



THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Équations de Laplace et plasmons de surface : géométrie planosphérique

Beauwens, Marie-Françoise

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

Année académique 1976-1977.

EQUATIONS DE LAPLACE
&
PLASMONS DE SURFACE.
GEOMETRIE PLANOSPHERIQUE.

LABORATOIRE
DE
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE
PHYSIQUE DU SOLIDE

Mémoire présenté pour l'obtention
du Grade de Licencié en Sciences
Mathématiques

par

Promoteur
André RONVEAUX

Marie-Françoise BEAUWENS

FN B1/1977/9



176972
WS 3452257

REMERCIEMENTS :

je tiens à exprimer ma
profonde gratitude à Monsieur Ronveaux
pour sa gentillesse, son optimisme
et surtout pour l'aide constante qu'il
n'a cessé de m'apporter au cours de
cette année.

INTRODUCTION

A. Généralités.

Ces dernières années, les Etats-Unis ont entrepris des recherches intensives pour une énergie à moindre coût. Cependant, beaucoup de problèmes technologiques ne sont pas encore résolus dans l'industrie nucléaire. La plupart proviennent de l'interaction des particules nucléaires avec les matériaux solides dans les réacteurs.^[1]

Le gonflement des matériaux irradiés à haute température résulte du développement au sein du matériau de microcavité ou voids. L'apparition de cette microporosité est de nature à compliquer considérablement sinon à interrompre tout à fait le fonctionnement du réacteur.^[2]

Le rapport du volume des cavités au volume total pouvant facilement atteindre 15 %, il est clair que le matériau renferme des surfaces internes en quantité considérable.

La taille des cavités peut varier de quelques Å à quelques centaines d'Å et leur forme est généralement sphérique.

Lorsqu'une cavité est créée à l'intérieur d'une surface métallique, des charges fluctuantes apparaissent sur les surfaces frontières; elles forment un gaz électronique : le plasma; donc au voisinage d'une surface métal-vide apparaissent de nouvelles excitations électroniques collectives appelées plasmons de surface.

Lorsque plusieurs cavités sont à distance finie l'une de l'autre, des effets d'interaction multipolaire modifient le spectre des plasmons de surface et par suite, leur énergie de point zéro.

Il en résulte une interaction de Van der waals entre cavités qui peut jouer un rôle important à courtes distances entre les vides. ^[1]

Dans l'étude des forces de Van der waals, la propriété de base des milieux interagissant est leur fréquence qui dépend de la fonction diélectrique $\epsilon(\omega)$ caractérisant le solide :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{où } \omega_p \text{ est la fréquence}$$

du plasmon :

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi S e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } m : \text{masse de l'électron}$$

s : densité électronique

L'énergie de Van der waals s'exprime de la façon suivante :

$$W(d) = \frac{1}{2} \hbar \sum_i [\omega_i(d) - \omega_i(\infty)]$$

où i parcourt tous les modes même avec dégénérescence éventuelle et d est la distance entre les deux corps interagissant.^[3]

Des travaux précédents^[3,4] ont considéré l'interaction entre deux vides ou deux sphères d'après la théorie de Lifshitz des forces de Van der waals.

Vu l'importance des surfaces planes infinies, nous essayons d'obtenir les modes propres du champ électromagnétique d'un solide semi-infini, c'est-à-dire limité par un plan, ayant un void à une distance d de ce plan.

B. Chapitres 1.2.3 : plan.

Le potentiel scalaire généré par les fluctuations des charges de surfaces satisfait l'équation de Laplace.

Dans cette première partie, nous résolvons l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques^[5] avec conditions aux limites.

Avant de nous intéresser au problème de la sphère devant le plan, nous écrivons les équations fondamentales c'est-à-dire continuité des potentiels et continuité des composantes normales de \vec{D} ,^[6] pour deux sphères de rayon R_+ et R_- .

En annulant une des coordonnées sphériques, nous considérons la sphère devant le plan.

Nous calculons l'énergie d'interaction en déterminant le changement dans les fréquences du plasma par une méthode de

perturbation^[7] avec $Z = \frac{R}{2d}$ comme paramètre de perturbation
 (R : rayon du void et d : distance void-plan).

Par cette méthode, nous obtenons les modes des surfaces $\xi_{\lambda,m}$ pour le void et pour le plan, qui nous servent dans le calcul de l'énergie de Van der waals.

C. Chapitres 4 et 5 : plan.

Nous résolvons l'équation de Laplace dans un système de coordonnées sphéro-cylindriques : nous utilisons les coordonnées sphériques pour le void et les coordonnées cylindriques pour le plan; l'origine de ces deux systèmes de coordonnées est le centre du void.

Dans le premier chapitre de cette seconde partie, nous exprimons la continuité des potentiels et des composantes normales de $\vec{D} = \epsilon(\omega)\vec{E}$.

Les quatre relations obtenues sont exploitées dans le chapitre suivant.

Chapitre 1 : COORDONNEES BISPHERIQUES.

A - Deux sphères :
1. Problème aux valeurs propres.

Considérons deux sphères métalliques de rayon R_+ et R_- situées à une distance D l'une de l'autre.

Le problème consiste à résoudre l'équation de Laplace avec les conditions limites imposées à la surface des deux sphères (voids).

a) Solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques.

$$\Delta V = 0$$

V : potentiel.

1. V nul à l'infini.
2. V fini partout.
3. V continu à la surface de chaque sphère.
4. $E_t^{In} = E_t^{Out}$ ($E_t = \vec{E} \cdot \vec{t}$)

où \vec{t} : vecteur tangent à la surface de la sphère.

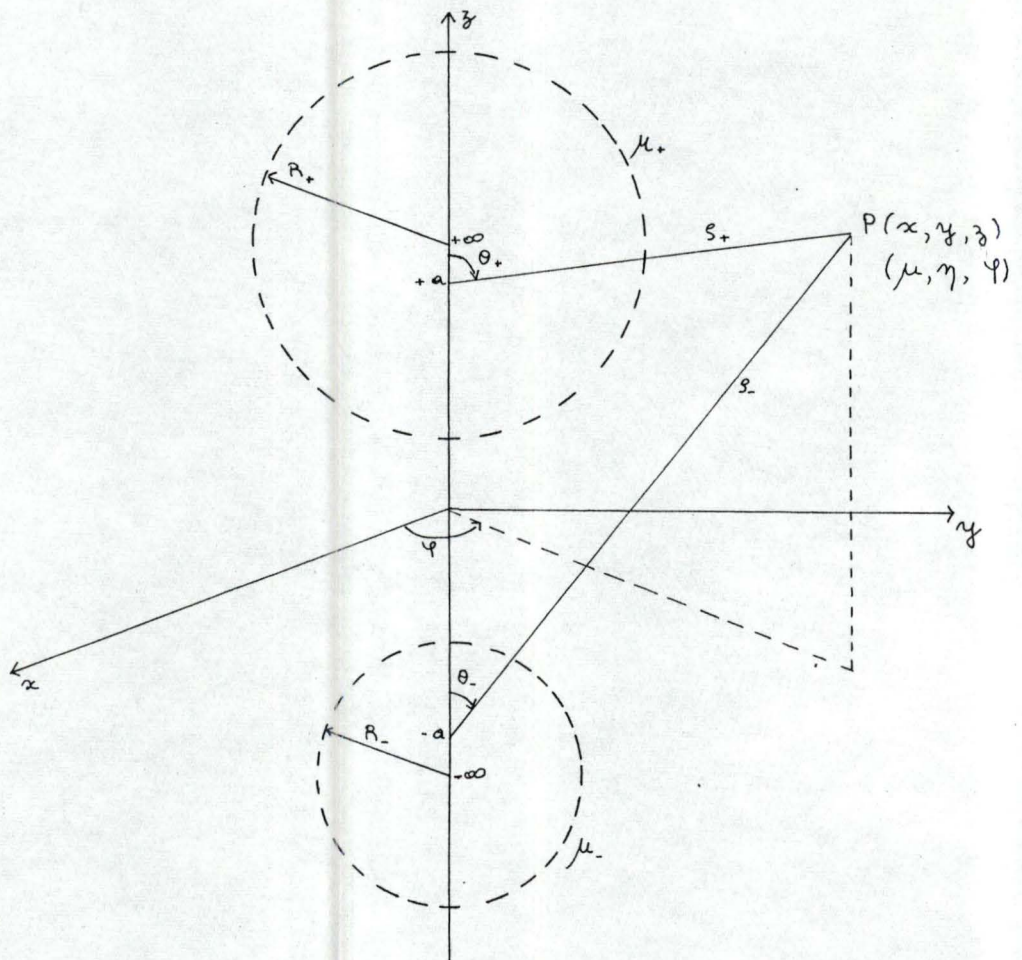
Nous imposons la continuité à la surface des voids des composantes tangentiellles du champ électrique $\vec{E} = - \text{grad } V$.

$$D_n^{\text{In}} = D_n^{\text{Out}} \quad (D_n = \vec{D} \cdot \vec{n})$$

où \vec{n} : vecteur normal à la surface de la sphère.

Nous imposons la continuité à la surface des voids de la composante normale du déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$.

Nous choisissons les coordonnées bisphériques dans lesquelles les surfaces des voids sont caractérisées par une valeur constante de la coordonnée radiale .



Les coordonnées (μ, η, φ) d'un point P de l'espace sont définies dans ce système par :

$$\begin{aligned}\mu &= \ln \frac{S_-}{S_+} \\ \eta &= \theta_+ - \theta_- \\ \varphi &= \varphi\end{aligned}$$

Les points a et -a sont les pôles du système bisphérique.

$$\left. \begin{array}{l} (S_+, \theta_+, \varphi_+) \\ (S_-, \theta_-, \varphi_-) \end{array} \right\} \text{ coordonnées sphériques de P par rapport à } \begin{cases} a \\ -a \end{cases}$$

ceci implique :

$$\begin{aligned}\mu &\in]-\infty, +\infty[\\ \eta &\in [0, \pi] \\ \varphi &\in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Si nous séparons l'équation de Laplace dans ce système de coordonnées, la solution V de l'équation de Laplace est :

$$V = (\cosh \mu \cdot \cos \eta)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m: n}^n [A_n^m e^{(m+\frac{1}{2})\mu} + B_n^m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu}] P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi} \quad (1.1)$$

L'équation de Laplace n'est donc que partiellement séparable dans ce système; en effet, les variables μ et η sont liées par la racine carrée apparaissant dans V.

La dépendance en φ est complètement séparée : l'axe des z étant l'axe de symétrie de rotation pour les voids, m est le seul "bon nombre quantique" du problème.

Les coefficients A_n^m et B_n^m sont déterminés par les conditions aux limites à la surface des voids.

Nous considérons ces solutions pour un m fixé afin d'exploiter le cas $m = 0$ c'est-à-dire le cas des modes axiaux.

b) Conditions limites.

L'espace entier est divisé en trois régions séparées par les deux sphères :

$$\begin{aligned} \mu &: \mu_+ > 0 \\ \mu &: \mu_- < 0 \end{aligned}$$

l'intérieur du void +	$\mu_+ < \mu < \infty$
l'extérieur des voids	$\mu_- < \mu < \mu_+$
l'intérieur du void -	$-\infty < \mu < \mu_-$

V_+ : potentiel à l'intérieur du void +

V_0 : potentiel à l'extérieur des voids

V_- : potentiel à l'intérieur du void -

Nous nous limitons au cas $m = 0$, c'est-à-dire aux modes axiaux :

$$V_+ = (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu} P_m(\cos \eta). \quad (1.2)$$

$$V_0 = (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} [B_m e^{(m+\frac{1}{2})\mu} + C_m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu}] P_m(\cos \eta). \quad (1.3)$$

$$V_- = (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} D_m e^{(m+\frac{1}{2})\mu} P_m(\cos \eta). \quad (1.4)$$

1) Continuité du champ tangentiel \vec{E} en $\mu = \mu_+$ et $\mu = \mu_-$.

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial \phi} = \frac{\partial V_0}{\partial \phi} \quad | \mu = \mu_{\pm} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial \eta} = \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \quad | \mu = \mu_{\pm} \quad (1.6)$$

La condition (1.6) est équivalente à la condition de continuité des potentiels eux-mêmes :

$$V_{\pm}(\mu, \mu_{\pm}) = V_0(\mu = \mu_{\pm}) \quad (1.7)$$

Après remplacement de V_{\pm} par (1.2) et (1.4) dans (1.7), utilisons la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre :

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d\theta = \frac{2}{2m+1} \delta_{n,m} \quad (1.8)$$

Egalant les coefficients de P_n pour le même n , nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_m &= b_m^+ + c_m^+ \\ d_m &= b_m^- + c_m^- \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} a_m &= A_m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu_+} \\ b_m^+ &= B_m e^{(m+\frac{1}{2})\mu_{\pm}} \\ c_m^+ &= C_m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu_{\pm}} \\ d_m &= D_m e^{(m+\frac{1}{2})\mu_-} \end{aligned}$$

Quatre nouvelles constantes seulement remplacent

(A_n, B_n, C_n, D_n) car

$$\begin{aligned} b_m^- &= b_m^+ e^{(\mu_- - \mu_+)(m+\frac{1}{2})} \\ c_m^- &= c_m^+ e^{(\mu_+ - \mu_-)(m+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

2) Continuité des composantes normales de $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$.

$$\frac{\partial V_+}{\partial \mu} = \epsilon(\omega) \frac{\partial V_0}{\partial \mu} \quad | \mu = \mu_+ \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial V_-}{\partial \mu} = \epsilon(\omega) \frac{\partial V_0}{\partial \mu} \quad | \mu = \mu_-$$

Remarque : pour les sphères dans le vide, $\epsilon(\omega)$ est à remplacer par $\epsilon^{-1}(\omega)$ car la fonction diélectrique $\epsilon(\omega)$ apparaît comme facteur du gradient du potentiel côté matériel de la surface.

Introduisons V_+ et V_- dans (1.9) et multiplions l'égalité obtenue par 2. $(\cosh \mu_{\pm} - \cos \eta)$.

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \sinh \mu_+ \sum a_n P_n - (\cosh \mu_+ - \cos \eta) \sum (2n+1) a_n P_n \\ &= \epsilon(\omega) \left[\sinh \mu_+ \sum (b_n^+ - \epsilon_n^-) P_n + (\cosh \mu_+ - \cos \eta) \right. \\ & \quad \left. \times \sum (2n+1) (b_n^+ - \epsilon_n^+) P_n \right] \quad (1.10) \end{aligned}$$

(une relation semblable en μ_-).

Développons les fonctions de η en Polynôme de Legendre et exploitons les relations d'orthogonalité (1.8).

La relation de récurrence suivante :

$$(2n+1)x P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

transforme (1.10) en :

$$\begin{aligned} & \left[\sinh \mu_+ - (2n+1) \cosh \mu_+ \right] a_n + n a_{n-1} + (n+1) a_{n+1} \\ &= \epsilon(\omega) \left[\left[\sinh \mu_+ - (2n+1) \cosh \mu_+ \right] b_n^+ - n b_{n-1}^+ - (n+1) b_{n+1}^+ \right. \\ & \quad \left. + \left[\sinh \mu_+ - (2n+1) \cosh \mu_+ \right] \epsilon_n^+ + n \epsilon_{n-1}^+ + (n+1) \epsilon_{n+1}^+ \right] \end{aligned}$$

(1.11).

(relation semblable pour le void "-").

(1.12).

2. Formulation matricielle.

Introduisons les notations suivantes :

$$\vec{b}_m^\pm = (b_0^\pm, b_1^\pm, \dots, b_m^\pm, \dots)$$

$$\vec{c}_m^\pm = (c_0^\pm, c_1^\pm, \dots, c_m^\pm, \dots)$$

Comme

$$a_m = b_m^+ + c_m^+$$

$$d_m = b_m^- + c_m^-$$

remplaçant dans (1.11) et (1.12), nous obtenons :

$$A(\mu_+) (\vec{b}_+^+ \vec{c}_+^+) = \varepsilon(\omega) [-A(-\mu_+) \vec{b}_+^+ + A(\mu_+) \vec{c}_+^+] \quad (1.13)$$

$$-A(-\mu_-) (\vec{b}_+^- \vec{c}_+^-) = \varepsilon(\omega) [-A(-\mu_-) \vec{b}_+^- + A(\mu_-) \vec{c}_+^-] \quad (1.14)$$

où A est une matrice tridiagonale infinie :

$$A(\mu) = \text{tridiag}_{m \geq 0} \begin{matrix} \sinh \mu \cdot (2m+1) \cosh \mu & & & & \\ & \sinh \mu \cdot (2m+3) \cosh \mu & & & \\ & & \sinh \mu \cdot \cosh \mu & & \\ & & & \sinh \mu \cdot 3 \cosh \mu & \\ & & & & \sinh \mu \cdot 5 \cosh \mu \end{matrix} \begin{matrix} m+1 \\ \\ \\ 2 \\ \dots \end{matrix}$$

Eliminons dans la relation (1.14) \vec{b}_+^- et \vec{c}_+^-

en utilisant la forme matricielle des équations

$$b_m^- = b_m^+ e^{(\mu_- - \mu_+) (m + \frac{1}{2})}$$

$$c_m^- = c_m^+ e^{(\mu_+ - \mu_-) (m + \frac{1}{2})}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{b}_+^- = \Lambda \vec{b}_+^+$$

$$\vec{c}_+^- = \Lambda^{-1} \vec{c}_+^+$$

où

$$\Lambda = \text{diag}_{m \geq 0} e^{(m + \frac{1}{2}) (\mu_- - \mu_+)}. \quad (1.15)$$

A la place des équations (1.13) et (1.14), nous

obtenons :

$$\begin{cases} [A(\mu_+) + \varepsilon A(-\mu_+)] \vec{b}^+ + (1 - \varepsilon) A(\mu_+) \vec{z}^+ = 0 \\ (1 - \varepsilon) A(-\mu_-) \Lambda \vec{b}^+ + [A(-\mu_-) + \varepsilon A(\mu_-)] \Lambda^{-1} \vec{z}^+ = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Pour que ce système admette une solution non triviale,

il faut :

$$\begin{vmatrix} A(\mu_+) + \varepsilon A(-\mu_+) & (1 - \varepsilon) A(\mu_+) \Lambda \\ (1 - \varepsilon) A(-\mu_-) \Lambda & A(-\mu_-) + \varepsilon A(\mu_-) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

L'équation (1.17) est la relation de dispersion.

Seules, certaines valeurs discrètes de ε vont satisfaire à l'équation (1.17).

La relation $\varepsilon = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2$ discrétise les fréquences propres qui servent dans le calcul de l'énergie d'interaction.

Remarque : dans le cas $m \neq 0$:

Les potentiels dans les trois régions sont exprimés comme une combinaison des P_n^m avec comme restriction $n \geq |m|$.

$$A_m(\mu) = \text{tridiag}_{n \geq |m|} \begin{vmatrix} \sinh \mu - (2n+1) \cosh \mu & & m+1+m \\ & m+1-m & \\ & & \sinh \mu - (2m+3) \cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$\Lambda = \text{diag}_{n \geq |m|} e^{(m + \frac{1}{2})(\mu_- - \mu_+)}$$

3. Exploitation de la relation de dispersion.

$$A(\mu_{\pm}) = M(\mu_{\pm}) + \sinh \mu_{\pm} \cdot E \quad (1.18)$$

où E : matrice unité.

$$M(u) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} -(2n+1) \cosh \mu_{\pm} & u+1 \\ n+1 & -(2n+3) \cosh \mu_{\pm} \end{array} \right|$$

Remplaçons (1.18) dans les équations (1.16) :

$$(1.19) \quad (1+\varepsilon) M(\mu_{+}) \vec{b}_{+} + (1-\varepsilon) \sinh \mu_{+} \vec{b}_{+} + (1-\varepsilon) M(\mu_{+}) \vec{c}_{+} + (1-\varepsilon) \sinh \mu_{+} \vec{c}_{+} = 0$$

$$(1.20) \quad (1-\varepsilon) M(\mu) \Lambda \vec{b}_{-} + (1-\varepsilon) \sinh \mu \Lambda \vec{b}_{+} + (1+\varepsilon) M(\mu) \Lambda^{-1} \vec{c}_{-} + (1-\varepsilon) \sinh \mu \Lambda^{-1} \vec{c}_{-} = 0$$

Posons $\sinh^{-1} \mu_{\pm} M(\mu_{\pm}) = F_{\pm} \quad (1.21)$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \lambda$$

Multiplions (1.19) par $\frac{1}{(1-\varepsilon) \sinh \mu_{+}}$

et

(1.20) par $\frac{1}{(1-\varepsilon) \sinh \mu_{-}}$

Nous obtenons :

$$\left[(\lambda F_{+} + 1) \vec{b}_{+} + (F_{+} + 1) \vec{c}_{+} = 0 \quad (1.22) \right.$$

$$\left. (F_{-} - 1) \Lambda \vec{b}_{+} + (\lambda F_{-} - 1) \Lambda^{-1} \vec{c}_{+} = 0 \quad (1.23) \right]$$

posons $\xi_{+} = e^{-\mu_{+}}$

$\xi_{-} = e^{\mu_{-}}$

Les relations (1.15) (1.11) deviennent :

$$\Lambda = Z_-^{m+\frac{1}{2}} Z_+^{n+\frac{1}{2}} E$$

$$F_{\pm} = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} -(2n+1) \frac{\text{ch } \mu_{\pm}}{\text{sh } \mu_{\pm}} & \frac{n+1}{\text{sh } \mu_{\pm}} \\ \frac{n+1}{\text{sh } \mu_{\pm}} & -(2n+3) \frac{\text{ch } \mu_{\pm}}{\text{sh } \mu_{\pm}} \end{array} \right|$$

$$\frac{\text{ch } \mu_{\pm}}{\text{sh } \mu_{\pm}} = \frac{1 + Z_{\pm}^2}{1 - Z_{\pm}^2}$$

$$(1.24) \quad \left[\begin{array}{l} (1 - Z_+^2)(F_+ + 1) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} -2n - (2n+2)Z_+^2 & 2(n+1)Z_+ \\ 2(n+1)Z_+ & -2(n+1) - (2n+4)Z_+^2 \end{array} \right| \\ (1 - Z_-^2)(F_- - 1) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} 2n + (2n+2)Z_-^2 & -2(n+1)Z_- \\ -2(n+1)Z_- & 2(n+1) + (2n+4)Z_-^2 \end{array} \right| \\ (1 - Z_+^2)(\lambda F_+ + 1) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} -\lambda(2n+1)(1+Z_+^2) + (1-Z_+^2) & 2\lambda(n+1)Z_+ \\ 2\lambda(n+1)Z_+ & -\lambda(2n+3)(1+Z_+^2) + (1-Z_+^2) \end{array} \right| \\ (1 - Z_-^2)(\lambda F_- - 1) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \left| \begin{array}{cc} \lambda(2n+1)(1+Z_-^2) - (1-Z_-^2) & -2\lambda(n+1)Z_- \\ -2\lambda(n+1)Z_- & \lambda(2n+3)(1+Z_-^2) - (1-Z_-^2) \end{array} \right| \end{array} \right.$$

a) Cas limite 1 : Sphères découplées.

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_+ \rightarrow 0 \\ Z_- \rightarrow 0 \end{array}}$$

Ceci est équivalent à

$$\mu_+ \rightarrow \infty$$

$$\mu_- \rightarrow -\infty$$

c'est-à-dire deux sphères découplées.

Multiplions (1.22) par $(1 - z_+^2)$, (1.23) par $(1 - z_-^2)$.

et utilisons les relations (1.24), nous obtenons :

$$[-\lambda(2m+1) + 1] \vec{B}_+ - 2m \vec{\epsilon}_+ = 0 \quad (1.25)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lambda \Lambda \vec{B}_+ + (\lambda(2m+1) - 1) \frac{\vec{\epsilon}_+}{\Lambda}] = 0 \quad (1.26)$$

Ce système admet une solution non triviale si le déterminant est 0.

La relation obtenue est :

$$[\lambda(2m+1) - 1]^2 = 0$$

c'est-à-dire

puisque

$$\lambda = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$$

$$\boxed{\epsilon = -\frac{m}{m+1}}$$

$$m \in \mathbb{N} \quad (1.27)$$

Nous avons donc obtenu la relation de dispersion pour un void isolé.

$$\text{or } \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

où ω_p = la fréquence du plasmon

(1.27) donne les fréquences des modes multipolaires :

$$\omega_m = \omega_p \left[\frac{m+1}{2m+1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_p = \left[\frac{4\pi S e^2}{m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

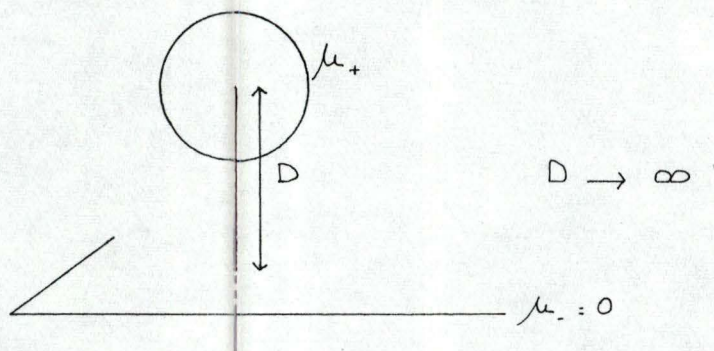
m = masse de l'électron.

S = densité électronique du métal.

a) Cas limite 2 : Sphère et plan découplés.

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_- \rightarrow 1 \\ Z_+ \rightarrow 0 \end{array}}$$

Ceci est équivalent à $\begin{cases} \mu_- = 0 & \text{c'est-à-dire un plan.} \\ \mu_+ \rightarrow \infty & \text{c'est-à-dire une sphère} \\ & \text{à l'infini.} \end{cases}$



Dans ce cas, les relations obtenues sont

$$\begin{cases} [-\lambda(2m+1) + 1] \vec{b}^+ - 2m \vec{z}^+ = 0 \\ \lambda(2m+1) \vec{z}^+ = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution non nulle,

il faut $-\lambda^2(2m+1)^2 + \lambda(2m+1) = 0$

$$\lambda[-\lambda(2m+1) + 1] = 0$$

1. $\lambda = 0$

2. $\lambda = \frac{1}{2m+1}$

c'est-à-dire

$$1. \quad \epsilon = -1$$

relation de dispersion pour un plan.

$$2. \quad \epsilon = \frac{-m}{m+1}$$

relation de dispersion pour une sphère.

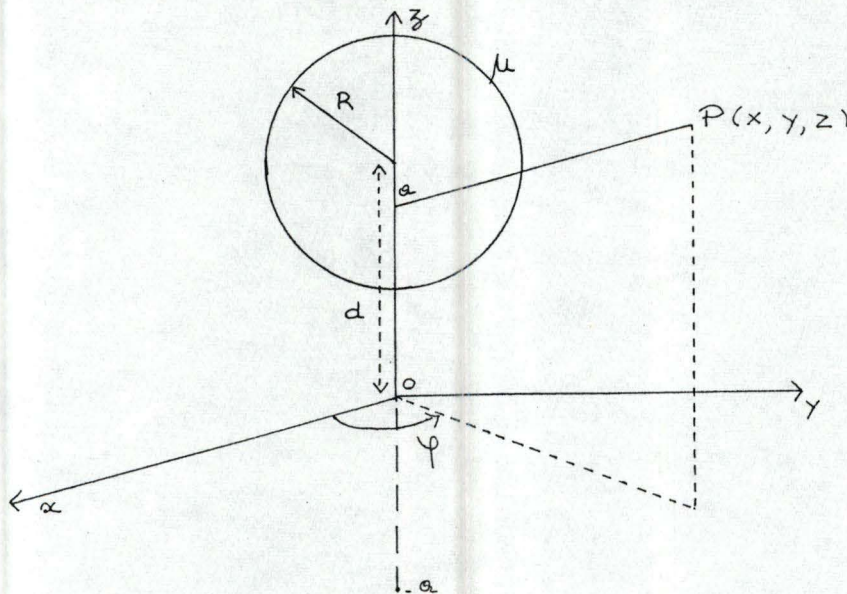
B - La sphère devant le plan.

1. Introduction.

Dans le système de coordonnées bisphériques, posons

$$\begin{aligned}\mu_- &= 0 \\ \mu_+ &= \mu\end{aligned}$$

Le système possède l'axe z comme axe de symétrie.



Le plan est situé à une distance $\frac{D}{2} = d$ de la sphère; or la relation liant la valeur de μ , le rayon R des voids et la distance D les séparant est :

$$\cosh \mu = \frac{D}{2R} \quad [5]$$

donc dans notre cas :

$$\cosh \mu = \frac{d}{R}$$

2. Modes non perturbés (mode monopolaire de la sphère).

Cas $m = 0$: $A_0(\mu) = A(\mu)$

Dans le système de coordonnées bisphériques, nous avons posé

$$\mu_+ = \mu$$

$$\mu_- = 0$$

Les équations (1.16) deviennent :

$$\begin{aligned} [A(\mu) + \varepsilon A(-\mu)] \vec{B} + [(1-\varepsilon)A(\mu)] \vec{z} &= 0 \\ [(1-\varepsilon)A(0) \Lambda] \vec{B} + [A(0)(1+\varepsilon)] \Lambda^{-1} \vec{z} &= 0 \end{aligned}$$

Si nous multiplions la seconde par $A(0)^{-1}$, nous obtenons

$$\vec{z} = - \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \Lambda^2 \vec{B}$$

Remplaçons \vec{z} par sa valeur dans la première équation, multipliée par $A^{-1}(-\mu)$:

$$(1+\varepsilon) [A^{-1}(-\mu)A(\mu) + \varepsilon] \vec{B} = (1-\varepsilon)^2 A^{-1}(-\mu)A(\mu) \Lambda^2 \vec{B}. \quad (1.28)$$

où $\Lambda^2 = \text{diag}_{n \neq 0} (z^{2m+2})$ $z = e^{-\mu}$

$$A(\mu) = \text{tridiag}_{n \neq 0} \begin{array}{c} z \left| \begin{array}{cc} -m + (m+1)z^2 & (m+1)z \\ (m+1)z & -(m-1) - (m+2)z^2 \end{array} \right. \\ \hline A^{-1}(-\mu) = \text{tridiag}_{n \neq 0} \frac{1}{z} \left| \begin{array}{cc} -(m+1) - mz^2 & (m+1)z \\ (m+1)z & -(m+2) - (m+1)z^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Prenons la limite de $A^{-1}(-\mu)A(\mu)$ pour $\mu \rightarrow \infty$.

c'est-à-dire pour $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} A^{-1}(-\mu)A(\mu) = \text{diag}_{n \neq 0} \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

Dans ce cas, l'équation aux valeurs propres devient :

$$(1 + \varepsilon) \left[\frac{m}{m+1} + \varepsilon \right] \vec{b} = 0$$

Nous obtenons : $\varepsilon = -1$ c'est-à-dire les modes du plan.

$\varepsilon = -\frac{m}{m+1}$ c'est-à-dire les modes de la sphère isolée.

L'équation aux valeurs propres pour une sphère isolée en coordonnées bisphériques est :

$$|A^{-1}(-\mu) A(\mu) + \varepsilon| = 0 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{m}{m+1}$$

La comparaison de (1.28) et (1.29) donne les conclusions suivantes :

1. si $Z \neq 0$, $\varepsilon = -1$ n'est plus valeur propre.

2. si $Z \neq 0$, le mode monopolaire $\varepsilon = 0$ reste une valeur propre.

En effet : dans (1.28), pour obtenir $\varepsilon = 0$ il faut $|A^{-1}(-\mu) A(\mu)| = 0$; ceci est vérifié grâce à (1.29).

Chapitre 2 : THEORIE DE LA PERTURBATION.

A - Préliminaires.

Dans ce qui précède, nous avons établi la relation de dispersion :

$$(1 - \varepsilon) [A_m^{-1}(-\mu) A_m(\mu) - \varepsilon] \vec{B} = (1 - \varepsilon)^2 A_m^{-1}(-\mu) A_m(\mu) \Lambda^2 \vec{B}$$

avec

$$\Lambda^2 = \text{diag}_{n \neq 0} (z^{2m+1})$$

$$A(u) = \text{tridiag}_{n \neq 1, m} \left| \begin{array}{cc} \text{sh } \mu - (2m+1) \text{ch } \mu & m+1+m \\ m+1-m & \text{sh } \mu - (2n+3) \text{ch } \mu \end{array} \right|$$

Les valeurs propres $\lambda_m = \varepsilon(\omega_m)$ donnent les fréquences des modes du système "void-plan", tandis que la relation inverse $\lambda_m = \varepsilon^{-1}(\omega_m)$ fournit les fréquences pour le système "sphère-plan".

Rappelons la relation entre μ , R et d :

$$\begin{aligned} \cosh \mu &= \frac{d}{R} \\ \Rightarrow \frac{e^{-\mu} + e^{\mu}}{2} &= \frac{d}{R} \\ \frac{1}{z} + z &= \frac{2d}{R} \\ \text{Posons } \frac{2d}{R} &= u \\ \Rightarrow z &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4u^2}}{2u} \end{aligned}$$

En développant $(1 - 4\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ en série et en ne conservant que le signe négatif (car $Z < 1$) :

$$Z = \mu + \mu^3 + 2\mu^5 \dots$$

Inversément :

$$\mu = Z - Z^3 + Z^5 \dots$$

Méthode :

Nous allons développer chaque terme de la relation de dispersion en puissance de Z , calculer la valeur propre $\lambda^{(m)}$ et les vecteurs propres associés $\vec{b}^{(m)}$ jusqu'au troisième ordre.

A l'ordre 0 : c'est-à-dire le coefficient de Z^0 , nous trouvons les vecteurs propres non perturbés $\vec{b}_0^{(m)}$.

Aux ordres suivants, les vecteurs propres perturbés sont développés comme combinaison linéaire des vecteurs propres non perturbés :

En effet : Les $(\vec{b}_0^{(m)})$ constituent une base de l'espace d'Hilbert ℓ^2 ; nous pouvons donc exprimer les approximations $\vec{b}_i^{(m)}$ du vecteur propre $\vec{b}^{(m)}$ en termes de $\vec{b}_0^{(m)}$.

$$\vec{b}_1^{(m)} = \sum_i x_i^{(m)} \vec{b}_0^{(i)}$$

$$\vec{b}_2^{(m)} = \sum_k y_k^{(m)} \vec{b}_0^{(k)} \quad (2.1)$$

$$\vec{b}_3^{(m)} = \sum_p z_p^{(m)} \vec{b}_0^{(p)}$$

Remarque :

Nous utilisons la notation de Dirac ^[8]:

$$\vec{b}_0^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est noté } \vec{b}_0^{(m)} = |m\rangle$$

↓ $n-m+1$.

$$A_0(\mu) = A(\mu) \quad (m=0)$$

Développons $A_m^{-1}(\mu) A_m(\mu)$ en puissance de z

$$\begin{aligned} \text{a) } A_m(-\mu) &= \text{tridiag}_{n \times (n+1)} \begin{vmatrix} -(2m+1)\text{ch}\mu - \text{sh}\mu & n+1+m \\ m+1-m & -(2m+3)\text{ch}\mu - \text{sh}\mu \end{vmatrix} \\ &= \text{tridiag}_{n \times (n+1)} \frac{1}{z} \begin{vmatrix} -(n+1) - mz^2 & (n+1+m)z \\ (m+1-m)z & -(n+2) - (m+1)z^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en l'exprimant en puissance de z :

$$A_m^{-1}(-\mu) = z^{-1} A_0 [E + LZ + Mz^2 + Nz^3]$$

$$\text{où } A_0 = \text{diag}_{n \times (n+1)} (-(n+1))$$

$$L = \text{tridiag}_{n \times (n+1)} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{(n+1+m)}{n+1} \\ -\frac{(n+1-m)}{n+2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$M = \text{diag}_{n \times (n+1)} \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$A_m^{-1}(-\mu) = z [E - zL + z^2(L^2 - M) + z^3(ML + LM - L^3)] A_0^{-1}$$

$$b) \quad A_m(\mu) = \underset{n \geq |m|}{\text{tridiag}} \frac{1}{z} \left| \begin{array}{cc} -n - (m+1)z^2 & z(m+1+m) \\ z(m+1-m) & -(m+1) - (m+2)z^2 \end{array} \right|$$

en puissance de z :

$$A_m(\mu) = z^{-1} (K^* + L^*z + M^*z^2 \dots)$$

$$\text{ou } K^* = \underset{n \geq |m|}{\text{diag}} (-n)$$

$$L^* = \underset{n \geq |m|}{\text{tridiag}} \left| \begin{array}{cc} 0 & m+1+m \\ m+1-m & 0 \end{array} \right|$$

$$M^* = \underset{n \geq |m|}{\text{diag}} (-(m+1))$$

$$c) \quad A_m^{-1}(-\mu)A(\mu) = F_0 + F_1z + F_2z^2 + F_3z^3$$

$$F_0 = \underset{n \geq |m|}{\text{diag}} \left(\frac{n}{m+1} \right)$$

$$F_1 = \underset{n \geq |m|}{\text{tridiag}} \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{-(m+1+m)}{(m+1)(m+2)} \\ \frac{-(m+1-m)}{(m+1)(m+2)} & 0 \end{array} \right|$$

$$F_2 = \underset{n \geq |m|}{\text{diag}} \left[1 - \frac{n}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{2m^2}{m(m+1)(m+2)} \right]$$

$$+ \underset{n \geq |m|}{\text{tridiag}} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{-(m+1+m)(m+2+m)}{(m+1)(m+2)(m+3)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(m+2-m)(m+1-m)}{(m+1)(m+2)(m+3)} & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$F_3 = -MF_1 - LF_2$$

n'a pas d'élément sur la diagonale

B - Modes axiaux : m = 0.

Rappelons la relation de dispersion :

$$(1 + \varepsilon) [A^{-1}(-\mu) A(\mu) + \varepsilon E] \vec{B} = (1 - \varepsilon)^2 A^{-1}(-\mu) A(\mu) \Lambda^2 \vec{B}.$$

$$\text{avec } \Lambda^2 = \text{diag}_{m \geq 0} (z^{2m+1})$$

$$F_0 = \text{diag}_{m \geq 0} \left(\frac{m}{m+1} \right)$$

$$F_1 = \text{tridiag}_{m \geq 0} \quad 0 \quad -\frac{1}{m+2}$$

$$F_2 = \text{diag}_{m \geq 0} \frac{1}{(m+1)(m+2)} \quad -\text{tridiag}_{m \geq 0} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{m+3}$$

F_3 : n'a pas d'éléments sur la diagonale.

$$A^{-1}(-\mu) A(\mu) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3$$

$$\lambda^{(m)} = \varepsilon(\omega_m)$$

$$(1 + \varepsilon) = 1 + \lambda_0^{(m)} + \lambda_1^{(m)} z + \lambda_2^{(m)} z^2 + \lambda_3^{(m)} z^3 \dots$$

$$(1 - \varepsilon)^2 = \varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \varphi_3 z^3 \dots$$

$$\text{où } \varphi_0 = 1 + \lambda_0^{(m)2} - 2\lambda_0^{(m)}$$

$$\varphi_1 = -2\lambda_1^{(m)} + 2\lambda_0^{(m)}\lambda_1^{(m)}$$

$$\varphi_2 = \lambda_1^{(m)2} - 2\lambda_2^{(m)} + 2\lambda_0^{(m)}\lambda_2^{(m)}$$

$$\varphi_3 = -2\lambda_3^{(m)} + 2\lambda_0^{(m)}\lambda_3^{(m)} + 2\lambda_1^{(m)}\lambda_2^{(m)}$$

La relation de dispersion devient :

$$\begin{aligned}
 & (1 + \lambda_0^{(m)} + \lambda_1^{(m)} z + \lambda_2^{(m)} z^2 + \lambda_3^{(m)} z^3 \dots) (F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + \lambda_0^{(m)} \lambda_1^{(m)} z + \lambda_1^{(m)} \lambda_2^{(m)} z^2 + \lambda_2^{(m)} \lambda_3^{(m)} z^3) \\
 & \times (\vec{B}_0^{(m)} + \vec{B}_1^{(m)} z + \vec{B}_2^{(m)} z^2 + \vec{B}_3^{(m)} z^3) \\
 & = (\varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \varphi_3 z^3 \dots) (F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3) (\alpha_1 z + \alpha_3 z^3) \\
 & \times (\vec{B}_0^{(m)} + \vec{B}_1^{(m)} z + \vec{B}_2^{(m)} z^2 + \vec{B}_3^{(m)} z^3). \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Notation :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{car } \mathcal{L}^2 = \begin{pmatrix} z & & & \\ & z^3 & & \\ & & z^5 & \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

A chaque ordre, nous développons cette équation uniquement jusqu'à la puissance de z qui est égale à l'ordre considéré.

ORDRE ZERO.

$$(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_0 + \lambda_0^{(m)} E) \vec{B}_0^{(m)} = 0$$

Solutions :

$$1. \quad \lambda_0^{(m)} = -1$$

$$2. \quad \lambda_0^{(m)} = -\frac{m}{m+1} \quad m \geq 0$$

Conclusion : Nous avons retrouvé les modes du plan 1.
et les modes de la sphère isolée 2.

Le vecteur propre associé à $\lambda_0^{(m)}$ est :

$$\vec{b}_0^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \quad m+1$$

PREMIER ORDRE.

Nous allons identifier les coefficients de \vec{z} dans la relation (2.2)

$$\begin{aligned} & [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_1 + \lambda_1^{(m)}E) + \lambda_1^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)]\vec{b}_0^{(m)} + [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)]\vec{b}_1^{(m)} \\ & = \varphi_0 F_0 \alpha_1 \vec{b}_0^{(m)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

a) Premier type de solution : $\lambda_0^{(m)} = -1$

$$[\lambda_1^{(m)}(F_0 - E) - \varphi_0 F_0 \alpha_1] \vec{b}_0^{(m)} = 0 \quad \varphi_0 = 4.$$

Nous obtenons :

$$\boxed{\lambda_1^{(m)} = 0} \quad \forall m \neq 0.$$

b) Second type de solution : $\lambda_0^{(m)} = \frac{-m}{m+1}$

en multipliant (2.3) à gauche par $\langle j |$

et utilisant (2.1) :

$$\begin{aligned} & (\mu + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_1 + \lambda_1^{(m)} E | m \rangle - \langle j | \lambda_1^{(m)} (F_0 + \lambda_0^{(m)} E) | m \rangle \\ & - \langle j | \varphi_0 F_0 \alpha_1 | m \rangle + (\mu + \lambda_0^{(m)}) \sum_i \alpha_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Pour $j = n$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | \lambda_1^{(m)} E | m \rangle = \lambda_1^{(m)}$$

$$\Rightarrow (\mu + \lambda_0^{(m)}) \lambda_1^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1^{(m)} = 0} \quad \forall m \neq 0$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour $j = n-1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n-1 | F_1 + \lambda_1^{(n)} E | n \rangle = \frac{-1}{n+1}$$

$$\langle n-1 | F_0 + \lambda_0^{(n)} E | n-1 \rangle = \frac{-1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n-1}^{(n)} = -n} \quad \forall n \geq 0$$

Pour $j = n+1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+1 | F_1 | n \rangle = \frac{-1}{n+2}$$

$$\langle n+1 | F_0 + \lambda_0^{(n)} | n+1 \rangle = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1}^{(n)} = n+1} \quad \forall n \geq 0$$

$$x_n^{(n)} : \text{arbitraire} \quad \forall n \geq 0$$

SECOND ORDRE.

Nous allons identifier les coefficients de Z^2 dans la relation (2.2) :

$$\begin{aligned}
 & [(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_2 + \lambda_2^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)} (F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda^{(m)} (F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_0^{(m)} \\
 & + [(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)} (F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_1^{(m)} \\
 & + [(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_2^{(m)} \\
 & = \psi_0 F_1 \alpha_1 \vec{b}_0^{(m)} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

a) Premier type de solution :

$$\begin{aligned}
 \lambda_0^{(m)} &= -1 \\
 \lambda_1^{(m)} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lambda_2^{(m)} (F_0 - E) \vec{b}_0^{(m)} = 4 F_1 \alpha_1 \vec{b}_0^{(m)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_2^{(m)} = 0}$$

$$\nabla m \neq 0$$

b) Second type de solution :

$$\lambda_0^{(m)} = -\frac{m}{m+1}$$

en multipliant (2.4) à gauche par $\langle j |$

et utilisant (2.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_2 + \lambda_2^{(m)} E | m \rangle + \lambda_2^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | n \rangle \\ & + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i x_i^{(m)} \langle j | F_1 | i \rangle \\ & + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i y_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle = \langle j | \varphi_0 F_{1,2} | n \rangle \end{aligned}$$

Pour $j = n$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | F_2 + \lambda_2^{(m)} E | m \rangle = \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \lambda_2^{(m)}$$

$$\langle n | F_1 | m-1 \rangle = \frac{-1}{m+1}$$

$$\langle n | F_1 | m+1 \rangle = \frac{-1}{m+2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_2^{(m)} = 0} \quad \forall m \geq 0$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour $j = m-2$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m-2 | F_2 | m \rangle = \frac{-1}{\left(\frac{m}{2} + 2\right)} \delta_{2k,m} \quad \forall k \geq 1$$

$$\langle m-2 | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m-2 \rangle = \frac{-2}{(m^2-1)}$$

$$\langle m-2 | F_1 | m-1 \rangle = \frac{-1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{m-2}^{(m)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(m+4)} \delta_{2k,m} \right] (m^2-1)} \quad \forall m \geq 0$$

Pour $j = m-1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m-1 | F_1 | m \rangle = \frac{-1}{m+1}$$

$$\langle m-1 | F_0 + \lambda_0^{(m)} | m-1 \rangle = \frac{-1}{m(m+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{m-1}^{(m)} = -m \alpha_m^{(m)}} \quad \forall m \geq 0.$$

Pour $j = m+1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m+1 | F_1 | m \rangle = \frac{-1}{m+2}$$

$$\langle m+1 | \varphi_0 F_1 \alpha_1 | m \rangle = -\frac{1}{2} \varphi \delta_{0,m}$$

$$\langle m+1 | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m+1 \rangle = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{m+1}^{(m)} = (m+1) \alpha_m^{(m)}} \quad \text{si } m \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1^{(m)} = -\alpha_0^{(m)} - 1} \quad \text{si } m = 0$$

Pour $j = m+2$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m+2 | F_2 | m \rangle = \frac{-1}{\frac{m}{2} + 3} \delta_{2k,m}$$

$$\langle m+2 | F_1 | m+1 \rangle = \frac{-1}{m+3}$$

$$\langle m+2 | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m+2 \rangle = \frac{2}{(m+1)(m+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{m+2}^{(m)} = \frac{(m+1)^2}{2} + \frac{(m+1)(m+3)}{(m+6)} \delta_{2k,m}} \quad \forall m \geq 0.$$

TROISIEME ORDRE.

Nous allons identifier les coefficients de z^3 dans la relation (2.2) :

$$\begin{aligned}
 & [(\lambda_0 + \lambda_0^{(m)})(F_3 + \lambda_3^{(m)}E) + \lambda_1^{(m)}(F_2 + \lambda_2^{(m)}E) + \lambda_2^{(m)}(F_1 + \lambda_1^{(m)}E) + \lambda_3^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)] \vec{B}_0^{(m)} \\
 & + [(\lambda_1 + \lambda_0^{(m)})(F_2 + \lambda_2^{(m)}E) + \lambda_1^{(m)}(F_1 + \lambda_1^{(m)}E) + \lambda_2^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)] \vec{B}_1^{(m)} \\
 & + [(\lambda_2 + \lambda_0^{(m)})(F_1 + \lambda_1^{(m)}E) + \lambda_1^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)] \vec{B}_2^{(m)} \\
 & + [(\lambda_3 + \lambda_0^{(m)})(F_0 + \lambda_0^{(m)}E)] \vec{B}_3^{(m)} = \varphi_0 F_0 \alpha_3 \vec{B}_0^{(m)} + \varphi_0 F_1 \alpha_2 \vec{B}_1^{(m)} + \varphi_0 F_2 \alpha_1 \vec{B}_0^{(m)}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

a) Premier type de solution :

$$\begin{aligned}
 \lambda_0^{(m)} &= -1 \\
 \lambda_1^{(m)} &= \lambda_2^{(m)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\lambda_3^{(m)} (F_0 - E) \vec{B}_0^{(m)} = \varphi_0 F_0 \alpha_3 \vec{B}_0^{(m)} - \varphi_0 F_1 \alpha_2 \vec{B}_1^{(m)} - \varphi_0 F_2 \alpha_1 \vec{B}_0^{(m)} \tag{2.6}$$

Utilisant (2.1), nous obtenons après avoir multiplié (2.6)

à gauche par $\langle n |$:

$$\begin{aligned}
 \lambda_3^{(m)} \langle n | F_0 - E | n \rangle &= \varphi_0 \langle n | F_0 \alpha_3 | n \rangle + \varphi_0 \sum_i \alpha_i^{(m)} \langle n | F_1 \alpha_1 | i \rangle \\
 &+ \varphi_0 \langle n | F_2 \alpha_1 | n \rangle
 \end{aligned}$$

1. $n=0$

$$\lambda_3^{(m)} = -2$$

2. $n=1$

$$\lambda_3^{(m)} = -8$$

3. $n > 1$

$$\lambda_3^{(m)} = 0$$

b) Second type de solution :

$$\lambda_0^{(m)} = -\frac{m}{m+1}$$

$$\lambda_1^{(m)} = \lambda_2^{(m)} = 0$$

Multiplions (2.5) à gauche par $\langle j |$ en utilisant (2.1) :

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_3 + \lambda_3^{(m)} E | m \rangle + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i x_i^{(m)} \langle j | F_2 | i \rangle \\ & + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i y_i^{(m)} \langle j | F_1 | i \rangle + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i z_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle \\ & + \lambda_3^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m \rangle \\ & = \varphi_0 \langle j | F_0 x_3 | m \rangle + \varphi_0 \sum_i x_i^{(m)} \langle j | F_1 x_1 | i \rangle \\ & + \varphi \langle j | F_2 x_1 | m \rangle \end{aligned}$$

Pour $j = m$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m | F_3 + \lambda_3^{(m)} | m \rangle = \lambda_3^{(m)}$$

$$\langle m | F_2 | m \rangle = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\langle m | F_1 | m-1 \rangle = \frac{-1}{m+1}$$

$$\langle m | F_1 | m+1 \rangle = \frac{-1}{m+2}$$

$$\langle m | F_0 x_3 | m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{m,1}$$

$$\langle m | F_1 x_1 | m-1 \rangle = -\frac{1}{2} \delta_{m,1}$$

$$\langle m | F_2 x_1 | m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{m,0}$$

1. si $m=0$

$$\lambda_3^{(m)} = 0$$

2. si $m=1$

$$\lambda_3^{(m)} = \frac{1}{2}$$

3. si $m > 1$

$$\lambda_3^{(m)} = 0$$

CONCLUSION.

Pour $m = 0$ nous avons trouvé comme valeurs propres :

1. $\lambda_0^{(m)} = -1$	$\forall m \geq 0$	1. $\lambda_0^{(m)} = -\frac{m}{m+1}$	$\forall m \geq 0$
2. $\lambda_1^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 0$	2. $\lambda_1^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 0$
3. $\lambda_2^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 0$	3. $\lambda_2^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 0$
4. $\lambda_3^{(0)} = -2$		4. $\lambda_3^{(0)} = 0$	
$\lambda_3^{(1)} = -8$		$\lambda_3^{(1)} = \frac{9}{2}$	
$\lambda_3^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$	$\lambda_3^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$

C - Modes non axiaux : $m = 1$.

Rappelons la relation de dispersion :

$$(1 + \varepsilon) [A^{-1}(-\mu)A(\mu) + \varepsilon] \vec{B}^{(m)} = (1 - \varepsilon)^2 A^{-1}(-\mu)A(\mu) \Lambda^2 \vec{B}^{(m)}$$

En la développant en puissance de ε , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (1 + \lambda_0^{(m)} + \lambda_1^{(m)} z + \lambda_2^{(m)} z^2 + \lambda_3^{(m)} z^3 \dots) [F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + \lambda_0^{(m)} + \lambda_1^{(m)} z \\ & + \lambda_2^{(m)} z^2 + \lambda_3^{(m)} z^3] (\vec{B}_0^{(m)} + \vec{B}_1^{(m)} z + \vec{B}_2^{(m)} z^2 + \vec{B}_3^{(m)} z^3) \\ & = (\varphi + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \varphi_3 z^3 \dots) (F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3) (\alpha_1 z + \alpha_3 z^3) \\ & \times (\vec{B}_0^{(m)} + \vec{B}_1^{(m)} z + \vec{B}_2^{(m)} z^2 + \vec{B}_3^{(m)} z^3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

car $\Lambda^2 = \begin{pmatrix} z^3 & & & \\ & z^5 & & \\ & & \dots & \end{pmatrix}$ et nous nous limitons à z^3 .

$$F_0 = \underset{n \geq 1}{\text{diag}} \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \underset{n \geq 1}{\text{tridiag}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{n+1} \\ -\frac{n}{(n+1)(n+2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \underset{n \geq 1}{\text{diag}} \begin{pmatrix} 1 \\ n(n+2) \end{pmatrix} + \underset{n \geq 1}{\text{tridiag}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{(n+2)(n+3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\bar{F}_2 n'a pas d'élément sur la diagonale

$$\lambda^{(m)} = \varepsilon(\omega_m)$$

A chaque ordre, cette équation est développée
uniquement jusqu'à la puissance de z égale à l'ordre considéré.

ORDRE ZERO.

$$(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_0 + \lambda_0^{(m)} E) \vec{B}_0^{(m)} = 0$$

Solutions :

$$1. \quad \lambda_0^{(m)} = -1$$

$$2. \quad \lambda_0^{(m)} = \frac{-n}{n+1}$$

$\forall n \geq 1.$

PREMIER ORDRE.

Nous allons identifier les coefficients de z dans la
relation (2.7) :

$$\begin{aligned} & [(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)} (F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{B}_0^{(m)} \\ & + [(1 + \lambda_0^{(m)}) (F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{B}_1^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

a) Premier type de solution : $\lambda_0^{(m)} = -1$

$$\lambda_1^{(m)} (F_0 - E) b_0^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1^{(m)} = 0} \quad \forall m \geq 1$$

b) Second type de solution : $\lambda_0^{(m)} = \frac{-m}{m+1}$

En multipliant (2.8) à gauche par $\langle j |$

et utilisant (2.1),

nous obtenons :

$$(1 + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_1 + \lambda_1^{(m)} E | m \rangle + \lambda_1^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m \rangle \\ + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i \alpha_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle = 0.$$

Pour $j = m$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m | F_1 + \lambda_1^{(m)} E | m \rangle = \lambda_1^{(m)}$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda_0^{(m)}) \lambda_1^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1^{(m)} = 0} \quad \forall m \geq 1$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour $j = m-1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m-1 | F_1 | m \rangle = -\frac{1}{m}$$

$$\langle m-1 | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m-1 \rangle = \frac{-1}{m(m+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{m-1}^{(m)} = -(m+1)} \quad \forall m \geq 1.$$

Pour $j = n+1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+1 | F_1 | n \rangle = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\langle n+1 | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | n+1 \rangle = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1}^{(m)} = n \quad \forall n \geq 1$$

$$x_n^{(m)} = \text{arbitraire}, \forall n \geq 1$$

SECOND ORDRE.

Identifions les coefficients de Z^2 dans la relation (2.7) :

$$\begin{aligned} & [(\lambda_0 + \lambda_0^{(m)})(F_2 + \lambda_2^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)}(F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_2^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_0^{(m)} \\ & + [(\lambda_0 + \lambda_0^{(m)})(F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_1^{(m)} \\ & + [(\lambda_0 + \lambda_0^{(m)})(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_2^{(m)} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

a) Premier type de solution :

$$\lambda_0^{(m)} = -1$$

$$\lambda_1^{(m)} = 0$$

$$\lambda_2^{(m)} (F_0 - E) \vec{b}_0^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_2^{(m)} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

b) Second type de solution :

$$\lambda_0^{(m)} = \frac{-n}{n+1}$$

$$\lambda_1^{(m)} = 0$$

Multipliant (2.9) à gauche par $\langle j |$ et utilisant (2.1),

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_2 + \lambda_2^{(m)} E | n \rangle + \lambda_2^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | n \rangle \\ & + (\lambda_0 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i x_i^{(m)} \langle j | F_1 | i \rangle + (\lambda_0 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i y_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Pour $j = n$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | F_2 + \lambda_2^{(n)} E | n \rangle = \frac{1}{n(n+1)} + \lambda_2^{(n)}$$

$$\langle n | F_1 | n-1 \rangle = -\frac{(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\langle n | F_1 | n+1 \rangle = -\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_2^{(n)} = 0} \quad \forall n \geq 1.$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour $j = n-2$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n-2 | F_2 | n \rangle = \frac{-1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{+1}} \delta_{2k+1, n}, \quad k \geq 1$$

$$\langle n-2 | F_1 | n-1 \rangle = -\frac{1}{n-1}$$

$$\langle n-2 | F_0 + \lambda_0^{(n)} | n-2 \rangle = \frac{-2}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_{n-2}^{(n)} = -(n-1) \delta_{2k+1, n} - \frac{(n+1)^2}{2}} \quad \forall n \geq 1, k \geq 1$$

Pour $j = n-1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n-1 | F_1 | n \rangle = -\frac{1}{n}$$

$$\langle n-1 | F_0 + \lambda_0^{(n)} E | n-1 \rangle = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_{n-1}^{(n)} = -(n+1) \alpha_n^{(n)}} \quad \forall n \geq 1$$

Pour $j = n+1$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+1 | F_1 | n \rangle = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\langle n+1 | F_0 + \lambda_0^{(m)} | n+1 \rangle = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1}^{(m)} = n x_n^{(m)}} \quad \forall n \geq 1$$

Pour $j = n+2$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+2 | F_2 | n \rangle = -\frac{\frac{n+1}{2}}{\left(\frac{n+1}{2} + i\right)\left(\frac{n-1}{2} + 3\right)} \delta_{2k+1, n} \quad k \geq 0$$

$$\langle n+2 | F_1 | n+1 \rangle = \frac{-(n+1)}{(n+2)(n+3)}$$

$$\langle n+2 | F_0 + \lambda_0^{(m)} | n-2 \rangle = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+2}^{(m)} = \frac{m(n+1)^2}{2(n+2)} + \delta_{2k+1, n} \frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+5)(n+7)}} \quad \forall n \geq 1, k \geq 0$$

TROISIEME ORDRE.

Identifions les coefficients de \mathcal{L}^3 dans la relation (2.7) :

$$\begin{aligned} & [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_3 + \lambda_3^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)}(F_2 + \lambda_2^{(m)} E) + \lambda_2^{(m)}(F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_3^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_0^{(m)} \\ & + [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_2 + \lambda_2^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)}(F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_2^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_1^{(m)} \\ & + [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_1 + \lambda_1^{(m)} E) + \lambda_1^{(m)}(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] \vec{b}_2^{(m)} \\ & + [(\mu + \lambda_0^{(m)})(F_0 + \lambda_0^{(m)} E)] b_3^{(m)} \\ & = \varphi_{\mathcal{L}^3} \vec{b}_0^{(m)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

a) Premier type de solution :

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(m)} &= -1 \\ \lambda_1^{(m)} &= \lambda_2^{(m)} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_3^{(m)} (F_0 - E) \vec{b}_0^{(m)} = \varphi_0 F_0 \alpha_3 \vec{b}_0^{(m)}$$

$$\left| \lambda_3^{(m)} \text{diag} \left(\frac{m}{m+1}, -1 \right) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & & \end{pmatrix} \right| = 0$$

1. si $m = 1$

$$\lambda_3^{(m)} = -4$$

2. si $m > 1$

$$\lambda_3^{(m)} = 0$$

b) Second type de solution :

$$\lambda_0^{(m)} = \frac{-m}{m+1}$$

$$\lambda_1^{(m)} = \lambda_2^{(m)} = 0$$

Multiplions (2.10) à gauche par $\langle j |$ et utilisons (2.1) :

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_0^{(m)}) \langle j | F_3 + \lambda_3^{(m)} E | m \rangle &+ (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i \alpha_i^{(m)} \langle j | F_2 | i \rangle \\ &+ (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i \gamma_i^{(m)} \langle j | F_1 | i \rangle + (1 + \lambda_0^{(m)}) \sum_i z_i^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | i \rangle \\ &+ \lambda_3^{(m)} \langle j | F_0 + \lambda_0^{(m)} E | m \rangle = \varphi_0 \langle j | F_0 \alpha_3 | m \rangle \end{aligned}$$

Pour $j = m$:

Les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle m | F_3 + \lambda_3^{(m)} E | m \rangle = \lambda_3^{(m)}$$

$$\langle m | F_2 | m \rangle = \frac{1}{m(m+1)}$$

$$\langle m | F_1 | m-1 \rangle = \frac{-(m-1)}{m(m+1)}$$

$$\langle m | F_1 | m+1 \rangle = \frac{-1}{m+1}$$

$$\langle m | F_0 \alpha_3 | m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{m,1}$$

1. si $m = 1$

$$\lambda_3^{(m)} = \frac{9}{4}$$

2. si $m > 1$

$$\lambda_3^{(m)} = 0$$

CONCLUSION.

Pour $m = 1$ les valeurs propres aux différents ordres sont :

1. $\lambda_0^{(m)} = -1$	$\forall m \geq 1$	1. $\lambda_0^{(m)} = \frac{-m}{m+1}$	$\forall m \geq 1$
2. $\lambda_1^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$	2. $\lambda_1^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$
3. $\lambda_2^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$	3. $\lambda_2^{(m)} = 0$	$\forall m \geq 1$
4. $\lambda_3^{(m)} = -4$	$m = 1$	4. $\lambda_3^{(m)} = \frac{9}{4}$	$m = 1$
$\lambda_3^{(m)} = 0$	$m > 1$	$\lambda_3^{(m)} = 0$	$m > 1$

Chapitre 3 : ENERGIE D'INTERACTION.

A. Préliminaires.

Soit un void (ou sphère pleine) situé à une distance d d'un plan.

Rappelons la formule de l'énergie de Van der waals :

$$W(d) = \frac{1}{\lambda} \sum_i [\omega_i(d) - \omega_i(\infty)] \quad (3.1)$$

où $\omega_i(d)$ les modes propres du champ électromagnétique; ils dépendent de la distance d entre les deux corps.

$\omega_i(\infty)$ les modes propres du champ électromagnétique dus à un seul corps.

(d est infinie).

La somme parcourt tous les modes possibles avec leur dégénérescence éventuelle.

Par la relation entre $\xi(\omega)$ et ω :

$$\xi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (3.2)$$

nous pouvons déterminer tous les ω_i .

Pour les voids :

$$\lambda_m = \varepsilon(\omega_m)$$

Pour les sphères :

$$\lambda_m = \varepsilon^{-1}(\omega_m),$$

où les λ_m ont été calculés par la théorie de la perturbation.

B. Energie d'interaction entre un void et un plan.

Déterminons les $\omega_i(d)$ et $\omega_i(\infty)$:

a) $\omega_i(\infty)$.

Le void est situé à une distance infinie du plan :

1. Pour le void :

$$\varepsilon(\omega) = -\frac{m}{m+1}$$

$$m: 0, 1, 2, \dots$$

(chapitre 1 - cas limite 1)

par (3.2)

$$\omega_i(\infty) = \omega_p \left[\frac{(m+1)}{(2m+1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

2. Pour le plan :

$$\varepsilon(\omega) = -1$$

une infinité de fois.

par (3.2)

$$\omega_i(\infty) = \omega_p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\omega_z(d)$.

Dans la théorie de la perturbation, nous avons établi :

$$\xi(\omega) = \lambda_0^{(m)} + z \lambda_1^{(m)} + z^2 \lambda_2^{(m)} + z^3 \lambda_3^{(m)} \dots$$

Seules les valeurs propres au troisième ordre sont non nulles.

$$\Rightarrow \xi(\omega) = \lambda_0^{(m)} + z^3 \lambda_3^{(m)}$$

1. Pour le void :

$$\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 1 \end{array}$$

$$\xi(\omega) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} z^3$$

$$\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}$$

$$\xi(\omega) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} z^3$$

2. Pour le plan :

$$\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 0 \end{array}$$

$$\xi(\omega) = -1 - 2z^3$$

$$\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 1 \end{array}$$

$$\xi(\omega) = -1 - 8z^3$$

$$\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 1 \end{array}$$

$$\xi(\omega) = -1 - 4z^3$$

Nous remplaçons $\xi(\omega)$ dans (3.2) pour calculer $\frac{\omega}{\omega_r}$.

Pour clarifier, rassemblons les résultats dans deux tableaux.

tableau 1 : corrections : $\lambda_s^{(m)}$

$\lambda_0^{(m)} = \frac{m}{n+1}$	$m = 0$	$m = 1$
$n = 0$	0	0
$n = 1$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\lambda_0^{(m)} = -1$	$m = 0$	$m = 1$
$n = 0$	- 2	0
$n = 1$	- 8	- 4

tableau 2 :

$$z = \frac{R}{2d}$$

$\frac{\omega_v}{\omega_p} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$m = 0$	$m = 1$
$n = 0$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$n = 1$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{3}{2} z^3\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3}{4} z^3\right)$
$\frac{\omega_p}{\omega_p} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$m = 0$	$m = 1$
$n = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{2} z^3\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$n = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - 2 z^3\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - z^3\right)$

Remarque :

 La correction au premier ordre de chaque mode (1,0) (mode invariant par rotation autour de l'axe z) est double de la correction de chaque mode (1,1).
 [15]

c) Energie de Van der waals.

Pour un void en face d'un plan, l'énergie est :

$$W_V = \frac{\hbar}{2} \left[\sum_{\text{Void}} (\omega_i(d) - \omega_i(\infty)) + \sum_{\text{Plan}} (\omega_i(d) - \omega_i(\infty)) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \omega_p z^3 \left(\sqrt{\epsilon} - 9 \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$W_V = - \frac{\hbar}{2} \omega_p z^3 0,7324905. \quad (3.3).$$

C. Energie d'interaction entre une sphère et un plan.

Dans ce cas :

$$\lambda_m = \epsilon^{-1}(\omega_m)$$

$$\frac{1}{\epsilon} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Déterminons les $\omega_i(d)$ et les $\omega_i(\infty)$:

a) $\omega_i(\infty)$:

La sphère est située à une distance infinie du plan.

1. Pour la sphère :

$$\omega_i(\infty) = \omega_p \sqrt{\frac{m}{2n+1}}$$

2. Pour le plan :

$$\omega_i(\infty) = \omega_p \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\omega_i(d)$:

1. Pour la sphère :

Nous avons établi :

$$\mathcal{E}(\omega) = -\frac{1}{2} + \lambda_3^{(1)} Z^3 \quad (3.4)$$

$$\text{or } \left(\frac{\omega_S}{\omega_P} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}(\omega)}{\mathcal{E}(\omega) - 1} \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.5), nous obtenons :

$$\frac{\omega_S}{\omega_P} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2}{3} \lambda_3^{(1)} Z^3 \right)$$

2. Pour le plan :

$$\mathcal{E}(\omega) = -1 - \lambda_3^{(m)} Z^3 \quad (3.6)$$

En remplaçant (3.6) dans (3.5) :

$$\frac{\omega_P}{\omega_P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \lambda_3^{(m)} Z^3 \right)$$

Résumons ces résultats dans des tableaux :

tableau 1 : corrections : $\lambda_3^{(m)}$

$\lambda_0^{(m)} = \frac{-m}{m+1}$	$m = 0$	$m = 1$
$m = 0$	0	0
$m = 1$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\lambda_0^{(m)} = -1$	$m = 0$	$m = 1$
$m = 0$	-2	0
$m = 1$	-8	-4

tableau 2 :

$$z = \frac{R}{2d} = \frac{R}{D}$$

$\frac{\omega_B}{\omega_T} = \left(\frac{m}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$m = 0$	$m = 1$
$m = 0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$m = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - 3z^3)$	$\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \frac{3}{2} z^3)$
$\frac{\omega_P}{\omega_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$m = 0$	$m = 1$
$m = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \frac{1}{2} z^3)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$m = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 2z^3)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + z^3)$

c) Energie de Van der waals :

Pour une sphère en face d'un plan, l'énergie est :

$$W_S = \frac{\hbar}{2} \left[\sum_{\text{sphère}} (\omega_i(d) - \omega_i(\infty)) + \sum_{\text{plan}} (\omega_i(d) - \omega_i(\infty)) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \omega_p z^3 \left[-2\sqrt{3} + \sqrt{2} \frac{9}{4} \right]$$

$$W_S = -\frac{\hbar}{2} \omega_p z^3 0,28214.$$

(3.7).

D. Conclusion.

Contrairement à deux sphères égales (deux voids égaux) où l'interaction est en $\left(\frac{R}{D}\right)^6$ (modes antisymétriques - modes symétriques), l'interaction entre une sphère (void) et un plan est en $\left(\frac{R}{D}\right)^3$.^[4]

Le rapport de (3.3) et (3.7) vaut :

$$\frac{W_V}{W_S} = 2,5963663.$$

Chapitre 4 : COORDONNEES SPHERIQUES ET
CYLINDRIQUES.
EQUATIONS FONDAMENTALES.

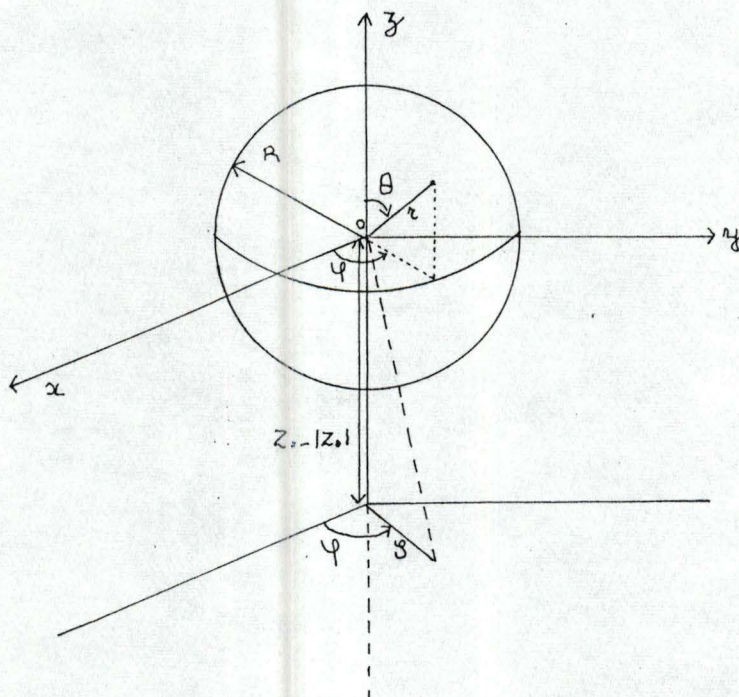
A. Introduction.

Soit un void (sphère) situé à une distance $Z = -|Z_0|$ d'un plan.

Pour le void, nous écrivons le potentiel en coordonnées sphériques et pour le plan en coordonnées cylindriques avec centre O.

Ensuite, nous raccordons les potentiels sur la surface du void et sur le plan et nous exprimons les conditions de continuité pour la composante normale du déplacement électrique.

Nous obtenons deux équations fondamentales d'ordre infini exploitées dans le chapitre 5.



1. Potentiel pour le void.

Une solution particulière de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est : ^[4]

$$V_{l,m}(\rho, \theta, \varphi) = (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi) (A_2 P_l^m(\cos \theta) + B_2 Q_l^m(\cos \theta)) \\ \times (A_3 \rho^l + B_3 \rho^{-(l+1)})$$

a) Potentiel à l'intérieur du void de rayon R : $\rho < R$.

$$V_3^{\text{IN}}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \rho^l A_2 A_3$$

conditions : $m \in \mathbb{Z}$ pour assurer la périodicité de la solution en φ .

$l \geq |m|$ pour obtenir ^{une} solution non nulle et finie (car $P_l^m = 0$ si $|m| > l$)

θ varie de 0 à π .

Nous nous limitons au cas $m = 0$; le potentiel se simplifie :

$$V_3^{\text{IN}}(\rho, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_2 A_3 \rho^l P_l(\cos \theta)$$

b) Potentiel à l'extérieur du void de rayon R : $\rho > R$

$$V_3^{\text{OUT}}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \frac{1}{\rho^{l+1}} A_2 B_3$$

conditions : $m \in \mathbb{Z}$

$l \geq |m|$

θ varie de 0 à π .

Comme $m = 0$

$$V_3^{\text{OUT}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) A_l^3$$

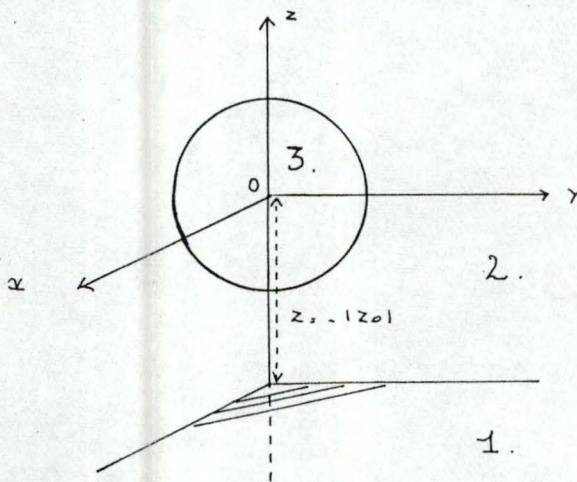
2. Potentiel pour le void en face du plan.

Divisons l'espace en trois régions :

Région 1 : demi espace infini limité par le plan
et $z < -|z_0|$

Région 2 : demi espace infini limité par le plan
et $z > -|z_0|$

Région 3 : intérieur du void de rayon R.



Dans la région 1, le potentiel s'écrit :

$$V_1(S, z) = \int_0^{\infty} B(k) e^{k(z+|z_0|)} J_0(kS) dk \quad (4.1)$$

(annexe 1)

Dans la région 3, nous avons :

$$V_3(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l A_l^3 P_l(\cos \theta) \quad (4.2)$$

Dans la région 2, la solution générale s'écrit :

$$V_2(r, \theta) = V_2(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} A_l^2 P_l(\cos \theta) + \int_0^{\infty} B_l(k) e^{-k(z+z_0)} J_0(k s) dk \quad (4.3)$$

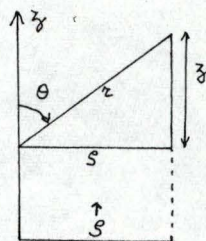
B. Void et milieu extérieur.

Nous raccordons le milieu 2 et le milieu 3 sur $r = R$ et quel que soit l'angle θ .

Exprimons s et z en fonction de θ .

$$s = r \sin \theta \quad (4.4)$$

$$z = r \cos \theta \quad (4.5)$$



a) Potentiel :

La continuité des potentiels entre le milieu 3 et le milieu 2 s'écrit :

$$V_3 = V_2 \quad \text{en } r = R$$

Utilisons les relations (4.2) et (4.3) avec $r = R$,

(4.4) et (4.5) :

$$\sum_{l=0}^{\infty} R^l A_l^3 P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} A_l^2 P_l(\cos \theta) + \int_0^{\infty} B_l(k) J_0(k R \sin \theta) e^{-k R \cos \theta} \times e^{-k |z_0|} dk$$

Pour simplifier cette égalité par la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre :^[9]

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,q} \quad (4.6)$$

multiplions les deux membres par $\sin \theta P_q(\cos \theta)$ et intégrons de 0 à π

Nous obtenons :

$$R^q A_q^3 = \frac{1}{R^{q+1}} A_q^2 + \frac{2q+1}{2} \int_0^\infty B_2(k) e^{-k|z_0|} \int_0^\pi e^{-kR \cos \theta} J_0(kR \sin \theta) \times P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta dk$$

Effectuons un changement de variable pour introduire un facteur sans dimension $\frac{R}{|z_0|}$. Lorsque $|z_0| \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow 0$) c'est-à-dire lorsque le void est à une distance infinie du plan, nous retrouvons alors les modes du void et du plan découplés.

Posons $u = k |z_0|$

$\Rightarrow dk = \frac{du}{|z_0|}$

Posons $\xi = \frac{R}{|z_0|}$

Après ces changements de variables, la relation (4.7)

devient :

$$R^q A_q^3 = \frac{1}{R^{q+1}} A_q^2 + \frac{2q+1}{2|z_0|} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} J_0(\xi u \sin \theta) \times P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta du$$

Posons

$$f_q(\xi, u) = \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} J_0(\xi u \sin \theta) P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

$$R^q A_q^3 = \frac{1}{R^{q+1}} A_q^2 + \frac{2q+1}{2|z_0|} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} f_q(\xi, u) du. \quad (4.8)$$

Cette relation multipliée par R est

$$R^{q+1} A_q^3 = \frac{1}{R^q} A_q^2 - \frac{2q+1}{2} \frac{R}{|z_0|} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} f_q(\xi, u) du.$$

Posons $a_q^2 = \frac{A_q^2}{R^q}$

$$R^{q+1} A_q^3 = a_q^2 + \frac{2q+1}{2} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} f_q(\xi, u) du$$

Cette équation a les inconnues a_q^2 , $B_2(u)$ et A_q^3

b) Dérivée normale.

La condition de continuité pour la composante normale de \vec{D} s'exprime par :

$$\frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Après utilisation de (4.4) et (4.5), nous obtenons :

$$\sum_{l=0}^{\infty} l R^{l-1} A_l^3 P_l(\cos \theta) = \varepsilon \left[\sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) R^{-(l+2)} A_l^2 P_l(\cos \theta) - \int_0^\infty B_2(k) e^{-k|z_0|} k \cos \theta e^{-kR \cos \theta} J_0(kR \sin \theta) dk - \int_0^\infty B_2(k) e^{-k|z_0|} e^{-kR \cos \theta} k \sin \theta J_1(kR \sin \theta) dk \right]$$

Multiplions la relation par $P_q(\cos \theta) \sin \theta$ et intégrons de 0 à π pour utiliser (4.6).

En appliquant le changement de variables :

$$u = k |z_0|$$

$$\xi = \frac{R}{|z_0|}$$

nous obtenons :

$$q R^{q-1} A_q^3 = \varepsilon \left[-(q+1) R^{-(q+2)} A_q^2 - \frac{2q+1}{2|z_0|^2} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} u \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} P_q(\cos \theta) \times \sin \theta \times [\cos \theta J_0(\xi u \sin \theta) + \sin \theta J_2(\xi u \sin \theta)] d\theta du \right]$$

$$\text{or } \frac{\partial}{\partial \xi} f_q(\xi, u) = -u \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} [\cos \theta J_0(\xi u \sin \theta) + \sin \theta J_2(\xi u \sin \theta)] \times P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

La relation précédente devient :

$$q R^{q-1} A_q^3 = \mathcal{E} \left[-(q+1) R^{-(q+2)} A_q^2 + \frac{2q+1}{2|z_0|^2} \int_0^\infty \tilde{B}_2(u) e^{-u} \frac{\partial f_q(s, u)}{\partial s} du \right]. \quad (4.9)$$

Après multiplication par $\frac{R^2}{q}$, posons $a_q^2 = \frac{A_q^2}{R^q}$ dans la relation (4.9).

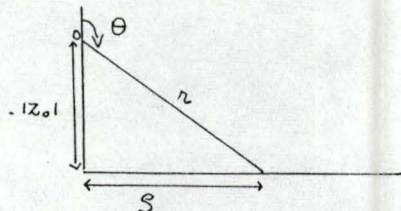
$$R^{q+1} A_q^3 = \mathcal{E} \left[-\frac{(q+1)}{q} a_q^2 + \frac{2q+1}{2q} \int_0^\infty \tilde{B}_2(u) e^{-u} \frac{\partial f_q(s, u)}{\partial s} du \right] \quad (4.10)$$

La relation (4.10) contient les inconnues

A_q^3 , a_q^2 et $B_2(u)$.

C. Régions semi-infinies en-dessous du plan et au-dessus du plan.

Nous raccordons le milieu 1 et le milieu 2 sur $Z = -|Z_0|$ et quel que soit S .



Les relations entre r , $\cos \theta$ et S sont :

$$r = (|Z_0|^2 + S^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-S}{Z} \quad (4.12)$$

Elevons (4.12) au carré pour faire disparaître $\sin \theta$; nous obtenons :

$$\cos \theta = - \left(1 + \frac{S^2}{|Z_0|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

a) Potentiel.

La continuité des potentiels entre le milieu 1 et le milieu 2 s'écrit :

$$V_1 = V_2 \quad \text{sur } Z = -|Z_0|$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{\infty} B_1(k) J_0(kS) dk = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} A_l^1 P_l(\cos \theta) + \int_0^{\infty} B_2(k) J_0(kS) dk$$

Utilisons (4.11) et (4.13) :

$$\int_0^{\infty} B_1(k) J_0(kS) dk = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(S^2 + |z_0|^2)^{\frac{l+1}{2}}} A_l^2 P_l\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{S^2}{|z_0|^2}}}\right) + \int_0^{\infty} B_2(k) J_0(kS) dk$$

Pour avoir une relation sans dimension ξ , posons

$$u = k |z_0|.$$

Nous obtenons :

$$\int_0^{\infty} B_1(u) J_0\left(\frac{u S}{|z_0|}\right) \frac{du}{|z_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{S^2}{|z_0|^2}\right]^{\frac{l+1}{2}}} \frac{1}{|z_0|^{l+1}} A_l^2 P_l\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{S^2}{|z_0|^2}}}\right) + \int_0^{\infty} B_2(u) J_0\left(\frac{S}{|z_0|} u\right) \frac{du}{|z_0|}$$

Posons : $\alpha = \frac{S}{|z_0|}$ et multiplions la relation par $|z_0|^{-1}$

$$\int_0^{\infty} B_1(u) J_0(u\alpha) du = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{\frac{l+1}{2}}} \frac{1}{|z_0|^l} A_l^2 P_l\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right) + \int_0^{\infty} B_2(u) J_0(u\alpha) du \quad (4.14)$$

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit

$$\xi = \frac{R}{|z_0|}$$

Multiplions et divisons le membre droit de (4.14) par R^l

et posons $\frac{A_l^2}{R^l} = a_l^2$

$$\int_0^{\infty} B_1(u) J_0(u\alpha) du = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{\frac{l+1}{2}}} \xi^l a_l^2 P_l\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right) + \int_0^{\infty} B_2(u) J_0(u\alpha) du \quad (4.15)$$

Cette relation a $B_1(u), B_2(u)$ et a_l^2 comme inconnues.

b) Dérivée normale.

Exprimons la continuité de la composante normale de

\vec{D} sur $z = -|z_0|$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=-|z_0|} = \varepsilon \frac{\partial V_2}{\partial z} \Big|_{z=-|z_0|}$$

Dérivons les relations (4.1) et (4.3) par rapport

à z et posons $u = h|z_0|$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{B}_1(u) u J_0\left(u \frac{S}{|z_0|}\right) du &= \varepsilon \sum_l \frac{l+1}{\left(1 + \frac{S^2}{z_0^2}\right)^{\frac{l+3}{2}}} \frac{1}{|z_0|^l} A_l^2 P_l\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{S^2}{z_0^2}}}\right) \\ &+ \varepsilon \sum_l \frac{1}{\left(1 + \frac{S^2}{z_0^2}\right)^{\frac{l+1}{2}}} \frac{1}{|z_0|^{l+2}} A_l^2 S^2 P_l'\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{S^2}{z_0^2}}}\right) \\ &- \varepsilon \int_0^\infty \bar{B}_2(u) u J_0\left(u \frac{S}{|z_0|}\right) du. \end{aligned} \quad (4.16).$$

La relation suivante :

$$P_l'(\alpha) = \frac{l\alpha}{(\alpha^2-1)} P_l(\alpha) - \frac{l}{(\alpha^2-1)} P_{l-1}(\alpha) \quad [9]$$

nous permet d'exprimer $P_l'\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{S^2}{z_0^2}}}\right)$

Avant ce calcul, posons $d = \frac{S}{|z_0|}$ dans (4.16).

$$P_l'\left(\frac{-1}{(1+d^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{l}{d^2} (1+d^2)^{\frac{1}{2}} P_l\left(\frac{-1}{(1+d^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{l(1+d^2)}{d^2} P_{l-1}\left(\frac{-1}{(1+d^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

La relation (4.16) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} B_1(u) u J_0(u\alpha) du &= -\varepsilon \int_0^{\infty} B_2(u) u J_0(u\alpha) du \\ &+ \varepsilon \sum_l \frac{2l+1}{(1+\alpha^2)^{\frac{l+3}{2}}} P_l\left(\frac{-1}{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \xi^l a_l^2 \\ &+ \varepsilon \sum_l \frac{l}{(1+\alpha^2)^{\frac{l+1}{2}}} P_{l-1}\left(\frac{-1}{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \xi^l a_l^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dans la relation (4.17), nous avons divisé et multiplié les sommes du membre droit par R^l pour introduire

$$\xi = \frac{R}{|z_0|} \quad \text{et nous avons posé} \quad a_l^2 = \frac{A_l^2}{R^l}$$

La relation (4.17) a comme inconnues $B_1(u)$, $B_2(u)$ et a_l^2 .

Dans le chapitre 5, nous exploitons les quatre relations obtenues pour calculer les modes du plan et de la sphère couplés.

Chapitre 5 : CALCUL DES MODES.

A. Introduction.

Les quatre relations obtenues dans le chapitre précédent sont :

$$R^{q+1} A_q^3 = a_q^2 + \frac{2q+1}{2} \xi \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} f_q(\xi, u) du \quad (5.1)$$

$$R^{q+1} A_q^3 = \frac{-(q+1)}{q} \varepsilon a_q^2 + \frac{2q+1}{2q} \xi^2 \varepsilon \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \frac{\partial f_q(\xi, u)}{\partial \xi} du \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty B_1(u) J_0(u\alpha) du &= \sum_l (1+\alpha^2)^{-\frac{l+1}{2}} P_l(-(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}) \xi^l a_l^2 \\ &+ \int_0^\infty B_2(u) J_0(u\alpha) du \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty B_1(u) u J_0(u\alpha) du &= -\varepsilon \int_0^\infty B_2(u) u J_0(u\alpha) du \\ &+ \varepsilon \sum_l \frac{2l+1}{(1+\alpha^2)^{\frac{l+3}{2}}} P_l(-(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}) \xi^l a_l^2 \\ &+ \varepsilon \sum_l \frac{l}{(1+\alpha^2)^{\frac{l+1}{2}}} P_{l-1}(-(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}) \xi^l a_l^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nous avons un système de quatre équations à quatre inconnues : a_q^2 , A_q^3 , $B_1(u)$ et $B_2(u)$.

Pour résoudre ce système, procédons de la façon suivante :

- Nous allons extraire $B_1(\mu) + \varepsilon B_2(\mu)$ de la relation (5.4) et $B_1(\mu) - B_2(\mu)$ de la relation (5.3) grâce à la propriété des transformées de Hankel.

- Entre les deux relations obtenues, nous éliminons $B_1(\mu)$. La relation obtenue est développée en puissance de ξ jusque l'ordre 1 car nous nous limitons à une correction d'ordre 3 pour les modes.

- Dans les relations (5.1) et (5.2), nous développons $J_0(\xi \mu \sin \theta)$ et $J_1(\xi \mu \sin \theta)$ en série de puissance de ξ pour obtenir des relations en ξ^3 .

Entre ces deux équations, nous éliminons A_q^3 ; nous avons donc une relation en ξ^3 où nous remplaçons la valeur de $B_2(\mu)$ calculée précédemment.

- L'équation finale est exploitée pour $q=0$, $q=1$ et $q=2$; ceci forme un système homogène de trois équations à trois inconnues: a_0^2 , a_1^2 et a_2^2 .

B. Régions semi-infinies en dessous et au-dessus du plan.

Nous utilisons la propriété des transformées de Hankel [11]:

$$\text{si } f(x) = \int_0^{\infty} \lambda \Phi(\lambda) J_0(x\lambda) d\lambda \quad (5.5)$$

$$\text{Alors } \Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} x f(x) J_0(x\lambda) dx$$

conditions: [12] Φ à variation bornée dans un voisinage de $x=\lambda$

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} |\Phi(x)| dx \text{ convergente}$$

La relation (5.4) peut s'écrire :

$$\int_0^{\infty} [B_1(u) + \varepsilon B_2(u)] u J_0(ud) du = \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{2l+1}{(1+d^2)^{\frac{l+3}{2}}} P_l(-(1+d^2)^{-\frac{1}{2}}) + \frac{l}{(1+d^2)^{\frac{l+2}{2}}} P_{l-1}(-(1+d^2)^{-\frac{1}{2}}) \right] \varepsilon^l a_l^2.$$

De cette équation, nous pouvons extraire $B_1(u) + \varepsilon B_2(u)$ en appliquant la propriété (5.5) :

$$B_1(u) + \varepsilon B_2(u) = \varepsilon \int_0^{\infty} d \sum_l \left[\frac{2l+1}{(1+d^2)^{\frac{l+3}{2}}} P_l(-(1+d^2)^{-\frac{1}{2}}) + \frac{l}{(1+d^2)^{\frac{l+2}{2}}} P_{l-1}(-(1+d^2)^{-\frac{1}{2}}) \right] \varepsilon^l a_l^2 J_0(ud) dd \quad (5.6)$$

Nous développons la somme sur l pour $l=0$ et $l=1$:

$$B_1(u) + \varepsilon B_2(u) = \varepsilon a_0^2 \int_0^{\infty} \frac{d}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} J_0(ud) dd + \varepsilon a_1^2 \int_0^{\infty} d \left[\frac{-3}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \right] J_0(ud) dd \quad (5.7)$$

$$\text{or } \int_0^{\infty} \frac{J_0(ud)}{(1+d^2)^{\mu+1}} d dd = \frac{u^{\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{-\mu}(u) \quad [12]$$

où $K_{\nu}(u)$: fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.
conditions : $-1 < 0 < \text{Re}(2\mu + \frac{3}{2})$ et $u > 0$.

La relation (5.7) devient :

$$B_1(u) + \varepsilon B_2(u) = \varepsilon a_0^2 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} K_{-\frac{1}{2}}(u) + \varepsilon a_1^2 \int \left(\frac{-3}{\sqrt{8} \Gamma(\frac{5}{2})} u^{\frac{3}{2}} K_{-\frac{3}{2}}(u) + \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} u^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(u) \right) \quad (5.8)$$

Multiplions et divisons par u l'intégrale de la relation (5.3) pour appliquer la propriété (5.5) :

$$\int_0^{\infty} [B_1(u) - B_2(u)] \frac{u}{u} J_0(ua) du = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+a^2)^{\frac{l+1}{2}}} P_l(-(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}) \xi^l a^l$$

Nous obtenons :

$$\frac{B_1(u) - B_2(u)}{u} = \int_0^{\infty} a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+a^2)^{\frac{l+1}{2}}} P_l(-(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}) \xi^l a^l J_0(ua) da$$

Développons la somme pour $l=0$ et $l=1$:

$$\frac{B_1(u) - B_2(u)}{u} = a^2 \int_0^{\infty} \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} J_0(ua) da + a^2 \xi \int_0^{\infty} \frac{-a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} J_0(ua) da$$

$$B_1(u) - B_2(u) = a^2 \frac{u^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} K_{\frac{1}{2}}(u) - a^2 \xi \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} K_{-\frac{1}{2}}(u) \quad (5.9)$$

Éliminons $B_2(u)$ en soustrayant la relation (5.9)

de la relation (5.8) :

$$B_2(u) = \frac{a^2}{(1+\varepsilon)} \left[\frac{\varepsilon u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} K_{-\frac{1}{2}}(u) - \frac{u^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} K_{\frac{1}{2}}(u) \right] + \frac{a^2 \xi}{(1+\varepsilon)} \left[\frac{-3\varepsilon}{\sqrt{8} \Gamma(\frac{5}{2})} u^{\frac{3}{2}} K_{-\frac{3}{2}}(u) + \frac{u^{\frac{1}{2}} \varepsilon}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} K_{-\frac{1}{2}}(u) + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})} K_{-\frac{1}{2}}(u) \right] \quad (5.10)$$

C. Void - région semi-infinie au-dessus du plan.

Nous développons les relations (5.1) et (5.2) en puissance de ξ jusqu'à l'ordre 3 et nous éliminons A_q^3 .

Rappelons la relation (5.1) :

$$R^{q+1} A_q^3 = a^2 + \frac{2q+1}{2} \xi \int_0^{\infty} B_2(u) e^{-u} \int_0^{\pi} e^{-\xi u \cos \theta} J_0(\xi u \sin \theta) P_q(\cos \theta) \times \sin \theta d\theta du \quad (5.11)$$

$$\text{or } \int_0^\pi (\sin \theta) = 1 - \frac{1}{4} \int^2 u^2 (1 - \cos^2 \theta) \dots \quad [10]$$

$$e^{-\int u \cos \theta} = 1 - \int u \cos \theta + \frac{\int^2 u^2 \cos^2 \theta}{2} \dots \quad [10]$$

Effectuons le produit de ces deux séries en conservant les termes jusqu'à l'ordre 2 en \int . La relation (5.11) devient :

$$R^{q+1} A_q^3 = a_q^2 + \frac{2q+1}{2} \int \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \int_0^\pi P_q(\cos \theta) \sin \theta \times \left(1 - \frac{1}{4} \int^2 u^2 - \int u \cos \theta + \frac{3}{4} \int^2 u^2 \cos^2 \theta\right) d\theta du. \quad (5.12)$$

Le changement de variables $x = \cos \theta$ transforme la relation (5.12) :

$$R^{q+1} A_q^3 = a_q^2 + \frac{2q+1}{2} \int \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \int_{-1}^{+1} P_q(x) \times \left(1 - \frac{1}{4} \int^2 u^2 - \int u x + \frac{3}{4} \int^2 u x^2\right) dx du. \quad (5.13)$$

Pour résoudre cette intégrale, utilisons la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre : ^[9]

$$\int_{-1}^{+1} P_q(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2q+1} \delta_{q,l} \quad (5.14)$$

et les définitions suivantes : ^[9]

$$1 = P_0(x)$$

$$x = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x)$$

La relation (5.13) devient :

$$R^{q+1} A_q^3 = a_q^2 + \xi \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \\ \times \left[\delta_{0,q} - \xi u \delta_{1,q} + \frac{1}{2} \xi^2 u^2 \delta_{2,q} \right] du \quad (5.15)$$

Procédons de manière identique pour la relation

(5.2) :

$$R^{q+1} A_q^3 = \frac{-(q+1)}{q} \varepsilon a_q^2 + \frac{2q+1}{2q} \xi^2 \varepsilon \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \frac{\partial f_q(\xi, u)}{\partial \xi} du. \quad (5.16)$$

où

$$f_q(\xi, u) = \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} J_0(\xi u \sin \theta) P_q(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Si nous dérivons cette relation par rapport à ξ , nous obtenons :

$$\frac{\partial f_q(\xi, u)}{\partial \xi} = - \int_0^\pi e^{-\xi u \cos \theta} u \sin \theta P_q(\cos \theta) \\ \times (\cos \theta J_0(\xi u \sin \theta) + \sin \theta J_1(\xi u \sin \theta)) d\theta. \quad (5.17)$$

Développons $e^{-\xi u \cos \theta}$, $J_0(\xi u \sin \theta)$ et $J_1(\xi u \sin \theta)$ en puissance de ξ jusqu'à l'ordre 1 :

$$e^{-\xi u \cos \theta} = 1 - \xi u \cos \theta + \dots$$

$$J_0(\xi u \sin \theta) = 1 - \dots$$

$$J_1(\xi u \sin \theta) = \frac{1}{2} \xi u \sin \theta + \dots$$

Par le changement de variable $x = \cos \theta$

et par la propriété (5.14), la relation (5.17) s'exprime :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_q(s, u)}{\partial s} = & -u \frac{2}{2q+1} \delta_{1,q} + \int u^2 \frac{2}{2q+1} \left(\frac{2}{3} \delta_{2,q} + \frac{1}{3} \delta_{0,q} \right) \\ & - \int \frac{u^2}{2} \frac{2}{2q+1} \left(\delta_{0,q} - \frac{2}{3} \delta_{2,q} - \frac{1}{3} \delta_{0,q} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Remplaçons (5.18) dans la relation (5.16) :

$$\begin{aligned} R^{q+1} A^3 = & -\varepsilon \frac{(q+1)}{q} a_q^2 + \frac{\varepsilon}{q} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \\ & \times (-u \delta_{1,q} + \int u^2 \delta_{2,q}) du. \end{aligned} \quad (5.19)$$

En égalant les relations (5.15) et (5.19), nous obtenons une équation développée en puissance de ε dont les inconnues sont a_q^2 et $B_2(u)$:

$$\begin{aligned} a_q^2 \left(1 + \varepsilon \frac{(q+1)}{q} \right) + \varepsilon \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \left[\delta_{0,q} - \int u \delta_{1,q} + \frac{1}{2} \int u^2 \delta_{2,q} \right] du \\ - \frac{\varepsilon}{q} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \left[-u \delta_{1,q} + \int u^2 \delta_{2,q} \right] du = 0. \end{aligned}$$

Multiplions cette relation par $\frac{q}{q+1} (1 + \varepsilon)$ de façon

à pouvoir considérer le cas $q=0$ et pour ne pas avoir $(1 + \varepsilon)$ en dénominateur lorsque nous remplaçons $B_2(u)$ par sa valeur.

$$\begin{aligned} a_q^2 (1 + \varepsilon) \left(\frac{q}{q+1} + \varepsilon \right) + \frac{q}{q+1} (1 + \varepsilon) \varepsilon \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \left[\delta_{0,q} - \int u \delta_{1,q} + \frac{1}{2} \int u^2 \delta_{2,q} \right] du \\ - \frac{\varepsilon}{(q+1)} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} \left[-u \delta_{1,q} + \int u^2 \delta_{2,q} \right] du. \end{aligned} \quad (5.20)$$

D. Conclusion.

Nous allons considérer la relation (5.20) pour chaque valeur de q , et dans l'équation obtenue, nous remplaçons $B_2(u)$ par sa valeur de façon à obtenir une relation développée en puissance de ξ jusqu'à l'ordre 3.

a) $q = 0$:

$$\xi (1 + \epsilon) a_0^2 = 0 \tag{5.21}$$

b) $q = 1$:

$$(1 + \epsilon) \left(\epsilon + \frac{1}{2} \right) a_1^2 - \frac{(1 + \epsilon)}{2} \xi^2 \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} u du + \epsilon \xi^2 \frac{(1 + \epsilon)}{2} \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} u du = 0$$

$$(1 + \epsilon) \left(\epsilon + \frac{1}{2} \right) a_1^2 + \frac{(1 + \epsilon)}{2} \xi^2 (\epsilon - 1) \int_0^\infty B_2(u) e^{-u} u du = 0.$$

(5.22)

Pour calculer $\int_0^\infty u B_2(u) e^{-u} du$, nous remplaçons $B_2(u)$ par la relation (5.10) et nous utilisons l'intégrale suivante :

$$I(\mu, \nu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\alpha x} K_\nu(\beta x) dx.$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} (2\beta)^\nu}{(\alpha + \beta)^{\mu+\nu}} \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \Gamma(\mu - \nu) F\left(\mu + \nu, \nu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{1}{2}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)$$

conditions :

$$\text{Re } \mu > |\text{Re } \nu|$$

$$\text{Re } (\alpha - \beta) > 0$$

Nous appliquons cette intégrale avec $\alpha = \beta = 1$; par conséquent

$$F\left(\mu + \nu, \nu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{1}{2}, \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) = 1 \quad \forall \mu, \nu. \quad (14)$$

Les intégrales nécessaires sont :

$$I\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}$$

$$I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}$$

$$I\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{8\pi}}{8}$$

$$I\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}$$

Nous obtenons :

$$\int_0^{\infty} B_1(u) e^{-u} u du = a_0^2 \frac{1}{4(1+\varepsilon)} (\varepsilon - 1) + a_1^2 \frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon)} (1 - \varepsilon)$$

Remplaçons cette intégrale par sa valeur dans l'

équation (5.22) :

$$a_1^2 (1 + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{8} (\varepsilon - 1) \left[(\varepsilon - 1) a_0^2 + \varepsilon (1 - \varepsilon) a_1^2 \right] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(\varepsilon - 1)^2}{8} \varepsilon^2 a_0^2 + \left[(1 + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right) - \frac{\varepsilon^3}{8} (\varepsilon - 1)^2 \right] a_1^2 = 0$$

(5.23)

c) $q = 2$:

La relation (5.20) pour $q = 2$ nous donne :

$$a_2^2 (1 + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) \varepsilon \int_0^{\infty} B_2(u) e^{-u} \frac{1}{2} \varepsilon^2 u^2 du - \varepsilon \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon)}{3} \int_0^{\infty} B_2(u) e^{-u} \varepsilon u^2 du = 0$$

(5.24)

Avant le développement de la relation (5.24), considérons les relations (5.21) et (5.23); leur forme nous amène à ne calculer que le coefficient de a_1^t dans la relation (5.24). En effet, dans (5.21), les coefficients de a_1^t et a_2^t sont nuls et dans (5.23), le coefficient de a_1^t est nul.

Le système des trois équations homogènes s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ a_2^t \end{pmatrix} = 0$$

Pour annuler ce déterminant triangulaire, seul le coefficient de a_1^t nous intéresse dans la relation (5.24) :

$$(\lambda + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{2}{3} \right) a_1^t = 0 \quad (5.25).$$

Nous avons obtenu un système de trois équations homogènes dont les inconnues sont a_0^t , a_1^t et a_2^t .

Ce système admet une solution non triviale si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon(\lambda + \varepsilon) & 0 & 0 \\ \frac{(\varepsilon - 1)^2}{8} \varepsilon^2 & (\lambda + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right) - \frac{\varepsilon^3}{8} (\varepsilon - 1)^2 & 0 \\ x & 0 & (\lambda + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{2}{3} \right) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\varepsilon(\lambda + \varepsilon)^2 \left(\varepsilon + \frac{2}{3} \right) \left[(\lambda + \varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right) - \frac{\varepsilon^3}{8} (\varepsilon - 1)^2 \right] = 0$$

Cette équation admet les solutions :

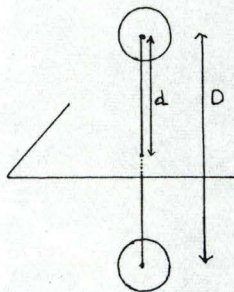
$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0 \\ \varepsilon &= -1 \quad \text{deux fois} \\ \varepsilon &= -\frac{\xi}{3} \\ \varepsilon &= -\frac{1}{2} + \frac{9}{16} \xi^3 \\ \varepsilon &= -1 - \xi^3 \end{aligned}$$

Nous trouvons les modes du plan et du void

découplés ainsi que les modes du void et du plan couplés.

Ces modes sont développés en série par rapport au paramètre $\xi = \frac{R}{|z_0|}$.

Dans l'approche bisphérique, le paramètre de perturbation est $z = e^{-\mu} < 1$



$$D = 2d$$

Rappelons la relation entre μ et D :

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{D}{2R} \quad [5]$$

c'est-à-dire : $z = \frac{R}{D} \left(1 - \frac{R^2}{D^2} + \dots \right)$

Dans le système sphéro-cylindrique, la distance d égale $|z_0|$ et le paramètre de perturbation vaut $\xi = \frac{R}{|z_0|}$.

La relation entre Z et ξ est :

$$Z = \frac{R}{2|Z_0|} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$Z = \frac{\xi}{2}$$

Les résultats obtenus en bisphérique :

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} Z^3 \quad \text{avec} \quad Z = \frac{\xi}{2}$$

$$\epsilon = -1 - 8 Z^3 \quad \text{avec} \quad Z = \frac{\xi}{2}$$

coïncident avec les résultats de la seconde approche :

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{9}{16} \xi^3$$

$$\epsilon = -1 - \xi^3$$

La relation entre les valeurs propres $\epsilon(\omega)$ et les modes propres $\omega(|Z_0|)$ des plasmons de surface est :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{pour le void-plan}$$

et

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{pour la sphère-plan}$$

Pour le void face au plan, le mode dipolaire (1,0) vaut :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)_{(1,0)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3}{16} \xi^3 \right) \quad \text{pour le void}$$

et

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)_{(1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \xi^3 \right) \quad \text{pour le plan}$$

Pour la sphère devant le plan, ce mode (1,0) est :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)_{(1,0)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{3}{8} \xi^3\right) \text{ pour la sphère}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)_{(1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{4} \xi^3\right) \text{ pour le plan}$$

CONCLUSIONS ET EXTENSIONS

1. CONCLUSIONS.

Nous avons calculé les modes de plasmon de surface du void situé dans un demi-plan infini.

Deux systèmes ont été choisis : dans la première partie, les coordonnées bisphériques et dans la seconde partie, les coordonnées sphériques et cylindriques.

Les coordonnées bisphériques s'adaptent parfaitement à la géométrie du problème : la théorie de perturbation pour déterminer les modes nous conduit à l'ordre 3; déjà à ce niveau, les calculs se compliquent très rapidement pour les raisons suivantes :

1. Le calcul des valeurs propres au $n^{\text{ième}}$ ordre exige la connaissance des vecteurs propres à l'ordre $n - 1$; par conséquent, une erreur dans une valeur propre d'un ordre faible fausse tous les ordres suivants.
2. Nous ne pouvons prévoir a priori que les ordres un et deux donnent 0.

3. Pour des ordres supérieurs à 5, le paramètre de perturbation n'est plus le paramètre physique $\frac{R}{D}$.

Dans le système de coordonnées sphéro-cylindriques, nous avons tenté de résoudre le problème en prenant comme variables les moments des fonctions inconnues $B_1(u)$ et $B_2(u)$ c'est-à-dire $\int_0^\infty B_1(u) u^m du$ et $\int_0^\infty B_2(u) u^m du$ (moments d'ordre m). Nous avons abandonné cette approche suite à des difficultés dans les systèmes infinis d'équations.

Une seconde approche de ce problème a été reprise en utilisant des techniques de transformations intégrales (Hankel). Le raccord des potentiels et des dérivés entre l'intérieur du void et le milieu extérieur semi-infini s'exprime par une relation à deux inconnues $B_2(u)$ et a_q^2 et le raccord entre les milieux semi-infinis au-dessus et en dessous du plan par une seconde relation à deux inconnues $B_1(u)$ et a_q^2 . Par la transformée de Hankel, nous éliminons $B_2(u)$; il nous reste un système homogène avec les inconnues a_q^2 .

La technique s'avère fructueuse car l'équation caractéristique donnant les modes se présente sous la forme d'un déterminant triangulaire d'ordre n si nous nous limitons à un développement en $\left(\frac{R}{|z_0|}\right)^n = \xi^n$.

Pour le système sphéro-cylindrique, une question de temps nous a empêchés de traiter le cas général $m \neq 0$ qui se résoud avec la même élégance: en effet, la transformation de Hankel est

valide pour des fonctions de Bessel d'indice quelconque supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

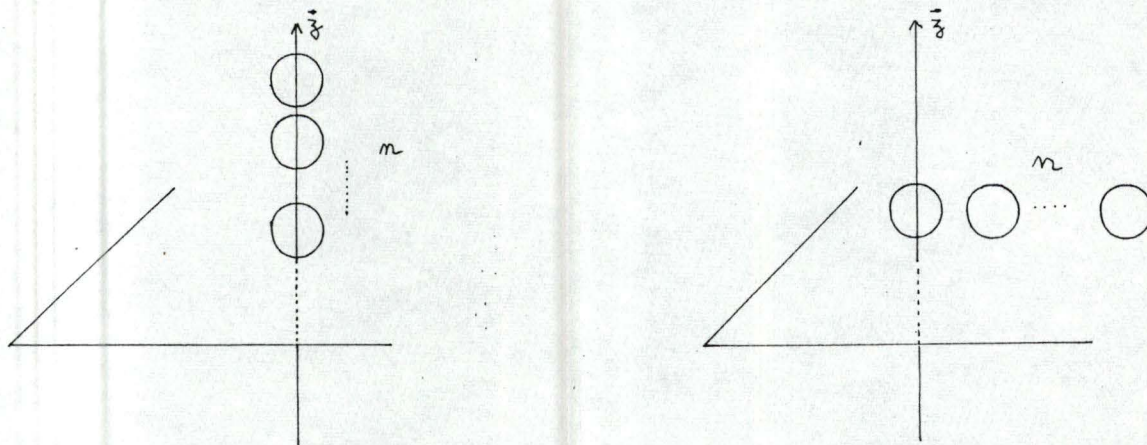
Conformément à ce que nous trouvons dans la littérature (Schmeits : thèse de doctorat - Liège), les premières corrections des modes de la sphère et du plan sont en $\left(\frac{R}{D}\right)^3$ et sont d'origine dipolaire ($m = 1$).

Pour les voids ^[4], l'interaction est en $\left(\frac{R}{D}\right)^6$.

La comparaison des deux approches nous permet de conclure que la seconde (transformée de Hankel) est plus aisée car en coordonnées bisphériques, il n'y a pas d'extension possible c'est-à-dire le void ne peut être remplacé par une chaîne de voids et les calculs se compliquent très rapidement.

2. EXTENSIONS.

La simplicité de la méthode permet de considérer n voids (sphères) devant la surface plane infinie; il suffit de combiner les théorèmes d'addition de Legendre et les transformées de Hankel.



Annexe : RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE
EN COORDONNEES CYLINDRIQUES.
POTENTIEL DANS UNE REGION SEMI INFINIE

1. Résolution de l'équation de Laplace.

Dans un repère cartésien (x, y, z) , l'équation de Laplace à trois dimensions s'écrit :

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

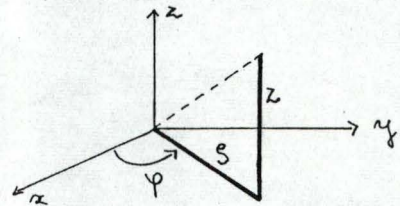
Ecrivons cette équation en coordonnées cylindriques et résolvons-la dans ce système.

Les formules de passage des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont :

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$



En coordonnées cylindriques, l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.1}).$$

Résolvons cette équation par la méthode de la séparation de variables; nous supposons une solution de la forme :

$$V(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (\text{A.2}).$$

où $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$ et $Z(z)$ sont à déterminer.

Après remplacement de (A.2) dans (A.1),
divisons la relation obtenue par $[R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)]$.

Nous obtenons :

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

La séparation des variables donne les trois équations
différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad . \quad k \text{ quelconque.}$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad . \quad m \text{ entier.}$$

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) R = 0 \quad . \quad z = k\rho.$$

Pour déterminer les valeurs de $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$, $Z(z)$
nous devons résoudre chacune de ces trois équations :

La première a comme solution :

$$Z(z) = A(k) e^{kz} + B(k) e^{-kz}$$

La seconde :

$$\Phi(\varphi) = C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi}$$

La troisième est l'équation de Bessel; elle admet
pour solution :

$$R(\rho) = E_m(k) J_m(z) + F_m(k) Y_m(z).$$

si $m = \text{entier}$.

Une solution particulière de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques est :

$$V_{k,m}(S, \varphi, z) = [A(k)e^{kz} + B(k)e^{-kz}] [C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi}] [E_m(k)J_m(kS) + F_m(k)Y_m(kS)]$$

Nous nous intéressons au cas $m = 0$; le potentiel se simplifie :

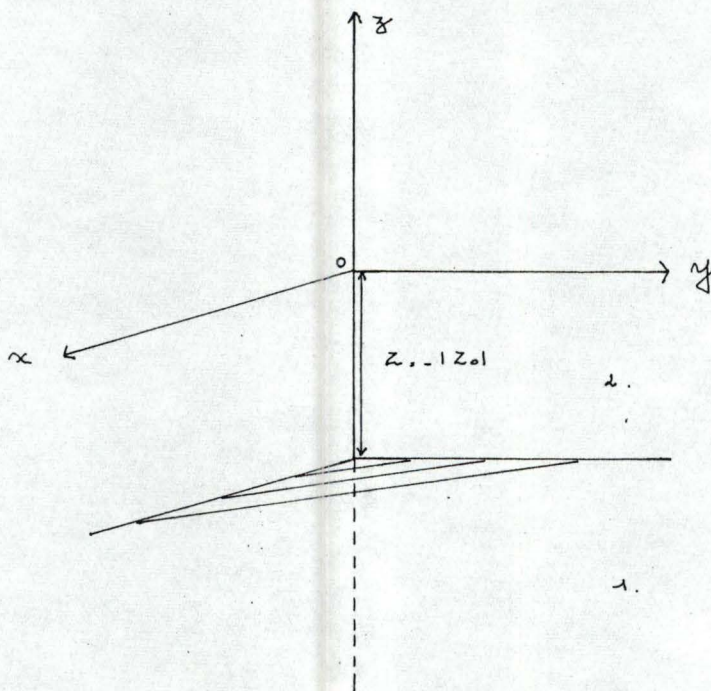
$$V_k(S, \varphi, z) = [A(k)e^{kz} + B(k)e^{-kz}] [E_0(k)J_0(kS) + F_0(k)Y_0(kS)]$$

Par superposition, la solution générale pour $m = 0$ s'écrit sous la forme intégrale :

$$V(S, \varphi, z) = \int_0^{\infty} (A(k)e^{kz} + B(k)e^{-kz}) (E(k)J_0(kS) + F(k)Y_0(kS)) dk$$

2. Potentiel dans une région semi-infinie.

Plaçons un plan à une distance $Z = -|Z_0|$ du centre 0 du système de coordonnées.



La solution doit être finie à l'origine; comme est infinie à l'origine, nous posons $F(k)=0$.

A. Potentiel au-dessus du plan : $z > |z_0|$

La solution doit être finie à l'infini.

$$\Rightarrow Z(z) = B(k) e^{-k(z+|z_0|)} \quad k > 0.$$

$$\Rightarrow V_2(s, \varphi, z) = \int_0^{\infty} B(k) e^{-k(z+|z_0|)} E(k) J_0(k s) dk$$

Posons $B(k)E(k) = B_2(k)$

$$\Rightarrow V_2(s, \varphi, z) = \int_0^{\infty} B_2(k) e^{-k(z+|z_0|)} J_0(k s) dk$$

B. Potentiel en-dessous du plan : $z < -|z_0|$

Pour avoir une solution finie à l'infini:

$$Z(z) = A(k) e^{k(z+|z_0|)} \quad k > 0$$

$$\Rightarrow V_1(s, \varphi, z) = \int_0^{\infty} A(k) e^{k(z+|z_0|)} E(k) J_0(k s) dk$$

Posons $A(k)E(k) = B_1(k)$

$$\Rightarrow V_1(s, \varphi, z) = \int_0^{\infty} B_1(k) e^{k(z+|z_0|)} J_0(k s) dk.$$

Références bibliographiques.

1. F. VOOK.
Effects of radiation on materials.
Physics today. (septembre 1975).
2. A.A. LUCAS.
Phénomènes de surface.
Chaire Francqui belge (1975-1976).
3. A.A. LUCAS, A. RONVEAUX, M. SCHMEITS & F. DELANAYE.
Van der waals energy between voids in dielectrics.
Phys. Rev. B. vol. 12, 12 (décembre 1975).
4. M.P. ADAM & C. SEGHERS.
Equation de Laplace et interaction de Van der waals
entre deux cavités sphériques.
Mémoire en sciences mathématiques. Facultés Notre-Dame
de la Paix Namur.(juin 1976).
5. P.M. MORSE & H. FESHBACH.
Methods of theoretical Physics.
Part 2 (Mc Graw-Hill). (1953).
6. D.K. ROSS.
The dirichlet boundary value problem for two
non-over lapping spheres.
Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 2. p 237 (1970).

7. G. MUKHOPADHYAY & S. LUNDQVIST.
Van der waals interaction between spherical voids.
Solid State communications, Vol. 17, p 949 (1975).
8. P. DENNERY & A. KRZYWICKI.
Mathematics for physicists.
Harper et Row. New-York (1967).
9. L. ROBIN.
Fonctions sphériques de Legendre et fonctions
sphéroïdales.
Gauthier-Villars. Paris. Vol. 1 (1957).
10. ABRAMOWITCH & I.A. STEGUN.
Handbook of mathematical functions.
Dover Publ., Inc. (1965).
11. A. GRAY & G.B. MATHEWS.
A treatise on Bessel functions and their applications
to physics.
Dover Publ., Inc. New-York (1922).
12. I.S. GRADSHTEYN & I.M. RYZHIK.
Table of integrals series and products.
Academic Press. New-York (1965).

13. D. WEXLER.

Equations aux dérivées partielles.

Facultés Notre-Dame de la Paix Namur.

Cours de seconde licence en mathématiques (1976-1977).

14. A. RONVEAUX.

Physique mathématique - Equations différentielles.

Facultés Notre-Dame de la Paix Namur. (1973).

Cours de seconde candidature en mathématiques.

15. A. RONVEAUX, A. MOUSSIAUX & A.A. LUCAS.

Interactions dans une chaîne de sphères ou de cavités alignées.

Plasmons de surface et énergie de Van der waals.

Laboratoire de Physique Mathématique et de Physique du solide.

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix Namur.

Préprint. (septembre 1976).

16. ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI.

Higher transcendental functions. Vol. 2, p 73.

Mc Graw-Hill Book Company. Inc. New-York. (1953).

Table des matières.

INTRODUCTION.

- A. Généralités.
- B. Chapitres 1-2-3 : plan.
- C. Chapitres 4-5 : plan.

CHAPITRE 1. COORDONNEES BISPHERIQUES.
EQUATIONS FONDAMENTALES .

- A. Deux sphères.
 - 1. Problème aux valeurs propres.
 - 2. Formulation matricielle.
 - 3. Exploitation de la relation de dispersion.
- B. La sphère devant le plan.
 - 1. Introduction.
 - 2. Mode non perturbé; mode monopolaire de la sphère.

CHAPITRE 2. THEORIE DE LA PERTURBATION.

- A. Préliminaires.
- B. Modes axiaux : $m = 0$
- C. Modes non axiaux : $m = 1$

CHAPITRE 3. ENERGIE D'INTERACTION.

- A. Préliminaires.
- B. Energie d'interaction entre un void et un plan.
- C. Energie d'interaction entre une sphère et un plan.
- D. Conclusion.

CHAPITRE 4. COORDONNEES SPHERIQUES ET CYLINDRIQUES.
EQUATIONS FONDAMENTALES.

- A. Introduction.
- B. Void et milieu extérieur.
- C. Régions semi-infinies en dessous du plan et au-dessus du plan.

CHAPITRE 5. CALCUL DES MODES.

- A. Introduction.
- B. Régions semi-infinies en dessous et au-dessus du plan.
- C. Void et région semi-infinie au-dessus du plan.
- D. Conclusion.

CONCLUSIONS ET EXTENSIONS.

ANNEXE. RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE
EN COORDONNEES CYLINDRIQUES.
POTENTIEL DANS UNE REGION SEMI-INFINIE.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

TABLE DES MATIERES.