^* \int_E x_n(\sigma) \, d\underset{\sim}{m} \xrightarrow{n\to\infty} x^* \int_E x(\sigma) \, d\underset{\sim}{m}.$$

d'autre part $\int_E x^*(x_n(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m} \xrightarrow{n\to\infty} \int_E x^*(x(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m}$.

car $\left\| \int_E x^*(x_n(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m} - \int_E x^*(x(\sigma)) \, d\underset{\sim}{m} \right\| \leq \underbrace{\int_E \| x^*(x_n(\sigma) - x(\sigma)) \| \, d|\underset{\sim}{m}|}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}$

donc puisque $\int_E x^*(x_n(s))\, d\underset{\sim}{m} = x^* \int_E x_n(s)\, d\underset{\sim}{m}$

on a que $\int_E x^*(x(s))\, d\underset{\sim}{m} = x^* \int_E x(s)\, d\underset{\sim}{m}$.

par unicité de la limite d'une suite convergente. ■

V.2. L'espace $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ – Propriétés

V.2.1 Définition

On note par $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$, l'espace des mesures complexes localement finies sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ qui sont de variation bornée et dont la partie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue est purement atomique

c.à.d $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} = \{ \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S},\ \underset{\sim}{a}_3 = \underset{\sim}{0} \}$

Théorème

$\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ ssi $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$

où 1) $\underset{\sim}{a}_1 \in \underset{\sim}{L}$, c.à.d excepté pour un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, il existe une fonction à valeurs complexes unique $\underset{\sim}{a}_1 \in L_1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathcal{E}$$

2) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \in \underset{\sim}{A}$ où $(a_i)_{i=0}^{\infty} \in l_1$

et $a_i = \underset{\sim}{a}([t_i]) \in \mathbb{C}$ $i = 0, 1, 2, \ldots$

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E) = \sum_{t_i \in E} a_i \qquad E \in \mathcal{E}$$

3) $\|\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}_1\| + \|\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\|$

$$= \int_0^{\infty} |a_1(t)|\,dt + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty .$$

La démonstration suit des Théorème IV.1 et IV.2.

V.2.2. Etude de la convolution de 2 éléments de $\underset{\sim}{L}$ + $\underset{\sim}{A}$.

Théorème 1

$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, la correspondance

$$\tau \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_{\tau} \in \underset{\sim}{L}$$

est continue dans la norme.

Démonstration

1. $\forall\ \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T \in \underset{\sim}{L}$

$\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \implies$ si $\mu(E) = 0 \implies \underset{\sim}{a}(E) = 0$ avec $E \in \mathcal{E}$ fini

il faut voir que $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T(E) = 0$.

or $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T(E) = \underset{\sim}{a}\left((E - T) \cap \mathbb{R}^+\right)$ cfr 1. III. 43

et comme μ est invariante sous la translation

$\mu(E) = 0 \implies \mu\left((E - T) \cap \mathbb{R}^+\right) = 0 \implies \underset{\sim}{a}\left((E-T) \cap \mathbb{R}^+\right) = 0$

$\implies \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T(E) = 0$

2. Montrons que $\lim\limits_{\xi \to T} \| \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\xi - \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T \| = 0$.

Pour cela, on démontre d'abord que

$$\lim_{\xi \to T} \| \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\xi - \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_T \| = \lim_{\xi \to T} \int_0^\infty |a(t - \xi) - a(t - T)|\, dt$$

où $a(\,) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ et va être définie ci-dessous

a) $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \implies \exists\ a(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ t.q.

$$\underset{\sim}{a}(E) = \int_E a(t)\, dt \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

Montrons que si $a(t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$

$a(t - \xi) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^+$

Si $a(t)$ est une fonction mesurable, $a(t - \xi)$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables $(t \longrightarrow t - \xi \longrightarrow a(t - \xi))$

Il reste à démontrer que $\lim_{\xi \to T} \int_0^{\infty} |a(t-\xi) - a(t-\tau)| dt = 0$

Pour cela, on utilise le lemme suivant (cf. MSH th 42.20)

<u>Lemme</u>

Si $f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$ et si h est un vecteur $(h^{(1)}, \dots h^{(q)})$ alors :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \int_{\mathbb{R}^q} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

or ici $a(\cdot)$ est intégrable

$\mathbb{R}^q \longleftrightarrow \mathbb{R}^+$

$\|h\| \longleftrightarrow |T - \xi|$

donc $\lim_{|\tau - \xi| \to 0} \int_{\mathbb{R}^+} |a(\underbrace{(t-\tau)+(\tau-\xi)}_{t}) - a(t-\tau)| \underbrace{d(t-\tau)}_{dt} = 0$

$$\lim_{|\tau - \xi| \to 0} \int_{\mathbb{R}^+} |a(t-\xi) - a(t-\tau)| dt = 0$$

$$\lim_{\xi \to T} \int_{\mathbb{R}^+} |a(t-\xi) - a(t-\tau)| dt = 0.$$

Théorème 2

$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, $\forall \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$$

où l'intégrale dans le membre de droite est une intégrale de Bochner absolument convergente par rapport à $\underset{\sim}{b}$ sur la correspondance $\tau \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \in \underset{\sim}{L}$

Démonstration

1. $\int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b}$ est une intégrale de Bochner absolument convergente par rapport à $\underset{\sim}{b}$

Pour démontrer ceci, au lieu d'utiliser la définition de l'intégrale de Bochner, on utilise le th. 1 de V. 1.2

Soit $x(.) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \underset{\sim}{L}$

$$\tau \longrightarrow x(\tau) = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau$$

On veut donc approximer la fonction $x(.)$ par un ensemble de fonctions $(x_n(.))_n$ à valeurs dénombrables t.q. $x_n(\tau) \xrightarrow[\forall \tau]{} x(\tau)$

a) On a bien que $\int_{IR^+} \| \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \| \, d_\tau \, |\underset{\sim}{b}| < \infty$

car : $\| \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \| \leq \| \underset{\sim}{a} \| \cdot \underbrace{\| \underset{\sim}{\delta}_\tau \|}_{=1}$

donc $\int_{IR^+} \| \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \| \, d_\tau \, |\underset{\sim}{b}| \leq \| \underset{\sim}{a} \| \cdot \| \underset{\sim}{b} \| < \infty$

car $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

b) Il reste à construire $(x_n(\cdot))_n$ une suite de fonctions à valeurs dénombrables qui convergent presque partout vers $x(\tau) = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau$

Soit $\tau \in IR^+$ et $IR^+ = \bigcup_{k \in IN} [k, k+1[$

$\exists k \in IN$ t.q. $\tau \in [k, k+1[$

Soient $T_n \triangleq \dfrac{1}{2^n}$ et $t_i^{nk} = i \cdot T_n + k \quad i \leq 2^n$

$\tau \in [k, k+1[$ et $\underbrace{x_n(\tau) \triangleq \sum_{i=0}^{2^n-1} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i^{nk}} \, \chi_{[t_i^{nk}, t_{i+1}^{nk}[}}_{|||}$

définition de $x_n(\tau)$ sur l'intervalle $[k, k+1[$.

Montrons que : $x_n(\tau) \xrightarrow[\forall \tau]{n \to \infty} x(\tau) = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau$

Soit $\tau \in [k, k+1[$

$\forall n \in IN \quad \exists t_i^{nk} : \tau \in [t_i^{nk}, t_{i+1}^{nk}[$

donc $x_n(\tau) = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i^{nk}} = x(t_i^{nk})$

$\| x(\tau) - x_n(\tau) \| = \| x(\tau) - x(t_i^{nk}) \|$ où $|t_i^{nk} - \tau| \leq \dfrac{1}{2^n}$

donc si $n \to \infty$ $|t_i^{n_k} - \tau| \longrightarrow 0$, et donc

$\| x(\tau) - x(t_i^{n_k}) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ car l'application :

$\tau \longrightarrow \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{S}_\tau$ est continue.

Finalement, on a bien que :

$$\| x(\tau) - x_n(\tau) \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+$$

2. Montrons que $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{S}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b}$.

Montrons d'abord que $\forall E \in \mathcal{E}$:

$$\left(\int \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{S}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b} \right)(E) = \int \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{S}_\tau (E) \, d_\tau \underset{\sim}{b}$$

Soit $E \in \mathcal{E}$ fixé, considérons

$$T_E : \underset{\sim}{S} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\underset{\sim}{a} \longrightarrow \underset{\sim}{a}(E)$$

- T_E est linéaire :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{S}$

$$T_E(\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}) = \alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}(E) \stackrel{\Delta}{=} \alpha \underset{\sim}{a}(E) + \beta \underset{\sim}{b}(E)$$
$$= \alpha T_E(\underset{\sim}{a}) + \beta T_E(\underset{\sim}{b})$$

- T_E est bornée :

$$\| T_E \| \stackrel{\Delta}{=} \sup_{\substack{\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \\ \underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}}} \frac{|T_E(\underset{\sim}{a})|}{\|\underset{\sim}{a}\|} = \sup_{\substack{\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} \\ \underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}}} \frac{|\underset{\sim}{a}(E)|}{\|\underset{\sim}{a}\|} \leq 1$$

donc $T_E \in \underset{\sim}{S}^*$ = ens. des formes linéaires bornées définies sur $\underset{\sim}{S}$

donc par le point 1 de cette démonstration
et le théorème 2 p. V 9

on a $\quad T_E \int_{\mathbb{R}^+} x(\tau)\, d_\tau \underset{\sim}{b} = \int_{\mathbb{R}^+} T_E(x(\tau))\, d_\tau \underset{\sim}{b}$

c. à. d. $\quad \left(\int_{\mathbb{R}^+} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b}\right)(E) = \int_{\mathbb{R}^+} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau (E)\, d_\tau \underset{\sim}{b}.$

Comme $E \in \mathcal{E}$ est arbitraire

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^+} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b}\right)(E) = \int_{\mathbb{R}^+} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau (E)\, d_\tau \underset{\sim}{b}$$

$$= \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}\,(E)$$

donc on a bien : $\int_{\mathbb{R}^+} \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}.$

3. $\int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$

On a vu que $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \in \underset{\sim}{L}$ par le th. 1.

c. à. d. $\quad$ si $\mu(E) = 0 \implies \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau (E) = 0$

$$\left(\int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b}\right)(E) = \int_0^\infty \underbrace{\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau (E)}_{\substack{\parallel \\ 0 \ \forall \tau \in \mathbb{R}^+}} d_\tau \underset{\sim}{b}$$

$$= 0$$

Nous allons préciser les propriétés de $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{A}$ grâce aux propriétés du produit de convolution

Théorème 3

$\forall \hat{a} \in \underset{\sim}{A}$, $\forall \hat{b} \in \hat{L} + \hat{A}$ où $\hat{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \hat{\delta}_{t_i}$

$$\hat{a} * \hat{b} = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{b} * \hat{\delta}_{t_i}) \cdot a_i$$

où la somme du membre de droite de l'égalité est la limite d'une série absolument convergente de $\hat{L} + \hat{A}$.

Démonstration

Montrons que $\left\| \hat{a} * \hat{b} - \sum_{i=0}^{n} (\hat{b} * \hat{\delta}_{t_i}) \cdot a_i \right\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\left\| \hat{a} * \hat{b} - \sum_{i=0}^{n} (\hat{b} * \hat{\delta}_{t_i}) \cdot a_i \right\| = \left\| \hat{b} * \hat{a} - \hat{b} * \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \hat{\delta}_{t_i} \right) \right\|$$

com et distr de $*$

distr. de $*$

$$= \left\| \hat{b} * \left(\hat{a} - \sum_{i=0}^{n} a_i \hat{\delta}_{t_i} \right) \right\|$$

$$= \left\| \hat{b} * \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \hat{\delta}_{t_i} \right) \right\|$$

$$\leq \|\hat{b}\| \cdot \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \hat{\delta}_{t_i} \right\|$$

$$\leq \underbrace{\|\hat{b}\|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \underbrace{\|\hat{\delta}_{t_i}\|}_{=1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

donc $\quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}) \cdot a_i$

En outre

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot \|\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \|\underset{\sim}{b}\| = \|\underset{\sim}{a}\| \cdot \|\underset{\sim}{b}\|$$

donc $\left(\sum_{i=0}^{n} (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}) \cdot a_i\right)_n$ est absolument convergente

On a bien que $\sum_{i=0}^{\infty} (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}) \cdot a_i \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$.

en effet.

$\underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ par hyp. soit $\underset{\sim}{b} = \underbrace{\underset{\sim}{b}_1}_{\in \underset{\sim}{L}} + \underbrace{\underset{\sim}{b}_2}_{\in \underset{\sim}{A}}$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} &= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} [(\underset{\sim}{b}_1 + \underset{\sim}{b}_2) * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}]\, a_i \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(\underset{\sim}{b}_1 * \underset{\sim}{\delta}_{t_i})}_{\in \underset{\sim}{L} \text{ cf th 1}} \cdot a_i}_{\in \underset{\sim}{L} \text{ : espace vectoriel}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(\underset{\sim}{b}_2 * \underset{\sim}{\delta}_{t_i})}_{\in \underset{\sim}{A}}\, a_i}_{\in \underset{\sim}{A} = \text{esp vect.}} \Big) \\
&= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (\underset{\sim}{b}_1 * \underset{\sim}{\delta}_{t_i})\, a_i}_{\in \underset{\sim}{L}}}_{\in \underset{\sim}{L} = \text{esp vect fermé}} + \underbrace{\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (\underset{\sim}{b}_2 * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}) \cdot a_i}_{\in \underset{\sim}{A}}}_{\in \underset{\sim}{A} = \text{esp vect fermé}}
\end{aligned}$$

■

2. $\forall\, a_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \delta_{t_i} \in A$ et $\forall\, b \in L \cap A$

$$a_2 * b = \sum_{i=0}^{\infty} (b * \delta_{t_i})\, a_i \quad \text{par le th 3.}$$

Développons $a_2 * b$

$$a_2 * b = a_2 * (b_1 + b_2)$$

$$= a_2 * b_1 + a_2 * b_2 .$$

3. $$a_1 * b_2 = a_1 * \Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, \delta_{t'_j} \Big)$$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, \delta_{t'_j} \Big) * a_1$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, \underbrace{(\delta_{t'_j} * a_1)}_{\in L}}_{\in L \text{ car } L \text{ est un espace vectoriel fermé.}}$$

4. $$a_2 * b_1 = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \underbrace{b_1 * \delta_{t_i}}_{\in L}}_{\in L \text{ car } L \text{ est un esp. vect fermé}}$$

5. Si $a_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \delta_{t_i}$ et $b_2 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, \delta_{t'_j}$

alors $$a_2 * b_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i\, b_j\, \delta_{t_i + t'_j}$$

car $$a_2 * b_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, (b_2 * \delta_{t_i})$$

$$b_2 * \delta_{t_i} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, (\delta_{t'_j} * \delta_{t_i})$$

$$\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{b}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j \, (\underset{\sim}{\delta}_{t'_j} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i \, b_j \, \underbrace{\underset{\sim}{\delta}_{t'_j} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}}_{\underset{\sim}{\delta}_{t'_j + t_i}}$$

en effet $\forall E \in \mathcal{E}$

$$\underset{\sim}{\delta}_{t'_j} * \underset{\sim}{\delta}_{t_i}(E) = \int_0^{\infty} \underbrace{\underset{\sim}{\delta}_{t_j}((E-\tau) \cap \mathbb{R}^+)}_{} \, d_\tau \, \underset{\sim}{\delta}_{t'_j}$$

$= 1$ si $t_j \in (E-\tau) \cap \mathbb{R}^+$

$\iff$

$= 1$ si $\tau \in (E - t_j) \cap \mathbb{R}^+$

$$= \int_{(E-t_j) \cap \mathbb{R}^+} d_\tau \, \underset{\sim}{\delta}_{t'_j} = 1 \text{ si } t'_j \in (E - t_i) \cap \mathbb{R}^+$$

$\iff$

$= 1$ si $t'_j + t_i \in E.$

$$= \underset{\sim}{\delta}_{t'_j + t_i}(E)$$

$\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{b}_2 \in \underset{\sim}{A}$

cet élément est défini par la suite dénombrable

$$(\underset{\sim}{\delta}_{t_i + t'_j})_{j,i=1}^{\infty}$$

et $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_i| \cdot |b_j| \leq \| \underset{\sim}{a}_1 \| \cdot \| \underset{\sim}{b}_1 \| < \infty$

donc par 1 2 3 4 et 5, on a :

$\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \underbrace{\int_0^{\infty} \underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \, \underset{\sim}{b}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\underset{\sim}{b}_1 * \underset{\sim}{\delta}_{\tau_i}) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (\underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{\delta}_{t'_j})}_{\in \underset{\sim}{L}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i \, b_j \, \underset{\sim}{\delta}_{t'_j + t_i}}_{\in \underset{\sim}{A}}$$

V.3. $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ sous-algèbre de Banach de $\underset{\sim}{S}$

Théorème 1

$\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ est une algèbre de Banach commutative avec $\underset{\sim}{\delta}_0$ comme élément neutre

$\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{S}$

Démonstration

- On sait déjà que $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ est un sous-espace vectoriel fermé comme somme de 2 sous-espaces vectoriels fermés
- $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{S} \Rightarrow \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ possède une norme : celle de $\underset{\sim}{S}$

  $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} \quad \| \underset{\sim}{a} \| = |\underset{\sim}{a}| \; (\mathbb{R}^+)$
- $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ par le th 4 de I.2.2.
- $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$:

$$(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c})$$

  car $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{S}$ = algèbre de Banach.
- $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$:

$$(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c}$$

  car $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{S}$ = algèbre de Banach

donc $(\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}, \|\cdot\|, K)$ est une algèbre de Banach

et comme $\underset{\sim}{\delta}_0 \in \underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{\delta}_0$ de cette algèbre de Banach

V.4 $\underset{\sim}{A}$ sous-algèbre de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

Théorème

$\underset{\sim}{A}$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

Démonstration

- On a vu que $\underset{\sim}{A} = \{ \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{S}_{t_i} \}$

était un espace de Banach cfr § IV.25

- On a aussi démontré que :

$$\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{A} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{A} \qquad \text{th 4 de V.2.2}$$

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j \underset{\sim}{S}_{t_i + t'_j} \quad \text{si } \underset{\sim}{a} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{S}_{t_i}$$

$$\underset{\sim}{b} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \underset{\sim}{S}_{t'_j}$$

- $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \underset{\sim}{A}$

$$(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c})$$

et $$(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) * \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{c}$$

car on a ces 2 propriétés dans $\underset{\sim}{S}$ et que $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{S}$

donc en prenant pour norme sur $\underset{\sim}{A}$, la norme définie sur $\underset{\sim}{S}$, $(\underset{\sim}{A}, \|\cdot\|, K)$ est une algèbre de Banach et comme $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ qui est une algèbre de Banach $\underset{\sim}{A}$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ ∎

Chapitre VI

Les idéaux maximaux de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ et caractérisation des formes linéaires multiplicatives correspondantes

VI

Structure de l'ensemble des idéaux maximaux de $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ et de leurs formes linéaires multiplicatives correspondantes

VI . 1.

Théorème

$\underset{\sim}{L}$ est un idéal fermé de $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$

Démonstration

1. $\underset{\sim}{L} \neq \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ car $\underset{\sim}{\delta}_0 \notin \underset{\sim}{L}$

en effet : $\underset{\text{mesure de Lebesgue}}{\mu}(\{0\}) = 0$ or $\underset{\sim}{\delta}_0(\{0\}) = 1 \neq 0$

2. $\forall \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$

car $\underset{\sim}{L}$ est un espace vectoriel cfr th. 1 de IV. 3.2

3. $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, $\forall \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$

$$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b} = \int_0^\infty \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{\delta}_\tau \, d_\tau \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} \quad \text{cfr th. 2 de V 2.2.}$$

4. On sait que $\underset{\sim}{L}$ est un espace vectoriel fermé (cfr 1 IV 16)

$\Rightarrow$ $\underset{\sim}{L}$ est un idéal fermé

VI. 2. Caractérisation des idéaux maximaux et de leurs formes linéaires multiplicatives

Soit X une algèbre de Banach commutative avec un neutre δ_0, alors il existe une correspondance bijective entre les fonctions linéaires multiplicatives u et les idéaux maximaux M de X. (cfr II.5.1 et II.5.2)

En fait, le noyau d'une forme linéaire multiplicative u est un idéal maximal M et tout idéal maximal M est le noyau d'un u.

Donc pour étudier les idéaux maximaux M de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ on étudie les fonctions linéaires multiplicatives u correspondantes. On donne une classification des idéaux de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

VI.2.1 Définitions

$\underset{\sim}{\mathcal{M}} \triangleq$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{U}} \triangleq \{ \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{\mathcal{M}} : \underset{\sim}{L} \subset \underset{\sim}{M} \}$

$\underset{\sim}{\mathcal{W}} \triangleq \{ \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{\mathcal{M}} ; \underset{\sim}{L} \not\subset \underset{\sim}{M}$ c.à.d $\exists \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$ t.q. $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M} \}$

$\underset{\sim}{M}_0 \triangleq \{ \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_a + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta_{t_i} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} ; \underset{\sim}{a}(\{0\}) \triangleq a_0 = 0 \}$

$u \in \underset{\sim}{\mathcal{U}}$ signifie "u est une forme linéaire multiplicative dont le noyau est un idéal maximal $\underset{\sim}{M}$ qui appartient à $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$"

Il est clair que $\underset{\sim}{\mathcal{M}} = \underset{\sim}{\mathcal{U}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{W}}$ donc $\{\underset{\sim}{\mathcal{U}}, \underset{\sim}{\mathcal{W}}\}$ est une partition des idéaux maximaux de $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$.

On va étudier pour chaque $u \in \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ la fonction correspondante

$$\mu : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mu(t) = u(\underset{\sim}{\delta}_t)$$

où $\underset{\sim}{\delta}_t$ est l'élément unité de $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ déplacé de t unités : $\underset{\sim}{\delta}_t(E) = 1$ si $t \in E$

$= 0$ si $t \notin E$

Observons que $\forall u \in \underset{\sim}{\mathcal{M}}$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+$

a) $$\|u\| = \sup_{\|\underset{\sim}{a}\|=1} |u(\underset{\sim}{a})| = 1$$

car u est une forme linéaire multiplicative $\Rightarrow \|u\| \leq 1$ (cfr 1. II.34)

et si le neutre $\underset{\sim}{\delta}_0$ est t.q. $\|\underset{\sim}{\delta}_0\| = 1$ (ce qui est le cas)

alors $\|u\| = 1$ (cfr. 1 II.34)

b) $u(\underset{\sim}{\delta}_0) = 1$ par définition d'une forme linéaire multiplicative

c) $\mu(\underset{\sim}{\xi}_{t+\tau}) \underset{\uparrow}{=} \mu(\underset{\sim}{\xi}_t * \underset{\sim}{\xi}_\tau) \underset{\uparrow}{=} \mu(\underset{\sim}{\xi}_t)\cdot\mu(\underset{\sim}{\xi}_\tau)$

par déf de $\underset{\sim}{\xi}_{t+\tau}$ car μ est une forme linéaire multiplicative

d) $|\nu(t)| \leq 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

car $|\nu(t)| = |\mu(\underset{\sim}{\xi}_t)| \leq \|\mu\| = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

e) $\nu(0) = \mu(\underset{\sim}{\xi}_0) = 1$

f) $\nu(t+\tau) = \mu(\underset{\sim}{\xi}_{t+\tau}) = \mu(\underset{\sim}{\xi}_t)\cdot\mu(\underset{\sim}{\xi}_\tau)$

$= \nu(t)\cdot\nu(\tau) \quad \forall\, t, \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$

Définition

Nous dirons que $\nu(\cdot)$ satisfait l'équation (1) trivialement si $\nu(t) = 0 \quad \forall\, t > 0$.

Nous appelerons caractère χ de la droite réelle une fonction

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \rightsquigarrow \chi(t)$$

telle que $|\chi(t)| = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

$\chi(t+\tau) = \chi(t)\cdot\chi(\tau) \quad \forall\, t, \tau \in \mathbb{R}$

VI 2.2. Théorèmes

Etudions maintenant des propriétés des caractères ce qui permettra par la suite de caractériser les formes linéaires multiplicatives.

Théorème 1

$\forall \mu \in \mathcal{M}$

a) La fonction ν définie par $\nu(t) = \mu(\underset{\sim}{S}_t)$ satisfait (1) trivialement si $\nu(t) = 0$ pour un $t \in \mathbb{R}_0^+$

b) Si la fonction ν ne satisfait pas (1) trivialement alors il existe une constante $\sigma \geq 0$ et un caractère χ de la droite réelle t.q.

$$\nu(t) = \mu(\underset{\sim}{S}_t) = \chi(t) \cdot \exp(-\sigma t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

c) En plus, si la fonction ν est mesurable, alors il existe un $\sigma \geq 0$ et un $\omega \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\nu(t) = e^{-(\sigma + j\omega)t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

En fait, $\exists\, \omega \in \mathbb{R}$ t.q. $\chi(t) = e^{-j\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Démonstration

a) – Condition nécessaire :

si $\nu(\cdot)$ satisfait (1) trivialement $\Rightarrow \forall\, t>0\ \nu(t)=0$

donc $\exists\, t \in \mathbb{R}_0^+$ t.q. $\nu(t)=0$.

– condition suffisante

Si $\exists\, \tau \in \mathbb{R}_0^+$ t.q. $\nu(\tau)=0$

alors $\forall\, t>\tau$ $\quad \nu(t)=\nu((t-\tau)+\tau)=\nu(t-\tau)\cdot\underbrace{\nu(\tau)}_{0}=0$

Soit $t \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \cdot t > \tau$

$$\nu(nt)=0$$

$$\text{or } \nu(nt)=(\nu(t))^n \Rightarrow \nu(t)=0.$$

donc si $\exists\, \tau \in \mathbb{R}_0^+$ t.q. $\nu(\tau)=0$ alors $\forall\, t>0$ $\nu(t)=0$, donc $\nu(\cdot)$ satisfait (1) trivialement (3)

b) **Pas #1** : Si $\nu(t)$ ne satisfait pas (1) trivialement, alors $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ $|\nu(t)|=\exp(\alpha t)$ pour un certain α

En effet : Soit $f(t)=\log|\nu(t)|$, comme $|\nu(t)|\neq 0$

$\Rightarrow f(t)$ est bien définie sur $]0,\infty[$

En plus $f(\xi+\eta)=f(\xi)+f(\eta)$ et $f(0)=0$

en effet : $f(\xi+\eta)=\log|\nu(\xi+\eta)|=\log|\nu(\xi)\cdot\nu(\eta)|$

$$=\log|\nu(\xi)|+\log|\nu(\eta)|$$

$$=f(\xi)+f(\eta).$$

$f(0) = \log |\Psi(0)| = \log 1 = 0$

On sait que $\quad 0 < |\Psi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \quad -\infty < f(t) \leq 0$

par définition du logarithme

la fonction $f(t)$ est donc bornée supérieurement

$\Rightarrow$ $f(t)$ est bornée dans un voisinage de l'origine

Si ce n'était pas vrai, il existerait une suite

$t_n \xrightarrow{n\to\infty} 0_+ \quad$ t.q. $f(t_n) \longrightarrow -\infty$ (car $-\infty < f(t) \leq 0$

donc $f(t_n) \not\longrightarrow +\infty$)

donc $f(\tau_2 - t_n) = f(\tau_2) - f(t_n) \longrightarrow +\infty$: impossible

car $f(t) \leq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}_0^+$

$f(\tau_2) = f[(\tau_2 - t_n) + t_n]$

$= f(\tau_2 - t_n) + f(t_n) \iff f(\tau_2) - f(t_n) = f(\tau_2 - t_n)$

On a aussi que $f(t) \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow 0^+$

Si le contraire était vrai, il existerait une suite $t_n \longrightarrow 0^+$ t.q. $-f(t_n) \geq \varepsilon > 0$

(ou $f(t_n) \leq -\varepsilon < 0$) pour un $\varepsilon > 0$

Mais alors $-f\left(\sum_{i=k}^{k+n} t_i\right) \geq n \cdot \varepsilon$ et $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{k+n} t_i = 0$

pour n arbitraire

ce qui est de nouveau impossible puisque

$f(t)$ est bornée dans un voisinage de 0 donc on a bien la continuité à droite en 0.

En fait, à cause de l'additivité, on a la continuité à droite $\forall\, t \geq 0$:

Soit une suite (t_n) t.q. $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t$ $t_n \geq t\ \forall n \in \mathbb{N}$

$f(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(t)$ car :

$t_n \xrightarrow{n\to\infty} t \Leftrightarrow t_n - t \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f(t_n - t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

or $f(t_n - t) = f(t_n) - f(t)$

donc $f(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(t)$

De plus, on a que $\forall\, r \in \mathbb{Q}^+$ $f(r) = r \cdot f(1)$

car $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n \cdot f(1)$

or $r \in \mathbb{Q}^+$ $\exists\, n, m \in \mathbb{N}$ t.q. $r = \frac{m}{n}$

$n \cdot f(\frac{m}{n}) = f(n \cdot \frac{m}{n})$ $f(m) = m \cdot f(1)$

$\Rightarrow f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} \cdot f(1)$.

$\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ $\exists\, (t_n) \subset \mathbb{Q}^+$ t.q. $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t$ $t_n \geq t\ \forall n$ par construction

Par la continuité à droite

$f(t) = t \cdot f(1)$ $\forall\, t > 0$.

car $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f(t_n) = t_n \cdot f(1)$ car $t_n \in \mathbb{Q}^+$

$f(t_n) \longrightarrow f(t)$

$t_n \cdot f(1) \longrightarrow t \cdot f(1)$

$\Rightarrow$ $f(t) = t \cdot f(1)$ par l'unicité de la limite d'une suite convergente.

On aura la thèse du pas # 1 en prenant $\alpha = f(1)$ $= \log|\nu(1)| \leq 0$

car $f(t) = \log|\nu(t)|$

$= t \cdot f(1)$.

donc $\log|\nu(t)| = t \cdot f(1)$

$|\nu(t)| = \exp(t \cdot f(1))$

$= \exp(\alpha \cdot t)$ avec $\alpha = f(1) \leq 0$

Pas # 2 : Soit $\chi(t) \triangleq \dfrac{\nu(t)}{|\nu(t)|}$ $t \geq 0$.

$= \left(\dfrac{\nu(-t)}{|\nu(-t)|}\right)^{-1}$ $t < 0$.

$\chi(\cdot)$ sera un caractère de la droite réelle.

En effet : $\chi(\cdot)$ est bien défini car $|\nu(t)| \neq 0 \; \forall t > 0$. par hypothèse

$$\chi(t+\tau) = \frac{\nu(t+\tau)}{|\nu(t+\tau)|} = \frac{\nu(t)\cdot\nu(\tau)}{|\nu(t)|\cdot|\nu(\tau)|}$$

$$= \chi(t)\cdot\chi(\tau) \quad \forall t,\tau \in \mathbb{R}^+$$

$$|\chi(t)| = \frac{|\nu(t)|}{|\nu(t)|} = 1 \quad \forall t \geq 0$$

Si $t < 0$ $|\chi(t)| = 1$

$\forall t,\tau \in \mathbb{R}^-$ $\chi(t+\tau) = \dfrac{|\nu(-t-\tau)|}{\nu(-t-\tau)} = \dfrac{|\nu(-t)|\cdot|\nu(-\tau)|}{\nu(-t)\cdot\nu(-\tau)}$

$= \chi(t)\cdot\chi(\tau)$.

|| Pas # 3 : $\forall t > 0 \quad \nu(t) = e^{-\sigma t} . \chi(t)$

En effet : par le pas 1 :

$$\forall t > 0 \quad |\nu(t)| = e^{\alpha t} \qquad \alpha \leq 0$$

par le pas 2 :

$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \chi(t) = \dfrac{\nu(t)}{|\nu(t)|}$ est un caractère sur $\mathbb{R}$.

donc $\forall t > 0 \quad \nu(t) = |\nu(t)| . \chi(t)$

$$= e^{\alpha t} . \chi(t).$$

$$= e^{-\sigma t} . \chi(t)$$

avec $\sigma = -\alpha \geq 0$

et χ caractère sur $\mathbb{R}$

c) || Pas # 1 : Si $\chi(\cdot)$ est un caractère mesurable de $\mathbb{R}$ alors $\chi(t) = e^{i\beta t}$ pour un certain réel β

En effet : Pour $|\delta| > 0$ et $\gamma > 0$.

$$(\chi(t+\delta) - \chi(t)) . \gamma = \int_0^\gamma [\chi(t+\delta-\eta) - \chi(t-\eta)] . \chi(\eta)\, d\eta$$

car :

$$\int_0^\gamma (\chi(t+\delta-\eta) - \chi(t-\eta) . \chi(\eta)\, d\eta = \int_0^\gamma (\chi(t+\delta - \chi(t))\, d\eta$$

$$= (\chi(t+\delta) - \chi(t)) \underbrace{\int_0^\gamma d\eta}_{\gamma}$$

donc $|\chi(t+\delta) - \chi(t)| . \gamma = \left| \int_0^\gamma [\chi(t+\delta-\eta) - \chi(t-\eta)] . \chi(\eta)\, d\eta \right|$

$$\leq \int_0^\gamma |\chi(t+\delta-\eta) - \chi(t-\eta)|\, d\eta$$

$$|x(t+s) - x(t)| \leq \vec{\gamma} \int_0^{\gamma} |x(t+s-\eta) - x(t-\eta)| \, d\eta \qquad (2)$$

Soit $u = t - \eta \qquad du = -d\eta$

$\eta = 0 \longrightarrow u = t \qquad \eta = \gamma \Rightarrow u = t - \gamma$

$$\int_0^{\gamma} |x(t+s-\eta) - x(t-\eta)| \, d\eta = \int_{t-\gamma}^{t} |x(u+s) - x(u)| \, du .$$

Soit $g(u) = x(u)$ sur $[t-\gamma, t+\gamma]$
$\qquad = 0$ ailleurs

g est mesurable car x l'est par hypothèse
g est intégrable car $g \equiv 0$ en dehors d'un compact et g est bornée, donc par le lemme p 15 de V.2.2 :

$$\lim_{|s| \to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(u+s) - g(u)| \, du = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|s| \to 0} \int_{t-\gamma}^{t} |g(u+s) - g(u)| \, du = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|s| \to 0} \int_0^{\gamma} |x(t+s-\eta) - x(t-\eta)| \, d\eta = 0$$

donc si $|s| \to 0$, par (2), on a que $|x(t+s) - x(t)| \to 0$

donc $x(t)$ est une <u>fonction continue</u>

De plus :

$$\frac{\chi(\delta)-1}{\delta}\int_0^\gamma \chi(t)\,dt = \delta^{-1}\int_0^\gamma (\chi(\delta)-1)\chi(t)\,dt$$

$$= \delta^{-1}\int_0^\gamma (\chi(\delta).\chi(t)-\chi(t))\,dt$$

$$= \delta^{-1}\int_0^\gamma (\chi(t+\delta)-\chi(t))\,dt$$

$$= \delta^{-1}\int_0^\gamma \chi(t+\delta)\,dt - \delta^{-1}\int_0^\gamma \chi(t)\,dt$$

$u = \delta + t$

$$= \delta^{-1}\int_\delta^{\delta+\gamma} \chi(u)\,du - \delta^{-1}\int_0^\gamma \chi(t)\,dt$$

$$= \delta^{-1}\int_\delta^{\delta+\gamma} \chi(t)\,dt - \delta^{-1}\int_0^\gamma \chi(t)\,dt$$

Choisissons γ t.q.

$$\int_0^\gamma \chi(t)\,dt \neq 0$$

On va démontrer que $\lim\limits_{|\delta|\to 0} \delta^{-1}\left[\int_\delta^{\delta+\gamma}\chi(t)\,dt - \int_0^\gamma \chi(t)\,dt\right]$ existe

En fait, cette limite donne une indétermination 0/0. Si on dérive haut et bas en fonction de δ en utilisant l'Hospital on a :

$$\lim_{|\delta|\to 0} \frac{1.\left[\chi(t)\right]_\delta^{\delta+\gamma}}{1} = \lim_{|\delta|\to 0} (\chi(\delta+\gamma)-\chi(\delta))$$

$$\underset{?}{=} \chi(\gamma)-1$$

car $\chi(\,)$ est continue

donc $$\left.\frac{d\chi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{|\delta|\to 0}\frac{\chi(\delta)-1}{\delta} = \lim_{|\delta|\to 0}\frac{\delta^{-1}\left[\int_\delta^{\gamma+\delta}\chi(t)\,dt - \int_0^\gamma \chi(t)\,dt\right]}{\int_0^\gamma \chi(t)\,dt}$$

donc $\left.\frac{d\chi(t)}{dt}\right|_{t=0} = j\beta$ où $\beta \in \mathbb{C}$

$$\left.\frac{\chi(t+h)}{dh}\right|_{h=0} = \left.\frac{d(\chi(t).\chi(h))}{dh}\right|_{h=0}$$

$$= \chi(t) . \left.\frac{d\chi(h)}{dh}\right|_{h=0}$$

$$= \chi(t) . j\beta$$

or $\left.\frac{d\chi(t+h)}{dh}\right|_{h=0} \Longleftrightarrow \left.\frac{d\chi(t+h)}{d(t+h)}\right|_{h=0} \Longleftrightarrow \left.\frac{d\chi(t)}{dt}\right|_{t}$

donc $\frac{d\chi(t)}{dt} = \chi(t) . j\beta$

$$\chi(t) = c . e^{j\beta t} \quad c = \text{constante}$$

or $\chi(0) = 1 = c$.

et comme $|\chi(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \beta$ est réel

(RM $|\;|$ désigne dans ce cas la norme 2 dans $\mathbb{C}$)

donc $\chi(t) = e^{j\beta t}$ β réel

Ceci termine la démonstration du pas # 1

Pas # 2 : $\nu(t) = e^{-(\sigma + j\omega)t}$ $\quad \sigma \geq 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$

En effet : Par le point b du théorème, on sait que $\nu(t) = e^{-\sigma t} \cdot x(t)$.

Comme par hypothèse $\nu(\cdot)$ est mesurable $\Rightarrow$ $|\nu(\cdot)|$ est mesurable $\Rightarrow \dfrac{1}{|\nu(\cdot)|}$ est mesurable

car $|\nu(t)| \neq 0 \ \forall t > 0$ par hypothèse et

$$\left\{ t : \frac{1}{|\nu(t)|} < \alpha \right\} = \left\{ t : \frac{1}{\alpha} < |\nu(t)| \right\}$$

or $\left\{ t : \frac{1}{\alpha} \leq |\nu(t)| \right\}$ est mesurable car $|\nu(\cdot)|$ est mesurable

et donc puisque $\left\{ t : \frac{1}{|\nu(t)|} < \alpha \right\}$ est un ensemble mesurable $\forall \alpha \in \mathbb{R}_0$, on a bien que $1/|\nu(\cdot)|$ est mesurable [ROY].

donc $x(\cdot) = \dfrac{\nu(\cdot)}{|\nu(\cdot)|}$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables

donc par le pas # 1 $x(t) = e^{j\beta t}$

$$\Rightarrow \nu(t) = e^{-\sigma t} \cdot e^{j\beta t}$$
$$= e^{-(\sigma + j\omega)t} \quad \text{avec } \omega = -\beta$$
$$\sigma \geq 0.$$

Théorème 2

Soit $\underset{\sim}{M}_0 = \left\{ \underset{\wedge}{a} = \underset{\wedge}{a}_a + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\wedge}{\delta}_{t_i} \in \underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} \,;\, \underset{\wedge}{a}(\{0\}) \triangleq a_0 = 0 \right\}$

C'est un idéal maximal de $\underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\wedge}{A}$

Si μ_0 est la forme linéaire multiplicative correspondant à $\underset{\sim}{M}_0$ alors $\mu_0(\underset{\wedge}{a}) = \underset{\wedge}{a}(\{0\}) = 0 \quad \forall\, \underset{\wedge}{a} \quad \underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

$\mu_0 \in \underset{\wedge}{\mathcal{U}}$

et si ν_0 est la fonction ν correspondant à μ_0, définie par $\nu_0(t) = \mu_0(\underset{\wedge}{\delta}_t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$

alors ν_0 est la seule fonction ν qui satisfait

(1) trivialement

Démonstration

Pas# 1 : μ_0 est bien une forme linéaire multiplicative.

En effet :

$$\forall\, \underset{\wedge}{a},\, \underset{\wedge}{b} \in \underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} \quad , \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\mu(\alpha \underset{\wedge}{a} + \beta \underset{\wedge}{b}) = (\alpha \underset{\wedge}{a} + \beta \underset{\wedge}{b})(\{0\})$$

$\underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\wedge}{A}$ esp. vect. $\longrightarrow$

$$= \alpha\, \underset{\wedge}{a}(\{0\}) + \beta\, \underset{\wedge}{b}(\{0\})$$

$$= \alpha \cdot \mu(\underset{\wedge}{a}) + \beta \cdot \mu(\underset{\wedge}{b})$$

$\forall\, \underset{\wedge}{a},\, \underset{\wedge}{b} \in \underset{\wedge}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

soit $\underset{\wedge}{a} = \underbrace{\underset{\wedge}{a}_1}_{\in \underset{\wedge}{L}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\wedge}{\delta}_{t_i}}_{\in \underset{\sim}{A}}$

et $b = b_1 + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \delta_{t_j}$

par le th. 4 p. 21 de V.2.2 on voit qu'on peut écrire :

$$a * b = \underbrace{\left(\int_0^{\infty} a_1 * \delta_\tau \, d\tau \, b_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (b_1 * \delta_{t_i}) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (a_1 * \delta_{t_j}) \right)}_{\equiv\ \ell \in L}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i \, b_j \, \delta_{t_i + t_j}$$

donc $a * b(\{0\}) = \underbrace{\ell(\{0\})}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{car } \ell \in L}} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i \, b_j \, \delta_{t_i + t_j}(\{0\})$

$$= a_0 \cdot b_0 = a(\{0\}) \cdot b(\{0\})$$

$$= \mu(a) \cdot \mu(b).$$

De plus $\mu(\delta_0) = 1$

donc μ_0 est une forme linéaire multiplicative et comme le noyau de μ_0 est $M_0 \Rightarrow M_0$ est un idéal maximal $\Rightarrow M_0 \in \mathcal{M}$

et comme $L \subset M_0 \Rightarrow M_0 \in U$.

<u>Pas # 2</u> : Soit $\nu_0(t) = \mu_0(\delta_t) \quad \forall t > 0$

alors $\nu_0(\cdot)$ satisfait (1) trivialement et $\nu_0(\cdot)$ est l'unique fonction ν satisfaisant (1) trivialement

En effet. - $\mu_0(t) = \mu_0(\underset{\sim}{S}_t) = \underset{\sim}{S}_t(\{0\}) = 0$ si $t > 0$

- $\mu_0(\cdot)$ est la seule qui satisfait (1) trivialement:

Supposons qu'il existe une forme linéaire multiplicative t.q. $\mu(\underset{\sim}{S}_{\xi_0}) = 0$ pour un $\xi_0 > 0$

alors $\forall \xi > 0$ $\mu(\underset{\sim}{S}_\xi) = 0$ par a) p VI.6.

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$ et supposons que $\underset{\sim}{a}(\{0\}) = 0$

Posons $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$

$$\underset{\sim}{a}_\varepsilon(E) \stackrel{\Delta}{=} \underset{\sim}{a}(E \setminus I_\varepsilon)$$

$$= \underset{\sim}{a}(E) - \underset{\sim}{a}(E \cap I_\varepsilon)$$

car $\underset{\sim}{a}(E) = \underset{\sim}{a}(E \cap I_\varepsilon) + \underset{\sim}{a}(E \setminus I_\varepsilon)$

$$\underset{\sim}{a}_\varepsilon \in \underset{\sim}{S}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \underset{\sim}{a}_\varepsilon - \underset{\sim}{a} \| = 0$$

en effet : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |\underset{\sim}{a}_\varepsilon - \underset{\sim}{a}|(\mathbb{R}^+) = \sup \{ |\underset{\sim}{a}_\varepsilon - \underset{\sim}{a}|(E),\ E \in \mathcal{E}_B \}$

$$|\underset{\sim}{a}_\varepsilon - \underset{\sim}{a}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |(\underset{\sim}{a}_\varepsilon - \underset{\sim}{a})(E_i)|$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}_\varepsilon(E_i) - \underset{\sim}{a}(E_i)|$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i) - \underset{\sim}{a}(E_i \cap I_\varepsilon) - \underset{\sim}{a}(E_i)|$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i \cap I_\varepsilon)|$$

$$= |\underset{\sim}{a}|(E \cap I_\varepsilon)$$

$$\leq |\underset{\sim}{a}|(I_\varepsilon)$$

or $|\underset{\sim}{a}|(I_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

car : si μ est une mesure positive et $A_n \searrow A$

et si $\exists n$ t.q. $\mu(A_n) < +\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

ici $I_\varepsilon \searrow \{0\}$

et $|\underset{\sim}{a}|$ est une mesure positive finie ($\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{S}$)

$\Rightarrow \lim_{|\varepsilon|\to 0} |\hat{a}|(I_\varepsilon) = |\underset{\sim}{a}|(\{0\}) \hat{=} 0$

par hypothèse

On peut toujours écrire que

$$\hat{a}_\varepsilon = (\hat{a}_\varepsilon * \underset{\sim}{S}_{-\varepsilon/2}) * \underset{\sim}{S}_{\varepsilon/2}$$

où $(\hat{a}_\varepsilon * \underset{\sim}{S}_{-\varepsilon/2})(E) \overset{\Delta}{=} \hat{a}_\varepsilon((E - \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{R}^+)$

$\hat{a}_\varepsilon * \hat{S}_{-\varepsilon/2} \in \underset{\sim}{S}$.

et $\mu(\hat{a}_\varepsilon) = \mu(\hat{a}_\varepsilon * \hat{S}_{-\varepsilon/2}) \cdot \underbrace{\mu(\underset{\sim}{S}_{+\varepsilon/2})}_{0}$

$= 0.$

et comme μ est une forme linéaire et bornée, donc continue, si $(\hat{a}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \hat{a}) \Longrightarrow (\mu(\hat{a}_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mu(\hat{a}))$

et donc puisque $\mu(\hat{a}_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\underset{\sim}{a}) = 0$

Soit $\hat{a} \in \underset{\sim}{S}$ arbitraire

$\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}(\{0\})\, \underset{\sim}{S}_0$ s'annulle sur $\{0\}$.

de telle sorte que $\mu(\underset{\sim}{a}) = \mu(\underset{\sim}{a} - a(\{0\}) \cdot \underset{\sim}{S}_0) + \mu(a(\{0\}) \cdot \underset{\sim}{S}_0)$

$= a(\{0\})$

donc $\mu = \mu_0$ ∎

VI.3 Caractérisation des formes linéaires multiplicatives

VI.3.1. Définition 1

Nous notons par $\underset{\sim}{U}_o \triangleq \{\underset{\sim}{M}_o\}$ c'est-à-dire un singleton où $\underset{\sim}{M}_o \in \underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{M}_o$ est l'idéal maximal décrit précédemment

$\underset{\sim}{U}_1 \triangleq \underset{\sim}{U} \setminus \underset{\sim}{U}_o$

Définition 2 (transformée de Laplace d'un élément de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$)

Pour chaque élément $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, nous définissons comme transformée de Laplace, la fonction à valeurs complexes $\hat{\underset{\sim}{a}} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$

$s \to \hat{\underset{\sim}{a}}(s)$ donnée par :

$$\hat{\underset{\sim}{a}}(s) \triangleq \int_0^\infty e^{-s.t}\, d_t \underset{\sim}{a} \quad , s \in \mathbb{C}_+$$

Remarque

Il est facile de voir que $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, $\hat{\underset{\sim}{a}}(s)$ est bien définie $\forall s \in \mathbb{C}_+$

En effet ; $\forall s \in \mathbb{C}_+$, $\int_0^\infty |e^{-s.t}|_1\, d_t|\underset{\sim}{a}| \leq 2 . \|\underset{\sim}{a}\| < \infty$

car $|e^{-st}|_1 \leq 2 \quad \forall t \geq 0$

$\forall s \in \mathbb{C}_+$

IV.3.2 Théorème 1

Considérons $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$ et leurs fonctions linéaires multiplicatives correspondantes.

a) $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est l'union disjointe de $\underset{\sim}{W}$, $\underset{\sim}{U}_1$ et $\underset{\sim}{U}_0$

b) $u \in \underset{\sim}{W}$ (le noyau de la fonction linéaire multiplicative u appartient à $\underset{\sim}{W}$)

$\Updownarrow$

Il existe $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}_+$ tel que :

$$u(\underset{\sim}{a}) = \int_0^\infty e^{-st}\, d_t \underset{\sim}{a} \triangleq \hat{\underset{\sim}{a}}(s) \qquad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$$

c) $u \in \underset{\sim}{U}_0$

$\Updownarrow$

$$u(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a}(\{0\}) \triangleq a_0 \qquad \forall \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$$

$$\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$$

d) $u \in \underset{\sim}{U}_1$

$\Updownarrow$

Il existe un $\sigma \geq 0$ et un caractère χ de la ligne réelle tel que

$$u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \chi(t_i)\, e^{-\sigma t_i} \qquad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$$

Démonstration

Le point a) est immédiat car :

$\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est l'union disjointe de $\underset{\sim}{w}$ et $\mathcal{U}$

$\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est l'union disjointe de $\underset{\sim}{w}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{U}}_0, \underset{\sim}{\mathcal{U}}_1$ car par définition

$\{\underset{\sim}{M}_0\} \subset \underset{\sim}{\mathcal{U}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{U}}_1 = \underset{\sim}{\mathcal{U}} \setminus \underset{\sim}{\mathcal{U}}_0$

Démontrons la <u>proposition b)</u> :

<u>Condition nécessaire</u> :

démontrons que

$u \in \underset{\sim}{w} \Rightarrow \exists s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}_+ \ (\sigma \geq 0)$ tel que :

$$u(\underset{\sim}{a}) = \int_0^\infty e^{-st} \, d_t \underset{\sim}{a} \triangleq \hat{\underset{\sim}{a}}(s)$$

$$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$$

<u>Pas 1</u> : si $u \in \underset{\sim}{w}$ alors $u(\underset{\sim}{a}) = \int_0^\infty u(\underset{\sim}{\delta}_t) \, d_t \underset{\sim}{a}$

$$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$$

En effet : Si $u \in \underset{\sim}{w}$, alors par définition de $\underset{\sim}{w}$, il existe un $\underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$ tel que $u(\underset{\sim}{b}) \neq 0$.

Or $\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{a} = \int_0^\infty (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t) \, d_t \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$

où le membre de droite est une intégrale de Bochner [Th 2.V.2.2]

De plus $\int_0^\infty \|\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t\| \, d_t |\underset{\sim}{a}| \leq \int_0^\infty \|\underset{\sim}{b}\| \, \|\underset{\sim}{\delta}_t\| \, d_t |\underset{\sim}{a}|$

$$= \|\underset{\sim}{b}\| \, \|\underset{\sim}{a}\| < \infty$$

Comme $\|u\| = 1$, u est bornée et linéaire

$$\Downarrow$$

u continue

Par conséquent $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

$$u(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) = u(\underset{\sim}{a})\, u(\underset{\sim}{b})$$

$$= u\left(\int_0^\infty (\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t)\, d_t \underset{\sim}{a}\right)$$

$$= \int_0^\infty u(\underset{\sim}{b})\, u(\underset{\sim}{\delta}_t)\, d_t \underset{\sim}{a}$$

[Th 2 V.1.2]

$$u(\underset{\sim}{a}) . u(\underset{\sim}{b}) = u(\underset{\sim}{b}) \int_0^\infty u(\underset{\sim}{\delta}_t)\, d_t \underset{\sim}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$u(\underset{\sim}{a}) = \int_0^\infty u(\underset{\sim}{\delta}_t)\, d_t \underset{\sim}{a}$$

Pas 2 : Si $u \in \underset{\sim}{W}$, il existe $s = \sigma + j\omega$ avec $\sigma \geq 0$ tel que

$u(\underset{\sim}{\delta}_t) = e^{-st} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

En effet : Si $u \in \underset{\sim}{W}$ alors i) $\exists \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L}$ tel que $u(\underset{\sim}{b}) \neq 0$

et

ii) l'application : $\mathbb{R}^+ \to \underset{\sim}{L} : t \to \underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t$

est fortement continue

[Th 1 , V. 2.2]

$\Downarrow$

Comme u est une fonction linéaire continue,

la fonction : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} : t \to u(\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t)$ est continue,

par conséquent la fonction : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$

$$t \to Y(t) = u(\underset{\sim}{\delta}_t)$$

$$= \frac{u(\underset{\sim}{b} * \underset{\sim}{\delta}_t)}{\underbrace{u(\underset{\sim}{b})}_{\neq 0}}$$

est continue et donc mesurable

De plus, $u \neq u_0$ car $u \in \underset{\sim}{W}$ et par conséquent variation bornée car $\int_0^\infty d_t \underset{\sim}{b} = \mu([\varepsilon, 3\varepsilon]) = |\underset{\sim}{b}|(\mathbb{R}^+)$

$= \|\underset{\sim}{b}\|$

$\Rightarrow \|\underset{\sim}{b}\| < \infty$

et $\underset{\sim}{b} \ll \mu$ car $\forall E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{b}(E) = 0$

Montrons que $u(\underset{\sim}{b}) = \int_0^\infty e^{-st} d_t \underset{\sim}{b} \neq 0$ car :

① si $s = 0$, alors $\underline{\mu(b) = \|b\| \neq 0}$

② si $s \neq 0$, alors $\mu(\underset{\sim}{b}) = \frac{-1}{s}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} -s e^{-st} dt$

$= \frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_\varepsilon^{3\varepsilon}$

$= -s^{-1}\left[e^{-3\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}\right]$

$\mu(\underset{\sim}{b})$ ne s'annule pas pour un

$\varepsilon > 0$

Par conséquent, le noyau de u appartient à $\underset{\sim}{W}$

$\Rightarrow u \in \underset{\sim}{W}$

Démontrons la <u>proposition</u> c) :

$u \in \underset{\sim}{U}_0 = \{\underset{\sim}{M}_0\}$

$\Updownarrow$

$u(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a}(\{0\}) \triangleq a_0 \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^\infty a_i \delta_{\underset{\sim}{t}_i}$

En effet : si $u \in \underset{\sim}{U}_0 \Rightarrow u = u_0 \Rightarrow u(\underset{\sim}{a}) = a_0 \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

si $u = u_0$ ($u(\underset{\sim}{a}) = a_0$) $\Rightarrow u \in \underset{\sim}{U}_0$

Démontrons la <u>proposition d)</u>

<u>Condition nécessaire</u>

Démontrons que $u \in \underset{\sim}{U}_1 \; (\underset{\sim}{U}_1 = \underset{\sim}{U} \setminus \underset{\sim}{U}_0)$

$\Downarrow$

il existe un $\sigma \geq 0$ et un caractère $\chi(\cdot)$ de la ligne réelle tels que $\forall \, \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$,

$$u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \chi(t_i) \, e^{-\sigma t_i}$$

avec $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$

Or $u(\underset{\sim}{a}) = u(\underset{\sim}{a}_1) + u\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right)$

$= u(\underset{\sim}{a}_1) + u\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right)$

$= u(\underset{\sim}{a}_1) + \lim_{n \to \infty} u\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \, \underset{\sim}{\delta}_{t_i}\right)$

car u est continue

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \, u(\underset{\sim}{\delta}_{t_i})$

car $\underset{\sim}{a}_1 \in \underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{L} \subset \underset{\sim}{M}$ ($\underset{\sim}{M}$ noyau de u)

et u est linéaire

$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, u(\underset{\sim}{\delta}_{t_i})$

Or par le théorème 2. VI 2.2, comme $u \neq u_0 \Rightarrow V(t) \neq V_0(t) \;\; \forall t > 0$
$V(t) \neq 0 \quad \forall t > 0$,

il existe $\sigma \geq 0$ tel que $u(\underset{\sim}{\delta}_{t_i}) = \chi(t_i) \, e^{-\sigma t_i}$

où $\chi(\cdot)$ = caractère de la ligne réelle

$\Rightarrow u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \chi(t_i) \, e^{-\sigma t_i}$ $\quad \sigma \geq 0$, $\chi(\cdot)$ caractère de la ligne réelle

Condition suffisante

Démontrons que s'il existe un $\sigma \geqslant 0$ et un caractère $\chi(.)$ de la ligne réelle tels que $u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \chi(t_i) \, e^{-\sigma t_i}$

$$\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$$

alors $u \in \underset{\sim}{U}_1$

Remarquons que $u \in \underset{\sim}{U}_1 \Rightarrow u(\underset{\sim}{a}) = 0 \quad \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$

$$\Rightarrow u(\underset{\sim}{\delta}_t) \neq 0 \quad \forall t > 0$$

car $u \neq u_0 \Rightarrow v(t) \neq 0 \quad \forall t > 0$
[Th 2 VI.2.2]

Si u est linéaire multiplicative telle que $u(\underset{\sim}{a}) = 0 \; \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$

$$u(\underset{\sim}{\delta}_t) \neq 0 \; \forall t > 0$$

alors $\underset{\sim}{L} \subset \underset{\sim}{M}$ ($\underset{\sim}{M}$ = noyau de u) et $\underset{\sim}{M} \neq \underset{\sim}{M}_0$

$$\hookrightarrow u \in \underset{\sim}{U}_1$$

Nous pouvons dire alors que
$$u \in \underset{\sim}{U}_1 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} u(\underset{\sim}{a}) = 0 \; \forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \\ u(\underset{\sim}{\delta}_t) \neq 0 \; \forall t > 0 \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

Nous avons une fonction $u : \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \to u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, \chi(t_i) \, e^{-\sigma t_i}$$

Démontrons que $u \in \underset{\sim}{U}_1$

Pas 1 : la fonction u est linéaire multiplicative

En effet : Nous savons que $|\chi(\xi)| = 1$ et $\chi(\xi + \eta) = \chi(\xi)\, \chi(\eta)$

$$\forall \xi, \eta \geqslant 0$$

donc $\forall\, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$u(\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i)\, X(t_i)\, e^{-\sigma t_i}$$

où $\underset{\sim}{a}_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \underset{\sim}{\delta}_{t_k}$ $\qquad \underset{\sim}{b}_2 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, \underset{\sim}{\delta}_{t_j}$

$W = \{ t_k ,\ k \in \mathbb{N} \}$ $\qquad V = \{ t_j ,\ j \in \mathbb{N} \}$

$\forall i \in \mathbb{N}$, $t_i \in W \cup V$ et $a_i = 0$ si $t_i \neq t_k$
$b_i = 0$ si $t_i \neq t_j$
$k, j \in \mathbb{N}$

$$u(\alpha . \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, X(t_i)\, e^{-\sigma t_i} + \beta \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, X(t_i)\, e^{-\sigma t_i}$$

$$= \alpha\, u(\underset{\sim}{a}) + \beta\, u(\underset{\sim}{b})$$

$$u(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}) = \sum_{k,j} a_k b_j\, X(t_k + t_j)\, e^{-\sigma(t_k + t_j)}$$

par définition de $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \underset{\sim}{A}$ [Ch4.V.2.2]
de u

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k\, X(t_k)\, e^{-\sigma t_k}\, b_j\, X(t_j)\, e^{-\sigma t_j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, X(t_k)\, e^{-\sigma t_k} \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, X(t_j)\, e^{-\sigma t_j}$$

$$= u(\underset{\sim}{a}) . u(\underset{\sim}{b})$$

Cas 2 : $u(\underset{\sim}{a}) = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$ et $u(\underset{\sim}{\delta}_t) \neq 0 \quad \forall t > 0$

En effet : par définition , $\forall\, \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L}$, les $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

et donc $u(\underset{\sim}{a}) = 0$

et $u(\underset{\sim}{\delta}_t) = X(t)\, e^{-\sigma t}$ donc,

$|u(\underset{\sim}{\delta}_t)| = e^{-\sigma t} > 0 \quad \forall t \geq 0$

car $|X(t)| = 1$ et $t, \sigma \in \mathbb{R}^+$

$\hookrightarrow u(\underset{\sim}{\delta}_t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0$

Cas 3 : $u \in \mathcal{U}_1$

Les pas 1 et 2 et la propriété I le concluent

VI.4 Etudions deux critères d'inversibilité d'un élément de $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

Mais démontrons tout d'abord un résultat préliminaire

> **Lemme 1**
>
> Soit $\chi(.)$ un caractère de la ligne réelle. De plus, soit $\{\alpha_n\}$ une suite absolument sommable de nombres complexes et soit $\{\xi_n\}$ une suite arbitraire de nombres réels.
>
> Soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe alors un nombre réel B tel que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi(\xi_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i B \xi_n}\right| < \varepsilon$

Demonstration

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, il est clair qu'il existe un $N(\varepsilon)$ tel que $\sum_{n>N} |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $\{r_1, r_2, \dots r_M\}$ une base rationnellement indépendante pour les nombres $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_N$. Nous admettons que les r_i peuvent être choisis tels que $\xi_j = \sum_{m=1}^{M} k_{jm} r_m$ où les k_{jm} sont des entiers. Comme $|\chi(\xi)| = 1$, nous pouvons poser $\chi(r_m) = e^{2\pi i \delta_m}$.

Clairement $\chi(\xi_j) = e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm} \delta_m}$

En effet, $X(\xi_j) = X\left(\sum_{m=1}^{M} k_{jm} r_m\right) = \prod_{m=1}^{M} X(k_{jm} r_m)$

où k_{jm} = entier $\Rightarrow k_{jm} r_m = \underbrace{r_m + \cdots + r_m}_{k_{jm} \text{ fois}}$

$$\prod_{m=1}^{M} [X(r_m)]^{k_{jm}} = \prod_{m=1}^{M} e^{2\pi i \delta_m k_{jm}} = e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm} \delta_m}$$

Par le théorème de Kronecker [HIP, p 146], soit $\eta > 0$ il existe un réel B et des entiers $n_1, n_2, \dots n_M$ tel que $|\delta_i - B r_i - n_i| < \eta$

$\forall i = 1, \dots M$

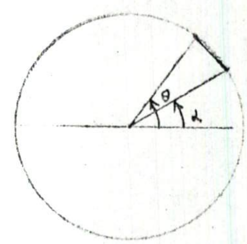
Ceci signifie que $\left|X(\xi_j) - e^{2\pi i B \xi_j}\right| = \left|e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm}\delta_m} - e^{2\pi i B \sum_{m=1}^{M} k_{jm} r_m}\right|$

$\leq 2\pi \sum_{m=1}^{M} |k_{jm}| \eta$

En effet, de façon générale,

$|e^{i\alpha} - e^{i\theta}| \leq |\alpha - \theta - n 2\pi|$

↳ entier



Donc $\left|e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm}\delta_m} - e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm} r_m}\right| \leq 2\pi \left|\sum_{m=1}^{M} k_{jm}\delta_m - \sum_{m=1}^{M} B k_{jm} r_m - n\right|$

$n \in \mathbb{N}$

Or $|\delta_i - B r_i - n_i| < \eta$

Nous prenons alors η tel que $2\pi \sum_{m=1}^{M} |k_{jm}| \eta < 2\pi$

Alors $n = \sum_{m=1}^{M} k_{jm} n_m$

Donc $\left|e^{2\pi i \sum_{m=1}^{M} k_{jm}\delta_m} - e^{2\pi i B \sum_{m=1}^{M} k_{jm} r_m}\right| \leq 2\pi \sum_{m=1}^{M} |k_{jm}| \eta$

si $C \triangleq \sup\left[\sum_{m=1}^{M} |k_{jm}| \ ; j = 1, \dots N\right]$,

Par conséquent :

$$\sum_{m=1}^{M} \left|\alpha_n X(\xi_n) - \alpha_n e^{2\pi i B \xi_n}\right| = \sum_{n=1}^{N} \left|\alpha_n X(\xi_n) - \alpha_n e^{2\pi i B \xi_n}\right| +$$

$$\sum_{n>N} |\alpha_n X(\xi_n) - \alpha_n e^{2\pi i B \xi_n}|$$

$$\leq 2\pi c \eta \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| + \sum_{n>N} |\alpha_n| \left[|X(\xi_n)| + 1 \right]$$

$$\leq 2\pi c \eta \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| + 2 \frac{\varepsilon}{3}$$

$< \varepsilon$ pour η assez petit

Critères d'inversibilité d'un élément de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

Théorème 1

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2$ avec $\underset{\sim}{a}_2 = \sum_{\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \underset{\sim}{\delta}_{\xi_i}$

$\underset{\sim}{a}$ sera régulier (ou inversible) si $\int_0^\infty e^{-s\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \neq 0 \; \forall s \in \mathbb{C}_+$

et si $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\sum_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| > 0$

De plus, $\underset{\sim}{a}$ régulier $\Rightarrow$ son inverse $\underset{\sim}{a}^{-1} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

Démonstration

Rappelons que $u \in \underset{\sim}{W}$ alors $u(\underset{\sim}{a}) = \int_0^\infty e^{-st} d_t \underset{\sim}{a}$

avec $s \in \mathbb{C}_+$

$$u(\underset{\sim}{\delta}_t) = e^{-st}$$

$u \in \underset{\sim}{U}_0$ alors $u(\underset{\sim}{a}) = a_0$

$u \in \underset{\sim}{U}_1$ alors $u(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underbrace{x(t_i)\, e^{-\sigma t_i}}_{u(\underset{\sim}{\delta}_{t_i})} \quad (\sigma \geq 0)$

[Th 1, VI 3.2]

$\underset{\sim}{a}$ doit être régulier, c'est-à-dire $\underset{\sim}{a}$ ne doit appartenir à aucun idéal maximal [Th 4; II.3.2]

Cas 1 : $\forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{W}$, $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M}$

En effet : comme $\forall s \in \mathbb{C}_+$, $\int_0^\infty e^{-s\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a} \neq 0$

$u(\underset{\sim}{a}) \neq 0 \quad \forall u \in \underset{\sim}{W}$

car nous appliquons le théorème 1, b, II.3.2

$\Rightarrow \forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{W}$, $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M}$

Cas 2 : $\forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{U}_0$, $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M}$

En effet : en prenant la limite quand $s \to \infty$ de

$|\sum_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})|$, et comme $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\sum_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| > 0$

on obtient $\underset{\sim}{a}(\{0\}) = \lim_{s\to\infty} |\sum_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| \neq 0$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}$ ne doit pas appartenir à un idéal de $\underset{\sim}{U}_0$, c'est-à-dire à $\underset{\sim}{M}_0$

Cas 3 : $\forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{U}_1$, $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M}$

En effet : si $u \in \underset{\sim}{U}_1$; $u(\underset{\sim}{a}) = u(\underset{\sim}{a}_1) + u(\underset{\sim}{a}_2)$

$$= u(\underset{\sim}{a}_2)$$

$$u(\delta_\xi) = \chi(\xi)\, e^{\alpha\xi} \qquad \alpha \leq 0$$

$\chi(\cdot)$ caractère de la ligne réelle

$$u(\underset{\sim}{a}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\xi_n)\, e^{\alpha\xi_n}\, \underset{\sim}{a}(\{\xi_n\})$$

or $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$|u(\underset{\sim}{a}_2) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha + j\beta)\xi_n} \underset{\sim}{a}(\{\xi_n\})| < \varepsilon$ par le lemme 1 car il suffit de poser $\alpha_n = e^{\alpha\xi_n} \underset{\sim}{a}(\{\xi_n\})$

et ainsi $\sum |d_n| < \infty$ car $\sum_{n=0}^{\infty} |e^{\alpha \tau_n}| |\underset{\sim}{a}(\{\tau_n\})| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(\{\tau_n\})|$

$< \infty \ (\alpha \leqslant 0, \ \tau_n \geqslant 0)$

$\Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha + j\beta)\tau_n} \underset{\sim}{a}(\{\tau_n\}) \right| < \varepsilon + |\mu(\underset{\sim}{a}_2)|$

$\Rightarrow \inf_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\tau_n} \underset{\sim}{a}(\{\tau_n\}) \right| \leqslant |\mu(\underset{\sim}{a}_2)|$

$\Rightarrow |\mu(\underset{\sim}{a}_2)| \geqslant \inf_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \sum_{\tau_n} e^{-s\tau_n} \underset{\sim}{a}(\{\tau_n\}) \right| > 0$

$\Rightarrow \mu(\underset{\sim}{a}_2) \neq 0$

$\Rightarrow \mu(\underset{\sim}{a}) \neq 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M} \quad \forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{U}.$

Les pas 1, 2 et 3 concluent que $\underset{\sim}{a}$ est régulier

Pas 4 : $\forall \underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{a}$ inversible $\Rightarrow \underset{\sim}{a}^{-1} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{a}^{-1}$ inverse de $\underset{\sim}{a}$

En effet : $\underset{\sim}{a}^{-1}$ étant l'inverse de $\underset{\sim}{a}$

avec $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$, implique que :

$$\underset{\sim}{\delta}_0 = \underbrace{(\underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{a}_1^{-1} + \underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{a}_2^{-1} + \underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{a}_3^{-1} + \underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_1^{-1})}_{\in \underset{\sim}{L} \text{ car } \underset{\sim}{a}_1,\, \underset{\sim}{a}_1^{-1} \in \underset{\sim}{L}\ [\text{Th } 2.\text{I}.2.2]}$$

$$+ \underbrace{\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_2^{-1}}_{\in \underset{\sim}{A}} + \underbrace{\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_3^{-1}}_{\in \underset{\sim}{N}}$$

avec $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a}_1 \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a}_2 \in \underset{\sim}{A}$ $\quad \underset{\sim}{a}^{-1} = \underset{\sim}{a}_1^{-1} + \underset{\sim}{a}_2^{-1} + \underset{\sim}{a}_3^{-1}$

$\underset{\sim}{a}_1^{-1} \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{a}_3^{-1} \in \underset{\sim}{N}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \underset{\sim}{\delta}_0$ et $\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_3^{-1} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{a}_3^{-1} \equiv \underset{\sim}{0}$ car $\underset{\sim}{a}_2 \not\equiv \underset{\sim}{0}$

$\Downarrow$

$\underset{\sim}{a}_2 \not\equiv \underset{\sim}{0}$

et $\underset{\sim}{S}$ n'admet pas de diviseur de zéro [HIP, p 149]

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}^{-1} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

ce qui termine la démonstration

Théorème 2

$\boxed{1}$ Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, alors $\underset{\sim}{a}$ est inversible dans $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

ssi $\inf\limits_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0$

$\boxed{2}$ De plus, comme $\underset{\sim}{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$, si l'inverse de $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$ existe dans $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ alors il appartient à $\underset{\sim}{A}$

Démonstration

Condition nécessaire de $\boxed{1}$

$\underset{\sim}{a}$ est un élément inversible dans $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ et par conséquent l'application $a : \underset{\sim}{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{C} : \underset{\sim}{M} \rightarrow u(\underset{\sim}{a}) \triangleq a(\underset{\sim}{M})$ ($\underset{\sim}{M}$ noyau de u) [II.5]

a ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$ car $\underset{\sim}{a} \notin \underset{\sim}{M}$ $\forall \underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{\mathcal{U}}$ car $\underset{\sim}{a}$ est inversible [Th 4, II.3.2]

Nous avons vu que $a : \underset{\sim}{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue pour la topologie de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ [II.6.1]

C'est pourquoi $\inf\limits_{\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{\mathcal{U}}} |a(\underset{\sim}{M})| > 0$, car si cet infimum était nul, alors il y aurait une suite $(\underset{\sim}{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

d'éléments de $\underset{\sim}{U}$ tels que $|a(M_n)| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

or a est continue sur $\underset{\sim}{U}$ qui est un ensemble fermé [II.6.2]

$\Rightarrow \inf_{\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{U}} |a(\underset{\sim}{M})|$ est atteint et donc non nul, l'hypothèse que

cet infimum soit nul est donc fausse.

Par conséquent, comme $\underset{\sim}{W} \subset \underset{\sim}{U}$, $\inf_{\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{W}} |a(\underset{\sim}{M})| > 0$

Nous pouvons alors écrire :

$$\inf_{\underset{\sim}{W}} \left| \int_0^\infty e^{-st} \, d_t \underset{\sim}{a} \right| > 0$$

Et par le théorème 1, b, VI.3.2,

$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0$ et ainsi la

condition nécessaire est prouvée

Condition suffisante de [1]

Si $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0$ alors $\underset{\sim}{a}$ est inversible dans $\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$

Il suffit pour cela d'établir les conditions du théorème 1

c'est-à-dire 1) $\int_0^\infty e^{-st} \, d_t \underset{\sim}{a} \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$

2) $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \sum_{t_i} e^{-st_i} \underset{\sim}{a}(\{t_i\}) \right| > 0$

Or $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0 \Rightarrow 1)$ car $\hat{\underset{\sim}{a}}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \, d_t \underset{\sim}{a}$

Démontrons le point 2) :

Soit $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ avec $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_0 \leqslant 0$, $\lambda_0 = -s_0$, $s_0 \in \mathbb{C}_+$

Pas 1 : La fonction $f(B) \triangleq \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0 + jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$

est i) presque périodique en B

ii) telle que $\forall \varepsilon > 0$ il existe une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$

d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que $B_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(B_0) - f(B_n)| < \varepsilon$$

En effet : démontrons i)

Par définition, une fonction f à valeurs complexes est presque périodique si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique $T_\varepsilon(B)$ tel que

$$|f(B) - T_\varepsilon(B)| < \varepsilon \qquad -\infty < B < \infty$$

[Appendice 3] , or :

$$f(B) = \sum_{\xi_i} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \qquad . \ \underset{\sim}{a}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \underset{\sim}{\delta}_{\xi_i}$$

et $\left| f(B) - \sum_{i=0}^{n} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| =$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) - \sum_{i=0}^{n} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| =$$

$$\left| \sum_{i>n} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| \leqslant \sum_{i>n} e^{\alpha_0 \xi_i} |\underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})|$$

$$\leqslant \sum_{i>n} |\underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| < \varepsilon$$

car $\alpha_0 \leq 0$, $\xi_i \geqslant 0$

et on prend n assez grand

($\sum_{i=0}^{\infty} |a(\{\xi_i\})|$ converge)

Par conséquent $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N_\varepsilon$,

$$\left| f(B) - \sum_{i=0}^{n} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0 \xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| < \varepsilon \qquad -\infty < B < \infty$$

donc $T_\varepsilon(B) = \sum_{i=0}^{n} e^{jB\xi_i} e^{\alpha_0\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$

démontrons ii)

En fait,

$\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $B_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(B_0) - f(B_n)| < \varepsilon$$

est une propriété des fonctions presque périodiques [Appendice 3]

Pas 2 : $\lim_{B\to\infty} \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0 + jB)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} - f(B) \right| = 0$

$f(B)$ est la partie asymptotique presque périodique de la transformée de Laplace

En effet : $\left| \int_0^\infty e^{\alpha_0 \xi} e^{jB\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} - \sum_{\xi_i} e^{\alpha_0\xi_i} e^{jB\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| =$

$$\left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}_1 + \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}_2 - \sum_{\xi_i} e^{\alpha_0\xi_i} e^{jB\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right|$$

car $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2$ $\quad \underset{\sim}{a}_1 \in \underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{a}_2 \in \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu$

$\Downarrow$

$$\int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}_1 = \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi} g(\xi)\, d\xi$$

par le théorème de Radon . Nykodim [HAL, p 128]

$g \in L^1(\mathbb{R}^+) \Rightarrow e^{\alpha_0 \cdot} g(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ car $\alpha_0 \leq 0$

$$\int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_1 = \int_0^\infty e^{jB\xi} e^{\alpha_0\xi} g(\xi)\, d\xi \underset{B\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

par le théorème de Riemann Lebesgue [Appendice 2]

Par conséquent $\lim\limits_{B\to\infty} \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_1 \right| = 0$

et

$$\lim_{B\to\infty} \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_1 + \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_2 - \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right|$$

$$\leqslant \underbrace{\lim_{B\to\infty} \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_1 \right|}_{=0} + \lim_{B\to\infty} \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_2 - \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right|$$

La deuxième limite est aussi nulle car

$$\left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a}_2 - \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right|$$

$$= \left| \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}_2(\{\xi_i\}) - \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+jB)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right|$$

$= 0$ car $\underset{\sim}{a}_2(\{\xi_i\}) = \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$ $(\underset{\sim}{a}_1 \ll \mu)$

et [Appendice 1]

Pas 3 : $f(B_0)$ est dans la fermeture de l'ensemble

$$\left\{ \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a} \ ; \ -\infty < B < \infty \right\}$$

En effet : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $B_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et t.q.

$|f(B_0) - f(B_n)| < \varepsilon/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ par le pas 1 ii)

et par le pas 2 $\left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a} - f(B) \right| \longrightarrow 0$

quand $B \to \infty$

Considérons alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\left| f(B_0) - \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB_n)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a} \right| \leqslant |f(B_0) - f(B_n)| + \left| f(B_n) - \int_0^\infty e^{(\alpha_0+jB)\xi}\, d_\xi \underset{\sim}{a} \right|$$

$$|f(\beta_0) - \int_0^\infty e^{(\alpha_0+j\beta_n)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour n assez grand

Par conséquent, la suite $\int_0^\infty e^{(\alpha_0+j\beta_n)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \to f(\beta_0)$

ce qui implique que $f(\beta_0)$ est dans la fermeture de l'ensemble $\{\int_0^\infty e^{(\alpha_0+j\beta)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}, \forall \beta \in \mathbb{R}\}$

Cas 4 : $\inf\limits_{s\in\mathbb{C}_+} |\int_0^\infty e^{-s\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}| > 0 \Rightarrow \inf\limits_{s\in\mathbb{C}_+} |\sum\limits_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| > 0$

En effet : soit $s \in \mathbb{C}_+$, $s_0 = -(\alpha_0 + j\beta_0)$, $\alpha_0 \leq 0$

$$f(\beta_0) = \sum_{\xi_i} e^{(\alpha_0+j\beta)\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$$

$$= \sum_{\xi_i} e^{-s_0\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$$

On sait qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-s_n\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \longrightarrow f(\beta_0)$$

Par conséquent $\inf\limits_{s\in\mathbb{C}_+} |\int_0^\infty e^{-s\xi} d_\xi \underset{\sim}{a}| > 0 \Rightarrow |f(\beta_0)| > 0$

De plus $\inf\limits_{s\in\mathbb{C}_+} |\sum\limits_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| > 0$

Car si $\inf\limits_{s\in\mathbb{C}_+} |\sum\limits_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| = 0$, alors il existerait une suite $|\sum\limits_{\xi_i} e^{-s_k\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})| \to 0$

$(s_k \in \mathbb{C}_+)$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists\, s_{k_n}$ t.q. $\int_0^\infty e^{-s_{k_n}\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{\xi_i} e^{-s_k\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\})$

avec $s_{kn} \in \mathbb{C}_+ \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$

Nous prenons alors la suite $(s'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $s'_i = s_{in(i)}$

avec $n(i)$ tel que

$$\left| \int_0^\infty e^{-s_{in(i)}\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} - \sum_{\xi_j} e^{-s'_i \xi_j} \underset{\sim}{a}(\{\xi_j\}) \right| < \frac{1}{i}$$

C'est ainsi que nous obtenons :

$$\left| \int_0^\infty e^{-s'_i\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \right| \leq \underbrace{\left| \int_0^\infty e^{-s'_i\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} - \sum_{\xi_j} e^{-s'_i\xi_j} \underset{\sim}{a}(\{\xi_j\}) \right|}_{=\mathrm{II}}$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{\xi_j} e^{-s'_i\xi_j} \underset{\sim}{a}(\{\xi_j\}) \right|}_{=\mathrm{I}}$$

or $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}, i > N_\varepsilon \quad \mathrm{I} < \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}, i > N'_\varepsilon \quad \frac{1}{i} < \frac{1}{N'_\varepsilon} < \varepsilon/2$

donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}, i > N''_\varepsilon \quad \mathrm{I} + \mathrm{II} < \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{2}$

$< \varepsilon$

il suffit de prendre $N''_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$

Par conséquent :

$\int_0^\infty e^{-s'_i\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui implique que

$\inf\limits_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \int_0^\infty e^{-s\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} \right| = 0$ ce qui est faux.

$\Rightarrow \inf\limits_{s \in \mathbb{C}_+} \left| \sum_{\xi_i} e^{-s\xi_i} \underset{\sim}{a}(\{\xi_i\}) \right| > 0$

Le théorème 1 et le pas 4 concluent la démonstration de la proposition $\boxed{1}$ du théorème

Démontrons la proposition $\boxed{2}$:

si $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{a}$ est inversible alors $\underset{\sim}{a}^{-1}$ (inverse de $\underset{\sim}{a}$) $\in \underset{\sim}{A}$

En effet : $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}^{-1} = \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_1^{-1} + \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \delta_0$

avec $\underset{\sim}{a}^{-1} = \underset{\sim}{a}_1^{-1} + \underset{\sim}{a}_2^{-1}$, $\underset{\sim}{a}_1^{-1} \in \underset{\sim}{L}$

$\underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A}$

comme $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_1^{-1} \in \underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \delta_0$ $(\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A})$

$\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_1^{-1} \equiv \underset{\sim}{0}$ ce qui implique

que $\underset{\sim}{a}_1^{-1} \equiv \underset{\sim}{0}$ car $\underset{\sim}{S}$ n'admet

pas de diviseur de zéro

[HIP, p 149] et $\underset{\sim}{a} \not\equiv \underset{\sim}{0}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}^{-1} \in \underset{\sim}{A}$ ce qui termine la démonstration du théorème

Corollaire

$\boxed{1}$ Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$ alors

$\underset{\sim}{a}$ est inversible dans $\underset{\sim}{A}$ ssi $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0$

$\boxed{2}$ Soit $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i}$, $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$

alors $\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1}) * \underset{\sim}{a}_2$ où $\begin{cases} \underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \{\alpha \underset{\sim}{\delta}_0\} \end{cases}$

ssi

$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}_2(s)| > 0$

Démonstration

$\boxed{1}$ Si $\underset{\sim}{a}$ est inversible et $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{A}$, par le théorème 2 $\boxed{1}$, nous savons que $\underset{\sim}{a}^{-1} \in \underset{\sim}{A}$

Par le théorème 2 $\boxed{1}$, $\underset{\sim}{a}$ inversible

$$\Updownarrow$$

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}(s)| > 0$$

$\boxed{2}$ Condition nécessaire

$$\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1}) * \underset{\sim}{a}_2 \quad \text{où} \quad \underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \underbrace{\underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{a}_2^{-1}}_{\in \underset{\sim}{L}} + \underbrace{\underbrace{\underset{\sim}{a}_2}_{\in \underset{\sim}{A}} * \underbrace{\underset{\sim}{a}_2^{-1}}_{\in \underset{\sim}{A}}}_{\in \underset{\sim}{A}}$$

$$\underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \alpha \underset{\sim}{\delta}_0$$

Par conséquent :

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a} * \alpha \underset{\sim}{\delta}_0 = \alpha \underset{\sim}{a} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_2 * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \underset{\sim}{\delta}_0$$

$$\Downarrow$$

$\underset{\sim}{a}_2$ admet un inverse $\underset{\sim}{a}_2^{-1}$

$\Downarrow$ par le théorème 2 $\boxed{1}$

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}_2(s)| > 0$$

Condition suffisante

Comme $\inf_{s \in \mathbb{C}_+} |\hat{\underset{\sim}{a}}_2(s)| > 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_2^{-1}$ existe (théorème 2)
$\underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A}$

par conséquent $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a} * (\underset{\sim}{a}_2^{-1} * \underset{\sim}{a}_2) = (\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1}) * \underset{\sim}{a}_2$ (associativité de $*$)

avec $\underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} \in \underset{\sim}{L} \dotplus \{\alpha \underset{\sim}{\delta}_0\}$, $\alpha = 1$ car $\underset{\sim}{a} * \underset{\sim}{a}_2^{-1} = \underset{\sim}{a}_1 * \underset{\sim}{a}_2^{-1} + \underset{\sim}{\delta}_0$

Appendice

1) Remarque concernant l'intégration d'une fonction par rapport à une mesure de $\underset{\sim}{A}$.

2) Théorème de Riemann - Lebesgue.

3) Les fonctions presque périodiques.

4) Remarque concernant la norme euclidienne dans K

5) Ensembles de Baire et ensembles de Borel sur $\mathbb{R}^+$

$\boxed{1}$ Remarque concernant l'intégration d'une fonction par rapport à une mesure de $\underset{\sim}{A}$

Intégrons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} : z \longrightarrow e^{(\alpha_0 + j\beta) z}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^-$, par rapport à une mesure complexe, à variation bornée et purement atomique.

L'intégrale devient une série dans $\mathbb{C}$.

Plus précisement :

Lemme

$$\forall \hat{a} \in \underset{\sim}{A}, \quad \int_0^\infty e^{(\alpha_0 + j\beta) z} \, d_z \hat{a} = \sum_{i=0}^\infty a_i \, e^{(\alpha_0 + j\beta) z_i}$$

$$\text{avec} \quad \underset{\sim}{a} = \sum_{i=0}^\infty a_i \, \hat{\delta}_{z_i} \quad \text{et } \alpha_0 \leq 0, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Démonstration

Comme $\hat{a} \in \underset{\sim}{A}$, $\hat{a} = \sum_{i=0}^\infty a_i \underset{\sim}{\delta}_{z_i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^n a_i \underset{\sim}{\delta}_{z_i} = \lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{a}_n$

$$\text{et} \int_{\mathbb{R}^+} e^{(\alpha_0 + j\beta) z} \, d_z \underset{\sim}{a}_n = \int_{\mathbb{R}^+} e^{(\alpha_0 + j\beta) z} \, d_z \sum_{i=0}^n a_i \underset{\sim}{\delta}_{z_i}$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \int_{\mathbb{R}^+} e^{(\alpha_0 + j\beta) z} \, d_z \underset{\sim}{\delta}_{z_i}$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \, e^{(\alpha_0 + j\beta) z_i}$$

De plus :

$$\left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0 + j\beta) z} d_z \hat{a} - \sum_{i=0}^n a_i \, e^{(\alpha_0 + j\beta) z_i} \right| \leq \left| \int_0^\infty e^{(\alpha_0 + j\beta) z} d_z \underset{\sim}{a} - \int_0^\infty e^{(\alpha_0 + j\beta) z} d_z \sum_{i=0}^n a_i \underset{\sim}{\delta}_{z_i} \right|$$

$$\left|\int_0^\infty e^{(\alpha_0+j\beta)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} - \sum_{i=0}^{n} a_i e^{(\alpha_0+j\beta)\xi_i}\right| \leqslant 2\int_0^\infty d_\xi |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}_n|$$

$$\text{si } \underset{\sim}{a}_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \underset{\sim}{\delta}_{\xi_i}$$

$$\leqslant 2\|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{(\alpha_0+j\beta)\xi} d_\xi \underset{\sim}{a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i e^{(\alpha_0+j\beta)\xi_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{(\alpha_0+j\beta)\xi_i}$$

2 Théorème de Riemann Lebesgue [DOE p 143]

Si f est une fonction absolument intégrable dans l'intervalle $]0,T[$ alors $\int_0^T e^{-jy\xi} f(\xi)\, d\xi \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$

Démonstration

Soit $y>0$ et f une fonction à valeurs réelles

Nous pouvons trouver un n, entier, tel que $T = n.\frac{\pi}{y} + \delta$, $0 \leqslant \delta < \frac{\pi}{y}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{y}$ est n fois contenu dans T

alors,

$$\int_0^T e^{-jy\xi} f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\frac{\pi}{y}}^{(k+1)\pi/y} e^{-jy\xi} f(\xi)\, d\xi + \int_{n\frac{\pi}{y}}^{T} e^{-jy\xi} f(\xi)\, d\xi$$

Dans les termes impairs $k = 1, 3, 5, \ldots$ nous substituons $u + \frac{\pi}{y}$ à ξ, par conséquent :

$$\int_{k\frac{\pi}{y}}^{(k+1)\frac{\pi}{y}} e^{-jyz} f(z)\, dz = \int_{(k-1)y}^{k\pi/y} e^{-jyu-j\pi} f(u+\frac{\pi}{y})\, du$$

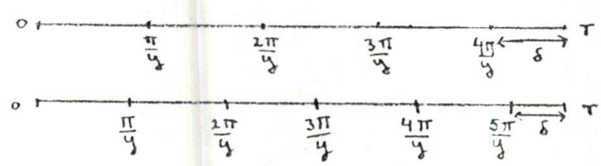
$$= -\int_{(k-1)\pi/y}^{k\pi/y} e^{-jyz} f(z+\frac{\pi}{y})\, dz$$

Nous joignons ceci avec les termes correspondants pairs $k = 0, 2, 4, \ldots$

En posant : $2m = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ pair} \\ n-1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

n pair — $n = 2m$

n impair — $n - 1 = 2m$



Par conséquent :

$$\int_0^T e^{-jyz} f(z)\, dz = \sum_{l=0}^{m-1} \int_{2l\frac{\pi}{y}}^{(2l+1)\pi/y} e^{-jyz}\left[f(z) - f(z+\frac{\pi}{y})\right] dz \; +$$

$$\int_{2m\frac{\pi}{y}}^{n\pi/y} e^{-jyz} f(z)\, dz + \int_{n\frac{\pi}{y}}^{T} e^{-jyz} f(z)\, dz$$

et donc :

$$\left|\int_0^T e^{-jyz} f(z)\, dz\right| \leq \int_0^{(2m-1)\pi/y} \left|f(z) - f(z+\frac{\pi}{y})\right| dz \; +$$

$$\int_{2m\frac{\pi}{y}}^{n\pi/y} |f(z)|\, dz + \int_{n\frac{\pi}{y}}^{T} |f(z)|\, dz$$

Considérons la partie droite de l'équation, la seconde intégrale a un intervalle d'intégration de longueur 0 si

n est pair, $\frac{\pi}{y}$ si n est impair. Cette intégrale tend vers zéro si $y \to +\infty$. La troisième intégrale a une longueur $T - (n\frac{\pi}{y}) = \delta < \frac{\pi}{y}$, il suit que cette intégrale tend vers zéro si $y \to +\infty$

On remplace la borne supérieure de la première intégrale par T, donc on augmente la valeur de l'intégrale. On définit $f(t) = 0 \ \forall t > T$, t. q. $f(t + \frac{\pi}{y})$ est définie sur tout l'intervalle.

Cette intégrale tend vers zéro si $y \to +\infty$, c'est-à-dire quand $\frac{\pi}{y} \to 0$ par le théorème [MSH th 42.25]. Lorsque $y < 0$, la démonstration est analogue. On obtient :

$$\int_0^T |f(t) - f(t + \frac{\pi}{y})| \, dt \underset{y \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$ car f est absolument intégrable par hypothèse, par conséquent $|\int_0^T e^{-jyt} f(t)\, dt| \to 0$ quand $y \to \pm\infty$

Extension du théorème (dans le cas simple)
si f est une fonction intégrable, alors : $$\int_0^\infty e^{j\beta t} e^{\alpha_0 t} f(t)\, dt \underset{\beta \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$ avec $\alpha_0 \leqslant 0$

Démonstration

Remarquons que $\int_0^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi$ existe car

$$\left|\int_0^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi < \infty$$

Remarquons aussi que $\forall T > 0$

$$\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi \underset{\beta \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{car} \quad e^{\alpha_0 \cdot} f(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

Or pour T assez grand,

$$\left|\int_T^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{si } T \to \infty$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| &\leq \left|\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| + \\ &\quad \left|\int_T^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \\ &\leq \left|\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| + \int_T^\infty e^{\alpha_0\xi} |f(\xi)|\, d\xi \\ &\leq \left|\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0$ tel que :

$$\left|\int_0^\infty e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \left|\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par le premier théorème, il existe un $\beta(T)$ assez grand tel que $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $|\beta| > \beta(T)$ on a $\left|\int_0^T e^{j\beta\xi} e^{\alpha_0\xi} f(\xi)\, d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B_\varepsilon$ assez grand t.q $\forall B \in \mathbb{R}$,

$$|B| > B_\varepsilon \quad \left| \int_0^\infty e^{jB\tau} e^{\alpha_0 \tau} f(\tau)\, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par conséquent :

$$\int_0^\infty e^{jB\tau} e^{\alpha_0 \tau} f(\tau)\, d\tau \xrightarrow[B \to \pm\infty]{} 0$$

$\boxed{3.}$ Fonctions presque périodiques

Référence utilisée : Corduneanu

Soit $T(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}$ avec $c_k \in \mathbb{C}$

$\lambda_k \in \mathbb{R}$

$T(\cdot)$ est un polynôme trigonométrique

Définition

Une fonction à valeurs complexes $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée presque périodique si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique $T_\varepsilon(\cdot)$ t.q :

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon \qquad -\infty < x < +\infty$$

Ce sont donc des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui peuvent être uniformément approximées par des polynômes trigonométriques.

Propriétés des fonctions presque périodiques

A. De toute suite de la forme $\{f(\cdot + h_n)\}$ où $h_n \in \mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ (par rapport à la norme de Tchebycheff $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$) : f est normale

B. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, l(\varepsilon) > 0$ t.q. chaque intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ de $\mathbb{R}$ contient au moins un point ξ t.q. $|f(x+\xi) - f(x)| < \varepsilon \quad -\infty < x < +\infty$.
ξ est appelé point de translation à ε-près.

Théorème 1

Si $f(.)$ est une fonction périodique, alors elle possède la propriété A

Démonstration

1. Supposons que $f(x) = e^{i\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Si (h_n) est une suite arbitraire de réels, alors $(f(x+h_n)) = (e^{i\lambda h_n} . e^{i\lambda x})$ contient une sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

   en effet : comme $|e^{i\lambda h_n}| = 1$, par le critère de Bolzano - Weierstrass [GROVE], on peut extraire de (h_n) une sous suite convergente $(e^{i\lambda h_{1n}})$ telle que la suite numérique $(e^{i\lambda h_{1n}})$ sera convergente.

donc $|f(x+h_{1n}) - f(x+h_{1m})| = \underbrace{|e^{i\lambda x}|}_{=1} . \underbrace{|e^{i\lambda h_{1n}} - e^{i\lambda h_{1m}}|}_{\to 0 \text{ } n,m \text{ assez grands}}$

$(e^{i\lambda h_{1n}} \cdot e^{i\lambda x})$ est une sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons maintenant que $f(x) = c \cdot e^{i\lambda x}$, $c \in \mathbb{C}$, elle possède par le point 1 une sous suite convergente sur $\mathbb{R}$.

3. Considérons le polynôme trigonométrique $T(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\lambda_k x}$

De la suite $(h_n)_n$, on peut extraire une sous-suite $(h_{1n})_n$ t.q. $(c_1 e^{i\lambda_1(\cdot + h_{1n})})$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ par le point 2.

De même, de (h_{1n}), on peut extraire une sous-suite (h_{2n}) t.q. $(c_2 e^{i\lambda_2(\cdot + h_{2n})})$ sera uniformément convergente.

Procédant de la même manière, on obtient qu'il existe une sous-suite (h_{mn}) de (h_n) t.q. $(c_k e^{i\lambda_k(\cdot + h_{kn})})$ $k = 1, 2, \ldots m$ converge uniformément.

Donc, $(T(\cdot + h_{mn}))$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ normalité du polynôme trigonométrique $T(\cdot)$

4. Considérons maintenant une fonction presque périodique quelconque et une suite de polynôme trigonométrique $(T_n(\cdot))$ uniformément convergente vers $f(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$

Si (h_n) est une suite de réels, alors on peut extraire une sous-suite (h_{1n}) t.q. $(T_1(\cdot + h_{1n}))$ sera uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

De (h_{1n}), on extrait une sous-suite (h_{2n}) t.q. $(T_2(\cdot + h_{2n}))$ sera uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Il y aura alors une sous-suite (h_{jn}) pour tout entier j t.q. $(T_q(x + h_{jn}))$ sera uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ $\forall q \leq j$ $q \in \mathbb{N}$.

Construisons la sous-suite diagonale (h_{jj}) qui avec une exception d'un nombre fini de termes, est une sous-suite de chaque suite (h_{qn}).

Donc $(T_n(x + h_{jj}))$ est une sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$, n suffisamment grand t.q.

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Il existe un $N(\varepsilon) > 0$ t.q.

$$|T_n(x + h_{jj}) - T_n(x + h_{qq})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad -\infty < x < +\infty$$

et $j, q \geq N(\varepsilon)$: car $(T_n(x + h_{jj}))$ est convergente.

donc $p, q \geq N(\varepsilon)$:

$$|f(x+h_{pp}) - f(x+h_{qq})| \leq |f(x+h_{pp}) - T_n(x+h_{pp})|$$
$$+ |T_n(x+h_{pp}) - T_n(x+h_{qq})|$$
$$+ |T_n(x+h_{qq}) - f(x+h_{qq})|$$
$$< \varepsilon \qquad -\infty < x < +\infty.$$

donc la suite $(f(\cdot + h_{pp}))_p$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(\cdot)$ est normale ∎

Théorème 2

Si $f(\cdot)$ possède la propriété A, elle possède aussi la propriété B.

Démonstration

Supposons que la propriété B n'est pas vérifiée :
$\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $\forall\, l > 0$ on peut déterminer un intervalle de longueur l qui ne contient pas de nombre ξ de translation à ε près de $f(\cdot)$.
Considérons un nombre arbitraire h_1 et un intervalle (a_1, b_1) de longueur $l > 2|h_1|$ qui ne contient aucun nombre de translation à ε près de $f(\cdot)$

Si on note $h_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$

$h_2 - h_1 \in (a_1, b_1)$ et donc $h_2 - h_1$ ne peut être un nombre de translation à ε près de $f(.)$. Il existe un intervalle (a_2, b_2) de $\mathbb{R}$, de longueur $> 2(|h_1| + |h_2|)$ qui ne contient pas de nombre de translation à ε près de $f(.)$.

Posons $h_3 \triangleq \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$, on obtient que $h_3 - h_2$ et $h_3 - h_1 \in (a_2, b_2)$ et donc $h_3 - h_2$ et $h_3 - h_1$ ne sont pas des nombres de translation à ε près de $f(.)$.

On continue de la même manière, on définit les nombres $h_4, h_5, \ldots$ t.q. aucune différence $h_i - h_j$ ne soit un nombre de translation à ε-près de $f(.)$

Donc $\forall i, j \in \mathbb{N}$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i) - f(x + h_j)|$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i - h_j) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

en effet : on sait que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i - h_j) - f(x)| \geq \varepsilon$

soit $y = x - h_j$

$-\infty < x < +\infty \implies -\infty < y < +\infty$

donc $\sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y + h_i) - f(y + h_j)|$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i) - f(x + h_j)|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i - h_j) - f(x)| \geq \varepsilon$$

ce qui prouve, par définition du sup, que la suite $(f(x+h_n))_n$ n'est pas de Cauchy dans la norme sup, donc ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$: ce qui contredit le fait que $f(\cdot)$ est normale

---

4. Remarques concernant la norme euclidienne

Théorème 1

Si $\underset{\wedge}{a}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $\exists f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ t.q :

$$\underset{\wedge}{a}(E) = \int_E f(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Montrons que

$$|\underset{\wedge}{a}|_2(E) = \int_E |f(t)|_2\,dt = \int_E \sqrt{f_R^2(t) + f_I^2(t)}\,dt$$

où par définition $|\underset{\wedge}{a}|_2(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\underset{\wedge}{a}_R^2(E_i) + \underset{\wedge}{a}_I^2(E_i)}$

Démonstration

Pas #1 Démontrons la thèse si f est une fonction simple

Donc, $f(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i \chi_{E_i}(t)$ où (E_i) est la subdivision finie, qui définit f.

$a_i \in \mathbb{C} \qquad i = 1, \dots n.$

Soit (E_k) une subdivision dénombrable de $E \in \mathcal{E}$.

$E_{ik} = E_i \cap E_k$

$(E_{ik})_{i,k}$ est une subdivision de E.

$$\underset{\sim}{a}(E_{ik}) = \int_{E_{ik}} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(t)\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_{ik}} \chi_{E_j}(t)\, dt$$

$$= a_i \; \mu(E_{ik})$$

↳ mesure de Lebesgue

donc $|\underset{\sim}{a}(E_{ik})|_2 = \sqrt{a_{Ri}^2 + a_{Ii}^2}\; \mu(E_{ik})$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_{ik})|_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{a_{Ri}^2 + a_{Ii}^2}\; \mu(E_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_{Ri}^2 + a_{Ii}^2}\; \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_{ik})\right)}_{\mu(E_i)}$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}(E_{ik})| = \int_E |f(t)|_2\, dt.$

$$\Rightarrow \quad |\hat{a}|_2(E) \geq \int_E |f(t)|_2\, dt$$

D'autre part :

par définition $\displaystyle |\hat{a}|_2(E) = \sup \sum_{t=0}^{\infty} |\hat{a}(E_t)|_2$

donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe une subdivision (E_k) t.q.

$$|\hat{a}|_2(E) - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}(E_k)|_2$$

Soit $E_{ik} = E_i \cap E_k$. $(E_{ik})_{k,i}$ est plus fine que $(E_k)_k$.

$$|\hat{a}|_2(E) - \varepsilon \leq \sum_{i,k=0}^{\infty} |\hat{a}(E_{ik})|_2 = \int_E |f(t)|_2\, dt.$$

si $\mathcal{E} \to 0$

$$|\underset{\sim}{\alpha}|_2(E) \leq \int_E |f(t)|_2 \, dt.$$

donc, finalement

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad |\underset{\sim}{\alpha}|_2(E) = \int_E |f(t)|_2 \, dt$$

pour $f(.)$ fonction simple.

<u>Pas # 2</u> : Démontrons la thèse si f n'est pas une fonction simple

Soit $\quad f = f_R + i f_I$

donc $\quad \underset{\sim}{\alpha}(E) = \int_E f_R(t) + i f_I(t) \, dt$

$$= \int_E f_R(t) \, dt + i \int_E f_I(t) \, dt$$

$f_I, f_R \in L^1(\mathbb{R}^+) \Rightarrow \exists$ 2 suites de fonctions simples (f_{nR}) et (f_{nI}) t.q.

$$f_{nR}(t) \xrightarrow[p.p.t]{n \to \infty} f_R(t)$$

$$f_{nI}(t) \xrightarrow[p.p.t.]{n \to \infty} f_I(t)$$

Par réarrangement des subdivisions, on peut trouver une suite de fonctions simples à valeurs complexes qui converge p.p. vers f.

Définissons $\underset{\wedge}{a}_n(E) = \int_E f_n(t)\,dt \quad \forall E \in \mathcal{E}$.

$\underline{\underset{\wedge}{a}_n \in \underset{\sim}{S}}$.

- $\underset{\wedge}{a}_n(\phi) = 0$

- $\underset{\wedge}{a}_n(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}_{\in \mathcal{E}}) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f_n(t)\,dt = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \sum_{j=1}^{k} a_{jn} \chi_{E_j^n}(t)\,dt$

les E_i disjoints

$$= \sum_{j=1}^{k} a_{jn} \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \chi_{E_j^n}(t)\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_{jn}\, \mu\left(E_j^n \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_{jn}\, \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_j^n \cap E_i)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_{jn} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \chi_{E_j^n}(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \sum_{j=1}^{k} a_{jn} \chi_{E_j^n}(t)\,dt$$

lemme 3 § III.7

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \underset{\wedge}{a}_n(E_i)$$

- $\|\underset{\wedge}{a}_n\| \overset{\Delta}{=} |\underset{\wedge}{a}_n|(\mathbb{R}^+) = \int_{\mathbb{R}^+} |f_n(t)|_1\,dt < \infty$

car f_n est intégrable $\Rightarrow$ $|f_n|$ est intégrable.

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\wedge}{a}_n \in \underset{\sim}{S}$.

$\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad \underset{\sim}{a}_n(E) \longrightarrow \underset{\sim}{a}(E) = \int_E f(t)\, dt$ par déf.

Si on arrive à démontrer :

1° $\quad |\underset{\sim}{a}_n|(E) \longrightarrow |\underset{\sim}{a}|_2(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}_B$

2° $\quad \int_E |f_n(t)|_2\, dt \longrightarrow \int_E |f(t)|_2\, dt$

on aura $|\underset{\sim}{a}_n|_2(E) = \int_E |f_n(t)|_2\, dt \longrightarrow |\underset{\sim}{a}|_2(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow \int_E |f(t)|_2\, dt$

$$\text{donc } |\underset{\sim}{a}|_2(E) = \int_E |f(t)|_2\, dt \quad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Montrons d'abord le 2°

On sait que $\int_E f_n(t)\, dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_E f(t)\, dt$.

$$\Rightarrow \int_E f_{n\,\underset{I}{R}}(t)\, dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_E f_{\underset{I}{R}}(t)\, dt$$

Choisissant f_{nR} et f_{nI} t.q $f_{nR}^2 \uparrow f_R^2$ et $f_{nI}^2 \uparrow f_I^2$

$$\Rightarrow f_{nR}^2 + f_{nI}^2 \uparrow f_R^2 + f_I^2$$

Par le théorème de convergence dominée [ROY]

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|_2\, dt = \int_E |f|_2\, dt$$

Pour démontrer le 1er point, on va en fait démontrer quelque chose de plus fort :

a) $\underset{\sim}{a}_n \longrightarrow \underset{\sim}{a}$

b) $|\underset{\sim}{a}_n|_2 \longrightarrow |\underset{\sim}{a}|_2$

a) On sait que $\forall E \in \mathcal{E}$ $\underset{\wedge}{a}_n(E) \longrightarrow \underset{\wedge}{a}(E)$

si $(\underset{\wedge}{a}_n)$ est de Cauchy, on sait qu'alors $\underset{\wedge}{a}_n \xrightarrow{n\to\infty} \underset{\wedge}{a}$

(cf. démonstration de la complétion de $\underset{\wedge}{S}$ 1. III (44 → 47))

$$\| \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a}_m \|_2 = | \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a}_m |_2 (\mathbb{R}^+)$$

or, à $\underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a}_m$ est associée une fonction simple obtenue à partir de f_n et f_m que l'on notera $f_n - f_m$, donc $\| \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a}_m \|_2 \underset{\text{par \#1}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} | f_n(t) - f_m(t) |_2 \, dt$

or $| f_n(t) - f_m(t) | \leq 2 \cdot | f(t) |$ par construction des f_n

donc $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a}_m \| = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{\lim\limits_{n,m\to\infty} | f_n(t) - f_m(t) |_2}_{\longrightarrow 0} \, dt}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n,m \to \infty}}$

$1 \cdot 1^t$

$= 0.$

donc $\underset{\wedge}{a}_n \xrightarrow{n\to\infty} \underset{\wedge}{a}$ dans $\underset{\wedge}{S}$

b) $\forall E \in \mathcal{E}$ $| \underset{\wedge}{a}_n |_2 (E) \longrightarrow | \underset{\wedge}{a} |_2 (E).$

car $\left| | \underset{\wedge}{a}_n |_2 (E) - | \underset{\wedge}{a} |_2 (E) \right| \leq | \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a} |_2 (E) \leq \underbrace{| \underset{\wedge}{a}_n - \underset{\wedge}{a} |_2 (\mathbb{R}^+)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n\to\infty}}$

cette inégalité est bien vérifiée,

car :

Soit $\underset{\wedge}{a}, \underset{\wedge}{b} \in \underset{\wedge}{S}$ et $E \in \mathcal{E}$.

$$|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}(E_i)|_2$$

$$\leq \sup \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i)|_2 + \sum_{i=0}^{\infty} |\underset{\sim}{b}(E_i)|_2 \right)$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{a}(E_i)|_2 + \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\underset{\sim}{b}(E_i)|_2$$

$$= |\underset{\sim}{a}|_2(E) + |\underset{\sim}{b}|_2(E). \qquad \forall E \in \mathcal{E}$$

or $\underbrace{|\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}|_2}_{|\underset{\sim}{a}_n|_2}(E) \leq |\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{a}|_2(E) + |\underset{\sim}{a}|_2(E)$

$$|\underset{\sim}{a}_n|_2(E) - |\underset{\sim}{a}|_2(E) \leq |\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{a}|_2(E)$$

et $|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n|_2(E) \leq |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}_n|_2(E) + |\underset{\sim}{a}_n|_2(E)$

$$|\underset{\sim}{a}|_2(E) - |\underset{\sim}{a}_n|_2(E) \leq |\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}_n|_2(E).$$

$$\Rightarrow \big|\, |\underset{\sim}{a}_n|_2(E) - |\underset{\sim}{a}|_2(E) \big| \leq |\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{a}|_2(E)$$

Il reste maintenant à voir que $(|\underset{\sim}{a}_n|_2)$ est de Cauchy.

$\| |\underset{\sim}{a}_n|_2 - |\underset{\sim}{a}_m|_2 \| = \big| \underbrace{|\underset{\sim}{a}_n|_2 - |\underset{\sim}{a}_m|_2}_{\text{on y associe la fonction simple } (|f_n|_2 - |f_m|_2)} \big|_2 (\mathbb{R}^+)$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \big| |f_n(t)|_2 - |f_m(t)|_2 \big|_2 \, dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^+} |f_n(t) - f_m(t)|_2 \, dt.$$

$$= \|\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{a}_m\|_2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

Théorème 2

Soit $\underset{\sim}{a} \in \underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{A}$ $\qquad$ $\underset{\sim}{a} = \underset{\in \underset{\sim}{L}}{\underset{\sim}{a}_1} + \underset{\in \underset{\sim}{A}}{\underset{\sim}{a}_2}$

$$|\underset{\sim}{a}|_2 (E) = \int_E \sqrt{f_R^2(t) + f_I^2(t)}\, dt + \sum_{t_i \in E} \sqrt{a_{iR}^2 + a_{iI}^2}$$

Ce théorème suit du théorème précédent et du fait que si $\underset{\sim}{a}_2 (E) = \sum_{t_i \in E} a_i$

alors $|\underset{\sim}{a}_2| (E) = \sum_{t_i \in E} |a_i|_2$

$$= \sum_{t_i \in E} \sqrt{a_{iR}^2 + a_{iI}^2}$$

Théorème 3

Si μ est une mesure finie signée sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ alors $\forall E \in \mathcal{E}$.

$$|\mu|_2 (E) = \sup \left\{ \left| \int_E f \, d\mu \right|_2 ,\ f \text{ mesurable } |f| \leq 1 \right\}$$

Démonstration

1° $\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad |\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$

par la décomposition de Jordan

où $\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \geq 0$.

$\mu^-(E) = -\mu(E \cap B) \geq 0$.

où $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = X$.

A est un ensemble positif : $\forall E \in \mathcal{E}$ $\quad E \cap A \in \mathcal{E}$ et $\mu(E \cap A) \geq 0$

B " " négatif : " $\quad E \cap B \in \mathcal{E}$ et $\mu(E \cap B) \leq 0$

on peut aussi définir $|\mu|_2(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|_2$

(cf. chap III)

2° Soit f intégrable par rapport à μ et tq $\|f\| \leq 1$

$$\forall E \in \mathcal{E} \quad \left|\int_E f \, d\mu\right|_2 = \left|\int_E f \, d\mu^+ - \int_E f \, d\mu^-\right|_2$$

$$\leq \left|\int_E f \, d\mu^+\right|_2 + \left|\int_E f \, d\mu^-\right|_2$$

$$\leq \int_E |f|_2 \, d\mu^+ + \int_E |f|_2 \, d\mu^-$$

$$\leq \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

$$= |\mu|(E)$$

3^{o} Soit $f = \chi_{A\cap E} - \chi_{B\cap E}$

$$\int_E f \, d\mu^+ = \int_{A\cap E} d\mu^+ - \int_{B\cap E} d\mu^+$$

$$= \mu^+(A\cap E) - \mu^+(B\cap E)$$

$$= \mu(A\cap E) - 0$$

$$= \mu^+(E)$$

$$\int_E f \, d\mu^- = \int_{A\cap E} d\mu^- - \int_{B\cap E} d\mu^-$$

$$= \mu^-(A\cap E) - \mu^-(B\cap E)$$

$$= 0 + \mu(B\cap E)$$

$$= -\mu^-(E)$$

$$\left|\int_E f \, d\mu\right| = \left|\int_E f \, d\mu^+ - \int_E f \, d\mu^-\right|$$

$$= |\mu^+(E) + \mu^-(E)|$$

$$= \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

$$= |\mu|(E)$$

donc, on a bien que :

$$\forall E \in \mathcal{E} \qquad |\mu|(E) = \sup\left\{ \left|\int_E f \, d\mu\right| \ \|f\| \leq 1 \right\}$$

Théorème 4

Si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est une mesure complexe σ-finie sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$, alors $\forall E \in \mathcal{E}$:

$$|\mu|_2(E) = \sup\left\{ \left|\int_E f\,d\mu\right|_2 \quad f = f_R + i f_I \text{ mesurable et } \|f\|_2 \leq 1 \right\}$$

Démonstration

1 On peut écrire :

$$\int_E f\,d\mu = \int_E (f_R + i f_I)\, d[(\mu_{R^+} - \mu_{R^-}) + i(\mu_{I^+} - \mu_{I^-})]$$

$$= \int_E f_R\,d\mu_R - \int_E f_I\,d\mu_I + i\int_E f_R\,d\mu_I + i\int_E f_I\,d\mu_R$$

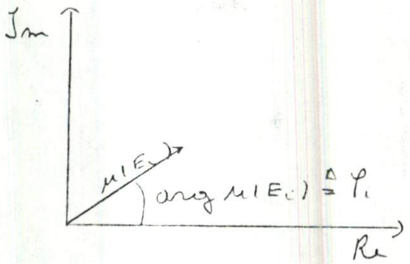
Puisque f est intégrable par rapport à μ, on sait qu'alors $|f|_2$ est intégrable par rapport à $|\mu|_2$ et donc $|f_R|_2$ et $|f_I|_2$ sont intégrables par rapport à $|\mu_R|_2$ et $|\mu_I|_2$

Montrons qu'effectivement $|\mu|_2(E) = \sup\left\{ \left|\int_E f\,d\mu\right|_2, \ f \text{ intégrable } |f|_2 \leq 1 \right\}$ $\forall E \in \mathcal{E}$

1. Si $|f|_2 \leq 1$ $\quad \left|\int_E f \, d\mu\right|_2 \leq \int_E |f|_2 \, d|\mu|_2 \leq |\mu|_2(E)$

$\forall E \subset \mathcal{E}$.

2.



$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-j\varphi_i} . \mu(E_i).$$

Soit $(E_i)_{i=1}^{n}$ une subdivision finie de E et $\varphi_i = \arg \mu(E_i)$

Pour la fonction simple $f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-j\varphi_i} \chi_{E_i}(t)$.

$$\left.\begin{array}{l} \\ \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \left|\int f \, d\mu\right|_2 \quad \text{et} \quad |f|_2 = 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Par définition $|\mu|_2(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|_2$

donc $\exists$ une subdivision (E_i^n) de E t.q.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i^n)|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} |\mu|_2(E)$$

De plus, pour chaque subdivision dénombrable de E, il existe une subdivision de E, à valeurs finies $(E_j^n)_{j=1}^{k}$ t.q.

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i^n)|_2 - \sum_{j=1}^{k} |\mu(E_j^n)|_2\right| < \frac{1}{n}.$$

Donc, il existe une suite de subdivisions finies (E_j^n) t.q. $\sum_{j=1}^{k} |\mu(E_j^n)|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} |\mu|_2(E)$

en effet

$$\left| |\mu|_2(E) - \sum_{j=1}^{k} |\mu(E_j^n)|_2 \right| \leq \underbrace{\left| |\mu|_2(E) - \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j^n)|_2 \right|}_{\to 0 \; n\to\infty} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i^n)| - \sum_{j=1}^{k} |\mu(E_j^n)|_2 \right|}_{< \frac{1}{n}}.$$

donc $|\mu|_2(E) = \sup \{ \sum_{i=1}^{k} |\mu(E_i)|_2 \;,\; (E_i)$ subd. finie $\}$

donc puisqu'il existe une suite de subdivisions finies (E_j^n) t.q $\sum_{j=1}^{k} |\mu(E_j^n)|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} |\mu|_2(E)$

par (1), il existe une suite de fonctions simples $f_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} e^{-j\gamma_i} \chi_{E_i^n}(\cdot)$ t.q $|f_n| = 1 \; \forall n$.

$$\left|\int f_n \, d\mu\right| \geq 0 \;\; \forall n \;\; \text{et} \left|\int f_n \, d\mu\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\mu|_2(E)$$

3. Par les points 1 et 2, on a que

$$|\mu|_2(E) = \sup \left\{ \left|\int_E f \, d\mu\right|_2 \; f \text{ simple t.q } |f| \leq 1 \right\}.$$

Etant donné que toute fonction mesurable t.q $|f| \leq 1$ sont intégrables et que les fonctions simples sont denses dans l'ensemble des fonctions intégrables

$$|\mu|_2(E) = \sup \left\{ \left|\int f \, d\mu\right|_2 \; f \text{ mesurable } |f|_2 \leq 1 \right\}$$

$\boxed{5}$ Les ensembles de Baire et de Borel dans $\mathbb{R}^+$

Définition

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^+$ est appelé $\mathcal{G}_\delta$ s'il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles ouverts t.q. $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$

Soit $\mathcal{C}$ = la classe des sous-ensembles compacts de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_{us})$

S = la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$

= l'ensemble des boréliens

$\mathcal{C}_0$ = la classe de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^+$ qui sont des $\mathcal{G}_\delta$ compacts

S_0 = la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}_0$

= ensemble des ensembles de Baire

Il est évident que $S_0 \subset S$

Démontrons que $S \subset S_0$, nous pourrons alors affirmer que $\boxed{S = S_0}$

Pour cela, montrons, tout d'abord, que la σ-algèbre S engendré par les compacts de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_{us})$ est identique à la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^+$ notée Θ.

Nous savons qu'une base d'ouverts de cette topologie est formée des éléments de la forme : $[0, a[$, $]a, b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Or $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $[0, a[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, a - \frac{1}{n}]$ = l'union d'ensembles compacts, $\Rightarrow [0, a[\in S$

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ = l'union d'ensembles compacts, $\Rightarrow]a, b[\in S$

On sait que cette base engendre Θ, par conséquent $\Theta \subset S$ [1]

D'autre part, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, le compact $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\cap \mathbb{R}^+$
= l'intersection d'ouverts

$\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $[a, b] \in \Theta$

Or l'ensemble de tous ces intervalles compacts engendre la σ-algèbre S $\Rightarrow$ $S \subset \Theta$ [2]

[1] , [2] $\Rightarrow$ $S = \Theta$

Montrons alors que $\Theta \subset S_0$.

Or par [BER, p177] , tout ouvert est une union d'ensembles ouverts de Baire $\Rightarrow \Theta \subset S_0$ ce qui implique $S \subset S_0$

Remarque

Définition

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$ ou $\mathcal{L} \triangleq$ la classe des fonctions continues à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^+$ à support compact.

Considérons $\mathcal{B}$, la σ algèbre engendrée par les sous-ensembles de $\mathbb{R}^+$ tels que chaque fonction de $\mathcal{L}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ sera alors la σ-algèbre engendrée par les ensembles :

$\{x ; f(x) \geq \alpha\}$ avec $f \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Remarquons que $\forall \alpha > 0$, les ensembles $\{x ; f(x) \geq \alpha\}$ sont des $\mathcal{G}_\delta$ compacts par le théorème 1 de [BER p 175] [a]

Pour $\alpha < 0$, l'ensemble $\{x ; f(x) \geq \alpha\}$ sera aussi dans S_0

car :

$$\{x ; f(x) \geq \alpha\} = (\{x ; -f(x) \neq -\alpha\} \cap \{x ; -f(x) \geq -\alpha\})^c$$

et $-\alpha > 0$ et $-f \in \mathcal{L}$

Posons $E = \{x : -f(x) \neq -\alpha\} = (\{x ; -f(x) = -\alpha\})^c$

or par [BER, p 175], $\{x ; -f(x) = -\alpha\} = \{x ; f(x) = \alpha\}$ est un $\mathcal{G}_\delta$ compact et donc $E \in S_0$

Posons $U = \{x ; -f(x) \geq -\alpha\}$, $-f \in \mathcal{L}$ et $-\alpha > 0$, par conséquent par [BER, p 175] U est un $\mathcal{G}_\delta$ compact

$\{x ; f(x) \geq \alpha\} = (E \cap U)^c$ avec E et U appartenant à S_0

$$\Rightarrow \{x ; f(x) \geq \alpha\} \in S_0 \qquad [b]$$

Si $\alpha = 0$, l'ensemble $\{x ; f(x) \geq 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x ; f(x) \geq -\frac{1}{n}\}$

or $\{x ; f(x) \geq -\frac{1}{n}\} \in S_0$ par [b], $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Par conséquent $\{x ; f(x) \geq 0\} \in S_0$ [c]

[a], [b], [c] $\Rightarrow$ $\mathcal{B} \subset S_0$

Démontrons que $S_0 \subset \mathcal{B}$:

Soit E = un $\mathcal{G}_\delta$ compact.

Il existe alors une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles ouverts,

t.q $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$, donc $E \subset U_0$, on applique le théorème 3

de [BER p 174] et il existe alors un $f \in \mathcal{L}$ t.q. $0 \leq f \leq 1$

et t.q. $f = 1$ sur E et $f = 0$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus U_0$

C'est ainsi que $E = \{x ; f(x) = 1\} = \{x ; f(x) \geq 1\} \cap \{x ; -f(x) \geq -1\}$

$$E \in \mathcal{B}$$

$\Rightarrow S_0 \subset \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \subset S_0$ et $S_0 \subset \mathcal{B} \Rightarrow S_0 = \mathcal{B}$

Conclusion

L'objectif pincipale de ce mémoire consiste donc dans l'étude de l'espace $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$ et du critère d'inversibilité pour les éléments de cet ensemble.

Ces résultats peuvent être utilisés en théorie des systèmes comme il est expliqué brièvement dans l'introduction.

Pour atteindre ce but, il a été nécessaire d'acquérir certaines notions concernant :
- la théorie de la mesure
- les propriétés du produit de convolution de deux mesures
- la structure et la topologie de l'ensemble des idéaux maximaux et des formes linéaires multiplicatives.

On pourrait se demander s'il n'était pas plus simple d'étudier l'espace $\mathcal{a}$ de Desoer ou l'espace $L_1 \times l_1$ de Kamen et Bensoussan, ces espaces étant tous deux isométriquement isomorphes à $\underset{\sim}{L} \dotplus \underset{\sim}{A}$.

Le premier de ces isomorphismes a été repris dans l'introduction, le deuxième peut être établi par la correspondance suivante :

$$\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A} \longrightarrow L_1(\mathbb{R}^+) \times l_1(\mathbb{R}^+)$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \underset{\sim}{\delta}_{t_i} \leadsto (a_1(\cdot), (a_i)_{i=1}^{\infty})$$

$$\text{où} \quad \underset{\sim}{a}_1(E) = \int_E a_1(t)\,dt \quad , a_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^+)$$

Pour notre part, nous nous sommes limitées aux travaux de Hille - Phillips relatif à l'étude de $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$.
En fait, l'interprétation de Hille - Phillips est plus générale car il considère les espaces $\underset{\sim}{L}(\varphi) \dot{+} \underset{\sim}{A}(\varphi)$ noté lorsque $\varphi = 1$ $\underset{\sim}{L} \dot{+} \underset{\sim}{A}$.
Bien que le cadre mathématique dans lequel se place cette étude exige de nombreuses mises au point, il est intéressant d'utiliser ces résultats en pratique (algébrisation de relations dynamiques, théorie des systèmes).

Références

[BER]: Sterling K, Berberian

Measure and integration

[COR]: Corduneanu

Almost periodic functions

[DES]: Desoer Vidyasagar

Feedback systems

[DOE]: Doetsch (Gustav)

Introduction to the theory and application of the Laplace transformation

[GEL]: Gelfand Raïkov Shilov

Les anneaux normés commutatifs

[GOF]: Goffman - Pedrick

First course in functional analysis

[GRO]: E.A. Grove G. Ladas

Introduction to complex variables

[HAL]: P.R. Halmos

Measure theory

[HIL]: Hille - Phillips

Functional analysis and semi-groups

AMS colloquium publications XXXI

[HOF]: Hoffman

Banach spaces of analytic functions

[MSH]: Mac Shane , edward James

Integration

[ROY]: Royden

Real analysis

[WAR]: J. Warga

optimal control of differential and functionnal equations