MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Solutions périodiques de seconde espèce pour le problème restreint

Hosselet, José

Award date:
1978

Awarding institution:
Universite de Namur

SOLUTIONS PERIODIQUES DE SECONDE ESPECE POUR LE PROBLEME RESTREINT

José HOSSELET

1977-78

A V A N T - P R O P O S

Qu'il nous soit permis de remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur HENRARD pour tous les conseils et les encouragements prodigués tout au long de l'élaboration de ce travail.

José HOSSELET

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

I N T R O D U C T I O N

Dans son oeuvre classique, les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (1899), POINCARE décrit trois types de solutions périodiques du problème restrient plan des trois corps. Ces solutions sont obtenues comme perturbations de solutions du problème restreint des deux corps.

Les deux premiers types (solutions de premier et second genre) sont obtenues par continuité par rapport au paramètre de rapport de masse μ, depuis $\mu=0$ (problème des deux corps) à partir des trajectoires périodiques, circulaires et elliptiques, du problème des deux corps. La preuve formelle de leur existence (POINCARE pour le premier genre et ARENSTORF - 1963 - pour le second genre) est naturelle bien que techniquement plus compliquée pour le second genre.

Le troisième type de trajectoire (introduit par POINCARE sous le nom de solutions de deuxième espèce, pour marquer sans doute que leur formation est très différente) est obtenu par "collage". Imaginons le problème des deux corps comme un problème restreint des trois corps dont une des masses principales est nulle. Supposons deux arcs de trajectoires qui passent par la position de cette masse. Si maintenant on fait réapparaître cette masse, elle perturbera fortement, aussi petite soit-elle, la partie des trajectoires qui lui est proche.

POINCARE imagine qu'il est alors possible, en ajustant les conditions initiales, de faire en sorte que les deux arcs de trajectoire se raccordent aux environs de cette masse et donnent ainsi naissance à une trajectoire périodique.

Le problème ainsi posé est manifestement un problème de perturbation singulière et c'est sous cette forme, par la méthode du "matching" qu'il a été attaqué plus récemment par BREAKWELL et PERKO (1965-1974), par PERKO (1964-1967-1974-1976) et par GUILLAUME (1971-1975a-1975b).

La méthode asymptotique du matching a permis à ces auteurs de donner une description très précise de ce type de trajectoire et des conditions dans lesquelles elles apparaissent. Cependant, les preuves mathématiques d'existence sont difficiles dans ce cadre de développement asymptotique.

Pour ce problème, comme pour la plupart des problèmes de perturbations spéciales, on peut imaginer une autre formalisation. Par une transformation de l'espace de phase et de la variable indépendante, on peut traduire le problème de perturbation spéciale en un problème de perturbation générale. La singularité à la masse μ est régularisée; par contre, quand μ vaut zéro, sa position devient un point d'équilibre et les trajectoires qui y aboutissent sont des trajectoires asymptotiques. Le problème cette fois est que le temps de parcours des orbites de seconde espèce tend vers l'infini.

On peut cependant se servir, dans cette optique, des techniques (normalisation, équivalence de systèmes, etc...) qui ont été mises au point précisément pour étudier les trajectoires aux environs d'un équilibre d'un système dynamique.

Nous allons explorer cette ligne d'attaque du problème et dégager un sentier vers sa solution. Après avoir utilisé la régularisation classique du problème restreint (WITNER - 1947), nous allons utiliser la normalisation à la BIRKHOFF (1927), un théorème d'HARTMAN (1964) sur l'équivalence de système et enfin un raffinement de ce problème qui est exposé au chapitre III de ce mémoire pour montrer l'équivalence du problème restreint plan aux environs de μ avec un système linéaire. L'équivalence à laquelle nous arrivons n'est pas continuement différentiable sur tout l'espace de phase local, mais nous avons pu déterminer avec précision quel type de fonction ne sont pas continuement différentiables et en quels points.

Cette caractérisation est suffisante pour raccorder par le théorème des fonctions implicites trois morceaux de trajectoires : deux morceaux proches de trajectoires du problème des deux corps et éloignés des singularités et un morceau équivalent à une trajectoire d'un système linéaire aux environs d'un équilibre. De cette façon, nous pouvons établir l'existence des orbites de seconde espèce sous certaines conditions de transversalité (non annulation de certains jacobiens).

Ces conditions de transversalité sont en principe calculables puisqu'elles portent sur les dérivées partielles du problème des deux corps qui est en principe connu exactement. Les calculs étant cependant fort longs, nous n'avons pas pu établir qu'elles étaient vérifiées.

CHAPITRE I : MISE EN EQUATION DU PROBLEME RESTREINT DES TROIS CORPS

1. Introduction

Examinons le problème suivant :

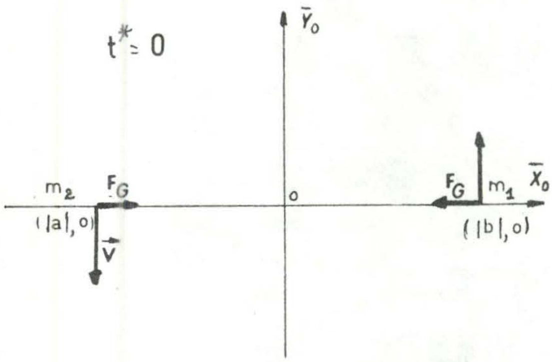
Deux corps ponctuels m_1 et m_2 décrivent autour de leur centre de masse une orbite circulaire sous l'effet de forces gravitationnelles. Dans le plan de mouvement de ces deux corps se trouve un troisième corps m_3 dont la masse est de loin inférieure à celle des deux premières masses. Supposons que la trajectoire de ce troisième corps se trouve dans le plan de mouvement des deux corps m_1 et m_2. Comme la force gravitationnelle exercée par m_3 sur m_1 et m_2 est très petite, nous supposons que leur mouvement n'est pas modifié. Nous allons dans ce cas décrire le mouvement de la petite masse m_3, ce qui s'appelle le problème restreint des trois corps.

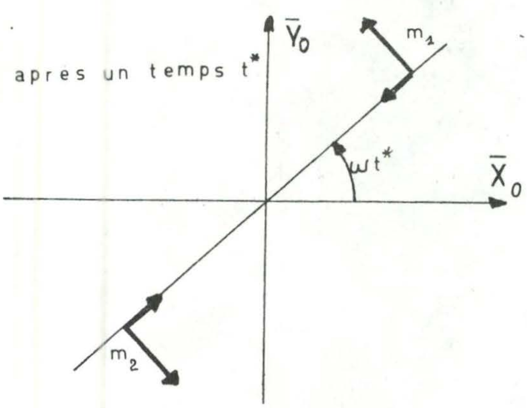
Ce problème restreint des trois corps présente un intérêt mathématique. En effet, si nous savons résoudre le problème général des deux corps, il en est tout autrement pour le problème général des trois corps. Mais le problème restreint est une situation assez simple, une idéalisation d'un cas particulier du problème des trois corps, où nous ne savons pas donner les solutions sous forme analytique mais où nous savons donner assez bien de renseignements à propos des trajectoires. De plus, ce problème restreint est une assez bonne approximation de ce qui se passe réellement. Il présente donc un intérêt astronomique par exemple si on considère le système Terre-Lune - satellite artificiel, ou Soleil-Jupiter-Astéroïde.

2. Equations du mouvement dans le système synodique

Soient m_1 et m_2 deux masses ponctuelles.

Comme leur mouvement se fait dans un plan, prenons ce plan comme plan de coordonnées. Prenons le centre de masse comme origine. Les deux masses m_1 et m_2 décrivent donc des cercles centrés à l'origine dans ce plan. Pour fixer les axes, nous allons poser que lorsque le temps est nul, alors les deux masses se trouvent sur l'axe X.





Nous avons donc les équations suivantes :

$am_2 + bm_1 = 0$ (car l'origine est centre de masse)

$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} = m_2|a|\,\omega^2 \quad \text{(force gravitationnelle = force centrifuge)}$$

$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} = m_1|b|\,\omega^2 \quad \text{(force gravitationnelle = force centrifuge)}$$

où $l = |b-a|$ = distance entre les 2 masses

ω = vitesse angulaire de m_1 et M_2

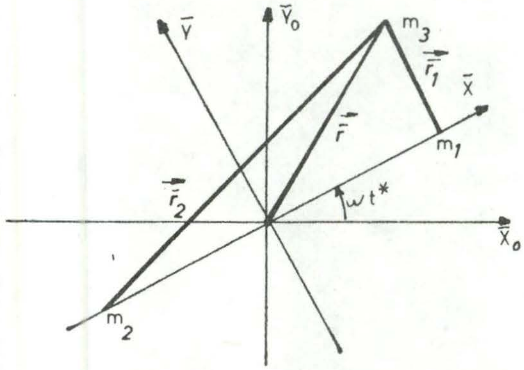
G = constante de gravitation universelle

La vitesse angulaire ω nous est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{Gm_1}{l^2|a|} = \frac{G}{l^3(m_1+m_2)} \quad \text{(troisième loi de KEPLER)}$$

Prenons maintenant comme système d'axes un système centré à l'origine et tournant avec m_1 et m_2.

Examinons maintenant dans ce système le mouvement d'une masse m_3 qui n'influence pas le mouvement de m_1 et m_2.



L'équation du mouvement est :

$$m_3\vec{a} = -\frac{Gm_3m_1\vec{\bar{r}}_1}{||\vec{\bar{r}}_1||^3} - \frac{Gm_3m_2\vec{\bar{r}}_2}{||\vec{\bar{r}}_2||^3} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ = force gravitationnelle

$\vec{a}$ = accélération du corps m_3

Cette force $\vec{F}$ est le gradient de la fonction de force suivante :

$$\bar{U} = \frac{Gm_1m_3}{\bar{r}_1} + \frac{Gm_2m_3}{\bar{r}_2}$$

où $\bar{r}_1 = ||\vec{\bar{r}}_1||$ et $\bar{r}_2 = ||\vec{\bar{r}}_2||$

D'après un théorème classique de mécanique,

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad \text{où} \quad \vec{a}_{rel} = (\ddot{\bar{x}},\ddot{\bar{y}},\ddot{\bar{z}})$$

Si l'on suppose que le mouvement de m_1 et m_2 se fait dans le sens direct, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_3\ddot{\bar{x}} - m_3 2\omega\dot{\bar{y}} - m_3\omega^2\bar{x} = \dfrac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}} \\[2ex] m_3\ddot{\bar{y}} + m_3 2\omega\dot{\bar{x}} - m_3\omega^2\bar{y} = \dfrac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} - 2\omega\dot{\bar{y}} = \dfrac{\partial U'}{\partial\bar{x}} \\[2ex] \ddot{\bar{y}} + 2\omega\dot{\bar{x}} = \dfrac{\partial U'}{\partial\bar{y}} \end{cases} \quad \text{où} \quad U' = \frac{1}{2}\omega^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2) + \frac{Gm_1}{\bar{r}_1} + \frac{Gm_2}{\bar{r}_2}$$

3. Equations du mouvement dans un système sans dimensions

Nous allons changer d'unité de longueur, de masse et de temps pour simplifier les équations.

Prenons comme unité de masse $M = m_1 + m_2$

longueur l

temps $\frac{1}{\omega}$

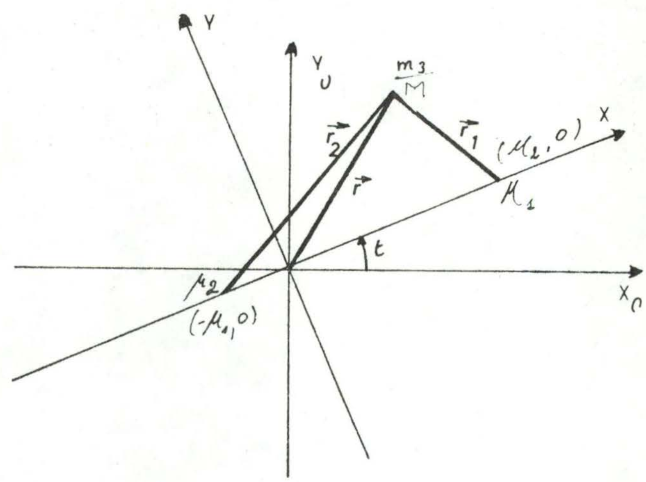
Nous avons donc les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\bar{x}}{l} \\ t = \omega t^* \\ y = \dfrac{\bar{y}}{l} \end{cases}$$

Posons $r_1 = \dfrac{\bar{r}_1}{l}$, $r_2 = \dfrac{\bar{r}_2}{l}$, $\mu_1 = \dfrac{m_1}{M}$, $\mu_2 = \dfrac{m_2}{M}$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial y} \end{cases}$$



où $\bar{\bar{U}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \dfrac{\mu_1}{r_1} + \dfrac{\mu_2}{r_2}$

$$\begin{cases} r_1^2 = (x - \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 = (x + \mu_1) + y^2 \end{cases}$$

Prenons maintenant comme fonction de force $U = \bar{\bar{U}} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2$

On a donc : $U = \frac{1}{2}\left[\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2\right] + \dfrac{\mu_1}{r_1} + \dfrac{\mu_2}{r_2}$

Or, nous savons que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ou $\mu_1 = 1 - \mu_2$

Posons $\mu_2 = \mu$

Avec ces notations, $U = \frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$

Finalement, le système d'équations du mouvement peut s'écrire :

$$(I) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} & (1) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

Ce système admet une intégrale première $G = 2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$
car le long des solutions $\frac{dG}{dt} = 0$

Donc le long des solutions du système $2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C$

(C = constante déterminée par conditions initiales)
ou, avec d'autres notations :

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U = h \qquad \text{avec} \quad h = -\frac{C}{2}$$

4. Lagrangien et Hamiltonien du système

Le Lagrangien du système (I) est

$L = T + U$ où T = énergie cinétique
U = fonction de force

On a que $T = T_2 + T_1 + T_0$ où $T_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$T_1 = (x\dot{y} - \dot{x}y)$

$T_0 = 0$ (car ce terme est inclus dans U)

Donc $$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) + U$$

Calculons l'Hamiltonien H du système

Par définition :

$$H = \dot{x}X + \dot{y}Y - L \qquad \text{où} \quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\[2ex] Y = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} \end{cases}$$

Nous avons donc que $\begin{cases} X = \dot{x} - y \\ Y = \dot{y} + x \end{cases}$

On obtient, en remplacant dans l'expression ci-dessus :

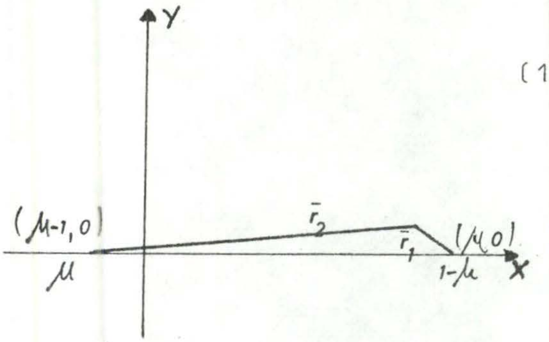
$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (xY - Xy) - (U - \frac{1}{2}(x^2+y^2))$$

Comme cette expression ne dépend pas du temps, on a que H reste constant le long des solutions.

CHAPITRE II : REGULARISATION

1. Introduction

Si nous nous intéressons au mouvement d'un point matériel près de la position $(\mu,0)$, nous voyons qu'il y a un problème :



$$(1-\mu)r_1^2 + \mu\, r_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C$$

Donc, si $r_1 \to 0$, s'il y a collision par exemple, on a que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \to \infty$

Pour éviter cet ennui près de la position $(\mu,0)$, nous allons régulariser les équations diférentielles. Pour cela, nous allons appliquer deux transformations à l'Hamiltonien du système, une spatiale et une temporelle.

La transformation spatiale va doubler les angles mesurés en prenant $(\mu,0)$ comme origine. La transformation temporelle va ralentir le mouvement. Avec ces deux transformations, la position $(\mu,0)$ sera une position d'équilibre instable.

2. Transformation spatiale du Lagrangien du système

Jusque maintenant, nous avions comme variables dans l'espace de phase X et Y les deux moments conjugués aux deux variables de position x et y.

Nous allons considérer $z = x + iy$ une variable complexe décrivant la position et

$Z = X + iY$ une variable complexe des moments conjugués à la position

Faisons maintenant un changement analytique de la coordonnée z.

Prenons comme nouvelle coordonnée complexe $\zeta = \xi + i\eta$

Nous avons donc $z = z(\zeta)$.

Le moment complexe conjugué à ζ sera noté $\chi = \Xi + i\P$.

Calculons d'abord le Lagrangien du système en fonction des nouvelles coordonnées :

° on a que
$$\dot{x} = x_\xi \dot{\xi} + x_\eta \dot{\eta}$$
$$\dot{y} = y_\xi \dot{\xi} + y_\eta \dot{\eta}$$

donc, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 (x_\xi^2 + y_\xi^2) + \dot{\eta}^2 (x_\eta^2 + y_\eta^2) + 2\dot{\xi}\dot{\eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)$

car $z(\zeta)$ est analytique on a que

$$x_\xi = y_\eta \qquad \text{et} \qquad x_\eta = -y_\xi$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = x_\xi + y_\xi$$

On obtient donc que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)$.

Nous avons donc comme invariant :

$$\frac{1}{2}(z_\zeta)^2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - U = h \qquad \text{(cf. chap. I §}_3\text{)}$$

° on a que $xy' - yx' = x(y_\xi \dot{\xi} + y_\eta \dot{\eta}) - y(x_\xi \dot{\xi} + x_\eta \dot{\eta}) = \dot{\xi}(xy_\xi - yx_\xi) + \dot{\eta}(xy_\eta - yx_\eta)$

Or nous avons $$x y_\eta + y x_\eta = \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi$$

$$x y_\xi - y x_\xi = -\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta$$

$$\left|\frac{1}{2}z^2\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi = \frac{|z|^2(x x_\xi + y y_\xi)}{|z^2|} = x y_\eta - y x_\eta$$

$$\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta = \frac{|z|^2}{|z^2|}(x x_\eta + y y_\eta) = -x y_\xi + y x_\xi$$

Donc,

$$x y' - y x' = -\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta \dot{\xi} + \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi \dot{\eta}$$

Le Lagrangien s'écrit donc :

$$L(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) = |z_\zeta|^2\left(\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2}{2}\right) + \left(\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi \dot{\eta} - \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta \dot{\xi}\right) + U(\xi,\eta)$$

3. Transformation spatiale de l'Hamiltonien du système

Posons :

$$\frac{1}{C^2} = |z_\zeta|^2 \quad , \qquad a = \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi \quad , \qquad b = \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta$$

Le Lagrangien s'écrit maintenant

$$L(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) = \frac{1}{2C^2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + (a\dot{\eta} - b\dot{\xi}) + U$$

Nous avons avec ces notations :

$$\Xi = L_{\dot{\xi}} = \frac{\dot{\xi}}{c^2} - b \Longrightarrow \dot{\xi} = c^2(\Xi + b)$$

$$\P = L_{\dot{\eta}} = \frac{\dot{\eta}}{c^2} + a \Longrightarrow \dot{\eta} = c^2(\P - a)$$

L'Hamiltonien devient :

$$H(\Xi,\P,\xi,\eta) = \Xi\dot{\xi} + \P\dot{\eta} - L(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta})$$

$$= \frac{c}{2}(\Xi^2 + \P^2 + (a^2+b^2) + (b\P - a\Xi)) - U$$

$$= \frac{1}{2|z_\zeta|^2} \Big\{ \Xi^2 + \P^2 + \left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\xi^2 + \left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\eta^2 + \left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\eta \Xi - \left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\xi \P \Big\} -$$

Or, nous avons que

$$\left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\xi^2 + \left|\tfrac{1}{2}z^2\right|_\eta^2 = \frac{1}{2}|z|^2|z_\zeta|^2$$

En effet

$$(x^2+y^2)(x_\xi^2+y_\xi^2) = (xy_\eta - yx_\eta)^2 + (xy_\xi - yx_\xi)^2$$

car $z(\zeta)$ est analytique.

L'expression finale de l'Hamiltonien est :

$$H(\Xi,\P,\xi,\eta) = \frac{1}{|z_\zeta|^2} \Big\{ \tfrac{1}{2}(\Xi^2 + \P^2 + |z^2|_\eta \Xi - |z^2|_\xi \P) - |z_\zeta|^2 (U - \tfrac{1}{2}|z^2$$

4. Transformation temporelle d'un Hamiltonien

Si nous notons par x le vecteur $(\Xi, \P, \xi, \eta)$, les équations d'Hamilton du système s'écrivent : $I\dot{x} = Hx$ où I est la matrice symplectique, c-à-d

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons prendre un nouveau temps τ défini par

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{G(x(t))} \qquad (G \neq 0)$$

ou, de façon équivalente

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt^*}{G(x(t^*))}$$

Nous avons maintenant que $\frac{dx}{d\tau} = x' = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot{x}G$

Nous ne considérons que les solutions des équations d'Hamilton où l'Hamiltonien ont une certaine énergie h.

Définissons

$$\overline{H}(x;h) = (H-h)G(x) \quad \text{où} \quad H(x) = h \text{ sur les solutions qui nous concernent}$$

Nous avons alors que

$$\overline{H}_x = (-h_x + H_x)G + (H(x) - h)G$$

or, $h_x = 0$ car h est une constante
$H(x)-h = 0$ sur les solutions qui nous intéressent

Donc, $\overline{H}_x = H_x G$

Si nous multiplions par G les deux membres des équations d'Hamilton, nous obtenons $I\dot{x}G = HxG$, ce qui est équivalent à $Ix' = \overline{H}x$.

Nous avons donc l'expression des équations d'Hamilton par rapport au nouveau temps τ.

5. <u>Transformation temporelle de l'Hamiltonien du problème restreint</u>

Nous voyons immédiatement que si $G = |z_\zeta|^2$ l'Hamiltonien H du problème restreint va se simplifier. En appliquant les formules ci-dessus, on obtient :

$$H(\Xi,\P,\xi,\eta;h) = \frac{1}{2}(\Xi^2+\P^2) - (|\tfrac{1}{2}z^2|_\xi \P - |\tfrac{1}{2}z^2|_\eta \Xi)$$

$$-|z_\zeta|^2 \; (U - \frac{1}{2}|z|^2 + h)$$

Sur les solutions, on a que

$$\overline{H}(\Xi,\P,\xi,\eta;h) = 0$$

et

$$\frac{1}{2}(\xi'^{\,2} + \eta'^{\,2}) - |z_\zeta|^2 \; (U+h) = 0 \qquad \text{(cf §2)}$$

6. <u>Equations de Lagrange du problème restreint dans les nouvelles coordonnées et le nouveau temps</u>

Au paragraphe 2, nous avions :

$$L(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) = \frac{1}{2}|z_\zeta|^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2) + (|\tfrac{1}{2}z^2|_\xi \dot{\eta} - |\tfrac{1}{2}z^2|_\eta \dot{\xi}) + U(\xi,\eta)$$

Les équations de Lagrange : $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$

Calculons la première équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{d}{dt}(|z_\zeta|^2\dot{\xi} - |\tfrac{1}{2}z^2|_\eta) = |z_\zeta|^2\ddot{\xi} + \dot{\xi}\frac{d}{dt}|z_\zeta|^2 - \frac{d}{dt}(|\tfrac{1}{2}z^2|_\eta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = (\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)|z_\zeta||z_\zeta|_\xi + |\tfrac{1}{2}z^2|_{\xi\xi}\dot{\eta} - |\tfrac{1}{2}z^2|_{\eta\xi}\dot{\xi} + \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}$$

Elle s'écrit donc :

$$\underbrace{(|z_\zeta|^2\ddot{\xi} + \dot{\xi}\frac{d}{dt}|z_\zeta|^2)}_{A} - \underbrace{((\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)|z_\zeta||z_\zeta|_\xi - U_\xi)}_{B} - \underbrace{(\tfrac{1}{2}|z^2|^{\bullet}_\eta + |\tfrac{1}{2}z^2|_{\xi\xi}\dot{\eta} - |\tfrac{1}{2}z^2|_{\eta\xi}\dot{\xi})}_{C}$$

$$A = \frac{1}{|z_\zeta|^2}\,\xi'' \quad \text{car} \quad \xi'' = \frac{d}{d\tau}\,\frac{d}{d\tau}\xi = \frac{d}{d\tau}\dot{\xi}|z_\zeta|^2 = \ddot{\xi}|z_\zeta|^4 + \dot{\xi}|z_\zeta|^2\,\frac{d}{dt}|z_\zeta|^2$$

$$B = \frac{1}{|z_\zeta|^2}[(\xi'^2+\eta'^2)|z_\zeta|^3|z_\zeta|_\xi - (z_\zeta)^2U_\xi] = \frac{1}{|z_\zeta|^2}\left[2|z_\zeta|_\xi|z_\zeta|(U+h)+(z_\zeta)^2U_\xi\right]$$

$$= \frac{1}{|z_\zeta|^2}\,U^+_\xi \qquad \text{où} \quad U^+ = |z_\zeta|^2(U+h)$$

$$C = \tfrac{1}{2}|z^2|^{\bullet}_\eta - |\tfrac{1}{2}z^2|_{\eta\xi}\dot{\xi} - \dot{\eta}|\tfrac{1}{2}z^2|_{\eta\eta} + 2\dot{\eta}|z_\zeta|^2 \quad \text{car} \quad 4|z_\zeta|^2 = |z^2|_{\xi\xi}+|z^2|_{\eta\eta}$$

$$= +2\dot{\eta}|z_\zeta|^2 = +2\eta' = +2\eta'\,\frac{|z_\zeta|^2}{|z_\zeta|^2}$$

En définitive, la première équation de Lagrange, exprimée avec les nouvelles coordonnées ζ et le nouveau temps τ s'écrit :

$$\xi'' - 2\eta'\,|z_\zeta|^2 = U^+_\xi$$

De même, la seconde équation de Lagrange s'écrit :

$$\eta'' + 2|z_\zeta|^2\,\xi' = U^+_\eta$$

Le problème est donc décrit par :

$$\begin{cases} \xi'' - 2|z_\zeta|^2 \, \eta'' = U^+_\xi \\ \eta'' + 2|z_\zeta|^2 \, \xi' = U^+_\eta \end{cases}$$

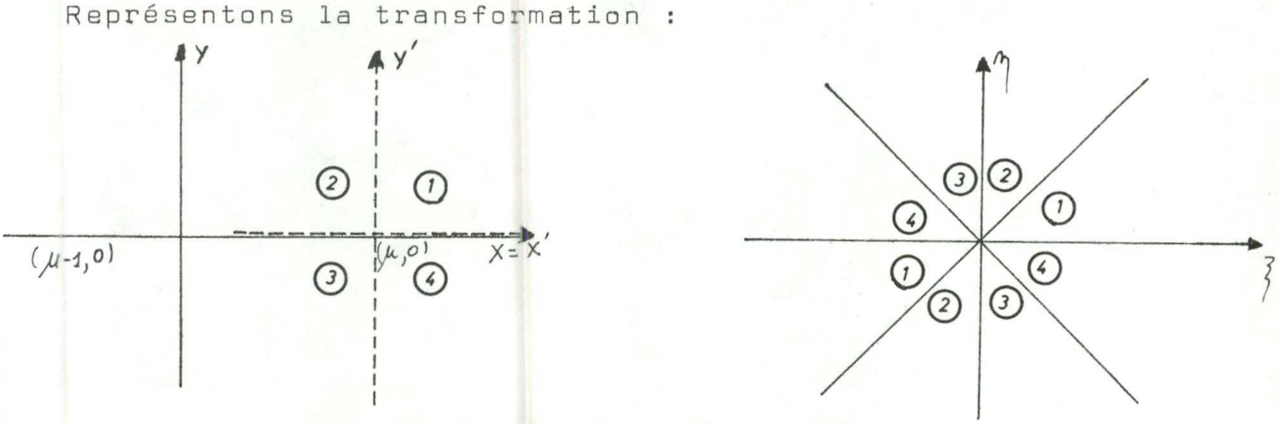
7. <u>Application des formules à la transformation de Levi-Civita</u>

Jusque maintenant, nous avons travaillé avec une transformation $z(\zeta)$ quelconque. Nous allons maintenant prendre pour $z(\zeta)$ la fonction analytique

$$z(\zeta) = \zeta^2 + \mu$$

Cette fonction est une translation de l'origine au point $(\mu, 0)$ suivie d'une transformation qui double les angles et élève le module des nombres complexes au carré.

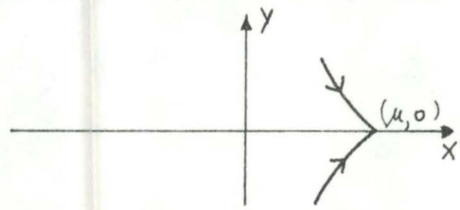
Représentons la transformation :



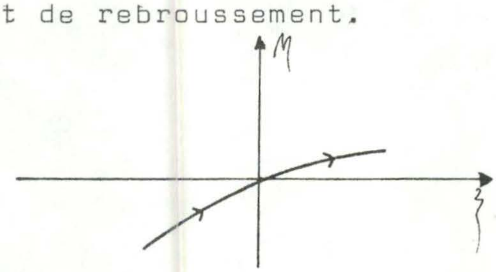
Les régions numérotées ① ② ③ ④ du graphique de droite délimitées par les axes et les bissectrices vont correspondre aux régions ① ② ③ ④ délimitées par les axes sur le graphique de gauche.

Cette transformation est intéressante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le point (μ, o) est ramené à l'origine; cela nous simplifiera les équations lorsque nous les linéariserons près du point (o, o). De plus, si nous prenons comme transformation temporelle

$\frac{d\tau}{dt} = G(\xi) = |z_\zeta|^2$, le mouvement sera ralenti près du point (μ,o). En effet, avec l'intégrale d'énergie $\frac{1}{2}(\dot\xi^2+\dot\eta^2)-|z_\zeta|^2(U+h) = 0$, nous remarquons que la vitesse en (o,o) est finie, ce qui nous intéressait. De plus, sur une trajectoire de collision où on avait dans le plan x,y le graphique



nous avons maitenant dans le plan ξ,η le graphique suivant où il n'y a pas de point de rebroussement.



Nous allons maintenant appliquer les formules générales à ce cas particulier.

Calculons d'abord U^+ :

$$U^+ = 4|\zeta|^2\left[\frac{(1-\mu)}{2}|\zeta|^4 + \frac{\mu}{2}|\zeta^2+1| + \frac{1-\mu}{|\zeta^2|} + \frac{\mu}{|\zeta^2+1|} + h\right]$$

$$= 4|\zeta|^2h + 2(1-\mu)|\zeta|^6 + 2\mu|\zeta^2+1||\zeta|^2 + \frac{\mu|\zeta^2|}{|\zeta^2+1|} + 4(1-\mu)$$

$$= 2\left[(\xi^2+\eta^2)^3 + 2\mu(\xi^4-\eta^4) + (\mu+2h)(\xi^2+\eta^2) + 2(1-\mu) + \frac{2\mu(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^2+1+2(\xi^2-\eta^2)}}\right]$$

Il est évident que $U^+_\xi = U^+_\eta = 0$ en (o,o)

Donc si nous nous plaçons au point (o,o) avec une vitesse nulle, nous avons que $\ddot\xi = \ddot\eta = 0$, Aussi, l'origine est un point d'équilibre qui, nous le verrons plus loin, est instable. Les trajectoires de collision sont transformées en trajectoires asymptotiques.

L'Hamiltonien du problème restreint va donc s'écrire :

$$\overline{H}(\Xi,\P,\xi,\eta;h) = \frac{1}{2}(\Xi^2+\P^2) - 2(((\xi^2-\eta^2+\mu) + \xi\eta^2)\P + ((\xi^2-\eta^2+\mu)\eta - 2\xi^2\eta)\Xi)$$

$$- 2\left[(\xi^2+\eta^2)^3 + 2\mu(\xi^4-\eta^4)+(\mu+2h)(\xi^2+\eta^2) + 2(1-\mu)\right.$$

$$\left. + \frac{2\mu(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^2 + 1 + 2(\xi^2-\eta^2)}}\right] + 2(\xi^2+\eta^2)((\xi^2-\eta^2+\mu)^2+4\xi^2\eta^2)$$

(cfr SZEBEHELY)

CHAPITRE III : LINEARISATION DES EQUATIONS REGULARISEES AUTOUR DE L'ORIGINE

1. Introduction

Nous allons étudier l'approximation linéaire des équations régularisées du mouvement autour de l'origine et diagonaliser cette approximation.

Ensuite, nous montrerons qu'il existe une transformation qui envoie les solutions des équations du mouvement sur les solutions des équations linéarisées. En d'autres termes, les équations du mouvement sont équivalentes à un système particulier d'équations linéaires.

2. Linéarisation des équations du mouvement

Pour linéariser les équations du mouvement, nous ne retiendrons que les termes quadratiques de l'Hamiltonien $\bar{H}$. Appelons cet Hamiltonien $\overline{H}_{lin}$.

$$\begin{aligned}\overline{H}_{lin}(\Xi,\P,\xi,\eta,h) &= \frac{1}{2}(\Xi^2+\P^2)-(2\mu\xi\P + 2\mu\eta\Xi) - 4(\xi^2+\eta^2)\Big(h + \frac{3\mu}{2} + \frac{(1-\mu)}{(\xi^2+\eta^2)} - \frac{\mu^2}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\Xi^2+\P^2)-(2\mu\xi\P+2\mu\eta\Xi)-4(\xi^2+\eta^2)(h+\frac{3}{2}\mu-\frac{\mu^2}{2})-4(1-\mu)\end{aligned}$$

Calculons maintenant les équations du mouvement associées à $\overline{H}_{lin}$.

Nous avons :

$$\overline{H}_{lin\,\xi} = -2\mu\P - 8\xi\left[h + \frac{3}{2}\mu - \frac{\mu^2}{2}\right]$$

$$\overline{H}_{lin\,\eta} = -2\mu\Xi - 8\eta\left[h + \frac{3}{2}\mu - \frac{\mu^2}{2}\right]$$

$$\overline{H}_{lin\,\Xi} = \Xi - 2\mu\eta$$

$$\overline{H}_{lin\,\P} = \P - 2\mu\xi$$

Le système d'équations différentielles linéarisées (ou aux variations) . devient, si l'on pose

$$\alpha = 8(h + \frac{3}{2}\mu - \frac{\mu^2}{2})$$

$$\begin{pmatrix} \Xi \\ \P \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu & \alpha & 0 \\ 2\mu & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & -2\mu \\ 0 & 1 & -2\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi \\ \P \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Xi \\ \P \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

3. Diagonalisation des équations linéaires

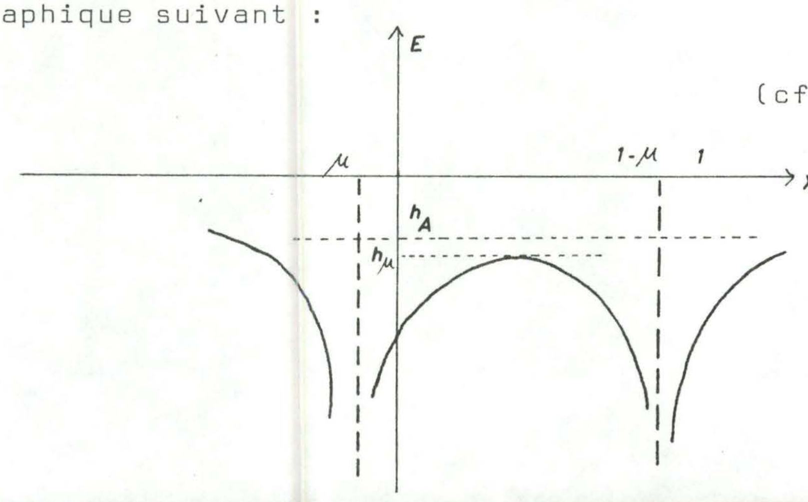
Calculons les valeurs propres λ de la matrice A. Le polynôme caractéristique est

$$(\lambda^2 - (\alpha+4\mu^2))^2 = 0$$

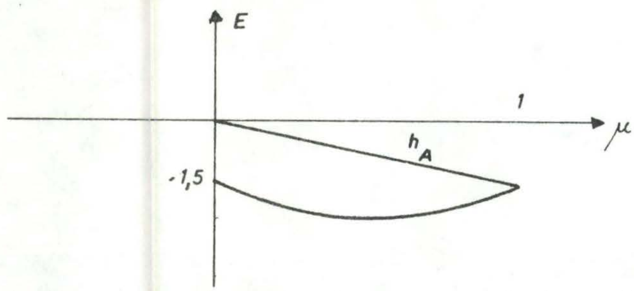
Ce polynôme admet deux racines doubles $+\sqrt{\alpha+4\mu^2}$ et $-\sqrt{\alpha+4\mu^2}$ qui sont les valeurs propres de la matrice A. Supposons ces valeurs propres réelles différentes de zéro, c-à-d supposons $\alpha+4\mu^2>0$ ou $2h+3\mu>0$. Cette hypothèse ne nous impose pas beaucoup de contraintes. En effet, nous nous intéressons aux trajectoires correspondant à μ proche de 1, partant d'un point (x_o,o) où $x_o<0$ et arrivant près du point (1,0), c-à-d aux trajectoires passant d'un puits de potentiel à l'autre. Il faut donc que h soit supérieur au niveau d'énergie h_μ du point d'équilibre situé sur l'axe X.

Si nous représentons la fonction $V(x,o;\mu) = -\Omega(x,o;\mu)$, nous avons le graphique suivant :

(cfr SZEBEHELY)



Comparons maintenant sur un graphique le niveau d'énergie h_A qui annulle λ_1 et h_μ.



(cfr SZEBEHELY)

Pour avoir λ_1 réel, nous devons imposer $h>h_A$. Il faut remarquer ici que, au voisinage de 1, h_A est de peu supérieur à h_μ. Cest pourquoi l'hypothèse $2h+3\mu>0$ n'est pas très contraignante.

Puisqu'il y a une valeur propre réelle positive, l'équilibre au point (o,o) est instable.

Nous allons maintenant calculer les vecteurs propres de la matrice A.

1°. <u>Si la valeur propre λ est égale à $\sqrt{\alpha+4\mu^2} = \sqrt{12\mu+8h} = \lambda_1$</u>

Il nous faut résoudre le système suivant de 4 équations homogènes à 4 inconnues :

$$\begin{cases} -\lambda_1\Xi + 2\mu\P + \alpha\xi = 0 \\ 2\mu\Xi - \lambda_1\P + \alpha\eta = 0 \\ \Xi - \lambda_1\P - 2\mu\eta = 0 \\ \P - 2\mu\xi - \lambda_1\eta = 0 \end{cases}$$

Le système admet une infinité double de solutions parce qu'il équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \Xi - \lambda_1\xi - 2\mu\eta = 0 \\ \P - 2\mu\xi - \lambda_1\eta = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ les vecteurs propres sont de la forme :

$$\begin{cases} \Xi = \Xi_1 \\ ¶ = ¶_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\lambda_1 \Xi - 2\mu ¶_1}{\alpha} \\ \eta = \dfrac{\lambda_1 ¶_1 - 2\mu \Xi_1}{\alpha} \end{cases} \qquad \text{où } (\Xi_1 ¶_1) \in R^2$$

2°. Si la valeur propre λ est égale à $-\sqrt{\alpha+4\mu^2} = \lambda_2 = -\lambda_1$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \lambda_1 \Xi + 2\mu ¶ + \alpha\xi = 0 \\ 2\mu\Xi + \lambda_1 ¶ + \alpha\eta = 0 \\ \Xi + \lambda_1 \xi - 2\mu\eta = 0 \\ ¶ - 2\mu\xi + \lambda_1 \eta = 0 \end{cases}$$

Il admet encore une infinité double de solutions parce qu'il est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \Xi + \lambda_1 \xi - 2\mu\eta = 0 \\ ¶ - 2\mu\xi + \lambda_1 \eta = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ les vecteurs propres sont de la forme :

$$\begin{cases} \Xi = \Xi_3 \\ ¶ = ¶_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{-\lambda_1 \Xi_3 - 2\mu ¶_3}{\alpha} \\ \eta = \dfrac{-\lambda_1 ¶_3 - 2\mu \Xi_3}{\alpha} \end{cases} \qquad \text{où } (\Xi_3 ¶_3) \in R^2$$

Toute matrice de vecteur propre σ définit une transformation sui diagonalise le système d'équations différentielles. En effet, posons $y = \sigma^{-1} x$. Le système d'équations différentielles $x' = Ax$ devient $\sigma y = A\sigma y$, c-à-d $y = \sigma^{-1} A\sigma y$ où $\sigma^{-1} A\sigma = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$.

Construisons σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha\Xi_1 & \alpha\Xi_2 & \alpha\Xi_3 & \alpha\Xi_4 \\ \alpha\P_1 & \alpha\P_2 & \alpha\P_3 & \alpha\P_4 \\ \lambda_1\Xi_1-2\mu\P_1 & \lambda_1\Xi_1-2\mu\P_1 & -\lambda_1\Xi_3-2\mu\P_3 & -\lambda_1\Xi_4-2\mu\P_4 \\ \lambda_1\P_1-2\mu\Xi_1 & \lambda_1\P_1-2\mu\Xi_1 & -\lambda_1\P_3-2\mu\Xi_3 & -\lambda_1\P_4-2\mu\Xi_4 \end{pmatrix}$$

où $(\Xi_1,\P_1,\Xi_2,\P_2,\Xi_3,\P_3,\Xi_4,\P_4) \in R^8$

et où nous nous arrangeons de telle manière que σ nest pas singulière.

Si nous voulons garder le caractère Hamiltonien de nos équations, il nous faut trouver une matrice de vecteurs propres qui soit symplectique.

Nous devons donc vérifier $\sigma I \sigma^T = I$ où I est la matrice symplectique.

Posons :

$$\sigma^T I \sigma = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{pmatrix}$$

et calculons maintenant les Δ_{ij}.

Nous voyons directement que $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = 0$.

Nous remarquons aussi que $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta_{43} = \Delta_{34} = 0$.

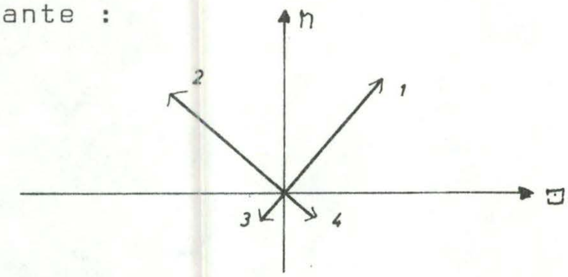
Nous devons imposer :
$$\begin{cases} \Delta_{13} = \Delta_{24} = 1 \\ \Delta_{31} = \Delta_{42} = -1 \\ \Delta_{41} = \Delta_{32} = 0 \\ \Delta_{23} = \Delta_{14} = 0 \end{cases}$$

Ces relations nous donnent un système de 4 équations à 8 inconnues

$$\begin{cases} \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 = r \\ \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 = 0 \\ \xi_1\xi_4 + \eta_1\eta_4 = 0 \\ \xi_3\xi_4 + \eta_2\eta_4 = r \end{cases} \qquad \text{où} \quad r = \frac{-1}{2\lambda_1\alpha}$$

Posons : $\gamma_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$ avec $i = 1,2,3,4$

Le système d'équations ci-dessus revient alors à la situation géométrique suivante :



$\alpha > 0$

Les segments définis par (γ_1, γ_3) et (γ_2, γ_4) sont de même longueur et sont perpendiculaires.

Si α est positif, γ_1 et γ_3 sont de même direction mais de sens opposé;

γ_2 et γ_4 sont de même direction mais de sens opposé.

Si α est négatif, γ_1 et γ_3 sont de même direction et de même sens;

γ_2 et γ_4 sont de même direction et de même sens.

On va maintenant choisir les γ_i de la manière la plus facile, c-à-d :

$$\xi_1 = \eta_2 = \sqrt{|r|}$$
$$\eta_1 = \eta_3 = \xi_2 = \xi_4 = 0$$
$$\xi_3 = \eta_4 = -\mathrm{sign}(\alpha\sqrt{|r|})$$

Donc, la matrice σ des vecteurs propres devient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|r|} & 0 & -|\alpha|\times\sqrt{|r|} & 0 \\ 0 & \alpha\sqrt{|r|} & 0 & -|\alpha|\times\sqrt{|r|} \\ \lambda_1\sqrt{|r|} & \lambda_1\sqrt{|r|} & +\lambda_1 \mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{|r|} & +2\mu\,\mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{|r|} \\ -2\mu\sqrt{|r|} & -2\mu\sqrt{|r|} & +2\mu\,\mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{|r|} & +\lambda_1\mathrm{sign}(\alpha)\sqrt{|r|} \end{pmatrix}$$

Posons maintenant :

$$y = \begin{pmatrix} \Xi_+ \\ ¶_+ \\ \xi_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix}$$

Les équations aux variations s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} \Xi_+ \\ ¶_+ \\ \xi_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi_+ \\ ¶_+ \\ \xi_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix}$$

L'Hamiltonien $\overline{H}_{lin}(x)$ est transformé en $\overline{H}_{lin}(y)$ puisque la transformation est complètement canonique.

On calcule aisément que $\overline{H}_{lin}(y) = -\lambda_1\xi_+ - \lambda_1\eta_+¶_+ - 4(1-\mu)$.

De même, $\overline{H}(x)$ va se transformer en

$$\overline{H}(y) = \overline{H}_{lim}(y) + \sum_{i>o} \overline{H}^{i+2}(\Xi_+, ¶_+, \xi_+, \eta_+)$$

où $\overline{H}^j$ ne contient que des termes de degré j en $\Xi_+, ¶_+, \xi_+, \eta_+$.

4. Simplification de l'Hamiltonien $\overline{H}(y)$

Nous allons effectuer une transformation de Lie pour éliminer les termes $\overline{H}^i$ où i est impair.

Faisons donc tout d'abord deux changements de coordonnées pour mettre $\overline{H}$ sous une bonne forme.

Tout d'abord faisons :
$$\begin{cases} \Xi_+ = \varepsilon\Xi' \\ \P_+ = \varepsilon\P' \\ \xi_+ = \varepsilon\xi' \\ \eta_+ = \varepsilon\eta' \end{cases}$$

Posons $(\Xi',\P',\xi',\eta') = y'$.

Cette transformation n'est qu'un changement d'échelle mettant en évidence le fait que nous nous intéressons au voisinage de l'origine.

L'Hamiltonien devient :

$$K(\Xi',\P',\xi',\eta') = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\overline{H}(y') \quad \text{(car la transformation n'est pas complètement canonique)}$$
$$= -\lambda_1\xi'\Xi' - \lambda_1\eta'\P' + \sum_{i>0} \varepsilon^i\overline{H}^{i+2}(\Xi',\P',\xi',\eta')$$

Ensuite, faisons
$$\begin{cases} \Xi' = \sqrt{I_1}\,e^{-\phi_1} \\ \xi' = \sqrt{I_1}\,e^{\phi_1} \\ \P' = \sqrt{I_2}\,e^{-\phi_2} \\ \eta' = \sqrt{I_2}\,e^{\phi_2} \end{cases}$$

Cette transformation est destinée à rendre le terme où ε n'intervient pas, indépendant des variables ϕ_i.

De plus, elle est complètement canonique car, en posant

$$(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = \psi \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{\partial y}{\partial \psi}$$

nous avons :

$$\Gamma I \Gamma^T = I$$

L'Hamiltonien est donc :

$$\overline{K}(\psi) = K(y'(\psi)) = -\lambda_1 I_1 - \lambda_1 I_2 + \sum_{i>o} \varepsilon^i \overline{H}^{i+2}(\sqrt{I_1}, \sqrt{I_2}, \phi_1, \phi_2).$$

Maintenant, par une transformation de Lie, nous allons éliminer les variables ϕ_i dans $\overline{K}(\psi)$ où cela est possible. Pour cela, nous allons passer de coordonnées (ψ) à des coordonnées (ψ^*).

Rappelons brièvement ce qu'est une transformation de Lie.

Supposons que nous ayons un Hamiltonien $\overline{K}(x,\varepsilon)$. Cet Hamiltonien est transformé de façon canonique en $\overline{\overline{K}}(y,\varepsilon)$ où y est défini comme étant la condition initiale de la solution générale de l'équation

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = IW_{|x} \quad \text{(W étant une fonction)}$$

Donnons une algorithme qui nous permet de trouver facilement $\overline{\overline{K}}(y,\varepsilon)$. $\overline{K}(x,\varepsilon)$ est développé en série par rapport à ε de même que ses dérivées. On a donc :

$$\frac{d^i}{d\varepsilon^i} \overline{K}(x,\varepsilon) = \sum_{j>o} \frac{\varepsilon^j}{j!} \overline{K}^i_j(x)$$

$W(x,\varepsilon)$ et $\overline{\overline{K}}(y,\varepsilon)$ sont aussi développés en série par rapport à ε, ce qui donne :

$$W(x,\varepsilon) = \sum_{j>o} \frac{\varepsilon^j}{j!} W_{j+1}(x)$$

et

$$\overline{\overline{K}}(y,\varepsilon) = \sum_{j>o} \frac{\varepsilon^j}{j!} h^j(y)$$

Un théorème nous dit que $h^j = \overline{K}^j_o$ et que

$$\overline{K}^{i-1}_j = \overline{K}^{i-1}_{j+1} + \sum_{k=o}^{j} C^j_k \, (\overline{K}^{i-1}_{j-k} ; W_{k+1})$$

où

$$(\overline{K}^{i-1}_{j-k} ; W_{k+1}) = \overline{K}^{i-1}_{j-k}\Big|_x \; I \; W_{k+1}\Big|_x$$

Appliquons ce théorème pour éliminer les angles dans $\bar{\bar{K}}(\psi,\varepsilon)$.
Les inconnues du problème sont donc les $\overline{K}^j_o$ et W_j pour $j=1,2,3,\ldots$
Les données sont $\overline{K}_j$ $j=0,1,\ldots.$

On va montrer par récurrence que l'on peut éliminer certaines combinaisons des variables dans K^j_o $j=1,2,\ldots..$

Si $j = 1$, on a

$$\overline{K}^1_o = \overline{K}^o_1 + (\overline{K}^o_o ; W_1) \qquad \text{où} \quad (\overline{K}^o_o ; W_1) = -\lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial \phi_1} - \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial \phi_2}$$

$\overline{K}^1_o$ et W_1 sont inconnus

Si $\overline{K}^o_1 = \sum_{p,q} A_{p,q}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2}) e^{p\phi_1} e^{q\phi_2}$ $(|p|+|q|=3)$, il faut prendre

$$\overline{K}^1_o = \sum_p A_{p,-p}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2}) e^{p(\phi_1-\phi_2)}$$

et

$$W_1 = \sum_{q\neq -p} \frac{A_{p,q}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2}) e^{p\phi_1 q\phi_2}}{-\lambda_1(p+q)} \qquad (|p|+|q|<3)$$

Si $j \neq 1$, supposons que nous connaissons W_k $1 \leqslant k \leqslant j-1$

Nous obtenons alors : $\overline{K}^j_o = \tilde{\overline{K}}^j_o + (\overline{K}^o_o, W_j)$ où dans $\tilde{K}^j_o$ tout est connu.

Donc, si $\tilde{\overline{K}}^j_o = \sum_{p,q} A'_{p,q}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2}) e^{p\phi_1+q\phi_2}$ $(|p|+|q|\leqslant j+2)$

nous devons prendre

$$\overline{K}^j_o = \sum_p A'_{p,-p}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2}) e^{p(\phi_1-\phi_2)}$$

$$(|p| + |q| \leqslant j+2)$$

et
$$W_j = \sum_{q\neq -p} \frac{A'_{p,q}(\sqrt{I_1},\sqrt{I_2})e^{p\phi_1+q\phi_2}}{-\lambda_1(p+q)}$$

$$(|p|+|q|\leqslant j+2)$$

Nous avons donc démontré par récurrence que l'on pouvait éliminer certaines combinaisons de variables dans $\overline{K}_o^{i+2}(\psi')$ pour tout $i\in N$ sous certaines conditions $(p+q\neq 0)$.

Malheureusement, nous ne pouvons dire que le procédé converge. Aussi, nous allons nous arrêter à un ordre $N+1$ et nous allons montrer qu'il existe un changement de variables qui tronque l'Hamiltonien transformé à l'ordre $N+1$.

Nous allons maintenant utiliser le théorème suivant (Hartman) :

Hypothèse : l'équation différentielle (1) $\dot{\zeta} = E\zeta + F_1(\zeta)$

tq $F_1(\zeta) \in C^N$ sur une boule centrée à l'origine

$F_I(o) = 0$ et $\left.\frac{\partial F_1}{\partial \zeta}\right|_o = 0$

l'équation différentielle (2) $\dot{\xi} = E\xi + F(\xi)$

tq $F(\xi) \in C^N$ les dérivées partielles de $F_1(\xi)-F(\xi)$ d'ordre $\leqslant N$ s'annullent en $\xi=0$ (A)

Thèse : pour tout naturel n, il existe $\lambda(n,E)$ tel que si $N\geqslant n+\lambda(n)$ alors il existe un changement de variables :

$\zeta = Z(\xi)\in C^N$ si $|\xi|$ est petit tq $Z(o) = 0$ et $\left.\frac{\partial Z(\xi)}{\partial \xi}\right|_o$ = identité

transformant l'équation différentielle (1) en l'équation différentielle (2).

Appliquons ce théorème : l'équation différentielle (1) sera associée à $\overline{K}_{N+1}(\psi')$ où nous aurons éliminé certaines combinaisons de variables jusqu'à l'ordre $N+1$ (N étant quelconque mais fixé).

L'équation différentielle (2) sera associée à la partie de $\overline{K}_{N+1}(\psi')$ indépendante de ces combinaisons de variables. Il est donc évident que la condition (A) est remplie. Etant donné que N est aussi grand que l'on veut, il va exister un changement de variable $\psi^* = Z(\psi') \in C^n \forall_n$ qui va transformer l'Hamiltonien $\overline{K}(\psi)$ en un Hamiltonien $\overline{\overline{K}}(\psi^*)$ indépendant de certaines combinaisons de variables et ne contenant que des termes d'ordre inférieur à N+1.

Nous allons maintenant faire deux changements de variables identiques à ceux que nous avons fait au début du paragraphe :

$$\begin{cases} \Xi^{*\prime} = \sqrt{I_1}\, e^{-\phi_1} \\ \xi^{*\prime} = \sqrt{I_1}\, e^{-\phi_1} \\ \P^{*\prime} = \sqrt{I_2}\, e^{-\phi_2} \\ \eta^{*\prime} = \sqrt{I_2}\, e^{-\phi_2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Xi^{*} = \varepsilon\Xi^{*\prime} \\ \xi^{*} = \varepsilon\xi^{*\prime} \\ \P^{*} = \varepsilon\P^{*\prime} \\ \eta^{*} = \varepsilon\eta^{*\prime} \end{cases}$$

L'Hamiltonien $\overline{\overline{K}}(\psi^*,\varepsilon)$ se transforme de façon canonique en

$$H^*(\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*) = -\lambda_1\xi^*\Xi^* - \lambda_1\eta^*\P^* + \sum_{i>o}^{N-1} H^{*\,i+2}(\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*)$$

où $H^{*\,i+2}$ est homogène de degré $i+2$ en $\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*$.

Nous allons maintenant montrer que dans $H^{*\,i+2}$ n'interviennent plus que des termes de la forme moment multiplié par variable de position, c-à-d $\Xi^*\xi^*, \Xi^*\eta^*, \P^*\xi^*, \P^*\eta^*$.

En effet, si nous avons dans $\overline{H}^{i+2}$ un terme de la forme

$$\Xi^{i_1}\P^{i_2}\xi^{i_3}\eta^{i_4} \quad \text{où } i_1+i_2+i_3+i_4 = i+2$$

il est transformé dans les variables (ψ) en un terme de la forme :

$$(\sqrt{I_1})^{i_1+i_3}\,(\sqrt{I_2})^{i_2+i_4}\,e^{(i_3-i_1)\phi_1+(i_4-i_2)\phi_2}$$

Dans les variables (ψ^*), il sera

$$(\sqrt{I_1^*})^{i_1+i_3}(\sqrt{I_2^*})^{i_2+i_4}\, e^{(i_3-i_1)\phi_1^*+(i_4-i_2)\phi_2^*} \quad \text{si}\ (i_3-i_1)+(i_4-i_2)=0$$

et il sera éliminé si $(i_3-i_1)+(i_4-i_2)\neq 0$. Donc, dans les variables $(\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*)$, nous n'aurons plus que des termes de la forme

$$(\Xi^*)^{i_1},(\P^*)^{i_2},(\xi^*)^{i_3},(\eta^*)^{i_4} \quad \text{où} \quad (i_3-i_1)+(i_4-i_2) = 0$$

Nous avons deux possibilités :

- <u>si $i_3 \geqslant i_1$</u>

nous aurons alors $\begin{array}{l} i_3 = i_1+j \\ i_2 = i_4+j \end{array}$ $\quad j \in N$

Le terme est donc de la forme : $(\Xi^*\xi^*)^{i_1}(\P^*\eta^*)^{i_4}(\P^*\xi^*)^j$

- <u>si $i_1 \geqslant i_3$</u>

nous avons alors $\begin{array}{l} i_1 = i_3+j \\ i_4 = i_2+j \end{array}$ $\quad j \in N$

Le terme est donc de la forme : $(\Xi^*\xi^*)^{i_3}(\P^*\xi^*)^{i_2}(\Xi^*\eta^*)^j$

Nous avons donc seulement des produits de termes de la forme moment multiplié par variable de position.

Posons maintenant :

$$\begin{array}{l} v_1 = \Xi^*\xi^* \\ v_2 = \Xi^*\eta^* \\ v_3 = \P^*\xi^* \\ v_4 = \P^*\eta^* \end{array} \qquad v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$$

L'Hamiltonien peut donc s'écrire :

$$H^*(\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*) = -\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_4 + \sum_{i>o}^{N-1} H^{*i+2}(v_1,v_2,v_3,v_4)$$

où H^{*i+2} est homogène de degré $i+2$ en Ξ^*, $\P^*$, ξ^*, η^*.

5. Equations du mouvement dans les coordonnées $(\Xi^*, ¶^*, \xi^*, \eta^*)$

Ecrivons les équations d'Hamilton provenant de l'Hamiltonien H^*

Nous obtenons le système (I) :

$$\begin{cases} \dot{\Xi}^* = \lambda_1 \Xi^* + A_1(v) \times \Xi^* + B_1(v) \times ¶^* \\ \dot{¶}^* = \lambda_1 ¶^* + A_2(v) \times \Xi^* + B_2(v) \times ¶^* \\ \dot{\xi}^* = -\lambda_1 \xi^* + A_3(v) \times \xi^* + B_3(v) \times \eta^* \\ \dot{\eta}^* = -\lambda_1 \eta^* + A_4(v) \times \xi^* + B_4(v) \times \eta^* \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial H^*}{\partial v_1} = -A_3 \\ B_1 = \dfrac{\partial H^*}{\partial v_3} = -B_3 \\ A_2 = \dfrac{\partial H^*}{\partial v_2} = -A_4 \\ B_2 = \dfrac{\partial H^*}{\partial v_4} = -B_4 \end{cases}$$

Les A_i, B_i $(i=1,4)$ sont de degré $\geqslant 2$ en $\Xi^*, ¶^*, \xi^*, \eta^*$.

6. Linéarisation des équations du mouvement à l'intérieur d'une boule centrée à l'origine.

Considérons le système (II) d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{\Xi}^N = \lambda_1 \Xi^N \\ \dot{¶}^N = \lambda_1 ¶^N \\ \dot{\xi}^N = -\lambda_1 \xi^N \\ \dot{\eta}^N = -\lambda_1 \eta^N \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il existe dans une boule $\overline{B}_\varepsilon$ un changement de variables $(\Xi^N,\P^N,\xi^N,\eta^N) = R(\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*)$ continu, mais non partout différentiable qui transforme le système d'équations différentielles (I) en le système (II) beaucoup plus simple. La boule $\overline{B}_\varepsilon$ est centrée à l'origine et son rayon est ε où ε sera précisé plus loin.

Posons $\quad w = (w_1,w_2,w_3,w_4) = (\Xi^*,\P^*,\xi^*,\eta^*)$

et

$$w^N = (w_1^N,w_2^N,w_3^N,w_4^N) = (\Xi^N,\P^N,\xi^N,\eta^N)$$

Définissons la transformation $T_1^t \; : \; w(o) \to \hat{w}(t,w(o))$

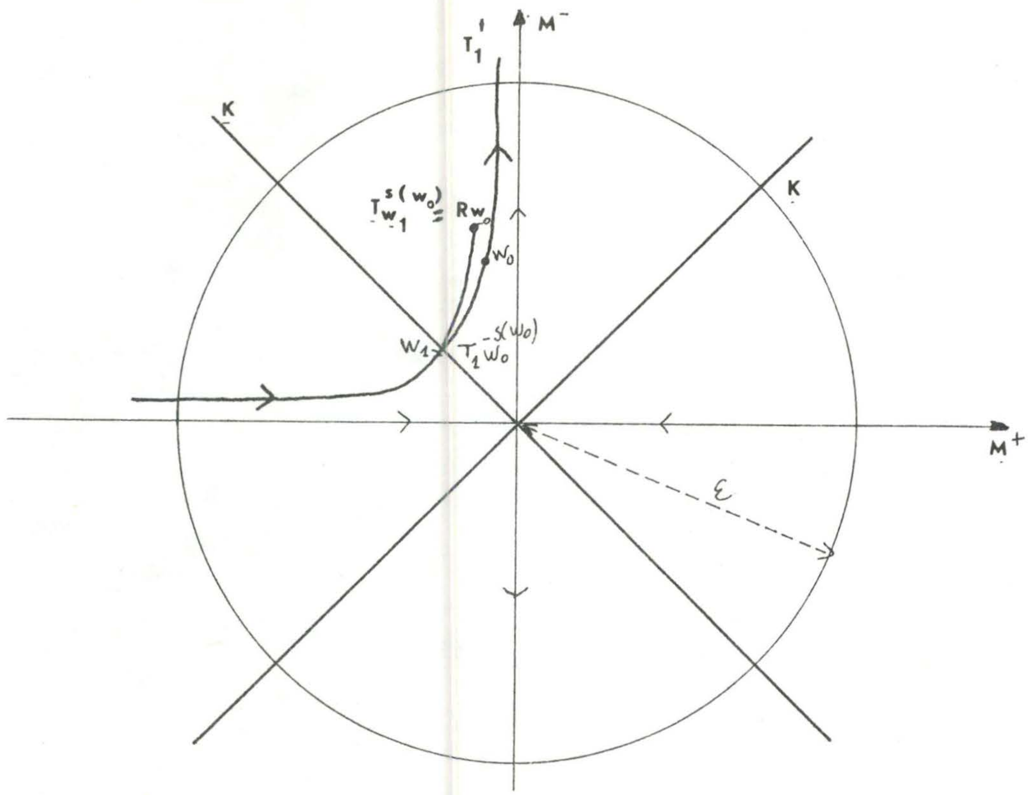
où $\hat{w}(t,w(o))$ est la solution du système (II) au temps t avec $w(o)$ comme condition initiale, et de même,

$T^t \; : \; w(o) \to w(t,w(o))$ où $w(t,w(o))$ est la solution du système (I) avec $w(o)$ comme condition initiale.

Définissons $\quad M^+ = \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \end{cases} \quad$ et $\quad M^- = \begin{cases} w_3 = 0 \\ w_4 = 0 \end{cases}$

Remarquons que pour T_1^t et T^t tout point de M^+ (ou M^-) reste sur M^+ (ou M^-).

En fait, M^+ et M^- sont les variétés asymptotiques entrantes et sortantes. En effet, elles correspondent à la trajectoire d'un point aboutissant ou partant du point (1,0).



Nous allons montrer qu'il existe un changement de variables R tel que

$$R^{-1} T^t R(w) = T_1^t(w)$$

quel que soit le temps t, ce qui revient au même de dire que R linéarise le système d'équations différentielles. Malheureusement, à l'origine, R est continu mais pas différentiable.

Définissons le changement de variables

$$w^N = R(w) = T^{s(w)} T_1^{-s(w)} (w)$$

où $\quad s(w)$ vérifie l'équation $e^{-\lambda_1 s(w)} \left[|w_1| + |w_2| \right] = e^{\lambda_1 s(w)} \left[|w_3| + |w_4| \right]$

(voir figure)

$s(w)$ est le temps pour ramener, par T_1^t, un point sur le cône K d'équation $|w_1| + |w_2| = |w_3| + |w_4|$.

Nous avons que

$$s(w) = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{|w_1| + |w_2|}{|w_3| + |w_4|}$$

Nous voyons donc que sur M^+ ou sur M^- on ne peut définir R de cette façon. Nous allons définir R comme étant identité I sur M^+ et sur M^-. Ce changement de variables linéarise bien le système (I) car nous avons bien

$$T^t R(w) = R T_1^t(w)$$

car le premier membre vaut :

$$T^t T^{s(w)} T_1^{-s(w)}(w)$$

et le second égale $$T^{s(w)+t} T_1^{-s(w)-t} T_1^t(w),$$

donc est identique au premier.

7. Continuité du changement de variables R sur une boule $\overline{B}_\varepsilon$ de rayon ε centrée à l'origine

Etant donné que $T_1^{s(wo)}$, $T^{s(wo)}$, $s(wo)$ sont continus sur $R^4\setminus\{M^+,M^-\}$, R est continu sur $R^4\setminus\{M^+,M^-\}$. Mais, comme sur M^+ et M^-, nous avons défini R de façon tout à fait différente, il nous faut établir la continuité sur cette partie de l'espace de phase. Nous allons démontrer cette continuité seulement sur M^+ et dans le cas où $s(w_o)$ est positif. Les autres cas se démontrent de façon similaire.

Tout d'abord, démontrons un premier lemme :

Si τ grandit et est de l'ordre de $\ln(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)$, alors $v(\tau,v_o)$ est borné si (v_o) est assez petit, c-à-d $w_o \in \overline{B}_\varepsilon$.

En effet, considérons par exemple $v_1 = w_1 \times w_3$.

$$v_1' = w_1' w_3 + w_1 w_3' = G_1(v)$$

où $G_1(v)$ est de degré $\geqslant 2$ en les composantes de v.

De même pour $j = 1,\dots,4$ $\qquad v'_j = G_j(v)$

où $G_j(v)$ à la même propriété que $G_1(v)$.

Appelons $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$

Nous obtenons ainsi

$$|v|' = G(v)$$

où $G(w)$ est de degré $\geqslant 2$ en les composantes de v.

Si v est petit, nous avons $|v|' \leqslant D|v|^2$(i) $\quad$ ($|\cdot|$ est la norme euclidienne sur R^4)

Par le théorème de comparaison, nous avons :

$$|v(\tau,v_o)| \leqslant \frac{|v_o|}{|1-D|v_o|\tau|}$$

et

$$\tau = O(\ln|w_{o1}|+|w_{o2}|)$$

Si $|v_o| \to 0$ $\quad$ alors $\quad |v_o|\tau \to 0$

Donc, si $|v_o|$ est inférieur à un certain ε, le dénominateur ne s'annulera pas et restera de l'ordre de l'unité. Nous aurons alors

$$|v(\tau,v_o)| \leqslant |v_o|$$

ce qui est conforme à l'hypothèse (i)

De plus, si $|w_o|$ est inférieur à ε et si $|\tau|$ est inférieur à $\ln(|w_{o1}|+|w_{o2}|)$, nous aurons :

$$A_i(v(\tau,v_o)) \leqslant C|v_o|$$

et

$$B_i(v(\tau,v_o)) \leqslant C|v_o|$$

puisque A_i et B_i sont de degré supérieur à 1.

Nous obtenons encore :

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant s(w_o)} \left[A_i(v(\tau,v_o)),B_j(v(\tau,v_o))\right] \leqslant A \quad \text{si} \quad |w_o| \leqslant \varepsilon$$

Ce lemme nous permet d'estimer l'accroissement des solutions de (I) par le théorème de comparaison.

Donnons un second lemme : en appliquant le théorème de comparaison et le premier lemme au système (I), nous obtenons :

$$\begin{cases} \max\limits_{1,2}\{|w_i(\tau,w_o)|\} \leqslant e^{\lambda_1\tau} \times \max\limits_{1,2}\{|w_{o_i}|\}\, e^{A\tau} \\ \max\limits_{3,4}\{|w_i(\tau,w_o)|\} \leqslant e^{-\lambda_1\tau} \times \max\limits_{3,4}\{|w_{o_i}|\}\, e^{A\tau} \end{cases} \quad \text{si } |\tau|\leqslant \ln(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)$$

Nous pouvons maintenant établir la continuité de R sur M^+.

Pour les deux premières composantes : (i = 1 ou 2)

$$^{i}|Rw_o-w_o| \leqslant \Big| e^{\lambda_1 s(w_o)}e^{-\lambda_1 s(wo)}w_{o_i}-w_{o_i} + e^{\lambda_1 s(w_o)}\int_o^{s(w_o)} e^{-\lambda_1 r} (A_i(v(r,T_1^{-s(w_o)}(w_o))w_1(r,T_1^{-s(w_o)}(w_o)) + B_i(v(r,T_1^{-s(w_o)}(w_o))W_2(r,T_1^{-s(w_o)}(w_o)))dr\Big|$$

où $w(r,w_o)$ est évalué le long des solutions du système d'équations différentielles (I).

Cette somme se réduit seulement à son troisième terme que nous allons désigner par (P_i).

En appliquant les deux lemmes du début du paragraphe, nous avons :

$$|(P_i)| \leqslant \left| e^{\lambda_1 s(w_0)} \int_0^{s(w_0)} e^{-\lambda_1 r} (|A_i(v(w_0,r))| + |B_i(v(w_0,r))|) \right.$$

$$\left. e^{-\lambda_1 s(w_0)} e^{\lambda_1 r} (|w_{01}| + |w_{02}|) e^{Ar} dr \right|$$

$$\leqslant \left| 2 \int_0^{s(w_0)} C |v_0| e^{A} (|w_{01}| + |w_{02}|) dr \right|$$

$$\leqslant \frac{2C\,|v_0|}{A} (|w_{01}| + |w_{02}|) |e^{As(w_0)} - 1|$$

$$\leqslant \frac{2\,C}{A} (|w_{01}| + |w_{02}|) |v_0| \left(\left(\frac{|w_{01}| + |w_{02}|}{|w_{03}| + |w_{04}|} \right)^{\frac{A}{2\lambda_1}} - 1 \right)$$

Cette expression tend bien vers zéro si $|w_0| + |w_0^2|$ tend vers 0, c-à-d se rapproche de M^+. Les deux premières composantes de R sont donc continues sur M^+.

Pour les deux dernières composantes : (i = 3 ou 4)

$$^i|Rw_0 - w_0| \leqslant | e^{-\lambda_1 s(w_0)} e^{\lambda_1 s(w_0)} wo_i - wo_i + e^{-\lambda_1 s(w_0)} \quad {}^{s(w_0)} \quad e^{\lambda_1 r}$$

$$(A_i(v(r, T_1^{-s(w_0)}(w_0)) w_3(r, T_1^{-s(w_0)}(w_0))$$

$$+ B_i(v(r, T_1^{-s(w_0)}(w_0)) w_4(r, T_1^{-s(wo)}(w_0)) dr|$$

Il nous suffit d'évaluer le troisième terme de cette somme que nous allons appeller (Q_i).

Si on applique le second lemme, nous trouvons :

$$|(Q_i)| \leqslant \left| \int_0^{s(w_0)} \left(A_i(v(r, T_1^{-s(wo)}(w_0)) wo_3 + B_i(v(r, T_1^{s(wo)}(w_0)) wo_4 \right) \right.$$

$$\left. \times e^{Ar} dr \right|$$

Par le premier lemme, nous obtenons ensuite :

$$|(Q_i)| \leqslant \left| \int_0^{s(w_o)} e^{Ar} \; 2C|v_o|(|wo_3|+|wo_4|)dr \right|$$

$$\leqslant \frac{2\ C}{A}(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)|v_o| \left(\left(\frac{|w_{o_1}|+|w_{o_2}|}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} \right)^{\frac{A}{2\lambda_1}} - 1 \right)$$

Puisque $|v_o| \to 0$ comme $|w_{o_1}|+|w_{o_2}|$ si $|w_{o_1}|+|w_{o_2}| \to 0$ nous avons que $|(Q_i)| \to 0$ si $|w_{o_1}|+|w_{o_2}| \to 0$.

Les deux dernières composantes de R sont bien continues sur M^+.

La continuité de R sur M^- s'établit de façon identique.

8. Dérivabilité du changement de variables R sur une boule de rayon ε centrée à l'origine.

Malheureusement, le changement de variables R n'est pas dérivable partout. Sur $R^4 \setminus \{M^+, M^-\}$, ce changement de variables est dérivable car $s(w_o)$, $T_1^{-s(w_O)}$, $T^{s(wo)}$ sont dérivables. Mais sur M^+ et M^-, il y a des problèmes car R a été défini comme l'identité : certaines composantes sont dérivables, d'autres ne le sont pas. Mais, les deux fonctions des composantes suivantes ${}^1Rw_o\,{}^3Rw_o$ et ${}^2Rw_o\,{}^3Rw_o$ sont dérivables partout. Il est essentiel pour ce qui suivra que ces deux fonctions soient dérivables partout.

Considérons l'exemple suivant qui est une situation particulière simplifiée à deux composantes et où nous pouvons calculer R de façon analytique.

Prenons le système d'équations différentielles suivant, provenant d'un Hamiltonien $H(w_1,w_2) = -\lambda_1 w_1 w_3 - w_1 w_3$:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 + (w_1 w_3) w_1 \\ \dot{w}_3 = -\lambda_1 w_3 - (w_1 w_3) w_3 \end{cases}$$

et les systèmes d'équations linéarisées :

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 \\ \dot{w}_3 = -\lambda_1 w_3 \end{cases}$$

Etant donné que $w_1(\tau) \times w_3(\tau) = w_{01} w_{03}$, nous avons

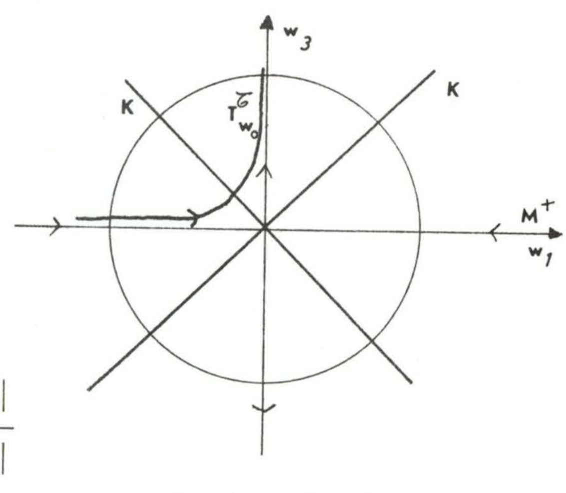
$${}^1T^\tau w_o = e^{(\lambda_1 + w_{01} w_{03})\tau} \times w_{01}$$

$${}^3T^\tau w_o = e^{-(\lambda_1 + w_{01} w_{03})\tau} \times w_{03}$$

Calculons T_1^τ :

$${}^1T_1^\tau w_o = e^{\lambda_1 \tau} \times w_{01}$$

$${}^3T_1^\tau w_o = e^{-\lambda_1 \tau} \times w_{03}$$



Nous avons $s(w_o) = \dfrac{1}{2\lambda_1} \ln \dfrac{|w_{o1}|}{|w_{o2}|}$

Nous savons alors calculer $Rw_o = T^{s(w_o)} T_1^{-s(w_o)} w_o$

$${}^1Rw_o = w_{o1} e^{\frac{w_{01} w_{03} s(w_o)}{2}}$$

$${}^3Rw_o = w_{o3} e^{-\frac{w_{01} w_{03} s(wo)}{2}}$$

Si on calcule la dérivée partielle de la seconde composante par rapport à w_{01}, nous obtenons :

$$\frac{\partial\, {}^3Rw_o}{\partial w_{01}} = -\frac{w_{03}}{2}^2 \left(s(w_o) + \frac{w_{01}}{2\lambda_1 |w_{01}|}\right) e^{-w_{01} w_{03} s(w_o)}$$

Nous remarquons que $\dfrac{\partial\, {}^3Rw_o}{\partial w_{01}}$ tend vers l'infini si $|w_{01}| \to 0$ mais que ${}^1Rw_o \dfrac{\partial\, {}^3Rwo}{\partial w_{01}}$ tend vers zéro si $|w_{01}| \to 0$ comme $|w_{01}| \ln |w_{03}|$

Nous pourrions montrer ainsi que, dans ce cas particulier, la fonction ${}^1Rw_o\, {}^3Rw_o$ est dérivable partout.

Examinons maintenant les dérivées des composantes sur M^+ :

a) Pour les dérivées de ${}^iRw_o$ (i=1 ou 2) par rapport à wo_i (i=1 ou 2) il n'y a pas de problème.

$$\frac{\partial^i |Rw_o - w_o|}{\partial wo_i} = \frac{\partial (P_i)}{\partial wo_i} = 1_a + 2_a + 3_a \quad \text{où}$$

$$|1_a| = |\lambda_1 s(w_o) s_{wo_i}(w_o) \times (P_i)| \leqslant |\lambda_1 K \ln |w_{01}| + |w_{02}| \times \frac{2\,C}{A}\left(|w_{01}| + |w_{02}|\right)$$

$$\times |v_o| \left(\left(\frac{|w_{01}| + |w_{02}|}{|w_{03}| + |w_{04}|}\right)^{\frac{A}{2\lambda_1}} - 1\right)$$

$$\leqslant \left| \lambda_1 K |v_o| \ln\left(|w_{01}| + |w_{02}|\right) \times \left(\frac{|w_{01}| + |w_{02}|}{|w_{03}| + |w_{04}|}^{\frac{A}{2\lambda_1}} - 1\right) \right|$$

Ce terme tend bien vers zéro si $|w_{01}| + |w_{02}|$ tend vers zéro comme $x \ln(x) \to 0$ si $x \to 0$

$$|2_a| \leqslant |e^{\lambda_1 s(w_o)} \frac{1}{|w_{o_1}|+|w_{o_2}|} e^{-\lambda_1 s(w_o)} (A_i(v,s(w_o),v_o))w_1(s(w_o),w_o e^{-\lambda_1 s(w_o)}$$

$$+ B_i(v(s(w_o),v_o))w_2(s(w_o),w_{o2}e^{-\lambda_1 s(w_o)}))| \leqslant |2e^{As(w_o)} C|v_o||$$

qui tend vers zéro si $|w_{o_1}|+|w_{o_2}| \to 0$

$$|3_a| \leqslant e^{\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} e^{-\lambda_1 r} \frac{\partial}{\partial wo_i}\Big(A_i(v(r,v_o))w_1(r,e^{-\lambda_1 s(w_o)} w_{o1})$$

$$+ B_i(v(r,v_o))w_2(r,e^{-\lambda_1 s(w_o)} w_{o2})\Big)_{|w_o} dr$$

$$\leqslant e^{\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} 2C\, e^{-\lambda_1 r} |v_o| \frac{\partial\left(w_1(r,e^{-\lambda_1 s(w_o)} w_{o1})+w_2(r,e^{-\lambda_1 s(w_o)} w_{o2})\right)}{\partial wo_i} dr$$

$$+ e^{\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} 2e^{-\lambda_1 r} e^{\lambda_1 r} e^{-\lambda_1 s(w_o)} e^{Ar} (|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)C(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)dr$$

$$\leqslant e^{\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} 2Ce^{-\lambda_1 r} |v_o| e^{\lambda_1 r} (2e^{-\lambda_1 s(w_o)} + 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 s(w_o)} s(w_o) \frac{1}{|w_{o1}|+|w_{o2}|}$$

$$(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)\, dr + \int_0^{s(w_o)} 2C(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)e^{Ar} dr$$

$$\leqslant \int_0^{s(w_o)} 4C\,|v_o|dr + \int_0^{s(w_o)} 4C\lambda_1|v_o|s(w_o)dr + \int_0^{s(w_o)} 2C\,(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)dr$$

$$\leqslant 4C\, s(w_o)|v_o| + 4\lambda_1 C|v_o|s^2(w_o) + \frac{2C}{A}(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)(e^{As(w_o)} - 1)$$

Cette somme tend vers zéro si $|w_o|$ tend vers zéro comme $x\ln^2(x)$ tend vers zéro si x tend vers zéro.

b) Pour ${}^{i}Rw_o$ (i=1 ou 2), la dérivation par rapport à Wo_j (j=3 ou 4) ne pose aucun ennui.

$$\frac{\partial^i |Rw_o - w_o|}{\partial w_{oj}} = \frac{\partial (P_i)}{\partial w_{oj}} = 1_b + 2_b + 3_b \quad \text{où}$$

$$|1_b| \leqslant |\lambda_1 s(w_o) s'_{wo_i}(w_o) \times (P_i)| \leqslant \left| \lambda_1 s(w_o) \frac{1}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} \times (P_i) \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{2\ C}{A} \frac{|w_{o_1}|+|w_{o_2}|}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} \quad |v_o| \left(\left(\frac{|w_{o_1}|+|w_{o_2}|}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} \right)^{\frac{A}{2\lambda_1}} - 1 \right) s(w_o) \right|$$

Cette expression tend vers 0 comme $x^2 \ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

$$|2_b| \leqslant \left| e^{\lambda_1 s(w_o)} \frac{1}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} e^{-\lambda_1 s(w_o)} \Big(A_i(v(s(w_o),v_o) w_1(s(w_o),w_{o1} e^{-\lambda_1 s(w_o)} \right.$$

$$\left. + B_i(v(s(w_o),v_o) w_2(s(w_o),w_{o2} e^{\lambda_1 s(w_o)}) \Big) \right|$$

Cette expression tend vers 0 car elle vaut $|2_a| \times \dfrac{|w_{o_1}|+|w_{o_2}|}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|}$

$$|3_b| \leqslant \left| e^{\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} e^{-\lambda_1 r} e^{Ar} (|w_{o1}|+|w_{o2}|) e^{-\lambda_1 s(w_o)} \frac{\partial (A_i(v(r,v_o)+B_i(v(r,v_o))}{\partial wo_j} dr \right|$$

$$\leqslant \left| \int_0^{s(w_o)} 2Ce^{Ar} (|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)^2 dr \right| \leqslant \frac{2\ C}{A} (|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)^2 (e^{As(w_o)} - 1)$$

Ceci tend bien vers 0 si $(|w_{o_1}|+|w_{o_2}| \to 0$

c) Des problèmes vont apparaître pour les dérivées ${}^{j}Rw$ (j=3 ou 4) par rapport à wo_i (i=1 ou 2).

$$\frac{\partial^j |Rw_o - w_o|}{\partial wo_i} = \frac{\partial(Q_j)}{\partial wo_i} = 1_c + 2_c + 3_c \quad \text{où}$$

$$|1_c| \leqslant |\lambda_1 s(w_o) s_{wo_i}(w_o) \times Q_j| \leqslant \left| \lambda_1 \frac{s(w_o)}{|w_{o1}|+|w_{o2}|} \times (Q_j) \right|$$

Ici, malheureusement, cela ne tend pas vers zéro si w_o tend vers M^+. Mais, on a que

$${}^{i}|Rw_o - w_o| \times |1_c| \quad (\leqslant |1_c| \times |(P_i)|)$$

tend vers zéro si $|w_{o1}|+|w_{o2}|$ tend vers zéro.

$$|2_c| \leqslant \left| \frac{1}{|w_{o1}|+|w_{o2}|} e^{As(w_o)} (A_j(v(s(w_o,v_o))+B_j(v(s(w_o),v_o))) \right|$$

$$\leqslant \frac{2C|v_o|}{|w_{o1}|+|w_{o2}|} (|w_{o3}|+|w_{o4}|) e^{As(w_o)}$$

Encore une fois, cela ne tend pas vers zéro si w_o tend vers M^+. mais, ${}^{i}|Rw_o - w_o| \times |2_c|$ $(\leqslant |2_c| \times |(P_i)|)$ tend vers zéro si $|w_{o1}|$ + $|w_{o2}|$ tend vers zéro.

$$|3_c| \leqslant \left| e^{-\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} e^{\lambda_1 r} e^{-\lambda_1 s(w_o)} e^{-\lambda_1 r} e^{Ar} (|w_{o3}|+|w_{o4}|) \frac{\partial(A_j(v(r,v_o)+B_j(v,v_o))}{\partial wo_i} dr \right.$$

$$\leqslant \left| \int_0^{s(w_o)} 2C(|w_{o3}|+|w_{o4}|)^2 dr \right| \leqslant 2C(|w_{o3}|+|w_{o4}|)^2 \, s(w_o)$$

Si $|w_{o_1}|+|w_{o_2}|$ tend vers zéro, cela ne tend pas vers zéro, mais $|3_c| \times {}^i|Rw_o - w_o|$ tend lui vers zéro.

d) De nouveau, ici, il n'y a aucun problème pour les dérivées de ${}^jRw_o$ (j=3 ou 4) par rapport à wo_j (j=3 ou 4)

$$\frac{\partial^j |Rw_o - w_o|}{\partial wo_j} = \frac{\partial (Q_j)}{\partial wo_j} = 1_d + 2_d + 3_d$$

$$|1_d| \leqslant |\lambda_1 \frac{s(w_o)}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} \times |(Q_j)||$$

Donc, cela tend bien vers zéro si w_o tend vers M^+.

$$|2_d| \leqslant |\frac{e^{-\lambda_1 s(w_o)}}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} e^{\lambda_1 s(w_o)} | (A_j(v(s(w_o),v_o)w_3(s(w_o),e^{\lambda_1 s(w_o)} wo_j)$$

$$+ B_j(v(s(w_o),v_o)w_4(s(w_o),e^{\lambda_1 s(w_o)} wo_j)) | \leqslant \left| 2C|v_o| e^{As(w_o)} \right|$$

qui tend vers zéro si w_o tend vers M^+.

$$|3_d| \leqslant |e^{-\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} Ce^{\lambda_1 r} (|w_{o_3}|+|w_{o_4}|)e^{Ar} e^{-\lambda_1 r} e^{\lambda_1 s(w_o)} (|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)dr|$$

$$+ |e^{-\lambda_1 s(w_o)} \int_0^{s(w_o)} 2Ce^{\lambda_1 r} |v_o| e^{-\lambda_1 r} (2e^{\lambda_1 s(w_o)} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 s(w_o)} \frac{s(w_o)}{|w_{o_3}|+|w_{o_4}|} (|w_{o_3}|+|w_{o_4}|))dr|$$

$$\leqslant \left| C(|w_{o_1}|+|w_{o_2}|)(|w_{o_3}|+|w_{o_4}|) \frac{e^{As(w_o)} - 1}{A} \right| + \left| 4C|v_o|(s^2(w_o) + s(w_o)) \right|$$

Cette somme tend bien vers zéro si $|w_{o_1}|+|w_{o_2}|$ tend vers zéro.

De même, nous pourrions montrer que Rw n'est pas dérivable sur M^- mais que les fonctions ${}^1Rw \times {}^3Rw$, ${}^2Rw \times {}^3Rw$ sont dérivables partout.

Pour résumer le paragraphe 8, écrivons les termes de la jacobienne qui existent sur M^+ et au voisinage de l'origine.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_2} & \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_4} \\ \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_2} & \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_4} \\ ? & ? & \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_4} \\ ? & ? & \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_4} \end{bmatrix}$$

Sur M^-, il y a aussi quatre éléments de la jacobienne qui n' existent pas.

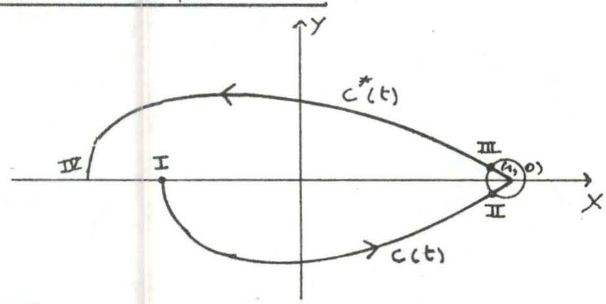
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^1 Rw}{\partial w_2} & ? & ? \\ \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^2 Rw}{\partial w_2} & ? & ? \\ \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_2} & \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^3 Rw}{\partial w_4} \\ \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_1} & \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_2} & \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_3} & \frac{\partial^4 Rw}{\partial w_4} \end{bmatrix}$$

CHAPITRE IV : EXISTENCE DE SOLUTIONS PERIODIQUES DU PROBLEME RESTREINT POUR DES VALEURS DU PARAMETRE μ PROCHE DE 1.

1. Introduction

Nous allons démontrer dans ce chapitre que pour des valeurs de μ proche de 1, le problème restreint des trois corps admet des solutions périodiques de seconde espèce selon la terminologie de Poincaré. Nous allons chercher des trajectoires coupant deux fois perpendiculairement l'axe X en raccordant des morceaux de trajectoires correspondant au problème des deux corps, c-à-d correspondant au paramètre μ valant 1.

2. Position et résolution du problème



Considérons le problème restreint des trois corps où le paramètre μ vaut 1. Pour cette valeur de μ, le problème restreint se réduit au problème des deux corps dont nous connaissons les solutions de façon analytique. Prenons deux solutions de ce problème coupant perpendiculairement l'axe X et correspondant au même niveau d'énergie h=T-U. L'une de ces solutions $C(t)$ aboutit au point (1,0) et l'autre $\overset{*}{C}(t)$ en part.

Considérons une boule B_{ε^2} de centre (1,0) et de rayon ε^2 (où ε est le même qu'au paragraphe 7 du chapitre III).

Appelons respectivement I et IV le point de concours de l'axe X et de respectivement $C(t)$ et $\overset{*}{C}(t)$.

Notons respectivement par II et III l'intersection de B_{ε^2} et respectivement C(t) et C(t).

En I, nous avons : $\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = 0 \\ y = 0 \\ \dot{y} = \dot{y}_1 \end{cases}$ et en IV : $\begin{cases} x = x_4 \\ \dot{x} = 0 \\ y = 0 \\ \dot{y} = \dot{y}_4 \end{cases}$

Maintenant, pour μ proche de 1, nous allons perturber les conditions initiales de C(t) et de C(t) de façon à ce qu'elles se raccordent et coupent perpendiculairement deux fois l'axe X aux environs de I et IV. Nous obtiendrons alors une trajectoire périodique car le symétrique d'une trajectoire est une trajectoire parcourue dans l'autre sens (cfr SZEBEHELY).

Prenons donc conditions initiales et finales perturbées I_δ et IV_δ de façon à ne pas modifier le niveau d'énergie h des trajectoires ni le fait qu'elles coupent perpendiculairement l'axe des X.

En I_δ nous avons : $\begin{cases} x = x_1+\delta x_1 \\ \dot{x} = 0 \\ y = 0 \\ \dot{y} = y_1+\delta\dot{y}(\delta x_1) \end{cases}$ et en IV_δ : $\begin{cases} x = x_4+\delta x_4 \\ \dot{x} = 0 \\ y = 0 \\ \dot{y} = \dot{y}_4+\delta\dot{y}(\delta x_4) \end{cases}$

Par continuité des solutions par rapport aux paramètres μ et aux conditions initiales et finales I et IV, pour μ proche de 1 et δx_1, δx_4 proches de 0, la trajectoire $C_{\delta,\mu}(t)$ partant de I_δ va arriver en $II_{\delta,\mu}$ sur B_{ε^2} près de II et la trajectoire $C_{\delta,\mu}(t)$ arrivant en IV_δ couper la boule B_{ε^2} en $III_{\delta,\mu}$ proche de IV.

En $II_{\delta,\mu}$, le point dans l'espace de phase aura pour coordonnées $Z_{II,\delta,\mu} = (x,y,\dot{x},\dot{y})(\delta x_1,\mu)$ et en $III_{\delta,\mu}$ $Z_{III,\delta,\mu} = (x,y,\dot{x},\dot{y})(\delta x_4,\mu)$

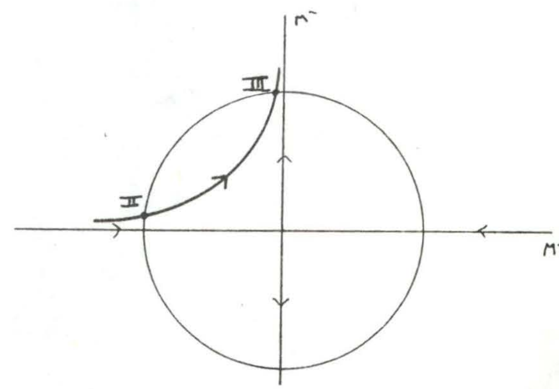
Aux coordonnées de $II_{\delta,\mu}$ et $III_{\delta,\mu}$ exprimées dans l'espace de phase classique, nous allons appliquer les transformations suivantes définies au chapitre III :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ \dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{d\tau}{dt}\ |2\zeta|^2]{\substack{\text{régulari-}\\ \text{sation}\\ z\,=\,\zeta^2+\mu}} \begin{pmatrix} \Xi\\ \P\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{transfor-}\\ \text{mation}\\ \text{diagonal.}\\ A}} \begin{pmatrix} \Xi_+\\ \P_+\\ \xi_+\\ \eta_+\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{transfor-}\\ \text{mation de}\\ \text{Lie l'}\\ \text{ordre N+1}\\ \text{suivie de}\\ \text{la transf.}\\ \text{tronquant}}} \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} w^N_1\\ w^N_2\\ w^N_3\\ w^N_4\end{pmatrix}$$

Les nouvelles coordonnées de $II_{\delta,\mu}$ et $III_{\delta,\mu}$ sont donc $w^N_{II,\delta,\mu}$ et $w^N_{III,\delta,\mu}$.

Dans la boule $\overline{B}_\varepsilon$ de rayon ε, la solution du système d'équations différentielles (II) est connue et vaut :

$$\begin{cases} w^N_1(\tau) = w^N_{01}e^{\lambda_1\tau}\\ w^N_2(\tau) = w^N_{02}e^{\lambda_1\tau}\\ w^N_3(\tau) = w^N_{03}e^{-\lambda_1\tau}\\ w^N_4(\tau) = w^N_{04}e^{-\lambda_1\tau}\end{cases}$$



En considérant les nouvelles coordonnées de $Z_{II,0,1}$, nous voyons que $w^N_{1,II,0,1}$ et $w^N_{2,II,0,1}$ sont nuls car lorsque τ grandit, $w^N_{1,0,1}(\tau)$ et $w^N_{2,0,1}(\tau)$ doivent s'annuler. Donc, $W^N_{II,0,1}$ est sur M^+. De même, nous remarquons que $W^N_{III,0,1}$ est sur M^-.

Nous allons maintenant, pour μ proche de 1, ajuster les paramètres δx_1 et δx_4 pour qu'une solution du système (II) passe par les points $w^N_{II,\delta,\mu}$ et $w^N_{III,\delta,\mu}$. Cet ajustement est possible : le système paramètrisé par $\tau,\delta x_1,\delta x_4$ est :

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases}
w^N_{1,III,\delta,\mu} = e^{\lambda_1 \tau} \; w^N_{1,II,\delta,\mu} \\
w^N_{2,III,\delta,\mu} = e^{\lambda_1 \tau} \; w^N_{2,II,\delta,\mu} \\
w^N_{3,III,\delta,\mu} = e^{-\lambda_1 \tau} w^N_{3,II,\delta,\mu} \\
w^N_{4,III,\delta,\mu} = e^{-\lambda_1 \tau} \; w^N_{4,II,\delta,\mu}
\end{cases}
$$

Quatre équations doivent être vérifiées dont l'une résulte des trois autres et de l'intégrale d'énergie; nous disposons de trois paramètres τ, δx_1, δx_4. Cependant, il convient d'être prudent car il y a des problèmes de différentiabilité sur M^+ et M^- (correspondant à $\delta x_1=0$ et $\delta x_4=0$) comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

Construisons maintenant, à partir du système (III), le système d'équations suivant :

$$
\begin{cases}
w^N_{1,II,\delta,\mu} \times w^N_{3,II,\delta,\mu} = w^N_{1,III,\delta,\mu} \times w^N_{3,III,\delta,\mu} = F_1(\delta x_1, \delta x_4, \mu) \\
w^N_{2,II,\delta,\mu} \times w^N_{3,II,\delta,\mu} = w^N_{2,III,\delta,\mu} \times w^N_{3,III,\delta,\mu} = F_2(\delta x_1, \delta x_4, \mu)
\end{cases}
$$

A ce système d'équations, nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites.

Vérifions les conditions de ce théorème :

a) $F_1(0,0,1) = F_2(0,0,1) = 0$

car $w^N_{1,II,0,1} = w^N_{2,II,0,1} = w^N_{3,III,0,1} = 0$

b) le jacobien $\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(\delta x_1,\delta x_4)}\right|_{\substack{\mu=1 \\ \delta x_1=0 \\ \delta x_4=0}}$ doit être différent de zéro

Remarquons que cette expression a un sens car les fonctions $W^N_1 \times W^N_3$ et $w^N_2 \times w^N_3$ sont bien dérivables dans $\overline{B}_\varepsilon$ (chap.III, § 7).

Notre condition est donc :

$$\frac{\partial(w^N_{1,II,\delta,\mu} \times w^N_{3,II,\delta,\mu})}{\partial(\delta x_1)} \times \frac{\partial(w^N_{2,III,\delta,\mu} \times w^N_{3,III,\delta,\mu})}{\partial(\delta x_4)} -$$

$$\frac{\partial(w^N_{2,II,\delta,\mu} \times w^N_{3,II,\delta,\mu})}{\partial(\delta x_1)} \times \frac{\partial(w^N_{1,III,\delta,\mu} \times w^N_{3,III,\delta,\mu})}{\partial(\delta x_4)} \neq 0$$

Cette hypothèse devra donc être vérifiée dans chaque cas particulier.

Appliquons le résultat du théorème des fonctions implicites.

Si μ est proche de 1, il existe $\delta x_1(\mu)$ et $\delta x_4(\mu)$ tels que le système (I) est vérifié.

Montrons maintenant que les points $W^N_{II,\delta(\mu),\mu}$ et $W^N_{III,\delta(\mu),\mu}$ satisfont le système (III).

$w^N_{2,III,0,1}$ et $w^N_{1,III,0,1}$ ne peuvent pas être nuls simultanément puisque le point III n'est pas à l'origine.

Supposons que $w^N_{2,III,0,1}$ ne soit pas nul. Dans une remarque à la fin de cette discussion, nous examinerons le cas où $w^N_{2,III,0,1}$ est nul mais $w^N_{1,III,0,1}$ ne l'est pas.

Nous allons maintenant construire $T(\mu)$ tel que

$$w^N_{2,III,\delta(\mu),\mu} = w^N_{2,II,\delta(\mu),\mu}\, e^{\lambda_1 T(\mu)} \qquad (1)$$

Cela est toujours possible si $w^N_{2,III,\delta(\mu),\mu}$ et $w^N_{2,II,\delta(\mu),\mu}$ ne sont pas nuls et sont de même signe.

Nous avons déjà supposé que $w^N_{2,III,\delta(\mu),\mu}$ est non nul. Afin d'obtenir que $w^N_{2,II,\delta(\mu),\mu}$ n'est pas nul, nous supposerons en outre que :

$$\left.\frac{dw^N_{2,II,\delta(\mu),\mu}}{d\mu}\right|_{\mu=1} \neq 0$$

Enfin, si ces quantités ne sont pas nulles, nous pouvons toujours nous arranger pour qu'elles aient le même signe puisque la transformation $Z(\zeta) = \zeta^2 + \mu$ ne définit pas de façon unique le signe de ζ.

Maintenant, avec le système d'équations (III) et la relation (1), nous avons que :

$$(IV)\quad \begin{cases} w^N_{1,III,\delta(\mu),\mu} = e^{\lambda_1 T(\mu)}\, w^N_{1,II,\delta(\mu),\mu} \\ w^N_{2,III,\delta(\mu),\mu} = e^{\lambda_1 T(\mu)}\, w^N_{2,II,\delta(\mu),\mu} \\ w^N_{3,III,\delta(\mu),\mu} = e^{-\lambda_1 T(\mu)}\, w^N_{3,II,\delta(\mu),\mu} \end{cases}$$

Pour obtenir l'ajustement des paramètres, nous devons encore vérifier que :

$$w^N_{4,III,\delta(\mu),\mu} = e^{-\lambda_1 T(\mu)}\, w^N_{4,II,\delta(\mu),\mu}$$

Ceci va nous être donné par l'Hamiltonien $\overline{H}(\Xi_+, \P_+, \xi_+, \eta_+)$. Celui-ci, exprimé dans les variables (w^N) devient :

$$\overline{H}(w^N) = -\lambda_1 w^N_1 w^N_3 - \lambda_1 w^N_2 w^N_4 + F(v) + O(||w||^{N+2})$$

Nous avons qu'en II et en III, $\overline{H}$ a la même valeur (en fait, il est nul).

Pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, calculons $\partial\overline{H} / \partial w^N_4$:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial w^N_4} = -\lambda_1 w^N_2 + \frac{\partial F(v)}{\partial w^N_4} + O(||w||^{N+1})$$

En III, cette expression est bien différnete de zéro car $w^N_{2,III,\delta(\mu),\mu}$ est non nul et les autres termes sont plus petits que $\lambda_1 w^N_2$.

w^N_4 peut donc être exprimé en fonction des autres composantes c-à-d $w^N_4 = F(w^N_1, w^N_2, w^N_3)$.

Nous avons bien que $w^N_{4,II,\delta(\mu),\mu} \; e^{-\lambda_1 T(\mu)} = w^N_{4,III,\delta(\mu),\mu}$ puisque le système (II) est vérifié. Les points II et III sont donc bien raccordés par une trajectoire.

Remarque

Si la coordonnée $w^N_{2,III,0,1}$ était nulle, l'ajustement des paramètres devrait se dérouler d'une autre façon. Les équations F_1 et F_2 seraient remplacées par le système suivant :

$$\begin{cases} w^N_{1,II,\delta,\mu} \times w^N_{4,II,\delta,\mu} = w^N_{1,III,\delta,\mu} \times w^N_{4,III,\delta,\mu} = F_3(\delta x_1, \delta x_4, \mu) \\ w^N_{2,II,\delta,\mu} \times w^N_{4,II,\delta,\mu} = w^N_{2,III,\delta,\mu} \times w^N_{4,III,\delta,\mu} = F_4(\delta x_1, \delta x_4, \mu) \end{cases}$$

La condition de régularité du Jacobien devrait être modifiée de façon similaire.

Le temps de parcours $T(\mu)$ pour passer du point II au point III serait calculé par :

$$w^N_{1,III,\delta(\mu),\mu} = w^N_{1,II,\delta(\mu),\mu} \; e^{\lambda_1 T(\mu)}$$

Cette fois, nous devons supposer que

$$\left. \frac{dw^N_{1,II,\delta(\mu),\mu}}{d\mu} \right|_{\mu=1} \neq 0$$

Enfin, la preuve de raccordement de la dernière coordonnée (qui est cette fois w^N_3) se montre de façon analogue.

3. Existence des solutions périodiques de seconde espèce

Au paragraphe précédent, nous avons pu relier par une trajectoire deux trajectoires parcourues en sens différent et coupant l'axe X si μ est proche de 1. Nous avons donc une trajectoire coupant deux fois l'axe X, ce qui est une condition suffisante de périodicité pour le

problème restrient (car le symétrique d'une trajectoire est une trajectoire).

La période de la trajectoire obtenue est donc égale au double du temps mis pour aller du point $I_{\delta(\mu)}$ au point $IV_{\delta(\mu)}$.

B I B L I O G R A P H I E

SZEBEHELY V.G. - Theory of orbits : the restricted problem of three bodies.
Academic Press. New York, 1967.

HARTMAN - Ordinary differential equations.
John Wiley. New York, 1964

WINTNER A. - The analytical foundations of celestial mechanics.
Princeton, New Jersey, 1947.

ARENSTOF R.F. - Am.J.Math. 1963.85,27-35

BIRKHOFF G.D. - Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1915, 39, 265-334

BREAKWELL J.V. and PERKO L.M. - Progress in astronautics and aeronautics. 1965, 17, Academic Press, 160-180

BREAKWELL J.V. and PERKO L.M. - Celes. Mech. 1974, 9, 437-450

GUILLAUME P. - Doctoral dissertation, 1971, University of Liège

GUILLAUME P. - Celes. Mech. 1975a, 11, 213-254

GUILLAUME P. - Celes. Mech. 1975b, 11, 449-467

HENON M. - Bull. Astron. (Paris), 1968, 3, 377-402

PERKO L.M. - Doctoral dissertation, 1964, Stanford University

PERKO L.M. - Soc. Ind. Appl. Math.,J.Appl.Math., 1967, 15, 738-753

PERKO L.M. - Soc. Ind. Appl. Math.,J.Appl.Math., 1974, 27, 200-237

PERKO L.M. - Rocky Mountain J. Math., 1976, 6, 130-145

POINCARE H. - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1899, Gauthier-Villars, Paris.

HENRARD J. - Cours de Mécanique Céleste. Facultés N.D. de la Paix. Namur.