THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Treillis de Gelfand et bases dans les espaces de Bargmann-Moshinskyy

Evrard, Bernadette; Galloy, Françoise

Award date:
1978

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX

NAMUR

ANNÉE ACADÉMIQUE 1977 - 1978

TREILLIS DE GEL'FAND
ET
BASES DANS LES ESPACES
DE BARGMANN-MOSHINSKY.

Laboratoire
de
Physique mathématique
et de
Physique du solide.

Promoteur :
André RONVEAUX

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Licencié en Sciences Mathématiques

par

Bernadette EVRARD

Françoise GALLOY

Rien n'est en soi bon ni mauvais ;
tout dépend de ce qu'on en pense.

Shakespeare

Nous exprimons notre vive reconnaissance à Monsieur André Ronveaux pour sa gentillesse et son intérêt constant à notre travail.

Nous adressons nos remerciements à Madame Marie-Claire Dumont et aux membres du département de mathématique pour les informations fournies.

Galloy Françoise Bernadette Evrard

INTRODUCTION

La théorie des représentations de groupes est un outil important de la physique. Les fonctions spéciales telles que les fonctions de Legendre, Bessel, Hypergéométriques sont des éléments matriciels ou sont reliés, aux éléments matriciels de groupes linéaires ((15),(7)). L'exemple (p. 54) en est une illustration.

En particulier, les représentations du groupe U(n) dans des espaces de fonctions sont d'un grand intérêt en physique atomique, nucléaire et également en physique des particules élémentaires ((12)).

Les articles les plus récents sur ce sujet sont dûs à Moshinsky ((9)), Baird et Biedenharn((16)) et à Louck ((12)).

La dernière mise au point a été donnée par J. Henrich ((5)) qui introduit une formulation élégante des espaces de représentations de Bargmann-Moshinsky et de leurs bases.

Toutefois, ces approches présentent la même difficulté : la complexité des résultats augmente très rapidement avec la dimension n des groupes U(n) (complexité due essentiellement aux écritures encombrées d'indices caractérisant les différents espaces de représentation). Il est donc intéressant d'"alléger" ces écritures et permettre ainsi une utilisation plus facile des vecteurs des espaces de représentations.

Dans cet objectif, J.P. Gazeau ((3)) associe aux treillis de Gel'fand (voir déf. p. 9) des polynômes homogènes d'un grand nombre de variables.

Ces polynômes appelés exponentielles de treillis de Gel'fand sont définis comme solutions d'une équation aux différences finies (voir p. 17). Ils se notent x^T.

En fait, ils généralisent la notion classique d'exponentielle où x est maintenant un ensemble de $\binom{2n}{n}$ conditions initiales et T un treillis de Gel'fand.

La théorie des représentations des U(n) est reliée à ces polynômes en remplaçant les $\binom{2n}{n}$ variables par les $\binom{2n}{n}$ sous-déterminants de la matrice U(n).

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude des treillis de Gel'fand et de leur exponentielle.

Après avoir exposé ces concepts définis par J-P. Gazeau ((3)), nous avons utilisé le théorème (II-4) pour concevoir un programme. Ce programme associe à un treillis de dimension quelconque son exponentielle.

Grâce à une méthode décrite par J-P Gazeau (procédé de pelage, p. 18) nous avons pu écrire l'expression analytique générale de l'exponentielle d'un treillis de Gel'fand de dimension 3.

L'objectif de la seconde partie est de décrire la construction des bases des espaces de Bargmann-Moshinsky selon Henrich ((5)).

La définition de ces espaces est l'objet du premier chapitre, le second chapitre précise quelques concepts fréquemment utilisés en théorie des représentations.

Le troisième chapitre est une introduction à la notion de "Reproducing kernel" d'espaces vectoriels et d'un opérateur sur ces espaces. En particulier, l'opérateur de branchement défini à partir du théorème de branchement (p. 71, "branching law") et son "Reproducing kernel" jouent un rôle essentiel.

Comme on peut le voir dans le chapitre IV (deuxième partie), ils permettent à Henrich de construire les bases des espaces de Bargmann-Moshinsky par un processus inductif.

Dans la troisième partie de ce travail, est énoncée la conjoncture émise par J-P Gazeau ((3)) concernant le rôle des exponentielles de treillis dans la recherche des bases des espaces de Bargmann-Moshinsky. Nous présentons dans le cadre de ce travail une vérification de cette hypothèse dans le cas particulier où n = 3 (p. 106). D'autres vérifications ont été obtenues pour n > 3 dans des cas particuliers ((3)).

Nous avons rédigé en commun la première partie de ce travail ainsi que l'annexe 1.

Dans la seconde partie, Bernadette Evrard s'est attachée principalement à la rédaction du chapitre I, des points 2 et 4 du chapitre III ainsi que des annexes 2 et 3.

Françoise Galloy a surtout rédigé le chapitre II, les points 1 et 3 du chapitre III, le chapitre IV de la seconde partie, l'annexe 4 et la troisième partie du mémoire.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES TREILLIS

A. Définitions

On appelle *ensemble ordonné E*, l'ensemble sur lequel on définit une relation d'ordre $x\ R\ y$ vérifiant

A1. $\forall x \in E \quad x\ R\ x$ (réflexivité)

A2. Si $x\ R\ y$ et $y\ R\ x$ alors $x = y$ (antisymétrie)

A3. si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$ alors $x\ R\ z$ (transitivité)

Notation : $x\ R\ y$ se représente graphiquement par $x \longrightarrow y$

On appelle *chaîne* C un ensemble ordonné dont les éléments vérifient :

A4. $\forall x,y \in C$ on a $x\ R\ y$ ou $y\ R\ x$ (ordre total)

Etant donné $x, y \in E$, on définit

La borne inférieure de $\{x,y\}$ (on la note inf (x,y)) comme suit

D1. $$z = \inf(x,y) \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} z\ R\ x \text{ et } z\ R\ y \text{ et} \\ \forall w \text{ vérifiant } w\ R\ x \text{ et} \\ w\ R\ y \quad \text{on a } w\ R\ z \end{cases}$$

La borne supérieure de $\{x,y\}$ (on la note sup (x,y)) comme suit

D2. $$z = \sup(x,y) \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} x\ R\ z \text{ et } y\ R\ z \text{ et} \\ \forall w \text{ vérifiant } x\ R\ w \text{ et} \\ y\ R\ w \quad \text{on a } z\ R\ w \end{cases}$$

D3. On appelle *treillis* P un ensemble ordonné P dans lequel deux éléments quelconques x et y ont une borne inférieure et une borne supérieure dans P

Dans un treillis P on peut définir 2 lois de composition interne

$$\wedge : P \times P \rightarrow P$$
$$(x,y) \rightarrow x \wedge y \equiv \inf(x,y)$$
$$\vee : P \times P \rightarrow P$$
$$(x,y) \rightarrow x \vee y \equiv \sup(x,y)$$

Exemples :

a. $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A, ordonné par l'inclusion des ensembles est un treillis
n'est pas une chaîne.

b. $\mathbb{N}$ ordonné par la relation "plus petit ou égal" ($\leqslant$)
est un treillis
est une chaîne
diagramme de la relation " $\leqslant$ " dans l'ensemble des nombres $\{1, \ldots, 10\}$:

$\uparrow 10$
$\uparrow 9$
$\uparrow 8$
$\uparrow 7$
$\uparrow 6$
$\uparrow 5$
$\uparrow 4$
$\uparrow 3$
$\uparrow 2$
$\uparrow 1$

$6 = 6 \vee 5$

$5 = 5 \wedge 6$

c. $\mathbb{N}$ ordonné par la relation $p \, R \, q \iff \exists \, r \in \mathbb{N} \quad p.r = q$

est un treillis

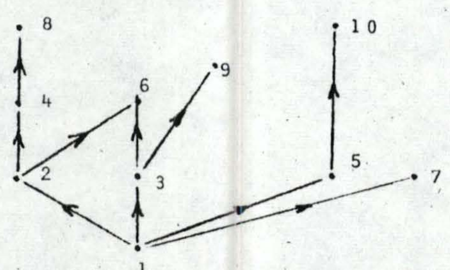
n'est pas une chaîne

$E^* = \{1, \ldots, 10\}$ ordonné par la relation R

n'est ni un treillis

ni une chaîne.

diagramme de R dans E^*

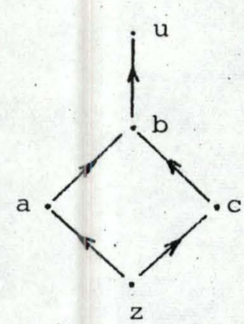


$3 = 6 \wedge 9$

$6 = 2 \vee 3$

$8 \vee 9 \notin E^*$

d. $\{u, a, b, c, z\}$ muni de la relation d'ordre définie par le diagramme suivant est un treillis



Dans un ensemble ordonné P, les opérations inf($\wedge$) et sup($\vee$) satisfont, en vertu de leur définition, aux propriétés suivantes. Chaque fois que les expressions en jeu existent :

P1. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (idempotence)

P2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (commutativité)

P3. $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$, $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ (associativité)

P4. $x\wedge(x\vee y) = x\vee(x\wedge y) = x$ (absorption)

On appelle *treillis distributif* P un treillis dans lequel chacune des deux opérations inf($\wedge$) et sup($\vee$) est distributives par rapport à l'autre, c'est-à-dire :

A5. $\forall x, y, z \in P$: $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y) \wedge (x\vee z)$

A5'. $\forall x, y, z \in P$: $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

On peut remarquer que A5. <=> A5'.

En effet A5. ⇒ A5'.

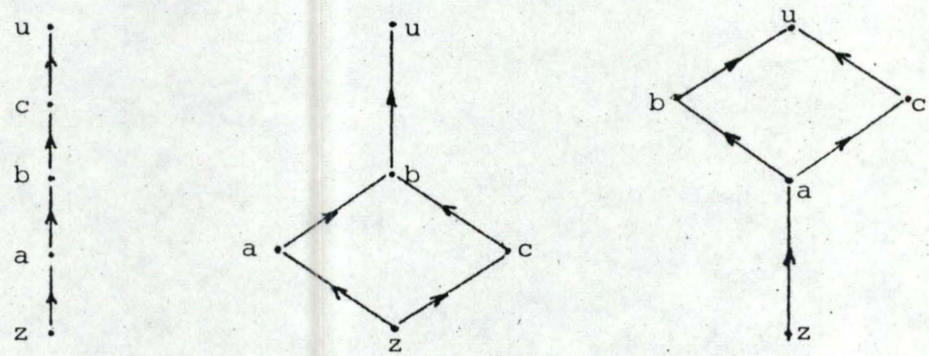
$$
\begin{aligned}
(x\wedge y) \vee (x\wedge z) &= [(x\wedge y)\vee x]\wedge [(x\wedge y) \vee z] && \text{par A5.}\\
&= x \wedge [(x\wedge y) \vee z] && \text{par P4.}\\
&= x \wedge [(z\vee x) \wedge (z\vee y)] && \text{par A5. et P2.}\\
&= [x \wedge(z\vee x)] \wedge (z\vee y) && \text{par P3.}\\
&= x \wedge(z\vee y) && \text{par P4.}\\
&= x \wedge(y\wedge z) && \text{par P2.}
\end{aligned}
$$

La réciproque A5'=> A5 est immédiate puisque les propriétés P1. - P4. sont vraies pour $\vee$ et $\wedge$.

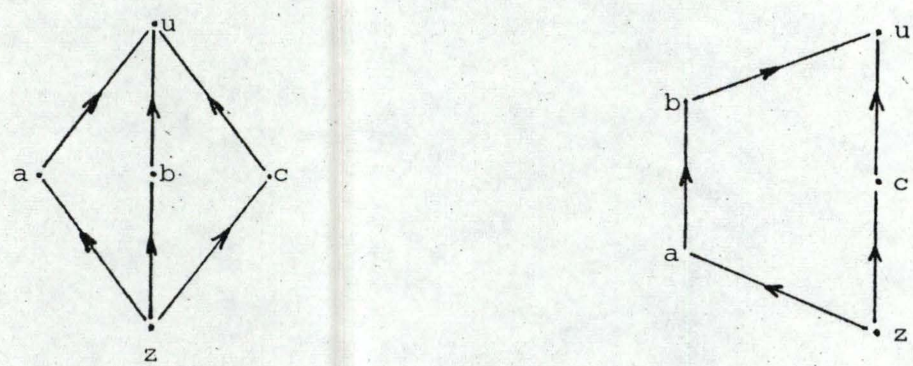
Exemple :

Avec cinq éléments distincts, on peut former au moyen d'une relation d'ordre :

a. les treillis distributifs



b. les treillis non distributifs



$a \vee (b \wedge c) = a \vee z = a$	$a \vee (b \wedge c) = a \vee z = a$
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = u \wedge u = u$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge u = b$
et $a \neq u$	et $b \neq a$

P5. Les éléments d'un treillis quelconque satisfont à l'inégalité modulaire : $x \; R \; z$ entraîne $x \vee (y \wedge z) \; R \; (x \vee y) \wedge z$

En effet, il est clair que $x \; R \; (x \vee y)$

comme $x \; R \; z$, $x \; R \; ((x \vee y) \wedge z)$ (1) par déf. de $\wedge$

d'autre part $(y \wedge z) \; R \; y \; R \; (x \vee y)$

et $(y \wedge z) \; R \; z$

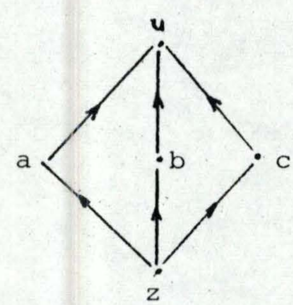
d'où $(y \wedge z) \; R \; (x \vee y) \wedge z$ (2)

donc $x \vee (y \wedge z) \; R \; (x \vee y) \wedge z$ par (1) et (2), et déf de $\wedge$

> On appelle *treillis modulaire* P un treillis qui satifait l'identité suivante :
>
> $\forall x, z \in P$ si $x \; R \; z$ on a $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \quad \forall y \in P$

Exemple :

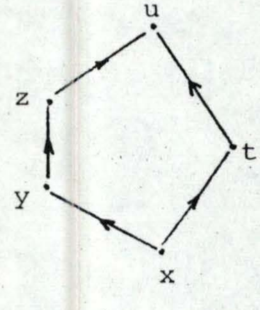
a. Le treillis



est modulaire

mais non distributif.

b. Le treillis



est non modulaire

$y \; R \; z$ mais $y \vee (t \wedge z) \neq (y \vee t) \wedge z$

puisque $y \vee x = y \neq u \wedge z = z$

P6. $\boxed{\text{Tout treillis distributif est modulaire}}$

En effet, le treillis P sera modulaire si

$\forall x, y, z \in P$ vérifiant $x \mathrel{R} z$ on a $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

or $\forall x, y, z \in P$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ par A5.

comme $x \mathrel{R} z$ on a $x \vee z = z$

donc $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Par *élément minimum* d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonné P on entend un élément $a \in X$ tel que $a \mathrel{R} x \quad \forall x \in X$

Par *élément maximum* d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonné P on entend un élément $b \in X$ tel que $x \mathrel{R} b \quad \forall x \in X$

Les éléments minimum et maximum de l'ensemble ordonné P sont uniques, ils sont appelés *Bornes universelles* de P et notés respectivement O et I.

Tout treillis fini admet des bornes universelles.
Le treillis des entiers naturels $\mathbb{N}$ ordonné par la relation $\leqslant$ n'admet pas d'élément maximum.

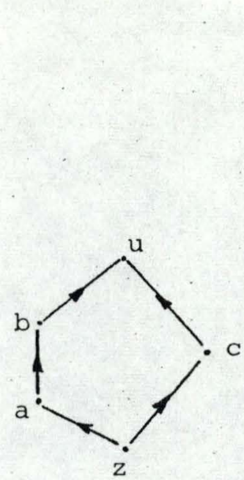
On appelle complément d'un élément x d'un treillis P contenant O et I un élément $y \in P$ tel que :

$$x \wedge y = O$$
$$x \vee y = I$$

Le treillis P est complémenté ssi tous ses éléments admettent un complément.

Exemple :

a. Dans le treillis



z est élément minimum

u est élément maximum

c est le complément de a et de b.

b. Le treillis constitué des éléments de $\mathcal{P}(E)$, les parties de l'ensemble quelconque E, et de la relation d'ordre "inclusion des ensembles" est complémenté; en effet

$I = E$

$O = \emptyset$

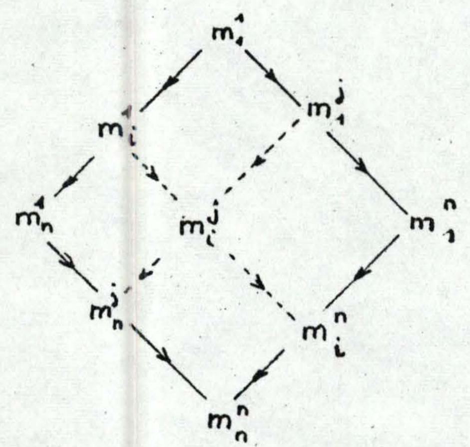
$$\left.\begin{array}{l} \forall A \ \exists \ A' \text{ tq } A \wedge A' = O \iff A \cap A' = \emptyset \\ \qquad \text{et } A \vee A' = I \iff A \cup A' = E \end{array}\right\} \Longrightarrow A' = C_E A$$

CHAPITRE II

TREILLIS DE GEL'FAND

A. Définitions

On désigne par "treillis de Gel'fand" le tableau suivant :



$T = \{m_i^j\}$ où m_i^j est entier positif ou nul $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$

satisfaisant la relation d'ordre

$$m_i^{j+1} \leqslant m_i^j \leqslant m_{i-1}^j \quad \text{pour tout } i, j \qquad \text{(II-1)}$$

Notations:

On note les 2n - 1 colonnes du treillis par :

$[m]_{n-j} = \{ m^{k}_{j+k} \; ; \; 1 \leqslant k \leqslant n-j \}$ $\forall\, o \leqslant j < n$ (colonnes gauches)

$[m]^{n-j} = \{ m^{j+k}_{k} \; ; \; 1 \leqslant k \leqslant n-j \}$ $\forall\, o \leqslant j < n$ (colonnes droites)

La colonne centrale est :

$$[m]_n = [m]^n = \{ m^i_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n \}$$

On peut donc désigner tout treillis T de Gel'fand par :

$$T = M< \; [m]_{n-k} \cdots [m]_n \cdots [m]^{n-\ell} \; M>$$

où k et ℓ sont des entiers arbitraires < n et

$$M< = \{ m^i_j \; ; \; k+2 \leqslant j \leqslant n \; , \; 1 \leqslant i \leqslant n-k-1 \; , \; i < j \}$$

$$M> = \{ m^i_j \; ; \; k+2 \leqslant i \leqslant n \; , \; 1 \leqslant j \leqslant n-k-1 \; , \; j < i \}$$

En particulier, on note par T : $.[m]_{n-1} \; [m]_n .$ le tableau T où

$$M< = \{ m^i_{i+k} = m^i_{i+1} \; ; \; 1 \leqslant k \leqslant n-i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n \}$$

$$M> = \{ m^{i+k}_i = m^i_i \; ; \; o \leqslant k \leqslant n-i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n \}$$

c'est-à-dire chaque élément des colonnes indiquées est répété le long de chaque quasidiagonale gauche (droite)

Exemple :

$n = 4 \qquad T = .[m]_3\ [m]_4.$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & m_1^1 & & & \\
 & & m_2^1 & & m_1^1 & & \\
 & m_2^1 & & m_2^2 & & m_1^1 & \\
m_2^1 & & m_3^2 & & m_2^2 & & m_1^1 \\
 & m_3^2 & & m_3^3 & & m_2^2 & \\
 & & m_4^2 & & m_3^3 & & \\
 & & & m_4^4 & & & \\
 & & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & & [m]_3 & [m]_4 & & &
\end{array}
$$

On appelle tableaux binaires les treillis de Gel'fand suivants :

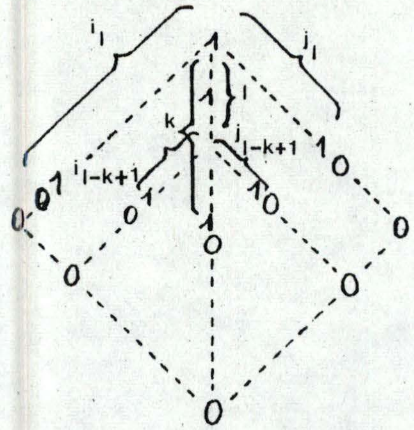
$$T = \Theta \equiv \{m_i^j = 0 \quad \forall\, i\,,\ j = 1, \ldots n\}$$

$$T = \mathbb{1} \equiv \{m_i^j = 1 \quad \forall\, i\,,\ j = 1, \ldots n\}$$

$$
T = \mathbb{1}_{i_1 \ldots i_\ell}^{j_1 \ldots j_\ell} \equiv \left\{
\begin{array}{ll}
m_i^j = 1 & \left\{ \begin{array}{l} i \leqslant \ell, j \leqslant i - 1 + j_{\ell-i+1} \\[2ex] j \leqslant \ell, i \leqslant j - 1 + i_{\ell-j+1} \end{array} \right. \\[6ex]
m_i^j = 0 & \qquad \text{autrement}
\end{array}
\right\}
$$

ou explicitement :

$$\mathbb{1}^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_\ell} =$$



Les tableaux binaires sont au nombre de $\binom{2n}{n}$

ceci s'explique par les trois faits suivants :

1. $\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=o}^{n} \binom{n}{\ell}^2$

2. Tous les tableaux binaires sont repérés à l'aide de ℓ indices (inférieurs et supérieurs), ℓ variant de o à n (à ℓ = o on associe Θ , à ℓ = n on associe $\mathbb{1}$)

3. Le nombre de tableaux à ℓ indices (inférieurs et supérieurs) est $\binom{n}{\ell}^2$ puisque les indices sont choisis parmi les éléments de $\{1, \ldots n\}$, rangés par ordre croissant de gauche à droite et chaque choix de ℓ indices supérieurs est indépendant du choix des ℓ indices inférieurs.

Exemple :

n = 3 , le nombre de tableaux binaires est $\binom{6}{3}$ = 20.

0	1	1	1	1
0 0	0 0	1 0	1 0	1 1
0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0	1 0 0
0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
1 1	1 1	1 1	1 1	0 1
1 1 0	1 1 0	1 1 1	1 1 1	0 0 0
0 0	1 0	1 0	1 1	0 0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
0 1	1 1	1 1	1 1	1 1
0 0 1	0 0 1	0 1 1	0 1 1	1 1 1
0 0	0 0	0 0	0 1	0 1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
0 1 0	0 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 1
0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
0	0	0	0	1

B. Opérations sur les treillis de Gel'fand

1. addition $\quad T \oplus T' = \{m_i^j + m'^j_i\}$

2. multiplication scalaire $\quad \nu T = \{\nu m_i^j\} \qquad \nu \geqslant 0$

3. soustraction $\quad T \ominus T'$ définie

   si $m_i^j - m'^j_i \geqslant 0$ et si chaque $m_i^j - m'^j_i$ satisfait la

   relation d'ordre définie en (II-1)

C. Les treillis de Gel'fand parmi les treillis

De la relation d'ordre des treillis de Gel'fand définie en (II-1) on tire :

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N} \qquad m_j^i \wedge m_\ell^k = m_{\sup\{j,\ell\}}^{\sup\{i,k\}}$$

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N} \qquad m_j^i \vee m_\ell^k = m_{\inf\{j,\ell\}}^{\inf\{i,k\}}$$

où sup et inf désignent respectivement le suprémum et l'infimum dans l'ensemble ordonné ($\mathbb{N}$, $\leqslant$)

Les treillis de Gel'fand sont donc des treillis au sens de la définition (D3.)

Ces treillis ne sont pas des chaînes, car tous les éléments d'un treillis ne sont pas comparables.
Par exemple, m_i^1 n'est pas comparable à m_1^j ($\forall i,j; i \neq 1, j \neq 1$) pour la relation d'ordre (II-1)

Les treillis de Gel'fand sont *distributifs*.

Soit $T = \{ m_i^j \}$

$$m_j^i \vee (m_\ell^k \wedge m_s^r) = (m_j^i \vee m_\ell^k) \wedge (m_j^i \vee m_s^r)$$

$$\forall i,j,k,\ell,r,s$$

Le premier membre peut encore s'écrire :

$$m_j^i \vee m_{\sup\{\ell,s\}}^{\sup\{k,r\}} = m_{\inf\{j,\ \sup\{\ell,s\}\}}^{\inf\{i,\ \sup\{k,r\}\}}$$

Le second membre peut encore s'écrire

$$m_{\inf\{j,\ell\}}^{\inf\{i,k\}} \wedge m_{\inf\{j,s\}}^{\inf\{i,r\}} = m_{\sup\{\inf\{j,\ell\},\ \inf\{j,s\}\}}^{\sup\{\inf\{i,k\},\ \inf\{i,r\}\}}$$

Pour prouver l'égalité entre les deux membres, il suffit de démontrer que l'ensemble des entiers $\{i,j,k,\ell,r,s\}$ muni de la relation $\leqslant$ est un treillis distributif.
Or, un tel ensemble est une chaîne et toute chaîne est un treillis distributif.

En effet, soit x,y,z élements d'une chaîne

$x \wedge y$ est égal au plus petit des deux éléments x et y

$x \vee y$ est égal au plus grand des deux.

$x \wedge (y \vee z)$ et $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sont tous deux égaux à x si x est inférieur à y ou à z ; et tous deux égaux à $y \vee z$ dans le cas contraire, c'est-à-dire si x est supérieur à y et à z.

Par (P6.) les treillis de Gel'fand sont *modulaires*.
Les treillis de Gel'fand ne sont pas complémentés.

D. <u>Décomposition binaire d'un treillis de Gel'fand</u>

N'importe quel treillis de Gel'fand peut se décomposer en une somme de multiples de tableaux binaires.

$$T = \bigoplus_{\ell=1}^{n} \bigoplus_{\substack{I_\ell \\ J_\ell}} d_{I_\ell}^{J_\ell}\, \mathbf{1}_{I_\ell}^{J_\ell} \qquad \text{(II-2)}$$

où les $d_{I_\ell}^{J_\ell}$ sont des entiers positifs au nombre de $\binom{2n}{n} - 1$
(on élimine le tableau Θ).

Les indices de sommation

$$I_\ell = \{ i_1 < i_r < \ldots < i_\ell \ ; \ 1 \leqslant i_1 \ \text{et} \ i_\ell \leqslant n \}$$

$$J_\ell = \{ j_1 < j_r < \ldots < j \ ; \ 1 \leqslant j_1 \ \text{et} \ j_\ell \leqslant n \}$$

Cette décomposition n'est pas unique, mais il en existe un nombre fini, car pour chaque décomposition

$$m_1^1 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\substack{I_\ell \\ J_\ell}} d_{I_\ell}^{J_\ell}$$

Par conséquent, le nombre de décompositions n'est pas plus grand que le nombre de partitions de l'entier m_1^1.

Exemple de décomposition :

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 3 & & 2 & \\ 3 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$= \mathbb{1}_3^1 + \mathbb{1}_{23}^{12} + \mathbb{1}_3^3$$

E. Exponentielle d'un treillis de Gel'fand

Soit un corps K commutatif, de caractéristique nulle et avec $\underline{0}$ comme élément nul , $\underline{1}$ comme élément unité.

On établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les tableaux binaires et un ensemble X

$$X = \{1, x_{I_\ell}^{J_\ell}, \forall J_\ell, I_\ell, 1 \leqslant \ell \leqslant n\} \subset K$$

appelé ensemble de *conditions initiales*

$$\mathbb{1}_{I_\ell}^{J_\ell} \rightsquigarrow x_{I_\ell}^{J_\ell}$$

$$\Theta \rightsquigarrow 1$$

Cette application peut être étendue à l'ensemble de tous les treillis de Gel'fand

$$T \rightsquigarrow (T) \in K \qquad \text{(II-3)}$$

où (T) est la solution de l'équation aux différences finies

$$(T) = \sum_{\substack{m'^{j}_{i} \in T' \\ (i,j) \neq (1,1)}} (T \ominus T')\ (T')$$

de condition initiale X

(T) est appelée *exponentielle du tableau de Gel'fand T*, notée aussi x^T.

Théorème

Soit X un ensemble de conditions initiales, alors l'équation aux différences finies (II-3) a une solution unique donnée par

$$x^{T} = m_1^1 ! \sum_{S} \prod_{\ell=1}^{n} \prod_{\substack{J_\ell \\ I_\ell}} \frac{\left(x_{I_\ell}^{J_\ell}\right)^{d_{J_\ell}^{I_\ell}}}{d_{I_\ell}^{J_\ell} !} \qquad \text{(II-4)}$$

où S est l'ensemble des solutions de (II-2)

(démontré dans référence(3))

On remarque que cette façon d'évaluer le polynôme x^T impose la recherche de toutes les solutions S de (II-2).
Une autre façon de procéder est donnée par :

F. Prodécure de pelage

Elle permet de ramener la résolution de l'équation aux différences finies (II-3) à celle d'une équation avec moins d'indices de sommation.
Cette procédure est basée sur le lemme suivant :

Soit $S = \{ m_1^1 = m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_r \ ; \ r \leqslant 2n-1 \}$ une chaîne d'éléments de T contenant m_1^1

Si x^{T_S} est solution de l'équation aux différences finies

$$x^{T_S} = \sum_{m'^j_i \notin S'} x^{T_S \ominus T'_{S'}} \; x^{T'_{S'}}$$

où x est un ensemble de conditions initiales et S' la chaîne correspondante dans T' alors :

$$x^T = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m_{r-1} \\ m_r \end{pmatrix} \; x^{T_S}$$

est la solution de (II-3) avec x comme ensemble de conditions initiales. Pour la démonstration, voir référence (3).

Lorsqu'on applique cette procédure, deux sortes de treillis apparaissent :

1. $\left([M < k \, ; \, m_1^1]_\ell \right)_{I_\ell}^{I\ell}$ $(k < i_1)$

   treillis avec k éléments différents de m_1^1 et de o dans la $\ell^{\text{ième}}$ oblique gauche de $M <$.

2. $\left([M < k \, ; \, m_1^1]^{r, j_o} \right)_{I_\ell}^{I_\ell}$

   Treillis avec k éléments différents de m_1^1 et de o dans la $r^{\text{ième}}$ oblique droite de $M<$.

   Le nombre total d'éléments non nuls dans cette oblique étant égal à j_o.

Exemples :

Treillis du type 1.

$$\left(\left[M < 2 \ ; \ m_1^1\right]_3\right)^{\{1,2,3\}}_{\{3,4,5\}}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & m_1^1 & & & \\
 & & & m_1^1 & & m_1^1 & & \\
 & & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & \\
 & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & O \\
m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & O & \\
O & m_1^1 & & m_4^3 & & O & & \\
 & O & m_5^3 & & O & & & \\
 & & O & O & & & & \\
 & & O & & & & &
\end{array}$$

Treillis du type 2.

$$\left(\left[M < 2 \ ; \ m_1^1\right]^{5,3}\right)^{\{1,2,3,4\}}_{\{1,3,4,6\}}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & m_1^1 & & & & \\
 & & & & m_1^1 & & m_1^1 & & & \\
 & & & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & \\
 & & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & \\
 & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & m_1^1 & & O \\
m_1^1 & & m_5^2 & & m_1^1 & & m_1^1 & & O & \\
 & O & & m_5^3 & & m_1^1 & & O & & \\
 & & O & & O & & O & & & \\
 & & & O & & O & & & & \\
 & & & & O & & & & &
\end{array}$$

Ces treillis ont une exponentielle qui est un monôme car leur décomposition en tableaux binaires est unique.

Dans l'exemple, le treillis du type 1 a pour exponentielle :

$$m_1^1! \frac{\left(x^{123}_{145}\right)^{m_1^1-m_4^3} \quad \left(x^{123}_{245}\right)^{m_4^3-m_5^3} \quad \left(x^{123}_{345}\right)^{m_5^3}}{(m_1^1 - m_4^3)! \quad (m_4^3 - m_5^3)! \quad (m_5^3)!}$$

le treillis du type 2 a pour exponentielle :

$$m_1^1! \frac{\left(x^{1234}_{1236}\right)^{m_1^1-m_5^2} \quad \left(x^{1234}_{1246}\right)^{m_5^2-m_5^3} \quad \left(x^{1234}_{1346}\right)^{m_5^3}}{(m_1^1 - m_5^2)! \quad (m_5^2 - m_5^3)! \quad (m_5^3)!}$$

Le pelage d'un treillis de dimension 3, soit T, est fait intégralement en annexe 1.

$$T = \begin{array}{ccccc} & & m_1^1 & & \\ & m_2^1 & & m_1^2 & \\ m_3^1 & & m_2^2 & & m_1^3 \\ & m_3^2 & & m_2^3 & \\ & & m_3^3 & & \end{array}$$

x^T (notée aussi (T)) est un polynôme défini par 10 indices de sommation et 19 variables.

Ceci est prévisible puisque si on cherche S on doit résoudre un système de 9 équations à 19 inconnues.

Ce polynôme s'écrit :

$$(T) = \binom{m_1^1}{m_2^2}\binom{m_2^2}{m_3^3}\binom{m_1^1 - m_2^2}{m_1^2 - m_2^2}\left(x_{123}^{123}\right)^{m_3^3} \sum_{\psi,\phi,\sigma,\delta,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\mu,\nu}$$

$$\binom{m_1^2 - m_2^2}{m_1^3 - m_3^3 - \phi}\binom{m_1^3 - m_3^3 - \phi}{\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\binom{m_1^1 - m_1^2}{m_2^1 - m_2^2 - \alpha - \sigma}\binom{m_1^1 - m_2^2 - \alpha - \sigma}{m_1^3 - m_3^3 - \phi - \beta - \delta}$$

$$\binom{m_1^2 - m_2^2 - m_1^3 + m_3^3 - \phi}{\sigma}\binom{\sigma}{\delta}\binom{m_2^3 - m_3^3}{\gamma}\binom{\gamma}{\varepsilon}\binom{m_2^2 - m_3^3 - \phi}{\psi - \gamma - \mu}$$

$$\binom{m_2^2 - m_3^3}{\phi}\binom{\psi - \gamma - \mu}{m_3^2 - m_3^3 - \varepsilon - \nu}\binom{\phi - m_2^3 + m_3^3}{\mu}\binom{\mu}{\nu}\binom{\phi}{m_2^3 - m_3^3}$$

$$\left(x_1^3\right)^{m_1^3 - m_3^3 - \phi - \alpha}\left(x_2^3\right)^{\alpha-\beta}\left(x_3^3\right)^{\beta}\left(x_1^1\right)^{m_1^1 - m_1^2 - m_2^1 + m_2^2 + \sigma + \alpha}$$

$$\left(x_2^1\right)^{m_2^1 - m_2^2 - m_3^1 + m_3^3 + \psi - \alpha + \beta - \sigma + \delta}\left(x_3^1\right)^{m_3^1 - m_3^3 - \psi - \beta - \delta}$$

$$\left(x_1^2\right)^{m_1^2 - m_2^2 - m_1^3 + m_3^3 + \phi - \sigma}$$

$$\left(x_2^2\right)^{\sigma-\delta}\left(x_3^2\right)^{\delta}\left(x_{13}^{23}\right)^{\gamma-\varepsilon}\left(x_{12}^{23}\right)^{m_2^3 - m_3^3 - \gamma}\left(x_{23}^{12}\right)^{m_3^2 - m_3^3 - \varepsilon - \gamma}\left(x_{23}^{23}\right)^{\varepsilon}$$

$$\left(x_{12}^{12}\right)^{m_2^2 - \phi - \psi + \gamma + \mu - m_3^3}\left(x_{12}^{13}\right)^{\phi - m_2^3 + m_3^3 - \mu}\left(x_{13}^{12}\right)^{\psi - \gamma - \mu - m_3^2 + m_3^3 + \varepsilon + \nu}$$

$$\left(x_{13}^{13}\right)^{\mu-\nu}\left(x_{23}^{13}\right)^{\nu}$$

Chapitre III : Méthode numérique de recherche de l'exponentielle d'un treillis de Gel'fand

Position du problème :

Soit M un treillis de dimension n .

Si on cherche à évaluer x^M par la formule (II-4) il faut préciser S.

Préciser S c'est rechercher toutes les familles de solutions entières positives d'un système de n^2 équations à $\binom{2n}{n} - 1$ inconnues (les $d_{I_\ell}^{J_\ell}$), (le système (II-2))

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{\vec{IM} = [A]\ \vec{D}} \qquad \text{(III-1)}$$

où $\vec{IM}$ est un vecteur colonne rassemblant les n^2 composantes du treillis M

$\vec{D}$ le vecteur colonne des $\binom{2n}{n} - 1$ inconnues $d_{I_\ell}^{J_\ell}$

$[A]$ la matrice rectangulaire à n^2 lignes et $\binom{2n}{n} - 1$ colonnes remplie de 1 et de o uniquement.

Pour fixer les idées, on range les éléments du treillis M dans le vecteur $\vec{IM}$ comme suit :

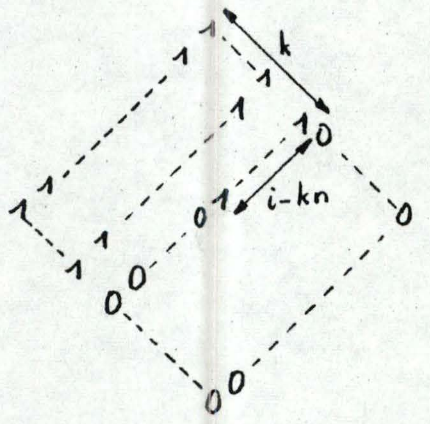
$$\vec{IM}\ ((k-1)n+ i) = m_i^k \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots n \\ k = 1, \dots n \end{array} \qquad \text{(III-2)}$$

Pour ce choix du vecteur $\vec{IM}$ il existe une disposition ordonnée des inconnues du système dans le vecteur $\vec{D}$ qui permet d'écrire l'opérateur matriciel [A] comme la juxtaposition

- d'une matrice (n,n) triangulaire supérieure, le triangle supérieur étant uniquement constitué de 1. (on la note [T])
- d'une matrice rectangulaire (n, $\binom{2n}{n} - 1 - n$). (on la note [R])

Cette disposition des inconnues, composantes de $\vec{D}$, suit une règle désignée (a) :

il faut choisir pour n^2 premières inconnues, les $d_{I_\ell}^{J_\ell}$ qui sont associées aux tableaux $\mathbb{1}_{I_\ell}^{J_\ell}$ successifs suivants: le $i^{\text{ième}}$ tableau est de la forme



où k est l'entier positif ou nul vérifiant

$k\,n < i < (k+1)\,n$

On note $\vec{F}$ le vecteur colonne de ces n^2 premières inconnues et $\vec{f}$ le vecteur colonne des inconnues restantes placées dans un ordre quelconque.

$$\text{Donc,}\quad \vec{D} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{f} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n^2 \\ \updownarrow \binom{2n}{n} - n^2 - 1 \end{matrix}$$

L'opérateur matriciel [A] correspondant à cette disposition particulière des inconnues s'écrit alors :

$$[A] = [T]\ [R]$$

Le système (III-1) prend donc la forme

$$\boxed{\vec{IM} = [T]\ \vec{F} + [R]\ \vec{f}} \qquad \text{(III-3)}$$

Cette matrice $[T]$ est régulière et son inverse $[T]^{-1}$ est une matrice en nombres entiers

$$t^{-1}(i,j) = 1 \qquad \text{si } j = i$$

$$t^{-1}(i,j) = -1 \qquad \text{si } j = i + 1 ,$$

$$= 0 \qquad \text{dans les autres cas.}$$

On peut donc tirer $\vec{F}$ de (III-3)

$$\boxed{\vec{F} = [T]^{-1}\ (\vec{IM} - [R]\ \vec{f})} \qquad \text{(III-4)}$$

Le problème initial se ramène donc à la recherche de tous les vecteurs $\vec{f}$ à composantes entières positives, tels que les composantes de $\vec{F}$ obtenues par (III-4) soient entières positives.

soit $$\boxed{\vec{F} = [T]^{-1}\ (\vec{IM} - [R]\ \vec{f}) \geqslant 0} \qquad \text{(III-5)}$$

La méthode numérique qu'on utilise va donc proposer des vecteurs $\vec{f}$ à valeurs entières positives, évaluer pour chacun d'eux les composantes de $\vec{F}$ et les admettre comme solution si les composantes de $\vec{F}$ sont positives.

Cette méthode est détaillée en annexe 1.

Remarque : un autre classement des éléments du treillis M dans le vecteur $\vec{IM}$ pourrait conduire à un même type de décomposition de l'opérateur matriciel $[A]$, les composantes de $\vec{F}$ seraient rangées alors suivant une autre règle que la règle (a).

Exemple :

n = 3

$$\begin{array}{ccccc}
 & & m_1^1 & & \\
 & m_2^1 & & m_1^2 & \\
m_3^1 & & m_2^2 & & m_1^3 \\
 & m_3^2 & & m_2^3 & \\
 & & m_3^3 & &
\end{array}$$

Le vecteur $\vec{IM}$ a pour composantes successives :

$$m_1^1 \ , \ m_2^1 \ , \ m_3^1 \ , \ m_1^2 \ , \ m_2^2 \ , \ m_3^2 \ , \ m_1^3 \ , \ m_2^3 \ , \ m_3^3$$

Les 9 tableaux obtenus par la règle (a) sont dans l'ordre :

$$\mathbb{1}_1^1 \ , \ \mathbb{1}_2^1 \ , \ \mathbb{1}_3^1 \ , \ \mathbb{1}_3^2 \ , \ \mathbb{1}_{13}^{12} \ , \ \mathbb{1}_{23}^{12} \ , \ \mathbb{1}_{23}^{13} \ , \ \mathbb{1}_{23}^{23} \ , \ \mathbb{1}_{123}^{123}$$

Les 9 premières composantes de $\vec{F}$ sont donc dans l'ordre :

$$d_1^1 \ , \ d_2^1 \ , \ d_3^1 \ , \ d_3^2 \ , \ d_{13}^{12} \ , \ d_{23}^{12} \ , \ d_{23}^{13} \ , \ d_{23}^{23} \ , \ d_{123}^{123}$$

Le système se présente sous la forme :

$$
\underset{\vec{IM}}{\begin{bmatrix} m_1^1 \\ m_2^1 \\ m_3^1 \\ m_1^2 \\ m_2^2 \\ m_3^2 \\ m_1^3 \\ m_2^3 \\ m_3^3 \end{bmatrix}}
=
\left[\begin{array}{ccccccccc|cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{f} \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\vec{F}}{\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_3^2 \\ d_{13}^{12} \\ d_{23}^{12} \\ d_{23}^{13} \\ d_{23}^{23} \\ d_{123}^{123} \end{bmatrix}}
\qquad
\underset{\vec{f}}{\begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_1^3 \\ d_2^3 \\ d_3^3 \\ d_{12}^{12} \\ d_{12}^{13} \\ d_{13}^{13} \\ d_{13}^{23} \\ d_{12}^{23} \end{bmatrix}}
$$

$\vec{IM}$ $[T]$ $[R]$

$$
\boxed{\vec{IM} = [T]\ \vec{F} + [R]\ \vec{f}}
$$

Résultats obtenus par procédure de pelage et par méthode numérique :

Les intervalles de variation respectifs des dix indices de sommation n'ont pas été précisés dans l'écriture analytique de x^T (page 22). En fait, ces indices sont soumis à des contraintes, contraintes imposées par la présence des coefficients binomiaux et le caractère positif des exposants des conditions initiales.

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & & \\ & 5 & & 6 & \\ 2 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Les indices de sommation doivent unifier le système suivant :

$$\begin{array}{ll}
3 \geqslant 1 - \phi \geqslant o & 3 - \phi \geqslant \psi - \gamma - \mu \geqslant o \\
1 - \phi \geqslant \alpha \geqslant o & \psi - \gamma - \mu \geqslant 1 - \varepsilon - \nu \\
\alpha \geqslant \beta \geqslant o & \phi \geqslant \mu \geqslant o \\
2 - \alpha - \sigma = o & \mu \geqslant \nu \geqslant o \\
1 - \phi - \beta - \delta = o & 3 \geqslant \phi \geqslant o \\
2 + \phi \geqslant \sigma \geqslant o & 2 - \psi - \beta - \delta > o \\
\sigma > \delta \geqslant o & \psi - \alpha + \beta - \sigma + \delta \geqslant o \\
\gamma = o & \\
\varepsilon = o &
\end{array}$$

Ce système admet 10 solutions :

(a) $\phi = o,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = 1,\ \psi = 1,\ \mu = o,\ \nu = o$

(b) $\phi = o,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = o,\ \psi = 2,\ \mu = o,\ \nu = o$

(c) $\phi = o,\ \alpha = 1,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 1,\ \delta = o,\ \psi = 2,\ \mu = o,\ \nu = o$

(d) $\phi = o,\ \alpha = 1,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 1,\ \delta = 1,\ \psi = 1,\ \mu = o,\ \nu = o$

(e) $\phi = o,\ \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 1,\ \delta = o,\ \psi = 1,\ \mu = o,\ \nu = o,$

(f) $\phi = 1,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = o,\ \psi = 2,\ \mu = o,\ \nu = o,$

(g) $\phi = 1,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = o,\ \psi = 2,\ \mu = 1,\ \nu = o,$

(h) $\phi = 1,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = 1,\ \psi = 1,\ \mu = o,\ \nu = o,$

(i) $\phi = 1,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = 1,\ \psi = 1,\ \mu = 1,\ \nu = 1,$

(j) $\phi = 1,\ \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \varepsilon = o,\ \sigma = 2,\ \delta = o,\ \psi = 2,\ \mu = 1,\ \nu = 1,$

D'autre part, le programme appliqué à ce même treillis donne comme résultat le polynôme suivant :

$$
\begin{aligned}
x^T = {} & 360\ x_3^2\ x_{23}^{12}\ x_2^2\ (x_{12}^{12})^2\ x_1^3 \\
& + 360\ x_{13}^{12}\ x_{23}^{12}\ (x_2^2)^2\ x_{12}^{12}\ x_1^3 \\
& + 360\ x_3^2\ x_{23}^{12}\ x_1^2\ (x_{12}^{12})^2\ x_2^3 \\
& + 720\ x_3^2\ x_{23}^{12}\ x_1^2\ x_{12}^{12}\ x_2^2\ x_{12}^{13} \\
& + 720\ x_{13}^{12}\ x_{23}^{12}\ x_1^2\ x_{12}^{12}\ x_2^3\ x_2^2 \\
& + 360\ x_3^2\ x_{23}^{13}\ x_1^2\ (x_{12}^{12})^2\ x_2^2 \\
& + 360\ x_3^3\ x_{23}^{12}\ x_1^2\ (x_{12}^{12})^2\ x_2^2 \\
& + 360\ x_{13}^{12}\ x_{23}^{12}\ x_1^2\ (x_2^2)^2\ x_{12}^{13} \\
& + 360\ x_{23}^{12}\ x_{23}^{13}\ x_1^2\ (x_2^2)^2\ x_{12}^{12} \\
& + 360\ x_{23}^{12}\ x_{12}^{12}\ x_1^2\ (x_2^2)^2\ x_{13}^{13}
\end{aligned}
$$

On peut vérifier que chacun des monômes correspond exactement à une des 10 possibilités prises par les indices de sommation de l'écriture analytique.

Le premier monôme correspond à (a), le second à (b), le troisième à (d), le quatrième à (h), le cinquième à (c), le sixième à (i), le septième à (e), le huitième à (f), le neuvième à (j), le dixième à (g).

Le résultat obtenu par ordinateur coïncide donc avec la solution acquise par la procédure de pelage.

CHAPITRE I

ESPACES DE FONCTIONS

1. Espace de Fock sur $\mathbb{C}^n$
2. Espace de Fock sur les matrices
3. Espace de Bargmann-Moshinsky

1. *Espace de Fock sur* $\mathbb{C}^n$

A. Définition

On note $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un élément de $\mathbb{C}^n$ avec $z_k \in \mathbb{C}$

et $z_k = x_k + i\, y_k$; x_k , $y_k \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}^n \qquad a.b = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \; b_k \tag{I-1}$$

est un espace de Hilbert.

Sur $\mathbb{C}^n$ on définit une mesure

$$d\gamma(z) = \pi^{-n} \; \exp(-z.z) \prod_{k=1}^{n} dx_k \; dy_k \tag{I-2}$$

On définit l'espace des fonctions $\mathbb{F}_n$ comme suit :

$f \in \mathbb{F}_n \iff$ - f est développable en série sur $\mathbb{C}^n$.

c'est-à-dire :

$$f(z) = \sum_{h_1 \dots h_n} \alpha_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n} \qquad \text{(I-3)}$$

$$- \int_{\mathbb{C}^n} |f|^2 \, d\gamma < \infty \qquad \text{(I-4)}$$

(I-3) sera encore noté :

$$f(z) = \sum_h \alpha_h \, z^{[h]} \qquad \text{(I-5)}$$

où h désigne $(h_1, \dots h_n)$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls.

α_h désigne $\alpha_{h_1 \dots h_n}$

$z^{[h]}$ désigne $z_1^{h_1} \; z_2^{h_2} \dots z_n^{h_n}$

on note encore $\quad |h| = h_1 + \dots + h_n$

$[h!] = h_1! \; h_2! \; \dots h_n!$

Si on munit $\mathbb{F}_n$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathbb{F}_n \quad (f,g) = \int \overline{f}(z) \, g(z) \, d\gamma(z) \qquad \text{(I-6)}$$

alors $\mathbb{F}_n$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. Nous appelerons $\mathbb{F}_n$, espace de Fock sur $\mathbb{C}^n$ ((4)).

B. Calcul du produit scalaire

Proposition :

> Soient $f \in \mathbb{F}_n$ tq $f(z) = \sum_h \alpha_h \; z^{[h]}$
>
> $f \in \mathbb{F}_n$ tq $f'(z) = \sum_{h'} \alpha'_{h'} \; z^{[h']}$
>
> alors
>
> $$(f,f') = \sum_h [h!] \; \overline{\alpha}_h \, \alpha'_h \tag{I-7}$$
>
> $$(f,f) \overset{\text{déf}}{=\!=} \|f\|^2 = \sum_h [h!] \; |\alpha_h|^2 \tag{I-8}$$

Démonstration :

$$(f,f') = (\sum_h \alpha_h \, z^{[h]} \; , \; \sum_{h'} \alpha'_{h'} \; z^{[h']})$$

$$= \sum_{h\,h'} \overline{\alpha}_h \, \alpha'_{h'} \; (z^{[h]} \; , \; z^{[h']})$$

Or $$(z^{[h]} \; , \; z^{[h']}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq h' \\ [h!] & \text{si } h = h' \end{cases} \tag{I-9}$$

en effet $\forall z_k \in \mathbb{C}$ on peut écrire z_k en coordonnée polaires

$$z_k = r_k \quad e^{i\phi_k}$$

alors :

$$(z^{[h']} , z^{[h']}) = \prod_{k=1}^{n} W_k$$

où

$$W_k = \frac{1}{\Pi} \left[\int_o^{2\pi} \exp\left(i\ (h'_k - h_k)\ \phi_k\right) \ d\phi_k \right] .$$

$$\left[\int_o^{\infty} r_k^{h_k + h'_k + 1} \ e^{-r_k^2} \ dr_k \right]$$

or

$$\int_o^{2\pi} e^{im\theta} \ d\theta = \begin{cases} o & \text{si } m \neq o \\ 2\pi & \text{si } m = o \end{cases}$$

donc

$$W_k = o \text{ si } h_k \neq h'_k$$

$$= \frac{1}{\Pi} \ \Pi \ 2 \int_o^{\infty} r_k^{2h_k + 1} \ e^{-r_k^2} \ dr_k \quad \text{si } h_k = h'_k$$

ou en effectuant le changement de variable $t = r_k^2$

$$W_k = \left[\int_o^{\infty} t^{h_k} \ e^{-t} \ dt \right] \quad \delta_{h_k\ h'_k}$$

$$= \Gamma(h_k + 1)\ \delta_{h_k\ h'_k} = h_k!\ \delta_{h_k\ h'_k}$$

D'où $(f, f') = \sum_{h} \overline{\alpha}_h \, \alpha'_h \, [h!]$

En particulier

$$(f, f) = \sum_{h} [h!] \, |\alpha_h|^2$$

C. Base orthonormale de $\mathbb{F}_n$

Proposition :

$$\left\{ u_h = \frac{z^h}{[h!]^{1/2}} \right\}$$ forme un système orthonormal complet pour le Hilbert $\mathbb{F}_n$ (I-10)

Démonstration :

Par (I-9) on a $(u_h , u_{h'}) = \delta_{h\,h'}$

$\{u_h\}$ est donc un système orthonormal

D'autre part, si $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{h} \alpha_h \, z^{[h]}$

$$= \sum_{h} [h!]^{1/2} \, \alpha_h \, u_h$$

$$= \sum_{h} \beta_h \, u_h$$

où $\beta_h = \alpha_h \, [h!]^{1/2} = (u_h , f)$

D'où en utilisant (I-8) :

$$(f, f) = \sum_h |\alpha_h|^2 [h!] = \Sigma |\beta_h|^2$$

donc

$$(f, f) = \sum_h (u_h, f)^2$$

Cette dernière égalité est l'égalité de Bessel.
Or, dans un Hilbert, un système orthonormal qui vérifie l'égalité de Bessel est un système complet.

D. Décomposition de $\mathbb{F}_n$ en sous-espaces

Soit $\mathbb{B}_s$ l'ensemble des polynomes homogènes de degré s de $\mathbb{F}_n$ où

$s = h_1 + h_2 + \ldots + h_n = |h|$

Ces ensembles forment des sous-espaces orthogonaux entre eux.
En effet, toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{B}_s$ est dans $\mathbb{B}_s$. De plus, un élément arbitraire de $\mathbb{B}_s$, soit $\sum_{h \text{ tq} |h|=s} \alpha_h z^{[h]}$

et un élément arbitraire de $\mathbb{B}_{s'}$, soit $\sum_{h' \text{ tq} |h'|=s'} \alpha_{h'} z^{[h']}$

avec $s \neq s'$ sont orthogonaux puisque $s \neq s'$ entraîne $|h| \neq |h'|$,

donc $(z^{[h]}, z^{[h']}) = o$ par (I-9).

$\mathbb{F}_n$ peut se décomposer en sous-espaces orthogonaux.

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{B}_o \oplus \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2 \oplus \ldots$$

Soit $f \in \mathbb{F}_n$, $f \in \mathbb{B}_s \iff f(\nu z) = \nu^s f(z)$ où $\nu \in \mathbb{C}$ arbitraire

(I-11)

ou encore de façon équivalente

$$f \in \mathbb{B}_s \iff \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k} = s\, f \tag{I-12}$$

critère d'Euler.

E. Vecteurs principaux

On définit pour chaque $a \in \mathbb{C}^n$ une fonction e_a

$$e_a(z) \overset{\text{déf}}{=\!=\!=} \exp\,(a.z) \qquad \text{où } a.z = \sum_k \bar{a}_k\, z_k \tag{I-13}$$

$e_a \in \mathbb{F}_n$, on peut écrire son développement en série sous la forme

$$e_a(z) = \sum_h \frac{\bar{a}^{[h]}\, z^{[h]}}{[h!]} \tag{I-14}$$

Soit $f(z)$ une fonction quelconque de $\mathbb{F}_n$ on a que

$$(e_a\,,\, f) = f(a) \tag{I-15}$$

en effet, $f \in \mathbb{F}_n$ entraîne $f(z) = \sum_h \alpha_h\, z^{[h]}$

donc $f(a) = \sum_h \alpha_h\, a^{[h]}$,

or par (I-7), $(e_a\,,\, f) = \sum_h \alpha_h\, a^{[h]} = f(a)$ (I-16)

$$= \int \exp\,(a.z)\; f(z)\; d\gamma\,(z)$$

Les vecteurs e_a sont appelés vecteurs principaux.
La relation (I-16) leur prête un rôle similaire aux fonctions delta
En particulier :

$$(e_a, e_b) = e_b(a) = \exp(b.a) \text{ et } (e_a, e_a) = \|e_a\|^2 = \exp(a.a) \tag{I-17}$$

F. Caractérisation d'un élément de $\mathbb{F}_n$

> Soit f une fonction développable en série. On a :
>
> $$f \in \mathbb{F}_n \iff |f(z)| \leqslant C \exp\left(\frac{1}{2}\beta\, z.z\right) \tag{I-18}$$
>
> où C et β sont des constantes
>
> et $\beta < 1$

Démonstration :

$f \in \mathbb{F}_n$ donc par (I-16) $f(z) = (e_z, f)$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|f(z)| \leqslant \|f\| . \|e_z\|$

$$\leqslant \|f\| \exp\left(\frac{1}{2} z.z\right)$$

donc on a (I-18) où $C = \|f\|$ et $\beta = 1$

Réciproquement,

si $|f(z)| \leqslant C \exp\left(\frac{1}{2}\beta\, z.z\right)$

$$\text{alors, } \int |f(z)|^2 \, d\gamma(z) \leqslant C^2 \int \exp(\beta\, z.z) \, d\gamma(z)$$

$$= C^2 \int \exp\left|(\beta - 1)(z.z)\right| \prod_{k=1}^{n} dx_k \, dy_k$$

$$< \infty \quad \text{car} \quad \beta < 1$$

Donc $f \in \mathbb{F}_n$.

G. Opérateurs sur $\mathbb{F}_n$

On définit sur $\mathbb{F}_n$ les opérateurs suivants :

Opérateur de dérivation $\quad d_k : f \to d_k\, f = \dfrac{\partial f}{\partial z_k}$ (I-19)

encore dénommé opérateur d'annihilation

Opérateur de multiplication $\quad z_k : f \to z_k\, f = z_k \, . \, f$ (I-20)

encore dénommé opérateur de création.

Pour éviter les difficultés, on se restreint aux applications de ces opérateurs aux polynômes. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

$$[z_k \, , \, z_\ell] = 0 \qquad \text{(I-21)}$$

$$[d_k \, , \, d_\ell] = 0 \qquad \text{(I-22)}$$

$$[d_k \, , \, z_\ell] = \delta_{k\ell} \qquad \text{(I-23)}$$

où

$$[a \, , \, b] \overset{\text{déf}}{=} ab - ba$$

Démonstration :

(I-21) est évident puisque la multiplication est commutative sur $\mathbb{C}$ et donc $\quad (z_k \, . \, z_\ell - z_\ell \, . \, z_k)\, f = 0$

(I-22) est immédiat puisque les polynômes sont infiniment dérivables et donc $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_k \, \partial z_\ell} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_\ell \, \partial z_k}$

(I-23) est vrai car $\frac{\partial}{\partial z_k} (z_\ell f) - z_\ell \frac{\partial f}{\partial z_k} =$

$$= \delta_{k\ell} f + z_\ell \frac{\partial f}{\partial z_k} - z_\ell \frac{\partial f}{\partial z_k}$$

$$= \delta_{k\ell} f$$

De plus, d_k et z_k sont adjoints par rapport au produit scalaire défini sur $\mathbb{F}_n$ en (I-6), c'est-à-dire, si on note par a^* l'opérateur adjoint à a par rapport au produit scalaire,

$$d_k^* = z_k \iff (z_k f, g) = (f, d_k g) \quad \forall f,g \in \mathbb{F}_n$$

chaque fois que $z_k f$ et $d_k g \in \mathbb{F}_n$ (I-24)

Démonstration :

On se limite au cas où $k = 1$

On désigne $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ par h

$(1 + h_1, h_2, \dots, h_n)$ par h'

Si $f = \sum_h \alpha_h z^{[h]}$ $\quad g = \Sigma \beta_h z^{[h]}$

$$z_1 f = \sum_h \alpha_h z^{[h']}$$

$$d_1 g = \sum_h \beta_h h_1 z^{[h'']} \qquad h'' = (h_1 - 1, h_2, \dots, h_n)$$

en faisant le changement de variable $h_1 - 1 \to h_1$

$$= \sum_h \beta_{h_1 + 1, h_2, \dots h_n} (h_1 + 1) z^{[h]}$$

$$d_1 g = \sum_{h'} (1 + h_1) \; \beta_{h'} \; z^{[h]}$$

$$\text{où} \quad h' = (1 + h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

$$(z_1 \; f, g) = \sum_{h} [h'!] \; \overline{\alpha}_h \; \beta_{h'}$$

$$(f, d_1 g) = \sum_{h} \; (1 + h_1) \; [h!] \; \overline{\alpha}_h \; \beta_{h'}$$

$$= \sum_{h} \; [h'!] \; \overline{\alpha}_h \; \beta_{h'}$$

Donc $(z_1 \; f, g) = (f, d_1 g)$.

2. *Espace de Fock sur les matrices*

Soit $M(n)$ l'espace vectoriel des matrices carrées complexes de dimension n, on le munit du produit scalaire suivant :

$$\forall \; z, w \in M(n) \quad z.w \stackrel{\text{déf}}{=} \text{tr} \; (z^* w) \tag{I-25}$$

où z^* désigne la matrice transposée conjugée de z

tr(x) désigne la trace de la matrice x

Si $z \in M(n)$ on notera par

$z_{1.}, z_{2.}, \ldots, z_{n.}$ les lignes de z

$z_{.1}, z_{.2}, \ldots, z_{.n}$ les colonnes de z

Sur M(n) on peut construire un espace de Fock (F)
Il suffit de remarquer que M(n) est isomorphe à $\mathbb{C}^{n^2}$ et de définir, comme au paragraphe précédent, un espace de Fock (F) en utilisant sur $\mathbb{C}^{n^2}$ le produit scalaire défini en (I-25).

De manière analogue, on peut définir des opérateurs de création et d'annihilation que l'on notera (puisque les variables des matrices M(n) sont représentées à l'aide de deux indices) :

$$\begin{aligned} z_{ij} &: f \in F \to z_{ij} \, . \, f \\ d_{ij} &: f \in F \to \frac{\partial}{\partial z_{ij}} f \end{aligned} \qquad \text{(I-26)}$$

On peut aussi définir les vecteurs caractéristiques de (F), c'est-à-dire les fonction $e_w \in$ (F) telles que $e_w(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(w.z)$ qui vérifient $\forall f \in$ (F) $(e_w, f) = f(w)$.

3. *Espaces de Bargmann-Moshinsky*

A. Définition

Sur (F) l'espace de Fock sur M(n) on définit les opérateurs

$$\Gamma_{jk} : f \longrightarrow \sum_{h=1}^{n} z_{jh} \, d_{kh} \, f \qquad \text{(I-27)}$$

où z_{jh} et d_{kh} sont les opérateurs de création et d'annihilation définis en (I-26).

A l'aide de ces opérateurs on construit les espaces de Bargmann-Moshinsky $(B)^m$:

Soit $\{m_1, \dots m_n\}$ un ensemble d'entiers positifs ou nuls. On définit

$$B^{m_1, \dots m_n} \quad \text{(noté encore } B^m\text{)}$$

l'espace des fonctions f de F qui vérifient :

$$\begin{cases} \Gamma_{jk} f = 0 & 1 \leqslant j < k \leqslant n & \text{(I-28)} \\ \Gamma_{jj} f = m_j f & 1 \leqslant j \leqslant n & \text{(I-29)} \end{cases}$$

Cette définition implique qu'une fonction $f \in B^m$ est homogène de degré m_j en la ligne z_j. , en effet

$\Gamma_{jj} f = \sum_k z_{jk} \dfrac{\partial f}{\partial z_{jk}} = m_j f$ est exactement le critère d'Euler.

Observation : ((9))

$B^{m_1, \dots m_n}$ est vide sauf si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \dots \geqslant m_n \qquad \text{(I-30)}$$

Démonstration :

On calcule $[\Gamma_{ij}, \Gamma_{k\ell}]$

$$[\Gamma_{ij}, \Gamma_{k\ell}] = [\sum_s z_{is} d_{js}, \sum_m z_{km} d_{\ell m}]$$

$$= \sum_s \sum_m \left[z_{is} d_{js} , z_{km} d_{\ell m}\right]$$

$$= \sum_s \sum_m \{z_{is} d_{js} (z_{km} d_{\ell m}) - z_{km} d_{\ell m} (z_{is} d_{js})\}$$

$$= \sum_s \sum_m \left[z_{is} d_{js} (z_{km}) d_{\ell m} + z_{is} z_{km} d_{js} d_{\ell m}\right.$$

$$- z_{km} d_{\ell m} (z_{is}) d_{js} - z_{km} z_{is} d_{\ell m} d_{js}\}$$

$$= \sum_s \sum_m \{z_{is} d_{\ell m} \delta_{jk} \delta_{sm} - z_{km} d_{js} \delta_{\ell i} \delta_{ms}$$

$$+ z_{is} z_{km} d_{js} d_{\ell m} - z_{km} z_{is} d_{\ell m} d_{js} \}$$

(car $\quad d_{js} z_{km} = z_{km} d_{js} + \delta_{jk} \delta_{sm}$)

$$= \sum_s \{z_{is} d_{\ell s} \delta_{jk} - z_{ks} d_{js} \delta_{\ell i}\}$$

$$= \Gamma_{i\ell} \delta_{jk} - \Gamma_{kj} \delta_{\ell i}$$

Donc $\left[\Gamma_{ij} , \Gamma_{k\ell}\right] = \Gamma_{i\ell} \delta_{jk} - \Gamma_{kj} \delta_{\ell i}$ (I-31)

Soit $f \in B^m$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tq $i > j$ on calcule $(\Gamma_{ij} f, \Gamma_{ij} f)$

(par définition du produit scalaire, c'est une quantité positive).

$$0 < (\Gamma_{ij} f \,,\, \Gamma_{ij} f) = (\Gamma_{ij}^{*} \Gamma_{ij} f \,,\, f)$$

$$= (\Gamma_{ji} \Gamma_{ij} f \,,\, f)$$ car les opérateurs d et z sont adjoints.

Or $$[\Gamma_{ji} \,,\, \Gamma_{ij}] = \Gamma_{ji} \Gamma_{ij} - \Gamma_{ij} \Gamma_{ji}$$

$$= \Gamma_{jj} - \Gamma_{ii} \qquad \text{par} \qquad \text{(I-31)}$$

d'où

$$(\Gamma_{ji} \Gamma_{ij} f \,,\, f) = (\Gamma_{jj} f \,,\, f) - (\Gamma_{ii} f \,,\, f) + (\Gamma_{ij} \Gamma_{ji} f \,,\, f)$$

par linéarité du produit scalaire.

$$= m_j (f,f) - m_i (f,f) + (\Gamma_{ji}^{*} \Gamma_{ji} f,f)$$

par définition de Ⓑ^{m}

$$= (m_j - m_i) (f,f) + (\Gamma_{ji} f \,,\, \Gamma_{ji} f)$$

$$= (m_j - m_i) (f,f)$$ par déf de Ⓑ^{m}

donc $(\Gamma_{ij} f \,,\, \Gamma_{ij} f) = (m_j - m_i) (f,f)$ pour $i > j$

comme $(\Gamma_{ij} f \,,\, \Gamma_{ij} f)$ et (f,f) sont positifs, $m_j - m_i$ doit être positif pour $i > j$, d'où $m_j \geqslant m_i$ pour $j < i$

c'est-à-dire si il existe un élément f dans $(B)^{m_1 \ldots m_n}$ alors

$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$ et réciproquement.

Les sous-espaces $(B)^m$ peuvent être définis de manière différente .

Proposition :

> La condition (I-28) est équivalente à la condition
>
> $$f(gz) = f(z) \quad \forall\, g \in (N)_n \quad , \forall\, z \in M(n) \qquad \text{(I-32)}$$
>
> où $(N)_n$ désigne l'ensemble $\{g \mid g \in GL\,(n,\mathbb{C}) \text{ et } g_{jj} = 1,$
>
> $g_{jk} = 0 \text{ si } 1 \leqslant j < k \leqslant n\}$

Démonstration :

$(N)_n$ est donc le sous-groupe de GL$(n,\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale centrale.

$$\Gamma_{jk}\, f = 0 \quad (j < k) \iff \sum_{h=1}^{n} z_{jh} \frac{\partial f}{\partial z_{kh}} = 0 \qquad \begin{cases} j < k \\ z \in M(n) \end{cases}$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial z_{kh}} = 0 \qquad \begin{array}{l} \forall\, 1 \leqslant h \leqslant n \\ 1 < k \leqslant n \end{array}$$

$\iff$ f indépendant des variables z_{kh}

où $1 \leqslant h \leqslant n$

$1 < k \leqslant n$

$\iff f(gz) = f(z)$ car le produit par g de z

ne modifie pas les éléments z_{1h}

$1 \leqslant h \leqslant n$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ g_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ z'_{21} & \cdots & z'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ z'_{n1} & \cdots & z'_{nn} \end{pmatrix}$$

où z'_{ij} désigne les éléments qui ont subi une modification lors de la multiplication par g.

Proposition :

> La condition (I-29) est équivalente à la condition :
>
> $$f(\delta z) = \delta^m f(z) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{D}_n \,,\ \forall\, z \in M(n) \qquad \text{(I-33)}$$
>
> où $\mathbb{D}_n$ désigne l'ensemble $\left\{ \delta \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ tq } \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \right\}$ et δ^m désigne le produit
>
> $$\delta_1^{m_1}\, \delta_2^{m_2} \cdots \delta_n^{m_n}$$

En effet (I-29) implique qu'une fonction $f \in \text{Ⓑ}^m$ est homogène de degré m_j en la ligne z_{j}. (I-34)

D'autre part, multiplier $z \in M(n)$ par $\delta \in \text{Ⓓ}_n$ revient à multiplier $z_{j.}$ par δ_j pour $j = 1, \dots n$

En effet :

$$\delta z = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_1 z_{11} & \delta_1 z_{12} & \dots & \delta_1 z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_n z_{n1} & \delta_n z_{n2} & \dots & \delta_n z_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc si on note $f(z)$ comme $f(z_{1.}, z_{2.}, \dots z_{n.})$ lorsqu'on considère z comme groupement des n lignes $z_{1.}, \dots z_{n.}$ on a :

$$f(\delta z) = f(\delta_1 z_{1.}, \delta_2 z_{2.}, \dots \delta_n z_{n.})$$

$$= \delta_1^{m_1} \delta_2^{m_2} \dots \delta_n^{m_n} f(z_{1.}, z_{2.}, \dots z_{n.}) \text{ par (I-34)}$$

$$= \delta^m f(z).$$

B. La structure d'une fonction dans Ⓑ^m ((5), (6))

Notations préliminaires

On notera par

$\Delta^{i_1 \dots i_d}_{j_1 \dots j_d}(z)$ le déterminant de la matrice $(z_{i_a j_b})_{a,b=1\dots d}$

formée au moyen des lignes i_a et des colonnes j_b.

Autres notations :

$$\Delta_{j_1 \dots j_d}(z) = \Delta^{1 \dots d}_{j_1 \dots j_d}(z)$$

$$\Delta^{i_1 \dots i_d}(z) = \Delta^{i_1 \dots i_d}_{1 \dots d}(z) \tag{I-35}$$

$$\Delta(d \,;\, z) = \Delta^{1 \dots d}_{1 \dots d}(z)$$

où $z \in M(n)$ et $d = 1, \dots n$.

Caractérisation d'une fonction dans $(B)^m$

Parce qui précède on peut caractériser une fonction de $(B)^m$ par les propriétés suivantes :

$f \in (B)^m \iff$. f analytique sur $\mathbb{C}$
. $f(gz) = f(z) \quad \forall\, g \in (N)_n$
. $f(\delta z) = \delta^m f(z) \quad \forall\, \delta \in (D)_n$
avec $z \in M(n)$

On définit $(B)_o$ l'espace des fonctions qui s'expriment comme combinaison linéaire des fonctions des espaces $(B)^m$.

On remarque :

$$\boxed{\text{Si } f \in (B)_o \text{ alors } f \text{ vérifie } f(gz) = f(z)\ \forall\, g \in (N)_n}$$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété P_1

> Chaque fonction f de $Ⓑ_o$ s'exprime comme une fonction polynomiale des sous-déterminants
>
> $$\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z) \quad d = 1, \ldots n. \qquad \text{(I-36)}$$

La démonstration de cette assertion découle des propriétés des invariants par rapport à un groupe de transformation, elle nécessite une introduction à la théorie des invariants et pour cette raison, elle est faite en annexe 2.

En appliquant cette propriété aux espaces $Ⓑ^m$ on montre la propriété qui suit :

Propriété P_2

> Supposons $Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ non vide
>
> alors :
>
> $$f \in Ⓑ^{m_1 \ldots m_n} \iff f(z) = P(\Delta_1(z), \ldots \Delta_{j_1 \ldots j_d}(z), \ldots, \Delta_{1 \ldots n}(z))$$
>
> où P est un polynome de degré $(m_d - m_{d+1})$ en l'argument $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$ pour d=1,...,n et avec
>
> $$m_{n+1} = 0 \qquad \text{(I-37)}$$

Démonstration :

Puisque $Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ et non vide on a par (I-30) :

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$$

Puisque $f \in Ⓑ^m$ et $Ⓑ^m \subset Ⓑ_o$ on déduit :

$f \in Ⓑ_o$ et par (I-36) f est un polynôme des sous-déterminants $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$ $d = 1, \ldots n$

De plus $f \in Ⓑ^m$ implique : f vérifie (I-33), c'est-à-dire

$$f(\delta z) = \delta_1^{m_1} \delta_2^{m_2} \ldots \delta_n^{m_n} f(z)$$

$$= \delta_1^{m_1-m_2} (\delta_1 \delta_2)^{m_2-m_3} \ldots (\delta_1 \ldots \delta_n)^{m_n-m_{n+1}} f(z)$$

$$\text{où } m_{n+1} = 0 \qquad \text{(I-38)}$$

D'autre part $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(\delta z) = \delta_1 \ldots \delta_d \quad \Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$.

Donc, si on écrit f comme un polynôme des sous-déterminants $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$, ce polynôme devra être de degré

$m_1 - m_2$ en $\Delta_1(z)$

$m_2 - m_3$ en $\Delta_{12}(z)$

$\vdots$

$m_n - m_{n+1}$ en $\Delta_{12\ldots n}(z)$ pour que (I-38) soit vrai.

Donc (I-37) est vérifié.

CHAPITRE II

REPRESENTATIONS

1. *Introduction aux représentations de groupes*

A. Définitions

Une représentation d'un groupe G est un groupe d'opérateurs (que l'on peut aussi envisager comme un groupe matriciel) auquel le groupe G est homomorphe.

Soit G un groupe abstrait, L un espace vectoriel réel ou complexe de dimension n (on n'envisage que les espaces de dimension finie), Γ un groupe d'opérateurs linéraires sur L .

Une représentation de G est un homomorphisme D de G dans l'ensemble des opérateurs Γ, c'est-à-dire pour tout a, b $\in$ G, il existe D(a), D(b) $\in \Gamma$ tq D(a) D(b) = D(ab)	(II-1)

Un cas important de représentation est la représentation unitaire, ce caractère unitaire ne peut se définir que s'il y a un produit scalaire sur l'espace vectoriel L.

Notation : (.,.) désigne ce produit scalaire.

> Une représentation est unitaire si
>
> $(D(a)u \,,\, D(a)v) = (u,v) \quad \forall\, u,v \in L,\ \forall a \in G$
>
> ou de façon équivalente (II-2)
>
> $\forall\, a \in G,\ D(a)^{*} D(a) = I$ où $D(a)^{*}$ représente l'opérateur adjoint à l'opérateur $D(a)$ par rapport au produit scalaire.

On peut définir une relation d'équivalence sur les représentations:

> Soient $D(a)$ et $D'(a)$ deux représentations dans les espaces respectifs L et L'.
>
> Ces représentations sont équivalentes si il existe un isomorphisme S entre L et L' tq
>
> si $u' = Su$ alors $D'(a)u' = SD(a)u \quad u \in L,\ u' \in L'$ (II-3)
>
> ou encore $D'(a)Su = SD(a)u \quad \forall\, u \in L$
>
> Puisque cette dernière relation doit être vérifiée pour tout $u \in L$, $SD(a) = D(a)S$

A partir de deux représentations dont $D^1(a)$ et $D^2(a)$ désignent les opérateurs de représentations respectifs, il est possible d'en construire une nouvelle : la somme directe des représentations D^1 et D^2, notée $D^1 \oplus D^2$.

La somme directe de deux représentations D^1, D^2 définies sur les espaces vectoriels respectifs L_1, L_2 est définie sur la somme directe des espaces : $L_1 \oplus L_2$ Tout vecteur u de $L_1 \oplus L_2$ s'écrit de façon unique sous la forme $u_1 + u_2$ avec $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$ et $(D^1 \oplus D^2(a))\,(u) \overset{\text{déf}}{=} (D^1(a))\,(u_1) + (D^2(a))\,(u_2)$	(II-4)

Par cette définition, la matrice $(D^1 \oplus D^2)(a) = \begin{pmatrix} D^1(a) & 0 \\ 0 & D^2(a) \end{pmatrix}$

Si une représentation est équivalente à la somme directe d'autres représentations, elle est dite *complètement réductible*.

Dans le cas de représentations unitaires, toute représentation non complètement réductible est dite *irréductible*.

Proposition (p. 69 ,(7)).

Une représentation D dans un espace L est complètement réductible si L peut être écrit comme la somme directe de deux sous-espaces M et N, chacun d'eux invariant pour tout D(a).	(II-5)

Un sous espace M est invariant pour D(a)
si $D(a)\,u \in M \quad \forall\, u \in M$

B. <u>Exemple de représentation</u> ((7))

Représentation du groupe SU(2) dans l'espace des polynômes de 2 variables homogènes de degré 2j (j = 0, 1/2, 1, ...), noté D_j.

L'ensemble des fonctions $e^m(z) = \dfrac{z_1^{j+m} \quad z_2^{j-m}}{\left[(j+m)\ !\ (j-m)\ !\right]^{1/2}}$

est une base de ces espaces de représentations.

Et donc, chacun des espace D_j est de degré $2j + 1$ puisque m peut prendre toutes les valeurs depuis $-j$ jusque j.

Soit $u \in SU(2)$, la représentation de u dans D_j est par (II-1) un opérateur $D^j(u)$ qui doit agir sur l'espace D_j.

On peut le définir de la façon suivante :

$$\left[D^j(u)f\right]\ (z) = f(u^{-1}z) \quad \text{où } f \in D_j \ , \ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Les éléments matriciels vérifent l'égalité :

$$e^{m_1}\ (u^{-1}z) = \sum_{m_2=-j}^{j} D^j_{m_2 m_1}(u)\ e^{m_2}(z)$$

Soit $u^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$e^{m_1}\ (u^{-1}z) = \frac{(a_{11}z_1 + a_{12}z_2)^{j+m_1} \quad (a_{21}z_1 + a_{22}z_2)^{j-m_1}}{(j - m_1)\ !^{1/2} \quad (j + m_1)\ !^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\left[(j - m_1)\ !\ (j + m_1)\ !\right]^{1/2}} \ \frac{(j + m_1)\ !}{\alpha\ !\ (j+m_1-\alpha)\ !} \ \frac{(j - m_1)\ !}{\beta !\ (j-m_1-\beta)\ !}$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta} (a_{11}z_1)^{j+m_1-\alpha} \ (a_{12}z_2)^{\alpha} \ (a_{21}z_1)^{j-m_1-\beta} \ (a_{22}z_2)^{\beta}$$

D'où l'on déduit :

$$D_{m_2,m_1} = \frac{\left[(j+m_2)!\ (j-m_2)!\ (j+m_1)!\ (j-m_1)!\right]^{1/2}}{(j+m_1-\alpha)!\ \ !\ \ (m_2-m_1+\alpha)!\ \ (j-m_2-\alpha)!}$$

$$\times \sum_{\alpha} (a_{11})^{j+m_1-\alpha} \quad (a_{12})^{\alpha} \quad (a_{21})^{m_2-m_1+\alpha} \quad (a_{22})^{j-m_2-\alpha}$$

Cette dernière expression peut encore s'écrire sous la forme d'un polynôme hypergéométrique :

$$D_{m_2,m_1} = \frac{\left[(j+m_2)!\ (j-m_2)!\ (j+m_1)!\ (j-m_1)!\right]^{1/2}}{(j-m_1)!\ (j-m_2)!\ (m_2+m_1)!} (a_{11})^{m_2+m_1}$$

$$(a_{12})^{j-m_2} \quad (a_{21})^{j-m_1}$$

$$\times \ {}_2F_1 \left(-j+m_1,\ -j+m_2,\ m_2+m_1+1,\ \frac{a_{22}\ a_{11}}{a_{12}\ a_{21}}\right) \tag{1}$$

(si $m_2 + m_1 \geqslant 0$)

$$D_{m_2,m_1} = \frac{\left[(j+m_2)!\ (j-m_2)!\ (j+m_1)!\ (j-m_1)!\right]^{1/2}}{(j\ m_1)!\ (j-m_2)!\ (-m_2\ -m_1)!} (a_{22})^{-m_2\ -m_1}$$

$$(a_{12})^{j+m_1} \quad (a_{21})^{j+m_2}$$

$$\times \ {}_2F_1 \left(-j-m_2,\ -j-m_1,\ -m_2-m_1+1,\ \frac{a_{22}\ a_{11}}{a_{12}\ a_{21}}\right) \tag{2}$$

(si $m_2 + m_1 \leqslant 0$)

$$\text{où } {}_2F_1(-a, -b, c; x) = \sum_{r=o}^{\min(a,b)} \frac{a!\, b!\, (c-1)!}{(a-r)!\, (b-r)!\, (c+r+1)!} \cdot \frac{x^r}{r!}$$

$$(a \geqslant o\ ,\ b \geqslant o\ ,\ c \geqslant o)$$

Et donc, les propriétés concernant les éléments matriciels déduites au moyen de la théorie des représentations fournissent des propriétés à ces polynômes hypergéométriques.

2. *Représentation des groupes U(n) dans l'espace de Fock* Ⓕ

A. Définitions

Soit $u \in U(n) = \{u \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ tels que } UU^* = I\}$

A $u \in U(n)$ on associe un opérateur de représentation $D(u)$, noté aussi L_u

$$\boxed{L_u : Ⓕ \to Ⓕ \text{ tel que } (L_u f)(z) \overset{\text{déf}}{=} f(zu),\ z \in M(n)} \qquad \text{(II-6)}$$

Il s'agit d'une représentation :

(i) L_u est un opérateur linéaire en f, $f \in$ Ⓕ

(ii) Soient $U, U' \in U(n)$, $D(u\,u') = D(u)\, D(u')$

En effet, $L_{u\,u'} f = f((u\,u')z) = f(u(u'z))$

$= L_u\, f\,(u'z)$

$= L_u\, (L_{u'} f)(z)$

Cette représentation est unitaire :

soient $f,\ g \in Ⓕ$, $(L_u f,\ L_u g) = (f,g)$

En effet, $(L_u f,\ L_u g) = \int f(zu)\ g(zu)\ d\gamma(z)$

$= \int f(w)\ \ g(w)\ \ d\gamma(wu^{-1})$ par changement de variable

$= \int f(w)\ \ g(w)\ \ d\ \gamma(w)$

car la mesure $d\gamma(z)$ est invariante sous les transformations unitaires puisque

$$\exp(-(zu).(zu)) = \exp(-(z.(zuu^{*})) = \exp(-(z.z)$$

3. *Représentations dans les espaces Ⓑ^{m}*

A. Définitions

Par (I-33) , $f \in Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ (noté $Ⓑ^m$) <==> f est une fonction développable en série telle que

$$f(\delta g z) = \delta_1^{m_1} \ldots \delta_n^{m_n}\ f(z)$$

$$z \in M(n)\ g \in Ⓝ_n,\ \delta \in Ⓓ_n$$

On désigne par $L^{m_1,m_2,\ldots m_n}$ ou L^m la restriction de la représentation L à l'espace $Ⓑ^m$.

$$\boxed{L_u^m : Ⓑ^m \to Ⓑ^m \text{ tel que } (L_u^m f)\ (z) \overset{\text{déf}}{=} f(zu),\ z \in M(n)} \qquad \text{(II-7)}$$

Proposition ((5)) :

Si les inégalités $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots m_n$ sont satisfaites, la représentations de U(n) dans $Ⓑ^m$ est une représentation irréductible et on obtient une liste complète des représentations unitaires irréductibles de SU(n) en prenant les représentations pour $m_n^n = 0$.

On peut aussi obtenir une liste complète de représentations unitaires irréductibles de U(n) en permettant à m_n^n d'appartenir à $\mathbb{Z}$ plutôt qu'à $\mathbb{N}$.

CHAPITRE III

"REPRODUCING KERNEL" D'UN ESPACE D'UN OPERATEUR. OPERATEURS DE BRANCHEMENT.

1. *"Reproducing kernel"*

A. Définitions

Soit F un espace de Fock sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie. Soient z,w deux vecteurs de cet espace d'Hilbert.

Définition :

Le "Reproducing Kernel" de l'espace F , noté K(z,w) est un ensemble de vecteurs de F , indexés par w, notés $K_w(z)$ et définis par la propriété :

$$\boxed{(K_w, f) = f(w) \quad \forall f \in F \quad (.,.) \text{ est le produit scalaire dans } F.} \qquad \text{(III-1)}$$

Ce "Reproducing kernel" coïncide en fait avec l'ensemble des "vecteurs principaux" définis dans le chapitre I.
En effet, soit $F = \mathbb{F}_n$, l'espace de Fock sur $\mathbb{C}^n$.

Si $K_w(z)$ appartient à $\mathbb{F}_n$, $K_w(z) = \sum_h \beta_h z^{[h]}$

Si f appartient à $\mathbb{F}_n$, $f = \sum_h \alpha_h z^{[h]}$

$(K_w, f) = f(w) \quad \forall f \in \mathbb{F}_n$ par définition de $K_w(z)$

$$\Rightarrow \sum_h \overline{\beta}_h \alpha_h [h!] = \sum_h \alpha_h w^{[h]} \quad \forall (\alpha_h)$$

$$\Rightarrow \beta_h = \frac{\overline{w}^{[h]}}{[h!]}$$

$$\Rightarrow K_w(z) = \sum_h \overline{w}^{[h]} \frac{z^{[h]}}{[h!]}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_w(z) = e_w(z)} \quad \text{par définition de } e_w(z) \qquad \text{(III-2)}$$

Définition

> Si G est un sous-espace vectoriel de F, le "Reproducing kernel" de G, noté $K_G(z,w)$ est un ensemble de vecteurs de G, indexés par w, notés $K_{G,w}(z)$ et définis par la propriété (III-3)
>
> $(K_{G,w}, f) = f(w) \quad \forall f \in G$

En particulier, les vecteurs $K_w(z)$ du "Reproducing kernel" de F qui appartiennent au sous-espace G sont des vecteurs de $K_G(z,w)$.

Soit F, F' deux espaces de Fock définis respectivement sur les Hilberts complexes de dimension finie : E et E'

Définition :

Si M est un opérateur linéaire borné défini sur F et à valeurs dans F', le "Reproducing kernel" de M est un ensemble de vecteurs de F', notés $\mathbb{M}(z,w)$ tels que $\mathbb{M}(z,w) = M(e_w)(z)$, $w \in E$, $z \in E'$	(III-4)

Par définition de l'opérateur e_z, on a aussi :

$$\mathbb{M}(z,w) = (e_z , M(e_w)) \quad w \in E,\ z \in E' \tag{III-5}$$

B. Propriétés

Propriété 1

Soit $\{f_j\}$ une base orthonormale du sous-espace G de F, alors : $K_G(z,w) = \sum_j f_j(z)\, \overline{f}_j(w)$	(III-6)

Démonstration :

$$(K_{G,w} , f) = f(w) \quad \forall f \in G \text{ par définition de } K_{G,w}$$

$K_{G,w}$ et f appartiennent à G, donc sont des combinaisons linéaires des éléments de base.

$$\Rightarrow \left(\sum_j \beta_j f_j \, , \sum_i \alpha_i f_i \right) = \sum_i \alpha_i f_i (w) \quad \forall (\alpha_i) \; \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Par la continuité et bilinéarité du produit scalaire.

$$\Rightarrow \sum_j \sum_i \overline{\beta_j} \alpha_i \; (f_j \, , f_i) = \sum_i \alpha_i f_i(w) \qquad \forall (\alpha_i)$$

$$\Rightarrow \sum_i \overline{\beta_i} \alpha_i = \sum_i \alpha_i f_i(w) \qquad \forall (\alpha_i)$$

$$\Rightarrow \overline{\beta_i} = f_i(w)$$

$$\Rightarrow K_{G,w}(z) = \sum_i \overline{f_i(w)} \, f_i(z)$$

Propriété 2

$$\boxed{\mathbb{M}^* (z,w) = \overline{\mathbb{M}(w,z)} \qquad \text{où } M^* \text{ est l'opérateur adjoint}} \qquad \text{(III-7)}$$

Démonstration :

$$\mathbb{M}^*(z,w) = (e_z \, , M^*(e_w)) \quad \text{par définition de } e_z \, .$$

$$= (M(e_z), e_w) \quad \text{par définition de l'opérateur adjoint}$$

$$= \overline{(e_w \, , M(e_z))} \quad \text{par symétrie hermitienne}$$

$$= \overline{\mathbb{M}(w,z)} \quad \text{par (III-5)}$$

Propriété 3

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f \in F \text{ alors} \\ M(f(z)) = \displaystyle\int \mathbb{M}(z,w) \;\; f(w) \;\; d\gamma(w) \end{array}} \qquad \text{(III-8)}$$

Démonstration :

$$M\,f(z) = (e_z \, , Mf) \quad \text{par définition de } e_z$$

$$= (M^* (e_z) \, , f) \quad \text{par définition de l'opérateur adjoint.}$$

$$= \int \overline{M^{*}(e_z)\ (w)}\ f(w)\ d\gamma(w) \quad \text{par déf. du produit scalaire}$$

$$= \int \overline{\mathbb{M}^{*}(w,z)}\ f(w)\ d\gamma(w) \quad \text{par (III-5)}$$

$$= \int \overline{\overline{\mathbb{M}\ (z,w)}}\ \ f(w)\ d\gamma(w) \quad \text{par (III-7)}$$

$$= \int \mathbb{M}\ (z,w)\ \ f(w)\ d\gamma(w).$$

Propriété 4

Si $\{f_j\}$ est une base orthonormale de F, alors $$\mathbb{M}\ (z,w) = \sum_k\ (Mf_k)\ (z)\ \overline{f}_k(w)$$	(III-9)

Démonstration :

$$\mathbb{M}\ (z,w) = M(e_w)\ (z) \qquad \text{par (III-4)}$$

$$= M\big(\sum_k f_k(z)\ \overline{f}_k(w)\big) \quad \text{par (III-6)}$$

$$= \sum_k\ (Mf_k)\ (z)\ \overline{f}_k(w) \quad \text{par linéarité et continuité de M.}$$

Propriété 5

Si P désigne la projection orthogonale de F sur le sous espace G alors, $K_G(z,w) = \mathbb{P}\ (z,w)$	(III-10)

Démonstration :

On a par (III-6) :

$$K_G(z,w) = \sum_j f_j(z)\,\overline{f_j}(w) \qquad \text{où } \{f_j\} \text{ est une base orthonormale de } G.$$

Si on désigne par $\{e_j\}$ la base orthonormale du sous-espace orthogonal à G, noté G',

$\{e_j\}$ U $\{f_j\}$ fournit une base orthonormale de F que l'on note $\{h_j\}$ et pour laquelle les égalités suivantes sont vérifiées :

$$P\,h_j = h_j \qquad \text{si} \quad h_j = f_j$$

$$P\,h_j = 0 \qquad \text{si} \quad h_j = e_j$$

Par conséquent, $K_G(z,w) = \sum_j P\,h_j(z)\,\overline{h_j}(w)$ avec $\{h_j\}$ base orthonormale de F

$$= \mathbb{P}\ (z,w) \text{ par (III-9).}$$

2. *Le "Reproducing Kernel" de* Ⓑ^{m}

Etudions le cas particulier de la définition (III-3) où l'espace de Fock F est l'espace Ⓕ et le sous-espace G est le sous-espace Ⓑ^{m}. On désigne par $K^m(z,w)$ le "reproducing kernel" $K_{Ⓑ^m}(z,w)$ et par définition il vérifie :

$$\boxed{\forall\ w \text{ fixé } \ (K_w^m\ , f) = f(w) \quad \forall\ f \in Ⓑ^m} \qquad \text{(III-11)}$$

et en particulier, si I désigne la matrice identité de M(n), $(K_I^m\ , f) = f(I)$

Propriété 1

$$\boxed{K^m\ (z,w) \ = \ K^m\ (z\ w^*,\ I)} \qquad \text{(III-12)}$$

Démonstration :

Par (III-10) et (III-4) si P^m est l'opérateur de projection orthogonale sur Ⓑ^{m} on a :

$$K^m(z,w) = (e_z\ ,\ P^m\ e_w) \qquad \text{(III-13)}$$

D'autre part les opérateurs de projection commutent avec les opérateurs L_u , $u \in U(n)$, car les espaces Ⓑ^{m} sont invariants sous la représentation L_u.

On peut donc écrire :

$$(e_z\ ,\ P^m\ L_u\ e_w) = (e_z,\ L_u\ P^m\ e_w)$$

$$= (L_{u^*}\ e_z\ ,\ P^m\ e_w) \text{ puisque } u \in U(n)$$

Or $e_w(x) = \exp\ (w,x) = \exp\ (\mathrm{Tr}\ (w^* x))$

d'où $L_u\ e_w(x) = e_w\ (xu) = \exp\ (\mathrm{Tr}\ (w^*\ x\ u)$

$= \exp (\mathrm{Tr}\, (uw^* x))$

car la trace est invariante par transformation unitaire.

$= e_{wu^*} (x)$

où x élément arbitraire de $M(n)$

Donc $L_u\, e_w = e_{wu^*}$ et $L_{u^*}\, e_z = e_{zu}$ (III-14)

Par conséquent : $(e_z\, , P^m\, L_u\, e_w) = (L_{u^*}\, e_z\, , P^m\, e_w)$

par (III-14)

donc, $(e_z\, , P^m\, e_{wu^*}) = (e_{zu}\, , P^m\, e_w)$

par (III-13)

d'où, $K^m\, (z, w\, u^*) = K^m\, (zu, w)$

si $w = I$ et $u = w^*$, (III-12) est vérifié.

Cette propriété permet de restreindre l'étude de la forme $K^m(z,w)$ à celle de $K^m(z,I)$.

On sait que $K^m(z,I)$ est un élément de $Ⓑ^m$, on peut donc lui appliquer la propriété (I-37) concernant la structure d'une fonction dans $Ⓑ^m$. Par conséquent :

$$\exists\ P \text{ polynôme} \quad K^m(z,I) = P\, (\Delta(1,z),\ \ldots,\ \Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)\ \ldots\ \Delta(n,z))$$

où P est homogène de degré e_d en la variable $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$

$$d = 1, \ldots n$$

avec $e_d = m_d - m_{d+1}$ $\quad d = 1, \ldots n-1$

$e_n = m_n$

Parmi tous les monômes qui interviennent dans l'écriture de P apparaît en particulier :

$$\Delta^e(z) = \Delta(1,z)^{e_1}\ \Delta(2,z)^{e_2} \ldots \Delta(n,z)^{e_n}$$

On démontre en fait que P est constitué de ce seul monôme.
C'est ce qu'affirme la propriété :

Propriété 2

$$\boxed{\begin{array}{c} K^m(z,I) = C.\ \Delta^e(z) \\ \\ \text{où C est une constante} \end{array}} \qquad \text{(III-15)}$$

Démonstration :

Cette démonstration se fait en trois pas.
On désigne par S l'ensemble des autres monômes que $\Delta^e(z)$ qui interviennent dans l'écriture de P, monômes que l'on notera M(z). On peut alors démontrer les trois lemmes suivants :

Lemme 1 :	Si $M(z) \in S \Rightarrow M(I) = 0$	(III-16)
	D'autre part $\Delta^e(I) = 1$	(III-17)
Lemme 2 :	Si $M \in S$, alors M est orthogonal à Δ^e	(III-18)
Lemme 3 :	$K^m(z,I) = \|\|\Delta^e\|\|^{-2}\ \Delta^e(z)$	(III-19)

La démonstration de ces 3 lemmes est faite en annexe.3.

Le calcul de la constante de $\|\Delta^e\|^{-2}$ est fait dans (5)

On résume le tout par le théorème suivant :

Théorème :

$$K^m(z,w) = A\,(m_1,\dots m_n)\ \Delta^e\ (zw^*) \tag{III-20}$$

$$\text{où}\quad \Delta^e(z) = \Delta(1,z)^{e_1}\ \Delta(2,z)^{e_2} \dots \Delta(n,z)^{e_n}$$

$$e_d = m_d - m_{d+1} \qquad d = 1,\ \dots,\ n-1$$

$$e_n = m_n$$

$$A(m_1,\dots,m_n) \equiv \left(\prod_{j=1}^{n} (m_j + n-j)!\right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^{n} (m_j+m_k+k-j)\right)^{-1}$$

$$\overset{\text{not}}{=}\ A(m) \tag{III-21}$$

$\Delta^e(z)$ est appelé vecteur de poids maximal.

Ces vecteurs ont une grande importance dans la théorie des espaces de représentation.

3. *Opérateurs de branchement*

Définitions

A toute matrice M(n-1) on peut associer une matrice M(n) par l'injection canonique suivante :

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ & & \\ & & \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \\ & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-21)}$$

$L^{(m_1,\ldots m_n)}$ qui est une représentation de U(n) est donc en particulier une représentation de U(n-1) si on considère les matrices de U(n-1) comme des matrices particulières de U(n).

La définition des opérateurs de branchement est suggérée par le théorème suivant, appelé "branching law".

Théorème :

> Quand le groupe U(n) est restreint au sous-groupe de transformations linéaires d'un espace de dimension n-1, la représentation irréductible de U(n) caractérisée par le n-uple $(m_1,\ldots m_n)$ devient une représentation de U(n-1) qui est équivalente à la somme directe de toutes les représentations irréductibles caractérisées par les n-uples $(m'_1, m'_2, \ldots m'_{n-1})$ pour lesquels

(III-22)

$$m_1 \geq m'_1 \geq m_2 \geq m'_2 \geq \dots m'_{n-1} \geq m_n$$

et chacune de ces représentations apparaît dans la somme directe avec une multiplicité égale à 1.

(démonstration voir référence (8))

L'opérateur de branchement $R^m_{m'}$ est un opérateur linéaire défini sur $\boxed{B}^{m'}$ et à valeur dans $\boxed{B}^{m}$ qui permet d'échanger les représentations de U(n-1) dans $\boxed{B}^{m'}$ et dans $\boxed{B}^{m}$

$$\boxed{\begin{array}{l} R^m_{m'} \ : \ (B)^{m'} \longrightarrow (B)^{m} \\ \text{tq} \ R^m_{m'} \, L^{m'}_u = L^m_u \, R^m_{m'} \qquad u \in U(n) \end{array}} \qquad \text{(III-23)}$$

Cet opérateur est défini à une constante multiplicative près. On choisit cette constante de telle sorte que $R^m_{m'}$ soit une transformation unitaire.

4. *Le "Reproducing kernel"de l'opérateur $R^m_{m'}$*

A. Définition et propriétés

Si on note $\mathbb{R}^m_{m'}(z,w)$ le "Reproducing kernel"de l'opérateur $R^m_{m'}$,

on a $\mathbb{R}^m_{m'}(z,w) = R^m_{m'}(e_w)$ (z) par la définition (III-4)

Comme $R^{m}_{m'}$ est un opérateur de $Ⓑ^{m'}$ dans $Ⓑ^{m}$, e_w est un élément de $Ⓑ^{m'}$ et donc $w \in M(n-1)$ tandis que $z \in M(n)$.

Certaines propriétés de $\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)$ vont permettre de le caractériser et de trouver sa forme générale.

Propriété 1

$$\boxed{\mathrm{Im}\ (\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)) \quad \subset \quad Ⓑ^{m} \qquad \forall\ w \text{ fixé}} \qquad \text{(III-24)}$$

évident puisque $R^{m}_{m'}$ est un opérateur de $Ⓑ^{m'} \longrightarrow Ⓑ^{m}$

$$\text{et} \quad \mathbb{R}^{m}_{m'}\ (z,w) = R^{m}_{m'}\ (e_w)\ (z) \qquad \forall\ w \text{ fixé.}$$

Propriété 2

$$\boxed{\mathbb{R}^{m}_{m'}\ (\delta g z,w) = \delta^{m}\ \mathbb{R}^{m}_{m'}\ (z,w) \quad \begin{array}{l} \delta \in Ⓓ_n \\ g \in Ⓝ_n \end{array}} \qquad \text{(III-25)}$$

évident par la propriété 1 et la caractéristique (I-32), (I-33) de l'espace $Ⓑ^{m}$.

Propriété 3

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{m}_{m'}\ (z,\delta'\ g'\ w) = (\overline{\delta'})^{m'}\ \mathbb{R}^{m}_{m'}\ (z,w) \\ \qquad\qquad \delta' \in Ⓓ_{n-1} \\ \qquad\qquad g' \in Ⓝ_{n-1} \end{array}} \qquad \text{(III-26)}$$

Démonstration

1. On observe d'abord que $\overline{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)}$ avec z fixé est fonction de w et appartient à $Ⓑ^{m'}$. En effet,

$$\overline{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)} = \mathbb{R}^{m^*}_{m'}(w,z) = \sum (R^{m^*}_{m'} f_j)(w)\ \overline{f_j}\ (z)$$

où $\{f_j\}$ est un système orthonormal de $Ⓑ^{m}$

Or, l'image de $R^{m^*}_{m'}$ est $Ⓑ^{m'}$, donc $\overline{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)}$ comme fonction de w est un élément de $Ⓑ^{m'}$.

Pour vérifier que l'image de $R^{m^*}_{m'}$ est $Ⓑ^{m'}$ il suffit de voir que le noyau de $R^{m}_{m'}$ est l'espace nul puisque le noyau d'un opérateur est le complémentaire orthogonal de l'image de son adjoint.

Or, soit $f \in Ⓑ^{m'}$ tq $f \in \text{Ker } R^{m}_{m'}$, alors,

$$R^{m}_{m'} f = 0 \Rightarrow (f,f) = (R^{m}_{m'} f, R^{m}_{m'} f) = 0$$

puisque $R^{m}_{m'}$ est une transformation unitaire

$\Rightarrow f = 0$ puisque le produit scalaire est une forme non dégénérée.

2. Par la caractérisation de l'espace $Ⓑ^{m'}$ on peut conclure :

$$\overline{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,\ \delta'\ g'\ w)} = (\delta')^{m'}\ \overline{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)}$$

et donc $\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,\ \delta'\ g'\ w) = (\overline{\delta'})^{m'}\ \mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)$

$$\delta' \in \textcircled{D}_{n-1}\ ,\ g' \in \textcircled{N}_{n-1}\ .$$

Propriété 4

$$\boxed{\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,\ w\ u^{*}) = \mathbb{R}^{m}_{m'}(z\ u,\ w) \quad \text{si } u \in U(n-1)} \qquad \text{(III-27)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{m}_{m'}(z\ u,\ w) &= R^{m}_{m'}(e_w)(zu) \\
&= L^{m}_{u}\ R^{m}_{m'}(e_w)\ (z) \quad \text{par définition de } L^{m}_{u} \\
&= R^{m}_{m'}\ L^{m'}_{u}\ (e_w)\ (z) \quad \text{par définition de } R^{m}_{m'} \\
&= R^{m}_{m'}\ (e_{w\ u^{*}})\ (z) \\
&= \mathbb{R}^{m}_{m'}(z,\ w\ u^{*})
\end{aligned}$$

L'égalité entre $R^{m}_{m'}\ L^{m'}_{u}\ (e_w)\ (z)$ et $R^{m}_{m'}\ (e_{w\ u^{*}})\ (z)$

se justifie de la façon suivante :

$$L_u^{m'} e_w(z) = e_w(zu) = \exp(w, zu)$$

$$= \exp(w u^*, z)$$

$$= e_{wu^*}(z)$$

B. <u>Structure du "Reproducing Kernel"</u>

Au moyen des propriétés (III-25), (III-26), (III-27) du "Reproducing Kernel" de $R^m_{m'}$, opérateur de branchement, on démontre les caractérisations suivantes :

$$\mathbb{R}^m_{m'}(z,w) = \mathbb{R}^m_{m'}(zw^*, I) \quad \forall\, z \in M(n)\ ,\ \forall\, w \in GL(n-1,\mathbb{C}) \tag{III-28}$$

$$\mathbb{R}^m_{m'}(gzg', I) = \mathbb{R}^m_{m'}(z,I) \quad \forall\, g \in (N)_n\ ,\ g' \in ((N)_{n-1})^* \tag{III-29}$$

$$\mathbb{R}^m_{m'}(\delta z \delta', I) = \delta^m (\delta')^{m'}\ \mathbb{R}^m_{m'}(z,I) \quad \forall\, \delta \in (D)_n,\ \delta' \in (D)_{n-1} \tag{III-30}$$

Démonstration :

a) (III-27) est vrai $\forall\, u \in U(n-1)$.

Si $w = I$, (III-27) s'écrit $\mathbb{R}^m_{m'}(zu, I) = \mathbb{R}^m_{m'}(z, u^*)$ (III-31)

Lemme : Si f,g analytique sur $M(n)$, si $f(u) = g(u)\ \forall\, u \in U(n)$

alors, $f(z) = g(z) \quad \forall\ z \in GL\,(n,\mathbb{C})$

Démonstration voir (5).

Comme $\mathbb{R}^m_{m'}(z,w)$ est un élément de $Ⓑ^m$, il est analytique sur $M(n)$ et (III-31) est vrai $\forall\, u \in U(n-1)$, donc par le lemme

$$\mathbb{R}^m_{m'}\,(zu,\, I) = \mathbb{R}^m_{m'}\,(z,u^*) \quad \forall\, u \in GL(n-1,\, \mathbb{C}).$$

Il suffit alors de poser $u^* = w$ dans cette dernière égalité pour obtenir (III-28).

b) $\mathbb{R}^m_{m'}\,(\delta z\delta',\, I) = \mathbb{R}^m_{m'}\,(\delta z,\delta'^*)$ par (III-28)

$= (\delta')^{m'}\, \mathbb{R}^m_{m'}\,(\delta z,\, I)$ par (III-26)

$= (\delta')^{m'} (\delta)^m\, \mathbb{R}^m_{m'}\,(z,I)$ par (III-25)

donc (III-29) est vrai.

c) $\mathbb{R}^m_{m'}\,(gzg',\, I) = \mathbb{R}^m_{m'}\,(gz,\, g'^*)$ où $g'^* \in Ⓝ_{n-1}$

par (III-28)

$= \mathbb{R}^m_{m'}\,(gz,\, I)$ par (III-26)

$= \mathbb{R}^m_{m'}\,(z,\, I)$ par (III-25)

donc (III-30) est vrai.

Ces trois caractérisations vont permettre de déterminer la structure de $\mathbb{R}^m_{m'}$.

En effet, la propriété (III-29) exprime :

- l'invariance de $\mathbb{R}^m_{m'}$, sous $(N)_n$

- l'invariance de $\mathbb{R}^m_{m'}$, sous $((N)_{n-1})^*$

En utilisant le vocabulaire de la théorie des invariants (voir annexe 2) on a :

$\Delta(1,z) \ldots \Delta(n,z)$ forment une liste d'invariants typiques de base pour les invariants de $(N)_n$; donc, puisque $\mathbb{R}^m_{m'}$, est invariant sous $(N)_n$, il s'exprime comme polynôme des invariants $\Delta(1,z) \ldots \Delta(n,z)$ où on substitue aux arguments typiques $z_{\cdot a}$, tous les arguments colonnes $z_{\cdot j_a}$, $a = 1,..n$, dans toutes les permutations possibles.

Par conséquent pour respecter l'invariance sous $(N)_n$ $\mathbb{R}^m_{m'}$, s'exprime comme un polynôme en les déterminants formés à partir des lignes supérieures de z, à savoir $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$ $d = 1,\ldots n$.

$\Delta(1;z) \ldots \Delta(n-1 ; z)$ forme une liste d'invariants typiques de base pour les invariants de $(N)_{n-1}$; donc, puisque $\mathbb{R}^m_{m'}$, est invariant sous $((N)_{n-1})^*$, il s'exprime comme polynôme des invariants $\Delta(1;z) \ldots \Delta(n-1;z)$ où on substitue, cette fois, aux arguments typiques (qui sont maintenant les colonnes $z_{b\cdot}$) tous les arguments lignes $z_{j_b\cdot}$, $b = 1, \ldots \underline{\underline{n}}$ dans toutes les permutations possibles.

N.B. : Dans ce cas, ce sont les lignes qui sont affectées car on traite l'invariance sous $((N)_{n-1})^*$ et non plus sous $(N)_{n-1}$

Par conséquent pour respecter l'invariance sous $((N)_{n-1})^*$ $\mathbb{R}^m_{m'}$, s'exprime comme un polynôme en les déterminants formés *à partir des premières colonnes de z et éventuellement de la $n^{ième}$,*

à savoir $\Delta^{j_1 \ldots j_d}(z)$ $\quad d = 1, \ldots n-1$

et $\Delta^{j_1 \ldots j_{d-1}\, n}(z)$ $\quad d = 1, \ldots n-1$

En regroupant le tout on obtient un premier résultat :

Etant donné (III-29), $\mathbb{R}^m_m$, est un polynôme P des déterminants : $$\Delta(d,z) \equiv \Delta_{1 \ldots d}(z) \; ; \; d = 1, \ldots, n-1$$ $$\tilde{\Delta}(d;z) \equiv \Delta_{1 \ldots d-1,n}(z) \; ; \; d = 1, \ldots, n \qquad \text{(III-32)}$$

Ce polynôme vérifie la propriété (III-30)
Celle-ci permet de déterminer le degré de P en chacune de ses variables.
Pour cela, on considère la forme suivante :

$$\tilde{\Delta}(1;z)^{f_1} \; \Delta(1;z)^{g_1} \; \tilde{\Delta}(2;z)^{f_2} \; \Delta(2;z)^{g_2} \; \ldots$$

$$\ldots \; \Delta(n-1,z)^{g_{n-1}} \; \tilde{\Delta}(n,z)^{f_n}$$

où $f = (f_1, \ldots, f_n)$

$g = (g_1, \ldots, g_n)$

sont des familles ordonnées d'entiers non négatifs.
On désigne cette forme par $\tilde{\Delta}^f \, \Delta^g(z)$.

On remarque que cette forme est un monôme qui vérifie l'invariance sous $(N)_n$ et $(N)_{n-1}^{*}$.

De plus $\tilde{\Delta}^f \Delta^g (\delta z) = \delta_1^{\tilde{m}_1} \ldots {}_n^{\tilde{m}_n} \tilde{\Delta}^f \Delta^g (z) \quad \forall\, \delta \in D_n$

où $\tilde{m}_j = f_j + g_j + \ldots + g_{n-1} + f_n$

et $\tilde{\Delta}^f \Delta^g (z\delta') = (\delta_1')^{\tilde{m}_1'} \ldots (\delta'_{n-1})^{\tilde{m}'_{n-1}} \tilde{\Delta}^f \Delta^g (z)$

où $\tilde{m}_j' = g_j + f_{j+1} + \ldots + g_{n-1} + f_n$

C'est en effet une conséquence des propriétés des déterminants qui interviennent dans $\tilde{\Delta}^f \Delta^g (z)$.

Si on impose $\tilde{m}_j = m_j$

$\tilde{m}_j' = m_j'$

la forme $\tilde{\Delta}^f \Delta^g (z)$ vérifie exactement les propriétés (III-29) et (III-30); elle peut donc convenir comme forme pour $\mathbb{R}^m_{m'}$; il suffit alors de déterminer f et g au moyen des équations :

$$\begin{cases} m_j = f_j + g_j + \ldots + g_{n-1} + f_n \\ \\ m_j' = g_j + f_{j+1} + \ldots + g_{n-1} + f_n \end{cases} \qquad \text{(III-33)}$$

On énonce alors le théorème suivant :

Théorème :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^m_{m'}(z,w) = K\ \tilde{\Delta}^f \Delta^g (zw^*) \qquad \text{(III-34)} \\ \\ \qquad \text{où } K = \text{constante} \end{array}}$$

et $f = (f_1 \ldots f_n)$

$g = (g_1 \ldots g_n)$

sont déterminés par :

$$\begin{cases} f_j = m_j - m'_j & 1 < j < n-1 \\ f_n = m_n & \\ g_j = m'_j - m_{j+1} & 1 < j < n-1 \end{cases} \qquad \text{(III-35)}$$

En effet $\mathbb{R}^m_{m'}\ (z,w) = \mathbb{R}^m_{m'}\ (zw^*, I)$ par (III-28)

et, par ce qui précède, on déduit (III-34), (III-35) étant solution de (III-33).

De plus, étant donné la relation d'ordre (III-22), f_j et g_j sont bien des nombres non négatifs.

La valeur de K s'obtient en calculant $\| \mathbb{R}^m_{m'} \|$ et en imposant que $R^m_{m'}$ soit une isométrie sur $B^{m'}$.

Les calculs ne sont pas développés ici, mais voici le résultat démontré par Henrich ((5)) :

Théorème :

Soient $(m_1, \ldots m_n)$ et $(m'_1, \ldots m'_{n-1})$des familles d'entiers non négatifs qui satisfont aux relations d'ordre (III-22),alors l'opérateur de branchement

$R^{m}_{m'}$ de $Ⓑ^{m'}$ dans $Ⓑ^{m}$ qui est une isométrie sur $Ⓑ^{m'}$ admet comme "Reproducing Kernel" $\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w)$

$$\mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w) = A(m')^{-1/2}\, A\binom{m}{m'}^{-1/2}\, \tilde{\Delta}^{f}\, \Delta^{g}(zw^{*}) \qquad \text{(III-36)}$$

où $\left.\begin{array}{l} f = (f_1 \ldots f_n) \\ g = (g_1 \ldots g_{n-1}) \end{array}\right\}$ sont donnés par (III-35)

$A(m')$ est défini en (III-21)

$$A\binom{m}{m'} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \mu_j\,!\; Q(\mu;\mu')\; \tilde{Q}(\mu;\mu')}{P(\mu) \qquad P(\mu')}$$

avec $\mu_j = m_j + n-j$; $\mu'_j = m'_j + n-j-1$

$$P(\mu) = \prod_{j<k} (\mu_j-\mu_k)! \qquad P(\mu') = \prod_{j<k} (\mu'_j-\mu'_k)!$$

$$Q(\mu,\mu') = \prod_{j<k} (\mu'_j-\mu_k)! \qquad \tilde{Q}(\mu,\mu') = \prod_{j\leq k} (\mu_j-\mu'_k-1)!$$

On appelle *états maximaux* de $Ⓑ^{m}$ les opérateurs : $A(m)^{-1/2}\, \Delta^{e}(z)$

On appelle *états semi-maximaux* de $Ⓑ^{m}$ les images dans $Ⓑ^{m}$ des états maximaux de $Ⓑ^{m'}$ par $R^{m}_{m'}$, avec m et m' qui vérifient les relations d'ordre (III-22).

Propriété

Les états semi-maximaux de $Ⓑ^{m}$ sont les opérateurs $A\binom{m}{m'}^{-1/2}\, \tilde{\Delta}^{f}\, \Delta^{g}(z)$ (III-37)

Démonstration :

Les états maximaux de Ⓑ$^{m'}$ sont

$$A(m')^{-1/2} \quad \Delta^{e}(z) = A(m')^{1/2} \quad K^{m'}(z,I) \quad \text{par (III-20)}$$

On leur applique $R^{m}_{m'}$

$$R^{m}_{m'}\left(A(m')^{1/2} \quad K^{m'}(z,I)\right) = A(m')^{1/2} \; .$$

$$\int \mathbb{R}^{m}_{m'}(z,w) \quad K^{m'}(w,I) \quad d\gamma(w) \quad \text{par (III-8)}$$

$$= A(m')^{1/2} \left(\overline{R^{m}_{m'}(z,w)} \;,\; K^{m'}(w,I)\right) \quad \text{par déf. du produit scalaire}$$

$$= A(m')^{1/2} \overline{\left(K^{m'}_{I}(w) \;,\; \overline{R^{m}_{m'}(z,w)}\right)}$$

$$= A(m')^{1/2} \; \overline{\overline{R^{m}_{m'}(z,I)}} \quad \text{par déf. de } K^{m'}$$

$$= A(m')^{1/2} \quad R^{m}_{m'}(z,I)$$

$$= A\binom{m}{m'}^{-1/2} \quad \tilde{\Delta}^{f} \quad \Delta^{g}(z) \quad \text{par (III-36)}$$

CHAPITRE IV

BASES DES ESPACES DE BARGMANN-MOSHINSKY

1. *Introduction*

Par le biais des opérateurs de branchement, on peut définir une base orthonormale dans les espaces $Ⓑ^m$ en utilisant un processus d'induction.

Cette base est connue sous le nom de base de Gel'fand. Il faut remarquer cependant que, malgré l'existence d'une fonction génératrice, cette façon d'obtenir la base est peu pratique lorsque n augmente.

Une autre approche est celle faite au moyen des treillis T et de leurs exponentielles x^T. Ce chapitre IV est consacré à la description de la construction des bases pour n = 1, 2, 3.

2. *Principe de la méthode inductive* ((10))

Cette méthode est fondée sur le théorème (III-22) désigné aussi sous le nom de "branching law".

L'idée est de construire une suite décroissante de groupes U(n), U(n-1), ... U(1), de décomposer les espaces $(B)^{m_1 \dots m_n}$ en sous-espaces invariants irréductibles par rapport au groupe U(n-1), de décomposer chacun de ces sous-espaces en sous-espaces irréductibles par rapport au groupe U(n-2) et ainside suite, pour arriver finalement en U(1).

On obtient ainsi une décomposition de $(B)^{m_1 \dots m_n}$ en sous-espaces de dimension 1. En effet, U(1) étant un groupe commutatif, ses représentations irréductibles sont de dimension 1.
Par le théorème (III-22) cette décomposition est déterminée de façon unique.
Chacun de ces sous-espacesde dimension 1 est donc issu d'une suite décroissante de sous-espaces :

$$(B)^{m_1 \dots m_n} \supset (B)^{m'_1 \dots m'_{n-1}} \dots \supset (B)^{n_1}$$

Notations

$$m = (m_1, \dots m_n) = (m_{1n}, m_{2n} \dots m_{nn})$$

$$m' = (m'_1, \dots m'_{n-1}) = (m_{1n-1}, m_{2n-1} \dots m_{n-1n-1})$$

$$\vdots$$

$$n_1 = m_{11}$$

Avec ces notations, les ensembles d'indices doivent vérifier par (III-22) les inégalités

$$\boxed{m_{ij+1} \geqslant m_{ij} \geqslant m_{i+1j}} \qquad \text{(IV-1)}$$

$$i = 1, \dots n-1 \qquad j = 1, \dots n-1$$

Donc chacun de ces sous-espaces à une dimension peut être caractérisé au moyen du tableau triangulaire M

$$M = \begin{bmatrix} m_{1n} & m_{2n} & \ldots\ldots & m_{n-1n} & m_{nn} \\ & m_{1n-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & m_{n-1n-1} & \\ & & m_{12} \quad m_{22} & & \\ & & m_{11} & & \end{bmatrix} \qquad \text{(IV-2)}$$

et où les m_{ij} vérifient les inégalités (IV-1)

On peut remarquer, dès maintenant, que le nombre de tels tableaux M est en fait exactement le nombre de treillis T, de dimension n et du type $M < [m]_n$. où la colonne centrale $[m]_n$ est formée des élément m_{in} $(i = 1,..n)$ du tableau M.

$$T = \begin{array}{ccccc} & & m_{1n} & & \\ & m_{1n-1} & & m_{1n} & \\ m_{11} & \vdots & m_{2n} & \vdots & m_{1n} \\ & m_{n-1n-1} & & m_{2n} & \\ & & m_{nn} & & \end{array} \qquad \text{(IV-3)}$$

Cette observation est fondée sur la comparaison des relations d'ordre existant sur un treillis et les relations (IV-1).

La dimension des espaces de représentation $B^{m_1, \ldots m_n}$ est établie en théorie des groupes.

Soit $d_{[m]_n}$ la dimension associée à la représentation caractérisée par la colonne centrale $[m]_n$ dans le treillis T

$$d_{[m]_n} = \frac{\prod_{i<j} (m_i^i - m_j^j + j - i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (n-i)^i} \qquad \text{(IV-4)}$$

3. *Construction explicite de la base dans les espaces* $(B)^m$

Dans $(B)^{m_{11}}$, espace des polynômes homogènes de variable $\Delta_1(z)$ et de degré m_{11} en la variable $\Delta_1(z)$, une base naturelle est donnée par $\Delta_1(z)^{m_{11}}$.

On suppose ensuite par hypothèse de récurrence que les bases orthonomales ont été définies pour tous les espaces $(B)^{m'}$ pour lesquels l'opérateur $R_{m'}^{m}$, est non nul, c'est-à-dire tq $m_1 \geqslant m_1' \geqslant m_2 \geqslant \ldots m_{n-1}' \geqslant m_n$, alors une base dans $(B)^m$ est donnée par *les images des éléments de base de ces espaces* $(B)^{m'}$ *par l'opérateur* $R_m^{m'}$.

En effet, d'une part, par le théorème (III-22) on sait que la représentation de U(n-1) dans $(B)^m$ est équivalente à la somme directe des représentations de U(n-1) dans les espaces $(B)^{m'}$ où $m_1 \geqslant m_1' \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, donc il existe un isomorphisme entre $(B)^m$ et la somme directe de ces espaces.

D'autre part, deux espaces $(B)^{m'}$ pour des n-1-uplets m' distincts sont orthogonaux entre eux par le théorème d'orthogonalité entre représentations unitaires irréductibles d'un même groupe.
Enfin, comme $R_m^{m'}$ est une isométrie, les images des éléments de base des $(B)^{m'}$ forment une base orthonormale de $(B)^m$.

Chaque élément de base a donc la forme

$$\Gamma = R^{m}_{m'} \; R^{m'}_{m''} \; \ldots \; R^{m_{12}m_{22}}_{m_{11}} \; R^{m_{11}}_{*}(1)$$

où m, m', m", ... (m_{12}, m_{22}), m_{11} sont des ensembles ordonnés de n, n-1, ... 1 indices tous satisfaisant les relations d'ordre

$$m_1 \geqslant m'_1 \geqslant \ldots m'_{n-1} \geqslant m_n$$

$$m'_1 \geqslant m''_1, \ldots \geqslant m'_{n-1} \qquad \text{etc...}$$

Si on reprend la notation $m = (m_{1n}, \ldots m_{nn})$

$m' = (m_{1n-1}, \ldots m_{n-1,n-1})$ etc...

chaque élément de base peut aussi se désigner par

$$\Gamma\,(M) = \Gamma \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} \ldots m_{nn} \\ & m_{1n-1} \ldots m_{n-1n-1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & m_{11} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-5)}$$

4. *Application à U(1), U(2), U(3)*

A. Les représentations irréductibles de U(1) sont de dimension 1 puisque le groupe est commutatif.

Le vecteur de base dans $Ⓑ^{m_{11}}$ est

$$\Gamma\,(m_{11}\,;\,z) = (m_{11}\,!)^{-1/2}\;\Delta_1(z)^{m_{11}} \qquad \text{(IV-6)}$$

$(m_{11})!^{-1/2}$ est une constante de normalisation.

En effet $(\Gamma(m_{11}\ ;\ z)\ ,\ \Gamma(m_{11}\ ;\ z)) = (m_{11}!)^{-1}(\Delta_1(z)^{m_{11}}\ ,\ \Delta_1(z)^{m_{11}})$

$$= (m_{11}!)^{-1}(z_{11}^{m_{11}}\ ,\ z_{11}^{m_{11}})$$

$$= (m_{11}!)^{-1}\ (m_{11})!$$

$$= 1$$

$\Delta(m_{11}\ ;\ z)$ est aussi le "maximal state" de $Ⓑ^{m_{11}}$ par la définition de "maximal state".

B. Les vecteurs de base pour les représentations de U(2) sont les images par l'opérateur $R^{m_{12}m_{22}}_{m_{11}}$ de l'élément de base de U(1), il s'agit donc d'un "semi-maximal state" de $Ⓑ^{m_{12}m_{22}}_{m_{11}}$

et donc par (III-37)

$$\Gamma\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & ;z \\ m_{11} & \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & \end{pmatrix}^{-1/2} \tilde{\Delta}(1,z)^{f_1}\ \tilde{\Delta}(2,z)^{f_2}\ \Delta(1,z)^{g_1}$$

$$= A\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & \end{pmatrix} \Delta_1(z)^{m_{11}-m_{12}}\ \Delta_2(z)^{m_{12}-m_{11}}\ \Delta_{12}^{m_{22}}(z) \qquad \text{(IV-7)}$$

par définition de $\tilde{\Delta}$, Δ, f_j, g_j

C. La recherche des vecteurs de base pour les espaces de représentations de U(3) est plus laborieuse.

Par la propriété (III-6) du "Reproducing kernel" d'un opérateur, on peut écrire :

$$\mathbb{R}^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}_{m_{12}\, m_{22}}(z,w) = \sum_{m_{11}} \mathbb{R}^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}_{m_{12}\, m_{22}} \left\{ \Gamma \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & ;z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\times\ \overline{\Gamma \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & ;w \end{pmatrix}}$$

puisque l'opérateur $\mathbb{R}^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}_{m_{12}\, m_{22}}$ est un opérateur de $Ⓑ^{m_{12}\, m_{22}}$ à valeurs dans $Ⓑ^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}$ et qu'un système orthonormal de $Ⓑ^{m_{12}\, m_{22}}$ est donné par :

$$\left\{ \Gamma \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & ;z \end{pmatrix} , \quad m_{12} \geqslant m_{11} \geqslant m_{22} \right\}.$$

Donc,

$$\boxed{\mathbb{R}^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}_{m_{12}\, m_{22}}(z,w) = \sum_{m_{11}} \Gamma \begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12} & m_{22} & ;z \\ & m_{11} & \end{pmatrix} \overline{\Gamma \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & ;w \end{pmatrix}}}$$

(IV-9)

Cette relation (IV-9) et la proposition suivante servent à évaluer les vecteurs de base de $Ⓑ^{m_{13}\, m_{23}\, m_{33}}$

Proposition :

Soit $z \in M(n)$ et $w \in M(n-1)$ (w peut être considéré aussi comme élément de $M(n)$ par l'injection canonique (III-21). Si $S_d(n)$ désigne l'ensemble de tous les d-uples ordonnés $(j_1, j_2, \dots j_d)$ tq $j_1 < j_2 < \dots j_d < n$, alors

$$\Delta(d\ ;\ zw^*) = \sum_{J\in S_d(n-1)} \Delta_J(z)\ \overline{\Delta}_J(w) \qquad (\alpha)$$

$$d = 1, \dots n-1 \qquad \text{(IV-10)}$$

$$\tilde{\Delta}(d\ ;\ zw^*) = \sum_{J\in S_{d-1}(n-1)} \Delta_{Jn}(z)\ \overline{\Delta}_J(w) \qquad (\beta)$$

$$d = 1, \dots n$$

(La démonstration est en annexe 4)

Cette proposition est utile si on utilise l'expression du "Reproducing kernel $\mathbb{R}^{m_{13}\ m_{23}\ m_{33}}_{m_{12}\ m_{22}}(z,w)$ en fonction des déterminants, c'est-à-dire par (III-36) :

$$\mathbb{R}^{m_{13}\ m_{23}\ m_{33}}_{m_{12}\ m_{22}}(z,w) = A\,(m_{12}\ m_{22})^{-1/2}\ A\begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$\Delta_3(zw^*)^{f_1}\ \Delta_{13}(zw^*)^{f_2}\ \Delta_{123}(zw^*)^{f_3}$$

$$\Delta_1(zw^*)^{g_1}\ \Delta_{12}(zw^*)^{g_2}$$

Par la proposition (IV-10) et le théorème du binôme de Newton,

$$\mathbb{R}^{m_{13}\;m_{23}\;m_{33}}_{m_{12}\;m_{22}}(z,w) = A\left(m_{12}\;m_{22}\right)^{-1/2}\; A\begin{pmatrix} m_{13} & & m_{23} & & m_{33} \\ & m_{12} & & m_{22} & \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$\times\left[\sum_{\alpha,\beta}\binom{m_{12}-m_{23}}{\alpha}\binom{m_{23}-m_{22}}{\beta}\,\Delta_1(z)^{\alpha}\,\Delta_2(z)^{m_{12}-m_{23}-\alpha}\,\Delta_3(z)^{m_{13}-m_{12}}\right.$$

$$\Delta_{13}(z)^{\beta}\,\Delta_{23}(z)^{m_{23}-m_{22}-\beta}\,\Delta_{123}(z)^{m_{33}}\,\Delta_{12}(z)^{m_{22}-m_{23}}$$

$$\left.\times\left[\overline{\Delta}_1(w)^{\alpha+\beta}\,\overline{\Delta}_2(w)^{m_{12}-m_{22}-\alpha-\beta}\,\overline{\Delta}_{12}(w)^{m_{22}}\right]\right] \qquad \text{(IV-11)}$$

(Cette égalité est démontrée en détail dans l'annexe 4)

L'expression entre crochets vaut, à un facteur multiplicatif près :

$$\overline{\Gamma\begin{pmatrix} m_{12} & & m_{22} \\ & m_{11} & \end{pmatrix};\, w} \qquad \text{si} \quad \alpha+\beta = m_{11}-m_{22} \qquad \text{par (IV-7)}$$

Donc, par (IV-9) on déduit l'expression $\Gamma\left(\begin{array}{ccc|c} m_{13} & & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12} & & m_{22} \\ & & m_{11} & \end{array};\, z\right)$

Il suffit en effet de rassembler les facteurs de

$$\left[\overline{\Delta}_1(w)^{m_{11}-m_{22}}\,\overline{\Delta}_2(w)^{m_{12}-m_{11}}\,\overline{\Delta}_{12}(w)^{m_{22}}\right]$$

dans les termes de la somme (IV-11) pour lesquels $\alpha+\beta = m_{11}-m_{22}$.

Le résultat final s'écrit :

$$\Gamma \begin{bmatrix} m_{12} & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12}\ m_{22} & ; z \\ & m_{11} & \end{bmatrix} = \Big[(m_{13}-m_{23}+1)!\ (m_{13}-m_{33}+2)!\ (m_{23}-m_{33}+1)!$$

$$(m_{11}-m_{22})!\ \ (m_{12}-m_{11})!\ \ (m_{12}-m_{22}+1)\Big]^{1/2}$$

$$\times \Big[(m_{13}+2)!\ (m_{23}+1)!\ m_{33}!\ (m_{12}-m_{23})!\ (m_{22}-m_{33})!$$

$$(m_{13}-m_{12})!\ (m_{12}-m_{33}+1)!\ (m_{23}-m_{22})!$$

$$(m_{13}-m_{22}+1)!\Big]^{-1/2}$$

$$\times \sum_{\alpha+\beta=m_{11}-m_{22}} \binom{m_{12}-m_{23}}{\alpha} \binom{m_{23}-m_{22}}{\beta} \qquad \text{(IV-12)}$$

$$\times\ \Delta_1^{\alpha}(z)\ \Delta_2(z)^{m_{12}-m_{23}-\alpha}\ \Delta_3(z)^{m_{13}-m_{12}}$$

$$\times\ \Delta_{12}(z)^{m_{22}-m_{33}}\ \Delta_{13}^{\beta}(z)\ \Delta_{23}(z)^{m_{23}-m_{22}-\beta}\ \Delta_{123}(z)^{m_{33}}$$

Les conditions $0 \leqslant \alpha \leqslant m_{12} - m_{23}$ et $0 \leqslant \beta \leqslant m_{23}-m_{22}$ sont implicites par la présence des coefficients binomiaux.

Dans la suite, on désignera par $D \begin{bmatrix} m_{13}, m_{23}, m_{33} \\ m_{12}, m_{22} \end{bmatrix}$ la constante multiplicative :

$$\Big[(m_{13}-m_{23}+1)!\ (m_{13}-m_{33}+2)!\ (m_{23}-m_{33}+1)!$$

$$(m_{11}-m_{22})!\ (m_{12}-m_{11})!\ (m_{12}-m_{22}+1)\Big]^{1/2}$$

$$\times\ \Big[(m_{13}+2)!\ (m_{23}+1)!\ m_{33}!\ (m_{12}-m_{23})!\ (m_{22}-m_{33})!$$

$$(m_{13}-m_{12})!\ (m_{12}-m_{33}+1)!\ (m_{23}-m_{22})!\ (m_{13}-m_{22}+1)!\Big]^{-1/2}$$

5. *Fonction génératrice pour U(1), U(2), U(3)*

Considérons l'expression (IV-12), elle donne la forme de $\Gamma\begin{Bmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} & ;z \\ m_{11} & & \end{Bmatrix}$

en fonction des sous-déterminants de z.

On constate que tous les monômes du type

$$\Delta_1^{\alpha_1}\ \Delta_2^{\alpha_2}\ \Delta_3^{\alpha_3}\ \Delta_{12}^{\alpha_{12}}\ \Delta_{13}^{\alpha_{13}}\ \Delta_{23}^{\alpha_{23}}\ \Delta_{123}^{\alpha_{123}} \qquad \text{(a)}$$

apparaissent exactement une fois dans (IV-12), les exposants α_J vérifiant les relations :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = m_{12} - m_{23} \qquad \text{(b)}$$

$$\alpha_{13} + \alpha_{23} = m_{23} - m_{22} \qquad \text{(c)}$$

$$\alpha_{13} + \alpha_1 = m_{11} - m_{22} \qquad \text{(d)}$$

$$\alpha_2 + \alpha_{23} = m_{12} - m_{11} \qquad \text{(e) (conséquence de (b),(c),(d))}$$

$$\alpha_3 = m_{13} - m_{12} \qquad \text{(f)}$$

$$\alpha_{12} = m_{22} - m_{33} \qquad \text{(g)}$$

$$\alpha_{123} = m_{33} \qquad \text{(h)}$$

Notations

M désigne le tableau $\begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} & \end{pmatrix}$

Δ^{α} désigne le monôme (a)

$\alpha! = \alpha_1!\ \alpha_2!\ \alpha_3!\ \alpha_{12}!\ \alpha_{13}!\ \alpha_{23}!\ \alpha_{123}!$

De (IV-12) on déduit :

$$N(M) \quad \Gamma(M) = \sum_{\alpha : S(\alpha; M)} \frac{\Delta^{\alpha}}{\alpha!} \qquad \text{(IV-13)}$$

où S $(\alpha;M)$ rassemble les conditions (b) — (h) et N(M) est un facteur multiplicatif.

Ceci suggère la construction de la fonction génératrice :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Soit } f_{ij} = m_{ij} - m_{ij-1} \qquad i \leqslant j - 1 \\ &f_{ii} = m_{ii} \\ &F = \begin{pmatrix} f_{13} & f_{23} & f_{33} \\ & f_{12} & f_{22} \\ & f_{11} & \end{pmatrix} \end{aligned}\right| \qquad \text{(IV-14)}$$

Introduisons un ensemble de variables :

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \\ & \lambda_{12} \quad \lambda_{22} & \\ & \lambda_{11} & \end{bmatrix}$$

et soit $\Lambda^F \equiv \prod_{i \leqslant j} \lambda_{ij}^{f_{ij}}$ (IV-15)

Alors, par (IV-13),

$$\boxed{\sum_M \Lambda^F N(M)\, \Gamma(M) = \sum_M \sum_{\alpha : S(\alpha,M)} \Lambda^F \frac{\Delta^\alpha}{\alpha!}} \qquad \text{(IV-16)}$$

On observe en (IV-14) que F est lié à M et M est lié à α par les relations $S(\alpha;M)$

Donc, $f_{13} = m_{13} - m_{12} = \alpha_3$

$f_{23} = m_{23} - m_{22} = \alpha_{13} + \alpha_{23}$

$f_{33} = \alpha_{123}$

$f_{12} = m_{12} - m_{11} = \alpha_2 + \alpha_{23}$

$f_{22} = m_{22} = \alpha_{12} + \alpha_{123}$

$f_{11} = m_{11} = \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{123}$

D'où, $\displaystyle\sum_M \sum_{\alpha : S(\alpha;M)} \Lambda^F \frac{\Delta^\alpha}{\alpha!}$

$$= \sum_\alpha \lambda_{13}^{\alpha_3} \lambda_{23}^{\alpha_{13}+\alpha_{23}} \lambda_{33}^{\alpha_{123}} \lambda_{12}^{\alpha_2+\alpha_{23}} \lambda_{22}^{\alpha_{12}+\alpha_{123}} \lambda_{11}^{\alpha_1+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{123}} \frac{\Delta^\alpha}{\alpha!}$$

$$= \sum_{\alpha} (\lambda_{11}\,\Delta_1)^{\alpha_1}\,(\lambda_{12}\,\Delta_2)^{\alpha_2}\,(\lambda_{13}\,\Delta_3)^{\alpha_3}\,(\lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\Delta_{12})^{\alpha_{12}}$$

$$(\lambda_{11}\,\lambda_{23}\,\Delta_{13})^{\alpha_{13}}\,(\lambda_{12}\,\lambda_{23}\,\Delta_{23})^{\alpha_{23}}\,(\lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\lambda_{33}\,\Delta_{123})^{\alpha_{123}}$$

$$= \exp\,(\lambda_{11}\,\Delta_1 + \lambda_{12}\,\Delta_2 + \lambda_{13}\,\Delta_3 + \lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\Delta_{12} +$$

$$\lambda_{11}\,\lambda_{23}\,\Delta_{13} + \lambda_{12}\,\lambda_{23}\,\Delta_{23} + \lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\lambda_{33}\,\Delta_{123}) \qquad \text{(IV-17)}$$

Dans cette exponentielle, le déterminant Δ_J est multiplié par λ_{ij} si j apparaît à la $i^{\text{ième}}$ place dans J.

De cette expression (IV-17) et de l'égalité (IV-13) on déduit le théorème suivant :

Théorème

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{M} \Lambda^{F} N(M)\ \Gamma(M) = \exp\,(\lambda_{11}\,\Delta_1 + \lambda_{12}\,\Delta_2 + \lambda_{13}\,\Delta_3 + \lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\Delta_{12} \\ &\qquad + \lambda_{11}\,\lambda_{23}\,\Delta_{13} + \lambda_{12}\,\lambda_{23}\,\Delta_{23} + \lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\lambda_{33}\,\Delta_{123}) \\ &\text{où}\quad N(M) = \Big[(m_{13} - m_{23} + 1)!\ (m_{13} - m_{33} + 2)!\ (m_{23} - m_{33} + 1)! \\ &\qquad (m_{11} - m_{22})!\ (m_{12} - m_{11})!\ m_{33}!\ (m_{12} - m_{23})! \\ &\qquad (m_{22} - m_{33})!\ (m_{13} - m_{12})!\ (m_{23} - m_{22})!\ (m_{12} - m_{22} + 1)!\Big]^{-1/2} \end{aligned}}$$

(IV-18)

Le résultat reste valable pour U(1) et U(2).

En effet de (IV-6) on déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \lambda_{11}^{m_{11}} \; N(m_{11}) \; \Gamma(m_{11}) = \exp(\lambda_{11} \Delta_1) \\ \\ \text{où} \qquad N(m_{11}) = (m_{11}!)^{-1/2} \end{array}}$$

et de (IV-7) on déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \lambda_{12}^{m_{12}-m_{11}} \; \lambda_{22}^{m_{22}} \; \lambda_{11}^{m_{11}} \; N\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} & \end{pmatrix} \Gamma\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} & \end{pmatrix} \\ \\ = \exp\left(\lambda_{11} \Delta_1 + \lambda_{12} \Delta_2 + \lambda_{11} \lambda_{22} \Delta_{12}\right) \\ \\ \text{où } N\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} & \end{pmatrix} = \left[(m_{12}+1)!\right]^{1/2} \\ \\ \qquad \times \left[(m_{11} - m_{22} + 1)! \; m_{22}! \; (m_{11} - m_{22})! \right. \\ \\ \qquad\qquad \left. (m_{12} - m_{11})! \right]^{-1/2} \end{array}}$$

CHAPITRE I

BASE DES ESPACES DE BARGMANN-MOSHINSKY ET EXPONENTIELLES DE TREILLIS DE GEL'FAND

Dans la première parte de ce mémoire, nous avons défini le concept d'exponentielles d'un treillis de Gel'fand.

La théorie des représentations de groupes est reliée à ces polynômes en remplaçant les $\binom{2n}{n}$ variables par les $\binom{2n}{n}$ sous-déterminants d'une matrice de dimension n.

Soit $z^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_\ell}$ le sous-déterminant de la matrice complexe $z \equiv (z_{ij})$ formé par les lignes $i_1 \dots i_\ell$ et les colonnes $j_1 \dots j_\ell$

$$\text{Soit } \underset{\sim}{z} = \{z^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_\ell} \,,\ 1 \leqslant \ell \leqslant n\} \qquad \text{(I-1)}$$

Dans ces notations, $\underset{\sim}{z}^{T}$ est un polynôme homogène dont les variables sont des sous-déterminants de la matrice z.

Grâce à un changement de notations, on observe que les polynômes $\underset{\sim}{z}^{\cdot [m]_n \cdot}$ définis dans la théorie des treillis de Gel'fand coïncident avec les éléments de Ⓑ^{m} désignés par le nom de "*maximal state*" : $A(m)^{-1/2} \ \Delta^e(z)$.

De même, les polynômes de Gel'fand $\underset{\sim}{z}^{\cdot[m]_{n-1}\,[m]_n\cdot}$ coïncident avec les "*semi-maximal state*" :

$$A\binom{m}{m'}^{-1/2} \quad \tilde{\Delta}^{f}(z)\Delta^{g}(z)$$

Ce changement de notations est :

α. Le n-uplet $(m_1 \ldots m_n)$ (noté aussi $(m_{1n}, \ldots m_{nn})$ qui caractérise l'espace $Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ est choisi comme colonne centrale du treillis $\cdot[m]_n\cdot$

Le n-uplet $(m'_1, \ldots, m'_{n-1})$ (noté aussi $(m_{1n-1}, \ldots, m_{n-1n-1})$ qui vérifie les inégalités (III-22) est choisi pour colonne $[m]_{n-1}$ du treillis $\cdot[m]_{n-1}[m]_n\cdot$

β. La matrice z dont les sous-déterminants constituent les expressions $\tilde{\Delta}(z)$ et $\Delta(z)$ doit subir une transformation afin que ces sous-déterminants soient exactement ceux des expressions $\underset{\sim}{z}^{T}$.

Chaque élément de la matrice z doit être échangé avec son symétrique par rapport à l'antidiagonale.

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots\cdots\cdots & z_{1n} \\ z_{21} & & & \\ & & & z_{n-1n} \\ z_{n1} & & \cdots\cdots z_{nn-1} & z_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_{nn} & z_{n-1n} & \cdots & z_{1n} \\ z_{n\,n-1} & & & \\ & & & z_{12} \\ z_{n1} & & \cdots\cdots & z_{21} \quad z_{11} \end{pmatrix}$$

(I-2)

Si on désigne par z' la matrice ainsi transformée, on vérifie :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{z}^{\cdot [m]_n \cdot} &= C_1 \left[[m]_n \right] \Delta^{e}(z') \quad (a) \\ \underset{\sim}{z}^{\cdot [m]_{n-1} [m]_n \cdot} &= C_2 \left[[m]_{n-1}, [m]_n \right] \tilde{\Delta}^{f}(z') \Delta^{g}(z') \quad (b) \end{aligned} \qquad \text{(I-3)}$$

où $C_1 \left[[m]_n \right]$, $C_2 \left[[m]_{n-1} , [m]_n \right]$ sont des facteurs multiplicatifs.

Etant donné le caractère assez lourd de toutes les notations, ces vérifications ne sont pas développées dans ce travail.

Une conséquence très importante de l'identification entre les exponentielles de certains treillis et des polynômes des espaces $Ⓑ^{m}$ concerne la recherche d'une base dans ces espaces.

Deux raisons conduisent à émettre l'hypothèse suivante :

Les polynômes $\underset{\sim}{z}^{M < [m]_n \cdot}$ forment une base de l'espace $Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ où $\begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = [m]_n$. (I-4)

(cette base n'est pas nécessairement orthogonale)

(on note aussi $Ⓑ^{m_1 \ldots m_n}$ par $Ⓑ[m]_n$.)

En effet, lorsqu'on recherche l'expression polynomiale de $\underset{\sim}{z}^{M < [m]_n \cdot}$ (par ordinateur ou par pelage) on observe qu'il s'agit de polynômes homogènes de degré $m^{\ell}_{\ell} - m^{\ell+1}_{\ell+1}$

en les arguments $z^{n-\ell+1,\dots n}_{i_1 \dots\dots i_\ell}$ et donc

en les arguments $\Delta_{k_1, \dots k_\ell}(z')$ où z' est la matrice transformée suivant (β)

Par le critère (I-37) ils appartiennent à $Ⓑ_{[m]_n}$.

D'autre part, le nombre de treillis du type $M < [m]_n$.

$$\text{vaut :} \quad \frac{\prod_{j<k} (m^j_j - m^k_k + k-j)}{\prod_{i=1}^{n} (n-i)^i}$$

qui est exactement la dimension $d[m]_n$ de l'espace $B_{[m]_n}$.

(voir (IV-4))

Evidemment, l'hypothèse (I-4) suppose l'indépendance linéaire de ces polynômes.

Cette indépendance linéaire n'a pas encore été démontrée de façon rigoureuse, néanmoins l'hypothèse (I-4) est vérifiée pour $n \leqslant 4$ et pour un n quelconque, dans le cas particulier où

$$[m]_n = \{m^1_1 , m^2_2 , m^3_3 = 0, \dots m^n_n = 0\}.$$

Le chapitre suivant est la vérification de l'hypothèse (I-4) dans le cas particulier où n = 3.

CHAPITRE II

BASE DE $Ⓑ^{m_1 m_2 m_3}$

1. Recherche de l'expression polynomiale de $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3}$.
2. $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3}$, base de $Ⓑ^{m_1 m_2 m_3}$

1. Recherche de l'expression polynomiale de $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3}$.

Rappel de notations :

L'espace $Ⓑ^{m_1 m_2 \dots m_n}$ est aussi noté $Ⓑ_{[m]_n}$ où la colonne $[m]_n$ coïncide avec le n-uplet $(m_1, \dots m_n)$, noté aussi $(m_{1n}, \dots m_{nn})$.

$$\Delta^{i_1 \dots i_d}_{j_1 \dots j_d}(z) = \text{dét}\,(z_{i_a\, j_b}) \quad a, b = 1, \dots d$$

$$z^{i_1 \dots i_d}_{j_1 \dots j_d} = \text{dét}\,(z_{j_a\, i_b}) \quad a, b = 1, \dots d$$

Donc, $\Delta^{i_1 \dots i_d}_{j_1 \dots j_d}(z) = z^{j_1 \dots j_d}_{i_1 \dots i_d}$

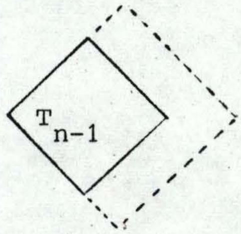
Pour trouver l'expression polynomiale de $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3}$ nous utilisons les résultats de la théorie des treillis de Gel'fand.

Proposition

$$x^{M<[m]_n\cdot} = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ \\ m_n^n \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} m_1^1-m_n^n \\ \\ m_2^1-m_n^n \end{pmatrix}} \left(x^{12\ldots n}_{12\ldots n}\right)^{m_n^n}$$

$$(x_1^n)^{m_1^1-m_2^1}\; y^{T_{n-1} - m_n^n \mathbb{1}_1^n}$$

où T_{n-1} est le treillis de Gel'fand de dimension n-1 obtenu à partir du treillis initial après élimination de la première oblique droite et de la dernière oblique gauche.

$M < [m]_n\cdot =$ 

(II-1)

et où y est un ensemble de conditions initiales déduites de l'ensemble x par les relations :

$$y^{j_1\ldots j_\ell}_{i_1\ldots i_\ell} = \begin{cases} x^{j_2\; j_3\; \ldots\; j_\ell\; n}_{i_1+1\; i_2+1\; \ldots\; i_\ell+1} & \text{si } j_1 = 1 \\ x^{j_1\; j_2\; j_3\; \ldots\; j_\ell\; n}_{1\; i_1+1\; i_2+1\; \ldots\; i_\ell+1} & \text{si } j_1 > 1 \end{cases}$$

Par cette proposition,

$$\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3\cdot} = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{33} \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} m_{13}-m_{33} \\ m_{12}-m_{33} \end{pmatrix}} \left(\Delta_{123}\right)^{m_{33}} \left(\Delta_3^1\right)^{m_{13}-m_{12}}\; \underset{\sim}{y}^{T_2 - m_{33}\mathbb{1}_2}$$

où $T_2 - m_{33}\, \mathbb{1}_2$ est un treillis de dimension 2.

L'exponentielle d'un treillis de Gel'fand de dimension 2 se calcule par exemple par la procédure de pelage ((3))

$$\underset{\sim}{y}^{T_2 - m_{33}\, \mathbb{1}_2} = (m_{12}-m_{33})! \; \frac{(y^{12}_{12})^{m_{22}-m_{23}}}{(m_{22}-m_{33})\,!}$$

$$\times \sum_{\sigma} \left[\frac{(y^1_1)^{m_{12}-m_{11}-m_{23}+m_{22}+\sigma}}{(m_{12}-m_{11}-m_{23}+m_{22}+\sigma)!} \cdot \frac{(y^1_2)^{m_{11}-m_{22}-\sigma}}{(m_{11}-m_{22}-\sigma)!} \cdot \frac{(y^2_1)^{m_{23}-m_{22}-\sigma}}{(m_{23}-m_{22}-\sigma)!} \cdot \frac{(y^2_2)^{\sigma}}{\sigma\,!} \right]$$

Les conditions initiales $\underset{\sim}{y}$ sont fonction de $\underset{\sim}{z}$ par la proposition (II-1) et donc fonction des sous-déterminants

$\Delta^{i_1 \ldots i_\ell}_{j_1 \ldots j_\ell}(z)$ par définition de $\underset{\sim}{z}$. On conclut :

$$\underset{\sim}{z}^{M<[m]_n} = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{13}-m_{33} \\ m_{12}-m_{33} \end{pmatrix} (m_{12}-m_{33})! \;\; \Delta_{123}(z)^{m_{33}} \;\; \Delta^1_3(z)^{m_{13}-m_{12}}$$

$$\times \sum_{\sigma} \frac{\Delta^{23}_{23}\,(z)^{m_{22}-m_{33}}}{(m_{22}-m_{33})!} \; \frac{\Delta^2_3\,(z)^{m_{12}-m_{11}-m_{23}+m_{22}+\sigma}}{(m_{12}-m_{11}-m_{23}+m_{22}+\sigma)!}$$

$$\frac{\Delta^3_3\,(z)^{m_{11}-m_{22}-\sigma}}{(m_{11}-m_{22}-\sigma)!} \; \frac{\Delta^{12}_{23}\,(z)^{m_{23}-m_{22}-\sigma}}{(m_{23}-m_{22}-\sigma)\,!} \; \frac{\Delta^{13}_{23}(z)^{\sigma}}{\sigma\,!} \qquad \text{(II-2)}$$

2. $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_3}$, *base de* Ⓑ$^{m_1\, m_2\, m_3}$

Si dans l'expression (IV-12) on remplace β par $m_{11} - m_{22} - \alpha$,

$$\Gamma\begin{pmatrix} m_{12}\ m_{23}\ m_{33} & \\ m_{12}\ m_{22} & ;\ z' \\ m_{11} & \end{pmatrix} = D \begin{vmatrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \end{vmatrix} \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} m_{12}-m_{23} \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{23}-m_{22} \\ m_{11}-m_{22}-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1(z')\ \Delta_2(z')^{m_{12}-m_{23}-\alpha}\ \Delta_3(z')^{m_{13}-m_{12}}\ \Delta_{12}(z')^{m_{22}-m_{33}}$$

$$\Delta_{13}(z')^{m_{11}-m_{22}-\alpha}\ \Delta_{23}(z')^{m_{23}-m_{11}+\alpha}\ \Delta_{123}(z')^{m_{33}}$$

D'autre part, si $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$, z' s'écrit $\begin{pmatrix} z_{33} & z_{23} & z_{13} \\ z_{32} & z_{22} & z_{12} \\ z_{31} & z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$ par (I-2)

et donc, $\Delta_1(z') = z_{33} = \Delta_3^3\,(z)$

$$\Delta_2(z') = \Delta_2^1(z') = z_{23} = \Delta_3^2(z)$$

$$\Delta_3(z') = \Delta_3^1(z') = z_{13} = \Delta_3^1(z)$$

$$\Delta_{12}(z') = z_{22}\, z_{33} - z_{32}\, z_{23} = \Delta_{23}^{23}(z)$$

$$\Delta_{13}(z') = \Delta_{13}^{12}(z') = z_{12}\, z_{33} - z_{32}\, z_{12} = \Delta_{23}^{13}(z)$$

$$\Delta_{23}(z') = \Delta_{23}^{12}(z') = z_{23}\, z_{12} - z_{22}\, z_{13} = \Delta_{23}^{12}(z)$$

$$\Delta_{123}(z') = \Delta_{123}^{123}(z') = \Delta_{123}(z)$$

Posant $\alpha = m_{11} - m_{22} - \sigma$,

$$\Gamma\begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} & ; z \\ & m_{11} & \end{pmatrix} = D \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ & m_{12} & m_{22} \end{vmatrix} \sum_{\sigma} \begin{pmatrix} m_{12}-m_{23} \\ m_{11}-m_{22}-\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{23}-m_{22} \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\times\, \Delta_3^3(z)^{m_{11}-m_{22}-\sigma}\ \Delta_3^2(z)^{m_{12}-m_{11}+m_{22}-m_{23}+\sigma}\ \Delta_3^1(z)^{m_{13}-m_{12}}$$

$$\Delta_{23}^{23}(z)^{m_{22}-m_{33}}\ \Delta_{23}^{13}(z)^{\sigma}\ \Delta_{23}^{12}(z)^{m_{23}-m_{22}-\sigma}\ \Delta_{123}(z)^{m_{33}}$$

Comparant cette dernière expression et l'expression (II-2), on déduit que les polynômes $\Gamma\begin{pmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} & ; z \\ & m_{11} & \end{pmatrix}$ diffèrent des polynômes $\underset{\sim}{z}^{M<[m]_n\cdot}$,

où $[m]_n = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$, uniquement par une constante multiplicative.

Ceci confirme l'hypothèse (I-4) de J-P. Gazeau dans le cas particulier où n = 3. Pour n = 1, 2 l'hypothèse (I-4) est aussi vérifiée grâce à (I-3) puisque la base de $Ⓑ^{m_1}$ est un maximal state et celle de $Ⓑ^{m_1,m_2}$ un semi-maximal state.

On constate donc de surplus que pour n = 1, 2, 3

$\underset{\sim}{z}^{M<[m]_n}$. est une base orthonormale de $Ⓑ^m$.

CONCLUSIONS ET EXTENSIONS

Ce travail montre le rôle joué par les exponentielles des treillis de Gel'fand dans les représentations des groupes U(n).
Or, comme on peut le voir dans les articles ((13), (14)) les fonctions spéciales telles que les fonctions d'Appell, de Gauss, de Lauricella sont liées à ces représentations. Ces fonctions pourraient donc peut-être s'écrire à l'aide des exponentielles de treillis de Gel'fand.

Le programme (voir premiere partie) qui, à un treillis quelconque, associe son exponentielle est donc assez prometteur.
On remarque toutefois que, lorsque l'écart entre la valeur des éléments du treillis augmente, la méthode de résolution proposée dans ce programme est coûteuse.
Peut-être, une étude approfondie sur la résolution en nombres entiers d'un système à plus d'équations que d'inconnues pourrait-elle fournir des procédés plus efficaces. N'oublions pas que la difficulté essentielle est de trouver <u>toutes</u> les solutions du système (II-2).

Dans la seconde partie, nous avons étudié en détail l'article d'Henrich ((5)). Certains points ont pu être développés grâce aux nombreuses références citées dans cet article.

Dans la troisième partie, nous avons vérifié explicitement la conjecture de J-P Gazeau dans le cas particulier où n = 3. En fait, J-P Gazeau a également vérifié les résultats suivants ((3)) :

$$\forall n \; , \; \Gamma \left(M < [m]_n \; ; \; \underset{\sim}{x}\right) = N \; \underset{\sim}{x}^{M < [m]_n \cdot}$$

$$\text{si } [m]_n = \{m_1^1,\ m_2^2,\ m_3^3 = 0\ \ldots\ m_n^n = 0\}$$

Pour $n = 4$, $[m]_4$ quelconque, chaque élément de la base de Gel'fand est une combinaison linéaire des exponentielles $\underset{\sim}{x}^{M<[m]_4\cdot}$

Si les $\underset{\sim}{x}^{M<[m]_n\cdot}$ forment une base (conjecture vérifiée dans le cas $n = 3$), il serait intéressant de trouver un processus d'orthogonalisation qui transformerait les exponentielles $x^{M<[m]_n\cdot}$ en une base orthonormale.

On pourrait, par exemple, écrire les vecteurs de base sous forme de polynômes à coefficients indéterminés dont les variables seraient les exponentielles $\underset{\sim}{x}^{M<[m]_n\cdot}$ et déduire ces coefficients en imposant à ces polynômes d'être orthogonaux deux à deux ((17)).

$$T = \begin{array}{ccccc} & & m_1^1 & & \\ & m_2^1 & & m_1^2 & \\ m_3^1 & & m_2^2 & & m_1^3 \\ & m_3^2 & & m_2^3 & \\ & & m_3^3 & & \end{array}$$

On choisit $S = \{m_1^1 , m_2^2 , m_3^3\}$

$$(T) = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ \\ m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2^2 \\ \\ m_3^3 \end{pmatrix} \sum_{\substack{m' \neq m'^1_1 \\ m'^2_2 \\ m'^3_3}} \begin{pmatrix} & & m_1^1 - m'^1_1 & & \\ & m_2^1-m'^1_2 & & m_1^2-m'^2_1 & \\ m_3^1-m'^1_3 & & m_2^2 - m'^2_2 & & m_1^3-m'^3_1 \\ & m_3^2-m'^2_3 & & m_2^3-m'^3_2 & \\ & & m_3^3 - m'^3_3 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & m'^1_1 & & \\ & m'^1_2 & & m'^2_1 & \\ m'^1_3 & & m'^2_2 & & m'^3_1 \\ & m'^2_3 & & m'^3_2 & \\ & & m'^3_3 & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On pose } m'^1_1 = m'^2_2 = m'^3_3 = m_3^3 \Rightarrow m'^1_2 = m'^2_1 = m'^3_2 = m'^2_3 = m_3^3}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ \\ m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2^2 \\ \\ m_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{123}_{123} \end{pmatrix}^{m_3^3} \begin{pmatrix} & & m_1^1 - m_3^3 & & \\ & m_2^1-m_3^3 & & m_1^2-m_3^3 & \\ m_3^1-m_3^3 & & m_2^2 - m_3^3 & & m_1^3-m_3^3 \\ & m_3^2-m_3^3 & & m_2^3-m_3^3 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

On effectue le changement de variables $m_j^i - m_3^3 = n_j^i$ $\qquad T - m_3^3 \; \mathbb{1}^{123}_{123} = \mathbb{N}$

On choisit $S = \{ n_1^1 , n_2^2 \}$

$$(N) = \sum_{\substack{n' \neq n'^1_1 \\ n'^2_2}} \begin{pmatrix} & & n_1^1-n'^1_1 & & \\ & n_2^1-n'^1_2 & | & n_1^2-n'^2_1 & \\ n_3^1-n'^1_3 & & n_2^2-n'^2_2 & & n_1^3-n'^3_1 \\ & n_3^1-n'^1_3 & | & n_1^3-n'^3_1 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & n'^1_1 & & \\ & n'^1_2 & | & n'^2_1 & \\ n'^1_3 & & n'^2_2 & & n'^3_1 \\ & n'^2_3 & | & n'^3_2 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On pose} \quad n'^1_1 = n'^2_2 = n_2^2 \quad \Rightarrow \quad n'^1_2 = n'^2_1 = n_2^2 \qquad n'^2_3 = n_3^2 \qquad n'^3_2 = n_2^3}$$

$$(N) = \sum_{\substack{n'^3_1 \\ n'^1_3}} \underbrace{\begin{pmatrix} & & n_1^1-n_2^2 & & \\ & n_2^1-n_2^2 & | & n_1^2-n_2^2 & \\ n_3^1-n'^1_3 & & 0 & & n_1^3-n'^3_1 \\ & 0 & | & 0 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} & & n_2^2 & & \\ & n_2^2 & | & n_2^2 & \\ n'^1_3 & & n_2^2 & & n'^3_1 \\ & n_3^2 & | & n_2^3 & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}}_{B}$$

(*) On effectue le pelage de A, on applique le changement de variable

$$s_1^1 = n_1^1-n_2^2 \ , \ s_2^1 = n_2^1-n_2^2 \ , \ s_1^2 = n_1^2-n_2^2 \ , \ s_3^1 = n_3^1-n'^1_3 \ , \ s_1^3 = n_1^3-n'^3_1$$

$$
\begin{pmatrix}
 & & s_1^1 & & \\
 & s_2^1 & | & s_1^2 & \\
s_3^1 & & 0 & & s_1^3 \\
 & 0 & | & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} s_1^1 \\ \\ s_1^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} s_1^2 \\ \\ s_1^3 \end{pmatrix}
\sum_{\substack{s' \neq s'^1_1 \\ s'^2_1 \\ s'^3_1}}
\begin{pmatrix}
 & & s_1^1-s'^1_1 & & \\
 & s_2^1-s'^1_2 & | & s_1^2-s'^2_1 & \\
s_3^1-s'^1_3 & & 0 & & s_1^3-s'^3_1 \\
 & 0 & | & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & s'^1_1 & & \\
 & s'^1_2 & | & s'^2_1 & \\
s'^1_3 & & 0 & & s'^3_1 \\
 & 0 & | & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}
$$

où on a choisi $S = \{s_1^1 \ , \ s_1^2 \ , \ s_1^3\}$

$$
\boxed{\text{On pose } s'^3_1 = s'^2_1 = s'^1_1 = s^3_1}
$$

$$
=
\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{pmatrix}
\sum_{\substack{s'^1_2 \\ s'^1_3}}
\underbrace{\begin{pmatrix}
 & & s_1^1-s_1^3 & & \\
 & s_2^1-s'^1_2 & | & s_1^2-s_1^3 & \\
s_3^1-s'^1_3 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & | & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}}_{C}
\underbrace{\begin{pmatrix}
 & & s_1^3 & & \\
 & s'^1_2 & | & s_1^3 & \\
s'^1_3 & & 0 & & s_1^3 \\
 & 0 & | & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}}_{\left(\left[M_{<2} \ ; \ s_1^3\right]_1\right)_3^3}
$$

$$
\left(\left(\left[M_{<2} \ ; \ s_1^3\right]_1\right)_3\right)^3
=
\begin{pmatrix} s_1^3 \\ s'^1_2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} s'^1_2 \\ s'^1_3 \end{pmatrix}
\left(x_1^3\right)^{s_1^3-s'^1_2}
\left(x_2^3\right)^{s'^1_2-s'^1_3}
\left(x_3^3\right)^{s'^1_3}
$$

On effectue le pelage de C, on choisit $S = \{s_1^1 - s_1^3 \ , \ s_1^2 - s_1^3\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} & & s_1^1-s_1^3 & & \\ & s_2^1-s'^1_2 & & s_1^2-s_1^3 & \\ s_3^1-s'^1_3 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right) = \sum_{\substack{s''^i_j \neq s''^1_1 \\ s''^2_1}} \left(\begin{array}{ccccc} & & s_1^1-s_1^3-s''^1_1 & & \\ & s_2^1-s'^1_2-s''^1_2 & & s_1^2-s_1^3-s''^2_1 & \\ s_3^1-s'^1_3-s''^1_3 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} & & s''^1_1 & & \\ & s''^1_2 & & s''^2_1 & \\ s''^1_3 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{On pose } \ s''^2_1 = s''^1_1 = s_1^2 - s_1^3}$$

$$
= \sum_{\substack{s''^1_2 \\ s''^1_3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} & & s^1_1 - s^2_1 & & \\ & s^1_2 - s'^1_2 - s''^1_2 & & 0 & \\ s^1_3 - s'^1_3 - s''^1_3 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{Bmatrix}}_{\left\{\left(\left[M_{<2}\ ;\ s^1_1 - s^2_1\right]_1\right)_3\right\}^1} \underbrace{\begin{Bmatrix} & & s^2_1 - s^3_1 & & \\ & s''^1_2 & & 0 & \\ s''^1_3 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{Bmatrix}}_{\left\{\left(\left[M_{<2}\ ;\ s^2_1 - s^3_1\right]_1\right)_3\right\}^2}
$$

$$
\left\{\left(\left[M_{<2}\ ;\ s^1_1 - s^2_1\right]_1\right)_3\right\}^1 = \begin{pmatrix} s^1_1 - s^2_1 \\ \\ s^1_2 - s'^1_2 - s''^1_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1_2 - s'^1_2 - s''^1_2 \\ \\ s^1_3 - s'^1_3 - s''^1_3 \end{pmatrix} \left(x^1_1\right)^{s^1_1 - s^2_1 - s^1_2 + s'^1_2 + s''^1_2}
$$

$$
\cdot \left(x^1_2\right)^{s^1_2 - s^1_3 - s'^1_2 + s'^1_3 - s''^1_2 + s''^1_3} \cdot \left(x^1_3\right)^{s^1_3 - s'^1_3 - s''^1_3}
$$

$$\left(\left(\left|M_{<2}\ ;\ s_1^2 - s_1^3\right|_1\right)^2_3\right) = \begin{pmatrix} s_1^2 - s_1^3 \\ \cdot \\ s''{}_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''{}_2^1 \\ \\ s''{}_3^1 \end{pmatrix} \left(x_1^2\right)^{s_1^2-s_1^3-s''{}_2^1} \left(x_2^2\right)^{s''{}_2^1-s''{}_3^1} x_3^{2\ s''{}_3^1}$$

En regroupant le tout et reprenant l'écriture en n_i^j on obtient le pelage de A.

On note les indices de sommations comme suit : $s'{}_2^1 = \alpha \ ;\ s'{}_3^1 = \beta$

$s''{}_2^1 = \sigma \ ;\ s''{}_3^1 = \delta$

$$(A) = \sum \begin{pmatrix} n_1^1 - n_2^2 \\ \\ n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 - n_2^2 \\ \\ n_1^3 - n'{}_1^3 \end{pmatrix} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \sigma,\delta}} \begin{pmatrix} n_1^3 - n'{}_1^3 \\ \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 - n_1^2 \\ \\ n_1^1 - n_2^2 - \alpha - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 - n_2^2 - \alpha - \sigma \\ \\ n_1^3 - n'{}_1^3 - \beta - \delta \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} n_1^2 - n_2^2 - n_1^3 - n'{}_1^3 \\ \\ \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \\ \delta \end{pmatrix} \left(x_1^3\right)^{n_1^3-n'{}_1^3-\alpha} \cdot \left(x_2^3\right)^{\alpha-\beta} \cdot \left(x_3^3\right)^{\beta} \cdot \left(x_1^1\right)^{n_1^1-n_1^2+n_2^2+\alpha+\sigma}$$

$$\cdot \left(x_2^1\right)^{n_2^1-n_2^2-n_3^1+n'{}_3^1-\alpha+\beta-\sigma+\delta} \cdot \left(x_3^1\right)^{n_3^1-n'{}_3^1-\beta-\delta}$$

$$\cdot\ \left(x_1^2\right)^{n_1^2-n_2^2-n_1^3+n'^3_1-\sigma}\ \cdot\ \left(x_2^2\right)^{\sigma-\delta}\ \cdot\ \left(x_3^2\right)^{\delta}$$

(*) On effectue le pelage de B. On choisit $S = \{n_2^2\ ,\ n_2^2\ ,\ n'^3_1\ ,\ n_2^3\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} & & n_2^2 & & \\ & n_2^2 & \vert & n_2^2 & \\ n'^1_3 & & n_2^2 & & n'^3_1 \\ & n_3^2 & \vert & n_2^3 & \\ & & 0 & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} n_2^2 \\ \\ n'^3_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'^3_1 \\ \\ n_2^3 \end{pmatrix} \sum_{\substack{n_j^{i'} \neq n''^1_2 \\ n''^2_1 \\ n''^3_1 \\ n''^3_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} & & n_2^2-n''^1_2 & & \\ & n_2^2-n''^1_1 & \vert & n_2^2-n''^2_1 & \\ n'^1_3-n''^1_3 & & n_2^2-n''^2_2 & & n'^3_1-n''^3_1 \\ & n_3^2-n''^2_3 & \vert & n_2^3-n''^3_2 & \\ & & 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccc} & & n''^1_1 & & \\ & n''^1_2 & \vert & n''^2_1 & \\ n''^1_3 & & n''^2_2 & & n''^3_1 \\ & n''^2_3 & \vert & n''^3_2 & \\ & & 0 & & \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{On pose } n''^{3}_{2} = n''^{3}_{1} = n''^{2}_{1} = n''^{1}_{1} = n^{3}_{2} \Longrightarrow n''^{2}_{2} = n^{3}_{2} \text{ et } n''^{1}_{2} = n^{3}_{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} n^{2}_{2} \\ n'^{3}_{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'^{3}_{1} \\ n^{3}_{2} \end{pmatrix} \sum_{\substack{n''^{1}_{3} \\ n''^{2}_{3}}} \left[\begin{array}{cccc} & & n^{2}_{2}-n^{3}_{2} & \\ & n^{2}_{2}-n^{3}_{2} & & n^{2}_{2}-n^{3}_{2} \\ n'^{1}_{3}-n''^{1}_{3} & & n^{2}_{2}-n^{3}_{2} & & n'^{3}_{1}-n^{3}_{2} \\ & n^{2}_{3}-n''^{2}_{3} & & O \\ & & O & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} & & n^{3}_{2} & \\ & n^{3}_{2} & & n^{3}_{2} \\ n'^{1}_{3}-n''^{1}_{3} & & n^{3}_{2} & & n'^{3}_{1}-n^{3}_{2} \\ & n^{2}_{3}-n''^{2}_{3} & & O \\ & & O & \end{array} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} n^{2}_{2} \\ n'^{3}_{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'^{3}_{1} \\ n^{3}_{2} \end{pmatrix} \sum_{\substack{n''^{1}_{3} \\ n''^{2}_{3}}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} & & n^{2}_{2} - n^{3}_{2} & \\ & n^{2}_{2} - n^{3}_{2} & & n^{2}_{2} - n^{3}_{2} \\ n'^{1}_{3} - n''^{1}_{3} & & n^{2}_{2} - n^{3}_{2} & & n'^{3}_{1} - n^{3}_{2} \\ & n^{2}_{3} - n''^{2}_{3} & & O \\ & & O & \end{array} \right]}_{D} \qquad \left\{ \left(\left[M_{<2} \; ; \; n^{3}_{2} \right]^{3,2} \right)^{23}_{23} \right\}$$

$$\left\{\left(\left[M_{<2}\ ,\ n_2^3\right]^{3,2}\right)_{23}\right\}_{23} = \begin{pmatrix} n_2^3 \\ \\ n''^1_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n''^1_3 \\ \\ n''^2_3 \end{pmatrix} \left(x_{23}^{23}\right)^{n''^2_3} \left(x_{13}^{23}\right)^{n''^1_3 - n''^2_3} \left(x_{12}^{23}\right)^{n_2^3 - n''^1_3}$$

On effectue le pelage de D en utilisant le changement de variables

$$a_1^1 = n_2^2 - n_2^3\ ,\quad a_1^3 = n'^3_1 - n_2^3\ ,\quad a_3^1 = n'^1_3 - n''^1_3\ ,\quad a_3^2 = n_3^2 - n''^2_3$$

$$\begin{pmatrix} & a_1^1 & \\ a_1^1 & & a_1^1 \\ a_3^1 & a_1^1 & a_1^3 \\ a_3^2 & & 0 \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} = \sum_{\substack{a'^1_2 \\ a'^1_3 \\ a'^2_3}} \begin{pmatrix} & a_1^1-a'^1_1 & \\ a_1^1-a'^1_2 & & a_1^1-a'^2_1 \\ a_3^1-a'^1_3 & a_1^1-a'^2_2 & a_1^3-a'^3_1 \\ a_3^2-a'^2_3 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a'^1_1 & \\ a'^1_2 & & a'^2_1 \\ a'^1_3 & a'^2_2 & a'^3_1 \\ a'^2_3 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On pose } a'^1_1 = a'^2_1 = a'^3_1 = a_1^3 \implies a'^2_2 = a_1^3 \text{ et } a'^1_2 = a_1^3}$$

$$
= \sum_{\substack{a'^{1}_{3} \\ a'^{2}_{3}}}
\underbrace{\begin{pmatrix}
 & & a^{1}_{1}-a^{3}_{1} & & \\
 & a^{1}_{1}-a^{3}_{1} & & a^{1}_{1}-a^{3}_{1} & \\
a^{1}_{3}-a'^{1}_{3} & & a^{1}_{1}-a^{3}_{1} & & 0 \\
 & a^{2}_{3}-a'^{2}_{3} & & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}}_{\left(\left(\left[M_{<2}\; ;\; a^{1}_{1}-a^{3}_{1}\right]^{3,2}\right)^{12}_{23}\right)}
\underbrace{\begin{pmatrix}
 & & a^{3}_{1} & & \\
 & a^{3}_{1} & & a^{3}_{1} & \\
a'^{1}_{3} & & a^{3}_{1} & & a^{3}_{1} \\
 & a'^{2}_{3} & & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{pmatrix}}_{\left(\left(\left[M_{<2}\; ;\; a^{3}_{1}\right]^{3,2}\right)^{13}_{23}\right)}
$$

$$
= \sum_{\substack{a'^{1}_{3} \\ a'^{2}_{3}}}
\binom{a^{1}_{1}-a^{3}_{1}}{a^{1}_{3}-a'^{1}_{3}}
\binom{a^{1}_{3}-a'^{1}_{3}}{a^{2}_{3}-a'^{2}_{3}}
\binom{a^{3}_{1}}{a'^{1}_{3}}
\binom{a'^{1}_{3}}{a'^{2}_{3}}
\cdot \left(x^{12}_{23}\right)^{a^{2}_{3}-a'^{2}_{3}}
\cdot \left(x^{12}_{12}\right)^{a^{1}_{1}-a^{3}_{1}-a^{1}_{3}+a'^{1}_{3}}
$$

$$
\cdot \left(x^{12}_{13}\right)^{a^{1}_{3}-a'^{1}_{3}-a^{2}_{3}+a'^{2}_{3}}
\cdot \left(x^{13}_{12}\right)^{a^{3}_{1}-a'^{1}_{3}}
\cdot \left(x^{13}_{13}\right)^{a'^{1}_{3}-a'^{2}_{3}}
\left(x^{13}_{23}\right)^{a'^{2}_{3}}
$$

En regroupant le tout et reprenant l'écriture en n_i^j on obtient le pelage de B

On note les indices de sommation comme suit : $a'^1_3 = \mu \quad a'^2_3 = \nu$

$n''^1_3 = \gamma \quad n''^2_3 = \varepsilon$

$$(B) = \sum_{\substack{\gamma,\varepsilon\\ \mu,\nu}} \begin{pmatrix} n_2^3 \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2^2 - n'^3_1 \\ n'^1_3-\gamma-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'^1_3 - \gamma - \mu \\ n_3^2 - \varepsilon - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'^3_1 - n_2^3 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

$$\left(x_{23}^{12}\right)^{n_3^2-\varepsilon-\nu} \left(x_{12}^{12}\right)^{n_2^2-n'^3_1-n'^1_3+\gamma+\mu} \left(x_{12}^{13}\right)^{n'^3_1-n_2^3-\mu}$$

$$\left(x_{13}^{12}\right)^{n'^1_3-\gamma-\mu-n_3^2+\varepsilon+\nu} \left(x_{13}^{13}\right)^{\mu-\nu} \left(x_{23}^{13}\right)^{\nu}$$

$$\left(x_{23}^{23}\right)^{\varepsilon} \left(x_{13}^{23}\right)^{\gamma-\varepsilon} \left(x_{12}^{23}\right)^{n_2^3-\gamma}$$

Regroupant (A) et (B) dans l'expression de (N) et reprenant l'écriture en m_j^i on obtient le pelage de (T) où on note les indices de sommation $n'^1_3 = \psi \quad n'^3_1 = \phi$

Structure du programme.

Bloc 1 Enumération des tableaux binaires et remplissage de la matrice R

Bloc 2 Ecriture du système (III-5)

Bloc 3 Recherche des vecteurs $\vec{f}$ vérifiant $\vec{F} \geqslant 0$

Détail du bloc 1

1-1 Le changement de notation

Enumérer toutes les inconnues $d_{I_\ell}^{J_\ell}$, c'est rechercher tous les couples de multiindices(I_ℓ, J_ℓ) où I_ℓ et J_ℓ sont chacun des combinaisons ordonnées sans répétitions de ℓ nombres pris parmi $\{1, 2, \ldots n\}$.

Il est encombrant de retenir toutes ces combinaisons dans l'ordinateur, de les grouper 2 à 2 et de différencier les $d_{I_\ell}^{J_\ell}$ qui vérifient la règle (a) des autres. (l'écriture analytique de cette règle est très lourde). Il s'est donc avéré nécessaire de rechercher une écriture plus compacte des indices des tableaux binaires.

Avec cette notation, chaque $d_{I_\ell}^{J_\ell}$ est caractérisé par seulement une combinaison et non deux.

On note par $D_{i_1 \ldots i_k}$ (notation compacte) le tableau binaire

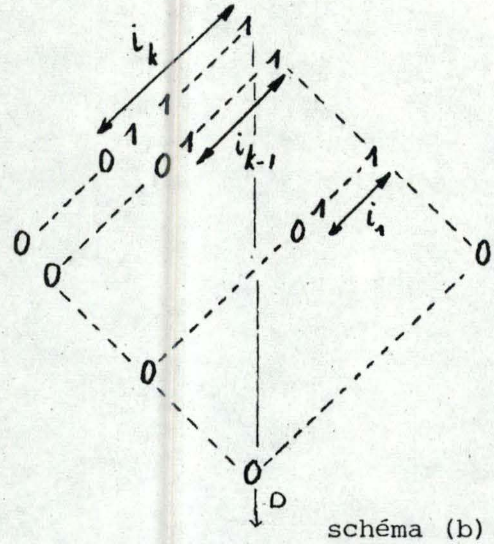


schéma (b)

Pour convertir l'indexation du tableau dans la notation classique, le programme utilise une matrice intermédiaire notée trad que l'on remplit de 1 conformément au schéma (b).

Le nombre de 1 à gauche de la diagonale D sur la $\ell^{\text{ième}}$ ligne vaut le $(n - \ell + 1)^{\text{ième}}$ indice inférieur de la notation classique moins une unité.

Le nombre de 1 sous la diagonale D sur la $\ell^{\text{ième}}$ colonne vaut le $\ell^{\text{ième}}$ indice supérieur de la notation classique moins une unité.

Exemple :

$$n = 4$$

soit $k = 3$, $D_{i_1\, i_2\, i_3} = D_{1\,2\,3}$

trad subit le remplissage suivant :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

diagonale D

$\Rightarrow$ $D_{1\,2\,3}$ s'écrit en notation classique $D^{0\,0\,1\,3}_{0\,0\,1\,3}$ ou $D^{1\,3}_{1\,3}$

1-2 *Enumération des tableaux binaires*

- Les d_{I_k} (ou $d_{I_\ell}^{J_\ell}$ dans la notation classique) vérifiant la règle (a) sont du type $d_1, \ldots, d_n$

  ou $d_{1n}, \ldots, d_{nn}$

  ou $d_{1\underbrace{n \ldots n}_{n-1 \text{ fois}}}, \ldots d_{nn \ldots n}$

- Les d_{I_k} composantes de $\vec{f}$ sont caractérisées toutes par les combinaisons avec répétition de k nombres pris parmi $\{1 \ldots n\}$ dont on exclut celles où les k - 1 derniers nombres sont égaux à n.

- Méthode pratique pour énumérer ces combinaisons :

  On utilise un vecteur iv initialisé à 1, de longeur k, qui contient la combinaison recherchée,

  un vecteur iw de longueur k qui contient les valeurs maximales de chaque composante de iv

$$iv(i) \leqslant iw(i) \qquad i = 1, \ldots k$$

(ce vecteur iw permet d'éliminer les combinaisons ordonnées associées aux tableaux vérifiant (a))

$$iw(1) = iw(2) = n - 1 \; ; \; iw(i) = 3 \qquad i = 3, \ldots n$$

Le vecteur iw initialisé à 1 dans toutes ses composantes est déjà une combinaison.

Pour trouver les autres combinaisons, le programme exploite l'idée qui suit :

A la $i^{\text{ième}}$ étape, fixer les $n - i$ premières composantes, faire varier la $(n - i + 1)^{\text{ième}}$ de 1 à sa valeur maximale et pour chacune des valeurs prises par cette dernière, faire varier chacune des $i - 2$ dernières composantes depuis la valeur de la précédente jusqu'à sa propre valeur maximale

Exemple :

$$n = 5 \qquad iw = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$k = 4$$

Première étape :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

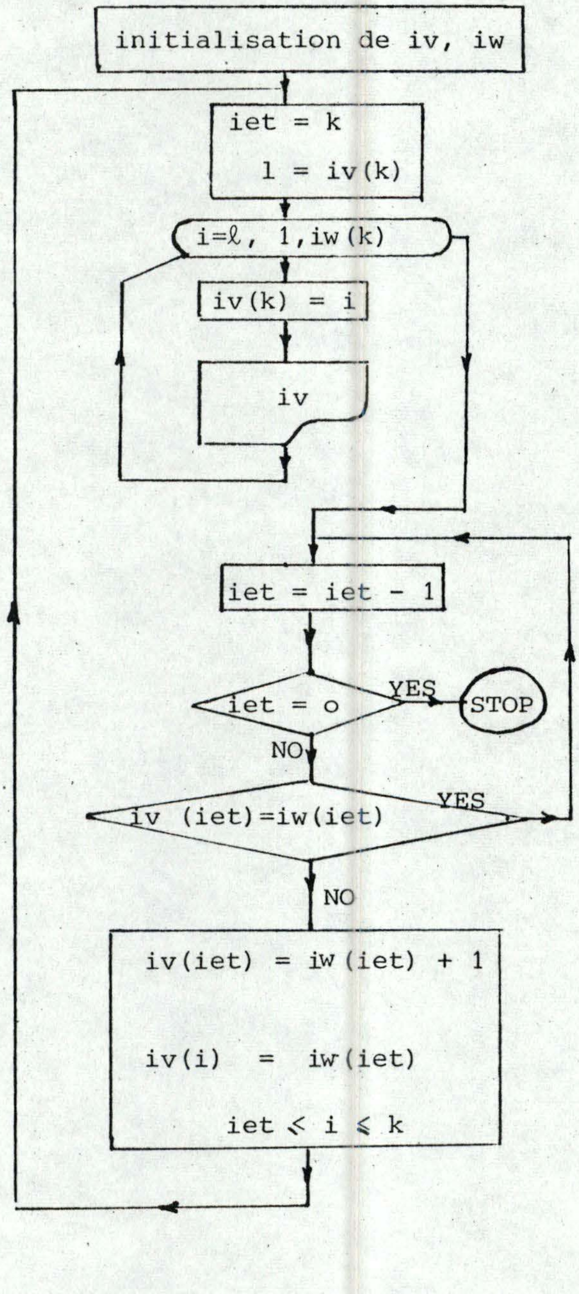
Deuxième étape :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Troisième étape ...

Organigramme de la recherche des combinaisons ordonnées avec répétitions de k nombres pris parmi {1, ... n}



<u>table de variables</u>

<u>iv</u> est un vecteur de dimension k qui contiendra l'écriture de la combilaison à k éléments, $k \leqslant n$

<u>iw</u> est un vecteur de dimension k qui contient les nombres maximaux de variation des composantes de iv

<u>iet</u> indique l'étage de iv que l'on fait varier.

1-3 *Remplissage de la matrice* $[R]$

(cette matrice est notée IR dans le programme)

Si on suppose que le nom de la $x^{ième}$ inconnue de $\vec{f}$ correspond au tableau $d_{i_1 \ldots i_k}$, cette inconnue apparaîtra avec le coefficient 1 dans les équationsdu système (II-1) dont le terme indépendant est

$$m_1^r \, , \; m_2^r \, , \; \ldots \; m_{i_k-r+1}^r \qquad \text{avec } r = 1, \ldots k$$

Donc dans la matrice IR, on placera un 1 dans la $x^{ième}$ colonne à chacune des lignes correspondant à un des m_s^r de la liste.

Détail du bloc 2

2-1 ITM est un vecteur qui désigne $[T]^{-1}$. IM

ITR est une matrice qui désigne $[T]^{-1} . [R]$

Etant donné la forme particulière de $[T]^{-1}$ les opérations matricielles $[T]^{-1}$. IM et $[T]^{-1}$ sont assez simples.

2-2 max est un vecteur de longueur $\binom{2n}{n} - n^2 - 1$ qui rassemble pour chacune des composantes de $\vec{f}$ la valeur maximale qu'elle peut prendre.

Cette valeur maximale est liée à l'inégalité ( )

Idée du premier test que subit max :

On étudie la $k^{ième}$ composante de $\vec{f}$, soit d

Elle est le coefficient d'un tableau binaire, soit $\mathbb{1}(d)$, d ne pourra prendre une valeur supérieure à aucun des m_j^i dont la position (précisée par i et j) dans le treillis M est une position où le tableau Π(d) prend la valeur non nulle : 1.

Idée du second test que subit max

Dans les notations du programme,(III-5) s'écrit :

$$\vec{F} = [ITM] - [ITR]\ (\vec{f}) \geqslant o$$

On étudie une ligne quelconque de ce système, soit la $i^{ème}$.

Si la $i^{ième}$ composante de $[ITM]$ est positive et si la composante (i,k) de $[ITR]$ est positive, la $k^{ième}$ composante de $\vec{f}$ doit prendre comme valeur maximale une valeur au plus égale à $[ITM]$ (i).

Détail du bloc 3

La fonction I fact (x) calcule la factorielle de x.

La subroutine Sol (k_2, k_3, M)

k_2 désigne le carré de la dimension du treillis M qui est aussi égal au nombre de composantes de $\vec{F}$

k_3 désigne le nombre de composantes de $\vec{f}$

M la valeur maximale des composantes du treillis, donc m_1^1

NF désigne le vecteur $\vec{F}$

NV désigne le vecteur $\vec{f}$

La subroutine Sol imprime les monômes dont les variables sont les $x_{I_\ell}^{J_\ell}$ (conditions initiales) avec leurs puissances respectives $d_{I_\ell}^{J_\ell}$.

La somme de ces monômes donne le polynôme x^M.

Méthode de la subroutine :

Le premier vecteur NV proposé comme solution est le vecteur identiquement nul. Les vecteurs NV suivants testés comme solutions sont énumérés par le même processus que celui décrit dans l'organigramme.

Remarque

Si on connaît toutes les solutions du système (III-1) pour un treillis M donné (soit problème 1) on peut facilement tirer les solutions du système (III-1) pour un treillis N de même dimension et tq

$n_i^i = m_j^i \quad \forall\, i \neq 1 \; ; \; j \neq 1$

(soit problème 2)

$n_1^1 = m_1^1 + \alpha \qquad \alpha \geqslant o$ arbitraire

D'abord, si à chacune des solutions du problème 1, vous ajoutez α fois le tableau $\mathbb{1}_1^1$, vous obtenez une solution du problème 2.

Ensuite, il faut envisager séparément chacune des solutions du problème 1. Il faut repérer dans cette solution quels sont les coefficients des tableaux du type $\mathbf{1}_{i_1}^{j_1}$,échanger un (ou plusieurs) de ces tableaux par des tableaux symétriques par rapport à la colonne centrale $(\mathbf{1}_{i_1}^1 , \mathbf{1}_1^{j_1})$. On obtient ainsi une décomposition non plus du tableau M, mais d'un tableau M' identique à M si ce n'est que $m'^1_1 > m^1_1$.

Cette transformation conduit à une solution du problème 2 , il suffit d'ajouter à la décomposition de M' , $(m_1^1 - m'^1_1)$ fois le tableau $\mathbb{1}_1^1$.

Ce processus doit être appliqué de toutes les façons possibles tant que m'^{1}_{1} reste inférieur où égal à m^{1}_{1} si l'on veut obtenir toutes les solutions du problème 2 .

Exemple :

$$n = 3$$

Les treillis du type $\mathbb{1}^{i_1}_{j_1}$ sont :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\mathbb{1}^{2}_{2} \qquad\qquad \mathbb{1}^{2}_{3} \qquad\qquad \mathbb{1}^{3}_{3} \qquad\qquad \mathbb{1}^{3}_{2}$$

Ils sont au nombre de 4 pour $n = 3$.

Soit M le tableau :

$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & & \\ & 7 & & 4 & \\ 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Soit N le tableau :

$$\begin{array}{ccccc} & & 10 & & \\ & 7 & & 4 & \\ 1 & & 1 & & 2 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Une solution du problème 1 associé au tableau M est, par exemple :

$$2\ \mathbb{1}^{2}_{2} + 3\ \mathbb{1}^{1}_{2} + \mathbb{1}^{3}_{2} + \mathbb{1}^{12}_{12} \qquad (a)$$

Pour passer à une solution du problème 2, on peut, par exemple, échanger le tableau $\mathbb{1}_2^2$

"L'échange" se fait comme suit :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & \mathbb{1}_2^2
\end{array}
\quad \text{est échangé contre} \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & \mathbb{1}_1^1
\end{array}
+
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & \mathbb{1}_1^2
\end{array}
$$

Il n'y a évidemment pas égalité entre

$\mathbb{1}_2^2$ et $\mathbb{1}_2^1 + \mathbb{1}_1^2$ mais cet échange n'altère que le nombre placé en position m_1^1.

$$1\ \mathbb{1}_2^2 + 4\ \mathbb{1}_2^1 + \mathbb{1}_1^2 + \mathbb{1}_2^3 + \mathbb{1}_{12}^{12}$$

est une décomposition du tableau :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 8 & & \\
 & 7 & & 4 & \\
1 & & 1 & & 2 \\
 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ une solution au problème 2 est, par exemple :

$$\mathbb{1}_2^2 + 4\ \mathbb{1}_2^1 + \mathbb{1}_1^2 + \mathbb{1}_2^3 + \mathbb{1}_{12}^{12} + (10 - 8)\ \mathbb{1}_1^1$$

On peut, à partir de (a) déduire d'autres solutions du (problème 2) en "échangeant" les deux tableaux $\mathbb{1}_2^2$, ou en "échangeant" le tableau $\mathbb{1}_2^3$, ou encore en "échangeant" l'un des tableaux $\mathbb{1}_2^2$ et le tableau $\mathbb{1}_2^3$,

ou finalement en "échangeant" les deux tableaux $\mathbb{1}_2^2$ et le tableau $\mathbb{1}_2^3$.

```
      PROGRAM BGL
C     |-----------------------------------------------------------|
C     | CALCUL DE L'EXPONENTIELLE D'UN TREILLIS DE GEL'FAND |
C     |-----------------------------------------------------------|

C     DECLARATIONS

      DIMENSION IV(5),IW(5)
      DIMENSION IR(25,227)
      DIMENSION IEK(5)
      COMMON IM(25)
      COMMON ITM(25),ITR(25,227)
      COMMON MAX(227)

C     LECTURE ET IMPRESSION

      READ 1,N
    1 FORMAT(I2)
      N2=N**2
      N3=IFACT(2*N)/(IFACT(N)**2)-1-N**2
      READ 100,(IM(I),I=1,N2)
  100 FORMAT(25I3)
      PRINT 1996
 1996 FORMAT (1H1)
      PRINT 1997,(IM(I),I=1,N2)
 1997 FORMAT(1X,'LES ELEMENTS DU TREILLIS SONT',/,1X,25I3)

      N4=1
      M11=IM(1)
      NUM=0
      DO 22 I=1,N2
      DO 22 J=1,N3
   22 IR(I,J)=0
      DO 4003 KIP=1,N
 4003 IEK(KIP)=0

C         ---- BLOC 1 ----
C         ----------------

      PRINT 1995
 1995 FORMAT (/,1X,'ENUMERATION DES TABLEAUX BINAIRES ')
      PRINT 1994
 1994 FORMAT (1X,33(1H-))
      DO 4000 KOP=1,N
      KUP=1
      IF(KOP.EQ.1) GOTO 4001
      DO 4002 I=2,KOP
 4002 IEK(I)=N
 4001 IEK(1)=KUP
      CALL NOM(KOP,IEK,N4,N)
```

```
      N4=N4+1
      IF(KUP.EQ.N) GOTO 4000
      KUP=KUP+1
      GOTC 4001
 4000 CONTINUE

      N4=N2+1
      DO 2 K=2,N
      PRINT 259,K
  259 FORMAT(1H1,'LA VALEUR DU K EST',I2)
      DO 3 I=1,K
    3 IV(I)=1
      DO 4 I=2,K
    4 IW(I)=N
      IW(1)=N-1
      IW(2)=N-1
  256 IET=K
      LU=IV(K)
      L1=IW(K)
      DO 5 I=LU,L1
      IV(K)=I
      CALL NOM(K,IV,N4,N)
      N4=N4+1
      NUM=NUM+1

C     REMPLISSAGE DE LA MATRICE RECTANGULAIRE
C     ---------------------------------------

      DO 7 NR=1,K
      IFIN=IV(K-NR+1)
      DO 8 IND=1,IFIN
      LIN=(NR-1)*N+IND
      IR(LIN,NUM)=1
    8 CONTINUE
    7 CONTINUE
    5 CONTINUE
  257 IET=IET-1
      IF(IET.EQ.0) GOTO2
      IF(IV(IET).EQ.IW(IET)) GOTO257
      IV(IET)=IV(IET)+1
      DO 10 I=IET,K
   10 IV(I)=IV(IET)
      GOTO 256
    2 CONTINUE
```

```
C          ---- BLOC 2 ----
C          ----------------

C      CALCUL DE T-1*M
C      ---------------

       N21=N2-1
       DO 80 I=1,N21
    80 ITM(I)=IM(1)-IM(I+1)
       ITM(N2)=IM(N2)

C      CALCUL DE T-1*R
C      ---------------

       DO 81 I=1,N21
       DO 81 J=1,N3
    81 ITR(I,J)=IR(I,J)-IR(I+1,J)
       DO 82 K=1,N3
    82 ITR(N2,K)=IR(N2,K)
       N1=N-1
       PRINT 777
   777 FORMAT(1H1)

C      RECHERCHE DE LA VALEUR MAX DES COMPOSANTES DE GRAND F
C      -----------------------------------------------------

       DO 500 K=1,N3
   500 MAX(K)=M11
       DO 666 K=1,N3
       DO 667 I=1,N2
       IF (ITR(I,K).NE.1) GOTO 668
       IF (MAX(K).GT.IM(I)) MAX (K)=IM(1)
   668 CONTINUE
   667 CONTINUE
   666 CONTINUE

       DO 501 I=1,N2
       DO 502 J=1,N3
       IF(ITR(I,J).LE.0) GOTO 502
       IF (ITM(I).LT.0) GOTO 502
       IF(ITM(I).LT.MAX(J)) MAX(J)=ITM(I)
   502 CONTINUE
   501 CONTINUE
```

```
      C           ---- BLOC 3 ----
      C           ----------------

      C       IMPRESSION DES RESULTATS
      C       ------------------------
              PRINT 1999
         1999 FORMAT(1H1,'LES RESULTATS SONT')

              CALL SOL(N2,N3,M11)
         1000 CONTINUE
          258 STOP
              END
```

```
      SUBROUTINE NOM(K,IV,KAP,N)

C     RECHERCHE DU NOM DU TABLEAU BINAIRE DANS LA NOTATION CLASS

      DIMENSION IV(5)
      DIMENSION LS(5),LX(5)
      INTEGER TRAD(5,5)
      DO 820 KX=1,N
      DO 820 KY=1,N
  820 TRAD(KX,KY)=0
      DO 801 L=1,K
      ITRUC=N-IV(K-L+1)+1
      DO 802 ICOL=ITRUC,N
  802 TRAD(L,ICOL)=1
  801 CONTINUE
      DO 803 L=1,N
      LSI=0
      MU=N-L+1
      DO 804 ICOL=1,MU
  804 LSI=LSI+TRAD(L,ICOL)
      LS(L)=LSI
  803 CONTINUE
      PRINT 1300,(LS(N-M+1),M=1,N)
 1300 FORMAT(1X,/,1X,'INDICES INFERIEURS ',5I2)
      DO 805 ICOL=1,N
      LSI=0
      NU=N-ICOL+1
      DO 806 L=NU,N
  806 LSI=LSI+TRAD(L,ICOL)
      LX(ICOL)=LSI
  805 CONTINUE
      PRINT 1301,(LX(M),M=1,N)
 1301 FORMAT(1X,/,' INDICES SUPERIEURS ',5I2)
      PRINT 5025,KAP
 5025 FORMAT (1X,/,1X,'A CE TABLEAU ON ASSOCIERA DANS LE POLYNOME
     CLA CONDITION INITIALE X',I3,/)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION IFACT(X)
      INTEGER X,X1
      M=1
      IY=1
      IF(X.EQ.0.OR.X.EQ.1) GOTO171
      X1=X-1
      DO 170 I=1,X1
  170 IY=IY*(M+I)
  171 IFACT=IY
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SOL(K2,K3,M)

C     RECHERCHE DES MONOMES SOLUTIONS

      COMMON IM(25)
      COMMON ITM(25),ITR(25,227)
      COMMON MAX(227)
      DIMENSION NF(25),NV(227)
      DIMENSION NP(227)
      INTEGER COEF
      DO 300 I=1,K3
  300 NV(I)=0
  308 NET=K3
      L=MAX(NET)
      DO 301 I=0,L
      NV(K3)=I
      DO 302 J=1,K2
      IQ=0
      DO 303 K=1,K3
  303 IQ =IQ+ITR(J,K)*NV(K)
      NF(J)=ITM(J)-IQ
      IF(NF(J).LT.0) GOTO 301
  302 CONTINUE

C     CALCUL DU COEFFICIENT

      COFF=IFACT(IM(1))
      DO 5026 ID=1,K2
 5026 COEF=COEF/IFACT(NF(ID))
      DO 5027 JD=1,K3
 5027 COEF=COEF/IFACT(NV(JD))
      DO 360 IP=1,K3
  360 NP(IP)=IP+K2
      K4=K2+K3
      PRINT 323,COEF,(IO,NF(IO),IO=1,K2),(NF(JO),NV(JO),JO=1,K3)
  323 FORMAT (1X,I10,(8('.((X',I3,')**',I3')')))
      PRINT 350
  350 FORMAT (1X,/,64X,'+')
  301 CONTINUE
  304 NET=NET-1
      IF(NET.EQ.0) GOTO 306
      IF(NV(NET).EQ.MAX(NET)) GOTO 304
      NV(NET)=NV(NET)+1
      NET1=NET+1
      DO 307 I=NET1,K3
  307 NV(I)=0
      GOTO 308
  306 RETURN
      END
```

ANNEXE 2

CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE $Ⓑ^m$

Preuve de la propriété (I-36) :

> P_1 : $\forall f \in Ⓑ_o$, f peut s'exprimer comme une fonction polynômiale des sous-déterminants
>
> $\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z) \quad d = 1 \ldots n$.

A. Introduction à la théorie des invariants

1. Invariants :

Définition : Soit Γ un groupe de transformations linéaires sur un espace vectoriel P de dimension n.

On désigne par x le nuplet de P : $(x_1, \ldots x_n)$

y le nuplet de P : $(y_1, \ldots y_n)$

Soit f une fonction définie sur P x P x ... on la note f(x,y,...).
Soit $A \in \Gamma$, on note par x' le transformé de x par A (A x) et on note par y' le transformé de y par A (A y).

La fonction f subit alors la transformation f' = Af où

$$f'(x', y', \ldots) = f(x, y, \ldots)$$

> Si $\forall A \in \Gamma$: $Af \equiv f$, la fonction f est appelée *invariant* de Γ.
>
> (A2-1)

Exemple :
=======

Soit $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel de dimension 2, $O^+(2)$ le sous-groupe des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^2$.

Le produit scalaire euclidien est un invariant de $O^+(2)$;

en effet, soit A arbitraire de $O^+(2)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\Pi]$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où } \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$f' = Af$ est défini par $f'(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Dans f, remplaçons $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ par leur expression en fonction de

$\vec{x}'_1$ et $\vec{x}'_2$ à savoir $\vec{x}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta\ x'_i + \sin\theta\ y'_i \\ -\sin\theta\ x'_i + \cos\theta\ y'_i \end{pmatrix}$

$$i = 1, 2$$

On définit donc f' par

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) &= f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= (\cos\theta\ x'_1 + \sin\theta\ y'_1)\ (\cos\theta\ x'_2 + \sin\theta\ y'_2) \\ &\quad + (-\sin\theta\ x'_1 + \cos\theta\ y'_1)(-\sin\theta\ x'_2 + \cos\theta\ y'_2) \\ &= x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 = f(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) \end{aligned}$$

Comme A arbitraire dans $O^+(2)$ f est invariant de $O^+(2)$.

Définition :

Si f est polynôme homogène en les composantes de chaque argument vectoriel x, y, ... et f invariant de Γ, on appelle f *forme invariante*.

2. Base d'invariants

Définition :

Soit $x \in P \times P \times \ldots$, l'ensemble de fonctions $\{\phi_1(x), \ldots \phi_m(x)\}$ est une base fonctionnelle d'invariants du groupe de transformations Γ

ssi i) $\phi_i(x)$ est un invariant de Γ

$i = 1, \ldots m.$

ii) $\forall$ f invariant de Γ, $\exists$ $F(\xi_1, \ldots \xi_m)$ une fonction telle que

$$f(x) = F(\phi_1(x), \ldots \phi_m(x))$$

En particulier si f est un polynôme , il existe un théorème qui assure que F est un polynôme, on dit alors que $\{\phi_i(x), i = 1, \ldots m\}$ forme une "integrity basis".

(A2-3)

Exemple :

On considère $f(x_1, \ldots x_n)$ les fonctions symétriques de n arguments définies sur un espace vectoriel P. Ces fonctions sont les invariants du groupe de permutation (noté Π_n).

On définit les fonctions symétriques élémentaires de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen de la fonction génératrice $\Phi(t)$ telle que

$$\Phi(t) = (t - x_1)(t - x_2) \ldots (t - x_n)$$

Le coefficient de la $(n-i)^{\text{ème}}$ puissance de t dans le développement polynomial de $\Phi(t)$ fournira la $i^{\text{ème}}$ fonction symétrique élémentaire

$\phi_i(x)$

$$\phi(t) = t^n - \phi_1(x)\, t^{n-1} + \phi_2(x) t^{n-2} \ldots \pm \phi_n(x)$$

où
$$\phi_1(x) = \sum_i x_i$$
$$\phi_2(x) = \sum_{i<k} x_i x_k$$
$$\phi_3(x) = \sum_{i<k<\ell} x_i x_k x_\ell$$
$$\vdots$$
$$\phi_n(x) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Si f est une fonction symétrique quelconque, il existe une fonction $F(\xi_1, \ldots \xi_n)$ telle que $f(x_1, \ldots x_n) = F(\phi_1(x) \ldots \phi_n(x))$

Donc $\{\phi_i(x)\}$ défini en (A2-4) forme une base fonctionnelle d'invariants de Π_n.

Théorème général : Tous les invariants d'un groupe Γ peuvent s'exprimer en fonction d'un nombre fini d'entre eux (A2-5)

Ce théorème est valide pour la plupart des groupes que l'on utilise. Cette étude a été faite par Weyl dans "Theory of classical groups" ((6)).

3. Liste d'invariantes typiques de base

Définition :

> Soit Γ un groupe de transformations linéaires, on peut lui associer un tableau constitué par un nombre fini d'invariants dépendant uniquement des arguments vectoriels "typiques" u, v, ... tq ce tableau engendre la base fonctionnelle des invariants dépendant d'un nombre arbitraire de variables x, y, z ..., si on substitue aux variables typiques u, v, ... les variables x, y, z, ... en les arrangeant (répétitions y comprises) de toutes les manières possibles. Ce tableau constitue la liste d'invariants typiques de base. (A2-6)

Exemple :

On considère le groupe des transformations orthogonales O(n) sur un espace vectoriel P de dimension n.

L'invariant typique de base (unique dans cet exemple) est le produit scalaire (u,v), u et v étant les arguments typiques.

Les fonctions de trois arguments x, y, z invariants sous O(n) admettent comme base fonctionnelle d'invariants les produits scalaires :

(x,x) ; (x,y) ; (x,z) ; (y,y) ; (y,z) ; (z,z)

$\quad\quad\quad\quad\quad \parallel \quad\quad\quad \parallel \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad$ (y,x) $\quad$ (z,x) $\quad\quad\quad\quad$ (z,y)

Définition :

> La liste d'invariants typiques de base est dite complète si la substitution des arguments x, y, z dans tous les arrangements possibles (répétitions y comprises) aux arguments typiques conduit à une "integrity basis" d'invariants. (A2-7)

Théorème général : ((6))

> Un tableau fini T d'invariants typiques de base d'un groupe de transformations Γ de dimension n, est une liste complète d'invariants typiques de base pour des fonctions de m arguments (m arbitraire ⩾n) si on peut prouver qu'il est une liste complète d'invariants typi-

ques de base pour des fonctions de n arguments.

De plus, il suffit de vérifier cela pour des fonctions de n - 1 arguments pour autant que le déterminant $[u^1, u^2, \ldots u^n]$ apparaisse dans ce tableau T ou au moins puisse s'exprimer en fonction de ces invariants. (A2-8)

$[u^1, u^2, \ldots u^n]$ représente ici le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & & & \cdot \\ u_1^n & & \ldots & u_n^n \end{bmatrix}$$

Si le tableau de départ T ne contient pas ce déterminant ou ne permet pas son écriture en fonction des invariants qu'il contient, on prend un nouveau tableau T' consitué du tableau T augmenté du déterminant $[u^1, u^2, \ldots u^n]$.

4. Application de la théorie des invariants aux éléments de $(B)_o$

Rappel :

$f \in (B)_o \Longleftrightarrow$ f fonction définie sur M(n) telle que

$f(gz) = f(z) \quad \forall g \in (N)_n$ où $(N)_n$ est définie en (I-32)

On peut considérer un élément $z \in M(n)$ comme un n-uplet de vecteurs colonnes de dimension n : $z_{.1}, z_{.2}, \dots z_{.n}$

Un élément f de $(B)_o$ est donc une fonction de n arguments $z_{.1}, z_{.2}, \dots z_{.n}$, invariante sous le groupe de transformations $(N)_n$

Le théorème que l'on veut démontrer affirme que les déterminants $\Delta j_1 \dots j_d(z)$ forment une "integrity basis" d'invariants de $(N)_n$. Or, le déterminant $\Delta j_1 \dots j_d(z)$ s'obtient par substitution de $z_{.j_a}$ à $z_{.a}$ dans le déterminant $\Delta(d,z) \equiv \Delta_{1\dots d}(z)$ où $a = 1, \dots n$
Par conséquent, le théorème à prouver s'énonce aussi :

> $\Delta(1,z)$, $\Delta(2,z)$ ... $\Delta(n,z)$ forment une liste complète d'invariants typiques de base (A2-9)

Avant d'en étudier la démonstration on prouve le lemme suivant :

Lemme : ((5))

> Soit $f \in (B)_o$ telle que f est indépendante de la colonne $z_{.n}$ alors f est indépendante de la ligne $z_{n.}$.

Démonstration :

f indépendant de $z_{.n}$, on peut donc restreindre f au sous espace des matrices de dernière colonne $z_{.n}$ nulle.

On démontre d'abord le lemme pour les matrices vérifiant $\Delta(n-1, z) \neq 0$. Cette condition entraîne que $z_{1.}$, $z_{2.}$, ... $z_{n-1.}$ sont des lignes (à dernière composante nulle) linéairement indépendantes, elles forment donc une base des vecteurs lignes à dernière composante nulle d'où $z_{n.} = \sum_{j=1}^{n-1} e_j z_{j.}$ ou, en posant

$$g = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & \\ c_1 \dots c_{n-1} & & 1 \end{vmatrix} \in (N)_n$$

$$\begin{pmatrix} z_{1.} \\ \\ z_{n.} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} z_{1.} \\ z_{n-1.} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent : $f(z) = f \begin{pmatrix} z_{1.} \\ \\ z_{n.} \end{pmatrix} = f\left(g \begin{pmatrix} z_{1.} \\ z_{n-1.} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} z_{1.} \\ z_{n-1.} \\ 0 \end{pmatrix}$

car $f \in (B)_o$

ce qui se traduit par f indépendant de z_n.

Le lemme est démontré pour le sous ensemble des matrices de dernière colonne nulle et qui vérifient $\Delta(n - 1, z) \neq o$. On peut montrer que ce sous ensemble est dense dans l'ensemble des matrices dont $z_{.n}=0$, d'où par continuité, la conclusion reste valable pour toutes les matrices à dernière colonne nulle. Par conséquent, si f est indépendant de la dernière colonne, f est indépendant de la dernière ligne.

Démonstration de (A2-9).

On procède par recurrence.
Si $n = 1$, $\Delta(1, z)$ est bien une liste complète d'invariants typiques de base puisque - $z \in M(1)$ => z est un scalaire : z_{11}
et $\Delta(1, z) = z_{11}$

- $g \in N(1)$ => g est le scalaire 1
- f fonction homogène sur M(1)

donc f est un polynôme en $z_{11} = \Delta(1, z)$

On suppose ensuite que $\Delta(1, z)$, $\Delta(2, z)$, ... $\Delta(n-1, z)$ est une liste d'invariants typiques de base pour les fonctions d'arguments vectoriels de dimension (n-1) invariantes sous $(N)_{n-1}$ et on montre que $\Delta(1, z)$, ..., $\Delta(n, z)$ est une liste complète d'invariants typiques de base pour les fonctions de n arguments de dimension n invariantes sous $(N)_n$.

Soit f une fonction polynomiale dépendant de n-1 vecteurs colonnes de dimension n à savoir $z_{.1}$, $z_{.2}$, ... $z_{.n-1}$ et invariante sous $(N)_n$. On peut considérer f comme une fonction de n arguments $z_{.1}$, $z_{.2}$, ... $z_{.n-1}$, $z_{.n}$, indépendante de $z_{.n}$. Par le lemme, elle est indépendante de $z_{n.}$, ce qui suggère de considérer f comme une fonction définie sur M(n-1) invariante sous $(N)_{n-1}$; par hypothèse de récurrence, f s'exprime au moyen des invariants typiques de base $\Delta(1, z)$ ... $\Delta(n-1, z)$. Donc $\Delta(1, z)$ ... $\Delta(n-1, z)$ est une liste d'invariants typiques de base pour les fonctions de n-1 arguments vectoriels de dimension n, par le théorème général (A2-8) et puisque $\Delta(n, z)$ ne s'exprime pas en fonction de $\Delta(1, z)$ ... $\Delta(n-1, z)$, il suffit d'ajouter à cette liste : $\Delta(n, z)$ pour obtenir une liste complète d'invariants typiques de base pour des fonctions de n arguments de dimension n, invariantes sous $(N)_n$.

ANNEXE 3

DEMONSTRATION DES LEMMES CONCERNANT LES STRUCTURES DU "REPRODUCING KERNEL" DE Ⓑ^{m}

Lemme 1 :

> Si $M \in S$ alors $M(I) = 0$
>
> D'autre part $\Delta^e(I) = 0$
>
> S désigne les monômes en Δ autres que Δ^e

Démonstration :

$$\Delta(d, I) = 1 \quad \text{pour } d = 1, \ldots n$$

puisque c'est le déterminant de la matrice construite à partir de I en conservant les d premières lignes et les d premières colonnes

$$\Delta_{j_1 \ldots j_d}(I) = 0 \quad \text{si } (j_1, \ldots j_d) \neq (1, \ldots d)$$

$$\text{pour } d = 1, \ldots n$$

puisque c'est le déterminant de la matrice construite à partir de I en conservant les d premières lignes et les colonnes $j_1 \ldots j_d$. Cette matrice contient donc des colonnes de 0.

Lemme 2 :

> Si $M \in S$ alors M est orthogonal à Δ^e

Démonstration :

a) Chaque monôme en Δ est un vecteur propre de L_δ

où $\delta = \text{diag}\,(\delta_1 \ldots \delta_n)$ est une matrice hermitienne ; en effet, L_δ est l'opérateur agissant sur $\mathcal{B}^m$ qui à $f(z)$ associe $f(\delta z)$

On a : $L_\delta \quad \Delta_{j_1 \ldots j_d}(z) = \Delta_{j_1 \ldots j_d}(\delta z) = \delta_{j_1} \ldots \delta_{j_d} \Delta_{j_1 \ldots j_d}(z)$

donc pour chaque monôme M en les déterminants Δ on peut trouver un multiindice $(\mu_1(M), \ldots, \mu_n(M)) \equiv \mu(M)$

tel que $L_\delta \; M = \delta^{\mu(M)} M$

$$= \delta_1^{\mu_1(M)} \ldots \delta_n^{\mu_n(M)} M$$

en particulier $\mu(\Delta^e) = (m_1, m_2, \ldots m_n)$

b) Sur ces multiindices on place l'ordre suivant :

soit $\mu' = (\mu'_1, \ldots \mu'_n)$, $\mu'' = (\mu''_1, \ldots, \mu''_n)$

$$\mu' > \mu'' \overset{\text{déf}}{\iff} \mu'_1 = \mu''_1, \ldots, \mu'_j = \mu''_j \; , \; \mu'_{j+1} > \mu''_{j+1}$$

pour un certain j.

Cet ordre étant défini, on déduit :

$$\mu(\Delta^e) > \mu(M) \qquad \forall\, M \in S$$

en effet $\qquad \mu(\Delta_{1\ldots d}) > \mu(\Delta_{j_1 \ldots j_d})$

c) On constate que $\mu(M) \neq \mu(\Delta^e) \qquad \forall\, M \in S$

donc M et Δ^e sont des fonctions propres de l'opérateur hermitien L_δ correspondant à des valeurs propres distinctes, par conséquent elles sont orthogonales.

L_δ est en effet un opérateur hermitien puisque

$$(L_\delta f,g) = (f, L_\delta g) \qquad \forall f, g \in Ⓑ^m$$

car
$$(L_\delta f,g) = \int \overline{L_\delta f(z)} \quad g(z) \quad d\gamma(z)$$

$$= \int \overline{\delta^m f(z)} \quad g(z) \quad d\gamma(z) \qquad \text{car } f \in Ⓑ^m$$

$$= \int \overline{\delta}^m \; \overline{f(z)} \quad g(z) \quad d\gamma(z)$$

et
$$(f, L_\delta g) = \int \overline{f(z)} \quad L_\delta g(z) \quad d\gamma(z)$$

$$= \int \delta^m \; \overline{f(z)} \quad g(z) \quad d\gamma(z) \qquad \text{car } g \in Ⓑ^m$$

or δ hermitienne entraîne $\delta = \overline{\delta}$

d'où $(L_\delta f, g) = (f, L_\delta g)$.

<u>Lemme 3</u> :
$$\boxed{K^m(z,I) = \|\Delta^e\|^{-2} \quad \Delta^e(z)}$$

<u>Démonstration</u> :

Soit f un élément arbitraire de $Ⓑ^m$

Par le lemme 2, on peut décomposer $Ⓑ^m$ en les sous espaces orthogo - naux engendrés respectivement par δ et Δ^e.

Soit donc $\quad f = \alpha \, \Delta^e + f_2$

où f_2 est combinaison linéaire d'éléments de S

on a que $\quad f(I) = \alpha \, \Delta^e(I) + f_2(I)$

$$= \alpha \quad 1 + 0 \qquad \text{par le lemme 1}$$

$$= \alpha$$

en outre $(\Delta^e, f) = \alpha(\Delta^e, \Delta^e) + (\Delta^e, f_2)$

$$= \alpha \|\Delta^e\|^2 + 0 \qquad \text{par le lemme 2}$$

$$= \alpha \|\Delta^e\|^2$$

d'où $\quad f(I) = \alpha = \|\Delta^e\|^{-2} (\Delta^e, f)$

Or $K_I^m(z)$ est tel que $(K_I^m, f) = f(I)$

Donc $(K_I^m, f) = \|\Delta^e\|^{-2} (\Delta^e, f)$ et comme f est arbitraire dans B^m on a :

$$K_I^m = \|\Delta^e\|^{-2} \Delta^e$$

ANNEXE 4

Proposition (IV-10)

> Soit $z \in M(n)$ et $w \in M(n-1)$. Si $S_d(n)$ désigne l'ensemble de tous les d-uplets $(j_1, \dots j_d)$ tels que $j_1 < j_2 < \dots j_d \leqslant n$, alors
>
> $$\Delta\,(d\,;\,z\,w^*) = \sum_{J \in S_d(n-1)} \Delta_J(z)\,\overline{\Delta}_J(w) \qquad (\alpha)$$
>
> $d=1, \dots, n-1$
>
> $$\tilde{\Delta}\,(d\,;\,z\,w^*) = \sum_{J \in S_{d-1}(n-1)} \Delta_{Jn}(z)\,\overline{\Delta}_J(w) \qquad (\beta)$$
>
> $d=1, \dots, n.$

Remarque : $w \in M(n-1)$ est plongée par l'injection canonique dans $M(n)$.

Démonstration :

Soit la propriété ((11)) :

$$\Delta_J^{J'}(z\,v) = \sum_{J'' \in S_d(n)} \Delta_{J''}^{J'}(z)\,\Delta_J^{J''}(v) \qquad (\gamma)$$

où $J, J' \in S_d(n)$ et $z, v \in M(n)$

Appliquons cette propriété avec $J' = (1, \dots d)$, $v = w^*$, et

$J = (1, \dots d)$

Dans ce cas, par les notations :

$$\Delta_{J''}^{J'}(z) = \Delta_{J''}(z)$$

et $\Delta_J^{J''}(v) = \Delta_J^{J''}(w^*) = \overline{\Delta}_{J''}^{J}(w) = \overline{\Delta}_{J''}(w)$

Par (γ), on obtient alors :

$$\Delta(d\ ;\ z\, w^*) = \sum_{J'' \in S_d(n)} \Delta_{J''}(z)\ \overline{\Delta}_{J''}(w)$$

(α) est prouvé si on observe que $\Delta_{J''}(w) = 0$ lorque J" contient l'indice n, w étant plongée dans M(n) par l'injection canonique et d étant inférieur ou égal à n-1.

Appliquons maintenant la propriété avec $J' = (1, \ldots d)$,

$$v = w^*\ ,\ \text{et } J = (1, \ldots d-1, n)$$

Dans ce cas, $\Delta^{J'}_{J''}(z) = \Delta_{J''}(z)$ par les notations

Par (γ), on obtient :

$$\Delta^{J'}_{J}(zw^*) = \sum_{J'' \in S_d(n)} \Delta_{J''}(z)\ \overline{\Delta}^{J}_{J''}(w)$$

Mais $\overline{\Delta}^{1,\ldots d-1,n}_{J''}(w)$ s'annule si J" ne contient pas l'indice n et

$$\overline{\Delta}^{1,\ldots d-1,n}_{J''\,n}(w) = \overline{\Delta}^{1,\ldots d-1}_{J''}(w)$$

Donc, $\Delta^{J'}_{J} = \tilde{\Delta}(d\ ;\ z\, w^*) = \sum_{J'' \in S_d(n-1)} \Delta_{J''n}(z)\ \overline{\Delta}_{J''}(w)$

(β) est prouvé.

Démonstration de l'égalité :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbb{R}^{m_{13}m_{23}m_{33}}_{m_{12}m_{22}}(z,w) = A\begin{pmatrix} m_{12}m_{22} \\ \end{pmatrix}^{-1/2} A\begin{pmatrix} m_{13}m_{23}m_{33} \\ m_{12}m_{22}\end{pmatrix}^{-1/2} \\
&\times \sum_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} m_{12}-m_{23} \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{23}-m_{22} \\ \beta \end{pmatrix} \Delta_1^{\alpha}(z) \quad \Delta_2(z)^{m_{12}-m_{23}-\alpha} \\
&\Delta_3(z)^{m_{13}-m_{12}} \quad \Delta_{13}^{\beta}(z) \; \Delta_{23}(z)^{m_{23}-m_{22}-\beta} \\
&\Delta_{123}(z)^{m_{33}} \quad \Delta_{12}(z)^{m_{22}-m_{23}} \\
&\times \left[\overline{\Delta}_1(w)^{\alpha+\beta} \; \overline{\Delta}_2(w)^{m_{12}-m_{22}-\alpha-\beta} \quad \overline{\Delta}_{12}(w)^{m_{22}}\right]
\end{aligned}}$$

$$\mathbb{R}^{m_{13}m_{23}m_{33}}_{m_{12}m_{22}}(z,w) = A\begin{pmatrix} m_{12}m_{22} \\ \end{pmatrix}^{-1/2} A\begin{pmatrix} m_{13}m_{23}m_{33} \\ m_{12}m_{22}\end{pmatrix} \Delta_1(zw^*)^{g1}$$

$$\Delta_3(zw^*)^{f_1} \quad \Delta_{12}(zw^*)^{g_2} \quad \Delta_{13}(zw^*)^{f_2} \quad \Delta_{123}(zw^*)^{f_3}$$

par le théorème (III-36)

D'autre part, la proposition (IV-10) engendre les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\Delta_1(zw^*) &= \sum_{J\in S_1(2)} \Delta_J(z) \quad \overline{\Delta}_J(w) \\
&= \Delta_1(z) \quad \overline{\Delta}_1(w) + \Delta_2(z)\; \overline{\Delta}_2(w)
\end{aligned}$$

$$\Delta_3(zw^*) = \Delta_3^1\ (zw^*)$$

$$= \Delta_1^1(z)\ \bar{\Delta}_1^3(w) + \Delta_2^1(z)\ \bar{\Delta}_2^3(w) + \Delta_3^1(z)\ \bar{\Delta}_3^3(w) \text{ par } (\gamma)$$

$$= \Delta_3^1(z)\ \bar{\Delta}_3^3(w)$$

car w est plongée dans M(3) par l'injection canonique

$$= \Delta_3^1(z)$$

$$\Delta_{12}(z\ w^*) = \Delta_{12}(z)\ \bar{\Delta}_{12}(w) \text{ par } (\alpha)$$

$$\Delta_{13}(z\ w^*) = \Delta_{13}^{12}\ (z\ w^*)$$

$$= \sum_{J''\in J_2(3)} \Delta_{J''}^{12}(z)\ \bar{\Delta}_{J''}^{13}\ (w) \text{ par } (\gamma)$$

$$= \Delta_{12}^{12}(z)\ \bar{\Delta}_{12}^{13}(w) + \Delta_{13}^{12}(z)\ \bar{\Delta}_{13}^{13}(w)$$

$$+ \Delta_{23}^{12}\ \bar{\Delta}_{13}^{23}$$

$$= \Delta_{13}^{12}\ \bar{\Delta}_1(w) + \Delta_{23}^{12}\ \bar{\Delta}_2(w)$$

car w est plongée dans M(3) par l'injection canonique

$$\Delta_{123}(z\ w^*) = \Delta_{123}^{123}(z)\ \bar{\Delta}_{123}^{123}(w) \text{ par } (\beta)$$

$$= \Delta_{123}^{123}(z)\ \bar{\Delta}_{12}^{12}(w)$$

Rassemblant ces résultats,

$$\mathbb{R}^{m_{13}m_{23}m_{33}}_{m_{12}m_{22}}(z,w) = A\begin{pmatrix} m_{12}m_{22} \\ \ \end{pmatrix}^{-1/2} A\begin{pmatrix} m_{13}m_{23}m_{33} \\ m_{12}m_{22} \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$\times \left(\Delta_1(z)\ \overline{\Delta}_1(w) + \Delta_2(z)\ \overline{\Delta}_2(w)\right)^{g_1}$$

$$\times\ \Delta_3(z)^{f_1} \times \Delta_{12}(z)^{g_2}\ \overline{\Delta}_{12}(w)^{g_2+f_3}$$

$$\times \left(\Delta_{13}(z)\ \overline{\Delta}_1(w) + \Delta_{23}(z)\ \overline{\Delta}_2(w)\right)^{f_2}\ \Delta_{123}(z)^{f_3}$$

ou encore, en appliquant le théorème du binôme de Newton,

$$\mathbb{R}^{m_{13}m_{23}m_{33}}_{m_{12}m_{22}}(z,w) = A\begin{pmatrix} m_{12}m_{22} \\ \ \end{pmatrix}^{-1/2} A\begin{pmatrix} m_{13}m_{23}m_{33} \\ m_{12}m_{22} \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} g_1 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ \beta \end{pmatrix} \Delta_1(z)^{\alpha}\ \Delta_2(z)^{g_1-\alpha}\ \Delta_3(z)^{f_1}$$

$$\times\ \Delta_{12}(z)^{g_2} \times \Delta_{13}(z)^{\beta} \times \Delta_{23}(z)^{g_2-\beta} \times \Delta_{123}(z)^{f_3}$$

$$\times\ \overline{\Delta}_1(w)^{\alpha+\beta}\ \overline{\Delta}_2(w)^{g_1-\alpha}\ \overline{\Delta}_{12}(w)^{g_2+f_3}\ \overline{\Delta}_2(w)^{f_2-\beta}$$

or par définition : $g_1 = m_{12} - m_{23}$, $g_2 = m_{22} - m_{33}$

$f_1 = m_{13} - m_{12}$, $f_2 = m_{23} - m_{22}$, $f_3 = m_{33}$

$$\text{Donc, } \mathbb{R}^{m_{13}m_{23}m_{33}}_{m_{12}m_{22}}(z,w) = A\begin{pmatrix} m_{12}m_{22} \\ \ \end{pmatrix}^{-1/2} A\begin{pmatrix} m_{13}m_{23}m_{33} \\ m_{12}m_{22} \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} m_{12}-m_{23} \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{23}-m_{22} \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1(z)^{\alpha}\, \Delta_2(z)^{m_{12}-m_{23}-\alpha}\, \Delta_3(z)^{m_{13}-m_{12}}$$

$$\Delta_{12}(z)^{m_{12}-m_{23}}\, \Delta_{13}(z)^{\beta}\, \Delta_{23}(z)^{m_{23}-m_{22}-\beta}$$

$$\Delta_{123}(z)^{m_{33}} \times \left[\, \overline{\Delta}_1(w)^{\alpha+\beta}\, \overline{\Delta}_2(w)^{m_{12}-m_{22}-\alpha-\beta}\, \overline{\Delta}_{12}(w)^{m_{22}} \right]$$

INDEX DES NOTATIONS PRINCIPALES

$\Gamma(x)$: fonction factorielle d'Euler

$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$a.b = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}\, b_k \qquad a,b \in \mathbb{C}^n$

$M(n)$: espace des matrices carrées de dimension n notées z.

$\overline{z}$: matrice conjuguée de z

z^t : matrice transposée de z

$z^* = \overline{z}^t$

$$\Delta^{i_1 \ldots i_d}_{j_1 \ldots j_d}(z) = \text{dét}\,(z_{i_a j_b})_{a,b = 1,\ldots d}$$

$$= z^{j_1 \ldots j_d}_{i_1 \ldots i_d}$$

$$\Delta_{j_1 \ldots j_d}(z) = \Delta^{1 \ldots d}_{j_1 \ldots j_d}(z)$$

$$\Delta^{i_1 \ldots i_d}(z) = \Delta^{i_1 \ldots i_d}_{1 \ldots d}(z)$$

$$\Delta(d,z) = \Delta^{1 \ldots d}_{1 \ldots d}(z)$$

$$\underset{\sim}{z} = \{\, z^{j_1 \ldots j_d}_{i_1 \ldots i_d} \;,\; 1 \leqslant d \leqslant n \,\}$$

$\mathbb{F}_n$: espace de Fock sur $\mathbb{C}^n$

$Ⓕ$: espace de Fock sur $M(n)$

$Ⓑ^{m_1 m_2 \dots m_n} = Ⓑ^m = Ⓑ_{[m]_n}$: espace de Bargmann-Moshinsky

$Ⓓ_n$: espace des matrices diagonales de dimension n.

$Ⓝ_n$: espace des matrices triangulaires inférieures de dimension n dont la diagonale est formée de 1.

$$(f,g) = \int \overline{f}(z)\, g(z)\, d\gamma(z)$$

produit scalaire de f et g, éléments de $\mathbb{F}_n$.

$$d\gamma(z) = \Pi^{-n} \exp(-z \cdot z) \prod_{k=1}^{n} dx_k\, dy_k$$

où $z_k = x_k + iy_k$

$z = (z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$

REFERENCES

-=-=-=-=-=-

(1) P. DUBREIL-JACOTIN et M-L DUBREIL-JACOTIN, "Leçons d'algèbre moderne", Dunod, Paris (1964).

(2) S. MAC LANE et G. BIRKHOFF, "Algèbre, Tome II, Les grands théorèmes", Gauthier-Villars, Paris (1971).

(3) J-P. GAZEAU, M-Cl. DUMONT-LEPAGE and A. RONVEAUX, "Gel'fand lattice polynomials and irreducible representations of U(n)", J. Math. Phys., 19 (4), 734 (April, 1978).

(4) J.V. BARGMANN, "On the Representations of the Rotation Group", Reviews of Modern Physics, Vol. 34, N°4, (October, 1962).

(5) C.J. HENRICH, "The Gel'fand states of certains representations of U(n) and the decomposition of products of representations of U(2)", J. Math. Phys., vol 16, N° 11, 2271 (November, 1975).

(6) H. WEYL, "The classical groups", Princeton University Press, Princeton (1946).

(7) J.D. TALMAN, "Special Functions. A Group Theoretic Approach", (Based on Lecture by Eugene P. Wigner), Benjamin, New-York (1968).

(8) W.J. HOLMAN, III, and L.C. BIEDENHARN, "The Representations and Tensors Operators of the Unitary Groups U(n)" extrait de "Group Theory and its applications, Volume II", édité par E.M. LOEBL, Academic Press, New-York and London (1971).

(9) M. MOSHINSKY, "The Harmonic Oscillator and Supermultiplet Theory", Nuclear Physics, 31, 384 (1962).

(10) I.M. GEL'FAND and M.I. GRAEV, "Finite-Dimensional irreducible representations of the unitary and the full linear groups, and related special functions", Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 29, 1329 (1965).

(11) G. KOWALEWSKI", Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der Freholmschen Determinanten" (de Gruyter, Berlin 1954).

(12) J.D. LOUCK, "Recent Progress Toward a Theory of Tensor operators in the Unitary Groups", American Journal of Physics, vol. 38, N° 1 (January 1970).

(13) A.C.T. WU, "Structure of the Combinational Generalization of Hypergeometric Functions for SU(n) States", J. Math. Phys. vol. 12, N° 3 (March 1971).

(14) C.S. HUANG and A.C.T. WU "Structure of the Combina tional Generalization of Hypergeometric Functions for SU(n) States", J. Math. Phys., Vol. 14, N° 2 (February 1973).

(15) N.J.A. VILENKIN, "Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes" traduit par D. Herault, Dunod, Paris (1969).

(16) G.E. BAIRD and L.C. BIEDENHARN, J. Math. Phys. 4, 1449 (1963).

(17) A. NIKIFOROV et V. OUVAROV, "Eléments de la théorie des fonctions spéciales", Editions Mir, (Moscou).