THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Stabilité d'un système intégro-différentiel non linéaire

Hamoir, Françoise; Tassin, Monique

Award date:
1978

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR

ANNEE ACADEMIQUE : 1977 - 1978

STABILITE D'UN SYSTEME
INTEGRO - DIFFERENTIEL NON LINEAIRE

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU GRADE
DE LICENCIE EN SCIENCES MATHEMATIQUES
PAR

PROMOTEUR :
D. WEXLER.

FRANÇOISE HAMOIR
MONIQUE TASSIN

Nous remercions Monsieur D. WEXLER pour l'aide qu'il nous a apportée tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous signalons que ce travail a été fait en commun : la rédaction du chapitre I et de la seconde annexe est due à M. TASSIN et celle des chapitres II et III et de l'annexe I , à F. HAMOIR.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Considérons le système intégro-différentiel

$$
\begin{aligned}
& u'(t) = - \int_0^c \alpha(x)\, T(x\,,t)\, dx && 0 < x < c\ ,\quad t > 0 \\
& T_t(x\,,t) = [\, b(x)\, T_x(x\,,t)\,]_x - q(x)\, T(x\,,t) + \eta(x)\, \sigma(u(t)) &&
\end{aligned}
\qquad (0.1)
$$

avec les conditions initiales

$$
\begin{aligned}
& u(0) = u_o \\
& T(x\,,0) = f(x)
\end{aligned}
\qquad 0 < x < c \qquad (0.2)
$$

et les conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
& d_1\, T(0\,,t) + d_2\, T_x(0\,,t) = 0 \\
& d_3\, T(c\,,t) + d_4\, T_x(c\,,t) = 0
\end{aligned}
\qquad t > 0 \quad . \qquad (0.3)
$$

Dans (0.1) , (0.2) et (0.3) , α , η , f , b et q sont des fonctions réelles définies sur $[\,0\,,c\,]$, tandis que σ est une fonction non-linéaire définie sur $\mathbb{R}$.

c , u_o , d_i , $i = 1\,,2\,,3\,,4$, sont des constantes réelles, c étant strictement positive, u_o quelconque et

$$
\begin{cases}
|d_1| + |d_2| > 0 \\
|d_3| + |d_4| > 0
\end{cases}
\quad .
$$

Le système (0.1) représente une description mathématique d'un modèle dynamique non-linéaire apparaissant dans les réacteurs nucléaires unidimensionnels en milieu continu. Un tel réacteur est alors considéré comme une barre finie de longueur c .

Les différents paramètres intervenant dans ce problème ont alors la signification physique suivante [5] :

t	temps;
x	position dans le réacteur;
$u(t)$	logarithme de la puissance totale du réacteur ($u(t) \equiv 0$ à l'équilibre);
$T(x, t)$	écart de la température par rapport à la température d'équilibre ($T(x, t) \equiv 0$ à l'équilibre);
$-\alpha(x) \leqslant 0$	quotient du coefficient de réactivité défini par rapport à la température sur le temps de vie moyen des neutrons;
$\eta(x) \geqslant 0$	élément de la puissance générée en x ;
$b(x) > 0$	coefficient de conductivité thermique en x ;
$q(x) \geqslant 0$	coefficient de radiation thermique en x ;
$\sigma(\cdot)$ avec $\sigma(0) = 0$	relation non linéaire générale entre le pouvoir de production et la vitesse à laquelle la chaleur est générée à l'intérieur du réacteur.

Remarquons que les conditions aux limites (0.3) reflètent certaines situations physiques importantes :

le cas $d_2 = d_4 = 0$ correspond au problème physique dans lequel les extrémités de la barre sont maintenues à température constante;

le cas $d_1 = d_3 = 0$ correspond au problème physique dans lequel les extrémités de la barre sont isolées (flux nul).

Nous nous intéresserons au comportement asymptotique de la solution pour $t \to \infty$, notamment à la stabilité.

La première approche mathématique plus éläborée de ce problème a été effectuée par J.J. LEVIN et J.A. NOHEL [6].

Le cas linéaire, $\sigma(u) = u$, a été traité en particulier par BRONIKOWSKI [2].

De nombreuses recherches ont ensuite été entreprises dans le cas où $b(x) \equiv 1$ et $q(x) \equiv 0$.

Ces conditions permettent, en effet, de trouver, dans le cas linéaire $\sigma(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$, le comportement asymptotique précis de la solution :

$$u(t) = O(t^{-3/2}) \quad \text{et} \quad T(x, t) = O(t^{-1/2}) \quad \text{uniformément en } x ,$$

pour $t \to \infty$ [6].

Dans le cas où $\sigma(u) = -1 + e^u$, ces mêmes conditions sur b et q permettent d'étudier un phénomène physique important : l'effet des neutrons retardés dont le modèle mathématique est plus élaboré que (0.1), (0.2), (0.3), voir [7].

Ce mémoire traite le cas non-linéaire (0.1) , (0.2) , (0.3) à partir d'un article de BRONIKOWSKI, HALL et NOHEL [1] .

La méthode utilisée pour étudier ce problème fait intervenir de façon essentielle l'opérateur de Sturm-Liouville L associé à [0.1b] :

$$L(y) = - \left[b(x)\ y' \right]' + q(x)\ y \qquad 0 < x < c$$

défini sur les fonctions y , suffisamment régulières sur $[0 , c]$, qui vérifient les conditions aux limites

$$\begin{aligned} &d_1\ y(0) + d_2\ y'(0) = 0 \\ &d_3\ y(c) + d_4\ y'(c) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Le problème de Sturm-Liouville qui consiste à trouver les valeurs propres λ de L (i.e., les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe une fonction $y \not\equiv 0$ telle que $L\ y = \lambda\ y$ (A.1)) sera exprimé plus précisément dans l'Annexe 1 .

Distinguons alors deux situations :

Dans le premier chapitre, nous traiterons le cas où la plus petite valeur propre du problème de Sturm-Liouville (A.1)-(A.2) est strictement positive et, dans le deuxième chapitre, le cas où elle est nulle.

La démarche suivie est cependant la même dans les deux chapitres, les différences étant plutôt d'ordre technique.

Nous énonçons d'abord un théorème concernant l'existence, l'unicité, le caractère borné et le comportement asymptotique de la solution $(u(t) , T(x , t))$ du problème (0.1) , (0.2) , (0.3) , quand $t \to \infty$.

Pour le démontrer, nous utilisons d'abord la méthode de GALERKIN qui consiste à approcher le système intégro-différentiel (0.1) par un système fini d'équations différentielles ordinaires.

Nous étudions alors le comportement de la solution de ce système dans les Lemmes 1 , 2 et 4 en utilisant notamment des fonctions de Liapounov.

Nous associons ensuite, à l'équation (0.1a) , une équation de Volterra que nous analysons dans les Lemmes 3 et 5 .

La démonstration des propriétés du problème (0.1), (0.2), (0.3) se déduira alors de ces lemmes et des résultats obtenus dans l'Annexe 2 sur la solution de l'équation de la chaleur.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous envisagerons le problème de la stabilité au sens de Liapounov, en adaptant à notre cas les résultats de [11].

Nous savons, en effet, que dans le cas du réacteur nucléaire, la position d'équilibre est $u \equiv 0$ et $T \equiv 0$; il est donc intéressant d'étudier la stabilité au sens de Liapounov de cette position d'équilibre. Nous le ferons en norme L^2 et terminerons en précisant le comportement asymptotique de la solution quand $t \to \infty$ en norme L^∞ , toujours d'après [11] .

CHAPITRE I :

Comportement Asymptotique de la Solution Dans le Cas où la Première Valeur Propre du Problème de Sturm - Liouville est Strictement Positive

Nous supposerons, dans ce chapitre que la plus petite valeur propre λ_o du problème de Sturm-Liouville (A.1) , (A.2) associé à notre système est strictement positive, c'est-à-dire que la condition suivante est réalisée :

$$q \not\equiv 0 \quad \text{sur} \quad [0, c] \qquad \text{ou} \qquad |d_1| + |d_3| > 0 \tag{1.1}$$

(voir Annexe 1).

Pour obtenir des résultats concernant le problème (0.1) , (0.2) , (0.3) , faisons les hypothèses suivantes :

- α , f , η , $(b\, f')'$, $(b\, \eta')' \in L^2\,[0, c]$,

  $f \in C\,[0, c]$, (1.2)

  f et η satisfont les conditions aux limites (A.2) ;

- $\alpha_n\, \eta_n \geqslant 0$ $\qquad n = 0, 1, \ldots$, (1.3)

  où α_n , η_n sont les coefficients de α et η définis comme en (A.8) ;

- Il existe des constantes $\hat{c} > 0$ et $\tilde{c}$ telles que

  $$\hat{c} \leqslant \alpha_n / \eta_n \leqslant \tilde{c} \tag{1.4}$$

  pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n\, \eta_n > 0$;

- $\alpha_n = 0$ ssi $\eta_n = 0$ $\qquad n = 0, 1, \ldots$. (1.5)

Il faut remarquer que les hypothèses (1.3) , (1.4) et (1.5) sont satisfaites dans le cas physiquement significatif où $\alpha(x) = k\, \eta(x)$, k étant une constante strictement positive.

Imposons aussi les conditions suivantes sur la fonction σ :

- $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$,

  $x\,\sigma(x) > 0$ quand $x \neq 0$, (1.6)

  $S(x) = \int_0^x \sigma(u)\,du \to \infty$ quand $|x| \to \infty$;

- $\sigma'(0) > 0$; (1.7)

- Il existe une constante Γ telle que

  $$\sigma^2(x) \leqslant \Gamma\, S(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (1.8)$$

Les hypothèses générales (1.6) , (1.7) et (1.8) sont vérifiées dans le cas linéaire où $\sigma(x) = \lambda\, x$, avec λ strictement positif. Mais, dans le cas physiquement significatif où $\sigma(x) = -1 + e^x$, la condition (1.8) n'est pas satisfaite.

Cependant, à la fin de ce chapitre, nous verrons que cette condition peut être remplacée par une autre :

Il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que

$$|\sigma(x)| \leqslant \Gamma\ (1 + S(x)) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (1.8^*)$$

et (1.8^*) est bien satisfaite pour $\sigma(x) = -1 + e^x$.

En vertu du théorème de l'Annexe 1 et des hypothèses (1.2) , on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty \qquad , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| < \infty \quad . \tag{1.9}$$

Enonçons maintenant un théorème qui nous assure l'existence, l'unicité, le caractère borné et la décroissance exponentielle quand $t \to \infty$, des solutions du problème (0.1) , (0.2) , (0,3) .

Théorème 1.

Supposons que :

- zéro n'est pas une valeur propre du problème de Sturm-Liouville (A.1) , (A.2) ;
- les hypothèses (1.2) , (1.3) , (1.4) et (1.6) sont satisfaites;
- on a soit (1.5) pour tout n , soit (1.8);

alors,

pour chaque donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et f vérifiant (1.2) , le problème (0.1) admet une et une seule solution $(u(t)\ , T(x\ ,t))$ définie pour tout $(x\ ,t) \in [0\ ,c] \times [0\ ,+\infty[$.

En outre, pour chaque solution $(u(t)\ , T(x\ ,t))$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\left.\begin{aligned} &|u(t)| \leqslant K \\ &\sup_{x\in[0,c]} |T(x\,,t)| \leqslant K \end{aligned}\right\} \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{1.10}$$

Si, de plus, on a la condition (1.7) et l'inégalité stricte dans (1.3) pour au moins un n , alors il existe des constantes $K > 0$ et $\omega > 0$, dépendant des conditions initiales u_o , f , telles que

$$\left.\begin{aligned} &|u^{(i)}(t)| \leqslant K\, e^{-\omega t} \qquad i = 0\,,1\,,2 \\ &\sup_{x\in[0,c]} |T(x\,,t)| \leqslant K\, e^{-\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{1.11}$$

Notons que, dans le cas linéaire où $\sigma(x) = \lambda\, x$, avec $\lambda > 0$, BRONIKOWSKI, dans [2] , a obtenu des conclusions similaires à celle du Théorème 1 , en prenant des hypothèses plus générales que (1.2) et en supposant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| < \infty \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \quad .$$

Remarquons également que, d'après LEVIN et NOHEL, [7] , si on remplace les conditions aux limites (0.3) par les conditions aux limites plus générales

$$\left\{\begin{aligned} &m_{11}\, T(0\,,t) + m_{12}\, T_x(0\,,t) + n_{11}\, T(c\,,t) + n_{12}\, T_x(c\,,t) = 0 \\ &m_{21}\, T(0\,,t) + m_{22}\, T_x(0\,,t) + n_{21}\, T(c\,,t) + n_{22}\, T_x(c\,,t) = 0 \end{aligned}\right. \tag{0.$\widetilde{3}$}$$

où les constantes m_{ij} et n_{ij} sont telles que

$$\text{dét}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} ,$$

excepté le fait que les valeurs propres du problème (A.1) , (A.9) peuvent être doubles, les résultats du Théorème 1 sont encore valables.

§ 1. SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRE ASSOCIE AU PROBLEME

Appliquons la méthode de GALERKIN au problème (0.1) , (0.2) , (0.3) de la façon suivante :

Ecrivons la solution $T(x, t)$ sous la forme

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x)$$

avec $T_n(0) = f_n$.

Les $y_n(x)$ sont les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (A.1) , (A.2) et α_n , η_n et f_n les coefficients de Fourier de α , η , et f par rapport au système orthonormé des $y_n(x)$.

Supposons que la série ci-dessus satisfait les hypothèses des théorèmes d'intégration et de dérivation des séries [12] .

En fait, nous vérifierons ces conditions de convergence lorsque nous connaîtrons l'expression exacte des fonctions $T_n(t)$.

Montrons, à l'aide de ces théorèmes, que $T(x, t)$ satisfait bien les conditions auxiliaires :

$$T(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\, y_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x)$$

$$= f(x) \qquad\qquad \text{par} \quad (A.8) \qquad ,$$

c'est-à-dire que la condition initiale (0.2b) est vérifiée :

$$d_1 \; T(0\,,t) + d_2 \; T_x(0\,,t) = d_1 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\; y_n(0)$$

$$+ \; d_2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\; y_n'(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\; \{d_1 \; y_n(0) + d_2 \; y_n'(0)\}$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{par} \quad (A.2) \quad .$$

De la même façon,

$$d_3 \; T(c\,,t) + d_4 \; T_x(c\,,t) = 0 \qquad .$$

Les conditions aux limites (0.3) sont donc satisfaites.

Substituons la nouvelle expression de $T(x\,,t)$ dans la première équation (0.1a) :

$$u'(t) = - \int_0^c \alpha(x) \; \{ \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\; y_n(x)\} \; dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \int_0^c \alpha(x)\; y_n(x)\; dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \; T_n(t) \qquad\qquad \text{par} \quad (A.8) \quad .$$

L'équation (0.1b) devient

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x)\Big)_t = \Big(b(x) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, y_n'(x)\Big)_x - q(x) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x)$$

$$+ \eta(x)\, \sigma(u(t))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, \{(b(x)\, y_n'(x))_x - q(x)\, y_n(x)\}$$

$$+ \eta(x)\, \sigma(u(t))$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, T_n(t)\, y_n(x) + \eta(x)\, \sigma(u(t)) \qquad \text{par (A.1)} .$$

Multiplions chaque membre de cette égalité par $y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, et intégrons entre 0 et c :

$$\int_0^c \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx$$

$$= -\int_0^c \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n T_n(t)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx + \int_0^c \eta(x)\, \sigma(u(t))\, y_m(x)\, dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) \int_0^c y_n(x)\, y_m(x)\, dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, T_n(t) \int_0^c y_n(x)\, y_m(x)\, dx + \sigma(u(t)) \int_0^c \eta(x)\, y_m(x)\, dx \quad .$$

Cependant, les fonctions propres $y_m(x)$ sont orthonormées, c'est-à-dire que :

$$\int_0^c y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n\,, \\ 0 & \text{si } m \neq n\,, \end{cases}$$

d'où

$$T'_m(t) = -\lambda_m\, T_m(t) + \eta_m\, \sigma(u(t)) \qquad m = 0\,,1\,,\ldots\,.$$

En réunissant ces résultats, nous pouvons donc remplacer le système intégro-différentiel (0.1) par un système infini d'équatinns différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} u'(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, T_n(t) \\ T'_n(t) = -\lambda_n\, T_n(t) + \eta_n\, \sigma(u(t)) \qquad n = 0\,,1\,,\ldots \end{cases} \tag{1.12}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0) = u_o \\ T_n(0) = f_n \qquad n = 0\,,1\,,\ldots \end{cases}$$

Tronquons ce système infini pour obtenir un système fini d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} x'(t) = -\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\, z_n(t) \\ z'_n(t) = -\lambda_n\, z_n(t) + \eta_n\, \sigma(x(t)) \qquad n = 0\,,1\,,\ldots\,,N \end{cases} \tag{1.13}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = u_o \\ z_n(0) = f_n \qquad n = 0, 1, \dots, N \end{cases}.$$

Etudions maintenant un lemme qui, sous certaines hypothèses, nous garantit l'existence, l'unicité, le caractère borné et la décroissance exponentielle des solutions de (1.13) .

Nous verrons que les bornes trouvées sont indépendantes du rang de troncature et dépendent seulement des données initiales.

Lemme 1.

Supposons que :

- $\sigma(x)$ vérifie (1.6) ;
- α_n et η_n satisfont les hypothèses (1.3) , (1.4) , (1.5) ;

alors,

pour toute condition initiale $(u_o, f_o, f_1, \dots, f_N)$, il existe une solution unique $(x(t), z_o(t), \dots, z_N(t))$ du système (1.13) . Cette solution est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est bornée.

En outre, pour chaque donnée initiale f vérifiant (1.2) , il existe une constante $\Omega > 0$, indépendante du rang de troncature N et telle que

$$\left.\begin{array}{ll} |x(t)| \leqslant \Omega & \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega & n = 0, 1, \dots, N \end{array}\right. \qquad t \geqslant 0 \quad . \qquad (1.14)$$

Si, de plus, on a :

- $A = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$;

- $\sigma(x)$ satisfait (1.8) ;

- l'inégalité stricte dans (1.3) est vérifiée pour au moins un n ;

alors,

il existe des constantes strictement positives Ω_o et ω, indépendantes de N, telles que

$$\left.\begin{array}{ll} |x(t)| \leqslant \Omega_o\, e^{-\omega t} & \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega_o\, e^{-\omega t} & n = 0, 1, \dots, N \end{array}\right. \qquad t \geqslant 0 \quad . \qquad (1.15)$$

Démonstration.

Définissons la fonction de Liapounov

$$W(x, z_o, \dots, z_N) = S(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} c_n\, z_n^2$$

où

$$c_n = \begin{cases} \alpha_n / \eta_n & \text{si } \alpha_n \eta_n > 0 \quad , \\ 1 & \text{si } \alpha_n \eta_n = 0 \quad , \end{cases} \tag{1.16}$$

et rappelons que

$$S(x) = \int_0^x \sigma(\tau)\, d\tau \quad .$$

Par hypothèse, on a, pour tout $x \neq 0$, $x\,\sigma(x) > 0$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \sigma(x) > 0 & \text{quand } x > 0 \quad , \\ \sigma(x) < 0 & \text{quand } x < 0 \quad . \end{cases}$$

Or, σ est continue sur $\mathbb{R}$ de sorte que $\sigma(0) = 0$.

Par conséquent, $S(x)$ est une fonction définie positive ainsi que $W(x, z_o, \ldots, z_N)$.

Calculons maintenant la dérivée de W par rapport au système (1.13) :

$$W'(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t)$$

$$= x'(t)\, \sigma(x(t)) + \sum_{n=0}^{N} c_n\, z_n(t)\, z_n'(t)$$

$$= -\sigma(x(t)) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n\, z_n(t) + \sum_{n=0}^{N} c_n\, z_n(t)\, [-\lambda_n\, z_n(t) + \eta_n\, \sigma(x(t))]$$

$$= -\sigma(x(t)) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z_n(t) - \sum_{n=0}^{N} c_n \lambda_n z_n^2(t) + \sigma(x(t)) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n z_n(t)$$

$$= - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n c_n z_n^2(t) \qquad .$$

$W'(x , z_o , \dots , z_N)$ est donc définie négative puisque les constantes λ_n et c_n sont strictement positives.

Par conséquent, nous avons bien défini une fonction de Liapounov et nous pouvons alors affirmer que l'origine de notre problème est stable. Or, la stabilité de l'origine entraîne l'existence d'une solution indéfiniment prolongeable vers la droite [10, II, p. 6] .

Par le problème global d'existence et d'unicité, nous pouvons conclure que cette solution est unique et, par la définition de la stabilité, nous pouvons aussi affirmer que la solution trouvée est bornée.

Nous avons donc obtenu la première partie des résultats attendus.

Cependant, la borne trouvée dépend de la valeur de la fonction de Liapounov en $t = 0$ et donc de N .

Cherchons alors une borne qui, elle, ne dépendra plus du rang de troncature.

Sans perte de généralité, supposons que les constantes $\hat{c}$ et $\tilde{c}$ de (1.4) sont telles que

$$\hat{c} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{c} \geqslant 1 \quad .$$

De cette façon, le point 1 sera dans l'intervalle $[\hat{c}, \tilde{c}]$ comme les constantes c_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \hat{c} \leqslant c_n \leqslant \tilde{c} \quad . \tag{1.17}$$

Posons maintenant

$$W_o = \max\{S(u_o), S(-u_o)\} + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \quad .$$

Cette série est convergente car $f \in L^2[0, c]$ et donc, par l'égalité de Parseval,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty \quad .$$

Cette nouvelle constante W_o est indépendante de N et telle que

$$0 \leqslant W(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t)) \leqslant W_o \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{1.18}$$

En effet, puisque $W'(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t))$ est définie négative, la fonction $W(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t))$ est décroissante et donc

$$0 \leqslant W(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t)) \leqslant W(u_o, f_o, \ldots, f_N) \qquad t \geqslant 0$$

$$= S(u_o) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} c_n f_n^2$$

$$\leqslant S(u_o) + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{N} f_n^2$$

$$\leqslant S(u_o) + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2$$

$$\leqslant W_o \qquad .$$

Définissons ensuite la constante

$$\Omega = \max \{ \sqrt{2\, W_o/\hat{c}} \ ; \ \sup \{|x| \ ; \ S(x) \leqslant W_o\}\} \qquad . \qquad (1.19)$$

Remarquons que Ω est fini car, par hypothèse, $\lim_{|x| \to \infty} S(x) = \infty$.

$W(x(t)\,, z_o(t)\,, \ldots, z_N(t))$ est une somme de termes positifs, d'où

$$\begin{cases} S(x) \leqslant W(x(t)\,, z_o(t)\,, \ldots, z_N(t)) \leqslant W_o \\ \frac{1}{2}\, c_n\, z_n^2 \leqslant W(x(t)\,, z_o(t)\,, \ldots, z_N(t)) \leqslant W_o \qquad n = 0, 1, \ldots, N \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} |x(t)| \leqslant \sup \{|x| \ ; \ S(x) \leqslant W_o\} \\ \frac{1}{2}\, \hat{c}\, z_n^2 \leqslant W_o \qquad n = 0, 1, \ldots, N \quad . \end{cases}$$

Nous avons donc trouvé une constante Ω indépendante de N et telle que

$$\left.\begin{array}{ll} |x(t)| \leqslant \Omega & \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega & n = 0, 1, \ldots, N \end{array}\right\} \quad t \geqslant 0 \qquad .$$

Démontrons maintenant la dernière assertion du Lemme 1.

Nous pouvons considérer, sans perte de généralité, que $\eta_o > 0$.

En effet, supposons que

$$\alpha_n \eta_n = 0 \qquad n = 0, 1, \dots, k$$

et

$$\eta_{k+1} \neq 0 \qquad (k+1 \leqslant N)$$

(un tel indice $(k+1)$ existe toujours par hypothèse).

En vertu de (1.5) , le système (1.13) s'écrit alors

$$\begin{cases} x'(t) = - \sum_{n=k+1}^{N} \alpha_n z_n(t) \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) & n = k+1, \dots, N \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) & n = 0, 1, \dots, k \end{cases} .$$

Les équations en $z_o, \dots, z_k$ sont indépendantes du reste du système et admettent comme solution :

$$z_n(t) = f_n e^{-\lambda_n t} \qquad n = 0, 1, \dots, k ,$$

d'où

$$|z_n(t)| \leqslant K e^{-\lambda_o t} \qquad n = 0, 1, \dots, k$$

quand $K = \max \{f_o, \dots, f_k\}$.

Le problème se ramène alors à montrer que les solutions $x(t)$, $z_{k+1}(t)$, ... , $z_N(t)$ décroissent exponentiellement, c'est-à-dire que, maintenant, le premier indice est $(k+1)$ au lieu de 0 .

Cependant, cela ne change rien au problème et on peut donc supposer que $\eta_o \neq 0$.

Si η_o était strictement négatif, alors α_o le serait aussi par (1.3) et en remplaçant z_o par $(-z_o)$ dans (1.13) , on aurait un système équivalent avec $(-\alpha_o)$ au lieu de α_o et $(-\eta_o)$ à la place de η_o .

Par conséquent, nous pouvons en toute généralité, considérer $\eta_o > 0$.

Définissons une nouvelle fonction :

$$V(x, z_o, \dots, z_N) = W(x, z_o, \dots, z_N) - \beta\, \sigma(x)\, z_o$$

où β est une constante strictement positive, que nous choisirons avec plus de précision dans la suite.

En utilisant la condition (1.7) et la règle de l'Hospital, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma^2(x)}{S(x)} = 2\, \sigma'(0) > 0$$

et, puisque σ' est continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée sur tout compact, c'est-à-dire qu'il existe des constantes ϕ et Φ strictement positives, dépendant de Ω , telles que

$$\phi \leqslant \sigma^2(x) / S(x) \leqslant \Phi \qquad \text{quand } |x| \leqslant \Omega \quad . \tag{1.20}$$

Supposons que

$$\left.\begin{aligned}&|x(t)| \leqslant \Omega \\ &|z_n(t)| \leqslant \Omega \qquad n=0\,,1\,,\ldots\,,N\end{aligned}\right. \qquad t \geqslant 0$$

et utilisons l'inégalité de droite dans (1.20) :

$$S(x)\ (1-\frac{\beta\ \Phi}{2}) + \frac{c_o\ z_o^2}{2}\ (1-\frac{\beta}{c_o}) + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n\ z_n^2}{2}$$

$$= S(x) + \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n\ z_n^2}{2} - \frac{\beta}{2}\ \Phi\ S(x) - \frac{\beta}{2}\ z_o^2$$

$$\leqslant W(x\,,z_o\,,\ldots\,,z_N) - \frac{\beta}{2}\ \sigma^2(x) - \frac{\beta}{2}\ z_o^2$$

$$\leqslant W(x\,,z_o\,,\ldots\,,z_N) - \beta\ \sigma(x)\ z_o \qquad \text{car} \quad \beta > 0$$

$$= V(x\,,z_o\,,\ldots\,,z_N) \quad .$$

Toujours en nous servant de (1.20) , essayons maintenant de majorer $V(x\,,z_o\,,\ldots\,,z_N)$:

$$V(x\,,z_o\,,\ldots\,,z_N) = S(x) + \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n\ z_n^2}{2} - \beta\ \sigma(x)\ z_o$$

$$\leqslant S(x) + \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n\ z_n^2}{2} + \frac{\beta}{2}\ (\sigma^2(x) + z_o^2)$$

$$\leqslant S(x) + \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n\ z_n^2}{2} + \frac{\beta}{2}\ \Phi\ S(x) + \frac{\beta}{2}\ z_o^2$$

$$= S(x) \left(1 + \frac{\beta \Phi}{2}\right) + \frac{c_o z_o^2}{2} \left(1 + \frac{\beta}{c_o}\right) + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n z_n^2}{2} \quad .$$

Choisissons $\beta < \min (1 / \Phi \ , \ c_o / 2)$ de telle sorte que

$$1 - \beta \Phi / 2 > 1/2 \qquad 1 - \beta / c_o > 1/2$$

$$1 + \beta \Phi / 2 < 3/2 \qquad 1 + \beta / c_o < 3/2 \quad .$$

Donc, pour

$$\left.\begin{array}{ll} |x(t)| \leqslant \Omega & \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega & n = 0, 1, \ldots, N \end{array}\right\} \quad t \geqslant 0 \quad ,$$

on a finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} W(x, z_o, \ldots, z_N) &\leqslant V(x, z_o, \ldots, z_N) \\ &\leqslant \frac{3}{2} W(x, z_o, \ldots, z_N) \quad . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Nous pouvons alors affirmer que $V(x, z_o, \ldots, z_N)$ est une fonction définie positive pour

$$|x(t)| \leqslant \Omega$$

$$|z_n(t)| \leqslant \Omega \qquad n = 0, 1, \ldots, N \quad .$$

Calculons sa dérivée par rapport au système (1.13) :

$$V'(x, z_o, \ldots, z_N) = W'(x, z_o, \ldots, z_N) - \beta\,\sigma(x)\,z'_o - \beta\,\sigma'(x)\,x'\,z_o$$

$$= -\sum_{n=0}^{N} \lambda_n\,c_n\,z_n^2 - \beta\,\sigma(x)\,[-\lambda_o\,z_o + \eta_o\,\sigma(x)]$$

$$+ \beta\,z_o\,\sigma'(x) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n\,z_n$$

$$= -\sum_{n=0}^{N} \lambda_n\,c_n\,z_n^2 + \beta\,\lambda_o\,z_o\,\sigma(x) - \beta\,\eta_o\,\sigma^2(x)$$

$$+ \beta\,\sigma'(x) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n\,z_o\,z_n \quad .$$

Majorons $V'(x, z_o, \ldots, z_N)$ en utilisant l'inégalité

$$|u\,v| \leqslant \frac{1}{2}\,\gamma\,(u^2 + \frac{v^2}{\gamma^2}) \qquad \gamma > 0 \quad .$$

σ' étant continue par hypothèse, il existe une constante $D > 0$, dépendant de Ω, telle que

$$|\sigma'(x)| \leqslant D \qquad \text{pour} \quad |x| \leqslant \Omega \quad .$$

Par conséquent,

$$V'(x, z_o, \ldots, z_n) \leqslant -\sum_{n=0}^{N} \lambda_n\,c_n\,z_n^2 + \beta\,\lambda_o\,\sigma(x)\,z_o - \beta\,\eta_o\,\sigma^2(x)$$

$$+ \beta\,D \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n|\,|z_o\,z_n|$$

$$\leqslant - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \, c_n \, z_n^2 + \frac{\beta \, \eta_o}{2} \left(\sigma^2(x) + \frac{\lambda_o^2 \, z_o^2}{\eta_o^2} \right)$$

$$- \beta \, \eta_o \, \sigma^2(x) + \frac{\beta \, D}{2} \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n| \, (z_n^2 + z_o^2)$$

$$\leqslant - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \, c_n \, z_n^2 + \frac{\beta \, \eta_o}{2} \left(\frac{\lambda_o^2 \, z_o^2}{\eta_o^2} - \sigma^2(x) \right)$$

$$+ \frac{\beta \, D \, A}{2} \sum_{n=0}^{N} (z_n^2 + z_o^2)$$

$$= - \sum_{n=1}^{N} z_n^2 \left(\lambda_n \, c_n - \frac{\beta \, D \, A}{2} \right) - z_o^2 \left(\lambda_o \, c_o - \beta \, \frac{\lambda_o^2 + \eta_o \, D \, A}{2 \, \eta_o} \right)$$

$$- \frac{\beta \, \eta_o}{2} \, \sigma^2(x) \quad .$$

Notons par B_n les coefficients de $(-z_n^2)$ dans cette expression, c'est-à-dire

$$B_n = \lambda_n \, c_n - \frac{\beta \, D \, A}{2} \qquad n = 1 , 2 , \ldots , N$$

$$B_o = \lambda_o \, c_o - \beta \, \frac{\lambda_o^2 + \eta_o \, D \, A}{2 \, \eta_o}$$

et posons

$$\hat{B} = \lambda_o \, \hat{c} - \frac{\beta \, A \, D}{2} \quad ,$$

de sorte que

$$B_n \geqslant \hat{B} \qquad n = 1 , 2 , \ldots , N \quad .$$

Nous pouvons alors continuer à majorer $V'(x , z_o , \ldots , z_N)$:

$$V'(x , z_o , \ldots , z_N) \leqslant - \sum_{n=1}^{N} B_n z_n^2 - B_o z_o^2 - \frac{\beta \eta_o}{2} \sigma^2(x)$$

$$\leqslant -\hat{B} \sum_{n=1}^{N} z_n^2 - B_o z_o^2 - \frac{\beta \eta_o}{2} \sigma^2(x) \quad .$$

Prenons

$$\beta < \min \left(\frac{1}{\Phi} , \frac{c_o}{2} , \frac{2 \eta_o c_o \lambda_o}{\lambda_o^2 + \eta_o A D} , \frac{2 \hat{c} \lambda_o}{A D} \right) \quad .$$

Ce nouveau choix de β est compatible avec le précédent et rend les constantes B_o et $\hat{B}$ strictement positives.

On peut donc trouver un nombre strictement positif

$$\omega_o < \min (\beta \eta_o / 2 , B_o , \hat{B})$$

et on obtient

$$V'(x , z_o , \ldots , z_N) \leqslant -\omega_o (\sum_{n=0}^{N} z_n^2 + \sigma^2(x))$$

$$\leqslant -\omega_o (\sum_{n=0}^{N} z_n^2 + \phi S(x)) \qquad \text{par } (1.20) \; .$$

Finalement, posons

$$\omega = \min\left(2\,\omega_o / 3\,\tilde{c}\ ,\ \omega_o\,\phi / 3\right)$$

et remarquons que ω est bien une constante définie indépendamment de N et des conditions initiales. D'où,

$$V'(x, z_o, \dots, z_N) \leqslant -3\,\omega\, S(x) - \frac{3}{2}\,\tilde{c}\,\omega \sum_{n=0}^{N} z_n^2$$

$$\leqslant -3\,\omega\, S(x) - 3\,\omega \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n\, z_n^2}{2} \qquad \text{par } (1.17)$$

$$= -3\,\omega\, W(x, z_o, \dots, z_N)$$

$$\leqslant -2\,\omega\, V(x, z_o, \dots, z_N) \qquad \text{par } (1.21)\ .$$

Puisque $V(x, z_o, \dots, z_N)$ est définie positive, on a

$$\frac{V'(x, z_o, \dots, z_n)}{V(x, z_o, \dots, z_n)} \leqslant -2\,\omega \qquad .$$

Intégrons cette inégalité entre 0 et t :

$$\ln \frac{V(x(t), z_o(t), \dots, z_N(t))}{V(u_o, f_o, \dots, f_N)} \leqslant -2\,\omega\, t$$

ou encore

$$V(x(t), z_o(t), \dots, z_N(t)) \leqslant V(u_o, f_o, \dots, f_N)\, e^{-2\omega t} \qquad t \geqslant 0\ . \tag{1.22}$$

Par la condition (1.7) et la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x^2} = \frac{\sigma'(0)}{2} > 0 \qquad .$$

Il existe donc une constante $q > 0$ telle que

$$q \leqslant S(x) / x^2 \qquad\qquad \text{pour} \quad |x| \leqslant \Omega \qquad .$$

Utilisons l'inégalité (1.21) pour transformer (1.22) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} W(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t)) &\leqslant V(x(t), z_o(t), \ldots, z_N(t)) \qquad\qquad t \geqslant 0 \\
&\leqslant V(u_o, f_o, \ldots, f_N)\, e^{-2\omega t} \\
&\leqslant \frac{3}{2} W(u_o, f_o, \ldots, f_N)\, e^{-2\omega t} \\
&\leqslant \frac{3}{2} W_o\, e^{-2\omega t} \qquad .
\end{aligned}$$

Puisque $W(x, z_o, \ldots, z_N)$ est une somme de termes positifs, on peut aussi borner chacun de ces termes :

$$\left\{\begin{array}{ll}
S(t) \leqslant 3\, W_o\, e^{-2\omega t} & \\
 & \qquad t \geqslant 0 \\
\frac{1}{2} c_n\, z_n^2 \leqslant 3\, W_o\, e^{-2\omega t} & \qquad n = 0, 1, \ldots, N
\end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ll}
q\, x^2(t) \leqslant 3\, W_o\, e^{-2\omega t} & \\
 & \qquad t \geqslant 0 \qquad . \\
\frac{1}{2} \hat{c}\, z_n^2(t) \leqslant 3\, W_o\, e^{-2\omega t} & \qquad n = 0, 1, \ldots, N
\end{array}\right.$$

Posons

$$\Omega_o = \max\left(\sqrt{3\,W_o/q}\ ,\ \sqrt{6\,W_o/\hat{c}}\right) \quad ,$$

de sorte que

$$\begin{cases} |x(t)| \leq \Omega_o\, e^{-\omega t} & \\ & \qquad t \geq 0 \quad . \\ |z_n(t)| \leq \Omega_o\, e^{-\omega t} & n=0\,,1\,,\ldots\,,N \end{cases}$$

Ω_o est une constante indépendante du rang de troncature N et nous avons ainsi terminé la preuve du Lemme 1.□

Pour démontrer le Lemme 1, nous avons utilisé la condition (1.5) qui est assez restrictive. Essayons maintenant de nous en passer en renforçant les hypothèses sur la fonction $\sigma(x)$.

Le Lemme 2 va nous montrer que les résultats du Lemme 1 restent valables malgré cette modification.

Lemme 2.

Supposons que :

- α_n et η_n vérifient les conditions (1.3) , (1.4) ;

- $\sigma(x)$ satisfait (1.6) et (1.8) ;

alors,

pour toute donnée initiale $(u_o , f_o , \ldots , f_N)$, il existe une solution unique $(x(t) , z_o(t) , \ldots , z_N(t))$ du système (1.13) . Cette solution est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est bornée.

En outre, pour chaque condition initiale f vérifiant (1.2) , il existe une constante $\Omega > 0$, indépendante du rang de troncature N et telle que

$$\left.\begin{aligned} &|x(t)| \leqslant \Omega \\ &|z_n(t)| \leqslant \Omega \qquad n=0,1,\ldots,N \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0 \quad . \tag{1.14}$$

Si, de plus, on a

- $A = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$;

- $\sigma(x)$ satisfait (1.7) ;

- l'inégalité stricte dans (1.3) est vérifiée pour au moins un n ;

alors,

il existe des constantes strictement positives Ω_o et ω , indépendantes de N et telles que

$$\left.\begin{aligned} |x(t)| &\leq \Omega_o\, e^{-\omega t} \\ |z_n(t)| &\leq \Omega_o\, e^{-\omega t} \qquad n = 0, 1, \dots, N \end{aligned}\right\} \qquad t \geq 0 \ . \tag{1.15}$$

Démonstration.

Par un raisonnement analogue à celui fait dans le Lemme 1 et en tenant compte de (1.3), nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_n \geq 0 \ .$$

Les suites (α_n) et (η_n) permettent alors de partitionner l'ensemble des naturels en trois classes disjointes :

$$\mathbf{A} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \alpha_n > 0 \ \text{ et } \ \eta_n = 0\} \ ;$$

$$\mathbf{B} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \alpha_n = 0 \ \text{ et } \ \eta_n > 0\} \ ;$$

$$\mathbf{C} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \alpha_n = \eta_n = 0 \ \text{ et } \ \alpha_n \eta_n > 0\} \ .$$

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, définissons les ensembles

$$\mathbf{A}_N = \{0, 1, \dots, N\} \cap \mathbf{A} \ ;$$

$$\mathbf{B}_N = \{0, 1, \dots, N\} \cap \mathbf{B} \ ;$$

$$\mathbf{C}_N = \{0, 1, \dots, N\} \cap \mathbf{C} \ ;$$

Avec ces nouvelles notations, le système (1.13) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) = -\sum_{n\in \mathbf{C}_N} \alpha_n z_n(t) - \sum_{n\in \mathbf{A}_N} \alpha_n z_n(t) & \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) & n \in \mathbf{C}_N \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) & n \in \mathbf{B}_N \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) & n \in \mathbf{A}_N \end{cases} \tag{1.23}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = u_o & \\ z_n(0) = f_n & n = 0, 1, \dots, N \end{cases} .$$

Nous pouvons résoudre le dernier ensemble d'équations différentielles de (1.23) par intégration :

$$z_n(t) = f_n \, e^{-\lambda_n t} \qquad n \in \mathbf{A}_N \qquad t \geq 0$$

et

$$|z_n(t)| \leq K_1 \, e^{-\omega t} \qquad n \in \mathbf{A}_N$$

quand

$$\begin{cases} K_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| & (K_1 \text{ fini car } \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty) \\ \omega \leq \lambda_o \end{cases} .$$

Donc, quelles que soient les données initiales f_n , $n \in \mathbf{A}_N$, il existe des solutions uniques $z_n(t)$, $n \in \mathbf{A}_N$, définies sur $\mathbb{R}^+$. Ces solutions sont bornées et décroissent exponentiellement. De plus, les constantes trouvées sont indépendantes de N .

Introduisons ces solutions dans la première équation de (1.23) et nous aurons le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = - \sum\limits_{n \in \mathbf{C}_N} \alpha_n z_n(t) + e_N(t) \\ \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) \qquad n \in \mathbf{C}_N \\ \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) \qquad n \in \mathbf{B}_N \end{cases} \tag{1.24}$$

où

$$e_N(t) = - \sum_{n \in \mathbf{A}_N} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t} .$$

Par construction, les classes $\mathbf{B}_N$ et $\mathbf{C}_N$ sont disjointes, de sorte qu'on peut résoudre le système (1.24) sans tenir compte des équations en z_n , $n \in \mathbf{B}_N$.

Etudions donc le système

$$\begin{cases} x'(t) = - \sum\limits_{n \in \mathbf{C}_N} \alpha_n z_n(t) + e_N(t) \\ \\ z_n'(t) = -\lambda_n z_n(t) + \eta_n \sigma(x(t)) \qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases} \tag{1.25}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = u_o \\ z_n(0) = f_n & n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Nous déduirons du comportement des solutions $z_n(t)$, $n \in \mathbf{C}_N$, celui des composantes $z_n(t)$, $n \in \mathbf{B}_N$.

Si, pour un certain $n \in \mathbf{C}_N$, on a $\alpha_n = \eta_n = 0$, alors l'équation en $z_n(t)$ qui y correspond, se ramène à

$$z'_n(t) = -\lambda_n \, z_n(t) .$$

La solution de cette équation existe, est unique et vérifie les conclusions du lemme comme les composantes $z_n(t)$, $n \in \mathbf{A}_N$.

De plus, cette solution n'intervient pas dans la première équation de (1.25) . Nous pouvons, par conséquent, étudier uniquement les éléments n de $\mathbf{C}_N$ tels que

$$\alpha_n \, \eta_n > 0 .$$

Remarquons que le système (1.25) ne diffère du système (1.13) que par l'apparition du terme $e_N(t)$ dans la première équation.

Etudions-en le comportement :

$$|e_N(t)| \leqslant \sum_{n \in \mathbf{A}_N} |\alpha_n \, f_n| \, e^{-\lambda_n t}$$

$$\leqslant e^{-\lambda_o t} \sum_{n \in \mathbf{A}_N} |\alpha_n \, f_n|$$

$$\leq e^{-\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n|$$

$$\leq e^{-\lambda_o t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{par Holder}$$

$$= e^{-\lambda_o t} \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \qquad \text{par Parseval .}$$

Posons

$$K = \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \qquad (K \text{ fini car } f \text{ et } \alpha \in L^2 [0, c])$$

et donc

$$|e_N(t)| \leq K e^{-\lambda_o t} \qquad t \geq 0 \quad . \qquad (1.26)$$

Distinguons maintenant deux cas :

<u>1er cas</u> : $\mathbf{C}_N$ est vide.

Nous devons, dans cette partie, nous limiter à la première partie du lemme, l'hypothèse supplémentaire pour avoir la décroissance exponentielle n'étant pas vérifiée .

Le système (1.25) se ramène à une seule équation :

$$x'(t) = e_N(t) = - \sum_{n \in \mathbf{A}_N} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = u_o \quad .$$

En vertu du théorème d'existence et d'unicité, quel que soit u_o , cette équation admet une et une seule solutinn $x(t)$.

Intégrons cette équation pour obtenir la solution :

$$x(t) = u_o + \sum_{n \in \mathbf{A}_N} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1) \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Cherchons maintenant à borner $x(t)$ indépendamment de N :

$$|x(t)| \leqslant u_o + \sum_{n \in \mathbf{A}_N} \frac{|\alpha_n f_n|}{\lambda_n} |e^{-\lambda_n t} - 1|$$

$$\leqslant u_o + \frac{1}{\lambda_o} \sum_{n \in \mathbf{A}_N} |\alpha_n f_n|$$

$$\leqslant |u_o| + \frac{1}{\lambda_o} \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

$$= |u_o| + K / \lambda_o \quad .$$

Posons

$$\Omega = |u_o| + K / \lambda_o$$

où Ω est indépendant de N et tel que

$$|x(t)| \leqslant \Omega \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Etudions maintenant le comportement des solutions $z_n(t)$, $n \in \mathbf{B}_N$:

$$z_n(t) = e^{-\lambda_n t} \{f_n + \int_0^t e^{\lambda_n s} \sigma(x(s))\, ds\}$$

$$= e^{-\lambda_n t} f_n + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(x(s))\, ds \qquad n \in \mathbf{B}_N \quad .$$

Par hypothèse, σ est continue et donc bornée sur un compact, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\sigma(x(t))| < M \qquad \text{pour} \qquad |x(t)| < \Omega \quad .$$

Par conséquent,

$$|z_n(t)| \leqslant |f_n|\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} |\sigma(x(s))|\, ds$$

$$\leqslant |f_n| + M \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} ds$$

$$= |f_n| + M / \lambda_n\, (1 - e^{-\lambda_n t})$$

$$\leqslant |f_n| + M / \lambda_o \leqslant K_1 + M / \lambda_o \qquad n \in \mathbf{B}_N$$

où

$$K_1 = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f_n| \quad .$$

Les solutions $z_n(t)$, $n \in \mathbf{B}_N$, sont donc aussi bornées, uniformément par rapport à N .

Ceci termine la preuve dans le cas où $\mathbf{C}_N$ est vide.

<u>2ème cas</u> : $\mathbf{C}_N$ différent du vide.

Définissons la fonction

$$W(x\,,z) = S(x) + \frac{1}{2} \sum_{n\in \mathbf{C}_N} c_n\, z_n^2(t)$$

où z est le vecteur de composantes z_n , $n \in \mathbf{C}_N$.

De même, on notera par f le vecteur de composantes f_n , $n \in \mathbf{C}_N$.

Comme dans le Lemme 1,

$$S(x) = \int_0^x \sigma(\tau)\, d\tau$$

$$c_n = \begin{cases} \alpha_n / \eta_n & \text{si } \alpha_n\, \eta_n > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha_n\, \eta_n = 0 \end{cases} \qquad . \qquad (1.16)$$

Cette nouvelle fonction est définie positive tout comme la fonction W définie dans le Lemme 1 .

Calculons sa dérivée par rapport au système (1.25) :

$$W'(x\,,z) = \sigma(x)\; x'(t) + \sum_{n\in \mathbf{C}_N} c_n\, z_n(t)\; z_n'(t)$$

$$= \sigma(x)\; \{- \sum_{n\in \mathbf{C}_N} \alpha_n\, z_n(t) + e_N(t)\}$$

$$+ \sum_{n\in \mathbf{C}_N} c_n\, z_n(t)\; \{-\lambda_n\, z_n(t) + \eta_n\, \sigma(x)\}$$

$$= \sigma(x)\; e_N(t) - \sum_{n\in \mathbf{C}_N} \lambda_n\, c_n\, z_n^2(t) - \sum_{n\in \mathbf{C}_N} z_n(t)\; \{\alpha_n - c_n\, \eta_n\}$$

$$\leqslant \sigma(x)\ e_N(t) - \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \lambda_n\ c_n\ z_n^2(t)$$

$$\leqslant \sigma(x)\ e_N(t)$$

$$\leqslant |\sigma(x)|\ |\dot{e}_N(t)|$$

$$\leqslant |e_N(t)|\ \ \frac{1}{2}\ (1 + \sigma^2(x) \qquad .$$

Utilisons l'hypothèse supplémentaire (1.8) , ce qui va nous donner :

$$W'(x\,,z) \leqslant |e_N(t)|\ \frac{1}{2}\ (1 + \Gamma\ S(x)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\ |e_N(t)|\ \ (1 + \Gamma\ S(x) + \frac{\Gamma}{2} \sum_{n \in \mathbf{C}_N} c_n\ z_n^2) \qquad \text{car} \quad \Gamma > 0$$

$$= \frac{1}{2}\ |e_N(t)|\ \ (1 + \Gamma\ W(x\,,z))$$

$$\leqslant \frac{K}{2}\ e^{-\lambda_o t}\ \ (1 + \Gamma\ W(x\,,z)) \qquad \text{par} \quad (1.26)\ .$$

Vu que W est une fonction définie positive et que $\Gamma > 0$, on a

$$\frac{d\ W(x\,,z)}{1 + \Gamma\ W(x\,,z)} \leqslant \frac{K}{2}\ e^{-\lambda_o t}\ dt \qquad .$$

Intégrons ensuite entre 0 et t :

$$\frac{1}{\Gamma}\ \ln \frac{1 + \Gamma\ W(x\,,z)}{1 + \Gamma\ W(u_o\,,f)} \leqslant \frac{K}{2\ \lambda_o}\ (1 - e^{-\lambda_o t}) \leqslant \frac{K}{2\ \lambda_o}$$

$$1 + \Gamma\ W(x\,,z) \leqslant (1 + \Gamma\ W(u_o\,,f))\ e^{K\Gamma/2\lambda_o}$$

$$1 / \Gamma + W(x , z) \leqslant (1 / \Gamma + W(u_o , f))\, e^{K\Gamma/2\lambda_o}$$

$$\Rightarrow \qquad W(x , z) \leqslant (1 / \Gamma + W(u_o , f))\, e^{K\Gamma/2\lambda_o} \quad .$$

Comme dans le Lemme 1, posons

$$W_o = \max \{S(u_o) , S(-u_o)\} + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \quad .$$

Par conséquent,

$$W(u_o , f) = S(u_o) + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{C}_N} c_n f_n^2$$

$$\leqslant S(u_o) + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n \in \mathbf{C}_N} f_n^2$$

$$\leqslant W_o \quad .$$

En prenant

$$W_1 = (1 / \Gamma + W_o) \exp (K \Gamma / 2 \lambda_o) \quad ,$$

nous avons donc

$$W(x(t) , z(t)) \leqslant W_1 \qquad t \geqslant 0 \quad ,$$

et W_1 est une borne indépendante de N .

Puisque $W(x , z)$ est une somme de termes positifs, nous pouvons borner chacun de ses termes par W_1 :

$$\begin{cases} S(x) \leqslant W_1 \\ \\ \frac{1}{2}\, c_n\, z_n^2 \leqslant W_1 & \qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} |x(t)| \leqslant \sup\,\{|x|\ ;\ S(x) \leqslant W_1\} \\ \\ |z_n(t)| \leqslant \sqrt{(2\,/\,\hat{c})\ W_1} & \qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Vu que $z_n(t)$, $n \in \mathbf{B}_N$, a le même comportement que les composantes $z_n(t)$, $n \in \mathbf{C}_N$, nous avons

$$|z_n(t)| \leqslant \sqrt{(2\,/\,\hat{c})\ W_1} \qquad n \in \mathbf{B}_N \quad .$$

Pour $n \in \mathbf{A}_N$, nous avons obtenu précédemment

$$|z_n(t)| \leqslant K_1$$

avec

$$K_1 = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f_n| \quad .$$

Posons maintenant

$$\Omega = \max\,\{\sqrt{2\ W_1\,/\,\hat{c}}\ ,\ K_1\ ,\ \sup\,\{|x|\ ;\ S(x) \leqslant W_1\}\} \quad ,$$

de sorte que

$$\left.\begin{aligned} &|x(t)| \leqslant \Omega \\ &|z_n(t)| \leqslant \Omega \qquad n = 0\,,1\,,\ldots\,,N \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0$$

avec Ω qui ne dépend pas de N .

Démontrons maintenant la dernière partie du lemme puisque, dans le cas où $\mathbf{C}_N$ est différent du vide, nous sommes sûrs qu'il existe n tel que

$$\alpha_n \eta_n > 0 .$$

Définissons une nouvelle fonction :

$$V(x , z) = W(x , z) - \beta \sigma(x) z_o$$

où β est une constante positive que nous fixerons plus tard.

Si 0 n'est pas un élément de $\mathbf{C}_N$, on définit V de la façon suivante :

$$V(x , z) = W(x , z) - \beta \sigma(x) z_k$$

avec k le plus petit élément de $\mathbf{C}_N$.

De manière similaire à ce qui a été fait dans le Lemme 1, nous obtenons

$$S(x) \left(1 - \frac{\beta \Phi}{2}\right) + \frac{c_o z_o^2}{2} \left(1 - \frac{\beta}{c_o}\right) + \sum_{n \in \mathbf{C}_N \setminus \{0\}} \frac{c_n z_n^2}{2}$$

$$\leqslant V(x , z)$$

$$\leqslant S(x) \left(1 + \frac{\beta \Phi}{2}\right) + \frac{c_o z_o^2}{2} \left(1 + \frac{\beta}{c_o}\right) + \sum_{n \in \mathbf{C}_N \setminus \{0\}} \frac{c_n z_n^2}{2}$$

pour

$$\begin{cases} |x| \leqslant \Omega & \\ |z_n| \leqslant \Omega & n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Prenons $\beta < \min (1 / \Phi \ , \ c_o / 2)$ de manière à retrouver (1.21) :

$$\frac{1}{2} W(x , z) \leqslant V(x , z) \leqslant \frac{3}{2} W(x , z)$$

pour

$$\begin{cases} |x| \leqslant \Omega \\ |z_n| \leqslant \Omega & n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

V est donc une fonction définie positive pour

$$\begin{cases} |x| \leqslant \Omega \\ |z_n| \leqslant \Omega & n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Calculons la dérivée de V par rapport à (1.25) :

$$\begin{aligned} V'(x , z) &= W'(x , z) - \beta \, \sigma'(x) \, x'(t) \, z_o(t) - \beta \, \sigma(x) \, z_o'(t) \\ &= - \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \lambda_n \, c_n \, z_n^2(t) + \sigma(x) \, e_N(t) \\ &\quad - \beta \, \sigma'(x) \, z_o(t) \, [- \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \alpha_n \, z_n(t) + e_N(t)] \\ &\quad - \beta \, \sigma(x) \, [-\lambda_o \, z_o(t) + \eta_o \, \sigma(x)] \end{aligned} .$$

Redéfinissons les constantes A et D comme dans le Lemme 1 et, par des transformations analogues, bornons la dérivée de V :

$$V'(x , z) = - \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \lambda_n \, c_n \, z_n^2(t) + e_N(t) \, [\sigma(x) - \beta \, \sigma'(x) \, z_o(t)] - \beta \, \sigma^2(x) \, \eta_o$$

$$+ \beta\,\sigma(x)\,\lambda_o\,z_o(t) + \beta\,\sigma'(x)\,z_o(t) \sum_{n\in\mathbf{C}_N} \alpha_n\,z_n(t)$$

$$\leqslant - \sum_{n\in\mathbf{C}_N} \lambda_n\,c_n\,z_n^2(t) + e_N(t)\,[\sigma(x) - \beta\,\sigma'(x)\,z_o(t)] - \beta\,\sigma^2(x)\,\eta_o$$

$$+ \frac{\beta\,\eta_o}{2}\,(\sigma^2(x) + \frac{\lambda_o^2\,z_o^2(t)}{\eta_o^2}) + \frac{\beta\,D}{2} \sum_{n\in\mathbf{C}_N} |\alpha_n|\,(z_o^2(t) + z_n^2(t))$$

$$\leqslant - \sum_{n\in\mathbf{C}_N} \lambda_n\,c_n\,z_n^2(t) + e_N(t)\,[\sigma(x) - \beta\,\sigma'(x)\,z_o(t)] - \frac{\beta\,\sigma^2(x)\,\eta_o}{2}$$

$$+ \frac{\beta\,\lambda_o^2\,z_o^2(t)}{2\,\eta_o} + \frac{\beta\,D\,A}{2}\,[\,z_o^2(t) + \sum_{n\in\mathbf{C}_N} z_n^2(t)\,]$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{C}_N\setminus\{0\}} z_n^2(t)\,[-\lambda_n\,c_n + \frac{\beta\,D\,A}{2}] + z_o^2(t)\,[-\lambda_o\,c_o + \frac{\beta\,\lambda_o^2}{2\,\eta_o} + \beta\,D\,A\,]$$

$$- \frac{\beta\,\eta_o}{2}\,\sigma^2(x) + e_N(t)\,[\sigma(x) - \beta\,\sigma'(x)\,z_o(t)\,] \quad .$$

Posons

$$B_n = -\,\beta\,D\,A/2 + \lambda_n\,c_n \qquad n \in \mathbf{C}_N\setminus\{0\} \quad ,$$

$$B_o = \lambda_o\,c_o - \beta\,(\lambda_o^2 + 2\,A\,D\,\eta_o)\,/\,2\,\eta_o$$

$$\hat{B} = \lambda_o\,\hat{c} - \beta\,D\,A/2 \quad .$$

Comme dans le Lemme 1, on a

$$B_n \geqslant \hat{B} \qquad n \in \mathbf{C}_N\setminus\{0\} \quad .$$

De plus, $\sigma(x)$ et $\sigma'(x)$ sont continues par hypothèse et donc bornées sur un compact, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K_o > 0$ telle que

$$|\sigma(x) - \beta\, \sigma'(x)\, z_o(t)| \leqslant K_o$$

pour

$$\begin{cases} |x| \leqslant \Omega \\ |z_n| \leqslant \Omega \qquad\qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Choisissons β de façon à avoir

$$\begin{cases} \hat{B} > 0 \\ B_o > 0 \end{cases}$$

et, pour cela, prenons

$$\beta < \min\,(1/\Phi\ ,\ c_o/2\ ,\ 2\,\lambda_o\,\hat{c}/A\,D\ ,\ 2\,\eta_o\,c_o\,\lambda_o/(\lambda_o^2 + 2\,A\,D\,\eta_o)) \quad .$$

Alors,

$$V'(x\,,z) \leqslant -\hat{B} \sum_{n \in \mathbf{C}_N \setminus \{0\}} z_n^2(t) - B_o\, z_o^2(t) - (\beta\,\eta_o/2)\,\sigma^2(x) + K_o\, e_N(t)$$

$$\leqslant -\tau_o \,\Big(\sum_{n \in \mathbf{C}_N} z_n^2(t) + \sigma^2(x)\Big) + K_o\, e_N(t)$$

où

$$\tau_o = \min\,(\beta\,\eta_o/2\ ,\ \hat{B}\ ,\ B_o) \quad .$$

Ensuite, par (1.20) ,

$$V'(x\,,z) \leqslant -\tau_o \,\Big(\sum_{n \in \mathbf{C}_N} z_n^2(t) + \phi\, S(x)\Big) + K_o\, e_N(t) \quad .$$

Posons

$$\tau < \min\,(2\,\tau_o\,\phi / 3\;,\; 4\,\tau_o / 3\,\tilde{c})$$

et nous obtenons

$$V'(x\,,z) \leqslant -\tau\,\Big(\frac{3}{4}\,\tilde{c} \sum_{n \in \mathbf{C}_N} z_n^2(t) + \frac{3}{2}\,S(x)\Big) + K_o\, e_N(t)$$

$$\leqslant -\tau\,\Big(\frac{3}{2} \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \frac{c_n\, z_n^2(t)}{2} + \frac{3}{2}\,S(x)\Big) + K_o\, e_N(t)$$

$$= -\,\frac{3}{2}\,\tau\, W(x\,,z) + K_o\, e_N(t)$$

$$\leqslant -\tau\, V(x\,,z) + K_o\, e_N(t) \qquad \text{par } (1.21)$$

$$\leqslant -\tau\, V(x\,,z) + K_o\, K\, e^{-\lambda_o t} \qquad \text{par } (1.26) \quad . \quad (1.27)$$

Il existe une fonction positive $\varepsilon(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que cette inéquation différentielle se ramène à une équation :

$$V'(x\,,z) + \tau\, V(x\,,z) = K_o\, K\, e^{-\lambda_o t} - \varepsilon(t) \quad .$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$V(x\,,z) = e^{-\tau t}\,\Big\{V(u_o\,,f) + \int_0^t e^{\tau s}\,[\,K\,K_o\, e^{-\lambda_o s} - \varepsilon(s)\,]\, ds\Big\}$$

$$= V(u_o\,,f)\,e^{-\tau t} + K_o\,K\,e^{-\tau t}\int_0^t e^{(\tau-\lambda_o)s}\,ds - \int_0^t e^{-(t-s)\tau}\,\varepsilon(s)\,ds$$

$$\leqslant V(u_o\,,f)\,e^{-\tau t} + \frac{K_o\,K}{\tau-\lambda_o}\,e^{-\tau t}\,(e^{(\tau-\lambda_o)t} - 1)$$

$$= V(u_o\,,f)\,e^{-\tau t} + \frac{K_o\,K}{\tau-\lambda_o}\,(e^{-\lambda_o t} - e^{-\tau t}) \qquad t \geqslant 0 \qquad (1.28)$$

$$\leqslant \left(V(u_o\,,f) - \frac{K\,K_o}{\tau-\lambda_o}\right) e^{-\tau t} + \frac{K_o\,K}{\tau-\lambda_o}\,e^{-\lambda_o t} \quad .$$

Mais, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\tau < \lambda_o$, ce qui nous donne

$$V(x\,,z) \leqslant (V(u_o\,,f) + K_1)\,e^{-\tau t}$$

où

$$K_1 = -\,K\,K_o\,/\,(\tau-\lambda_o) > 0 \quad .$$

Par (1.21) , on a

$$\frac{1}{2}\,W(x\,,z) \leqslant (V(u_o\,,f) + K_1)\,e^{-\tau t}$$

$$\leqslant (\tfrac{3}{2}\,W_o + K_1)\,e^{-\tau t} \quad .$$

De manière similaire à ce qui a été fait dans le Lemme 1, définissons

$$\Omega_o = \max\left(\sqrt{\tfrac{6}{\hat{c}}\,(W_o + K_1)}\ ,\ \sqrt{\tfrac{3}{q}\,(W_o + K_1)}\ ,\ K_1\right)$$

$$\omega = \tau / 2$$

et nous obtenons alors

$$\begin{cases} |x(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} & \\ & t \geqslant 0 \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} \qquad n = 0, 1, \ldots, N & \end{cases}$$

en utilisant les résultats précédents pour $n \in \mathbf{A}_N$ et le fait que $z_n(t)$, $n \in \mathbf{B}_N$, se comporte comme $z_n(t)$, $n \in \mathbf{C}_N$.

Ceci termine donc la démonstration du Lemme 2.□

§ 2. EQUATION DE VOLTERRA ASSOCIEE AU PROBLEME

Etudions maintenant l'équation de Volterra :

$$u(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2\,(t-s)\;\sigma(u(s))\;ds \tag{1.29}$$

où

$$\left.\begin{aligned} K_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n}\,(e^{-\lambda_n t} - 1) \\ K_2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n}\,(e^{-\lambda_n t} - 1) \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0 \tag{1.30}$$

en supposant que toutes les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) sont strictement positives.

En fait, cette équation de Volterra a un rapport avec notre problème (0.1) , (0.2) , (0.3) : plus précisément, elle s'obtient en éliminant les T_n dans le système d'équations différentielles ordinaires (1.12) , associé à notre problème de départ.

En effet, résolvons d'abord le dernier ensemble d'équations de ce système (1.12)

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{-\lambda_n t}\,\{f_n + \int_0^t e^{\lambda_n s}\,\eta_n\,\sigma(u(s))\;ds\} \\ &= f_n\,e^{-\lambda_n t} + \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\,\sigma(u(s))\;ds \qquad n = 0\,,1\,,\ldots\,. \end{aligned}$$

Introduisons ensuite ces expressions dans la première équation de (1.12) :

$$u'(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s)) \, ds \quad ,$$

la condition initiale étant

$$u(0) = u_o \quad .$$

Avant d'intégrer cette équation, vérifions si les séries en question convergent bien uniformément :

$$|\alpha_n f_n e^{-\lambda_n t}| \leqslant |\alpha_n f_n| \qquad t \geqslant 0 \qquad n = 0, 1, \ldots$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \leqslant \|\alpha\|_{L^2} \, \|f\|_{L^2}$$

$$< \infty \qquad \text{car } \alpha \text{ et } f \in L^2 [0, c] \quad .$$

Par le théorème de Weiestrass, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.

On a le même résultat pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n t}$, de sorte que l'on pourra leur appliquer le théorème d'intégration des séries.

De plus, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n (t-s)}$ vérifie les hypothèses du théorème de Borel-Cantelli.

En effet, chaque terme $\alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n (t-s)}$ de cette série est intégrable par rapport à s dans l'intervalle $[0, t]$ et la série

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t |\alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n(t-s)} \sigma(u(s))|\, ds$ est convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n(t-s)} |\sigma(u(s))|\, ds$$

$$\leqslant \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}\, ds$$

$$= \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t})$$

$$\leqslant \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \frac{1}{\lambda_o} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n$$

$$\leqslant \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \frac{1}{\lambda_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} \qquad \text{par Holder}$$

$$< \infty$$

car α et $\eta \in L^2[0,c]$ et $u(t)$ est bornée comme nous le verrons dans le lemme qui suit.

Avec ces résultats, nous pouvons maintenant intégrer l'équation différentielle en $u(t)$ que nous avions trouvée :

$$u(t) = u_o - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n \int_0^t e^{-\lambda_n s}\, ds$$

$$- \int_0^t \{\int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n(\tau-s)} \sigma(u(s))\, ds\}\, d\tau$$

par Fubini

$$= u_o + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

$$- \int_0^t \{\int_\tau^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n(\tau - s)} \sigma(u(s)) \, d\tau\} \, ds$$

$$= u_o + K_1(t) - \int_0^t \sigma(u(s)) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \{\int_\tau^t e^{-\lambda_n(\tau-s)} d\tau\} \, ds$$

$$= u_o + K_1(t) + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n(t-s)} - 1) \, \sigma(u(s)) \, ds$$

$$= u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2 \, (t-s) \, \sigma(u(s)) \, ds$$

et nous obtenons exactement l'équation de Volterra (1.29) avec (1.30) .

Remarquons que les séries $K_1(t)$ et $K_2(t)$ sont convergentes sur $\mathbb{R}^+$.

En effet,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n f_n|}{\lambda_n} |e^{-\lambda_n t} - 1| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n f_n|}{\lambda_n}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_o} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_o} \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \qquad \text{par Holder}$$

$$< \infty$$

et, de même,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} |e^{-\lambda_n t} - 1| \leqslant \frac{1}{\lambda_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}$$

$$< \infty \quad .$$

Par conséquent, $K_1(t)$ et $K_2(t)$ sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} K_1'(t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t} \\ K_2'(t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n e^{-\lambda_n t} \end{aligned} \tag{1.31}$$

grâce à la convergence uniforme de ces deux séries qui a été obtenue précédemment.

Etudions maintenant le comportement de la solution $u(t)$ de l'équation de Volterra.

Lemme 3.

Supposons que :

- les hypothèses (1.2) , (1.3) , (1.4) soient satisfaites;
- la fonction $\sigma(x)$ vérifie (1.6) ;
- on a soit la contidion (1.8) , soit (1.5) pour tout n ;

alors,

l'équation (1.29) , (1.30) admet une et une seule solution $u(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Quelle que soit la donnée initiale u_o , il existe une constante strictement positive K telle que

$$|u(t)| \leqslant K \qquad\qquad t \geqslant 0 \quad .$$

De plus, $u(t)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$u'(t) = K_1'(t) + \int_0^t K_2' (t-s)\, \sigma(u(s))\, ds \qquad t \geqslant 0 \tag{1.32}$$

où $K_1'(t)$ et $K_2'(t)$ sont donnés par (1.31) .

Si, en plus,

- $\sigma(x)$ vérifie (1.7) ;
- l'inégalité stricte dans (1.3) est satisfaite pour au moins un n ;

alors,

il existe deux constantes $K > 0$ et $\omega > 0$ telles que

$$|u^{(i)}(t)| \leqslant K\, e^{-\omega t} \qquad i = 0, 1, 2 \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Démonstration.

Les fonctions $K_1(t)$ et $K_2(t)$ étant continues sur $\mathbb{R}^+$ et σ sur $\mathbb{R}$, il existe $t_o > 0$ tel que l'équation de Volterra (1.29), (1.30) admette une solution unique sur l'intervalle $[0, t_o[$.

Cette solution peut être prolongée à $\mathbb{R}^+$ si elle est bornée indépendamment de t_o sur l'intervalle $[0, t_o[$ [8, 9].

Recherchons donc cette borne indépendante de t_o.

Soit $0 < t_1 < t_o$ et définissons

$$P = P(t_1) = \sup_{0 \leq t \leq t_1} |u(t)|$$

$$M = M(t_1) = \sup_{0 \leq t \leq t_1} |\sigma(u(t))| \qquad .$$

Considérons la famille de systèmes d'équations différentielles, indexée par $N = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{cases} x_N'(t) = - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \, z_{Nn}(t) & \\ & t \geqslant 0 \\ z_{Nn}'(t) = -\lambda_n \, z_{Nn}(t) + \eta_n \, \sigma(x_N(t)) & n = 0, 1, \ldots, N \end{cases} \qquad (1.33)$$

avec les conditions initiales

$$x_N(0) = u_o$$

$$z_{Nn}(0) = f_n \qquad n=0,1,\dots,N \quad .$$

Pour chaque N fixé, ce système (1.33) est de la forme du système que nous avons étudié dans les lemmes 1 et 2.

Les hypothèses de ces lemmes sont satisfaites et nous pouvons donc en tirer certaines conclusions pour le système (1.33) .

Tout d'abord, quelle que soit la donnée initiale $(u_o\ ,\ f_o\ ,\ \dots\ ,\ f_N)$, il existe une et une seule solution $(x_N(t)\ ,\ z_o(t)\ ,\ \dots\ ,\ z_N(t))$ au système (1.33), définie sur $\mathbb{R}^+$.

En outre, il existe une constante $\Omega>0$, indépendante de N , telle que

$$\left.\begin{aligned} &|x_N(t)| \leqslant \Omega \\ &|z_{Nn}(t)| \leqslant \Omega \qquad n=0,1,\dots,N \end{aligned}\right. \qquad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N=0,1,\dots \tag{1.34}$$

Cherchons la solution de ce système en commençant par les N dernières équations :

$$\begin{aligned} z_{Nn}(t) &= e^{-\lambda_n t}\ \{f_n + \int_0^t e^{\lambda_n s}\ \eta_n\ \sigma(x_N(s))\ ds\} \\ &= f_n\ e^{-\lambda_n t} + \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\ \sigma(x_N(s))\ ds \quad . \end{aligned}$$

Introduisons ces expressions dans la première équation et intégrons :

$$x_N'(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ f_n\ e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\ \sigma(x_N(s))\ ds \quad .$$

Donc,

$$x_N(t) = u_o + \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

$$- \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \eta_n \int_0^t \{\int_0^\tau e^{-\lambda_n(\tau-s)} \sigma(x_N(s))\, ds\}\, d\tau$$

$$= u_o + \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

$$- \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \eta_n \int_0^t \sigma(x_N(s)) \int_\tau^t e^{-\lambda_n(\tau-s)}\, d\tau\, ds$$

$$= u_o + \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} \int_0^t (e^{-\lambda_n(t-s)} - 1)\, \sigma(x_N(s))\, ds \quad .$$

Posons

$$K_{1N}(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n f_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

$$K_{2N}(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} (e^{-\lambda_n t} - 1)$$

(i.e., les N-ièmes sommes partielles des séries K_1 et K_2 de (1.30)).

$x_N(t)$ s'écrit donc sous la forme

$$x_N(t) = u_o + K_{1N}(t) + \int_0^t K_{2N}\,(t-s)\;\sigma(x_N(s))\;ds \qquad t \geqslant 0 \quad . \qquad (1.35)$$

Montrons maintenant que $x_N(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ pour $t \in [\,0\,,t_1\,]$ quand $N \to \infty$:

$$|u(t) - x_N(t)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n\, f_n|}{\lambda_n}\,|e^{-\lambda_n t} - 1|$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n}\,|e^{-\lambda_n(t-s)} - 1|\;|\sigma(u(s))|\;ds$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n}\,|e^{-\lambda_n(t-s)} - 1|\,|\sigma(u(s)) - \sigma(x_N(s))|\;ds$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n\, f_n|}{\lambda_n} + \int_0^t \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n}\,|\sigma(u(s))|\;ds$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n}\,|\sigma(u(s)) - \sigma(x_N(s))|\;ds$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n\, f_n|}{\lambda_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n} \int_0^t |\sigma(u(s))|\;ds$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n\,\eta_n}{\lambda_n} \int_0^t |\sigma(u(s)) - \sigma(x_N(s))|\;ds \quad .$$

Par hypothèse, σ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$; nous pouvons donc lui appliquer le théorème de la moyenne :

$$|\sigma(u(s)) - \sigma(x_N(s))| \leqslant |u(s) - x_N(s)| \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} |\sigma'(x_N(s) + \xi(u(s) - x_N(s))|$$

$$= |u(s) - x_N(s)| \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} |\sigma'(\xi\, u(s) + (1-\xi)\, x_N(s))|$$

$$s \in [0\,,t_1] \quad .$$

Posons

$$y(s) = \xi\, u(s) + (1-\xi)\, x_N(s) \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad s \in [0\,,t_1]$$

$$|y| \leqslant \xi\, |u(s)| + (1-\xi)\, |x_N(s)|$$

$$\leqslant \xi\, P + (1-\xi)\, \Omega$$

$$\leqslant \xi \max(P\,,\Omega) + (1-\xi) \max(\Omega\,,P)$$

$$= \max(P\,,\Omega)$$

$$\Rightarrow \qquad y(s) \in [-P\,,P] \cup [-\Omega\,,\Omega]$$

et finalement,

$$|\sigma(u(s)) - \sigma(x_N(s))| \leqslant |u(s) - x_N(s)| \sup_{y\in S} |\sigma'(y(s))| \qquad s \in [0\,,t_1]$$

où

$$S = [-P\,,P] \cup [-\Omega\,,\Omega] \quad .$$

Si

$$L = \sup_{y\in S} |\sigma'(y(s))| \quad ,$$

alors,

$$|u(t) - x_N(t)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n\, f_n|}{\lambda_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_n\, \eta_n}{\lambda_n} \int_0^t |\sigma(u(s))|\, ds$$

$$+ L \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} \int_0^t |u(s) - x_N(s)| \, ds \qquad (1.36)$$

$$t \in [0 , t_1] \quad .$$

Posons

$$Q(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_n f_n|}{\lambda_n} + \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n} M t_1\right)$$

$$B = L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n}$$

et remarquons que ces séries sont convergentes.

Avec ces nouvelles notations, (1.36) devient :

$$|u(t) - x_N(t)| \leqslant Q(N) + B \int_0^t |u(s) - x_N(s)| \, ds \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \quad . \quad (1.37)$$

Appliquons-y le lemme de Gronwall dont les hypothèses sont satisfaites [10, p. 108] :

$$|u(t) - x_N(t)| \leqslant Q(N) \, e^{Bt} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \quad .$$

Or,

$$\lim_{n \to \infty} Q(N) = 0$$

d'où

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant t_1} |u(t) - x_N(t)| \leqslant \lim_{N\to\infty} Q(N)\, e^{Bt_1} = 0 \qquad ,$$

c'est-à-dire que $x_N(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ sur l'intervalle $[0, t_1]$.

Par conséquent, il existe un indice $N_o > 0$ tel que, pour tout $N > N_o$,

$$|u(t) - x_N(t)| \leqslant \Omega \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1 < t_o \quad ,$$

et donc

$$|u(t)| \leqslant \Omega + |x_N(t)|$$

$$\leqslant 2\,\Omega \qquad 0 \leqslant t < t_o \qquad \text{par } (1.34)$$

avec Ω indépendant de N et de t_o.

Nous venons donc de borner $u(t)$ indépendamment de t_o sur l'intervalle $[0, t_o[$, de sorte que nous pouvons prolonger de façon unique cette solution à $\mathbb{R}^+$ et avoir

$$|u(t)| \leqslant K \qquad t \geqslant 0$$

avec

$$K = 2\,\Omega \qquad .$$

Montrons maintenant que u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Pour calculer sa dérivée, différentions (1.29) et utilisons le fait que les séries (1.31) sont uniformément convergentes :

$$u'(t) = K_1'(t) + \int_0^t K_2' \ (t-s) \ \sigma(u(s)) \ ds + K_2 \ (t-t) \ \sigma(u(t))$$

$$= K_1'(t) + \int_0^t K_2' \ (t-s) \ \sigma(u(s)) \ ds \qquad\qquad t \geqslant 0$$

où $K_1'(t)$, $K_2'(t)$ sont les dérivées continues données par (1.31) , des séries (1.30) .

Ceci termine la première partie du lemme.

Avec nos hypothèses supplémentaires, nous pouvons appliquer le résultat (1.16) des Lemmes 1 et 2 au système (1.33) : il existe deux constantes $\Omega_o > 0$ et $\omega > 0$, indépendantes de N , telles que

$$|x_N(t)| \leqslant \Omega_o \ e^{-\omega t} \qquad t \geqslant 0 \qquad N = 0, 1, \ldots \quad .$$

Vu que $x_N(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ quand $N \to \infty$, sur tout intervalle fini $[0, t_o]$, on a

$$|u(t)| \leqslant \Omega_o \ e^{-\omega t} \qquad\qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Il reste donc à voir que u' et u'' décroissent aussi exponentiellement et, pour cela, appliquons le théorème de la moyenne à σ :

$$|\sigma(u(t))| = |\sigma(u(t)) - \sigma(0)| \qquad\qquad t \geqslant 0$$

$$\leqslant |u(t)| \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} |\sigma'(\xi \ u(t))| \quad .$$

Or,

$$|\xi\, u(t)| \leqslant |u(t)| \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad\qquad t \geqslant 0$$

$$\leqslant K \qquad .$$

Donc, σ' qui est continue, est bornée sur ce compact, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\sigma'(\xi\, u(t))| \leqslant M \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad\qquad t \geqslant 0 \qquad .$$

Finalement,

$$|\sigma(u(t))| \leqslant M\, |u(t)| \qquad\qquad t \geqslant 0$$

$$\leqslant M\, \Omega_o\, e^{-\omega t}$$

$$\leqslant K_o\, e^{-\omega_o t} \tag{1.38}$$

où

$$K_o = M\, \Omega_o$$

$$0 < \omega_o \leqslant \min\, \{\lambda_o\, , \omega\} \qquad .$$

Nous pouvons alors majorer $u'(t)$ de la façon suivante :

$$|u'(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n\, f_n|\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\, |\sigma(u(s))|\, ds$$

$$\leqslant e^{-\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n\, f_n| + K_o \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_o (t-s)}\, e^{-\omega_o s}\, ds$$

$$\leqslant e^{-\lambda_o t}\, \|\alpha\|_{L^2}\, \|f\|_{L^2} + K_o\, \|\alpha\|_{L^2}\, \|\eta\|_{L^2}\, \frac{e^{-\omega_o t} - e^{-\lambda_o t}}{\lambda_o - \omega_o}$$

$$\leqslant e^{-\lambda_o t} \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} + K_o \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} \frac{e^{-\omega_o t}}{\lambda_o - \omega_o}$$

$$\leqslant 2\, K_1\, e^{-\omega_o t} \qquad\qquad t \geqslant 0$$

avec

$$K_1 = \max \{\|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \; ; \; \frac{K_o}{\lambda_o - \omega_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}\} \quad .$$

Etudions maintenant le comportement de $u''(t)$.

Avant de calculer cette dérivée, demandons-nous si le théorème de dérivation des séries est vérifié pour $K_1'(t)$ et $K_2'(t)$.

Considérons la série obtenue en dérivant terme à terme $K_1'(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, f_n\, \lambda_n\, e^{-\lambda_n t}$$

$$|\alpha_n\, f_n\, \lambda_n\, e^{-\lambda_n t}| \leqslant |\alpha_n\, f_n|\, \lambda_n\, e^{-\lambda_n t_o} \qquad t \geqslant t_o \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec $t_o > 0$, t_o arbitraire.

Etudions la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n\, f_n|\, \lambda_n\, e^{-\lambda_n t_o}$ par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{|\alpha_{n+1}\ f_{n+1}|}{|\alpha_n\ f_n|}\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\ e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)t_o} \right\}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\ e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)t_o} \right\} \qquad \text{car} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n\ f_n| < \infty$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{par (A.6)}$$

et donc, pour tout $t_o > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n\ f_n|\ \lambda_n\ e^{-\lambda_n t_o}$ est convergente . Par le critère de Weierstrass, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ f_n\ \lambda_n\ e^{-\lambda_n t}$ est alors uniformément convergente pour $t > 0$.

Par un raisonnement semblable, on obtient le même résultat pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n\ \lambda_n\ e^{-\lambda_n t}$.

Nous pouvons, par conséquent, dériver $u'(t)$ en appliquant le théorème de dérivation des séries :

$$u''(t) = K_1''(t) + \int_0^t K_2''\ (t-s)\ \sigma(u(s))\ ds + K_2'(0)\ \sigma(u(t)) \qquad t > 0$$

$$= K_1''(t) + \int_0^t K_2''\ (t-s)\ \sigma(u(s))\ ds - \sigma(u(t)) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n$$

où

$$\left.\begin{aligned} K_1''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ f_n\ \lambda_n\ e^{-\lambda_n t} \\ K_2''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n\ \lambda_n\ e^{-\lambda_n t} \end{aligned}\right. \qquad t > 0 \ .$$

Choisissons deux nombres δ et t_o tels que

$$\begin{cases} t_o > 0 \\ 0 < \delta < \lambda_o \end{cases}$$

et posons

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \lambda_n e^{-(\lambda_n - \delta)t_o} .$$

Pour tout $t \geqslant t_o > 0$, on a alors

$$|u''(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \lambda_n e^{-\lambda_n t} + |\sigma(u(t))| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} |\sigma(u(s))| ds$$

$$\leqslant e^{-\delta t_o} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \lambda_n e^{-(\lambda_n - \delta)t_o} + K_o e^{-\omega_o t} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}$$

$$+ K_o \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} e^{-\omega_o s} ds$$

$$\leqslant e^{-\delta t_o} P + K_o \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} e^{-\omega_o t}$$

$$+ K_o \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \lambda_n \frac{e^{-\omega_o t} - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n - \omega_o}$$

$$\leqslant P e^{-\delta t_o} + K_o \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} e^{-\omega_o t} + K_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n \lambda_n}{\lambda_n - \omega_o} e^{-\omega_o t} .$$

Cette dernière série est convergente. En effet,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n \lambda_n}{\lambda_n - \omega_o} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n + \omega_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \eta_n}{\lambda_n - \omega_o}$$

$$\leqslant \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} + \frac{\omega_o}{\lambda_o - \omega_o} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n$$

$$\leqslant \frac{\lambda_o}{\lambda_o - \omega_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}$$

$$< \infty \quad .$$

Donc,

$$|u''(t)| \leqslant P\ e^{-\delta t} + K_o \frac{2\ \lambda_o - \omega_o}{\lambda_o - \omega_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} e^{-\omega_o t} \qquad t > 0$$

$$\leqslant 2\ K_2\ e^{-\omega_1 t}$$

où

$$K_2 = \max \{P\ ,\ K_o \frac{2\ \lambda_o - \omega_o}{\lambda_o - \omega_o} \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}\}$$

$$\omega_1 = \min \{\delta\ ,\ \omega_o\} \quad .$$

Finalement, prenons

$$K = \max \{2\ K_2\ ,\ 2\ K_1\ ,\ \Omega\}$$

et nous aurons bien

$$|u^{(i)}(t)| \leqslant K\, e^{-\omega_1 t} \qquad t \geqslant 0 \quad ,$$

ce qui termine la démonstration de ce lemme.□

§ 3. PREUVE DU THEOREME 1

Si les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites, alors, par le Lemme 3, nous sommes assurés de l'existence et de l'unicité de la solution $u(t)$ de l'équation de Volterra (1.29) , (1.30) .

Définissons la fonction

$$T(x\,,t) = \int_0^c G(x\,,\xi\,;t)\ f(\xi)\ d\xi + \int_0^t \int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\ \eta(\xi)\ \sigma(u(\tau))\ d\xi\ d\tau \qquad (1.39)$$

avec la fonction de Green associée :

$$G(x\,,\xi\,;t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ y_n(\xi)\ e^{-\lambda_n t} \qquad 0 < x\,,\ \xi < c \ \text{ et } \ t > 0 \quad (1.40)$$

où λ_n et $y_n(x)$ sont les valeurs et les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) .

Cette fonction $T(x\,,t)$ sera étudiée dans l'Annexe 2 et pourra s'écrire sous la forme :

$$T(x\,,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ y_n(x)\ e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\ \sigma(u(s))\ ds \ . \qquad (1.41)$$

Montrons que le couple $(u(t)\,,T(x\,,t))$, où $u(t)$ est la solution de l'équation de Volterra (1.29) - (1.30) et $T(x\,,t)$ est définie ci-dessus, est solution de notre problème (0.1) - (0.3) et vérifie le théorème.

La fonction $T(x, t)$ vérifie l'équation différentielle (0.1b) et la condition initiale (0.3), comme nous le démontrerons dans le théorème de l'Annexe 2.

La fonction $u(t)$ vérifie aussi la condition (0.2) mais nous devons montrer que l'équation intégro-différentielle (0.1a) est satisfaite :

$$-\int_0^c \alpha(x)\, T(x, t)\, dx$$

$$= -\int_0^c \alpha(x) \{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \}\, dx$$

$$- \int_0^c \alpha(x) \{ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s))\, ds \}\, dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, e^{-\lambda_n t} \int_0^c \alpha(x)\, y_n(x)\, dx$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s))\, ds \int_0^c \alpha(x)\, y_n(x)\, dx$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n\, e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s))\, ds$$

par (A.8)

$$= K_1'(t) + \int_0^t K_2'(t-s)\, \sigma(u(s))\, ds$$

où $K_1'(t)$ et $K_2'(t)$, données par (1.31), sont des séries uniformément convergentes.

Par l'assertion (1.32), nous en déduisons donc que

$$u'(t) = -\int_0^c \alpha(x)\ T(x\,,t)\ dx \qquad\qquad t \geqslant 0 \qquad .$$

Par conséquent, le couple $(u(t)\ ,\ T(x\,,t))$ représente bien une solution du problème initial (0.1) , (0.2) , (0.3) .

De plus, la solution $u(t)$ est unique par le Lemme 3 et par un théorème d'unicité de la solution de l'équation inhomogène de la chaleur, $T(x\,,t)$ est également unique.

Vérifions maintenant les résultats du théorème.

Par le Lemme 3, la fonction $u(t)$ satisfait bien (1.10) et (1.11) . Montrons qu'il en est de même pour $T(x\,,t)$.

Par ce qui précède, $u(t)$ est borné et donc, puisque σ est continue, il existe une constante $K_o > 0$ telle que

$$|\sigma(u(t))| \leqslant K_o \qquad\qquad t \geqslant 0 \qquad .$$

Par (A.7) , l'existence d'une constante $M_1 > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(x)| \leqslant M_1 \qquad\qquad 0 \leqslant x \leqslant c$$

est assurée.

Donc,

$$|T(x\,,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n\ y_n(x)|\ e^{-\lambda_n t} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n\, y_n(x)| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} |\sigma(u(s))|\, ds$$

$$\leqslant M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + K_o\, M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \int_0^t e^{-\lambda_o(t-s)}\, ds$$

$$\leqslant M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + M_1\, K_o \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\, ((1 - e^{-\lambda_o t}) / \lambda_o)$$

$$\leqslant M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + M_1\, (K_o / \lambda_o) \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \quad .$$

Par (A.8) et (1.2) , nous savons que les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$ sont finies.

Définissons

$$K = M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + M_1\, (K_o / \lambda_o) \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \quad ,$$

de sorte que

$$\sup_{x \in [0,c]} |T(x\,,t)| \leqslant K \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Démontrons, pour terminer, que $T(x\,,t)$ satisfait aussi (1.11b) .

Utilisons l'inégalité (1.38) de façon à avoir

$$|T(x\,,t)| \leqslant M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\, e^{-\lambda_n t} + M_1\, K_o \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}\, e^{-\omega_o s}\, ds$$

$$\leqslant M_1 e^{-\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + M_1 K_o \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \frac{e^{-\omega_o t} - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n - \omega_o}$$

$$\leqslant M_1 e^{-\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + \frac{M_1 K_o}{\lambda_o - \omega_o} e^{-\omega_o t} \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \quad .$$

Posons

$$K = \max \{M_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \, , \frac{M_1 K_o}{\lambda_o - \omega_o} \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\}$$

et finalement, nous obtenons

$$\sup_{x \in [0,c]} |T(x\, , t)| \leqslant 2\, K\, e^{-\omega_o t} \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Remarque.

Nous avons signalé, au début du chapitre, que la condition (1.8) pouvait être remplacée par la condition suivante :

il existe une constante Γ strictement positive telle que

$$|\sigma(x)| \leqslant \Gamma \, (1 + S(x)) \qquad x \in \mathbb{R} \quad , \qquad (1.8)^*$$

les conclusions du Théorème 1 restant toujours valables.

Ce changement d'hypothèse apporte une légère modification dans la preuve du

Lemme 2. La différence essentielle réside, en fait, dans le choix d'une nouvelle fonction auxiliaire.

Définissons

$$U(x\,,z\,,t) = (1+W(x\,,z)) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right)$$

où $W(x\,,z)$ est la fonction construite dans le Lemme 2. $U(x\,,z\,,t)$ est une fonction définie-positive, comme $W(x\,,z)$.

Dérivons U par rapport au système (1.25) :

$$\begin{aligned}
U'(x\,,z\,,t) &= W'(x\,,z) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \\
&\qquad - \Gamma \, |e_N(t)| \, (1+W(x\,,z)) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \\
&= \Big(- \sum_{n\in \mathbf{C}_N} \lambda_n \, c_n \, z_n^2(t) + \sigma(x) \, e_N(t)\Big) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \\
&\qquad - \Gamma \, |e_N(t)| \, U(x\,,y\,,t) \\
&\leqslant |e_N(t)| \, |\sigma(x)| \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \\
&\leqslant |e_N(t)| \, \Gamma \, (1+S(x)) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \quad \text{par} \quad (1.8)^* \\
&\leqslant \Gamma \, |e_N(t)| \, (1+W(x\,,z)) \quad \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)| \, d\tau\right) \\
&= \Gamma \, |e_N(t)| \, U(x\,,z\,,t)
\end{aligned}$$

$$\leqslant K\,\Gamma\, e^{-\lambda_o t}\, U(x\,,z\,,t) \qquad \text{par} \quad (1.26) \qquad .$$

Puisque U est définie positive, nous pouvons écrire

$$\frac{d\,U(x\,,z\,,t)}{U(x\,,z\,,t)} \leqslant K\,\Gamma\, e^{-\lambda_o t}\, dt \qquad ,$$

ce qui donne, par intégration,

$$\ln \frac{U(x(t)\,,z(t)\,,t)}{U(x(0)\,,z(0)\,,0)} \leqslant \frac{K\,\Gamma}{\lambda_o}\,(1 - e^{-\lambda_o t}) \leqslant \frac{K\,\Gamma}{\lambda_o} \qquad t \geqslant 0$$

ou encore

$$U(x(t)\,,z(t)\,,t) \leqslant U(x(0)\,,z(0)\,,0)\, e^{K\Gamma/\lambda_o} \qquad t \geqslant 0$$

$$= (1 + W_o)\, e^{K\Gamma/\lambda_o}\, \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)|\, d\tau\right)$$

$$\leqslant (1 + W_o)\, e^{K\Gamma/\lambda_o} \qquad .$$

De plus,

$$W(x(t)\,,z(t)\,,t)\, \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)|\, d\tau\right)$$

$$\leqslant U(x(t)\,,z(t)\,,t) \qquad t \geqslant 0$$

$$\leqslant (1 + W_o)\, e^{K\Gamma/\lambda_o}\, \exp\left(-\Gamma \int_0^t |e_N(\tau)|\, d\tau\right) \qquad ,$$

d'où,

$$W(x(t)\,,z(t)\,,t) \leqslant (1 + W_o)\, e^{K\Gamma/\lambda_o} \qquad .$$

La suite de la démonstration du Lemme 2 reste alors inchangée. □

Cette nouvelle condition (1.8)* est intéressante car, contrairement à (1.8), elle est vérifiée dans le cas physiquement significatif où $\sigma(x) = -1 + e^x$ (prendre, par exemple, $\Gamma = 2$).

CHAPITRE II :

Comportement Asymptotique de la Solution Dans le Cas où la Première Valeur Propre du Problème de Sturm-Liouville est Nulle

Nous supposerons ici que la plus petite valeur propre λ_o du problème de Sturm-Liouville (A.1)-(A.2) associé à notre système est nulle, c'est-à-dire

$$q \equiv 0 \quad \text{sur} \quad [0, c] \qquad \text{et} \qquad d_1 = d_3 = 0 \, . \quad (2.1)$$

Comme dans le chapitre I, nous nous servirons des hypothèses (1.2) - (1.8) .

Nous allons démontrer un théorème analogue au Théorème 1 .

Théorème 2.

Supposons que

- zéro est une valeur propre du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) ;
- les hypothèses (1.2) , (1.3) , (1.4) et (1.6) sont satisfaites;
- on a soit (1.5) pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit (1.8) et (1.5) pour $n = 0$;

alors,

pour chaque donnée initiale $u_o \in \mathbb{R}$ et f vérifiant (1.2) , le problème (0.1) admet une et une seule solution $(u(t) \, , \, T(x \, , t))$

définie pour tout $(x, t) \in [0, c] \times [0, +\infty[$.

En outre, pour chaque solution $(u(t), T(x, t))$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{aligned} &|u(t)| \leqslant K \\ &\sup_{x \in [0,c]} |T(x, t)| \leqslant K \left(1 + \left|\int_0^t \sigma(u(s))\, ds\right|\right) \end{aligned} \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{2.2}$$

Si, de plus, on a la condition (1.7) et l'inégalité stricte dans (1.3) pour au moins un $n \geqslant 1$, alors il existe des constantes $K > 0$ et $\omega > 0$, dépendant des conditions initiales u_o et f , telles que

$$|u^{(i)}(t)| \leqslant K e^{-\omega t} \qquad i = 0, 1, 2 \qquad t \geqslant 0 \quad ; \tag{2.3}$$

si $\alpha_o \eta_o > 0$, alors $T(x, t)$ satisfait l'inégalité

$$\sup_{x \in [0,c]} |T(x, t)| \leqslant K e^{-\omega t} \qquad t \geqslant 0 \quad ; \tag{2.4}$$

si l'on suppose que (1.5) est satisfaite pour $n = 0$, alors il existe des constantes $K > 0$ et $\omega > 0$, dépendant des conditions initiales u_o et f , telles que

$$\sup_{x \in [0,c]} |T(x, t) - c^{-1/2} f_o| \leqslant K e^{-\omega t} \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{2.5}$$

Enfin, en supposant que les hypothèses (2.1) et (1.8) soient satisfaites et que $\alpha_o \eta_o = 0$ avec $\eta_o \neq 0$, $u(t)$ satisfait (2.3) , et il existe des constantes $K > 0$ et $\omega > 0$, dépendant des conditions initiales, telles que

$$\sup_{x\in[0,c]} |T(x\,,\,t) - c^{-1/2}\,(f_o + \eta_o \int_0^t \sigma(u(s))\,ds)| \leqslant K\,e^{-\omega t} \qquad t \geqslant 0 \quad (2.6)$$

où l'intégrale existe pour tout $t \geqslant 0$.

§ 1. SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES ASSOCIE AU PROBLEME

Ici aussi, nous allons appliquer la méthode de Galerkin au problème (0.1) - (0.2) - (0.3) .

De la même façon que dans le premier chapitre, nous obtenons le système tronqué suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha_o\, y(t) - \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n\, z_n(t) \\ \\ y'(t) = \eta_o\, \sigma(x(t)) \\ \\ z_n'(t) = -\lambda_n\, z_n(t) + \eta_n\, \sigma(x(t)) \qquad n = 1\,, \ldots\,, N \end{cases} \tag{2.7}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = u_o \\ \\ y(0) = f_o \\ \\ z_n(0) = f_n \qquad\qquad n = 1\,, \ldots\,, N \end{cases} .$$

(Nous avons remplacé z_o par y).

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous des hypothèses presque identiques à celles du Théorème 2 , les solutinns de (2.7) existent sur $0 \leqslant t < \infty$ et sont bornées indépendamment de N .

Lemme 4.

Supposons que

- les hypothèses du Lemme 1 ou du Lemme 2 sont satisfaites;

alors,

pour toute condition initiale $(u_o , f_o , \ldots , f_N)$, il existe une solution unique $(x(t) , y(t) , z_n(t))$, $n = 1 , \ldots , N$, du système (2.7) , définie sur $\mathbb{R}^+$.

En outre, il existe une constante $\Omega > 0$, indépendante du rang de troncature N , telle que

$$\begin{cases} |x(t)| \leqslant \Omega & \\ |y(t)| \leqslant \Omega & t \geqslant 0 \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega & n = 1 , \ldots , N \end{cases} \quad . \tag{2.8}$$

Si, de plus,

- $\alpha_o \eta_o > 0$;

- $\alpha_n \eta_n > 0$ pour au moins un $n \geqslant 1$;

alors,

il existe des constantes $\Omega_o > 0$ et $\omega > 0$, indépendantes de N , telles que

$$\left\{\begin{array}{ll} |x(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} & \\ |y(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} & t \geqslant 0 \\ |z_n(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} & n = 1 , \ldots , N \end{array}\right. . \qquad (2.9)$$

Enfin, si

- $\alpha_o = \eta_o = 0$;

alors, on a

$y(t) \equiv f_o$

$x(t)$ et $z_n(t)$ satisfont (2.9) .

Démonstration.

Nous démontrerons ce lemme dans la situation analogue au Lemme 2 .

Pour cela, introduisons les classes

$$\mathbf{A}_N = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n > 0 \ , \ \eta_n = 0\} \cap \{1 \ \ldots \ N\} \quad ;$$

$$\mathbf{B}_N = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n = 0 \ , \ \eta_n > 0\} \cap \{1 \ \ldots \ N\} \quad :$$

$$\mathbf{C}_N = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n \eta_n > 0 \ \text{ ou } \ \alpha_n = \eta_n = 0\} \cap \{1 \ \ \dots \ \ N\} .$$

Le système (2.7) devient alors

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha_o \, y(t) - \sum\limits_{n\in \mathbf{A}_N} \alpha_n \, z_n(t) - \sum\limits_{n\in \mathbf{C}_N} \alpha_n \, z_n(t) \\ y'(t) = \eta_o \, \sigma(x(t)) \\ z_n'(t) = -\lambda_n \, z_n(t) & n \in \mathbf{A}_N \\ z_n'(t) = -\lambda_n \, z_n(t) + \eta_n \, \sigma(x(t)) & n \in \mathbf{B}_N \cup \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Intégrons les équations de la troisième série :

$$z_n(t) = f_n \, e^{-\lambda_n t} \qquad n \in \mathbf{A}_N \qquad :$$

En posant

$$e_N(t) = - \sum_{n\in \mathbf{A}_N} \alpha_n \, f_n \, e^{-\lambda_n t} ,$$

nous obtenons

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha_o \, y(t) - \sum\limits_{n\in \mathbf{C}_N} \alpha_n \, z_n(t) + e_N(t) \\ y'(t) = \eta_o \, \sigma(x(t)) \\ z_n'(t) = -\lambda_n \, z_n(t) + \eta_n \, \sigma(x(t)) & n \in \mathbf{B}_N \cup \mathbf{C}_N \end{cases} .$$

Puisque les classes $\mathbf{B}_N$ et $\mathbf{C}_N$ sont disjointes, nous nous restreignons au système

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha_o\, y(t) - \sum_{n\in \mathbf{C}_N} \alpha_n\, z_n(t) + e_N(t) \\ y'(t) = \eta_o\, \sigma(x(t)) \\ z_n'(t) = -\lambda_n\, z_n(t) + \eta_n\, \sigma(x(t)) \qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases} \qquad (2.10)$$

Comme λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle du problème de Sturm-Liouville, nous pouvons majorer le terme $e_N(t)$ de la façon suivante :

$$|e_N(t)| \leqslant K\, e^{-\lambda_1 t} \qquad t \geqslant 0$$

où

$$K = \|\alpha\|_{L^2}\ \|f\|_{L^2}$$

est un nombre positif et fini.

Pour démontrer (2.8), définissons la fonction de Liapounov

$$W(x\,,y\,,z) = S(x) + c_o\, y^2/2 + \frac{1}{2} \sum_{n\in \mathbf{C}_N} c_n\, z_n^2 \quad .$$

Dérivons cette fonction relativement au système (2.10) et, comme dans le Lemme 2, majorons la dérivée à l'aide de (1.8) :

$$W'(x\,,y\,,z) = - \sum_{n\in \mathbf{C}_N} c_n\, \lambda_n\, z_n^2 + \sigma(x)\, e_N(t)$$

$$W'(x\,,y\,,z) \leq \sigma(x)\ e_N(t)$$

$$\leq K/2\ e^{-\lambda_1 t}\ (1+\Gamma\ W(x\,,y\,,z)) \quad .$$

Puisque $W(x\,,y\,,z)$ est une fonction définie positive, nous pouvons écrire

$$d\,W(x\,,y\,,z)\,/\,(1+\Gamma\ W(x\,,y\,,z)) \leq K/2\ e^{-\lambda_1 t} \quad .$$

En intégrant entre 0 et t et en effectuant le même développement que dans le Lemme 2 , nous obtenons

$$W(x(t)\,,y(t)\,,z(t)) \leq (\frac{1}{\Gamma} + W(u_o\,,f_o\,,f))\ e^{K\Gamma/2\lambda_1} \quad .$$

Posons

$$W_o = \max\,\{S(u_o)\,,S(-u_o)\} + \frac{\tilde{c}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \quad .$$

Nous pouvons alors majorer $W(x(t)\,,y(t)\,,z(t))$, indépendamment du rang de troncature N , par la constante

$$W_2 = (\frac{1}{\Gamma} + W_o)\ e^{K\Gamma/2\lambda_1}$$

dépendant des conditions initiales

$$W(x(t)\,,y(t)\,,z(t)) \leq W_2 \quad .$$

Comme $W(x\,,y\,,z)$ est une somme de termes positifs, nous pouvons majorer chacun de ces termes par W_2 :

- $S(x) \leqslant W_2 \quad \Rightarrow \quad |x(t)| \leqslant \sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_2\}$

- $c_o\, y^2 / 2 \leqslant W_2 \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leqslant \sqrt{2\, W_2 / c_o} \leqslant \sqrt{2\, W_2 / \hat{c}}$

- $c_n\, z_n^2 / 2 \leqslant W_2 \quad \Rightarrow \quad |z_n(t)| \leqslant \sqrt{2\, W_2 / c_n} \leqslant \sqrt{2\, W_2 / \hat{c}} \qquad n \in \mathbf{C}_N$.

Pour $n \in \mathbf{B}_N$, nous avons aussi

$$|z_n(t)| \leqslant \sqrt{2\, W_2 / \hat{c}} \qquad .$$

Pour $n \in \mathbf{A}_N$, nous savons que

$$|z_n(t)| \leqslant K_1$$

avec

$$K_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \qquad .$$

Nous posons alors

$$\Omega = \max \{ \sqrt{2\, W_2 / \hat{c}} \ , \ \sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_2\} \ , \ K_1 \}$$

et nous obtenons les relations (2.8) .

Pour établir la décroissance exponentielle, nous utilisons une nouvelle fonction

$$V(x\,,y\,,z) = W(x\,,y\,,z) - \beta\, \sigma(x)\, y - \rho\, \beta\, \sigma(x)\, z_1$$

où β et ρ sont des constantes strictement positives.

Nous supposons, sans perdre de généralité, que $1 \in \mathbf{C}_N$.

Pour obtenir une égalité du type (1.27) , nous utilisons (1.7) et (2.8a) : ceci implique l'existence d'une constante d strictement positive telle que

$$\sigma'(x) \geqslant d \qquad -\Omega \leqslant x \leqslant \Omega \quad .$$

Nous dérivons $V(x , y , z)$ relativement au système (2.10) et, en posant

$$B_o = (-\rho / 2 - 1)\ \beta\ \alpha_o\ d - \beta\ d\ A / 2$$

$$B_1 = \lambda_1\ c_1 - \beta\ d\ A\ (1 + 2\ d) / 2 - \rho\ \beta\ d\ \alpha_o / 2$$

$$B_n = -\beta\ d\ A\ (1 + \rho) / 2 + \lambda_n\ c_n \qquad n \in \mathbf{C}_N \setminus \{1\}$$

$$\hat{B} = \lambda_1\ \hat{c} - \beta\ d\ A\ (1 + \rho) / 2 \quad ,$$

nous pouvons majorer la dérivée de $V(x , y , z)$ de la façon suivante :

$$V'(x , y , z) \leqslant (\sigma(x) - \beta\ \sigma'(x)\ (y + z_1\ \rho))\ e_N(t) - \beta\ \eta_o\ \sigma^2(x) / 2$$
$$- B_o\ y^2 - B_1\ z_1^2 - \hat{B} \sum_{\mathbf{C}_N \setminus \{1\}} z_n^2 \quad .$$

Nous posons

$$\tau_o = \min\ \{\hat{B}\ ,\ B_o\ ,\ B_1\ ,\ \beta\ \eta_o / 2\}$$

et nous choisissons une constante τ , indépendante de N , telle que

$$\tau < \min\ \{2\ \tau_o\ q / 3\ ,\ 4\ \tau_o / 3\ ,\ 4\ \tau_o / 3\ \tilde{c}\} \quad .$$

Nous obtenons alors

$$V'(x\,,y\,,z) \leqslant (\sigma(x) - \beta\,\sigma'(x)\,(y+\rho\,z_1))\,e_N(t) - \tau\,V(x\,,y\,,z) \quad .$$

Puisque σ et σ' sont continues sur $[-\Omega\,,\Omega]$, il existe une constante $K_o > 0$ telle que

$$|\sigma(x) - \beta\,\sigma'(x)\,(y+\rho\,z_1)| \leqslant K_o \qquad\qquad |x| \leqslant \Omega$$

et donc

$$V'(x\,,y\,,z) \leqslant K_o\,|e_N(t)| - \tau\,V(x\,,y\,,z)$$

$$\leqslant K\,K_o\,e^{-\lambda_1 t} - \tau\,V(x\,,y\,,z) \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Après intégratinn, nous obtenons

$$V(x(t)\,,y(t)\,,z(t)) \leqslant V(u_o\,,f_o\,,f)\,e^{-\tau t} + K\,K_o\,(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\tau t})\,/\,(\tau - \lambda_1) \;.$$

La décroissance exponentielle (2.9) se démontre alors de la même façon que dans le Lemme 2.

Si

$$\alpha_o = \eta_o = 0 \qquad ,$$

alors la dépendance en y n'est pas couplée dans les systèmes (2.7) , (2.10) . Dans ce cas, nous voyons aisément que

$$y(t) \equiv f_o \qquad .$$

Nous pouvons appliquer le Lemme 2 au système (2.10) privé de la deuxième équation et ceci, en prouvant la décroissance exponentielle de $x(t)$ et $z_n(t)$, conclut la démonstration du Lemme 4.□

Corollaire du Lemme 4.

Supposons que

$$\alpha_o = 0 \qquad \text{mais} \qquad \eta_o \neq 0 \quad ;$$

alors, si les autres hypothèses du Lemme 4 sont satisfaites, il existe des constantes $\Omega_o > 0$ et $\omega > 0$, indépendantes du rang de troncature N , telles que

$$|x(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t}$$

$$|z_n(t)| \leqslant \Omega_o \, e^{-\omega t} \qquad n = 1 , \dots , N \quad t \geqslant 0 \tag{2.11}$$

$$y(t) = f_o + \eta_o \int_0^t \sigma(x(s)) \, ds$$

où l'intégrale existe pour $t \geqslant 0$.

Démonstration.

Lorsque

$$\alpha_o = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_o \neq 0 \quad ,$$

le système (2.10) devient

$$\begin{cases} x'(t) = - \sum_{n \in \mathbf{C}_N} \alpha_n \, z_n(t) + e_N(t) \\ y'(t) = \eta_o \, \sigma(x(t)) \\ z_n'(t) = -\lambda_n \, z_n(t) + \eta_n \, \sigma(x(t)) \qquad n \in \mathbf{C}_N \end{cases} \quad . \tag{2.12}$$

L'équation du milieu n'étant pas couplée au reste du système, nous pouvons appliquer le Lemme 2 au système (2.12) privé de cette équation, ce qui nous permet d'obtenir (2.11a) et (2.11b) .

L'intégrale $\int_0^t \sigma(x(s))\, ds$ existe pour $t \geq 0$ par (1.6) et par la décroissance exponentielle de $x(t)$.□

§ 2. EQUATION DE VOLTERRA ASSOCIEE AU PROBLEME

Etudions l'équation de Volterra

$$u(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2(t-s)\ \sigma(u(s))\ ds$$

où

$$\begin{cases} K_1(t) = -\alpha_o\ f_o\ t + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ f_n\ (e^{-\lambda_n t} - 1)/\lambda_n \\ \\ K_2(t) = -\alpha_o\ \eta_o\ t + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n\ (e^{-\lambda_n t} - 1)/\lambda_n \end{cases} \qquad t \geqslant 0\ . \qquad (2.13)$$

Nous pouvons prouver que $K_1(t)$ et $K_2(t)$ sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{cases} K_1'(t) = -\alpha_o\ f_o - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ f_n\ e^{-\lambda_n t} \\ \\ K_2'(t) = -\alpha_o\ \eta_o - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ \eta_n\ e^{-\lambda_n t} \end{cases} \qquad t \geqslant 0\ . \qquad (2.14)$$

Nous allons étudier le comportement de la solution $u(t)$ de l'équation de Volterra dans le cas où la première valeur propre du problème de Sturm-Liouville est nulle.

Lemme 5.

Supposons que

- les hypothèses (1.2) - (1.4) sont satisfaites;
- la fonction $\sigma(x)$ vérifie (1.6) ;
- on a soit (1.5) pour tout $n \geqslant 0$, soit (1.5) pour $n = 0$ et (1.8) ;

alors,

l'équation de Volterra avec (2.13) admet une et une seule solution $u(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Quelle que soit la condition initiale u_o , il existe une constante K strictement positive telle que

$$|u(t)| \leqslant K \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

De plus, $u(t)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$u'(t) = K_1'(t) + \int_0^t K_2'(t-s)\, \sigma(u(s))\, ds \qquad t \geqslant 0 \qquad (2.15)$$

où $K_1'(t)$ et $K_2'(t)$ sont données par (2.14) .

Si, en outre,

- $\sigma(x)$ vérifie (1.7) ;

- l'inégalité stricte dans (1.3) est satisfaite pour au moins un $n \geqslant 1$;

alors,

il existe deux constantes K et ω strictement positives telles que

$$|u^{(i)}(t)| \leqslant K\, e^{-\omega t} \qquad i = 0\,,1\,,2 \qquad t \geqslant 0 \quad . \tag{2.16}$$

Démonstration.

Considérons, à la place de (1.33) , la famille de systèmes d'équations différentielles , indexée par $N = 0\,,1\,,\ldots$

$$\begin{cases} x'_N(t) = -\alpha_o\, y_N(t) - \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n\, z_{Nn}(t) \\ \\ y'_N(t) = \eta_o\, \sigma(x_N(t)) \\ \\ z'_{Nn}(t) = -\lambda_n\, z_{Nn}(t) + \eta_n\, \sigma(x_N(t)) \qquad n = 1\,,2\,,\ldots\,,N \end{cases} \tag{2.17}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} x_N(0) = u_o \\ \\ y_N(0) = f_o \\ \\ z_{Nn}(0) = f_n \qquad n = 1\,,\ldots\,,N \end{cases} \quad .$$

Pour chaque N , (2.16) est de la même forme que le système (2.7) étudié dans le Lemme 4. En utilisant ce lemme et la première partie du Lemme 3 , nous obtenons les premiers résultats du Lemme 5 avec K_1 , K_2 , K_1' et K_2' donnés par (2.13) et (2.14) .

Il nous reste à démontrer (2.16) .

<u>(2.16) , i = 0</u> :

Il suffit d'appliquer (2.9) au système tronqué (2.17) .

<u>(2.16) , i = 1 , 2</u> :

Dérivons l'équation de Volterra en utilisant (2.14) :

$$u'(t) = -\alpha_o f_o - \alpha_o \eta_o \int_0^t \sigma(u(s))\, ds + \omega(t) \qquad t \geq 0 \tag{2.18}$$

avec

$$\omega(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s))\, ds \tag{2.19}$$

Nous avons aussi

$$u''(t) = -\alpha_o \eta_o \sigma(u(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n\right) \sigma(u(t))$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s))\, ds \qquad t \geq 0 \tag{2.20}$$

(Nous pouvons dériver car les séries dérivées convergent uniformément).

Notons que, par (2.16) , $i = 0$, nous avons (1.38) . Donc, par (2.20) et en employant le même raisonnement que dans le Lemme 3 , l'inégalité (2.16) , $i = 2$, est prouvée.

Nous pouvons alors utiliser le théorème de la moyenne :

$$\lim_{t \to \infty} u'(t) = 0 \quad .$$

D'autre part, par (2.19) et par un raisonnement similaire à celui développé dans le Lemme 3 pour prouver la décroissance exponentielle de $u'(t)$, nous pouvons conclure que $\omega(t)$ décroît exponentiellement vers 0 pour $t \to \infty$.

En utilisant (2.18) et en laissant tendre t vers l'infini, nous obtenons

$$-\alpha_o f_o = \alpha_o \eta_o \int_0^\infty \sigma(u(s))\, ds \tag{2.21}$$

et donc

$$u'(t) = \alpha_o \eta_o \int_t^\infty \sigma(u(s))\, ds + \omega(t) \quad .$$

Par (1.38) , nous pouvons majorer $u'(t)$:

$$|u'(t)| \leqslant \alpha_o \eta_o K_o \int_t^\infty e^{-\omega_o s}\, ds + K_1 e^{-\omega_o t}$$

$$\leqslant \alpha_o \eta_o K_o e^{-\omega_o t} / \omega_o + K_1 e^{-\omega_o t}$$

$$|u'(t)| \leqslant K\, e^{-\omega_o t} \qquad\qquad t \geqslant 0$$

avec

$$K_1 = \max \{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n f_n| \ , \ K_o / (\lambda_1 - \omega_o) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n \} \quad .$$

Ceci prouve (2.16) pour $i = 1$ et termine la démonstration du Lemme 5.□

Corollaire du Lemme 5.

Supposons

$$\alpha_o = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_o \neq 0 \qquad ;$$

alors, si les autres hypothèses du Lemme 5 sont satisfaites, l'équatinn de Volterra avec

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n (e^{-\lambda_n t} - 1) / \lambda_n \\ K_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n (e^{-\lambda_n t} - 1) / \lambda_n \end{aligned} \right. \tag{2.22}$$

admet une solution unique $u(t)$ qui décroît exponentiellement dans le sens de (2.16) .

Démonstration.

Si $\alpha_o = 0$ et $\eta_o \neq 0$, le système (2.17) devient

$$\begin{cases} x_N'(t) = -\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, z_{Nn}(t) & \\ y_N'(t) = \eta_o \, \sigma(x_N(t)) & N = 0 , 1 , \ldots \\ z_{Nn}'(t) = -\lambda_n \, z_{Nn}(t) + \eta_n \, \sigma(x_N(t)) & n = 1 , \ldots , N \end{cases}$$

Nous voyons que la deuxième équation est indépendante du reste du système.

Remarquons, en outre que $K_1(t)$ et $K_2(t)$ sont de la forme (1.30) avec la somme commençant à $n = 1$ au lieu de $n = 0$.

Pour prouver le lemme, il suffit alors d'appliquer le Lemme 4 et l'argumentation du Lemme 3 .□

§ 3. PREUVE DU THEOREME 2

Si les hypothèses du théorème sont satisfaites, alors nous avons prouvé, dans le Lemme 5 , l'existence et l'unicité de la solution $u(t)$ de l'équation de Volterra.

Nous définissons alors la fonction $T(x, t)$ par (1.39) et (1.40) .

Nous pouvons montrer que le couple $(u(t), T(x, t))$ défini ci-dessus est la solution unique du problème (0.1) - (0.3) en utilisant les mêmes arguments que dans le chapitre I .

Par le Lemme 5 , nous savons que $u(t)$ satisfait (2.2a) et (2.3) pour $i = 0, 1, 2$.

En outre, nous pouvons écrire $T(x, t)$ sous une forme différente :

$$T(x, t) = f_o c^{-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) e^{-\lambda_n t} + \eta_o c^{-1/2} \int_0^t \sigma(u(s)) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} \sigma(u(s)) ds \quad . \quad (2.23)$$

Nous pouvons donc majorer $T(x, t)$ de la façon suivante :

$$|T(x, t)| \leqslant K_1 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| + K_1 \left| \int_0^t \sigma(u(s)) ds \right| \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$$

ce qui entraîne (2.2b) .

Remarquons que (2.23) peut s'écrire

$$T(x, t) = \{f_o + \eta_o \int_0^t \sigma(u(s))\, ds\}\, c^{-1/2} + T_1(x, t) \qquad (2.24)$$

où, de la même façon que dans le Théorème 1 ,

$$|T_1(x, t)| \leq K_1\, e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| + K_1\, K_o\, e^{-\omega_o t} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| / (\lambda_n - \omega_o)\ . \qquad (2.25)$$

Supposons maintenant que $\alpha_o\, \eta_o > 0$.

Nous savons, par (2.21) , que

$$f_o = -\eta_o \int_0^{\infty} \sigma(u(s))\, ds \qquad .$$

Par (2.24) , nous obtenons alors

$$T(x, t) = -\eta_o\, c^{-1/2} \int_t^{\infty} e^{-\omega_o s}\, ds + T_1(x, t)$$

et, par (1.38) ,

$$|T(x, t)| \leq |\eta_o|\, c^{-1/2}\, K_o \int_t^{\infty} e^{-\omega_o s}\, ds + |T_1(x, t)| \qquad ,$$

ce qui, par (2.25) , prouve (2.4) .

Si (1.5) est satisfaite pour $n = 0$, il suffit, pour prouver (2.5) , d'utiliser (2.24) pour $\eta_o = 0$ et (2.25) .

Enfin, si $\alpha_o \eta_o = 0$ et $\eta_o \neq 0$, nous pouvons utiliser le Corollaire du Lemme 5 : $u(t)$, solution de l'équation de Volterra avec (2.22) , satisfait alors (2.3) .

Pour montrer que $T(x, t)$ satisfait (2.6) , nous nous servons de (2.24) et (2.25) . L'intégrale de (2.6) existe pour $t \geqslant 0$ grâce à (1.6) et (2.3) , ce qui achève la démonstration du théorème.□

CHAPITRE III :

STABILITÉ ASYMPTOTIQUE EN NORME L^2

Après avoir analysé le comportement asymptotique de la solution du problème (0.1) - (0.3) , nous avons pensé qu'il serait intéressant d'étudier la stabilité au sens de Liapounov de l'origine de $\mathbb{R} \times L^2([0, c])$.

Les données initiales de notre système étant les couples (u_0, f) , avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1([0, c])$, le problème de la stabilité peut être posé en divers espaces fonctionnels qui contiennent $\mathbb{R} \times C^1([0, c])$.

Les meilleurs résultats de stabilité seraient évidemment ceux exprimés en norme de la convergence uniforme, i.e. en norme L^∞ ; il semble cependant peu probable qu'on puisse obtenir de tels résultats.

Par contre, en utilisant les propriétés établies au chapitre I (nous nous sommes, en effet, limitées au cas où la plus petite valeur propre λ_0 du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) est strictement positive), il est possible d'obtenir des résultats de stabilité en norme L^2 et ceci sera présenté au paragraphe suivant. A l'aide de ces résultats, nous serons à même d'apporter des précisions supplémentaires sur le comportement asymptotique des solutions en norme L^∞ (§ 2).

§ 1. STABILITE GLOBALE ASYMPTOTIQUE DE L'ORIGINE DANS $L^2([0\,,c])$

Théorème.

La solution nulle du problème (0.1) - (0.3) est globalement asymptotiquement stable, c'est-à-dire

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D > 0$ tel que, pour tout $u_o \in \mathbb{R}$ et tout $f \in C^1([0\,,c])$ vérifiant les conditions aux limites (A.2) ,

$$\begin{cases} |u_o| < D \\ \|f\|_{L^2} < D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u(t)| < \varepsilon \\ \|T(\cdot\,,t)\|_{L^2} < \varepsilon \end{cases} \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad (3.1)$$

(*stabilité simple*);

(2) Pour tout $r > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $u_o \in \mathbb{R}$ et tout $f \in C^1([0\,,c])$ vérifiant les conditions aux limites (A.2) ,

$$\begin{cases} |u_o| < r \\ \|f\|_{L^2} < r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u(t)| < R \\ \|T(\cdot\,,t)\|_{L^2} < R \end{cases} \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad (3.2)$$

(*stabilité globale*);

(3) Pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon\,,R) > 0$ tel que,

$$\begin{cases} |u_o| < R \\ \|f\|_{L^2} < R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u(t)| < \varepsilon \\ \|T(\cdot\,,t)\|_{L^2} < \varepsilon \end{cases} \quad \forall\, t \geqslant \tau(\varepsilon\,,R) \quad (3.3)$$

(c'est-à-dire $u(t)$ et $T(x, t)$ tendent vers zéro (T en norme $L^2([0, c])$) pour $t \to \infty$, uniformément par rapport aux conditions initiales u_o et f dans une partie bornée B de $\mathbb{R} \times L^2([0, c])$).

Démonstration de (1).

1) Comportement de $u(t)$:

Par (1.10), nous savons que

$$|u(t)| \leqslant K$$

où

$$K = 2 \max \{ \sqrt{2 W_o / \hat{c}} \, , \sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_o\}\} \quad .$$

Considérons l'hypothèse $|u_o| < D$ où $-D < u_o < D$.

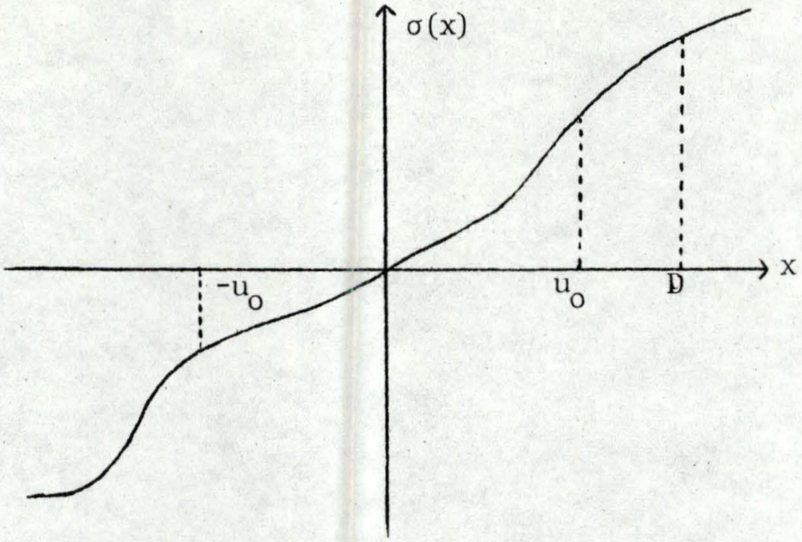
1er cas : soit $D > u_o > 0$:

$$|S(u_o)| \triangleq |\int_0^{u_o} \sigma(\tau) \, d\tau|$$

$$= \int_0^{u_o} \sigma(\tau) \, d\tau \qquad [\sigma(\tau) > 0 \text{ pour } 0 < \tau < u_o \text{ par } (1.6)]$$

$$\leqslant \int_0^D \sigma(\tau) \, d\tau$$

$$\leqslant D \sup_{\tau \in [0,D]} |\sigma(\tau)| \quad [\text{ théorème de la moyenne }]$$



<u>2ième cas</u> : soit $-D < u_o < 0$:

$$|S(u_o)| \triangleq \left|\int_0^{u_o} \sigma(\tau)\, d\tau\right|$$

$$= \left|-\int_{u_o}^{0} \sigma(\tau)\, d\tau\right|$$

$$\leqslant \int_{u_o}^{0} |\sigma(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant \int_{-D}^{0} |\sigma(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant D \sup_{\tau \in [-D,0]} |\sigma(\tau)| \qquad .$$

Nous pouvons donc conclure que, pour $|u_o| < D$, on a

$$|S(u_o)| \leqslant D \sup_{\tau \in [-D,D]} |\sigma(\tau)| \quad .$$

Définissons une fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} 1 \;:\; [0\,,+\infty[\;&\to\; [0\,,+\infty[\\ s \;&\to\; \sup_{\tau \in [-s,s]} |\sigma(\tau)| \quad . \end{aligned}$$

Donc, pour $|u_o| < D$,

$$|S(u_o)| \leqslant D \;\; 1(D) \quad .$$

<u>Propriétés de 1</u> :

(1) $1(0) = 0$.

En effet,

$$1(0) \triangleq \sup_{\tau=0} |\sigma(\tau)|$$

$$= |\sigma(0)| = 0$$

car σ est continue et $x\,\sigma(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

(2) 1 est continue au point $s = 0$.

C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |1(s)| < \varepsilon \quad .$$

Par hypothèse, σ est continue en 0 , c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Delta > 0$ tel que

$$|\tau| < \Delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(\tau)| < \varepsilon \quad .$$

Posons $\delta = \Delta$.

Pour $|s| < \delta$, tout $\tau \in [-s\,,s]$ est tel que $|\tau| < \Delta$ et donc $|\sigma(\tau)| < \varepsilon$; ceci implique que, si $|s| < \delta$,

$$|1(s)| = \sup_{\tau \in [-s,s]} |\sigma(\tau)| < \varepsilon \quad .$$

Exprimons W_o en fonction de D :

$$W_o \overset{\Delta}{=} \max\,\{S(u_o)\ ,\ S(-u_o)\} + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2$$

$$\leqslant D\ \ 1(D) + \frac{\tilde{c}}{2}\ \|f\|^2_{L^2} \quad .$$

Donc,

$$2\,W_o / \hat{c} \leqslant \frac{2}{\hat{c}}\ \{D\ \ 1(D) + \frac{\tilde{c}}{2}\ \|f\|^2_{L^2}\}$$

$$\leqslant \frac{2}{\hat{c}}\ \{D\ \ 1(D) + \frac{\tilde{c}}{2}\ D^2\}$$

$$= 2\,D / \hat{c}\ \ \{1(D) + \frac{\tilde{c}}{2}\,D\} \quad .$$

Ceci implique que

$$\sqrt{2\,W_o / \hat{c}} \leqslant \sqrt{2\,D / \hat{c}}\ \ \{1(D) + \frac{\tilde{c}}{2}\,D\}^{1/2}$$

Il reste à analyser le comportement de $\sup\,\{|x|\ |\ S(x) \leqslant W_o\}$.

Posons

$$L(W_o) = \sup\,\{x \geqslant 0\ |\ S(x) \leqslant W_o\}$$

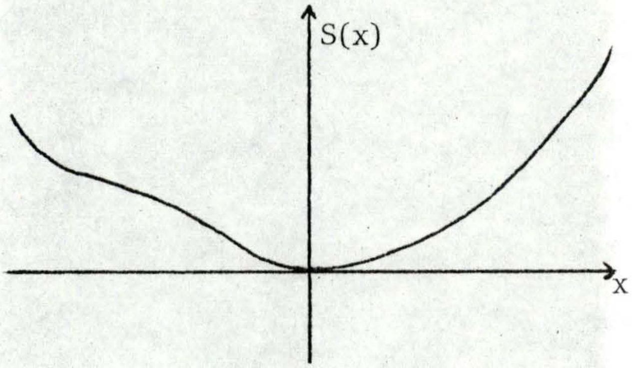
$$-L'(W_o) = \inf\,\{x \leqslant 0\ |\ S(x) \leqslant W_o\} \quad .$$

Alors,

$$\sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_o\} = \max (L , L')$$

Considérons la fonction S :

$$S(x) = \int_o^x \sigma(\tau)\, d\tau$$



Soit S_+ la restriction de S à $[0 , +\infty[$, elle est continue et strictement croissante puisque, pour tout $\tau > 0$, $\sigma(\tau) > 0$.

Par suite, nous avons une bijection

$S_+ : [0 , +\infty[\to [S(0) , \lim_{+\infty} S(x)[$.

Or, $S(0) = \int_0^0 \sigma(\tau)\, d\tau = 0$ et

$\lim_{+\infty} S(x) = +\infty$ par (1.6) ,

donc S_+ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Alors, $S_+^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ existe, continue et strictement croissante.

Soit S_- la restriction de S à $]-\infty , 0]$, elle est continue et strictement décroissante puisque, pour tout $\tau < 0$, $\sigma(\tau) < 0$.

Par suite, nous avons une bijection

$S_- :]-\infty , 0] \to]\lim_{-\infty} S(x) , S(0)]$.

Or, $S(0) = 0$ et

$\lim_{-\infty} S(x) = +\infty$ par (1.6) ,

donc S_- est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Alors $S_-^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ existe, continue et strictement croissante.

D'où

$$L(W_o) = \sup \{x \geqslant 0 \mid S(x) \leqslant W_o\}$$

$$= \sup \{x \geqslant 0 \mid x \leqslant S_+^{-1}(W_o)\}$$

$$= S_+^{-1}(W_o)$$

D'où

$$-L'(W_o) = \inf \{x \leqslant 0 \mid S(x) \leqslant W_o\}$$

$$= \inf \{x \leqslant 0 \mid x \geqslant S_-^{-1}(W_o)\}$$

$$= S_-^{-1}(W_o)$$

Et donc,

$$\sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_o\} = \max (L , L')$$

$$= \max (S_+^{-1}(W_o) , -S_-^{-1}(W_o)) \quad .$$

Nous pouvons, à présent, estimer le majorant de $u(t)$:

$$K = 2 \max \{ \sqrt{2 W_o / \hat{c}} , \sup \{|x| \mid S(x) \leqslant W_o\}\}$$

$$\leqslant 2 \max \{ \sqrt{2 D / \hat{c}} \, [1(D) + \frac{\tilde{c}}{2} D]^{1/2} , \max \{S_+^{-1}(W_o) , -S_-^{-1}(W_o)\}\}$$

$$= \phi(D) \quad .$$

Cette fonction est telle que

$$\lim_{D \to 0} \phi(D) = 0 \quad ;$$

en effet,

$$\lim_{D \to 0} \{ \sqrt{2 D / \hat{c}} \, [1(D) + \frac{\tilde{c}}{2} D]^{1/2}\} = 0$$

et S_+^{-1} et S_-^{-1} sont des fonctions continues.

Il existe donc un D suffisamment petit tel que

$$\left\{\begin{array}{l} |u_o| < D \\ \\ \| f \|_{L^2} < D \end{array}\right. \Rightarrow \quad |u(t)| \leqslant K \leqslant \phi(D) < \varepsilon \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad .$$

2) <u>Comportement de $T(x\,,t)$</u> :

Appliquons à (1.41) , l'inégalité du triangle :

$$\| T(x\,,t) \|_{L^2} \leqslant \left\{\int_0^c \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \right|^2 dx\right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{\int_0^c \left| \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\, \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau \right|^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Etudions séparément les deux termes du membre de droite :

<u>1er terme</u> :

$$\int_0^c \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \right|^2 dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(|f_n|\, e^{-\lambda_n t}\right)^2 \qquad \text{(théorème de Parseval)}$$

$$\leqslant e^{-2\lambda_o t} \, \| f \|^2_{L^2} \quad .$$

<u>2ième terme</u> :

$$\int_0^c \left| \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\, \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau \right|^2 dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(|\eta_n|^2 \left| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau \right|^2 \right)$$

$$\leqslant \{ \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \}^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|^2 \{ e^{-\lambda_n t} \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n} \}^2$$

$$= \{ \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \}^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|^2 \{ \frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n} \}^2$$

$$\leqslant \{ \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \}^2 \, \|\eta\|_{L^2}^2 / \lambda_o^2$$

En réunissant ces deux résultats, nous obtenons

$$\|T(x\,,t)\|_{L^2} \leqslant e^{-\lambda_o t} \|f\|_{L^2} + \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \; \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} + \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \; \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o \quad .$$

Puisque σ est continue, et en employant le résultat obtenu ci-dessus pour $u(t)$, nous pouvons rendre $\sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))|$ aussi petit que nous le voulons.

Puisque η est une fonction connue de $L^2([0\,,c])$, $\|\eta\|_{L^2}$ est fini.

Quant à $\|f\|_{L^2}$, il est plus petit que D par hypothèse.

Donc,

$$\|T(\cdot\,,t)\|_{L^2} < \varepsilon \qquad . \square$$

Démonstration de (2).

1) Comportement de $u(t)$:

Dans la démonstration du point (1), nous avons trouvé, pour $|u(t)|$, le majorant suivant :

$$2 \max \{ \sqrt{2\, D / \hat{c}}\; [1(D) + \frac{\tilde{c}}{2} D] \,,\, \max \{S_+^{-1}(W_o) \,,\, -S_-^{-1}(W_o)\}\} \quad .$$

Posons

$$R' = 2 \max \{ \sqrt{2\, r / \hat{c}}\; [1(r) + \frac{\tilde{c}}{2} r] \,,\, \max \{S_+^{-1}(W_o) \,,\, -S_-^{-1}(W_o)\}\}$$

(Remarquons que $S_+^{-1}(W_o)$ et $S_-^{-1}(W_o)$ sont des fonctions continues de r).

En supposant $|u_o| < r$ et $\|f\|_{L^2} < r$, nous avons

$$|u(t)| < R' \qquad \forall\, t \geq 0 \quad .$$

2) Comportement de $T(x,t)$:

Nous avons trouvé, ci-dessus, que

$$\|T(x,t)\|_{L^2} \leq r + \frac{1}{\lambda_o} \|\eta\|_{L^2} \sup_{s \in [0,t]} |\sigma(u(s))|$$

lorsque $|u_o| < r$ et $\|f\|_{L^2} < r$.

Posons

$$R'' = r + \frac{1}{\lambda_o} \|\eta\|_{L^2} \sup_{s \in [0,t]} |\sigma(u(s))| \quad .$$

Nous savons que, pour tout $s \in [0, t]$, $|u(s)| < R'$ où R' est une fonction de r.

Puisque σ est continue, nous pouvons majorer $|\sigma(u(s))|$ en fonction de r.

Donc, pour tout $r > 0$, il existe R'' tel que

$$\| T(\cdot, t) \|_{L^2} < R'' .$$

En prenant

$$R = \max (R', R'') ,$$

nous terminons la démonstration de (2). □

Démonstration de (3).

1) Comportement de $u(t)$:

Rappelons l'un des résultats du Théorème 1 :

Il existe $K > 0$ et $\omega > 0$ tels que

$$|u(t)| < K e^{-\omega t} \qquad \forall t \geqslant 0 . \tag{1.11}$$

Nous savons que

- ω est indépendant des conditions initiales;
- $K = \max \{ \sqrt{3 W_o / q} , \ \sqrt{6 W_o / \hat{c}} \}$

où

$$W_o = \max\{S(u_o)\,,\,S(-u_o)\} + \frac{\tilde{c}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2$$

$$\leqslant R\ \ 1(R) + \frac{\tilde{c}}{2}\ R^2$$

lorsque $|u_o| < R$ et $\|f\|_{L^2} < R$,

et où q est une constante strictement positive telle que $q\,x^2 \leqslant S(x)$ pour x assez petit.

Puisque ω est indépendant des conditions initiales, nous avons

$$\lim_{t\to 0} e^{-\omega t} = 0 \qquad .$$

Donc, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\tau(\varepsilon')$ tel que

$$|e^{-\omega t}| < \varepsilon' \quad \Leftrightarrow \quad |u(t)| < K\,\varepsilon' \qquad \forall\ t \geqslant \tau \quad .$$

Posons

$$\varepsilon = K\,\varepsilon' \qquad .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon\,,K)$ tel que

$$|u(t)| < \varepsilon \qquad \forall\ t \geqslant \tau \quad .$$

Puisque K dépend de R , nous pouvons conclure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon\,,R)$ tel que

$$|u(t)| < \varepsilon \qquad \forall\ t \geqslant \tau \quad .$$

2) Comportement de $T(x, t)$:

Dans la démonstration de (1), nous avons obtenu

$$\|T(.,t)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_o t} \|f\|_{L^2} + \sup_{s\in[0,t]} |\sigma(u(s))| \; \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o$$

et nous savons, par (1.38), qu'il existe des constantes K_o et $\omega_o > 0$ telles que

$$|\sigma(u(t))| \leq K_o \, e^{-\omega_o t} \qquad t \geq 0 \quad .$$

où ω_o est une constante indépendante des conditions initiales (donc $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\omega_o t} = 0$) et telle que $\omega_o < \lambda_o$ et où

$$K_o = M \; \Omega_o$$

avec

$$\Omega_o = \max \{ \sqrt{3 \, W_o / q} \;,\; \sqrt{6 \, W_o / \hat{c}} \}$$

et M une constante provenant des hypothèses.

Nous pouvons alors majorer $\|T(\cdot, t)\|_{L^2}$ de la façon suivante :

$$\|T(\cdot,t)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_o t} \|f\|_{L^2} + K_o \, e^{-\omega_o t} \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o$$

$$\leq (\|f\|_{L^2} + K_o \; \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o) \, e^{-\omega_o t} \quad .$$

Puisque $\|f\|_{L^2} + K_o \; \|\eta\|_{L^2} / \lambda_o$ est une fonction de R qui reste bornée sur B et que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\omega_o t} = 0 \qquad ,$$

nous pouvons conclure que, pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon , R)$ tel que

$$\| T(\cdot , t) \|_{L^2} < \varepsilon \qquad \forall\, t \geq \tau(\varepsilon , R) \quad .$$

Ceci termine la démonstration du théorème.□

§ 2. PRECISIONS SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE L'ORIGINE EN NORME L^∞

Théorème.

Pour toute condition initiale dans un ensemble borné B de $\mathbb{R} \times L^2([0, c])$, la solution (u, T) du problème (0.1) - (0.2) satisfait

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \tag{3.4}$$

$$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0 \tag{3.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} u''(t) = 0 \tag{3.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,c]} |T(x, t)| = 0 \tag{3.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,c]} |\partial T(x, t) / \partial t| = 0 \tag{3.8}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,c]} |\partial T(x, t) / \partial x| = 0 \tag{3.9}$$

uniformément par rapport à la condition initiale $(u_o, f) \in B$.

Remarque.

Nous savons que $T(x, t)$ représente la température au point x calculée au temps t.

La dérivée partielle de T par rapport au temps représente la vitesse de variation de la température alors que celle par rapport à x représente le flux de la température.

Démonstration.

Réécrivons la thèse de manière légèrement différente :

Pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau^*(\varepsilon , R) > 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} |u_o| < R \\ \\ \|f\|_{L^2} < R \end{array}\right. \qquad (*) \quad .$$

Alors,

$$\left.\begin{array}{ll} |u(t)| < \varepsilon & (3.4)' \\ |u'(t)| < \varepsilon & (3.5)' \\ |u''(t)| < \varepsilon & (3.6)' \\ \sup\limits_{x\in[0,c]} |T(x , t)| < \varepsilon & (3.7)' \\ \sup\limits_{x\in[0,c]} |T_t(x , t)| < \varepsilon & (3.8)' \\ \sup\limits_{x\in[0,c]} |T_x(x , t)| < \varepsilon \quad . & (3.9)' \end{array}\right. \qquad \forall\, t \geqslant \tau^*$$

Démonstration de (3.4)' , (3.5)' et (3.6)' :

Nous nous servirons ici du résultat (1.11)

$$|u^{(i)}(t)| \leq K\, e^{-\omega t} \qquad i = 0 , 1 , 2 \qquad \forall\, t \geq 0$$

où ω est indépendante des conditions initiales et

$$K = \max \{ \sqrt{6\, W_o / \hat{c}} , \sqrt{3\, W_o / q} , \|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} , K_o \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} / (\lambda_o - \omega_o) ,$$

$$P , K_o\, (2\, \lambda_o - \omega_o) \|\alpha\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} / (\lambda_o - \omega_o) \} \quad .$$

La constante K dépend évidemment des conditions initiales.

Montrons qu'il existe une fonction $\nu(R)$ telle que, pour chaque condition initiale vérifiant $(*)$, K vérifie l'inégalité

$$K < \nu(R) \quad .$$

En effet,

(1) $\sqrt{3\, W_o / q}$ et $\sqrt{6\, W_o / \hat{c}}$ sont majorés par une fonction de R ; (Nous l'avons vu dans la preuve de (3) de la stabilité globale asymptotique de l'origine).

(2) $$\|\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2} < \|\alpha\|_{L^2} R \quad .$$

Or, α est une fonction connue de $L^2([0 , c])$; donc $\|\alpha\|_{L^2} < \infty$.

(3) Puisque $K_o = M\, \Omega_o$ avec

$$\Omega_o = \max \{ \sqrt{3\, W_o / q} , \sqrt{6\, W_o / \hat{c}} \}$$

inférieur à une fonction de R, et que α et η sont deux fonctions de $L^2([0,c])$, nous pouvons majorer $K_o \; \|\alpha\|_{L^2} \; \|\eta\|_{L^2} / (\lambda_o - \omega_o)$ et $K_o \; (2\lambda_o - \omega_o) \; \|\alpha\|_{L^2} \; \|\eta\|_{L^2} / (\lambda_o - \omega_o)$.

(4) $$P = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \, \lambda_n \, e^{-(\lambda_n - \delta) t_o} \qquad t_o > 0$$

où δ est indépendant des conditions initiales

$$\leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \, e^{-2(\lambda_n - \delta) t_o}\Big)^{1/2} \qquad \text{(Holder)}$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n f_n| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, e^{-(\lambda_n - \delta) t_o}$$

$$\leqslant \|\alpha\|_{L^2} \; R \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, e^{-(\lambda_n - \delta) t_o} .$$

Nous savons que

$$k^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, e^{-(\lambda_n - \delta) t_o}$$

est un nombre fini.

D'autre part, puisque ω ne dépend pas des conditions initiales, nous avons

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\omega t} = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe $\tau^*(\beta)$ tel que, pour tout $t \geqslant \tau^*(\beta)$, $e^{-\omega t} < \beta$.

Posons $\beta = \varepsilon / K$; nous aurons alors, pour tout $t \geqslant \tau^*(\varepsilon / K)$,

$$|u^{(i)}(t)| \leqslant K\,\varepsilon / K = \varepsilon \quad .$$

Or K dépend de R ; d'où

$$\tau^{*}(\varepsilon / K) = \tau^{*}(\varepsilon\,,R) \quad .$$

Démonstration de (3.7)' :

Reprenons l'égalité (1.39) :

$$T(x\,,t) = \int_0^c G(x\,,\xi\,;t)\; f(\xi)\; d\xi + \int_0^t \sigma(u(\tau))\; \{\int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\; \eta(\xi)\; d\xi\}\; d\tau$$

avec

$$G(x\,,\xi\,;t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\; y_n(\xi)\; e^{-\lambda_n t} \quad .$$

D'où,

$$|T(x\,,t)| \leqslant |\int_0^c G(x\,,\xi\,;t)\; f(\xi)\; d\xi| + |\int_0^t \sigma(u(\tau))\; \{\int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\; \eta(\xi)\; d\xi\}\; d\tau| \quad .$$

Etudions séparément les deux termes du membre de droite de cette inégalité :

(1) $$|\int_0^c G(x\,,\xi\,;t)\; f(\xi)\; d\xi|$$

$$\leqslant \{\int_0^c |G(x\,,\xi\,;t)|^2\; d\xi\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2} \qquad \text{(Holder)}$$

$$= \{\sum_{n=0}^{\infty} |y_n(x)|^2\; e^{-2\lambda_n t}\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2}$$

$$\leq \{M^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda_n t}\}^{1/2} \quad \|f\|_{L^2} \qquad \text{(par (A.7))}$$

$$= \{M^2 e^{-2\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - \lambda_o)t}\}^{1/2} \quad \|f\|_{L^2} \qquad .$$

Posons

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - \lambda_o)t}$$

et étudions la convergence de cette série .

Pour cela, appliquons la règle de d'Alembert :

$$\frac{e^{-2(\lambda_{n+1} - \lambda_o)t}}{e^{-2(\lambda_n - \lambda_o)t}} = e^{-2(\lambda_{n+1} - \lambda_n)t}$$

$$= e^{-2\{[(n+1)^2 - n^2]\pi^2/L^2 + O(1)\}t}$$

$$= e^{-2\{[2n+1]\pi^2/L^2 + O(1)\}t}$$

$$\underset{n \to \infty}{\to} 0 < 1 \qquad .$$

Donc,

$$|\int_0^c G(x, \xi ; t)\ f(\xi)\ d\xi| < M\ m^{1/2}\ R\ e^{-\lambda_o t} \qquad .$$

(2) $$|\int_0^t \sigma(u(\tau))\ \{\int_0^c G(x, \xi ; t - \tau)\ \eta(\xi)\ d\xi\}\ d\tau| \qquad .$$

Etudions d'abord

$$\int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\,\eta(\xi)\,d\xi$$

$$= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n(t-\tau)}\Big|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\;|y_n(x)|\; e^{-\lambda_n(t-\tau)}$$

$$\leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\; e^{-\lambda_o(t-\tau)} \quad .$$

D'où,

$$\Big|\int_0^t \sigma(u(\tau))\,\{\int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\,\eta(\xi)\,d\xi\}\,d\tau\Big|$$

$$\leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \int_0^t e^{-\lambda_o(t-\tau)}\;|\sigma(u(\tau))|\,d\tau \quad .$$

Nous allons nous servir des propriétés suivantes :

soit $\Delta > 0$ arbitraire;

1) Il existe M^* tel que $|u(t)| < M^*$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $(u_o\,,f) \in B$ (stabilité) ;

2) Il existe M' tel que 1) et la continuité de σ impliquent que $|\sigma(u(t))| < M'$;

3) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|u(t)| < \varepsilon$ implique que $|\sigma(u(t))| < \Delta$ (continuité de σ en 0);

4) Il existe $\tau(\varepsilon\,,R)$ tel que $|u(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant \tau(\varepsilon\,,R)$

et tout $(u_o , f) \in B$ (stabilité asymptotique) .

Alors,

$$\int_0^t e^{-\lambda_o(t-\tau)} |\sigma(u(\tau))| \, d\tau$$

$$= \int_0^{\tau(\varepsilon,R)} e^{-\lambda_o(t-\tau)} |\sigma(u(\tau))| \, d\tau$$

$$+ \int_{\tau(\varepsilon,R)}^t e^{-\lambda_o(t-\tau)} |\sigma(u(\tau))| \, d\tau \quad .$$

Or,

$$\int_0^{\tau(\varepsilon,R)} e^{-\lambda_o(t-\tau)} |\sigma(u(\tau))| \, d\tau$$

$$\leqslant M' \int_0^{\tau(\varepsilon,R)} e^{-\lambda_o(t-\tau)} \, d\tau \qquad \text{par 2)}$$

$$= M' \; e^{-\lambda_o t} \; (e^{\lambda_o \tau(\varepsilon,R)} - 1) / \lambda_o$$

et

$$\int_{\tau(\varepsilon,R)}^t e^{-\lambda_o(t-\tau)} |\sigma(u(\tau))| \, d\tau$$

$$\leqslant \Delta \int_{\tau(\varepsilon,R)}^t e^{-\lambda_o(t-\tau)} \, d\tau \qquad \text{par 3) et 4)}$$

$$= \Delta \; (1 - e^{-\lambda_o(t-\tau(\varepsilon,R))}) / \lambda_o \quad .$$

Réunissant ces résultats, nous obtenons

$$\left|\int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^t G(x\,,\xi\,;t-\tau)\ \eta(\xi)\ d\xi\right\} d\tau\right|$$

$$\leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \left\{M'\ e^{-\lambda_o t}\ \frac{e^{\lambda_o \tau(\varepsilon,R)} - 1}{\lambda_o} + \Delta\ \frac{1 - e^{-\lambda_o (t-\tau(\varepsilon,R))}}{\lambda_o}\right\}$$

$$\leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\ \frac{1}{\lambda_o} \left\{M'\ e^{-\lambda_o t}\ [e^{\lambda_o \tau(\varepsilon,R)} - 1] + \Delta\ [1 - e^{-\lambda_o (t-\tau(\varepsilon,R))}]\right\}$$

$$\text{où}\quad 1 - e^{-\lambda_o (t-\tau(\varepsilon,R))} \leqslant 1$$

$$\leqslant \frac{M}{\lambda_o} \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| \left\{M'\ e^{-\lambda_o t}\ [e^{\lambda_o \tau(\varepsilon,R)} - 1] + \Delta\right\} .$$

En conclusion, il existe $\tau^*(\varepsilon\,,R) = \tau(\varepsilon\,,R)$ tel que, pour tout $t \geqslant \tau^*(\varepsilon\,,R)$,

$$\sup_{x\in[0,c]} |T(x\,,t)| < \varepsilon .$$

<u>Démonstration de (3.8)'</u> :

Dérivons l'égalité (1.39) par rapport au temps :

$$\partial T(x\,,t)/\partial t = \int_0^c \partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial t + \sigma(u(t)) \int_0^c G(x\,,\xi\,;0)\ \eta(\xi)\ d\xi$$

$$+ \int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t-\tau)/\partial t)\ \eta(\xi)\ d\xi\right\} d\tau$$

D'où

$$|\partial T(x\,,t)\,/\,\partial t| \leq |\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial t)\ f(\xi)\ d\xi|$$

$$+\ |\sigma(u(t))\int_0^c G(x\,,\xi\,;0)\ \eta(\xi)\ d\xi|$$

$$+\ |\int_0^t \sigma(u(\tau))\ \{\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t-\tau)/\partial t)\ \eta(\xi)\ d\xi\}\ d\tau\ .$$

Etudions le second membre de cette inégalité terme à terme :

(1) $$|\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial t)\ f(\xi)\ d\xi|$$

$$\leq \{\int_0^c |\partial G(x\,,\xi\,;t)\,/\,\partial t|^2\ d\xi\}^{1/2}\ \|f\|_{L^2}\quad . \quad \text{(Holder)}$$

Or,

$$\partial G(x\,,\xi\,;t)\,/\,\partial t = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\ y_n(x)\ y_n(\xi)\ e^{-\lambda_n t}\quad .$$

Donc

$$|\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial t)\ f(\xi)\ d\xi|$$

$$\leq \{\sum_{n=0}^{\infty} |y_n(x)|^2\ \lambda_n^2\ e^{-2\lambda_n t}\}^{1/2}\ \|f\|_{L^2}$$

$$\leq \{M^2\ e^{-2\lambda_o t}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2\ e^{-2(\lambda_n-\lambda_o)t}\}^{1/2}\ \|f\|_{L^2}\quad .$$

Appliquons la règle de d'Alembert pour étudier la convergence de la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \, e^{-2(\lambda_n-\lambda_o)t} \quad .$$

On obtient alors

$$\frac{\lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2} \; \frac{e^{-2(\lambda_{n+1}-\lambda_o)t}}{e^{-2(\lambda_n-\lambda_o)t}}$$

$$= \frac{\{(n+1)^2 \, \pi^2 / L^2 + O(1)\}^2}{\{n^2 \, \pi^2 / L^2 + O(1)\}^2} \; e^{-2[(2n+1)\pi^2/L^2+O(1)]t}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1 \quad .$$

Donc,

$$\left|\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial t) \; f(\xi) \; d\xi\right| \leqslant M \, e^{-\lambda_o t} \; S^{1/2} \; \|f\|_{L^2}$$

$$< M \; e^{-\lambda_o t} \; S^{1/2} \; R \quad .$$

(2) $$|\sigma(u(t)) \int_0^c G(x\,,\xi\,;0) \; \eta(\xi) \; d\xi|$$

$$= |\sigma(u(t))| \; \sum_{n=0}^{\infty} \; |\eta_n| \; |y_n(x)|$$

$$< M \;\; \Delta \; \sum_{n=0}^{\infty} \; |\eta_n| \qquad \forall \; t \geqslant \tau(\varepsilon\,,R) \qquad \text{par} \;\; (3.4)' \;\text{ et } 3)$$

où

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| < \infty \quad .$$

(3) $$\left|\int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^c (\partial G(x, \xi ; t-\tau)/\partial t)\, \eta(\xi)\, d\xi\right\} d\tau\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau\right|$$

$$\leqslant M \left|\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau\right| \quad .$$

Or,

$$\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau$$

$$= \lambda_n \int_0^{\tau(\varepsilon,R)} e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau$$

$$+ \lambda_n \int_{\tau(\varepsilon,R)}^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sigma(u(\tau))\, d\tau$$

$$\leqslant \lambda_n M' \int_0^{\tau(\varepsilon,R)} e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau + \lambda_n \Delta \int_{\tau(\varepsilon,R)}^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau$$

$$\leqslant M' e^{-\lambda_n t} [e^{\lambda_n \tau(\varepsilon,R)} - 1] + \Delta [1 - e^{-\lambda_n(t-\tau(\varepsilon,R))}]$$

où

$$1 - e^{-\lambda_n(t-\tau(\varepsilon,R))} \leqslant 1 \quad .$$

Donc,

$$\left|\int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t-\tau)/\partial t)\ \eta(\xi)\, d\xi\right\} d\tau\right|$$

$$\leqslant M\,\Delta \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| + M\,M' \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\, e^{-\lambda_n t}\, [e^{\lambda_n \tau(\varepsilon,R)} - 1]$$

$$\leqslant M\,\Delta \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| + M\,M' \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\, e^{-\lambda_n (t-\tau(\varepsilon,R))}$$

$$\leqslant M\,\Delta \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| + M\,M' \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|\, e^{-\lambda_o t}\, e^{\lambda_o \tau(\varepsilon,R)} \quad .$$

Il existe donc $\tau^*(\varepsilon\,,R) = \tau(\varepsilon\,,R)$ tel que, pour tout $t \geqslant \tau^*(\varepsilon\,,R)$,

$$|\partial T(x\,,t)\,/\,\partial t| < \varepsilon \quad .$$

Démonstration de (3.9)' :

Dérivons l'égalité (1.39) par rapport à x :

$$\partial T(x\,,t)\,/\,\partial x = \int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial x)\ f(\xi)\ d\xi$$

$$+ \int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t-\tau)/\partial x)\ \eta(\xi)\ d\xi\right\} d\tau$$

Nous obtenons alors

$$|\partial T(x\,,t)\,/\,\partial x| \leqslant \left|\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t)/\partial x)\ f(\xi)\ d\xi\right|$$

$$+ \left|\int_0^t \sigma(u(\tau)) \left\{\int_0^c (\partial G(x\,,\xi\,;t-\tau)/\partial x)\ \eta(\xi)\ d\xi\right\} d\tau\right| \quad .$$

(1) $$\left|\int_0^c (\partial G(x\,,\,\xi\,;\,t)/\partial x)\; f(\xi)\; d\xi\right|$$

$$\leqslant \left\{\int_0^c |\partial G(x\,,\,\xi\,;\,t)\,/\,\partial x|^2\; d\xi\right\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2} \quad .$$

Or,

$$\partial G(x\,,\,\xi\,;\,t)\,/\,\partial x = \sum_{n=0}^{\infty} y_n'(x)\; y_n(\xi)\; e^{-\lambda_n t}$$

et il existe $k > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n'(x)| \leqslant k\,\lambda_n \quad . \tag{A.15}$$

D'où

$$\left|\int_0^c (\partial G(x\,,\,\xi\,;\,t)/\partial x)\; f(\xi)\; d\xi\right|$$

$$\leqq \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |y_n'(x)|^2\; e^{-2\lambda_n t}\right\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2}$$

$$\leqslant \left\{k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2\; e^{-2\lambda_n t}\right\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2}$$

$$= \left\{k^2\; e^{-2\lambda_o t} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2\; e^{-2(\lambda_n-\lambda_o)t}\right\}^{1/2}\; \|f\|_{L^2} \quad .$$

Nous avons étudié la convergence de la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2\; e^{-2(\lambda_n-\lambda_o)t}$$

en démontrant (3.8)' .

Donc,

$$\left|\int_0^c (\partial G(x , \xi ; t)/\partial x)\ f(\xi)\ d\xi\right| < k\ e^{-\lambda_0 t}\ S^{1/2}\ R \quad .$$

(2) $$\left|\int_0^t \sigma(u(\tau))\ \{\int_0^c (\partial G(x , \xi ; t - \tau)/\partial x)\ \eta(\xi)\ d\xi\}\ d\tau\right.$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \sigma(u(\tau))\ d\tau\right|$$

$$\leqslant k \left|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\ \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \sigma(u(\tau))\ d\tau\right| \quad .$$

Nous pouvons appliquer ici le même raisonnement que celui utilisé pour borner le troisième terme de (3.8)' .

En conclusion, nous pouvons majorer $\partial T(x , t) / \partial x$ pour tout $t \geqslant \tau(\varepsilon , R)$.□

ANNEXE I :

Problème de Sturm - Liouville

§ 1. POSITION DU PROBLEME

Nous pouvons associer, à l'équation différentielle (0.1b) , avec les conditions aux limites (0.3) , le problème de Sturm-Liouville suivant :

$$L(y) = \lambda\, y \tag{A.1}$$

$$d_1\, y(0) + d_2\, y'(0) = 0 \quad , \quad d_3\, y(c) + d_4\, y'(c) = 0 \tag{A.2}$$

où

$$L(y) = -(b(x)\, y'(x))' + q(x)\, y(x) \qquad 0 < x < c \quad .$$

Le comportement asymptotique de la solution du problème (0.1) - (0.3) dépend de la nature du spectre et des fonctions propres de (A.1) - (A.2) .

Nous allons donc, dans cette annexe, citer les résultats principaux à ce sujet (§ 2).

Nous examinerons ensuite le cas particulier où la plus petite valeur propre de (A.1) - (A.2) est nulle (§ 3).

Enfin, nous étudierons le comportement des dérivées des fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (§ 4).

Faisons les hypothèses suivantes :

(1) $$d_1\, d_2 \leqslant 0 \quad , \quad d_3\, d_4 \geqslant 0 \quad ; \tag{A.3}$$

(2) soit b , b' et b'' continues et $b(x) > 0$ sur $[0, c]$; soit $b(x) \geqslant 0$ sur $[0, c]$, $b(x) > 0$ sur $(0, c)$, b' et b'' existent sur $[0, c]$, et b et b^{-1} sont intégrables sur $[0, c]$; (A.4)

(3) q est continue sur $[0, c]$ (ou, plus généralement, q est mesurable et intégrable) et $q(x) \geqslant 0$ sur $[0, c]$. (A.5)

§ 2. RESULTATS PRINCIPAUX

Théorème.

Supposons les hypothèses (A.3) , (A.4) et (A.5) satisfaites.

Alors, les valeurs propres du problème aux limites (A.1) - (A.2) , c'est-à-dire les valeurs λ telles que le problème (A.1) - (A.2) admette une solution non-nulle, sont simples [3, pp. 293-294] , non-négatives [3, p. 416] , et l'ensemble des valeurs propres est dénombrable sans aucun point d'accumulation fini [3, p. 293] .

En indexant ces valeurs propres de telle sorte que $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, on a

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 L^{-2} + O(1) \tag{A.6}$$

où

$$L = \int_0^c (b(x))^{-1/2}\, dx \qquad [3, \text{p. } 415] .$$

Si y_n est la fonction propre normalisée (i.e., $\int_0^c y_n^2\, dx = 1$) correspondant à λ_n , alors $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ forme une base hilbertienne dans $L^2(0, c)$ [3, p. 293] , et il existe une constante M positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant c} |y_n(x)| \leqslant M \qquad [3, \text{pp. } 334\text{-}335] . \tag{A.7}$$

De plus, si f est une fonction réelle quelconque définie sur $[0, c]$ et vérifiant les conditions aux limites (A.2) , telle que f et $[b\, f']' \in L^2[0\,,c]$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x) \quad , \qquad f_n = (f\,, y_n) \tag{A.8}$$

où la série converge absolument et uniformément [3, pp. 293-427] ; de fait,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty \quad .$$

Généralisation.

Nous pouvons remplacer les conditions aux limites (A.2) par les conditions plus générales

$$\begin{aligned} m_{11}\, y(0) + m_{12}\, y'(0) + n_{11}\, y(c) + n_{12}\, y'(c) &= 0 \\ m_{21}\, y(0) + m_{22}\, y'(0) + n_{21}\, y(c) + n_{22}\, y'(c) &= 0 \end{aligned} \tag{A.9}$$

où m_{ij} et n_{ij} sont des constantes réelles.

Le problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.9) est auto-adjoint si et seulement si

$$\text{dét} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \text{dét} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \quad .$$

Si b et q satisfont aux conditions (A.4) et (A.5) , et si l'on suppose que les constantes m_{ij} et n_{ij} sont telles que le spectre de (A.1) - (A.9) se trouve sur le demi-axe réel positif, alors les conclusions du théorème ci-dessus restent valables, sauf le fait que les valeurs propres ne sont plus nécessairement simples : elles peuvent être de multiplicité au plus 2 (en particulier, zéro peut être une valeur propre double).

Remarquons que cette généralisation est valable lorsque les conditions aux limites sont périodiques.

Fonction de Green.

Nous associons, au problème (A.1) - (A.2) , la fonction de Green [3, p. 355] définie par

$$G(x , \xi) = \begin{cases} u_1(x)\ u_2(\xi) / K & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ u_2(x)\ u_1(\xi) / K & \text{pour } \xi \leqslant x \leqslant c \end{cases} \tag{A.10}$$

où u_1 et u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$(b(x)\ y'(x))' - q(x)\ y(x) = 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$d_1\ u_1(0) + d_2\ u_1'(0) = 0$$

$$d_3\ u_2(c) + d_4\ u_2'(c) = 0$$

et où K est une constante égale au produit de $b(\xi)$ par le wronskien

$$W(u_1, u_2, \xi) = u_1(\xi)\, u_2'(\xi) - u_1'(\xi)\, u_2(\xi) \quad .$$

Propriétés de la fonction de Green (A.10) [12, p. 128] :

(1) Elle satisfait l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(b(x)\, \frac{d}{dx} G(x, \xi)\right) - q(x)\, G(x, \xi) = 0$$

pour $x \in [0, c]$ et $x \neq \xi$.

(2) Elle est continue en $x = \xi$, c'est-à-dire

$$G(\xi + 0, \xi) = G(\xi - 0, \xi) \quad .$$

(3) Elle satisfait aux conditions aux limites

$$d_1\, G(0, \xi) + d_2\, \frac{d}{dx}\, G(0, \xi) = 0 \quad ,$$

$$d_3\, G(c, \xi) + d_4\, \frac{d}{dx}\, G(c, \xi) = 0 \quad .$$

(4) Elle est dérivable partout sauf en $x = \xi$, et le saut vaut

$$\frac{d}{dx}\, G(\xi + 0, \xi) - \frac{d}{dx}\, G(\xi - 0, \xi) = -\frac{1}{b(\xi)} \quad . \qquad \text{(A.11)}$$

(5) Elle est symétrique :

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad .$$

§ 3. CAS OU LA PLUS PETITE VALEUR PROPRE EST NULLE

Dans l'étude du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) , il est important de savoir si zéro est ou non valeur propre.

Si,

$$\text{soit } \; q \not\equiv 0 \; \text{ sur } [0\,,c] \; , \text{ soit } \; |d_1| + |d_3| > 0 \quad , \tag{A.12}$$

alors la plus petite valeur propre λ_o est strictement positive.

Par contre, si

$$q \equiv 0 \; \text{ sur } [0\,,c] \; \text{ et } \; d_1 = d_3 = 0 \quad , \tag{A.13}$$

alors $\lambda_o = 0$ est la plus petite valeur propre du problème (A.1) - (A.2) . Dans ce cas, la fonction propre normalisée correspondant à λ_o est

$$y_o(x) = c^{-1/2} \quad . \tag{A.14}$$

Pour démontrer ce résultat, servons-nous de l'énoncé du problème (A.1) - (A.2) :

$$L(y_o) = \lambda_o \, y_o = 0 = -(b(x) \; y_o'(x))' \quad .$$

Ceci implique l'existence d'une constante k telle que

$$b(x) \; y_o'(x) = k \quad .$$

Les conditions aux limites sont

$$d_2\ y_o'(0) = 0 \qquad , \qquad d_4\ y_o'(c) = 0 \qquad .$$

Or, $|d_1| + |d_2| > 0$ et $|d_3| + |d_4| > 0$, et donc d_2 et d_4 sont des constantes non-nulles à cause de (A.13b) .

Nous savons donc que

$$y_o'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad y_o'(c) = 0 \qquad ,$$

ce qui signifie que la constante k est nulle.

Or, par (A.4) , $b(x) > 0$ sur $(0 , c)$.

Donc,

$$y_o'(x) = 0 \qquad , \text{ c'est-à-dire } \qquad y_o(x) = 1$$

où 1 est une constante.

Puisque y_o est normalisée, nous avons, par définition,

$$1 = \int_0^c y_o^2(x)\ dx = \int_0^c 1^2\ dx = 1^2\ c$$

et donc

$$1 = c^{-1/2} \qquad ,$$

ce qui prouve (A.14) .□

§ 4. COMPORTEMENT DES DERIVEES DES FONCTIONS PROPRES

Théorème.

La dérivée d'une fonction propre est majorée par le produit d'une constante et de la valeur propre associée à cette fonction propre, c'est-à-dire il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n'(x)| \leqslant k \lambda_n \quad . \tag{A.15}$$

Démonstration.

En effet, d'après [4, p. 360] , la solution du problème (A.1) - (A.2) vérifie

$$y_n(x) = -\lambda_n \int_0^c G(x , \xi) \; y_n(\xi) \; d\xi \quad .$$

Nous allons décomposer cette égalité en une somme de deux intégrales, l'une de 0 à x et l'autre de x à c .

Nous dérivons alors chaque membre de l'égalité en vertu de (A.11) et nous obtenons

$$y_n'(x) = -\lambda_n \int_0^c \frac{d}{dx} G(x , \xi) \, y_n(\xi) \, d\xi \quad .$$

La fonction $\frac{d}{dx} G(x , \xi)$ est bornée par (A.11) .

Nous obtenons alors l'existence d'une constante $K' > 0$ telle que, pour tout $(\xi , x) \in [0 , c] \times [0 , c]$, nous avons

$$\left| \frac{d}{dx} G(x , \xi) \right| \leqslant K' \quad .$$

Nous aboutissons donc à la majoration

$$|y_n'(x)| \leqslant \lambda_n \ c \ K' \ M$$

où M est défini en (A.7) .

Si nous posons

$$k = c \ K' \ M \quad ,$$

nous obtenons bien la majoration souhaitée (A.15) .□

ANNEXE II :

SOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

Considérons l'équation non-homogène

$$T_t(x\,,t) = [\,b(x)\;T_x(x\,,t)]_x - q(x)\;T(x\,,t) + \eta(x)\;\phi(t) \qquad , \qquad (B.1)$$

où $(x\,,t) \in\,]0\,,c[\,\times\,]0\,,+\infty[$, soumise à la condition initiale

$$T(x\,,0) = f(x) \qquad\qquad 0 < x < c \qquad (B.2)$$

et aux conditions limites

$$\begin{aligned} d_1\;T(0\,,t) + d_2\;T_x(0\,,t) &= 0 \\ & \qquad\qquad t > 0 \qquad , \qquad (B.3) \\ d_3\;T(c\,,t) + d_4\;T_x(c\,,t) &= 0 \end{aligned}$$

où b , q , η et f sont des fonctions réelles définies sur $[0\,,c]$, ϕ est une fonction réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et bornée et d_i , $1 \leqslant i \leqslant 4$, sont des constantes telles que

$$|d_1| + |d_2| > 0$$

$$|d_3| + |d_4| > 0 \qquad .$$

Etudions la solution de ce problème dans le théorème suivant :

Théorème.

Supposons que les fonctions η et f vérifient la condition (1.2) .

Définissons

$$T(x\,,t) = \int_0^c G(x\,,\xi\,;t)\; f(\xi)\; d\xi$$

$$+ \int_0^t \int_0^c G(x\,,\xi\,;t-\tau)\; \eta(\xi)\; \phi(\tau)\; d\xi\; d\tau \quad , \tag{B.4}$$

où $(x\,,t) \in [0\,,c]\times[0\,,+\infty[$, avec la fonction de Green

$$G(x\,,\xi\,;t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\; y_n(\xi)\; e^{-\lambda_n t} \tag{B.5}$$

où $(x\,,\xi\,;t) \in [0\,,c]^2\times[0\,,+\infty[$, $y_n(x)$ et λ_n étant les fonctions et valeurs propres du problème de Sturm-Liouville (A.1) - (A.2) et f_n et η_n les coefficients de Fourier de f et η dans le système orthonormé $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors,

(1) $T(x\,,t)$, $T_t(x\,,t)$ et $T_{xx}(x\,,t)$ sont des fonctions continues en x et en t sur $[0\,,c]\times]0\,,+\infty[$;

(2) $T(x\,,t)$ vérifie l'équation (B.1) ainsi que les conditions aux limites (B.3) et la condition initiale (B.2) ;

(3) $T(x\,,t)$ est continue en $(x\,,t)$ sur $[0\,,c]\times[0\,,+\infty[$.

Démonstration.

Avant de commencer la preuve de ce théorème, rappelons quelques résultats dont nous aurons besoin.

(1) Par (A.7), nous savons qu'il existe une constante K indépendante de n telle que

$$\sup_{x\in[0,c]} |y_n(x)| \leqslant K \qquad n=0,1,\ldots$$

(i.e.,

$$|y_n(x)| \leqslant K \qquad x\in[0,c] \qquad n=0,1,\ldots \quad).$$

(2) Par (A.8) et (1.2), nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n| < \infty \quad ,$$

c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives indépendantes de n telles que

$$\begin{aligned} |f_n| &\leqslant M_1 \\ |\eta_n| &\leqslant M \end{aligned} \qquad n=0,1,\ldots \quad .$$

(3) Puisque $\phi(t)$ est bornée, il existe une constante $K_o > 0$ telle que

$$|\phi(t)| \leqslant K_o \qquad t \geqslant 0 \quad .$$

Etudions maintenant la fonction de Green

$$G(x,\xi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\xi)\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Nous avons

$$|y_n(x)\, y_n(\xi)\, e^{-\lambda_n t}| \leqslant K^2 \; e^{-\lambda_n t}$$

$$\leqslant K^2 \; e^{-\lambda_n t_o} \qquad\qquad t \geqslant t_o \quad ,$$

t_o étant un point arbitraire strictement positif.

Utilisons le critère de d'Alembert pour étudier la convergence de la série

$$K^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t_o} \quad .$$

Nous obtenons alors

$$\frac{e^{-\lambda_{n+1} t_o}}{e^{-\lambda_n t_o}} = \frac{e^{-[(n+1)^2\pi^2/L^2+O(1)]\,t_o}}{e^{-[n^2\pi^2/L^2+O(1)]\,t_o}} \qquad \text{par} \quad (A.6)$$

$$= e^{-[(2n+1)\pi^2/L^2+O(1)]\,t_o} \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty \quad .$$

Cette série numérique est donc convergente et, par le critère de Weierstrass, on en déduit que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\, y_n(\xi)\, e^{-\lambda_n t}$$

converge uniformément et absolument sur $[0\,,c]^2 \times [t_o\,,+\infty[$ avec $t_o > 0$.

Par le théorème de continuité des séries, la fonction $G(x\,,\xi\,;t)$ est donc continue sur $[0\,,c]^2 \times [t_o\,,+\infty[$.

Puisque t_o est un nombre strictement positif arbitraire, $G(x , \xi ; t)$ est, en fait, continue sur $[0 , c]^2 \times]0 , +\infty[$.

Appliquons le théorème d'intégration des séries pour réécrire $T(x , t)$ sous une nouvelle forme :

$$\int_0^c G(x , \xi ; t)\ f(\xi)\ d\xi$$

$$= \int_0^c f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ y_n(\xi)\ e^{-\lambda_n t}\ d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ e^{-\lambda_n t} \int_0^c f(\xi)\ y_n(\xi)\ d\xi \qquad \text{car } f \text{ est continue}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ y_n(x)\ e^{-\lambda_n t} \qquad \text{par (A.8)}$$

$$\int_0^t \int_0^c G(x , \xi ; t - \tau)\ \eta(\xi)\ \sigma(u(\tau))\ d\xi\ d\tau$$

$$= \int_0^t \int_0^c \{ \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ y_n(\xi)\ e^{-\lambda_n(t-\tau)} \}\ \eta(\xi)\ \phi(\tau)\ d\xi\ d\tau$$

$$= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ \{\int_0^c \eta(\xi)\ y_n(\xi)\ d\xi\}\ d\tau$$

$$= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n(x)\ e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ d\tau \qquad .$$

L'avant-dernière égalité résulte du fait que η est dérivable et donc continue.

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, \phi(\tau)$$

vérifie le théorème de Borel-Cantelli.

En effet, chaque terme de cette somme est intégrable par rapport à τ dans $[0, t]$ quel que soit x dans $[0, c]$ et la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \eta_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, \phi(\tau) \, d\tau$$

est absolument et uniformément convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^c |y_n(x) \, \eta_n \, e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, \phi(\tau)| \, d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |y_n(x)| \, |\eta_n| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, |\phi(\tau)| \, d\tau$$

$$\leqslant K \; M \; K_o \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_n t}) / \lambda_n$$

$$\leqslant K \; M \; K_o \sum_{n=0}^{\infty} 1 / \lambda_n$$

$$< \infty \qquad \text{par (A.6)} \quad .$$

Par conséquent, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \, \eta_n \, e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, \phi(\tau)$$

est absolument convergente et intégrable :

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\ \eta_n\ e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ d\tau \qquad .$$

Finalement, nous pouvons écrire $T(x\,,t)$ sous la forme :

$$T(x\,,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ y_n(x)\ e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ d\tau$$

avec $x \in [0\,,c]$ et $t > 0$.

Posons

$$T_H(x\,,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ y_n(x)\ e^{-\lambda_n t} \tag{B.6}$$

$$T_I(x\,,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\ y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\ \phi(\tau)\ d\tau \qquad . \tag{B.7}$$

Etudions maintenant les différents points du théorème :

(1) <u>$T(x\,,t)$ est continue</u> :

Comme nous venons de le voir, les séries (B.6) et (B.7) sont uniformément convergentes pour $x \in [0\,,c]$ et $t > 0$; de plus, elles sont formées de termes continus en x et t .

Par conséquent, $T(x, t)$ qui est la somme de ces deux séries, est continue sur $[0, c] \times]0, +\infty[$.

En outre, $T(x, t)$ peut se prolonger continûment en $t = 0$, de sorte que

$$T(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, y_n(x)$$

$$= f(x) \qquad \text{par (A.8)} \quad .$$

La dernière assertion du théorème est donc vérifiée.

(2) <u>Dérivation par rapport à t</u> :

<u>Problème pour $T_H(x, t)$</u> :

Considérons la série formée des dérivées par rapport à t des termes de $T_H(x, t)$:

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, f_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Nous avons

$$|-\lambda_n \, f_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n t}| \leqslant K \;\; M_1 \;\; \lambda_n \;\; e^{-\lambda_n t}$$

$$\leqslant K \;\; M_1 \;\; \lambda_n \;\; e^{-\lambda_n t_o} \qquad t \geqslant t_o \quad ,$$

t_o étant un nombre arbitraire strictement positif.

Par le critère de d'Alembert, montrons que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, e^{-\lambda_n t_o}$$

converge :

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \; \frac{e^{-\lambda_{n+1} t_o}}{e^{-\lambda_n t_o}} = \frac{(n+1)^2 \, \pi^2 / L^2 + O(1)}{n^2 \, \pi^2 / L^2 + O(1)} \; e^{-[(2n+1)\pi^2/L^2 + O(1)] \, t_o}$$

$$\to 0 \qquad\qquad \text{quand} \quad n \to \infty \quad .$$

Par le critère de Weiestrass, la série

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, f_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n t}$$

est donc uniformément convergente sur $[\, 0 \, , c \,] \times [\, t_o \, , +\infty [$.

Par le problème de dérivation, on en déduit que $T_H(x\,,t)$ est dérivable par rapport à t sur $[\, 0 \, , c \,] \times [\, t_o \, , +\infty [$.

Puisque $t_o > 0$ est arbitraire, la dérivée de $T_H(x\,,t)$ existe en fait sur $[\, 0 \, , c \,] \times]\, 0 \, , +\infty [$ et vaut

$$\partial T_H(x\,,t) \,/\, \partial t = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, f_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

En outre, par le théorème de continuité des séries, cette dérivée $\partial T_H(x\,,t) \,/\, \partial t$ est continue sur $[\, 0 \, , c \,] \times]\, 0 \, , +\infty [$.

Problème pour $T_I(x\,,t)$:

Dérivons terme à terme $T_I(x\,,t)$ et étudions la série ainsi obtenue :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, \phi(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \, \lambda_n \, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} \, \phi(\tau) \, d\tau \quad .$$

Considérons d'abord la première série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n \, y_n(x) \; \phi(t)| \leq K \; K_o \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$$

$$< \infty \qquad \text{par} \quad (A.8) \quad .$$

La série en question est donc uniformément convergente pour $x \in [0, c]$ et $t \geq 0$.

Etudions maintenant la deuxième série :

$$|-\lambda_n \, \eta_n \, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \; \phi(\tau) \; d\tau$$

$$\leq \lambda_n \; K \; |\eta_n| \; K_o \; (1 - e^{-\lambda_n t}) / \lambda_n$$

$$\leq K \; K_o \; |\eta_n| \quad .$$

Par (A.8) et le critère de Weiestrass, cette deuxième série est aussi uniformément convergente sur $[0, c] \times [0, +\infty[$.

Par le théorème de dérivation des séries, nous avons donc

$$\partial T_I(x, t) / \partial t = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \; \phi(t)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, \eta_n \, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \; \phi(\tau) \; d\tau$$

avec $(x, t) \in [0, c] \times [0, +\infty[$.

En outre, $\partial T_I(x, t) / \partial t$ est continue sur $[0, c] \times [0, +\infty[$.

Finalement, nous avons donc que $T(x, t)$ est continûment dérivable

par rapport à t sur $[0, c] \times]0, +\infty[$.

(3) Dérivation par rapport à x :

Problème pour $T_H(x, t)$:

Considérons la série obtenue en dérivant chaque terme de $T_H(x, t)$ par rapport à x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y'_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Par (A.15) , nous avons la relation suivante :

$$|y'_n(x)| \leqslant \lambda_n K_1 \qquad x \in [0, c] \qquad n = 0, 1, \ldots \quad ,$$

de sorte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n\, y'_n(x)\, e^{-\lambda_n t}| \leqslant K_1\, M_1 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, e^{-\lambda_n t}$$

$$\leqslant K_1\, M_1 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, e^{-\lambda_n t_o} \qquad t \geqslant t_o > 0 \ .$$

Nous avons déjà montré la convergence de cette série numérique.

Par conséquent, $T_H(x, t)$ admet une dérivée continue par rapport à x sur $[0, c] \times]0, +\infty[$, et

$$\partial T_H(x, t) / \partial x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y'_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Problème pour $T_I(x, t)$:

Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau$$

la série composée des dérivées par rapport à x des termes $T_I(x\,,t)$.

Nous avons alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\eta_n\, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau\right|$$

$$\leqslant K_1\, K_o \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, |\eta_n| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau \qquad \text{par (A.15)}$$

$$= K_1\, K_o \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, |\eta_n|\, (1 - e^{-\lambda_n t}) / \lambda_n$$

$$\leqslant K_1\, K_o \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$$

$$< \infty \qquad \text{par (A.8)}$$

c'est-à-dire que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau$$

est uniformément convergente sur $[0\,,c]\times[0\,,+\infty[$.

$T_I(x\,,t)$ admet donc une dérivée continue par rapport à x sur $[0\,,c]\times[0\,,+\infty[$ et

$$\partial T_I(x\,,t)\,/\,\partial x = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau \quad .$$

Par conséquent, $T(x\,,t)$ est continûment dérivable par rapport à x

sur $[0, c] \times]0, +\infty[$.

(4) <u>Double dérivation par rapport à x :</u>

Considérons la série obtenue en dérivant par rapport à x chaque terme de $\partial T_H(x, t) / \partial x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \, y_n''(x) \, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Cependant, $y_n(x)$ est une fonction propre du problème de Sturm-Liouville (A.1) , de sorte que

$$y_n''(x) = - \frac{b'(x)}{b(x)} \, y_n'(x) - \frac{(\lambda_n - q(x))}{b(x)} \, y_n(x) \qquad n = 0, 1, \ldots \quad .$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \, y_n''(x) \, e^{-\lambda_n t} = - \frac{b'(x)}{b(x)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, y_n'(x) \, e^{-\lambda_n t}$$

$$- \frac{1}{b(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, f_n \, y_n(x) \, e^{-\lambda_n t}$$

$$+ \frac{q(x)}{b(x)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, e^{-\lambda_n t} \, y_n(x)$$

et la convergence uniforme de la série étudiée, par ce qui précède, est assurée sur $[0, c] \times]0, +\infty[$.

$T_H(x, t)$ est donc deux fois continûment dérivable par rapport à x sur $[0, c] \times]0, +\infty[$ et

$$\partial^2 T_H(x\,,t)\,/\,\partial x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n''(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

De la même façon, nous obtenons que $T_I(x\,,t)$ admet une dérivée seconde continue par rapport à x sur $[0\,,c]\times]0\,,+\infty[$:

$$\frac{\partial^2 T_I(x\,,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n''(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau \quad .$$

Nous avons donc terminé la preuve du premier point.

Vérifions que la fonction $T(x\,,t)$ donnée par (B.4) - (B.5) satisfait bien l'équation (B.1) :

$$[\,b(x)\, T_x(x\,,t)\,]_x - q(x)\, T(x\,,t)$$

$$= b(x)\,\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n''(x)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n''(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau\}$$

$$+ b'(x)\,\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n'(x)\, e^{-\lambda_n t}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau\}$$

$$- q(x)\,\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{b(x)\, y_n''(x) + b'(x)\, y_n'(x) - q(x)\, y_n(x)\}\, f_n\, e^{-\lambda_n t}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \{b(x)\, y_n''(x) + b'(x)\, y_n'(x)$$

$$- q(x)\, y_n(x)\}\, \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau \qquad \text{par (A.1)}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau$$

$$= \partial T_H(x\,,t) / \partial t + \partial T_I(x\,,t) / \partial t - \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, \phi(t)$$

$$= T_t(x\,,t) - \eta(x)\, \phi(t) \qquad .$$

La fonction $T(x\,,t)$ est donc une solution de l'équation (B.1) . Vérifie-t-elle aussi les conditions auxiliaires ?

Nous avons déjà montré que la condition initiale (B.2) était bien satisfaite; voyons maintenant le cas des conditions aux limites.

Les fonctions propres $y_n(x)$ satisfont les conditions aux limites (A.2) , de sorte que

$$d_1\, T(0\,,t) + d2\, T_x(0\,,t)$$

$$= d_1 \{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, y_n(0)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\, y_n(0) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, \phi(\tau)\, d\tau\} +$$

$$+ d_2 \{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n y_n'(0) e^{-\lambda_n t}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n y_n'(0) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} \phi(\tau) d\tau \}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-\lambda_n t} \{d_1 y_n(0) + d_2 y_n'(0)\} + \sum_{n=0}^{\infty} \{d_1 y_n(0)$$

$$+ d_2 y_n'(0)\} \eta_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} \phi(\tau) d\tau$$

$$= 0$$

et, de la même manière,

$$d_3 T(c , t) + d_4 T_x(c , t) = 0 \qquad ,$$

c'est-à-dire que $T(x , t)$ est bien une solution du problème (B.1) - (B.3) .

Ceci termine donc la preuve de ce théorème.□

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.A. BRONIKOWSKI, J.E. HALL et J.A. NOHEL, "Quantitative Estimates for a Nonlinear System of Integrodifferential Equations Arising in Reactor Dynamics", Siam J. Math. Anal., vol. 3, No 4, novembre 1972.

[2] T.A. BRONIKOWSKI, "An Integrodifferential System which Occurs in Reactor Dynamics", Archive Rational Mechanics and Analysis, 37, pp. 363-380, 1970.

[3] R. COURANT et D. HILBERT, "Methods of Mathematical Physics", vol. 1, New York, Interscience, 1953.

[4] J. DIEUDONNE, "Eléments d'Analyse", T. 1, Gauthier-Villars éd., Paris, 1972.

[5] E.F. INFANTE et J.A. WALKER, "On the Stability for a Class of Equations Arising in Reactor Dynamics", J. of Math. Anal. and Appls., 55, pp. 112-124, 1976.

[6] J.J. LEVIN et J.A. NOHEL, "On a System of Integrodifferential Equations Occuring in Reactor Dynamics", J. Math. and Mech., 9, pp. 347-368, 1960.

[7] J.J. LEVIN et J.A. NOHEL, "The Integrodifferential Equations of a Class of Nuclear Reactors with Delayed Neutrons", Arch. Rational Mech. Anal., 31, pp. 151-171, 1968.

[8] R.K. MILLER, "Nonlinear Volterra Integral Equation", Benjamin, New York, 1971.

[9] J.A. NOHEL, "Some Problems in Nonlinear Volterra Integral Equations", Bull. Amer. Math. Soc., 68, pp. 323-329, 1962.

[10] N. ROUCHE et J. MAWHIN, "Equations Différentielles Ordinaires", T. 1 et 2, Masson éd., Paris, 1973.

[11] D. WEXLER, "Frequency Domain Stability for a Class of Equations Arising in Reactor Dynamics", Siam J. on Math. Anal. (à paraître).

[12] E.C. YOUNG, "Partial Differential Equations", Allyn & Bacon, Boston, 1972.