MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Étude d'un système intégro-différentiel de la dynamique des réacteurs

Dohet, Christine; Moreau, Pierre

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX

NAMUR

ANNEE ACADEMIQUE : 1976 - 1977

ETUDE D'UN SYSTEME INTEGRO-DIFFERENTIEL DE LA DYNAMIQUE DES REACTEURS

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU GRADE

DE LICENCIE EN SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

PROMOTEUR :

D. WEXLER.

CHRISTINE DOHET

PIERRE MOREAU

Nous tenons à remercier D. Wexler pour l'aide qu'il nous a apportée tout au long du mémoire, principalement lors de la réalisation du chapitre I.

Nous signalons que ce travail a été fait en commun : la rédaction du chapitre I et de la seconde annexe est due à C. Dohet et celle des chapitres II et III et de l'annexe 1, à P. Moreau.

INTRODUCTION

Nous considérons le système intégro-différentiel :

$$u'(t) = -\int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx \qquad t > 0\ ,\ 0 < x < c$$

$$T_t(x,t) = (b(x)\, T_x(x,t))_x - q(x)\, T(x,t) + \eta(x)\, u(t) \tag{0.1}$$

satisfaisant aux conditions aux limites :

$$a_1\, T(0,t) + a_2\, T_x(0,t) = 0$$

$$b_1\, T(c,t) + b_2\, T_x(c,t) = 0 \tag{0.2}$$

et aux conditions initiales :

$$u(0) = u_o \tag{0.3}$$

$$T(x,0) = f(x) \quad . \tag{0.4}$$

Dans (0.1)-(0.4), α , b , q , η , f sont des fonctions à valeur réelle définies sur $[0,c]$; u_o , c , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 sont des réels, u_o étant arbitraire, c strictement positif,

$$|a_1| + |a_2| > 0 \qquad \text{et} \qquad |b_1| + |b_2| > 0 \quad .$$

Nous remarquons que (0.1) peut être considéré comme une équation de diffusion soumise à un certain contrôle d'un système dynamique.

Le système (0.1) représente une description mathématique d'un modèle dynamique linéaire apparaissant dans les réacteurs nucléaires unidimensionnels en milieu continu. Un tel réacteur est alors considéré comme une barre finie de longueur c .

Dans ce cas, les divers paramètres intervenant dans ce problème ont l'interprétation physique suivante [6,9] :

t	- temps ;
x	- position dans le réacteur ;
$u(t)$	- logarithme de la puissance totale du réacteur ($u(t) \equiv 0$ à l'équilibre);
$T(x,t)$	- écart de température par rapport à la température d'équilibre ($T(x,t) \equiv 0$ à l'équilibre);
$-\alpha(x) \leqslant 0$	- quotient du coefficient de réactivité défini par rapport à la température sur le temps de vie moyen des neutrons;
$\eta(x) \geqslant 0$	- élément de la puissance générée en x ;
$b(x) > 0$	- coefficient de conductivité thermique en x ;
$q(x) \geqslant 0$	- coefficient de radiation thermique en x .

En ce qui concerne les conditions aux limites (0.2), elles reflètent certaines situations physiques importantes :

le cas $a_2 = b_2 = 0$ correspond au problème physique dans lequel les extrémités de la barre sont maintenues à température constante;

le cas $a_1 = b_1 = 0$ correspond au problème physique dans lequel les extrémités de la barre sont isolées.

La première approche mathématique du problème des réacteurs nucléaires a été effectuée par J.J. Levin et J.A. Nohel [9]. Par la suite, de nombreuses recherches ont été entreprises pour améliorer les résultats dans le cas linéaire [1, 8 p. 224] et pour étudier l'extension au problème non linéaire suivant :

$$u'(t) = - \int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx$$

$$T_t(x,t) = (b(x)\, T_x(x,t))_x - q(x)\, T(x,t) + \eta(x)\, \sigma(u(t))$$

où $u(t)$, $T(x,t)$ vérifient (0.2), (0.3) et (0.4) et où σ est une fonction réelle non linéaire. Nous citons, entre autres, [2,6,10] .

Ce mémoire traite le cas linéaire développé à partir d'un article de Bronikowski [1]. Signalons que les hypothèses sur η " η est localement holdérienne et de carré intégrable sur $(0,c)$ " ont été remplacées par la condition plus simple de continuité sur le compact $[0,c]$. Dans certains cas, l'hypothèse $\eta \in L^2(0,c)$ est suffisante (chapitre I).

Précisons maintenant les conditions imposées aux paramètres du problème (0.1)-(0.4) :

$$\alpha\ ,\ f \in L^2(0,c) \tag{0.5}$$

$$f \in C(0,c) \tag{0.6}$$

$$\eta \in C([0,c]) \tag{0.7}$$

$$b\ ,\ b' \in C([0,c]) \tag{0.8}$$

$$b(x) > 0 \qquad \text{quel que soit } x \text{ dans } [0,c] \tag{0.9}$$

$$q(x) \geqslant 0 \qquad \text{quel que soit } x \text{ dans } [0,c] \tag{0.10}$$

a_1 , a_2 , b_1 , b_2 sont des constantes

$$a_1.a_2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad |a_1| + |a_2| > 0 \tag{0.11a}$$

$$b_1.b_2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |b_1| + |b_2| > 0 \tag{0.11b}$$

u_o est une constante arbitraire

c est une constante strictement positive.

HYPOTHESE ADDITIONNELLE.

$$q(x) \not\equiv 0 \quad \text{sur} \quad [0,c] \quad \text{ou} \quad |a_1| + |b_1| > 0 \quad . \tag{0.12}$$

(0.12) nous assure que la plus petite valeur propre du problème de Sturm-Liouville associé à l'équation aux dérivées partielles est strictement positive (annexe 1).

Le contenu des trois chapitres du mémoire est le suivant :

Dans le chapitre I, nous établissons un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour le problème (0.1)-(0.4). Un point important de la démonstration est la propriété de l'opérateur $\frac{d}{dx}[\,b(x)\,\frac{d}{dx}]$ d'être fermé. La composante u de la solution $[\,u,T\,]$ du problème (0.1)-(0.4) est obtenue comme solution d'une équation intégrale de Volterra et T s'exprime alors par l'intermédiaire de u, η, des données initiales et de la fonction de Green associée.

Le comportement asymptotique de la solution (u,T) du problème (0.1)-(0.4) est exprimé dans le chapitre II. Les démonstrations sont basées sur les transformées de Laplace.

Dans le chapitre III, nous donnons un résultat concernant la dépendance des solutions par rapport aux petites variations des conditions initiales et des paramètres.

REMARQUES.

Si (0.12) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si :

$$q(x) \equiv 0 \quad \text{sur} \quad [\,0,c\,] \quad \text{et} \quad a_1 = b_1 = 0 \quad , \tag{0.13}$$

alors la plus petite valeur propre du problème de Sturm-Liouville est nulle; ce cas est esquissé dans l'annexe 2.

L'espace des classes de fonctions de carré sommable sur $(0,c)$ est noté $L^2(0,c)$ et sa norme $\|\cdot\|_2$; $(A,\cdot)$ et $(B,\cdot)$ désignent respectivement une référence de l'annexe 1 ou de l'annexe 2.

CHAPITRE I :

Existence et Unicité d'une Solution d'un Système Intégro-Différentiel Unidimensionnel

ENONCE DU THEOREME.

Supposons que :

α , $f \in L^2(0,c)$, (0.5)

$f \in C(0,c)$, (0.6)

$\eta \in C([0,c])$, (0.7)

(0.12) est vérifié ,

alors (0.1) admet une solution unique (u,T) qui satisfait aux conditions initiales (0.3) et (0.4) et aux conditions aux limites (0.2).

LEMME 1.

Si nous considérons l'équation de Volterra pour $t \geqslant 0$

$$u(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (1.1)$$

où
$$K_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \lambda_n^{-1} (e^{-\lambda_n t} - 1) \qquad (1.2)$$

et
$$K_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n \lambda_n^{-1} (e^{-\lambda_n t} - 1) \quad , \qquad (1.3)$$

alors l'équation (1.1) admet une solution unique, continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

DEMONSTRATION.

Nous allons d'abord étudier la convergence des séries (1.2) et (1.3) ainsi que celle de leurs dérivées.

Posons $k_{1n} = \alpha_n f_n$ (1.4)

$k_{2n} = \alpha_n \eta_n$ (1.5)

où α_n , f_n , η_n sont les coefficients de Fourier développés dans la base hilbertienne respectivement des fonctions α , f , η .

Par l'inégalité de Schwartz et (0.5), les séries $\sum_{n=1}^{\infty} k_{in}$ $(i = 1, 2)$ sont absolument convergentes.

De même, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} k_{in} \lambda_n^{-1}$ $(i = 1, 2)$ restent absolument convergentes car les valeurs propres forment une suite strictement positive et croissante (voir annexe 1).

Par conséquent, les séries $K_i(t)$ convergent absolument et sont bornées quel que soit $t \geqslant 0$. En effet :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} K_i(t)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} k_{in} \lambda_n^{-1} (e^{-\lambda_n t} - 1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |k_{in} \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n t}| + \sum_{n=1}^{\infty} |k_{in} \lambda_n^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} |k_{in} \lambda_n^{-1}| \quad .$$

Considérons les séries dérivées $K_i'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} k_{in} e^{-\lambda_n t}$, chaque terme de la série initiale admettant une dérivée continue et la série dérivée correspondante convergeant uniformément, nous pouvons en conclure que, pour $i = 1, 2$, les séries dérivées $K_i'(t)$ convergent uniformément et sont bornées quel que soit $t \geqslant 0$.

Ceci nous permet d'affirmer que $K_i(t) \in C^1[0,\infty[$.

Ensuite, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Volterra (1.1) par la méthode des contractions.

Considérons E_1 l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ où T est à déterminer. E_1 est un espace de Banach muni de la norme sup. :

$$\|\phi\|_{E_1} = \sup_{t\in[0,T]} |\phi(t)| \qquad \text{quel que soit } \phi \text{ dans } E_1 .$$

Définissons l'opérateur U_1 par :

$$U_1 : E_1 \to E_1$$
$$\phi \to U_1\phi$$

tel que : $\quad U_1\,\phi(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau$

quel que soit t dans $[0,T]$.

Pour toutes les fonctions ϕ , $\psi \in E_1$, nous avons les inégalités suivantes :

$$|U_1\,\phi(t) - U_1\,\psi(t)| \leqslant N \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant N\,t\,\|\phi - \psi\|_{E_1} \leqslant$$

$$\leqslant N\,T\,\|\phi - \psi\|_{E_1}$$

où $\qquad N = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} K_2(t)$.

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit t dans $[0,T]$, nous en déduisons que :

$$\|U_1\,\phi - U_1\,\psi\|_{E_1} \leqslant N\,T\,\|\phi - \psi\|_{E_1} .$$

A présent, nous pouvons choisir une valeur pour T et nous la prenons égale à $N/2$. U_1 est donc une contraction de rapport strictement inférieur à 1 . Nous en déduisons l'existence et l'unicité d'une solution continue sur $[0,T]$.

Il nous reste à prolonger cette solution sur $[0,\infty[$.

Sur $[0,2T]$, nous étudions la solution de (1.1) dont nous connaissons déjà la solution unique sur $[0,T]$:

$$u(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^T K_2(t-\tau)\ u(\tau)\ d\tau + \int_T^t K_2(t-\tau)\ u(\tau)\ d\tau \quad .$$

Posons : $\quad u_o + K_1(t) + \int_0^T K_2(t-\tau)\ u(\tau)\ d\tau = F_1(t) \quad .$

Considérons E_2 l'espace des fonctions continues sur $[T,2T]$ et définissons l'opérateur U_2 par :

$$U_2 : E_2 \to E_2$$
$$\phi \to U_2\phi$$

tel que $\quad U_2\ \phi(t) = F_1(t) + \int_T^t K_2(t-\tau)\ \phi(\tau)\ d\tau$

quel que soit t dans $[T,2T]$.

Pour toutes les fonctions ϕ , $\psi \in E_2$, nous avons les inégalités suivantes :

$$|U_2\ \phi(t) - U_2\ \psi(t)| \leqslant N \int_T^t |\phi(s) - \psi(s)|\ ds \leqslant$$

$$\leqslant N(t-T)\ \|\phi - \psi\|_{E_2} \leqslant$$

$$\leqslant N\ T\ \|\phi - \psi\|_{E_2} \quad .$$

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit t dans $[T,2T]$, nous en déduisons que :

$$\|U_2\ \phi - U_2\ \psi\|_{E_2} \leqslant \frac{1}{2}\ \|\phi - \psi\|_{E_2} \quad .$$

L'opérateur U_2 étant une contraction de rapport strictement inférieur à 1 , nous avons, de même, l'existence et l'unicité d'une solution continue sur $[T,2T]$.

En itérant ce procédé sur les intervalles de la forme $[nT,(n+1)T]$ où $n \in \mathbb{N}$, nous avons défini la solution unique et continue sur tout intervalle de la forme $[0,nT]$ où $n \in \mathbb{N}$ et est arbitraire.

L'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation de Volterra (1.1) est aussi prouvée sur $\mathbb{R}^+$.

Enfin, nous allons montrer la dérivabilité de la solution $u(t)$ sur $\mathbb{R}^+$

ainsi que la continuité de cette dérivée.

$u(\tau)$ étant continue sur $[0,t]$ et $K_2(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$, l'intégrant de (1.1) est continu et continûment dérivable par rapport à t . En outre, comme $K_1(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$, nous en déduisons que $u(t)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que sa dérivée vaut :

$$u'(t) = K_1'(t) + \int_0^t K_2'(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{1.6}$$

quel que soit t dans $[0,\infty[$. C.Q.F.D.

LEMME 2.

Considérons, pour $t > 0$ et x dans $[0,c]$, l'équation non homogène :

$$T_t(x,t) = (b(x)\, T_x(x,t))_x - q(x)\, T(x,t) + \eta(x)\, g(t) \tag{1.7a}$$

avec les conditions aux limites (0.2) et la condition initiale (0.4) où nous supposons :

$$g(t) \in C^1(\mathbb{R}^+) \quad ; \tag{1.8}$$

les fonctions f et η vérifient les hypothèses du problème de même que les constantes a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

Alors, l'équation (1.7a) admet une solution $T(x,t)$ de la forme suivante :

$$T(x,t) = \int_0^t G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\, \eta(\xi)\, g(\tau)\, d\xi\, d\tau$$

où $G(x,\xi,t)$ est définie en (1.9).

Remarques :

1) Nous appelons solution de (1.7a) une fonction réelle $T(x,t)$ définie sur $[0,c] \times \mathbb{R}_0^+$ de classe C^1 et dont la dérivée seconde par rapport à x est continue sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$, satisfaisant aux conditions aux limites (0.2), de même que à l'équation (1.7a) et à la condition initiale au sens de L^2 :

$$\| T(\cdot,t) - f(\cdot) \|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow 0 .$$

2) Nous définissons la fonction de Green associée au problème par :

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, y_n(\xi)\, e^{-\lambda_n t} \tag{1.9}$$

pour $(x,\xi,t) \in [0,c]^2 \times]0,+\infty[$.

Quel que soit t_0 fixé, $t_0 > 0$, cette série converge absolument et uniformément sur $[0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$. Par conséquent, la fonction de Green est continue sur $[0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$.

DEMONSTRATION.

Nous allons chercher une solution de l'équation (1.7a) sous la forme :

$$T(x,t) = T_H(x,t) + T_I(x;t) \tag{1.10}$$

où $T_H(x,t)$ est une solution de l'équation homogène :

$$T_t(x,t) = (b(x)\, T_x(x,t))_x - q(x)\, T(x,t) \tag{1.7b}$$

soumise à la condition initiale (0.4) et aux conditions aux limites (0.2).

$T_I(x,t)$ est une solution de l'équation non homogène (1.7a) soumise à la condition initiale

$$T_I(\cdot,t) \to 0 \quad \text{au sens de } L^2 \text{ lorsque} \quad t \to 0 \tag{0.4b}$$

quel que soit x dans $[0,c]$ et aux conditions aux limites (0.2).

Première partie :

Posons :

$$T_H(x,t) = \int_0^c G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi \quad ;$$

nous allons démontrer que, premièrement, $T_H(x,t)$ est bien définie et continue sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$,

deuxièmement, $T_H(x,t)$ est une solution de (1.7b) vérifiant les conditions aux limites (0.2) et la condition initiale (0.4).

De la continuité de la fonction de Green sur $[0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$, $t_0 > 0$ et de (0.5), nous déduisons l'existence de cette intégrale. Nous allons en modifier légèrement la forme pour arriver à l'expression :

$$T_H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \int_0^c y_n(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \quad .$$

En effet, considérons la somme partielle :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} y_n(x)\, y_n(\xi)\, f(\xi)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Pour x et t fixés, S_N est intégrable sur $[0,c]$ et converge presque partout vers $G(x,\xi,t)\, f(\xi)$ quand N tend vers l'infini.

D'autre part, l'inégalité suivante étant vérifiée :

$$|S_N(x,\xi,t)| \leqslant |f(\xi)| \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x)\, y_n(\xi)|\, e^{-\lambda_n t} \quad ,$$

$|S_N(x,\xi,t)|$ est majorée par une fonction intégrable sur $[0,c]$.

Les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites par S_N , nous avons le résultat recherché.

Par conséquent :

$$T_H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \tag{1.11}$$

quels que soient x dans $[0,c]$ et $t \in [t_o,+\infty[$ où $t_o > 0$.

Remarquons, en outre que $T_H(x,t)$ est continue car la série converge uniformément quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_o,+\infty[$ où $t_o > 0$.

Nous allons maintenant prouver que $T_H(x,t)$ défini en (1.11) est une solution de (1.7b). Effectuons formellement le calcul des dérivées et ensuite viennent les justifications :

$$\frac{\partial T_H}{\partial t}(x,t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t}$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n'(x)\, e^{-\lambda_n t}$$

$$\frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n''(x)\, e^{-\lambda_n t} \quad .$$

1) Dérivation par rapport à t :

- La dérivée du terme général est continue pour $x \in [0,c]$ et $t \in \mathbb{R}_0^+$.

- La série dérivée converge uniformément quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_o,+\infty[$ où $t_o > 0$.

  En effet :

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n y_n(x) e^{-\lambda_n t}| \leq M F \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}$$

où $\quad |y_n(x)| \leq M \qquad$ (A.4.)

quels que soient x dans $[0,c]$ et n dans $\mathbb{N}_0$ et où nous choisissons F tel que :

$$|f_n| \leq F \qquad (0.5)$$

quel que soit n dans $\mathbb{N}_0$.

Majorons le terme général $\lambda_n f_n y_n(x) e^{-\lambda_n t}$ par le terme général $\lambda_n M F e^{-\lambda_n t_o}$ d'une série absolument convergente (critère de d'Alembert et (A.3)).

Par l'application du critère de Weierstrass [11, p. 19], la convergence uniforme de la série dérivée est évidente quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_o,+\infty[$.

De plus $\frac{\partial T_H}{\partial t}$ est continue sur $[0,c] \times [t_o,+\infty[$.

2) Dérivation par rapport à x :

Nous étudions la convergence de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n'(x) e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Par l'annexe 1, nous savons que les dérivées des fonctions propres sont majorées :

$$|y_n'(x)| \leq K \lambda_n \quad . \qquad (A.7)$$

Si nous appliquons cette majoration à la série, nous obtenons :

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n'(x) e^{-\lambda_n t}| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} f_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} \quad ,$$

ce qui nous permet de revenir au cas examiné lors de la dérivée première par rapport à t .

De plus, $\frac{\partial T_H}{\partial x}$ est continue sur $[0,c]\times[t_o,+\infty[$ où $t_o > 0$.

3) Double dérivation par rapport à x :

Considérons l'équation différentielle :

$$(b(x)\, y_n'(x))' - q(x)\, y_n(x) = -\lambda_n\, y_n(x) \qquad \text{sur } [0,c] .$$

Par (0.9), l'égalité ci-dessus est équivalente à :

$$y_n''(x) = -\frac{b'(x)}{b(x)}\, y_n'(x) - \frac{(\lambda_n - q(x))}{b(x)}\, y_n(x) .$$

Par ce qui précède, la convergence uniforme de la série des dérivées secondes est assurée pour t dans $[t_o,+\infty[$, $t_o > 0$ et x dans $[0,c]$.

Nous en déduisons la continuité de $\frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2}$ pour $(x,t) \in [0,c]\times[t_o,+\infty[$ où $t_o > 0$.

Pour terminer cette partie de la démonstration, il nous reste à montrer que $T_H(x,t)$ vérifie (1.7b) et satisfait aux conditions aux limites (0.2) et à la condition initiale (0.4).

Remplaçons $T_H(x,t)$ par l'expression définie en (1.11) dans (1.7b) pour arriver à une identité :

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} = b(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n''(x)\, e^{-\lambda_n t} +$$

$$+ b'(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n'(x)\, e^{-\lambda_n t} - q(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} .$$

Cette égalité est bien vérifiée car, les $y_n(x)$ étant les fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville correspondant aux valeurs propres λ_n (voir annexe 1), la série suivante est nulle :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\,(b(x)\, y_n'(x))' + (\lambda_n - q(x))\, y_n(x)\,]\, f_n\, e^{-\lambda_n t} = 0 .$$

D'autre part, les fonctions propres satisfaisant aux conditions aux limites

(A.2), $T_H(x,t)$ vérifie (0.2).

Enfin, nous voyons que $T_H(x,t)$ satisfait à la condition initiale au sens de L^2. En effet, les séries $T_H(x,t)$ et $f(x)$ convergeant dans L^2 quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$, leur différence est convergente dans L^2. Par conséquent, la norme au sens de L^2 est majorée de la façon suivante :

$$\| T_H(\cdot,t) - f(\cdot) \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 [e^{-\lambda_n t} - 1]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} f_n^2 [1 - e^{-\lambda_n t}]^2 + \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 [1 - e^{-\lambda_n t}]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n^2 [1 - e^{-\lambda_n t}]^2 + \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 \quad .$$

Pour N assez grand, la seconde série devient, par (0.5), aussi petite que nous le voulons; pour t suffisamment petit, le premier terme étant une somme finie, le résultat est le même.

Voilà qui termine la démonstration de la première partie du Lemme 2.

Deuxième partie :

Posons :

$$T_I(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\, \eta(\xi)\, g(\tau)\, d\xi\, d\tau$$

où $G(x,\xi,t)$ est définie en (1.9).

Nous montrons successivement que $T_I(x,t)$ est bien définie et continue quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$, et que $T_I(x,t)$ est solution de (1.7) vérifiant les conditions aux limites (0.2) et la condition initiale (0.4b).

Nous supposons que η satisfait à (0.7), à savoir $\eta \in C([0,c])$. Tout d'abord, nous allons vérifier l'existence de cette intégrale double quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

De (0.7) et de la convergence uniforme de la fonction de Green sur

$[0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$, nous déduisons l'existence de l'intégrale par rapport à ξ sur $[0,c]$. En examinant les coefficients de Fourier de η développés dans la base hilbertienne, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\,\eta(\xi)\,d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n(t-\tau)} \tag{1.12}$$

Pour trouver l'expression de $T_I(x,t)$, nous appliquons le théorème de Borel-Cantelli. En effet, chaque terme de la série définie en (1.12) est intégrable par rapport à τ dans $[0,t]$ quel que soit x dans $[0,c]$.

D'autre part, nous connaissons les inégalités suivantes :

$$|y_n(x)| \leqslant M \tag{A.4}$$

quels que soient x dans $[0,c]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\eta_n| \leqslant L \tag{0.7}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$\sup_{\tau\in[0,t]} |g(\tau)| \leqslant G \quad . \tag{1.8}$$

Nous avons alors cette majoration :

$$\int_0^t |e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, y_n(x)\, \eta_n\, g(\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{M\,L\,G}{\lambda_n} \quad , \tag{1.13}$$

qui nous permet de déduire la convergence de la série majorée en utilisant la propriété (A.3) et le critère de Weierstrass.

Sous ces conditions, il en résulte l'égalité suivante :

$$T_I(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, g(\tau)\, d\tau \tag{1.14}$$

quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

La série $T_I(x,t)$ convergeant uniformément quel que soit (x,t) dans $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$, elle est continue par rapport au couple (x,t).

Vérifions maintenant que $T_I(x,t)$ satisfait à la condition initiale (0.4b).

La série $T_I(x,t)$ convergeant dans L^2 quels que soient $x \in [0,c]$ et $t \in [t_0,+\infty[$, nous pouvons majorer sa norme au sens de L^2 de la manière suivante :

$$\| T_I(\cdot,t) \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2 \, [\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau]^2 \leqslant$$

$$\leqslant G^2 \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2 \frac{(1-e^{-\lambda_n t})^2}{\lambda_n^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{G^2}{\lambda_1^2} [\sum_{n=1}^{N} \eta_n^2 \, (1-e^{-\lambda_n t})^2 + \sum_{n=N}^{\infty} \eta_n^2] \quad .$$

Pour N assez grand, la seconde série devient, par (0.7), aussi petite que nous le désirons; il en est de même pour le premier terme qui est une somme finie, si nous choisissons t suffisamment petit. Par conséquent :

$$\| T_I(\cdot,t) \|_2^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0 \; .$$

Il reste à voir que $T_I(x,t)$ défini en (1.14) est solution de (1.7a) et vérifie les conditions aux limites (0.2).

Si nous supposons sur η des hypothèses plus fortes que (0.7), nous vérifions tous ces points. Ces hypothèses sont :

$$\eta \in C^2([0,c]) \quad ; \tag{1.15}$$

η satisfait aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} a_1 \, \eta(0) + a_2 \, \eta'(0) &= 0 \quad , \\ b_1 \, \eta(c) + b_2 \, \eta'(c) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{0.2}$$

En effet, nous remarquons tout d'abord que sous ces hypothèses, les coefficients de Fourier de η développés dans la base hilbertienne peuvent être majorés :

$$|\eta_n| \leqslant \frac{C}{n^2} \quad . \tag{A.11}$$

Ensuite, nous effectuons formellement le calcul des dérivées de $T_I(x,t)$:

$$\frac{\partial T_I}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, g(t) \quad , \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial T_I}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau \quad , \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 T_I}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n''(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau \; . \tag{1.18}$$

1) Dérivation par rapport à t :

Considérons le terme général de la première série de (1.16); la majoration suivante est alors vérifiée :

$$\int_0^t |e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, y_n(x) \, \eta_n \, \lambda_n \, g(\tau)| \, d\tau \leqslant \frac{MGC}{n^2}$$

(voir (1.13)). Ceci implique, par le critère de Weierstrass, la convergence uniforme de la première série de (1.16) quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

Considérons le terme général de la seconde série de (1.16); par (1.8), (A.4) et (A.11), nous avons la majoration suivante :

$$|\eta_n \, y_n(x) \, g(t)| \leqslant \frac{C}{n^2} M \, G \quad .$$

La convergence uniforme de la série est évidente quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$ et la série est exactement $\eta(x)\, g(t)$. La dérivabilité sans le signe somme est permise et $\frac{\partial T_I}{\partial t}$ est bien défini comme en (1.16); elle est également continue sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

2) Dérivation par rapport à x :

Nous avons, par (A.7), la relation suivante :

$$|y_n'(x)| \leqslant k \, \lambda_n \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N} \quad .$$

Par conséquent, cette majoration nous permet de revenir au cas examiné lors de la dérivée première par rapport à t et de trouver la continuité de $\frac{\partial T_I}{\partial x}$ pour $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

3) Double dérivation par rapport à x :

Par un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas de $T_H(x,t)$, nous avons la convergence uniforme de la série des dérivées secondes quels que soient x dans $[0,c]$ et t dans $[t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

Nous en déduisons la continuité de $\dfrac{\partial^2 T_I}{\partial x^2}$ pour $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

Il nous reste à vérifier que $T_I(x,t)$ défini en (1.14) est solution de (1.7a) et satisfait aux conditions aux limites (0.2).

Remplaçons T_I par l'expression définie en (1.14) dans (1.7a) pour arriver à une identité :

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, g(t) =$$

$$= b(x) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n''(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau +$$

$$+ b'(x) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n'(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau -$$

$$- q(x) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \, g(\tau) \, d\tau + \eta(x) \, g(t) \quad .$$

Cette égalité est bien vérifiée car les $y_n(x)$ sont les fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville.

Enfin, $T_I(x,t)$ vérifie les conditions aux limites (0.2) car les fonctions propres $y_n(x)$ les vérifient (A.2).

En conclusion, lorsque η vérifie (0.2) et (1.15), $T_I(x,t)$ défini en (1.14) est solution de (1.7a), satisfait aux conditions aux limites (0.2) et à la condition initiale (0.4b) et est continue pour $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$. Cependant, nous avons choisi une hypothèse moins forte sur $\eta(x)$, à savoir $\eta(x) \in C([0,c])$ (0.7). Dans ce cas, il nous reste à voir que $T_I(x,t)$ est dérivable une fois par rapport à t et à x , deux fois par rapport à x et que ces dérivées sont continues pour $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

En appliquant le théorème de Weierstrass, nous allons choisir une suite de fonctions η^k vérifiant (0.2) et (1.15) qui approchent η au sens de L^2 et, cela, presque partout.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, η^k vérifie (0.2) et (1.15) et η satisfait à (0.7) ; alors :

$$\eta^k \text{ converge vers } \eta \text{ dans } L^2 \text{ et, cela, presque partout.} \tag{1.19}$$

Définissons $T_I^k(x,t)$ comme étant une solution correspondant à η^k de l'équation (1.7a) vérifiant bien les conditions aux limites (0.2) et la condition initiale (0.4b).

Pour $t_0 > 0$ fixé, nous étudions la convergence de l'équation suivante lorsque k tend vers l'infini :

$$\frac{\partial T_I^k(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)\,\frac{\partial T_I^k(x,t)}{\partial x}\right) - q(x)\,T_I^k(x,t) + \eta^k(x)\,g(t) \tag{1.20}$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

Nous constatons la convergence uniforme de $T_I^k(x,t)$ vers $T_I(x,t)$ quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$. En effet, compte tenu de (1.8), (A.4) et des propriétés des fonctions et valeurs propres définies dans l'annexe 1, en appliquant l'inégalité de Schwartz à $|\eta_n^k - \eta_n|$, la majoration suivante est immédiate :

$$|T_I^k(x,t) - T_I(x,t)| \leq M\,G\,\|\eta^k - \eta\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n} .$$

Par (1.19) et par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{\lambda_n}$ quel que soit t dans $\mathbb{R}^+$, nous obtenons la convergence uniforme désirée qui nous permet de poser :

$$T_I(x,t) = \lim_{k \to \infty} T_I^k(x,t) . \tag{1.21}$$

Par la continuité de q et de g , la convergence uniforme de $\eta^k(x)\,g(t)$ et de $q(x)\,T_I^k(x,t)$ vers respectivement $\eta(x)\,g(t)$ et $q(x)\,T_I(x,t)$ est immédiate quels que soient $x \in [0,c]$ et $t \in [t_0,+\infty[$.

Examinons la convergence des dérivées intervenant dans (1.20).

Dérivée par rapport à t :

Par un changement de variable dans (1.14), $T_I(x,t)$ devient :

$$T_I(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n t}\, g(t-\tau)\, d\tau \quad . \tag{1.22}$$

Nous dérivons (1.22) et obtenons :

$$\frac{\partial T_I}{\partial t} = g(0) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n t}\, g'(t-\tau)\, d\tau \quad .$$

En effet, la première série est uniformément convergente quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$; il en est de même pour la seconde série en appliquant les hypothèses (0.7), (1.8), (A.4) et le critère de Weierstrass.

Nous étudions la convergence de la première série. Par un raisonnement analogue à celui effectué lors de la convergence uniforme de $T_I^k(x,t)$, nous obtenons la majoration :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n^k - \eta_n)\, g(0)\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \right| \leq \| \eta^k - \eta \|_2\, G\, M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \quad .$$

Par (1.19) et par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$, la convergence de la première série est uniforme quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

De manière analogue, nous obtenons la convergence uniforme de la seconde série.

Par conséquent, $\dfrac{\partial T_I^k}{\partial t}$ converge uniformément vers $\dfrac{\partial T_I}{\partial t}$ quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

Par ce qui précède, $T_I(x,t)$ et $\dfrac{\partial T_I(x,t)}{\partial t}$ sont continues par rapport à (x,t) sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$.

Montrons que $T_I(x,t)$ est dérivable par rapport à x et qu'elle satisfait à (1.7a) ainsi qu'aux conditions aux limites (0.2).

Nous définissons, dans $L^2(0,c)$, l'opérateur A par :

$$A\ \phi(x) = \frac{d}{dx}\ (b(x)\ \frac{d\ \phi(x)}{dx}) \tag{1.23}$$

dont son domaine $D(A)$ est l'ensemble défini par :

$$D(A) = \left\{ \phi \in L^2(0,c) : \begin{array}{l} \phi \in C^1([0,c]) \\ \phi' \text{ est presque partout dérivable} \\ \phi'' \in L^2(0,c) \\ \phi \quad \text{vérifie (0.2)} \quad . \end{array} \right\} \tag{1.24}$$

Nous assurons que cet opérateur est fermé. Pour démontrer cette proposition, nous employons le critère suivant :

Soit une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\phi_n \in D(A)$

définie de telle manière que $\phi_n \to \phi$ dans L^2

et $A\ \phi_n \to \psi$ dans L^2 , (1.25)

alors $\phi \in D(A)$ et $A\ \phi = \psi$.

Nous choisissons une sous-suite $(\phi_{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

de telle sorte que $\phi_{q_n} \to \phi$ dans L^2 et, cela, presque partout (1.26)

et $A\,\phi_{q_n} \to \psi$ dans L^2 et, cela, presque partout.

Le théorème d'approximation de Weierstrass nous assure l'existence d'une telle sous-suite.

Prenons α , x deux points distincts de convergence de la série $(\phi_{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et appliquons l'opérateur A à cette série :

$$A\ \phi_{q_n}(x) = \frac{d}{dx}\ (b(x)\ \frac{d\ \phi_{q_n}(x)}{dx}) \quad .$$

En intégrant deux fois cette expression sur l'intervalle $[\alpha,x]$, nous obtenons :

$$\int_\alpha^x b(\tau)\ \phi'_{q_n}(\tau)\ d\tau = b(\alpha)\ \phi'_{q_n}(\alpha)\ (x-\alpha) + \int_\alpha^x d\theta \int_\alpha^\theta [\,b(\tau)\ \phi'_{q_n}(\tau)\,]'\ d\tau \quad .$$

L'intégration par parties du premier membre nous donne :

$$b(x)\ \phi_{q_n}(x) = b(\alpha)\ \phi_{q_n}(\alpha) + \int_\alpha^x b'(\tau)\ \phi_{q_n}(\tau)\ d\tau\ + \qquad (1.27)$$

$$+\ b(\alpha)\ \phi'_{q_n}(\alpha)\ (x-\alpha) + \int_\alpha^x d\theta \int_\alpha^\theta [\,b(\tau)\ \phi'_{q_n}(\tau)\,]\ d\tau\ .$$

En utilisant le choix de α , x et (1.27), nous en déduisons la convergence de la série $(\phi'_{q_n}(\alpha))$ et nous posons :

$$\lim_{n\to\infty} \phi'_{q_n}(\alpha) = 1 \quad . \qquad (1.28)$$

Par (1.26) et (1.28), le passage à la limite appliqué à (1.27), quand n tend vers l'infini, nous donne l'expression suivante :

$$b(x)\ \phi(x) = b(\alpha)\ \phi(\alpha) + \int_\alpha^x b'(\tau)\ \phi(\tau)\ d\tau + 1\ b(\alpha)\ (x-\alpha)\ + \qquad (1.29)$$

$$+ \int_\alpha^x d\theta \int_\alpha^\theta \psi(\tau)\ d\tau \quad .$$

Comme l'égalité (1.29) est vérifiée presque partout et que le membre de droite est continu, nous en déduisons la continuité de $\phi(x)$ sur $[\,0,c\,]$. Par conséquent, en appliquant le raisonnement inverse de celui-ci, la dérivée seconde par rapport à x de (1.29) est bien définie comme étant :

$$[\,b(x)\ \phi'(x)\,]' = \psi(x)$$

et nous avons terminé la preuve de (1.25).

Dans le cas qui nous occupe, nous considérons

$$\eta^k \to \eta \quad \text{dans } L^2 \text{ et, cela, presque partout} \quad ; \qquad (1.19)$$

à chaque η^k , nous associons un $T_I^k(x,t)$ et la série $T_I^k(x,t)$ converge uniformément vers $T_I(x,t)$ quel que soit $(x,t) \in [\,0,c\,]\times[\,t_0,+\infty[$.

Appliquons-lui l'opérateur A fermé et nous arrivons aux résultats (1.24) pour un t fixé dans $[\,t_0,+\infty[$.

$T_I(x,t)$ est continûment dérivable par rapport à x sur $[\,0,c\,]$;

$\dfrac{\partial T_I(x,t)}{\partial x}$ est presque partout dérivable ;

$$\frac{\partial^2 T_I(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{est } L^2(0,c) \quad ;$$

$$T_I(x,t) \quad \text{vérifie (0.2)} \quad .$$

En remplaçant (1.11) et (1.14) dans (1.10), la solution générale de l'équation (1.7a) est de la forme :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, g(\tau)\, d\tau \tag{1.30}$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

Par ce qui précède, nous savons que $T(x,t)$ est continue par rapport au couple (x,t) sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ de même que sa dérivée par rapport au temps.

A présent, montrons la continuité de la dérivée première de $T(x,t)$ par rapport à (x,t) sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$. Nous intégrons (1.7a) sur $[0,x]$ par rapport à la variable d'état :

$$\int_0^x \frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t}\, d\xi = b(x)\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - b(0)\, \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} - \int_0^x q(\xi)\, T(\xi,t)\, d\xi + g(t) \int_0^x \eta(\xi)\, d\xi \tag{1.31}$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

Par (0.9), la division de cette équation par $b(x)$ est définie. Nous répétons l'intégration sur $[0,x]$ par rapport à la variable d'état. En effet, $T(x,t)$ et $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ sont continues sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ et (0.7) et (0.8) sont vérifiées. L'intégrale de (1.31) a la forme suivante :

$$\int_0^x \frac{1}{b(y)} \int_0^y \frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t}\, d\xi\, dy = T(x,t) - T(0,t) - b(0)\, \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \int_0^x \frac{1}{b(y)} - \int_0^x \frac{1}{b(y)} \int_0^y q(\xi)\, T(\xi,t)\, d\xi\, dy + g(t) \int_0^x \frac{1}{b(y)} \int_0^y \eta(\xi)\, d\xi\, dy \tag{1.32}$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$.

De (1.32), nous pouvons déduire la continuité de $\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}$; par conséquent, la continuité de $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$ dans (1.31) est immédiate sur $[0,c]\times[t_0,+\infty[$.

La continuité de la dérivée seconde par rapport à x de $T(x,t)$ sur $[0,c]\times[t_0,+\infty[$ résulte directement de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{b(x)}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{b(x)}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x)}{b(x)}T(x,t) - \frac{\eta(x)}{b(x)}g(t) \qquad (1.33)$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c]\times[t_0,+\infty[$. En effet, cette équation est définie par (0.9) et (0.7a).

Ainsi se termine la démonstration du Lemme 2.

REMARQUE.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, l'hypothèse "$\eta \in L^2(0,c)$" est suffisante pour établir l'existence d'une solution $T(x,t)$ du problème (0.1)-(0.4). Tous les raisonnements effectués dans ce lemme restent valables sauf le dernier. En effet, la continuité de la dérivée seconde par rapport à x n'est plus prouvée dans (1.33).

LEMME 3.

Considérons l'équation homogène pour $t > 0$ et x dans $[0,c]$:

$$T_t(x,t) = (b(x)\,T_x(x,t))_x - q(x)\,T(x,t) \qquad (1.7b)$$

soumise aux conditions aux limites (0.2) et à la condition initiale (0.4b).

Alors, la solution de l'équation (1.7b) est identiquement nulle pour tout x dans $[0,c]$ et pour tout $t \geqslant 0$.

DEMONSTRATION.

Définissons la fonction $V(t)$ continue et à valeur réelle sur l'intervalle $[0,+\infty[$:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \,, \\ \frac{1}{2}\int_0^c T^2(x,t)\,dx & \text{si } t > 0 \,. \end{cases} \qquad (1.34)$$

$T(x,t)$ étant une solution de l'équation (1.7b), elle est continue sur

$[0,c] \times [t_0,+\infty[$ et dérivable par rapport à t . Par conséquent, la dérivée de (1.34) est, selon (1.7b) et en intégrant par parties :

$$V_t(t) = b(c)\ T(c,t)\ T_x(c,t) - b(0)\ T(0,t)\ T_x(0,t) -$$

$$- \int_0^c b(x)\ (T_x(x,t))^2\ dx - \int_0^c q(x)\ T^2(x,t)\ dx \quad .$$

De (0.2), (0.9), (0.10), (0.11a) et (0.11b), nous déduisons l'inégalité suivante :

$$V_t(t) \leqslant 0 \qquad\qquad \text{quel que soit} \quad t > 0 \quad .$$

$V(t)$ est une fonction semi-définie positive, décroissante, et, par (0.4), elle tend vers 0 lorsque t tend vers 0 . Par conséquent, $V(t)$ est nulle sur $[0,+\infty[$.

Il en découle immédiatement que :

$$T(x,t) \equiv 0$$

quel que soit $t \geqslant 0$ et pour presque tout $x \in [0,c]$, et par la continuité, nous avons la solution triviale pour tout x dans $[0,c]$.

THEOREME 1 : THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION.

Supposons que :

$$\alpha\ ,\ f \in L^2(0,c) \quad , \qquad (0.5)$$

$$f \in C(0,c) \quad , \qquad (0.6)$$

$$\eta \in C([0,c]) \quad , \qquad (0.7)$$

(0.12) est vérifiée .

Alors (0.1) admet une solution unique (u,T) qui satisfait aux conditions aux limites (0.2) et aux conditions initiales (0.3) et (0.4).

DEMONSTRATION.

Par le Lemme 1, nous savons que l'équation de Volterra pour $t \geqslant 0$:

$$u(t) = u_o + K_1(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)\ u(\tau)\ d\tau \qquad (1.1)$$

où $$K_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_{in} \lambda_n^{-1} (e^{-\lambda_n t} - 1) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.2), (1.3}$$

admet une solution unique $u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

Nous allons montrer que le couple $(u(t),T(x,t))$ dont la première composante est la solution de (1.1) et la seconde, une solution de (0.1b) satisfaisant aux conditions aux limites et à la condition initiale (0.4), vérifie l'équation (0.1a) :

$$u'(t) = - \int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx \quad . \tag{0.1a}$$

Par le Lemme 2, nous connaissons l'expression d'une solution (1.30) dans laquelle $u(t)$ est la solution de (1.1) :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$. Remplaçons ce $T(x,t)$ trouvé dans l'expression suivante :

$$\int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx = - \int_0^c \alpha(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t}\, dx -$$

$$- \int_0^c \alpha(x) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau \quad .$$

L'intégration terme à terme est permise car α vérifie (0.5) et les deux séries sont uniformément convergentes quels que soient $t \geqslant t_0$ et x dans $[0,c]$. Par Fubini et (0.5), (0.4) et (1.5) , l'équation prend la forme :

$$\int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx = - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1n}\, e^{-\lambda_n t} - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau$$

et nous constatons que le second membre n'est autre que la dérivée (1.6) de l'équation de Volterra (1.1). Par conséquent :

$$\int_0^c \alpha(x)\, T(x,t)\, dx = - u'(t) \qquad \text{pour} \quad t > 0 \quad . \tag{0.1a}$$

Nous avons donc prouvé l'existence de la solution $(u(t),T(x,t))$ de (0.1) dans laquelle $u(t)$ est la solution de l'équation de Volterra et $T(x,t)$, la solution définie en (1.30) par le Lemme 2 de l'équation (0.1b).

Nous étudions, à présent, l'unicité de la solution $(u(t),T(x,t))$.

Supposons qu'il existe deux solutions $(u_j(t),T_j(x,t))$ pour $j = 1, 2$ du problème (0.1)-(0.4) et posons :

$$u_3(t) = u_2(t) - u_1(t) \qquad ;$$

$$T_3(x,t) = T_2(x,t) - T_1(x,t) \qquad .$$

Le couple $(u_3(t),T_3(x,t))$ est solution de l'équation (0.1b) satisfaisant aux conditions aux limites (0.2) et aux conditions initiales (0.3b) et (0.4b) :

$$u(0) = 0 \qquad . \tag{0.3b}$$

Pour $j = 1, 2$, comme $u_j(t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, nous lui associons, par le Lemme 2, une solution $T_j^\star(x,t)$ de (0.1b) vérifiant (0.2), (0.3) et (0.4); cette solution est définie par (1.30).

$$T_j^\star(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u_j(\tau)\, d\tau \tag{1.30}$$

quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

Posons : $\quad T_3^\star(x,t) = T_2^\star(x,t) - T_1^\star(x,t) \qquad .$

Comme la différence entre les séries définies par $T_2^\star(x,t)$ et $T_1^\star(x,t)$ est absolument convergente, $T_3^\star(x,t)$ est de la forme :

$$T_3^\star(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u_3(\tau)\, d\tau \qquad .$$

Remplaçons, dans l'équation (0.1a), $T_3^\star(x,t)$:

$$u_3'(t) = - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, \alpha_n\, e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u_3(\tau)\, d\tau$$

$$= - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u_3(\tau)\, d\tau \qquad . \qquad \text{par (1.5)}$$

Comme la convergence de cette série est uniforme pour $t > 0$, nous intégrons de 0 à t et obtenons le résultat suivant par une intégration par parties et par (0.3b) :

$$u_3(t) = - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \lambda_n^{-1} [e^{-\lambda_n(t-\tau)} - 1] u_3(\tau) d\tau .$$

En appliquant (1.3), nous avons :

$$u_3(t) = - \int_0^t K_2(t-\tau) u_3(\tau) d\tau$$

qui n'est autre que l'équation de Volterra (1.1) avec $u(0) \equiv 0$ et $K_1(t) \equiv 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Par le Lemme 1, cette équation admet une solution unique. Par conséquent, $u_3(t) \equiv 0$ quel que soit $t \geqslant 0$.

De ce fait, $T_3(x,t)$ est solution de l'équation homogène (1.7b) satisfaisant aux conditions aux limites (0.2) et à la condition initiale (0.4b). Par le Lemme 3, nous savons que cette équation admet une solution unique, $T_3(x,t) \equiv 0$ quel que soit $(x,t) \in [0,c] \times]0,+\infty[$.

<u>THEOREME 2 : THEOREME SUR LE COMPORTEMENT DE LA SOLUTION $u(t)$ ET DE SA DERIVEE LORSQUE t TEND VERS L'INFINI.</u>

Sous les hypothèses du théorème précédent, nous affirmons l'existence d'un réel M strictement positif défini de telle manière que :

$$u(t) = O(e^{Mt}) \tag{1.35}$$

$$u'(t) = O(e^{Mt}) \tag{1.36}$$

où $u(t)$ est la solution de l'équation de Volterra (1.1) pour $t \geqslant 0$.

<u>DEMONSTRATION.</u>

Posons $M > 0$ défini de telle manière que :

$$M = \max\{ \sum_{n=1}^{\infty} |k_{in}| , \sum_{n=1}^{\infty} |k_{in}| \lambda_n^{-1} \} \qquad i = 1, 2 \tag{1.37}$$

et

$$M_1 = M + |u_o| \tag{1.38}$$

$K_i(t)$ et $K_i'(t)$ peuvent être majorées de la façon suivante en appliquant (1.2), (1.3) et (1.38) :

$$|K_i(t)| \leqslant M \qquad \text{quel que soit} \quad t \geqslant 0$$

et

$$|K_i'(t)| \leqslant M \qquad \text{quel que soit} \quad t \geqslant 0 \quad .$$

Majorons l'équation de Volterra (1.1) par (1.37) et (1.38) :

$$|u(t)| \leqslant M_1 + M \int_0^t |u(\tau)| \, d\tau$$

et, en appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$|u(t)| \leqslant M_1 \, e^{Mt} \qquad \text{quel que soit} \quad t \geqslant 0 \quad .$$

Par conséquent :

$$u(t) = O(e^{Mt}) \quad . \tag{1.35}$$

Si nous considérons la dérivée de l'équation de Volterra et majorons (1.6) de manière analogue, nous obtenons :

$$|u'(t)| \leqslant M + M \, M_1 \int_0^t e^{Mt} \, dt = M_1 \, e^{Mt} - |u_0| \leqslant M_1 \, e^{Mt} \quad ,$$

et (1.36) est démontré.

CHAPITRE II :

Comportement Asymptotique de la Solution

$(u(t),T(x,t))$ Quand $t \longrightarrow \infty$

Dans le problème du réacteur nucléaire, nous savons que la position d'équilibre est $u \equiv 0$, $T \equiv 0$. Il serait intéressant de connaître les conditions sous lesquelles chaque composante de la solution approche 0 quand $t \to \infty$. Nous formulons ci-dessous un théorème de stabilité asymptotique globale dont la démonstration est basée sur les transformées de Laplace.

THEOREME.

Supposons que :

$$\alpha \, , \, f \in L^2(0,c) \quad , \tag{0.5}$$

$$f \in C(0,c) \quad , \tag{0.6}$$

$$\eta \in C([0,c]) \quad , \tag{0.7}$$

$$k_{2n} \geqslant 0 \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}_0 \quad , \tag{2.1}$$

$$\text{il existe au moins un } m \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } k_{2m} > 0 \quad . \tag{2.2}$$

Alors il existe un nombre unique strictement positif σ_0 tel que :

$$u(t) = 0(t^j \, e^{-\sigma_0 t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{2.3}$$

où $j \in \{0,1,2,3\}$ et $j + 1$ est l'ordre maximum des pôles de :

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \, u(t) \, dt$$ [1]

---

[1] $U(s)$ représente la transformée de Laplace de $u(t)$.

sur la droite :

$$L : \sigma = -\sigma_0 \quad .$$

De plus, posons :

$$A = \min\{n \mid \eta_n \neq 0\}$$

et j , σ_0 comme ci-dessus.

Alors :

$$T_I(x,t) = O(F(t)) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{2.4}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$, où :

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_A t} & \text{si } \lambda_A < \sigma_0 \quad ; \\ t^j\, e^{-\sigma_0 t} & \text{si } \lambda_A > \sigma_0 \quad ; \\ t^j\, e^{-\sigma_0 t} \quad \text{ou} \quad t^{j+1}\, e^{-\sigma_0 t} & \text{si } \lambda_A = \sigma_0 \quad . \end{cases} \tag{2.5}$$

Finalement, posons :

$$B = \min\{n \mid f_n \neq 0\} \quad .$$

Alors :

$$T_H(x,t) = O(e^{-\lambda_B t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{2.6}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$.

Remarquons que A existe toujours par (1.5) et (2.1). Si B n'existe pas, nous n'aurons pas, dans la solution du problème (qui existe puisque nous nous trouvons dans le cadre des hypothèses du chapitre I) de partie $T_H(x,t)$.

Avant de prouver ce théorème, nous allons citer ou démontrer quelques lemmes. Après ce théorème, nous donnons l'origine de j et les comportements asymptotiques correspondants pour $u(t)$ et $T_I(x,t)$ quand $t \to \infty$.

LEMME 1.

A travers ce lemme, nous recherchons la transformée de Laplace de $u(t)$ (le résultat est exprimé en (2.7)).

Les hypothèses du théorème 2 du chapitre I nous assurent l'existence d'une constante $M > 0$ telle que :

$$u(t) = O(e^{Mt}) \qquad (1.35)$$

quand $t \to \infty$.

$$u'(t) = O(e^{Mt}) \qquad (1.36)$$

De ce fait, nous déduisons l'existence des transformées de Laplace de $u(t)$ et $u'(t)$ au moins pour $\mathrm{Re}\, s = \sigma > M$.

Nous allons rechercher la transformée de Laplace de $u(t)$ en partant de la dérivation de l'équation intégrale de Volterra (1.1) :

$$u'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} k_{1n}\, e^{-\lambda_n t} - \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau \, . \qquad (1.6)$$

En utilisant la transformée du produit de convolution et une application du théorème de Beppo-Levy nous permettant d'intégrer terme à terme, nous obtenons ($U(s)$ est la transformée de Laplace de $u(t)$) :

$$s\, U(s) - u(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} k_{1n} \frac{1}{s+\lambda_n} - \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \frac{1}{s+\lambda_n} U(s)$$

qui peut encore s'écrire :

$$U(s) = \frac{u_o - \sum_{n=1}^{\infty} k_{1n}\, (s+\lambda_n)^{-1}}{s + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, (s+\lambda_n)^{-1}} \, . \qquad (2.7)$$

Dans la suite, nous écrivons la transformée de Laplace de $u(t)$ par :

$$U(s) = \frac{H_1(s)}{H_2(s)} \qquad (2.8)$$

où $H_1(s)$ et $H_2(s)$ représentent respectivement le numérateur et le dénominateur de (2.7).

LEMME 2.

$$U(s) = \frac{H_1(s)}{H_2(s)} \tag{2.8}$$

est holomorphe, dans le plan complexe excepté en deux types de points :

a) les pôles $s = -\lambda_n$ du dénominateur $H_1(s)$ pour lesquels $k_{2n} = 0$;

b) les zéros du dénominateur $H_2(s)$.

Remarque.

Si $k_{2n} \neq 0$, la singularité correspondant à $s = -\lambda_n$ de $U(s)$ peut être levée en posant :

$$\lim_{s \to -\lambda_n} U(s) = - \frac{k_{1n}}{k_{2n}} = U(-\lambda_n) \quad .$$

DEMONSTRATION.

Soient :

$$R = \{s \in \mathbb{C} \mid s \neq -\lambda_n \ , \ n \in \mathbb{N}_o\}$$

$$R_\delta = \{s \in \mathbb{C} \mid |s + \lambda_n| \geqslant \delta > 0 \ , \ n \in \mathbb{N}_o\} \quad .$$

Nous définissons, pour $s \in R$:

$$H_{1m}(s) = u_o - \sum_{n=1}^{m} k_{1n} (s + \lambda_n)^{-1} \quad ; \tag{2.9}$$

$$H_{2m}(s) = s + \sum_{n=1}^{m} k_{2n} (s + \lambda_n)^{-1} \quad . \tag{2.10}$$

Nous constatons que chaque $H_{im}(s)$ $(i = 1, 2)$ est holomorphe sur R_δ , H_{im} étant des combinaisons linéaires finies de fonctions holomorphes sur R_δ . De plus, chaque $H_{im}(s)$ converge uniformément vers $H_i(s)$ $(i = 1, 2)$ sur R_δ et, de ce fait, sur n'importe quel compact de R . En effet, nous avons les majorations suivantes :

$$|H_i(s) - H_{im}(s)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |k_{in}|\ |s+\lambda_n|^{-1} \leqslant \delta^{-1} \sum_{n=m+1}^{\infty} |k_{in}| \quad ,$$

et, par la démonstration du Lemme 1 du chapitre 1, nous savons que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} k_{in}$ sont absolument convergentes.

Ayant la convergence uniforme des $H_{im}(s)$ vers $H_i(s)$ $(i = 1, 2)$ sur tous les sous-ensembles compacts de R , le théorème de K. Weierstrass nous assure l'holomorphie des H_i $(i = 1, 2)$ sur R .

La conclusion du Lemme 2 s'ensuit trivialement.

Dans le Lemme 3, nous allons localiser les singularités de $U(s)$:

LEMME 3.

Sous les hypothèses du théorème, il existe un réel strictement positif et unique σ_o tel que :

i) $U(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > -\sigma_o$;

ii) il existe un réel $a < -\sigma_o$ tel que $U(s)$ est holomorphe dans $[a,-\sigma_o[\times i\mathbb{R}$;

iii) $U(s)$ a au plus trois pôles sur la ligne $L : \sigma = -\sigma_o$ et dont la somme des ordres n'est pas supérieure à quatre.

DEMONSTRATION.

1. Localisation des singularités du type a du Lemme 2 (c'est-à-dire les pôles $s = -\lambda_n$ du numérateur pour lesquels $k_{2n} = 0$).

Posons : $P = \begin{cases} \min\{n \mid k_{1n} \neq 0 \text{ et } k_{2n} = 0\} & \text{si cet ensemble est non vide,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par la croissance stricte des λ_n (cf. Annexe 1), nous en déduisons que toutes les singularités du type a se trouvent dans le demi-plan $\sigma \leqslant -\lambda_p$.

2. Localisation des singularités du type b (c'est-à-dire les zéros de $H_2(s)$).

Considérons, pour $m \geqslant M$ où M est choisi pour vérifier (2.2) :

$$H_{2m}(s) = s + \sum_{n=1}^{m} k_{2n} (s + \lambda_n)^{-1} \tag{2.10}$$

et définissons j_m comme étant le nombre de coefficients k_{2n} non nuls pour n compris entre 1 et m. Le nombre j_m représente le nombre de pôles de $H_{2m}(s)$. (2.2) nous assure déjà que $j_m \geqslant 1$.

Remarquons que, si $j_m = 1$ quel que soit $m \geqslant M$, nous avons :

$$H_2(s) = H_{2m}(s)$$

et $$H_2(s) = s + k_{2n}(s + \lambda_n)^{-1} \quad ;$$

alors les zéros de $H_2(s)$ sont les zéros d'une équation du second degré. La conclusion du Lemme devient triviale dans ce cas.

Supposons donc $j_m > 1$; nous pouvons écrire (2.10) en renumérotant et en ne gardant que les k_{2n} non nuls par :

$$H_{2m}(s) = s + \sum_{n=1}^{j_m} k_{2n} (s + \lambda_n)^{-1}$$

qui peut aussi se transformer en :

$$H_{2m}(s) = \frac{s \prod_{n=1}^{j_m} (s+\lambda_n) + \sum_{k=1}^{j_m} k_{2n} \prod_{n=1, n\neq k}^{j_m} (s+\lambda_n)}{\prod_{n=1}^{j_n} (s + \lambda_n)} = \frac{P_m(s)}{\prod_{n=1}^{j_m} (s+\lambda_n)} .$$

$P_m(s)$ représente un polynôme de degré $j_m + 1$ à coefficients réels ne comprenant pas de facteur de la forme $s+\lambda_n$. Sinon, $H_{2m}(s)$ n'aurait plus que $j_m - 1$ pôles.

De ce fait, $H_{2m}(s)$ et $p_m(s)$ possèdent le même nombre de zéros $j_m + 1$ comptés avec leur multiplicité parmi lesquelles les racines complexes arrivent par paires conjuguées.

Décomposons $H_{2m}(s)$ en partie réelle et partie imaginaire :

$$H_{2m}(\sigma + i\,\tau) = \sigma + i\,\tau + \sum_{n=1}^{m} k_{2n} \frac{1}{\sigma + i\tau + \lambda_n} = \sigma + \sum_{n=1}^{m} \frac{k_{2n}\,(\sigma + \lambda_n)}{|s + \lambda_n|^2} +$$

$$+ i \tau \left(1 - \sum_{n=1}^{m} \frac{k_{2n}}{|s+\lambda_n|^2}\right) \quad , \qquad s = \sigma + i\tau \ .$$

Le choix de $m \geqslant M$ nous assure, pour $\sigma \geqslant 0$, que :

$$\mathrm{Re}\,[H_{2m}(s)] = \sigma + \sum_{n=1}^{m} k_{2n} \frac{\sigma+\lambda_n}{|s+\lambda_n|^2} > 0 \ .$$

D'où, l'existence des zéros de $H_{2m}(s)$ ne peut être recherchée que dans le demi-plan $\sigma < 0$. (2.11)

Considérons maintenant la fonction réelle :

$$H_{2m}(\sigma + i\,o) = \sigma + \sum_{n=1}^{m} \frac{k_{2n}}{\sigma+\lambda_n}$$

et regardons le comportement de $H_{2m}(\sigma + i\,o)$ quand σ tend vers les extrémités des intervalles formés de deux pôles consécutifs : $]-\lambda_{n+1}, -\lambda_n[$:

$$\lim_{\substack{\sigma \to -\lambda_{n+1} \\ >}} H_{2m}(\sigma + i\,o) = +\infty \quad ,$$

$$\lim_{\substack{\sigma \to -\lambda_{n} \\ <}} H_{2m}(\sigma + i\,o) = -\infty \quad .$$

La fonction $H_{2m}(\sigma + i\,o)$ étant continue, le théorème de la valeur intermédiaire nous assure l'existence d'un nombre σ' compris entre deux pôles consécutifs tels que $H_{2m}(\sigma' + i\,o) = 0$. Comme $H_{2m}(s)$ possède j_m pôles, il existe $j_m - 1$ intervalles de la forme $]-\lambda_{n+1}, -\lambda_n[$. Par conséquent, au moins $j_m - 1$ zéros distincts sur l'axe réel négatif et au plus deux racines complexes conjuguées de partie réelle négative peuvent apparaître. En outre, l'ordre des zéros ne peut être supérieur à trois.

De la convergence uniforme de $H_2(s)$ sur chaque sous-ensemble compact de R (voir démonstration du Lemme 2) et d'une application du théorème de Hurwitz [7, p. 283], nous déduisons que $H_2(s)$ a au moins un zéro réel entre les pôles adjacents et au plus deux zéros complexes conjugués dont l'ordre n'est pas plus grand que trois. Il est à remarquer que, s'il existe un zéro complexe, tous les zéros sont simples.

Tous les zéros étant dans le demi-plan négatif (2.11), il existe au moins un s_1 complexe tel que $s_1 = -\sigma_1 + i\,\tau_1$ $(\sigma_1 > 0)$ zéro de $H_2(s)$ dont la partie réelle $(-\sigma_1)$ est supérieure aux parties réelles de tous les autres zéros de $H_{2m}(s)$.

Si maintenant nous rassemblons les résultats 1. et 2. et si nous posons :

$$\sigma_o = \min(\sigma_1, \lambda_p) \quad , \tag{2.12}$$

nous obtenons que toutes les singularités de $U(s)$ se situent dans le demi-plan gauche déterminé par la droite $L : \sigma = -\sigma_o$. Le point i est ainsi démontré.

Comme les parties réelles des singularités sont différentes, il existe un réel a compris entre la singularité la plus proche de $-\sigma_o$ et $-\sigma_o$ lui-même tel que $U(s)$ est holomorphe dans $[\,a, -\sigma_o[\times i\,\mathbb{R}$. Ceci démontre ii .

Le point iii se démontre par le tableau suivant en se basant sur les résultats 1) et 2) du point i de la démonstration. Ce tableau donne les différentes situations des singularités sur la droite $L : \sigma = -\sigma_o$.

	Pôle de $H_1(s)$ sur L	Zéros de $H_2(s)$ sur L		Somme des ordres
		Réel	Complexe	
1	$-\sigma_o = -\lambda\,p$	—	—	1
2	$-\lambda\,p$	—	$-\lambda\,p \pm i\,\alpha$	3
3	$-\lambda\,p$	$-\lambda\,p$ (1)	—	2
4	$-\lambda\,p$	$-\lambda\,p$ (1)	$-\lambda\,p \pm i\,\beta$	4
5	$-\lambda\,p$	$-\lambda\,p$ (2)	—	3
6	$-\lambda\,p$	$-\lambda\,p$ (3)	—	4
7	—	$-\sigma_o = -\sigma_1$ (1)	—	1
8	—	$-\sigma_1$ (1)	$-\sigma_1 \pm i\,\gamma$	3
9	—	$-\sigma_1$ (2)	—	3
10	—	$-\sigma_1$ (3)	—	3
11	—	—	$-\sigma_1 \pm i\,\delta$	2

Le chiffre entre parenthèses est l'ordre du zéro réel de $H_2(s)$.

Ce tableau sert, en fin de chapitre, a établir le comportement asymptotique de la solution $u(t)$.

Le lemme suivant nous permet d'exprimer les comportements asymptotiques souhaités. L'énoncé et la démonstration de ce lemme peuvent être trouvés dans [5, p. 488] .

LEMME 4.

a) Supposons que $U(s)$ est holomorphe dans l'intervalle $a \leqslant \sigma \leqslant b$ excepté en s_o , $a < Re(s_o) < b$ où $U(s)$ a une singularité isolée.

La partie principale du développement de Laurent de $U(s)$ en $s = s_o$ a la forme :

$$a_1 (s - s_o)^{-1} + a_2 (s - s_o)^{-2} + \dots a_k (s - s_o)^{-k} + \dots \quad .$$

b) Supposons que $U(\sigma + i\tau) \to 0$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $a \leqslant \sigma \leqslant b$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}\, U(a + i\tau)\, d\tau$ converge uniformément pour $t \geqslant T > 0$.

Alors la fonction $V(t)$ définie par :

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{ts}\, U(s)\, ds$$

converge pour $t \geqslant T$ et la relation asymptotique suivante est vérifiée :

$$V(t) = e^{s_o t} \left(a_1 + \frac{a_2 t}{1!} + \dots + \frac{a_k\, t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots\right) + o(e^{at})$$

pourvu que la série entre parenthèses ne soit jamais nulle pour $t \geqslant T$.

Remarquons premièrement que ce lemme peut être étendu au cas où $U(s)$ a un nombre fini p de singularités isolées dans l'intervalle. Si les singularités sont en $s = s_n$ et si la partie principale du développement en série de Laurent de $U(s)$ en $s = s_n$ est :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} (s - s_n)^{-k} \quad , \qquad n = 1, \dots, p \quad ,$$

alors la relation asymptotique prend la forme suivante :

$$V(t) = \sum_{n=1}^{p} e^{s_n t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kn}\, t^{k-1}}{(k-1)!} + o(e^{at}) \quad \text{quand} \quad t \to \infty . \tag{2.13}$$

Secondo, si, dans le lemme, s_o est un pôle d'ordre j de $U(s)$, alors :

$$V(t) = O(t^{j-1}\, e^{(\mathrm{Re}\, s_o)t})$$

dès que $a < \mathrm{Re}(s_o)$ quand $t \to \infty$. Pour montrer ce comportement, il suffit de remarquer que :

$$\frac{\left| e^{s_o t}\left(a_1 + \frac{a_2\, t}{1!} + \ldots + \frac{a_j\, t^{j-1}}{(j-1)!}\right) + o(e^{at})\right|}{t^{j-1}\, e^{(\mathrm{Re}\, s_o)t}} \leqslant \left(\frac{|a_1|}{t^{j-1}} + \ldots + \frac{|a_j|}{(j-1)!}\right) +$$

$$+ \frac{o(e^{at})}{t^{j-1}\, e^{\mathrm{Re}(s_o)t}} \qquad .$$

Si, dans le lemme, $U(s)$ a un nombre fini p de pôles s_n d'ordre j_n , $n = 1, \ldots, p$ tels que $\mathrm{Re}\, s_1 \geqslant \mathrm{Re}\, s_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{Re}\, s_p$, alors :

$$V(t) = O(t^{j_1 - 1}\, e^{(\mathrm{Re}\, s_1)t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \qquad .$$

Le lemme suivant montre que $U(s)$ vérifie l'hypothèse b du Lemme 4 .

<u>LEMME 5.</u>

Si nous ajoutons, aux hypothèses du théorème, les hypothèses d'existence d'un $a < -\sigma_o$ (σ_o défini dans le Lemme 3) tel que $U(s)$ est holomorphe dans $[a, -\sigma_o[\times i\,\mathbb{R}$ et, de plus, si nous posons $T > 0$, alors :

i) $\lim_{|\tau| \to \infty} U(s) = 0$ uniformément pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$;

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}\, U(a + i\,\tau)\, d\tau$ converge uniformément pour $t \geqslant T$.

DEMONSTRATION.

Des expression $H_1(s)$ et $H_2(s)$ de (2.8) et par la convergence uniforme des séries dérivées, nous obtenons :

$$H_1'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_{1n} (s + \lambda_n)^{-2} \quad , \tag{2.14}$$

$$H_2'(s) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} (s + \lambda_n)^{-2} \quad . \tag{2.15}$$

Comme s a l'expression $s = \sigma + i\,\tau$, nous déduisons :

$$|s + \lambda_n|^2 = |\sigma + \lambda_n|^2 + |\tau|^2 \geqslant |\tau|^2$$

que nous reformulons pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$ par :

$$|s + \lambda_n|^{-2} \leqslant |\tau|^{-2} \quad . \tag{2.16}$$

Posons : $N \geqslant \max\{ \sum_{n=1}^{\infty} |k_{1n}| , \sum_{n=1}^{\infty} |k_{2n}| \}$

et montrons successivement que :

1) $H_1(s) = O(1)$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

Il suffit de remarquer que, de (2.8) et (2.16), nous avons :

$$|H_1(s)| \leqslant |u_0| + \frac{N}{|\tau|} \quad . \tag{2.17}$$

2) $H_2'(s) = O(1)$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

De (2.15) et (2.16), nous avons :

$$|H_2'(s)| \leqslant 1 + \frac{N}{|\tau|^2} \quad .$$

3) $H_1'(s) = O(|\tau|^{-2})$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

De (2.14) et (2.16), nous avons immédiatement :

$$|H_1'(s)| \leqslant \frac{N}{|\tau|^2} \quad .$$

4) $|\tau|$ suffisamment grand nous assure que :

$$|H_2(s)| > \frac{|\tau|}{2} \qquad \text{quel que soit} \quad \sigma \in \mathbb{R} .$$

Pour prouver cette assertion, choisissons $\tau^\star > 0$ tel que, si $|\tau| > \tau^\star$, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{2n}}{|s + \lambda_n|^2} < \frac{1}{2} \quad . \tag{2.18}$$

L'existence de $\tau^\star$ nous est assurée par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |k_{2n}| \; |s + \lambda_n|^{-2} \leqslant \frac{N}{|\tau|^2} \quad .$$

Ce résultat nous permet de choisir $\tau^\star$ de telle manière que $\tau^{\star 2} > 2N$.

De la définition de $H_2(s)$ et d'un calcul similaire effectué dans le bas de la page 2.6., nous déduisons :

$$|H_2(s)| = \sqrt{(\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \frac{\sigma + \lambda_n}{|s + \lambda_n|^2})^2 + |\tau|^2 \, (1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{2n}}{|s + \lambda_n|^2})^2} \geqslant$$

$$\geqslant |\tau| \; |1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{2n}}{|s + \lambda_n|^2}| \quad .$$

Par le choix de $\tau^\star$ et (2.18), nous obtenons :

$$|H_2(s)| > \frac{|\tau|}{2} \qquad \text{pour} \qquad |\tau| > \tau^\star \quad .$$

5) $\qquad U(s) = O(|\tau|^{-1})$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

En appliquant (2.17) et le point 4 pour $|\tau| > \tau^\star$, nous avons :

$$|U(s)| \leqslant \frac{2 \; O(1)}{|\tau|} \quad .$$

6) $U'(s) = O(|\tau|^{-2})$ quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

Remarquons que :

$$U'(s) = \frac{H_1'(s)\, H_2(s) - H_2'(s)\, H_1(s)}{H_2^2(s)}$$

et, en combinant les résultats précédents pour $|\tau| > \tau^\star$, nous déduisons :

$$|U'(s)| \leqslant \frac{2\, O(|\tau|^{-2})}{|\tau|} + \frac{4}{|\tau|^2}\, O(1) \quad .$$

Remarquons que le point i est une conséquence de 5 . En effet :

$$\lim_{|\tau| \to \infty} U(s) = \lim_{|\tau| \to \infty} \frac{O(|\tau|^{-1})}{|\tau|^{-1}} \cdot |\tau|^{-1} = 0 \quad .$$

Les fonctions $U(s)$ ne possédant pas de singularité sur la ligne $\sigma = a$, les fonctions $U(a+i\,\tau)$ et $U'(a+i\,\tau)$ sont continues pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

Alors, pour des nombres quelconques y_1 , y_2 , t vérifiant $0 \leqslant y_1 < y_2$ et $t \geqslant T$, nous obtenons, par intégration par parties sur la droite $\sigma = a$ entre y_1 et y_2 , la formule suivante :

$$\int_{y_1}^{y_2} e^{it\tau}\, U(a+i\,\tau)\, d\tau = \frac{e^{it\tau}\, U(a+i\,\tau)}{it} \Bigg|_{y_1}^{y_2} - \frac{1}{it} \int_{y_1}^{y_2} e^{it\tau}\, U'(a+i\,\tau)\, d\tau \quad .$$

Si nous prenons le module et si nous majorons, nous aboutissons à :

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} e^{it\tau}\, U(a+i\,\tau)\, d\tau\right| \leqslant \frac{1}{T} \left\{ |U(a+i\,\tau)| \Bigg|_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} |U'(a+i\,\tau)|\, d\tau \right\} . \quad (2.19)$$

Si nous fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire, nous pouvons, par 5 et 6 , déterminer un $\hat{\tau} > 0$ tel que, si $\hat{\tau} \leqslant y_1 < y_2$, l'expression (2.19) est plus petite que le ε choisi. De même, en choisissant y_3 et y_4 tels que $y_3 < y_4 \leqslant 0$ et en appliquant le même raisonnement à l'intégrale $\int_{y_3}^{y_4} e^{it\tau}\, U(a+i\,\tau)\, d\tau$, nous aboutissons à la conclusion ii du Lemme 5.

Après avoir établi ces différents lemmes, il nous est possible d'étudier le comportement asymptotique de la solution. Cette démonstration est traitée en trois étapes :

A. Le comportement asymptotique de $u(t)$

B. Le comportement asymptotique de $T_H(x,t)$ lorsque $t \to \infty$.

C. Le comportement asymptotique de $T_I(s,t)$

DEMONSTRATION DU THEOREME.

A. Comportement asymptotique de $u(t)$.

Posons M comme dans le Théorème 2 du chapitre I et $b > M$.

Alors, par le Lemme 3, $U(s)$ est holomorphe sur $[a,b] \times i\mathbb{R}$ excepté sur la droite $L : \sigma = -\sigma_0$ où il existe au plus trois pôles. En plus, par le Lemme 5, nous pouvons appliquer le Lemme 4 à la fonction $V(t)$ définie par :

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{ts}\, U(s)\, ds \quad .$$

Nous devons remarquer que, par le choix de b et la théorie des transformées de Laplace :

$$V(t) = u(t) \qquad , \qquad t > 0$$

et le comportement asymptotique de $u(t)$ est, en tenant compte des conclusions du Lemme 3, de la forme générale suivante :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{3} e^{s_n t} \sum_{k=1}^{4} \frac{a_{kn}\, t^{k-1}}{(k-1)!} + o(e^{at}) \tag{2.13}$$

où s_n est une singularité de $U(s)$ sur la droite $L : \sigma = -\sigma_0$.

Les formes exactes de $u(t)$ sont traitées plus en détail après la démonstration.

En conclusion, de (2.13), des remarques du Lemme 4, et de la partie réelle de s_n (c'est-à-dire $-\sigma_0$), nous déduisons le comportement asymptotique (2.3) de $u(t)$ lorsque $t \to \infty$.

B. Comportement asymptotique de $T_H(x,t)$.

Rappelons-nous la forme de $T_H(x,t)$ définie par :

$$T_H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \tag{1.11}$$

et posons B le plus petit entier n tel que $f_n \neq 0$, si il existe, (A.4) et l'existence des f_n coefficients de Fourier de f développé dans la base hilbertienne nous assurent de l'existence d'une constante M' telle que :

$$|f_n\, y_n(x)| \leqslant M' \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant c \ .$$

Montrons que :

$$T_H(x,t) = 0(e^{-\lambda_B t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{2.6}$$

uniformément pour $x \in [0,c]$. En effet :

$$\left| \frac{\sum_{n=B}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t}}{e^{-\lambda_B t}} \right| \leqslant M' \sum_{n=B}^{\infty} e^{-(\lambda_n - \lambda_B)t}$$

qui converge pour $t > 0$ puisque $\lambda_n \geqslant \lambda_B$ quel que soit $n \geqslant B$.

C. Comportement asymptotique de $T_I(x,t)$.

Souvenons-nous que $T_I(x,t)$ s'exprimait par :

$$T_I(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\, \eta(\xi)\, u(\tau)\, d\xi\, d\tau \ .$$

Comme dans B , nous obtenons l'existence de M'' tel que :

$$|\eta_n\, y_n(x)| \leqslant M'' \qquad \text{quels que soient} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{et} \quad x \in [0,c] \ .$$

Notons A le plus petit entier n tel que $\eta_n \neq 0$.

Nous assurons que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} = 0(e^{-\lambda_A t}) \qquad \text{pour} \qquad t \to \infty$$

uniformément pour $x \in [0,c]$ car :

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t}}{e^{-\lambda_A t}} \right| \leqslant M'' \sum_{n=A}^{\infty} e^{-(\lambda_n - \lambda_A)t} \quad , \quad t > 0$$

qui converge pour $t > 0$ car $\lambda_n \geq \lambda_A$ pour tout $n \geq A$.

Supposons $\overline{T}_I(x,s)$ la transformée de Laplace de $T_I(x,t)$ pour $x \in [0,c]$ arbitraire, c'est-à-dire :

$$\overline{T}_I(x,s) = \int_0^\infty e^{-ts}\, T_I(x,t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ts} \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau\, dt \qquad \text{par (1.14)}$$

qui devient, en appliquant la transposée de Laplace du produit de convolution :

$$\overline{T}_I(x,s) = \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, (\lambda_n + s)^{-1}\, U(s) \quad . \tag{2.20}$$

Cette relation est valable dans un demi-plan à droite. Plus précisément, si nous définissons :

$$g(x,s) = \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, (\lambda_n + s)^{-1} \quad , \tag{2.21}$$

nous trouvons que $g(x,s)$ est holomorphe sur l'ensemble :

$$R = \{s \in \mathbb{C} \mid s \neq -\lambda_n \, , A \leq n\} \quad .$$

Ainsi, le premier pôle de $\overline{T}_I(x,s)$ est en $s = -\lambda_A$ si $-\sigma_o < -\lambda_A$ ou bien sur la droite $L : \sigma = -\sigma_o$. Dans chacun des cas, il existe un intervalle $a' < \sigma < b'$ dans lequel $\overline{T}_I(x,s)$ est holomorphe sauf en un nombre fini de pôles. Nous venons donc de nous mettre dans la situation a du Lemme 4. Dans ce qui suit, nous allons vérifier l'hypothèse b . Par l'expression (2.20), il suffit de montrer que $g(x,s)$ est uniformément borné pour $0 \leq x \leq c$, $a' \leq \sigma \leq b'$, $|\tau| \geq 1$ puisque, par le Lemme 5, $U(s) \to 0$ quand $|\tau| \to \infty$.

Pour montrer que $g(x,s)$ est borné, nous choisissons des $n \geq N$ tels que $-\lambda_n < a'$. De ces hypothèses, nous pouvons déduire les majorations suivantes :

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, (s + \lambda_n)^{-1} \right| \leq M'' \sum_{n=N}^{\infty} [\,(\sigma + \lambda_n)^2 + \tau^2\,]^{-1/2} \leq$$

$$\leqslant M'' \sum_{n=N}^{\infty} [(a'+\lambda_n)^2 + 1]^{-1/2}$$

par les différents choix de a' et τ .

Nous pouvons constater que la série positive de terme général $[(a'+\lambda_n)^2 + 1]^{-1/2}$ se comporte comme la série de terme général $1/n^2$ (A.3). Il en résulte que $g(x,s)$ est uniformément bornée pour $x \in [0,c]$ et $a' \leqslant \sigma \leqslant b'$ puisqu'elle peut se décomposer en une somme finie et une série uniformément convergente.

La majoration uniforme de $g(x,s)$ entraîne la convergence de $\overline{T}_I(x,\sigma + i\,\tau)$ vers 0 quand $|\tau| \to \infty$ uniformément pour $x \in [0,c]$, $a' \leqslant \sigma \leqslant b'$.

En outre, de la forme $\overline{T}_I(x,t)$ (2.20) de la continuité de $g(x,a'+i\,\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$ et du comportement asymptotique de $U(a'+i\,\tau)$ quand $|\tau| \to \infty$ (Lemme 5), nous déduisons la convergence uniforme de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}\, \overline{T}_I(x,a'+i\,\tau)\, d\tau \quad \text{pour} \quad x \in [0,c] \text{ et } t \geqslant T > 0 \quad .$$

Les deux convergences ainsi trouvées permettent d'appliquer le Lemme 4 à la fonction $\overline{T}_I(x,s)$. Les termes qui apparaissent dans l'expression asymptotique de $T_I(x,t)$ sont des fonctions uniformément bornées de x [voir formule (2.30)]. Le terme reste dans lequel ces expressions apparaissent satisfait à la relation $o(e^{a't})$ [5, p. 489] .

Etudions en détail la fonction $F(t)$ décrite dans le théorème. Sa forme dépend de la situation de λ_A par rapport à σ_0 défini en (2.12).

Si $\lambda_A < \sigma_0$, nous obtenons que la première singularité de $\overline{T}_I(x,s)$ est un pôle simple en $s = -\lambda_A$, alors $T_I(x,t)$ s'exprime par :

$$T_I(x,t) = e^{-\lambda_A t}\, T_1(x) + o(e^{a't}) \quad . \tag{2.22}$$

Si : $\quad F(t) = e^{-\lambda_A t}$,

ceci implique :

$$T_I(x,t) = O(F(t)) \quad \text{quand} \quad t \to \infty \quad \text{uniformément pour } x \in [0,c] .$$

Si $\lambda_A > \sigma_0$, il en découle que $\overline{T}_I(x,s)$ a les mêmes singularités sur la droite $L : \sigma = -\sigma_0$ que $U(s)$. Sur L , $g(x,s)$ est holomorphe puisque sa somme ne commence qu'à $n = A$. $U(s)$ possède au plus trois pôles sur L dont la somme des ordres n'est pas plus grande que quatre. Nous pouvons en conclure que $T_I(x,t)$ et $u(t)$ ont la même limite quand $t \to \infty$ bien qu'ils ne possèdent pas la même expression asymptotique. Finalement :

$$F(t) = t^j e^{-\sigma_0 t} \qquad \text{où } j \text{ est défini dans le théorème.}$$

Si $\lambda_A = \sigma_0$, $\overline{T}_I(x,s)$ a, en $s = -\sigma_0$, un pôle soit simple si $-\sigma_0$ n'est pas un pôle de $U(s)$, soit un pôle d'ordre au moins deux et inférieur à quatre si $-\sigma_0$ est un pôle d'ordre inférieur à trois de $U(s)$.

Dans le premier cas :

$$F(t) = 0(t^j e^{-\sigma_0 t})$$

et, dans le second cas :

$$F(t) = 0(t^{j+1} e^{-\sigma_0 t})$$

où j a la signification donnée dans l'énoncé de ce théorème.

ETUDE DETAILLEE DES DIFFERENTS COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $u(t)$ ET DE $T_I(x,t)$.

Nous nous rappelons que, dans le Lemme 3, nous avons donné la nature et le nombre de pôles de $U(s)$ sur $L : \sigma = -\sigma_0$. Nous allons étudier leur effet sur le comportement asymptotique de $u(t)$. Nous discutons ensuite les formules asymptotiques pour $T_I(x,t)$ en partant de celles de $u(t)$.

Dans la suite, nous nous servons des notations suivantes.

Si $H_2(s)$ a un zéro d'ordre m en $s = -\sigma_0$ et pas d'autre zéro sur la droite $L : \sigma = -\sigma_0$, alors nous posons :

$$H_2(s) = (s + \sigma_0)^m V_m(s) \quad . \tag{2.23}$$

Si $H_2(s)$ a un zéro conjugué en $s = s_0$ et $s = \overline{s_0}$ où $s_0 = -\sigma_0 + i\,\tau_0$ et tel que $H_2(-\sigma_0) \neq 0$, alors nous exprimons $H_2(s)$ par :

$$H_2(s) = p(s)\,w(s) \qquad \text{où} \qquad p(s) = (s - s_o)\,(s - \overline{s_o}) \quad . \tag{2.24}$$

Si $H_2(s)$ a un zéro conjugué en $s = s_o$ et $s = \overline{s_o}$ et, en plus, un zéro réel en $s = -\sigma_o$ d'ordre m, nous définissons alors $H_2(s)$ par :

$$H_2(s) = (s + \sigma_o)^m\, p(s)\, Y_m(s) \quad . \tag{2.25}$$

Les expressions asymptotiques pour $u(t)$ emploient les fonctions réelles suivantes :

$$u_j(t) = (a_1 + a_2\, t + \ldots + a_j\, t^{j-1})\, e^{-\sigma_o t} + o(e^{at}) \tag{2.26}$$

$$w(t) = 2\,[\,\mathrm{Re}(a_o) \cos \tau_o t - \mathrm{Im}(a_o) \sin \tau_o t\,]\, e^{-\sigma_o t} + o(e^{at}) \tag{2.27}$$

dans lesquelles les coefficients a_k $(k = 1, \ldots, j)$ sont les coefficients de la partie principale du développement en série de Laurent de $U(s)$ en $s = -\sigma_o$ où $U(s)$ a un pôle d'ordre j ; a_o et $\overline{a_o}$ sont les résidus de $U(s)$ respectivement en $s = s_o$ et $s = \overline{s_o}$; a satisfait l'hypothèse ii du Lemme 3 .

Définissons :

$$\phi(s) = (s + \sigma_o)^j\, U(s) \quad ;$$

alors $\phi(s)$ a une singularité en $-\sigma_o$ et, par la théorie des fonctions complexes, nous avons :

$$a_k = \lim_{\sigma \to -\sigma_o} \frac{\phi^{(j-k)}(\sigma)}{(j-k)!} \quad , \qquad 1 \leqslant k \leqslant j \quad . \tag{2.28}$$

Définissons encore, quand $\sigma_o = \lambda_p$ où λ_p est défini dans le Lemme 3 :

$$\psi(s) = (s + \sigma_o)\, H_1(s) = -k_{1p} + (s + \sigma_o)\,(u_o - \sum_{n=p+1}^{\infty} k_{1n}\,(s + \lambda_n)^{-1}) \quad .$$

ETUDE DES 11 CAS POSSIBLES.

1. Un pôle simple en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ dû à un pôle de $H_1(s)$; alors :

$$u(t) = u_1(t) = a_1\, e^{-\sigma_o t} + o(e^{at})$$

où :
$$a_1 = \lim_{s \to -\sigma_p} \phi^{(0)}(s) = \lim_{s \to -\lambda_p} (s + \lambda_p)\, U(s) = \frac{-k_{1p}}{H_2(-\lambda_p)} \quad .$$

2. Trois pôles simples en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$; le premier est dû à un pôle de $H_1(s)$ et les deux autres sont les complexes conjugués s_o et $\overline{s_o}$ où $s_o = -\sigma_o + i\,\tau_o$ dus à des zéros conjugués de $H_2(s)$. Alors, par (2.13) :

$$u(t) = u_1(t) + w(t)$$

où :
$$a_o = \lim_{s \to s_o} (s - s_o) \frac{H_1(s)}{H_2(s)} = \lim_{s \to s_o} \frac{H_1(s)}{(s - \overline{s_o})\, w(s)} = \frac{H_1(s_o)}{2\, i\, \tau_o\, w(s_o)}$$

$$\overline{a_o} = \lim_{s \to \overline{s_o}} (s - s_o) \frac{H_1(s)}{H_2(s)} = \lim_{s \to \overline{s_o}} \frac{H_1(s)}{(s - s_o)\, w(s)} = - \frac{H_1(\overline{s_o})}{2\, i\, \tau_o\, w(\overline{s_o})}$$

$$a_1 = \lim_{s \to -\lambda_p} (s + \lambda_p) \frac{H_1(s)}{H_2(s)} = \frac{-\,k_{1p}}{(-i\,\tau_o)(i\,\tau_o)\, w(-\lambda_p)} = \frac{-\,k_{1p}}{\tau_o^2\, w(-\lambda_p)}$$

d'où : $u(t) = u_1(t) + e^{s_o t}\, a_o + e^{\overline{s_o} t}\, \overline{a_o} + o(e^{at}) =$

$$= u_1(t) + e^{-\sigma_o t}[\cos \tau_o t\,(\mathrm{Re}\, a_o + i\, \mathrm{Im}\, a_o) + i \sin \tau_o t\,(\mathrm{Re}\, a_o + i\, \mathrm{Im}\, a_o) +$$

$$+ \cos \tau_o t\,(\mathrm{Re}\, a_o - i\, \mathrm{Im}\, a_o) - i \sin \tau_o t\,(\mathrm{Re}\, a_o - i\, \mathrm{Im}\, a_o)] + o(e^{at}) =$$

$$= u_1(t) + e^{-\sigma_o t}\; 2 \cos \tau_o t\; \mathrm{Re}\, a_o - 2 \sin \tau_o t\; \mathrm{Im}\, a_o \; + o(e^{at})$$

et, finalement, par (2.27), nous avons :

$$u(t) = u_1(t) + w(t) \quad .$$

3. Un pôle d'ordre deux en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ dû à un pôle d'ordre un de $H_1(s)$ et à un zéro simple de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_2(t)$$

dans laquelle les coefficients a_1 et a_2 sont déterminés par la fonction :

$$\phi(s) = (s + \lambda_p)^2 \; U(s) = \frac{\psi(s)}{V_1(s)}$$

et la formule (2.28).

4. Un pôle d'ordre deux en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ dû à un pôle d'ordre un de $H_1(s)$ et aux zéros simples en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$, $s = s_o$ et $s = \overline{s_o}$. Alors :

$$u(t) = u_2(t) + w(t)$$

où $$a_o = \lim_{s \to s_o} (s - s_o) \; U(s) = \lim_{s \to s_o} \frac{\psi(s)}{(s - \overline{s_o})(s + \sigma_o) Y_1(s)} = - \frac{H_1(s_o)}{2\tau_0^2 Y_1(s_o)}$$

et où a_1 , a_2 sont déterminés par la fonction :

$$\phi(s) = (s + \lambda_p)^2 \; U(s) = \frac{\psi(s)}{p(s) \; Y_1(s)}$$

et la formule (2.28).

5. Un pôle d'ordre trois dû à un pôle de $H_1(s)$ en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ et à un zéro double en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_3(t) \quad .$$

Les coefficients a_1 , a_2 et a_3 sont déterminés par la fonction :

$$\phi(s) = (s + \lambda_p)^3 \; U(s) = \frac{\psi(s)}{V_2(s)}$$

et la formule (2.28).

6. Un pôle d'ordre quatre en $s = -\sigma_o = -\lambda_p$ dû à un pôle simple de $H_1(s)$ et à un zéro triple de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_4(t)$$

dans laquelle les coefficients a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont déduits de la fonction :

$$\phi(s) = (s + \lambda_p)^4 \ U(s) = \frac{\psi(s)}{V_3(s)} \quad .$$

7. Un pôle simple en $s = -\sigma_o$ dû à un zéro simple de $H_2(s)$; alors :

$$u(t) = u_1(t)$$

où
$$a_1 = \lim_{s \to -\sigma_o} \phi^{(0)}(s) = \lim_{s \to -\sigma_o} (s+\sigma_o)\ U(s) = \frac{H_1(-\sigma_o)}{V_1(-\sigma_o)} \quad .$$

8. Trois pôles simples en $s = -\sigma_o$, $s = s_o$ et $s = \overline{s_o}$ dus à des zéros de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_1(t) + w(t)$$

où
$$a_o = \lim_{s \to s_o} (s - s_o)\ U(s) = \lim_{s \to s_o} \frac{H_1(s)}{(s-\overline{s_o})(s+\sigma_o)Y_1(s)} = - \frac{H_1(s_o)}{2\tau_0^2 Y_1(s_o)} \ ;$$

$$a_1 = \lim_{s \to -\sigma_o} (s+\sigma_o)\ U(s) = \lim_{s \to \sigma_o} \frac{H_1(s)}{(s-s_o)(s-\overline{s_o})Y_1(s)} = \frac{H_1(-\sigma_o)}{\tau_0^2 Y_1(-\sigma_o)} \quad .$$

9. Un pôle d'ordre deux en $s = -\sigma_o$ dû à un zéro double de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_2(t)$$

où les coefficients sont déterminés par la fonction :

$$\phi(s) = (s + \sigma_o)^2\ U(s) = \frac{H_1(s)}{V_2(s)} \quad .$$

10. Un pôle d'ordre trois en $s = -\sigma_o$ dû à un zéro d'ordre trois de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = u_3(t) \quad .$$

Les coefficients sont déterminés par la fonction :

$$\phi(s) = (s + \sigma_o)^3 \; U(s) = \frac{H_1(s)}{V_3(s)} \quad .$$

11. Deux pôles simples en $s = s_o$ et $s = \overline{s_o}$ dus aux zéros conjugués de $H_2(s)$. Alors :

$$u(t) = w(t)$$

où
$$a_o = \lim_{s \to s_o} (s - s_o) \; U(s) = \frac{H_1(s_o)}{2\,i\,\tau_o \; w(s_o)} \quad .$$

En ce qui concerne le comportement asymptotique de $T_I(x,t)$, nous savons que :

A) si $\lambda_A < \sigma_o$, nous obtenons (2.22) dans laquelle $T_1(x)$ est exprimé par :

$$T_1(x) = \lim_{s \to -\lambda_A} (s + \lambda_A) \; \overline{T}_I(x,s) =$$

$$= \lim_{s \to -\lambda_A} (s + \lambda_A) \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n \; y_n(x) \; (s + \lambda_n)^{-1} \; U(s) =$$

$$= \eta_A \; y_A(x) \; U(-\lambda_A) \quad .$$

(2.22) peut donc se formuler :

$$T_I(x,t) = \eta_A \; y_A(x) \; U(-\lambda_A) \; e^{-\lambda_A t} + o(e^{a' t})$$

où
$$-\sigma_o < a' < -\lambda_A$$

et le terme reste est uniforme en x .

B) si $\lambda_A > \sigma_o$, nous avons vu que $\overline{T}_I(x,s)$ a les mêmes singularités sur $L : \sigma = -\sigma_o$ que $U(s)$ dès que $g(x,s)$ est holomorphe sur L . Notons les coefficients de la partie principale de $\overline{T}_I(x,s)$ en $s = -\sigma_o$ par $A_k(x)$ $k = 1, \ldots, j$ où j est l'ordre du pôle de $U(s)$. $A_0(x)$ est le résidu de $\overline{T}_I(x,s)$ en $s = s_o$ lorsque s_o est un pôle de $\overline{T}_I(x,s)$. Nous définissons de même :

$$c_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m g(x,-\sigma_o)}{\partial s^m}$$

et montrons que :

$$c_m(x) = (-1)^m \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, (-\sigma_o + \lambda_n)^{-(m+1)} \quad . \qquad (2.29)$$

Nous prouvons notre assertion par récurrence. Si $m = 0$, nous obtenons :

$$c_o(x) = g(x,-\sigma_o) = \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, (-\sigma_o + \lambda_n)^{-1} \quad . \qquad (2.21)$$

Supposons maintenant que (2.29) est vérifée jusqu'à l'étape $m-1$ et démontrons qu'elle le reste pour m $(m \geqslant 1)$:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^{m-1} g(x,s)}{(m-1)! \, \partial s^{m-1}} \right] \Bigg|_{s=-\sigma_o} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left[(-1)^{m-1} \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n \, y_n(x) \, (s+\lambda_n)^{-m} \right] \Bigg|_{s=-\sigma_o} .$$

Par la convergence uniforme de la série dérivée, nous obtenons ainsi (2.29).

Si $s = s_o$ est un pôle de $\overline{T}_I(x,s)$, nous avons dans ce développement :

$$A_o(x) = \lim_{s \to s_o} (s - s_o) \, \overline{T}_I(x,s) =$$

$$= g(x,s_o) \lim_{s \to s_o} (s - s_o) \, U(s) \quad \text{(holomorphie de } g(x,s) \text{ sur } L \text{)}$$

$$= a_o \, g(x,s_o)$$

et
$$A_k(x) = \sum_{i=k}^{j} a_i \, c_{i-k}(x) \qquad k = 1, \ldots, j$$

où j est l'ordre du pôle.

Pour démontrer cette égalité, développons $g(x,s)$ en série de Taylor au voisinage de $-\sigma_o$:

$$g(x,s) = g(x,-\sigma_0) + \frac{\partial\, g(x,-\sigma_0)}{\partial\, s} (s + \sigma_0) + \ldots \quad .$$

Multiplions par $U(s)$ le développement; nous obtenons :

$$\overline{T}_I(x,s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (s + \sigma_0)^m \frac{\partial^m g(x,-\sigma_0)}{\partial\, s^m} \quad .$$

Si j est l'ordre du pôle, le coefficient $A_k(x)$ devient :

$$A_k(x) = \lim_{s \to -\sigma_0} (s + \sigma_0)^k\, \overline{T}_I(x,s) =$$

$$= \lim_{s \to -\sigma_0} (s+\sigma_0)^k U(s)\, g(x,s)\Big|_{s=-\sigma_0} + \lim_{s \to -\sigma_0} (s+\sigma_0)^{k+1} U(s) \frac{\partial\, g(x,s)}{\partial\, s}\Big|_{s=-\sigma_0} +$$

$$+ \frac{1}{j!} \lim_{s \to -\sigma_0} (s - \sigma_0)^{k+j}\, U(s) \frac{\partial^j g(x,s)}{\partial\, s^j}\Big|_{s=-\sigma_0} + 0 =$$

$$= a_k\, g(x,-\sigma_0) + a_{k+1} \frac{\partial\, g(x,-\sigma_0)}{\partial\, s} + \ldots + \frac{1}{j!} a_{k+j} \frac{\partial^j g(x,-\sigma_0)}{\partial\, s^j} =$$

$$= a_k\, c_0(x) + a_{k+1}\, c_1(x) + a_{k+j}\, c_j(x) =$$

$$= \sum_{i=k}^{j} a_i\, c_{i-j}(x) \tag{2.30}$$

Comme $y_n(x)$ est uniformément borné pour tout $x \in [0,c]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et par le comportement des λ_n [A.3] , nous en déduisons que les $c_m(x)$ sont bornés sur $[0,c]$ ainsi que les coefficients $A_k(x)$.

Si nous définissons maintenant similairement au cas du comportement de $u(t)$:

$$T_j(x,t) = (A_1(x) + \ldots + A_j(x)\, t^{j-1})\, e^{-\sigma_0 t} + o(e^{at})$$

$$W(x,t) = 2\,(\mathrm{Re}\,(A_0(x))\cos\tau_0 t - \mathrm{Im}\,(A_0(x))\sin\tau_0 t)\; e^{-\sigma_0 t} + o(e^{at})$$

où a satisfait à ii du Lemme 3, nous obtenons les mêmes comportements asymptotiques pour $T_I(x,t)$ que pour $u(t)$ où nous remplaçons, dans les onze cas, $u_j(t)$ par $T_j(x,t)$ et $w(t)$ par $W(x,t)$.

Dans le cas C , $\lambda_A = \sigma_0$, les formules asymptotiques pour $T_I(x,t)$ sont obtenues en remplaçant $u_j(t)$ par $T_{j+1}(x,t)$ et $w(t)$ par $W(x,t)$ défini en (2.26) et (2.27). Les coefficients $A_0(x)$ de $W(x,t)$ sont toujours donnés par $a_0\, g(x,s_0)$ mais il n'existe plus une relation simple entre les $A_k(x)$ et a_k pour $k \geq 1$. Pour rechercher a_k , il faut se servir de la formule (2.28) et définir $\phi(s)$ comme étant :

$$\phi(s) = (s + \sigma_0)^{j+1}\, \overline{T}_I(x,s) \quad .$$

Les coefficients $A_k(x)$ que nous trouvons sont aussi bornés sur $[0,c]$.

COROLLAIRE DU THEOREME DONNANT LE COMPORTEMENT DE LA SOLUTION LORSQUE $t \to \infty$.

Sous les hypothèses du théorème.

Alors, pour chaque nombre γ satisfaisant :

$$0 < \gamma < \min(\sigma_0\ ,\ \lambda_A\ ,\ \lambda_B)\ ,$$

nous avons :

$$u(t) = O(e^{-\gamma t}) \qquad \text{uniformément pour } x \in [0,c]$$

$$T(x,t) = O(e^{-\gamma t}) \qquad \text{quand } t \to \infty\ .$$

DEMONSTRATION.

Par le théorème, nous avons :

$$\left|\frac{u(t)}{e^{-\gamma t}}\right| = \left|\frac{u(t)}{t^j\, e^{-\sigma_0 t}}\right| \frac{t^j\, e^{-\sigma_0 t}}{e^{-\gamma t}} \leq M_1\, t^j\, e^{-(\sigma_0-\gamma)t} \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty$$

$$\left|\frac{T_H(x,t)}{e^{-\gamma t}}\right| = \left|\frac{T_H(x,t)}{e^{-\lambda_B t}}\right| \frac{e^{-\lambda_B t}}{e^{-\gamma t}} \leqslant M_2\, e^{-(\lambda_B-\gamma)t} \to 0 \qquad \text{quand} \quad t \to \infty$$

uniformément pour $x \in [0,c]$.

Le comportement de $T_I(x,t)$ s'étudie de manière identique.

CHAPITRE III :

DÉPENDANCE CONTINUE DES SOLUTIONS PAR RAPPORT AUX QUANTITÉS VARIABLES ET AUX CONDITIONS INITIALES DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous allons étudier la dépendance continue des solutions par rapport aux valeurs initiales u_0 et f et par rapport aux paramètres du problème η et α définis dans l'introduction.

Nous allons considérer l'espace produit Γ comme étant le produit cartésien $\mathbb{R} \times [L^2(0,c)]^2 \times C([0,c])$.

Nous définissons dans Γ la norme d'un point $P = (z,f,\alpha,\eta)$ de Γ par :

$$\| P \| = |z| + \| f \|_2 + \| \alpha \|_2 + \| \eta \|_2 \quad .$$

Si nous prenons deux points $P_i = (z_i, \alpha_i, \eta_i, f_i)$ $(i = 1, 2)$ de Γ , nous posons :

$$\| \Delta\alpha \|_2 = \| \alpha_1 - \alpha_2 \|_2$$

$$\| \Delta\eta \|_2 = \| \eta_1 - \eta_2 \|_2$$

$$\| \Delta f \|_2 = \| f_1 - f_2 \|_2$$

et $$\|P_1 - P_2\| = |z_1 - z_2| + \|\Delta f\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2 + \|\Delta\eta\|_2 \quad .$$

De même, le couple $(u_i(t), T_i(x,t))$ dans lequel $T_i(x,t)$ peut être, comme dans le chapitre 1 (voir 1.10), représenté par $T_{iH}(x,t) + T_{iI}(x,t)$ est la solution du problème initial (0.1) (0.2) (0.3) (0.4) ayant pour conditions initiales ou paramètres :

$$u_o = z_i$$

$$\alpha = \alpha_i$$

$$\eta = \eta_i$$

$$f = f_i \quad .$$

Ayant donné ces quelques préliminaires, il nous est possible d'énoncer le théorème suivant :

<u>THEOREME</u>.

Soient : $\alpha_i \ , \ f_i \in L^2(0,c) \qquad (i = 1, 2)$ (0.5)

$f_i \in C(]0,c[)$ (0.6)

$\eta_i \in C([0,c])$ (0.7)

$z_1 \ , \ z_2 \in \mathbb{R}$

$\delta > 0 \quad , \quad T > 0 \quad$ et $\quad 0 < r < \lambda_1$.

Alors, il existe une constante $K > 0$ telle que

i) $|u_1(t) - u_2(t)| \leq K \|P_1 - P_2\|$ uniformément pour $0 \leq t \leq T$;

ii) $|T_{1H}(x,t) - T_{2H}(x,t)| \leq g(t) \|\Delta f\|_2$ $t>0$, uniformément pour $0 \leq x \leq c$;

iii) $|T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t)| \leq h(t) \|P_1 - P_2\|$ uniformément pour $0 \leq x \leq c$, $0 \leq t \leq T$;

où 1) $g(t) = K\, e^{-rt}\, t^{-(1/4+\delta)}$

2) si $\delta < \frac{3}{4}$, $h(t) = K\, t^{3/4-\delta}$.

DEMONSTRATION.

Par les hypothèses sur les fonctions f_i , η_i , α_i , nous avons, grâce au théorème du chapitre 1, une solution unique du problème initial pour chaque i .

Dans la démonstration, nous partons de l'équation intégro-différentielle définie en (1.6), c'est-à-dire :

$$u_i'(t) = K_{1i}'(t) + \int_0^t K_{2i}'(t-\tau)\, u_i(\tau)\, d\tau \qquad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

où

$$K_{1i}'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}\, f_{ni}\, e^{-\lambda_n t} \tag{3.2}$$

$$K_{2i}'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \eta_{ni}\, \alpha_{ni}\, e^{-\lambda_n t} \tag{3.3}$$

dans lesquelles α_{ni} , f_{ni} , η_{ni} représentent respectivement les coefficients de Fourier de α_i , f_i , η_i (i = 1, 2) développés dans la base hilbertienne.

Avant de montrer le point i du théorème, nous allons établir deux estimations.

Posons $D = \max\{\|\alpha_i\|_2 , \|\eta_i\|_2 , \|f_i\|_2 \ (i = 1, 2)\}$ (3.4)

et montrons :

a) $|K_{11}'(t) - K_{12}'(t)| \leqslant D(\|\Delta f\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2)$ (3.5)

b) $|K_{21}'(t) - K_{22}'(t)| \leqslant D(\|\Delta\eta\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2)$ (3.6)

quel que soit $t \geqslant 0$.

Pour montrer (3.5), nous définissons, pour $t > 0$:

$$A_i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}\, y_n(x)\, e^{-1/2\, \lambda_n t}$$

$$F_i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ni}\, y_n(x)\, e^{-1/2\,\lambda_n t} \quad .$$

Ces deux séries sont de carré intégrable sur $[0,c]$; en effet, par l'orthogonalité des fonctions propres $y_n(x)$ sur $[0,c]$, nous obtenons :

$$\int_0^c A_i^2(x,t)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}^2\, e^{-\lambda_n t}$$

$$\int_0^c F_i^2(x,t)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ni}^2\, e^{-\lambda_n t}$$

et, comme $t > 0$, par le théorème de Riesz-Fischer, nous avons :

$$\| A_i \|_2^2(t) = \int_0^c A_i^2(x,t)\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}^2 = \| \alpha_i \|_2^2 \tag{3.7}$$

$$\| F_i \|_2^2(t) = \int_0^c(x,t)\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} f_{ni}^2 = \| f_i \|_2^2 \tag{3.8}$$

quel que soit $t > 0$.

De plus, montrons les inégalités suivantes :

$$\| A_1 - A_2 \|_2(t) \leqslant \| \Delta\alpha \|_2 \tag{3.9}$$

$$\| F_1 - F_2 \|_2(t) \leqslant \| \Delta f \|_2 \quad . \tag{3.10}$$

Par la définition de la norme dans $L^2(0,c)$, nous obtenons :

$$\| A_1 - A_2 \|_2^2(t) = \int_0^c [\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n1} - \alpha_{n2})\, y_n(x)\, e^{-1/2\,\lambda_n t}]^2\, dx$$

$$\| F_1 - F_2 \|_2^2(t) = \int_0^c [\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n1} - f_{n2})\, y_n(x)\, e^{-1/2\,\lambda_n t}]^2\, dx$$

d'où, en appliquant les mêmes arguments que précédemment, nous aboutissons aux inégalités :

$$\| A_1 - A_2 \|_2^2(t) < \| \alpha_{n1} - \alpha_{n2} \|_2^2 = \| \Delta\alpha \|_2^2$$

$$\| F_1 - F_2 \|_2^2(t) < \| f_{n1} - f_{n2} \|_2^2 = \| \Delta f \|_2^2 \quad .$$

En outre, en raisonnant de la même manière, nous avons :

$$\int_0^c A_i(x,t)\ F_i(x,t)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ni}\ f_{ni}\ e^{-\lambda_n t} \quad ,$$

égalité qui peut être décrite en employant (3.2) par :

$$\int_0^c A_i(x,t)\ F_i(x,t)\ dx = -K'_{1i}(t) \qquad \text{pour} \quad t > 0 \quad .$$

De ce fait :

$$|K'_{11}(t) - K'_{12}(t)| \leq \int_0^c |A_1(x,t)\ F_1(x,t) - A_2(x,t)\ F_2(x,t)|\ dx =$$

$$= \| A_1\ F_1 - A_2\ F_2 \|_1(t) \leq$$

$$\leq \| A_1\ (F_1 - F_2) \|_1(t) + \| (A_1 - A_2)\ F_2 \|_1(t) \quad .$$

En nous servant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et des inégalités (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10), nous obtenons :

$$|K'_{11}(t) - K'_{12}(t)| \leq \| \alpha_1 \|_2\ \| \Delta f \|_2 + \| \Delta\alpha \|_2\ \| f_2 \|_2$$

et nous aboutissons à la majoration souhaitée en (3.5) en faisant intervenir la définition de D (3.4).

Par un raisonnement similaire, nous serions arrivés à montrer l'inégalité (3.6).

Ayant démontré les inégalités (3.5) et (3.6), nous sommes à même de démontrer le point i .

Supposons $T > 0$ et étudions, grâce à (3.1), la différence suivante :

$$u'_1(t) - u'_2(t) = K'_{11}(t) - K'_{12}(t) + \int_0^t (K'_{21}(t-\tau)\ u_1(\tau) - K'_{22}(t-\tau)\ u_2(\tau))\ d\tau =$$

$$= K'_{11}(t) - K'_{12}(t) + \int_0^t (K'_{21}(t-\tau) - K'_{22}(t-\tau)\ u_1(\tau)\ d\tau + \tag{3.11}$$

$$+ \int_0^t K'_{22}(t-\tau)\ (u_1(\tau) - u_2(\tau))\ d\tau$$

En posant : $I_1(t) = \int_0^t (K'_{21}(t-\tau) - K'_{22}(t-\tau))\, u_1(\tau)\, d\tau$

et $I_2(t) = \int_0^t K'_{22}(t-\tau)\, (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau$,

l'équation (3.11) s'écrit :

$$u'_1(t) - u'_2(t) = K'_{11}(t) - K'_{12}(t) + I_1(t) + I_2(t) \quad .$$

Nous posons : $C_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} |u_1(t)|$ (3.12)

et $H > 0$ tel que $|K'_{22}(t)| \leqslant H$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. (3.13)

Estimons $I_1(t)$; en nous servant de (3.6) et (3.12), nous avons :

$$|I_1(t)| \leqslant D\, C_1\, (\|\Delta\eta\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2) \int_0^t d\tau \quad .$$

Comme nous travaillons sur l'intervalle compact $[0,T]$, cette inégalité devient :

$$|I_1(t)| \leqslant C_1\, D\, T\, (\|\Delta\eta\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2) \quad . \tag{3.14}$$

Estimons également $I_2(t)$; en nous basant sur (3.13), nous obtenons :

$$|I_2(t)| \leqslant H \int_0^t |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, d\tau \quad . \tag{3.15}$$

En combinant les inégalités (3.5), (3.14) et (3.15), nous obtenons :

$$|u'_1(t) - u'_2(t)| \leqslant D\, (\|\Delta f\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2) + C_1\, D\, T\, (\|\Delta\eta\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2) + $$
$$+ H \int_0^t |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, d\tau \quad .$$

En posant : $D_1 = D\,(1 + C_1\, T)$,

nous avons : $|u'_1(t) - u'_2(t)| \leqslant D_1\, (\|\Delta f\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2 + \|\Delta\eta\|_2) + H \int_0^t |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, d\tau$.

En intégrant de 0 à t et en employant la condition initiale $u_i(0) = z_i$ et le théorème de la moyenne sur $[0,t]$ où $t \in [0,T]$, nous obtenons :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant |z_1 - z_2| + D_1\, T\, (\|\Delta f\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2 + \|\Delta\eta\|_2) + H\, T \int_0^t |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, d\tau .$$

A cette inégalité, l'application du lemme de Gronwall-Bellman fournit :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant [\,|z_1 - z_2| + D_1\,T\,(\|\Delta f\|_2 + \|\Delta\eta\|_2 + \|\Delta\alpha\|_2)\,]\; e^{HTt} \quad .$$

Si nous prenons $K \geqslant \max\{D_1 T, 1\}.e^{HT^2}$, nous aboutissons au résultat demandé, à savoir :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant K\,\|P_1 - P_2\| \quad . \tag{3.16}$$

uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

Attachons-nous à démontrer la conclusion pour $T(x,t)$. En (1.10), $T(x,t)$ a été défini par :

$$T(x,t) = T_H(x,t) + T_I(x,t) =$$

$$= \int_0^c G(x,\xi,t)\; f(\xi)\; d\xi + \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\; \eta(\xi)\; u(\xi)\; d\xi\; d\tau$$

où $G(x,\xi,t)$ est défini en (1.9) pour $x,\ \xi \in [0,c]$, $t > 0$.

Considérons $G(x,\xi,t)$ comme une fonction de ξ . Nous assurons que $G(x,\xi,t)$ est une fonction de carré intégrable en ξ sur $[0,c]$. En posant $M > 0$ comme dans (A.4), tel que $|y_n(x)| \leqslant M$ et en posant aussi $r > 0$ tel que $0 < r < \lambda_1$ [1], nous obtenons, par l'orthogonalité des fonctions propres $y_n(\xi)$ sur $[0,c]$:

$$\|G\|_2^2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2(x)\; e^{-2\lambda_n t} \leqslant M^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Par le choix de r , l'inégalité prend la forme :

$$\|G\|_2^2(x,t) \leqslant M^2\, e^{-2rt} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - r)t} \quad , \quad t > 0 \quad . \tag{3.17}$$

En utilisant l'artifice [2], il existe une constante $K(\beta)$ où $\beta = 1/2 + 2\delta$,

---

[1] De telle manière que $\lambda_n - r$ reste positif quel que soit n .

[2] $\forall\ \beta > 0$, $\exists\ K(\beta) > 0$ tel que $e^{-x} \leqslant K(\beta)\; x^{-\beta}$ $\forall\ x > 0$.

Démonstration : $(e^{-x}\, x^{\beta})' = (\beta - x)\; x^{\beta-1}\; e^{-x}$.

$\delta > 0$ telle que l'inégalité (3.17) prend la forme :

$$\| G \|_2^2(x,t) \leq M^2 \; e^{-2rt} \; K(1/2 + 2\delta) \sum_{n=1}^{\infty} [\, 2t(\lambda_n - r)\,]^{-(1/2 + 2\delta)} \leq$$

$$\leq M_1^2 \; e^{-2rt} \; t^{-(1/2 + 2\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - r)^{-(1/2 + 2\delta)}$$

où $\qquad M_1^2 \geq M^2 \, . \, 2^{-(1/2 + 2\delta)} \, . \, K(1/2 + 2\delta)$.

Par le choix de l'exposant et le comportement asymptotique des λ_n (A.3), nous obtenons :

$$\| G \|_2(x,t) \leq K' \; e^{-rt} \; t^{-(1/4 + \delta)} \tag{3.18}$$

où $\qquad K' = M_1 \, . \, \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - r)^{-(1/2 - 2\delta)} \right)^{1/2}$.

Grâce à la majoration (3.18), nous allons estimer la différence des parties homogènes des solutions $T_i(x,t) \quad i = 1, 2$:

$$|T_{1H}(x,t) - T_{2H}(x,t)| \leq \int_0^c |G(x,\xi,t)| \; |f_1(\xi) - f_2(\xi)| \; d\xi \leq$$

$$\leq \| G \|_2(x,t) \; \| \Delta f \|_2 \leq \qquad \text{(Schwartz)}$$

$$\leq K' \; e^{-rt} \; t^{-(1/4 + \delta)} \; \| \Delta f \|_2 \quad .$$

Cette majoration n'est rien d'autre que ii .

Pour estimer maintenant la différence entre les parties non homogènes des solutions $T_i(x,t) \quad i = 1, 2$, nous nous servons de (1.14) pour obtenir :

$\beta = x$ est un extrémum global ;

$(e^{-x} \, x^{\beta})'' = (\beta \, (\beta - 1) \; x^{-2} - 2 \, \beta \, x^{-1} + 1) \; x^{\beta} \; e^{-x}$

en β , on a : $1 - 1/\beta - 2 + 1 = -1/\beta < 0$

donc maximum.

$$T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\,[\eta_1(\xi)\,u_1(\tau) - \eta_2(\xi)\,u_2(\tau)]\,d\xi\,d\tau$$

et le transformer en :

$$T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t) = W_1(x,t) + W_2(x,t) \tag{3.19}$$

où $$W_1(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\,\eta_1(\xi)\,(u_1(\tau) - u_2(\tau))\,d\xi\,d\tau$$

et $$W_2(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\,(\eta_1(\xi) - \eta_2(\xi))\,u_2(\tau)\,d\xi\,d\tau \quad .$$

Par (3.16) et une application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons, pour $W_1(x,t)$:

$$|W_1(x,t)| \leqslant K \,\| P_1 - P_2 \| \int_0^t \| G \|_2(x,t-\tau)\, \| \eta_1 \|_2 \,d\tau \quad ,$$

et, par (3.4) et (3.18), nous obtenons :

$$|W_1(x,t)| \leqslant D\,K\,K' \,\| P_1 - P_2 \| \int_0^t e^{-r(t-\tau)} (t-\tau)^{-(1/4+\delta)}\,d\tau \ .$$

Vu que $\delta < 3/4$, nous pouvons intégrer et finalement trouver :

$$|W_1(x,t)| \leqslant D\,K\,K' \,\| P_1 - P_2 \| \frac{t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} \qquad \text{uniformément pour} \quad x \in [0,c] \ , \quad t \in [0,T] \ .$$

En ce qui concerne $W_2(x,t)$, posons :

$$Q = \max_{t \in [0,T]} |u_2(t)|$$

et, comme pour $W_1(x,t)$, nous obtenons :

$$|W_2(x,t)| \leqslant K'\,Q\,\| \Delta\eta \|_2 \frac{t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} \qquad \text{uniformément pour} \quad x \in [0,c] \ , \quad t \in [0,T] \ .$$

Finalement, en majorant (3.19), nous avons :

$$|T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t)| \leqslant K' \,[D\,K \,\| P_1 - P_2 \| + Q \,\| \Delta\eta \|_2]\, \frac{t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant K' \,[D\,K + Q]\, \| P_1 - P_2 \| \frac{t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} \quad .$$

Si nous posons :

$$K'' = \frac{K' [D K + Q]}{3/4 - \delta}$$

nous avons iii) .

ANNEXE 1 :

LE PROBLÈME DE STURM-LIOUVILLE

Avec les conditions aux limites (0.2), l'équation (0.1b) est intimement liée au problème de Sturm-Liouville suivant :

Soit l'équation différentielle :

$$(b(x)\,y'(x))' - q(x)\,y(x) = -\lambda\,y(x) \qquad \text{sur } [0,c] \tag{A.1}$$

satisfaisant aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} a_1\,y(0) + a_2\,y'(0) &= 0 \quad , \\ b_1\,y(c) + b_2\,y'(c) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Nous supposons que :

$$\begin{aligned}
& b \in C^1[0,c] && , \\
& b(x) > 0 && , \quad \text{pour tout } x \in [0,c] \\
& q(x) \geqslant 0 && , \quad \text{pour tout } x \in [0,c] \\
& a_1\,a_2 \leqslant 0 && , \\
& b_1\,b_2 \geqslant 0 && , \\
& |a_1| + |a_2| > 0 && , \\
& |b_1| + |b_2| < 0 && .
\end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, nous avons :

1) la non-existence de valeurs propres négatives [3, pp. 294, 416] ;

2) l'existence d'une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres

λ_n simples, positives [3, p. 293] et telles que [3, p. 412] :

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

et dont le comportement asymptotique est donné par [3, p. 415] :

$$\lambda_n = O(n^2 \pi^2 L^{-2}) \tag{A.3}$$

où $\qquad L = \int_0^c (b(x))^{-1/2}\, dx \qquad$ quand $n \to \infty$;

3) si l'on ajoute l'hypothèse (0.12), la plus petite valeur propre λ_1 qui est strictement positive [3, p. 294] ;

4) l'existence d'une base hilbertienne de L^2 constituée de fonctions propres orthonormées $y_n(x)$ appartenant à $L^2(0,c)$ associées aux valeurs propres λ_n [3, p. 293] .
Ces fonctions propres sont uniformément bornées par rapport à x et à n [3, p. 334] , c'est-à-dire : il existe M tel que

$$|y_n(x)| \leqslant M \tag{A.4}$$

quels que soient x dans $[0,c]$ et n dans $\mathbb{N}$.

Au problème (A.1)-(A.2), nous associons la fonction de Green [3, p. 351] définie par :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\; u_2(\xi)}{K} & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \xi \\[2ex] \dfrac{u_2(x)\; u_1(\xi)}{K} & \text{pour } \xi \leqslant x \leqslant c \end{cases} \tag{A.5}$$

dans laquelle u_1 et u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de :

$$(b(x)\; y'(x))' - q(x)\; y(x) = 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites :

$$a_1\; u_1(0) + a_2\; u_1'(0) = 0$$

$$b_1\; u_2(c) + b_2\; u_2'(c) = 0$$

et dans laquelle K est une constante égalant $b(x)\ W(u_1,u_2,x)$; W est le Wronskien pris en x .

PROPRIETES DE LA FONCTION DE GREEN (A.5).

1) Elle satisfait l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(b(x)\frac{d}{dx}G(x,\xi)\right) - q(x)\ G(x,\xi) = 0$$

pour $x \in [0,c]$ et $x \neq \xi$.

2) Elle est continue en $x = \xi$, c'est-à-dire :

$$G(\xi+0,\xi) = G(\xi-0,\xi) \quad .$$

3) Elle satisfait aux conditions aux limites :

$$a_1\ G(0,\xi) + a_2 \frac{d}{dx} G(0,\xi) = 0 \quad ,$$

$$b_1\ G(c,\xi) + b_2 \frac{d}{dx} G(c,\xi) = 0 \quad .$$

4) Elle est dérivable partout sauf en $x = \xi$ et le saut vaut :

$$\frac{d}{dx} G(\xi+0,\xi) - \frac{d}{dx} G(\xi-0,\xi) = -\frac{1}{b(\xi)} \quad . \tag{A.6}$$

5) Elle est symétrique :

$$G(x,\xi) = G(\xi,x) \quad .$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que la dérivée d'une fonction propre est majorée par le produit d'une constante et de la valeur propre associée à cette fonction propre, c'est-à-dire : il existe $K > 0$ tel que :

$$|y_n'(x)| \leqslant K\ \lambda_n \quad . \tag{A.7}$$

Preuve :

En effet, d'après [4, p. 360] , le problème (A.1)-(A.2) a une solution :

$$y_n(x) = - \lambda_n \int_0^c G(x,\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi \quad .$$

Nous allons décomposer cette égalité en une somme de deux intégrales, l'une de 0 à x et l'autre de x à c. Nous dérivons alors chaque membre de l'égalité en vertu de (A.6) et nous obtenons :

$$y_n'(x) = - \lambda_n \int_0^c \frac{d}{dx} G(x,\xi)\, y_n(\xi)\, d\xi \quad .$$

La fonction $\frac{d}{dx} G(x,\xi)$ est bornée par (A.6). Nous obtenons alors l'existence d'un $K' > 0$ tel que, pour tout $(\xi,x) \in [0,c] \times [0,c]$, nous avons :

$$\left| \frac{d}{dx} G(x,\xi) \right| \leqslant K' \quad .$$

Nous aboutissons donc à la majoration :

$$|y_n'(x)| \leqslant \lambda_n\, c\, K'\, M$$

où M est défini en (A.4).

Si nous posons $K = c\, K'\, M$, nous obtenons bien la majoration souhaitée (A.7).

Dans cette dernière partie de l'annexe, nous allons traiter le comportement des coefficients de Fourier $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque η est deux fois continûment dérivable sur $[0,c]$ et satisfait aux conditions aux limites. Nous montrons qu'ils ont un comportement en $1/n^2$.

Soit :

$$(b(x)\, y_n'(x))' + (\lambda_n - q(x))\, y_n(x) = 0 \tag{A.8}$$

soumis aux conditions aux limites :

$$\left.\begin{aligned} & a_1\, \eta(0) + a_2\, \eta'(0) = 0 \quad , \\ & a_1\, y_n(0) + a_2\, y_n'(0) = 0 \quad , \\ & b_1\, \eta(c) + b_2\, \eta'(c) = 0 \quad , \\ & b_1\, y_n(c) + b_2\, y_n'(c) = 0 \quad . \end{aligned}\right. \tag{A.9}$$

En multipliant (A.8) par $\eta(x)$ et en intégrant de 0 à c, nous obtenons :

$$\eta_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^c \eta(x)\ q(x)\ y_n(x)\ dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^c \eta(x)\ (b(x)\ y_n'(x))'\ dx \quad .$$

Majorons le coefficient de Fourier :

$$|\eta_n| \leqslant \frac{1}{\lambda_n} Q + \frac{1}{\lambda_n} B \left[\left|\int_0^c \eta(x)\ y_n'(x)\ dx\right| + \left|\int_0^c \eta(x)\ y''(x)\ dx\right| \right] \quad (A.10)$$

en posant : $Q = \left|\int_0^c \eta(x)\ q(x)\ y_n(x)\ dx\right|$

et $B = \sup\limits_{x\in[0,c]} \{|b(x)|\ ,\ |b'(x)|\}$.

Nous allons maintenant intégrer par parties les deux termes du crochet; nous avons , pour le premier terme :

$$\int_0^c \eta(x)\ y_n'(x)\ dx = \eta(c)\ y_n(c) - \eta(0)\ y_n(0) - \int_0^c \eta'(x)\ y_n(x)\ dx \quad .$$

Comme $|y_n(x)|$ est uniformément borné et η' continue, ceci nous permet d'en déduire que :

$$\left|\int_0^c \eta(x)\ y_n'(x)\ dx\right|$$

est uniformément borné. Pour le second terme, en intégrant deux fois par parties, nous obtenons :

$$\int_0^c \eta(x)\ y_n''(x)\ dx = \eta(c)\ y_n'(c) - \eta(0)\ y_n'(0) - \eta'(c)\ y_n(c) +$$

$$+ \eta'(0)\ y_n(0) + \int_0^c \eta''(x)\ y_n(x)\ dx \quad .$$

Par un raisonnement similaire à celui effectué au premier terme, nous trouvons que :

$$|\eta'(c)\ y_n(c)| + |\eta'(0)\ y_n(0)| + \left|\int_0^c \eta''(x)\ y_n(x)\ dx\right|$$

est uniformément borné. Nous pouvons montrer, en utilisant les conditions aux limites (A.9), la majoration uniforme de $\eta(c)\ y_n'(c) - \eta(0)\ y_n'(0)$.

Supposons que $b_2 \neq 0$. Alors, nous pouvons exprimer $y_n'(c)$ par :

$$y'_n(c) = -\frac{b_1}{b_2}\,y_n(c) \quad .$$

Par contre, si $b_2 = 0$, par (0.11b), nous avons $\eta(c) = 0$. Il s'ensuit donc la majoration $\eta(c)\ y'_n(c)$. Il en est de même pour $\eta(0)\ y'_n(0)$.

En résumé, nous venons de montrer que le terme entre crochets dans (A.10) est uniformément borné pour une constante C . Nous en déduisons la majoration suivante :

$$|\eta_n| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\,[\,Q + B\,C\,] \quad .$$

Finalement, par le comportement asymptotique des λ_n (A.3), nous arrivons au résultat suivant :

$$\eta_n = 0(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty \quad .$$

Dans les démonstrations, nous désignons par C la constante positive vérifiant l'inégalité :

$$|\eta_n| \leqslant \frac{C}{n^2} \qquad \text{quand} \quad n \to \infty \quad . \tag{A.11}$$

ANNEXE 2

Supposons l'hypothèse (0.13) vérifiée :

$$q(x) \equiv 0 \quad \text{sur} \quad [0,c] \quad \text{et} \quad a_1 = b_1 = 0 \quad . \tag{0.13}$$

Alors, la plus petite valeur propre λ_0 du problème de Sturm-Liouville est nulle et le vecteur propre associé $y_0(x)$ est de la forme :

$$y_0(x) = c^{-1/2} \quad \text{pour} \quad x \in [0,c] \quad . \tag{B.1}$$

En effet, les valeurs propres formant une suite strictement croissante, positive (annexe 1), 0 est la plus petite valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville. La relation (A.1) nous permet de définir son vecteur propre associé :

$$(b(x)\, y_0'(x))' = 0 \quad \text{sur} \quad [0,c] \quad .$$

Par (0.9) et (0.13), en intégrant successivement entre 0 et x, nous obtenons que $y_0(x)$ est une constante. Comme les fonctions propres sont orthonormées, la constante vérifie :

$$\int_0^c y_0^2(x)\, dx = \int_0^c (\text{constante})^2\, dx = 1$$

et le vecteur propre $y_0(x)$ est déterminé par (B.1).

Nous esquissons les résultats correspondant à ceux établis avec l'hypothèse (0.12) tout au long des trois chapitres.

Tout d'abord, nous avons un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (0.1)-(0.4). Son énoncé est identique à celui vu dans le chapitre I si ce n'est que l'hypothèse (0.12) a été remplacée par (0.13).

Le principe de démonstration est essentiellement identique. Comme dans le Lemme 1, nous définissons l'équation de Volterra associée au problème (0.1)-(0.4) par :

$$u(t) = u_0 + K_1(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (1.1)$$

où

$$K_i(t) = -k_{io}\, t + \sum_{n=1}^{\infty} k_{in}\, \lambda_n^{-1}\, (e^{-\lambda_n t} - 1) \quad . \qquad (B.2)$$

Remarquons que $K_i(t) \in C^1([0,+\infty[)$ et qu'elles ne sont plus nécessairement bornées pour $t \geqslant 0$.

Les séries dérivées (B.2) étant uniformément convergentes pour $t \geqslant 0$, elles sont définies par :

$$K_i'(t) = -k_{io} - \sum_{n=1}^{\infty} k_{in}\, e^{-\lambda_n t} \quad . \qquad (B.3)$$

Similairement, posons :

$$G(x,\xi,t) = c^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\, y_n(\xi)\, e^{-\lambda_n t} \qquad (B.4)$$

pour $(x,\xi,t) \in [0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

La fonction de Green associée au problème (0.1)-(0.4) est continue sur $[0,c]^2 \times [t_0,+\infty[$ où $t_0 > 0$.

De la même manière que dans le Lemme 2, la solution $T(x,t)$ de (1.7b) est définie par (1.10) et :

$$T_H(x,t) = f_0\, c^{-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)\, e^{-\lambda_n t} \qquad (B.5)$$

$$T_I(x,t) = \eta_0\, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\, y_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau \quad . \qquad (B.6)$$

Elle est continue sur $[0,c] \times [t_0,+\infty[$ ainsi que ses dérivées premières par rapport à t , x et seconde par rapport à x ; elle satisfait également (0.2) et (0.4).

Par conséquent, le couple $(u(t),T(x,t))$ est la solution unique du problème (0.1)-(0.4).

Comme $K_i(t)$ ne sont pas nécessairement bornées pour $t \to 0$, nous ne pouvons plus appliquer le Lemme de Gronwall dans la démonstration du Théorème 2 pour trouver un comportement de la solution $u(t)$ et de sa dérivée lorsque t tend vers l'infini. Cependant, une autre méthode est esquissée dans [1, p. 369]; cette méthode permet de contourner cette difficulté.

Lorsque (0.13) est satisfaite, le théorème du chapitre II établissant le comportement asymptotique de la solution $(u(t),T(x,t))$ lorsque t tend vers l'infini subit quelques modifications que nous énonçons ci-dessous.

Supposons que (0.5), (0.6), (0.7), (0.13), (2.1) et (2.2) sont satisfaites de même que :

$$k_{20} > 0 \qquad \text{ou} \qquad k_{10} = k_{20} = 0 \quad . \tag{B.7}$$

Alors il existe un nombre unique strictement positif σ_0 tel que :

$$u(t) = O(t^j\, e^{-\sigma_0 t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{2.3}$$

où $j \in \{0,1,2,3\}$ et $j+1$ est l'ordre maximum des pôles de $U(s)$ sur la droite $L : \sigma = -\sigma_0$.

Considérons A , B , σ_0 , j définis comme dans le chapitre II; alors :

$$T_I(x,t) - \eta_0\, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau = F(t) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{B.8}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$, où :

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_A t} & \text{si} \quad \lambda_A < \sigma_0 \\ t^j\, e^{-\sigma_0 t} & \text{si} \quad \lambda_A > \sigma_0 \\ t^j\, e^{-\sigma_0 t} \quad \text{ou} \quad t^{j+1}\, e^{-\sigma_0 t} & \text{si} \quad \lambda_A = \sigma_0 \end{cases}$$

et

$$T_H(x,t) - f_0\, c^{-1/2} = O(e^{-\lambda_B t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{B.9}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$.

Par contre, si (B.7) n'est pas vérifiée :

$$k_{10} \neq 0 \quad , \quad k_{20} = 0 \quad ,$$

alors $T_H(x,t)$ satisfait à (B.9) et :

$$u(t) - d = O(t^j \, e^{-\sigma_0 t}) \qquad \text{quand} \qquad t \to \infty \tag{B.10}$$

et

$$T_I(x,t) - \eta_0 \, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau) \, d\tau - G(x) = O(F(t)) \quad \text{quand} \quad t \to \infty \tag{B.11}$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$, où :

$$d = \frac{-\, k_{10}}{\sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} \, \lambda_n^{-1}} \tag{B.12}$$

$$G(x) = d \sum_{n=A}^{\infty} \eta_n \, \lambda_n^{-1} \, y_n(x) \quad . \tag{B.13}$$

La démonstration de ce théorème suit le même schéma que celle du chapitre II. Tout comme dans le Lemme 1, nous obtenons la transformée de Laplace de $u(t)$:

$$U(s) = \frac{J_1(s)}{J_2(s)} \quad .$$

$U(s)$ est définie par (2.7) à la seule différence que les sommes sur n commencent à 0 et non plus à 1 .

Lorsque (B.7) est vérifiée, toutes les singularités de $U(s)$ se trouvent dans le demi-plan $\sigma < 0$ (2.11) et la démonstration de (2.3) reste valable.

Lorsque (B.7) n'est pas vérifiée, $U(s)$ a un pôle simple en $s = 0$.

Nous définissons σ_0 comme étant la première singularité située à gauche du pôle simple 0 et la droite $L : \sigma = -\sigma_0$ garde les propriétés vues au chapitre II.

Par (2.13), nous avons le développement de $u(t)$:

$$u(t) = e^{-\sigma_o t}\,(a_1 + a_2\, t + a_3\, t^2 + a_4\, t^3) + a_o + o(e^{at}) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

où
$$a_o = \lim_{s\to 0} s\, U(s) = \lim_{s\to 0} s\, \frac{u_o - \sum_{n=0}^{\infty} k_{1n}\, (s+\lambda_n)^{-1}}{s + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, (s+\lambda_n)^{-1}} = \frac{-\, k_{10}}{\sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, \lambda_n^{-1}} = d \; ; \quad (B.12)$$

nous obtenons alors (B.10).

L'étude du comportement de $T_I(x,t)$ se base sur (B.6). Lorsque (B.7) est satisfaite, (B.8) est immédiate car (B.6) n'est autre que (1.14) auquel s'ajoute le terme $\eta_o\, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau$. Lorsque (B.7) n'est pas satisfaite, 0 étant un pôle simple de $J_1(s)$, nous avons l'expression suivante par (2.22) :

$$T_I(x,t) - \eta_o\, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau = O(F(t)) + a_o$$

où
$$a_o = \lim_{s\to 0} s\, \Big(\sum_{n=A}^{\infty} \eta_n\, y_n(x)\, (s+\lambda_n)^{-1} \Big)\, \frac{u_o - \sum_{n=0}^{\infty} k_{1n}\, (s+\lambda_n)^{-1}}{s + \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n}\, (s+\lambda_n)^{-1}} =$$

$$= d\, G(x) \qquad \text{par (B.12) et (B.13).}$$

Remarquons que (B.5) est exactement $T_H(x,t)$ défini en (1.11) auquel s'additionne le terme $f_o\, c^{-1/2}$. De (2.6), nous déduisons (B.9).

Le corollaire de ce théorème nous donne le comportement de la solution lorsque $t \to \infty$.

Sous les hypothèses du théorème précédent, lorsque (B.7) est vérifiée, nous avons :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = c^{-1/2}\, (f_o + \eta_o \int_0^{\infty} u(\tau)\, d\tau) \quad .$$

De même, lorsque (B.7) n'est pas vérifiée, nous observons que :

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = d$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(T(x,t) - \eta_0 \, c^{-1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau\right) = G(x) + f_0 \, c^{-1/2} \quad .$$

Les notations et les hypothèses du théorème définies dans le chapitre III restent valables; seuls les résultats changent :

Il existe une constante $K > 0$ telle que :

i) $|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant k \, \| P_1 - P_2 \|$ uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

ii) $|T_{1H}(x,t) - T_{2H}(x,t)| \leqslant g(t) \, \| \Delta f \|_2$ uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$,

avec $t > 0$.

iii) $|T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t)| \leqslant h(t) \, \| P_1 - P_2 \|$ uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant c$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

où 1) $g(t) = c^{-1/2} + K \, e^{-rt} \, t^{-(1/4 + \delta)}$;

2) si $\delta < 3/4$: $h(t) = K \; t^{3/4 - \delta} + K' \, t \, c^{-1/2}$.

Le principe de démonstration est identique si ce n'est que l'indice de sommation en n commence en 0 au lieu de 1 . Par conséquent, par un raisonnement similaire, nous aboutissons au résultat (3.16) demandé :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant K \, \| P_1 - P_2 \| \qquad \text{uniformément pour } 0 \leqslant t \leqslant T \; .$$

Pour $T(x,t)$, nous avons un résultat différent de celui du chapitre III. En effet, comme $G(x,\xi,t)$ est défini en (B.4), l'inégalité (3.17) prend la forme :

$$\| G \|_2^2(x,t) \leqslant M^2 e^{-2rt} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - r)t} + c^{-1} \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Par le choix de r , β définis en page 3.7 , nous obtenons :

$$\| G \|_2(x,t) \leqslant K' \, e^{-rt} \, t^{-(1/4 + \delta)} + c^{-1/2} \tag{B.14}$$

où K' est exprimé en (3.18).

Appliquons cette majoration à la différence des parties homogènes des solutions $T_i(x,t)$ $i = 1, 2$:

$$|T_{1H}(x,t) - T_{2H}(x,t)| \leqslant K' e^{-rt} t^{-(1/4+\delta)} \|\Delta f\|_2 + c^{-1/2} \|\Delta f\|_2 .$$

Pour estimer la différence entre les parties non homogènes des solutions $T_i(x,t)$ $i = 1, 2$, nous introduisons deux fonctions auxiliaires $W_1(x,t)$ et $W_2(x,t)$ vérifiant (3.19) :

$$W_1(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\, \eta_1(\xi)\, (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\xi\, d\tau \quad ;$$

$$W_2(x,t) = \int_0^t \int_0^c G(x,\xi,t-\tau)\, (\eta_1(\xi) - \eta_2(\xi))\, u_2(\tau)\, d\xi\, d\tau \quad .$$

Par (3.16) et une application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons, pour $W_1(x,t)$:

$$|W_1(x,t)| \leqslant K \|P_1 - P_2\| \int_0^t \|G\|_2(x,t-\tau)\, \|\eta_1\|_2\, d\tau$$

et par (3.4) et (B.14), nous aboutissons à :

$$|W_1(x,t)| \leqslant D\, K \|P_1 - P_2\| \int_0^t (K' e^{-r(t-\tau)} (t-\tau)^{-(1/4+\delta)} + c^{-1/2})\, d\tau .$$

δ étant strictement inférieur à $3/4$, nous pouvons intégrer et arriver à :

$$|W_1(x,t)| \leqslant D\, K \|P_1 - P_2\| \left[\frac{K'\, t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} + c^{-1/2}\, t\right]$$

uniformément pour $\begin{cases} x \in [0,c] & , \\ t \in [0,T] & . \end{cases}$

En appliquant un même raisonnement à $W_2(x,t)$ et en posant :

$$Q = \max_{t\in[0,T]} |u_2(t)| \quad ,$$

nous avons :

$$|W_2(x,t)| \leqslant Q \, \|\Delta\eta\|_2 \left[\frac{K' \; t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} + c^{-1/2} \, t\right] \quad .$$

Majorons (3.19) :

$$|T_{1I}(x,t) - T_{2I}(x,t)| \leqslant (D\,K+Q)\left[\frac{t^{3/4-\delta}}{3/4-\delta} + c^{-1/2} \, t\right] \|P_1 - P_2\| \quad .$$

Si nous posons :

$$K'' = \frac{K' \, [D\,K+Q]}{3/4-\delta}$$

et $\qquad K''' = D\,K + Q \qquad ,$

nous avons iii .

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.A. BRONIKOWSKI : An integrodifferential system which occurs in reactor dynamics, Archive Rational Mechanics and Analysis, 37, pp. 363-380, 1970.

[2] T.A. BRONIKOWSKI, J.E. HALL, J.A. NOHEL : Quantitative estimates for a nonlinear system of integrodifferential equations arising in reactor dynamics, Siam J. Math. Anal., vol. 3, No 4, novembre 1972.

[3] R. COURANT, D. HILBERT : Methods of mathematical physics, vol. 1, New York, Interscience, 1953.

[4] J. DIEUDONNE : Eléments d'analyse, tome 1, Gauthier-Villars éditeur, Paris, 1972.

[5] G. DOETSCH : Mandbuch des Laplace-transformation, Band I, Bikausen Verlag, Basel, 1971.

[6] E.F. INFANTE, J.A. WALKER : On the stability for a class of equations arising in reactor dynamics, (à paraître).

[7] P. HENRICI : Applied and computational complex analysis, vol. 1, A. Wiley, Interscience publication, 1974.

[8] R.K. MILLER : Nonlinear Volterra integral equation, Benjamin, New York, 1971.

[9] J.J. LEVIN, J.A. NOHEL : On a system of integrodifferential equations occuring in reactor dynamics, Journal Math. and Mech., 9, pp. 347-368, 1960.

[10] D. WEXLER : Frequency domain stability for a class of equations arising in reactor dynamics, report 77/3, F.U.N. Namur.

[11] E.C. YOUNG : Partial differential equations, Allyn and Bacon, Boston, 1972.

ERRATUM

p.I.I5 lignes 23,24

Il faut lire:...,la convergence au sens de L^2 de $\eta^k g(t)$ et uniforme de $g(t)T_I^k(x,t)$...