

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Modes élastiques et ondes de surface en géométrie sphérique

Crépin, Alix; Petit, Claire

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX

NAMUR

Année Académique 1976-1977.

MODES ELASTIQUES
et
ONDES DE SURFACE
en
GEOMETRIE SPHERIQUE

Laboratoire
de
Physique mathématique
et de
Physique du solide

*Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences Mathématiques*

par

Promoteur :
André RONVEAUX

Alix CREPIN
et
Claire PETIT

FNB1/1977/6

866561
LMS 3452366

*En nous montrant le but, montrez-nous le chemin,
Car l'enchevêtrement des moyens et des fins,
Veut qu'en changeant les uns, vous transformiez les autres;
Chaque nouveau sentir découvre un but nouveau.*

Franz von Sickingen.

*Nous remercions de tout coeur,
André Ronveaux de nous avoir guidés dans
ce mémoire, ainsi que
Alain Moussiaux pour son aide efficace et
toutes les personnes qui nous ont permis de
mener à bien ce travail.*



1-1 INTRODUCTION

Le point de départ de notre travail est d'étudier par la théorie de l'élasticité les déformations de petites cavités sphériques au sein d'un matériau homogène. De par sa géométrie, le problème se ramène à l'étude des vibrations d'une sphère pleine. L'étude des vibrations d'une sphère est un problème bien connu ; plusieurs méthodes sont présentées au chapitre 3 : la méthode de Lamb (1882) (15), la méthode de Sezawa (1929) (28,29) et enfin la méthode utilisant pour la résolution de l'équation de mouvement, les potentiels de Lamé et de Helmholtz (10). Cette méthode très séduisante au point de vue mathématique nécessite la mise en place d'une importante théorie préalable qui la rend apte à résoudre d'autres types de problèmes. C'est pourquoi dans le mémoire, on utilise la méthode de Sezawa qui est la plus directe de ces trois méthodes.

D'autre part, il existe dans les milieux semi-infinis, plusieurs types d'ondes de surface, les ondes de surface transportant dans certains cas, beaucoup plus d'énergie que les autres types d'ondes. Or, le problème des déformations des cavités sphériques étant naturellement lié à des problèmes énergétiques, il nous a paru intéressant d'étudier le problème des ondes de surface autour d'une sphère ou d'une cavité sphérique. Comme il est nécessaire, pour établir les ondes de surfaces autour d'une sphère ou d'une cavité sphérique, de connaître les modes ordinaires de vibration, notre premier travail était d'établir ces modes de vibration. Après avoir commencé par un cas simple, celui des vibrations purement radiales (chapitre II), on est passé au cas général (chapitre IV) dont on montre d'ailleurs qu'il se ramène dans un cas particulier au cas radial pur.

Ensuite, avant de passer à l'étude des ondes de surface de la sphère et de la cavité sphérique, il nous a paru utile d'étudier les ondes de surface ordinaires dans un milieu semi-infini homogène limité par une sur-

face plane (ondes de Rayleigh). Notons que ce modèle est utilisé en géophysique et en séismologie pour décrire les ondes de surface de la terre en approximant localement la surface du globe terrestre par un plan (1ère partie du chapitre V).

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les ondes de surface d'une sphère. La première méthode consiste à retrouver ces ondes à partir des modes de vibrations stationnaires de la sphère. Cette opération s'effectue par un processus de passage à la limite. Ce processus fonctionne bien pour la sphère, mais pour la cavité sphérique, il ne nous a pas été possible de l'effectuer à cause d'un manque d'information sur les fonctions de Hankel à variable complexe. Le chapitre V se termine par quelques commentaires à ce propos.

Il existe d'autres méthodes concernant les ondes de surface dans des problèmes à géométrie sphérique. Ces méthodes nécessitent des techniques non élémentaires (transformation de Watson, transformation des fonctions de Legendre par des fonctions de Clemmow) qui entrent dans le cadre d'un travail plus large (voir Ansell (2)). Pinkney (32) a également traité les ondes de Rayleigh autour d'une sphère à l'aide d'une technique de perturbation sur un plan tangent à la surface.

Enfin, dans un but pratique, le chapitre VI présente quelques valeurs numériques (e.a. les fréquences des vibrations de la sphère) et quelques représentations géométriques d'ondes de surface et de modes de vibration de la sphère.

Les chapitres 2, 4 et 6(1) et les annexes I, II, III ont été rédigés par Claire Petit et les chapitres 3, 5 et 6 (2, 3, 4) et les annexes IV et V ont été rédigés par Alix Crépin.

1-2 TABLE DES SYMBOLES

a = rayon de la sphère

ρ = densité du milieu

λ et μ = constantes de Lamé

$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ = module de Young ou module de traction

$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ = coefficient de Poisson

ω = pulsation angulaire

$h^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$, $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$

$c_\ell = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ = vitesse des ondes longitudinales

$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ = vitesse des ondes transversales

$\eta = k a$

$\xi = h a$.

CHAPITRE 2

VIBRATIONS RADIALES D'UNE SPHERE ET D'UNE CAVITE SPHERIQUE.

2-1 Vibrations radiales d'une sphère

Soit une sphère élastique de rayon a . On choisit l'origine des coordonnées sphériques r, θ, ϕ au centre de la sphère.

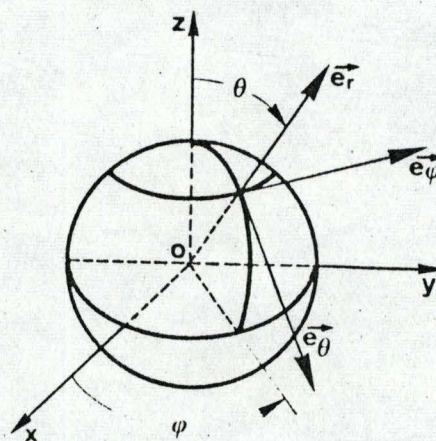


Figure 2-1.

Les vibrations étant radiales, le déplacement \vec{u} est dirigé (2-1) suivant le rayon et ne dépend que de r , c'est-à-dire $u_\theta = u_\phi = 0$ et $u_r = u_r(r)$.

L'équation de Lamé s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

Posons $\text{div } \vec{u} = \Delta$. $\text{Rot } \vec{u} = 0$ par l'hypothèse (2-1).

Le gradient, la div et le rot sont écrits en coordonnées sphériques dans l'annexe 2.

L'équation de Lamé devient ainsi par l'hypothèse (2-1) :

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} \quad (2-2)$$

Séparons les variables : $u_r(r,t) = u_r(r) f(t)$

En remplaçant ceci dans (2-2), on obtient $f(t) = e^{i\omega t}$

Après séparation des variables, l'équation (2-2) s'écrit :

$$-\rho \omega^2 u_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} \quad (2-3)$$

Puisque le rot $\vec{u} = 0$, \vec{u} s'écrit comme le gradient d'un potentiel scalaire ϕ . Par l'hypothèse (2-1), ce gradient revient à une dérivée partielle par rapport à r , c'est-à-dire : $\vec{u}(r) = u_r(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r}$

Par l'hypothèse (2-1), $\Delta = \text{div } \vec{u} = \text{div } \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$ et $\nabla^2 \phi$ exprimés en coordonnées sphériques (annexe 2) sont égaux. L'équation (2-3) s'écrit :

$$-\rho \omega^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \phi)$$

En intégrant par rapport à r et en posant

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = c_\ell^2 ; \quad \frac{\omega^2}{c_\ell^2} = h^2, \quad \text{on obtient :}$$

$$\nabla^2 \phi + h^2 \phi = 0 \quad (2-4)$$

La laplacien $\nabla^2 \phi$ en coord. sphériques (annexe 2) devient par l'hypothèse (2-1) :

$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$. L'équation (2-4) devient :

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + k^2 \phi = 0 \quad (2-5)$$

C'est une équation de Bessel sphérique (annexe 1) dont la solution est :

$$\phi(r) = A j_0(hr) + B y_0(hr)$$

où $j_n(hr)$ et $y_n(hr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèces. Pour la boule, on élimine $y_0(hr)$ car cette fonction est irrégulière en $r = 0$ ($y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$)

$$\text{Donc, } \phi(r) = A j_0(hr) \quad (2-6)$$

Le déplacement $u_r(r) = \frac{d\phi(r)}{dr}$ s'écrit donc :

$$u_r(r) = A \frac{dj_0(hr)}{dr} \quad (2-7)$$

$$\Rightarrow u_r(r,t) = A \frac{dj_0(hr)}{dr} e^{i\omega t}$$

Conditions aux limites

La tension à la surface $r = a$ de la boule est nulle.

La tension = $T \cdot \vec{n}$ où T = tenseur des tensions (annexe 2)
 \vec{n} = normale à la surface dirigée vers l'extérieur de la matière $\Rightarrow \vec{n} = (1,0,0)$

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{r\phi} = 0$$

Par l'hypothèse (2-1), les équations $\tau_{r\theta} = \tau_{r\phi} = 0$ sont trivialement satisfaites, il reste donc :

$$\tau_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = a \quad (2-8)$$

Cette équation détermine les valeurs acceptables de k et par conséquent de ω .

$$\text{Posons } c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad c_\ell^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\Rightarrow \mu = \rho c_t^2 \quad \text{et } \lambda = \rho (c_\ell^2 - 2c_t^2)$$

$$\Delta = \nabla^2 \phi = -h^2 \phi \quad (\text{par l'équation 2-4})$$

L'équation (2-8) devient donc, en remplaçant u_r et ϕ par leur valeur en (2-7) et (2-6) :

$$(c_\ell^2 - 2c_t^2) (-k^2 A j_0(hr)) + 2c_t^2 A \frac{d}{dr} \left(\frac{d j_0(hr)}{dr} \right) = 0 \quad (2-9)$$

Puisque $j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{x}$, l'équation (2-9) devient :

$$(c_\ell^2 - 2c_t^2) \left(-k^2 A \frac{\sin(hr)}{hr} \right) + 2c_t^2 A \frac{d}{dr} \left(\frac{\cos(hr)}{r} - \frac{\sin(hr)}{hr^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (c_\ell^2 - 2c_t^2) \left(-h \frac{\sin(hr)}{r} \right) + \frac{2c_t^2}{hr^3} \left((2-h^2 r^2) \sin(hr) - 2hr \cos(hr) \right) = 0 \quad (2-10)$$

Multiplions par hr^3 et divisons par $\cos(hr)$ qui ne peut être égal à zéro. (voir remarque).

$$\frac{\operatorname{tg}(hr)}{hr} = \frac{4c_t^2}{4c_t^2 - c_l^2 h^2 r^2} \quad \text{en } r = a$$

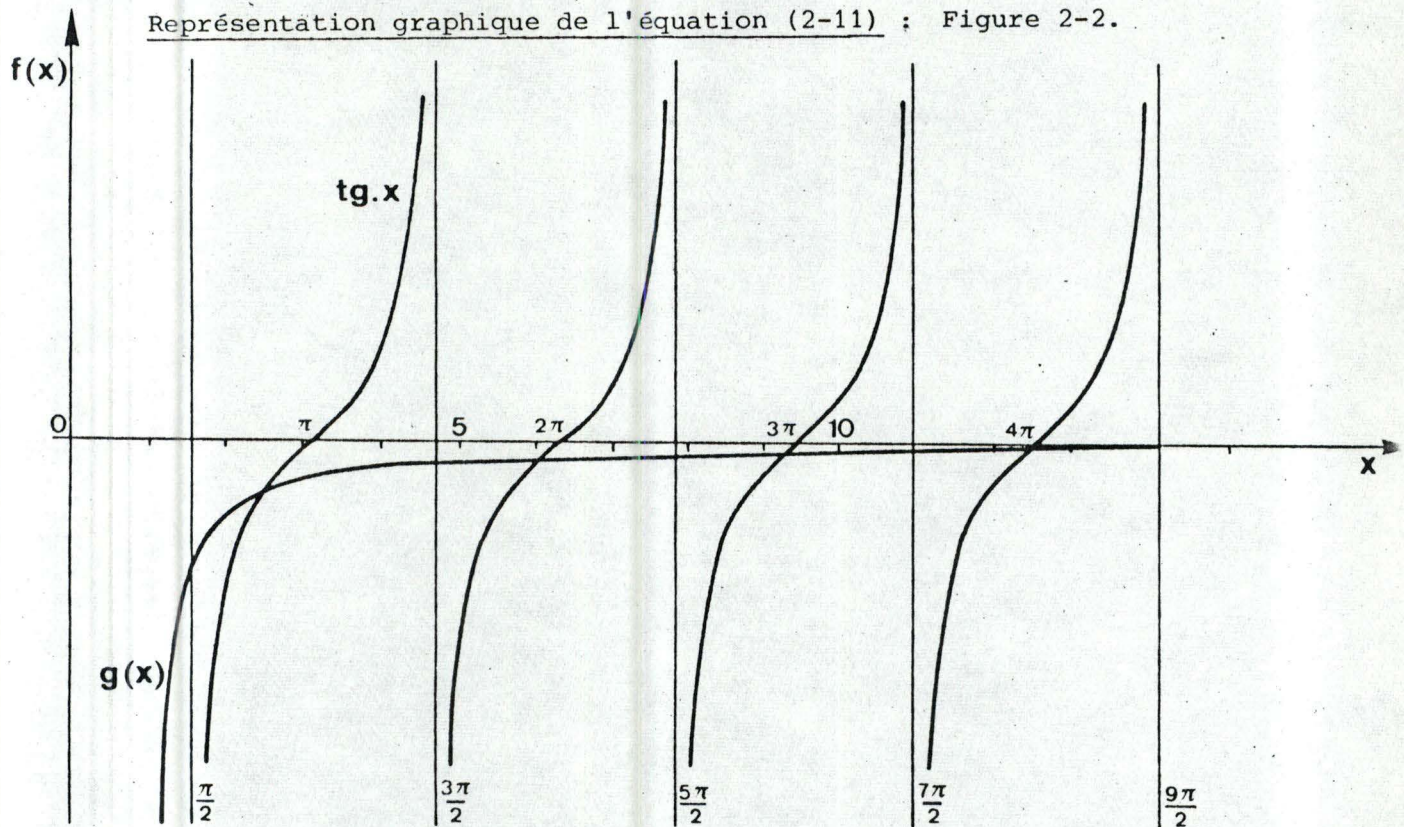
La condition limite s'écrit donc finalement :

$$\frac{\operatorname{tg}(ha)}{ha} = \frac{1}{1 - \left[\frac{h a c_l}{2 c_t} \right]^2} \quad (2-11)$$

Cette équation donne les valeurs de h admissibles, et par suite, celles

de ω . $\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} = h^2 \right)$

Représentation graphique de l'équation (2-11) : Figure 2-2.



graphique de $\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{3x^2}{4}}$ où $x = ha$ et $\lambda = \mu \Rightarrow \frac{c_l}{c_t} = \sqrt{3}$

Remarque :

L'équation (2-10) peut s'annuler pour :

$$1) \quad \cos(hr) = 0 \quad \text{et} \quad 4C_t^2 - C_\ell^2 h^2 a^2 = 0$$

$$\text{c'est-à-dire pour } ha = (2n + 1) \frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z} \text{ et } kR = \pm \frac{2C_t}{C_\ell} = \pm 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}$$

$$\text{Il faudrait donc que } (2n + 1) \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}} \quad (2-11)$$

Cette égalité est impossible. Exemple : pour un solide incompressible

$$\lambda = \infty \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}} = 0 \neq (2n + 1) \frac{\pi}{4} \quad \forall n. \quad \text{De même, si } \lambda = \mu$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+3\mu}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq (2n + 1) \frac{\pi}{4} \quad \forall n.$$

$$2) \quad \sin(hr) = 0 \quad \text{et} \quad 4C_t^2 ha = 0$$

c'est-à-dire $ha = n\pi$ et $ha = 0 \Rightarrow ha = 0$ qui est la solution identiquement nulle.

2-2 Vibrations radiales d'une cavité sphérique.

La résolution de ce problème est identique à celui de la boule. La seule différence réside dans la solution de l'équation de Bessel sphérique (2-5). Pour la cavité, on prend comme solution les fonctions de Hankel sphériques de première et deuxième espèce :

$$\phi(r) = A h_o^{(1)}(hr) + B h_o^{(2)}(hr)$$

où
$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) + i y_n(x)$$

Le choix de la fonction de Hankel de première ou de deuxième espèce donne au déplacement une forme d'onde rentrante ou sortante. En effet :

$$h_n^{(1)}(kr) \text{ tend vers } \frac{i^{(-n)}}{ihr} e^{ihr} \quad \text{lorsque } h \rightarrow \infty$$

$$h_n^{(2)}(kr) \text{ tend vers } \frac{-i^n}{ihr} e^{-ihr} \quad \text{lorsque } h \rightarrow \infty$$

Si l'on choisit $h_n^{(1)}(hr)$, on obtient le facteur $e^{i(hr+\omega t)}$ qui donne au déplacement $u_r(r,t)$ la forme d'une onde rentrante. Par contre, si l'on choisit $h_n^{(2)}(hr)$, le facteur $e^{i(-hr+\omega t)}$ donne à u_r une forme d'onde sortante. Pour la cavité, on choisit des déplacements sous forme d'onde sortante :

$$\phi(r) = A h_o^{(2)}(hr) = A \left(\frac{\sin(hr)}{hr} - i \frac{\cos(hr)}{hr} \right)$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{A}{kr^2} \left[\left(hr \cos(hr) - \sin(hr) \right) + i \left(hr \sin(hr) + \cos(hr) \right) \right]$$

Les conditions limites pour une cavité libre sont les mêmes que celles de la sphère libre. En effet, la tension nulle à la surface $r = a$, s'écrit :

$$T \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{où } \vec{n} = (-1, 0, 0)$$

c'est-à-dire $\tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{r\phi} = 0$

Par l'hypothèse (2-1), il reste $\tau_{rr} = 0$ en $r = a$

L'équation à la limite pour la cavité s'obtient donc à partir de l'équation à la limite pour la boule (2-9), en remplaçant $j_0(hr)$ par $h_0^{(2)}(hr)$.

Puisque $h_0^{(2)}(hr) = \frac{\sin(hr)}{hr} - i \frac{\cos(hr)}{hr}$

Cette équation (2-9) devient :

$$-h^2 A (C_\ell^2 - 2C_t^2) \left(\frac{\sin(hr)}{hr} - i \frac{\cos(hr)}{hr} \right) + 2C_t^2 A \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\sin(hr)}{hr} - i \frac{\cos(hr)}{hr} \right) = 0$$

en $r = a$, c'est-à-dire :

$$-k^2 (C_\ell^2 - 2C_t^2) \left(\frac{\sin(ha)}{ha} - i \frac{\cos(ha)}{ha} \right) + \frac{2C_t^2}{ha^3} \left\{ \left[(2-h^2 a^2) \sin(ha) - 2ha \cos(ha) \right] - i \left[(2-h^2 a^2) \cos(ha) + 2ha \sin(ha) \right] \right\} = 0$$

Multiplions par ka . Après simplification, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sin(ha) \left[-C_\ell^2 h^2 + \frac{4C_t^2}{a^2} \right] + \cos(ha) \left[-\frac{4C_t^2 h}{a} \right] \\ & + i \sin(ha) \left[\frac{4C_t^2 h}{a} \right] + i \cos(ha) \left[-C_\ell^2 h^2 + \frac{4C_t^2}{a^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Mettons $\cos(ha) - i \sin(ha)$ en évidence :

$$\left[\cos(ha) - i \sin(ha) \right] \left[(-i) \left(-C_{\ell}^2 h^2 + \frac{4C_t^2}{a^2} \right) - \frac{4C_t^2 h}{a} \right] = 0$$

Simplifions par $\cos(ha) - i \sin(ha)$ et remplaçons h^2 par $\frac{\omega^2}{C_{\ell}^2}$

$$\frac{4C_t^2 \omega}{C_{\ell}^2 a} = -i \left(-\omega^2 + \frac{4C_t^2}{a^2} \right)$$

$$\omega^2 - i \frac{4C_t^2}{C_{\ell}^2 a} \omega + \frac{4C_t^2}{a^2} = 0 \quad (2-12)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2iC_t^2}{C_{\ell}^2 a} \pm \frac{2C_t}{a} \sqrt{\frac{C_t^2}{C_{\ell}^2} + 1} \quad (2-13)$$

Cette racine est bien acceptable physiquement, car elle donne un amortissement dans le temps.

En effet, $e^{i\omega t}$ s'écrit :

$$e^{\pm i \left[\frac{2C_t}{a} \sqrt{\frac{C_t^2}{C_{\ell}^2} + 1} \right] t} \cdot e^{-\frac{2C_t^2}{C_{\ell}^2 a} t}$$

CHAPITRE 3

ETUDE DES VIBRATIONS D'UNE SPHERE. PRESENTATION DE TROIS METHODES.

3-1 Position du problème

Les vibrations d'un milieu élastique homogène et isotrope non soumis à des forces volumiques extérieures vérifient, dans le cas de petits déplacements, l'équation du mouvement :

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \Delta^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (3-1)$$

ou de façon équivalente (voir annexe 3) :

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \vec{u} - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (3-2)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé du milieu et ρ sa densité.

La résolution de l'équation du mouvement donne la forme générale du déplacement \vec{u} où subsistent certaines constantes. Celles-ci sont fixées par les conditions aux limites à la frontière du milieu. Ces dernières donnent également les fréquences des vibrations.

La condition limite est la tension nulle à la surface de la sphère ou de la cavité sphérique. Si \vec{n} est la normale pointée vers l'extérieur de la surface et τ le tenseur des tensions, la condition limite s'exprime : $\vec{\tau} \vec{n} = \vec{0}$ en $r = a$ avec $a =$ rayon de la sphère. (3-3)

coordonnées sphériques

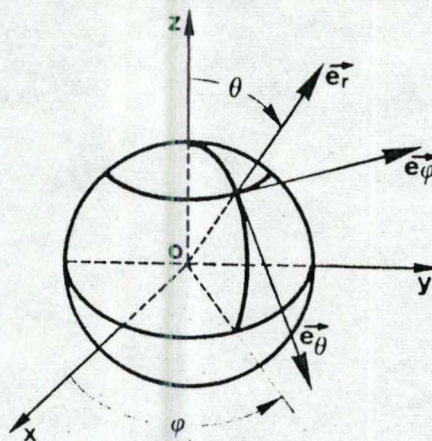


Figure 3-1.

Il est naturel pour ce problème d'utiliser les coordonnées sphériques r , θ et ϕ (Fig 3-1) Dans ces coordonnées, (3-3) devient (3-4) en $r = a$

$$\tau_{rr}(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (3-4a)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (3-4b) \quad (3-4)$$

$$\tau_{r\phi}(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (3-4c)$$

Les différentes approches pour la résolution du problème diffèrent essentiellement par la façon de résoudre l'équation du mouvement (3-1) ou (3-2). Dans ce chapitre, 3 méthodes de résolution sont présentées schématiquement, chacune comprend la résolution de plusieurs équations d'Helmoltz scalaires. L'utilisation des conditions aux limites et la déduction de l'équation des fréquences est identique dans les 3 cas.

On trouvera à la page suivante une présentation schématique des 3 méthodes.

EQUATION DU MOUVEMENT

METHODE DES POTENTIELS

a) $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}_x\vec{\psi}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$

$$\nabla^2\phi + h^2\phi = 0$$

$$\vec{\nabla}_x\vec{\nabla}_x\vec{\psi} - k^2\vec{\psi} = 0$$

b) $\vec{\psi} = r\psi e_r + \lambda\vec{\nabla}_x(r\chi e_r)$

$$\nabla^2\phi + h^2\phi = 0$$

$$\nabla^2\psi + h^2\psi = 0$$

$$\nabla^2\chi + k^2\chi = 0$$

c) SOLUTION PAR
SEPARATION ϕ , ψ et χ connus

d) $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}_x\vec{\psi}$

METHODE DE LAMB

a) $\Delta = \text{div } \vec{u}$

$$\nabla^2\vec{u} + h^2\vec{u} = \left(1 - \frac{k^2}{h^2}\right)\vec{\nabla}\Delta$$

$$\nabla^2\Delta + h^2\Delta = 0$$

b) $\vec{u}_p = -\frac{1}{h^2}\vec{\nabla}\Delta$

$$\nabla^2\Delta + h^2\Delta = 0$$

$$\nabla^2\vec{u} + k^2\vec{u} = 0 \text{ et } \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

c) SOLUTION PAR HARMO-
NIQUES SPHERIQUES Δ et \vec{u}_H connus

d) $\vec{u} = \vec{u}_H + \vec{u}_p$

METHODE DE SEZAWA

a) $\Delta = \text{div } \vec{u}$

$$\vec{w} = \text{rot } \vec{u}$$

L'équation du mouve-
ment exprimée en fonc-
tion de Δ et \vec{w} .

b) changement de variables

$$\nabla^2\Delta + h^2\Delta = 0$$

$$\nabla^2 w_r + k^2 w_r = 0$$

$$\nabla^2 w_\theta = k^2 w_\theta = F(w_r)$$

$$w_\phi = G(w_r, w_\theta)$$

c) SOLUTION PAR
SEPARATION Δ et \vec{w} connus

d) $\vec{u} = \frac{1}{k^2}\vec{\nabla}_x\vec{w} - \frac{1}{h^2}\vec{\nabla}\Delta$

Introduction de la forme générale du déplacement
 \vec{u} dans le système des conditions limites.

Condition de compatibilité du système des C.L.

Equation des fréquences
des vibrations sphéroïdales.Calcul des déplacements
associés aux vibrations.

SPHEROIDALES.

Equation des fréquences
des vibrations torsionales.Calcul des déplacements
associés aux vibrations.

TORSIONALES.

3-2 Méthode des potentiels de Lamé et de Helmholtz

L'idée de départ de cette méthode est d'appliquer le théorème de décomposition de Stokes-Helmholtz au champ des déplacements \vec{u} ; on écrit donc :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}. \quad (3-5)$$

Dans cette décomposition, ϕ et $\vec{\Psi}$ sont des fonctions respectivement scalaire et vectorielle de la position et du temps ; ϕ et $\vec{\Psi}$ sont appelés potentiels de Lamé associés au champ des déplacements.

On peut, pour la facilité des calculs, ajouter une condition sur le "potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ ". Une telle condition est la condition de jauge qui s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0. \quad (3-6)$$

Il a été démontré (Somigliana (1892), Duhem (1848), Stenberg et Gurtin (1962) ou Long (1967)), avec ou sans la condition de Gauge, que si $\vec{u}(x,t)$ est une solution de l'équation de mouvement (3-1) ou (3-2), il existe des potentiels de Lamé ϕ et $\vec{\Psi}$ permettant la décomposition (3-5) et ces potentiels doivent alors vérifier les équations :

$$\begin{aligned} C_l^2 \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ - C_t^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} &= \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3-7)$$

où

$$C_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{ et } C_t^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3-8)$$

L'équation (3-7) est séparable en coordonnées sphériques. De plus, grâce à la condition de jauge, on peut décomposer le potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ de la manière suivante en coordonnées sphériques :

$$\vec{\Psi} = r \psi \vec{e}_r + \ell \vec{\nabla} \times (r \chi \vec{e}_r) \quad (3-9)$$

où ℓ est un facteur de dimension, et ψ et χ sont deux potentiels scalaires qui avec le potentiel ϕ sont appelés: potentiels de Helmholtz.

Par cette décomposition du potentiel $\vec{\Psi}$, l'équation (3-8) devient équivalente au système :

$$\left[\begin{array}{l} c_2^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{t^2} \end{array} \right. \quad (3-10)$$

$$\left[\begin{array}{l} c_2^2 \nabla^2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (3-11)$$

En coordonnées sphériques, on aboutit donc à trois équations de Helmholtz scalaires (3-7), (3-10) et (3-11). Par construction, ces équations sont séparables.

Si on pose

$$\left[\begin{array}{l} \phi(r, \theta, \phi, t) = \phi(r, \theta, \phi) e^{i\omega t} \\ \psi(r, \theta, \phi, t) = \psi(r, \theta, \phi) e^{i\omega t} \\ \chi(r, \theta, \phi, t) = \chi(r, \theta, \phi) e^{i\omega t}, \end{array} \right.$$

ce qui revient à choisir la dépendance temporelle du déplacement, on obtient à partir de (3-7), (3-10) et (3-11) :

$$\left[\begin{array}{ll} (\nabla^2 + h^2) \phi(r, \theta, \phi) = 0 & (3-12a) \\ (\nabla^2 + k^2) \psi(r, \theta, \phi) = 0 & (3-12b) \\ (\nabla^2 + k^2) \chi(r, \theta, \phi) = 0 & (3-12c) \end{array} \right. \quad (3-12)$$

où $h = \omega/C_\ell$ et $k = \omega/C_t$.

Il faut maintenant résoudre les équations de Helmholtz (3-12). On obtient ainsi (annexe 4) pour $\phi(r, \theta, \phi)$, $\psi(r, \theta, \phi)$ et $\chi(r, \theta, \phi)$ des expressions de la forme :

$$F_n^m(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{br}} B_{n+1/2}(br) \cdot P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3-13)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} b = h \text{ ou } k \text{ suivant le cas,} \\ n = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{et } -n \leq m \leq +n, \\ B_{n+1/2}(x) = J_{n+1/2}(x), Y_{n+1/2}(x) \text{ ou } H_{n+1/2}^i(x), i = 1, 2. \end{array} \right.$$

Pour la sphère, on élimine $Y_{n+1/2}(x)$ qui n'est pas régulière en $r = 0$.

Pour la cavité sphérique, on choisit $H_{n+1/2}^{(2)}(x)$ qui a la forme d'une onde plane sortante pour $x \rightarrow \infty$.

Les potentiels dont on dérive le déplacement $\vec{u}(r, \theta, \phi, t)$ pour les formules (3-5) et (3-9) s'écrivent dans le cas de la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{\sqrt{hr}} J_{n+1/2}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\omega t} \quad (3-14a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\omega t} \quad (3-14b) \quad (3-14) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{i\omega t} \quad (3-14c) \end{array} \right.$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ avec $-n \leq m \leq +n$.

Dans le cas de la cavité sphérique, on remplace la fonction $J_{n+1/2}(x)$ par $H_{n+1/2}^{(2)}(x)$ dans (3-13) et (3-14).

3-3 Méthode de Lamb

La méthode présentée par H. Lamb en 1882 a été reprise par A.E.H. Love en 1944 dans son traité sur la théorie mathématique de l'élasticité.

Il est à remarquer que Lamb utilise les coordonnées cartésiennes et c'est donc ce système de coordonnées qui sera utilisé au cours de ce paragraphe.

Si les composantes du déplacement en coordonnées cartésiennes sont appelées u_x , u_y et u_z , l'équation du mouvement (3-1) s'écrit en repère cartésien :

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 (u_x, u_y, u_z) = \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \quad (3-15)$$

avec
$$\Delta = \text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} .$$

La première démarche de Lamb consiste à séparer le temps en posant :

$$\vec{u} = \vec{v} \cos (\omega t + \varepsilon) \quad (3-16)$$

où ω est la fréquence angulaire ou pulsation.

L'équation (3-14) après séparation du temps a la forme :

$$(\nabla^2 + k^2) (v_x, v_y, v_z) = (1 - \frac{k^2}{h^2}) (\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}) \quad (3-17)$$

où

$$k = \omega/C_t \text{ et } h = \omega/C_l .$$

A partir de (3-17), on déduit également une équation pour $\Delta = \text{div } \vec{u} : (\nabla^2 + h^2) \Delta = 0. \quad (3-18)$

Il faut résoudre les 3 équations de Helmholtz scalaires non homogènes (3-17) en v_x, v_y et v_z . Or, on trouve facilement une solution particulière de (3-17) en fonction de $\Delta : \vec{v}_p = -\frac{1}{h^2} \text{grad } \Delta. \quad (3-19)$

Ainsi, le problème revient à résoudre les 3 équations de Helmholtz scalaire homogènes :

$$(\nabla^2 + k^2) (v_x, v_y, v_z) = 0$$

avec

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3-20)$$

Pour connaître la solution particulière, il faut encore résoudre l'équation (3-18) en Δ homogène et scalaire.

H. Lamb écrit les solutions de ces équations scalaires homogènes au moyen des harmoniques sphériques. Si on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on obtient:

$$a) \Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \psi_n(hr) \quad (3-21)$$

où ω_n = harmonique sphérique solide de degré n et

$$\psi_n(z) = \frac{(-1)^n \sqrt{2\pi}}{2z^{n+1/2}} J_{n+1/2}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-22)$$

$$b) \quad v_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\psi_n(kr) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x} \right) - \frac{n+1}{n+2} \psi_{n+2}(kr) k^2 r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_{n+1}}{r^{2n+3}} \right) \right] \quad (3-23)$$

où χ_n et ϕ_n sont des harmoniques sphériques solides de degré n .

Les 2 autres composantes v_y et v_z sont obtenues par permutation circulaire de x , y et z dans (3-23).

Finalement, la composante en x du déplacement s'écrit :

$$u_x = \cos(\omega t + \epsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (\omega_n \psi_n(kr)) + \psi_n(kr) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x} \right) - \frac{n+1}{n+2} \psi_{n+2}(kr) k^2 r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_{n+1}}{r^{2n+3}} \right) \right], \quad (3-24)$$

où $\psi_n(x)$ est définie en (3-22) et

ω_n , ϕ_n et χ_n sont des harmoniques sphériques solides de degré n .

3-4 Méthode de Sezawa.

La méthode de Sezawa apparaît dans des articles publiés en 1927 et 1929 (27,29) traitant les vibrations d'une sphère en vue d'étudier la propagation des ondes de surface autour de la terre. Nous utiliserons cette méthode au cours du chapitre 4. L'idée de base de la méthode est de travailler avec le rotationnel \vec{w} et la divergence Δ du déplacement \vec{u} . A partir de l'équation du mouvement (3-2), on établit les équations que doivent satisfaire Δ et \vec{w} ; donc si $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ avec $\vec{w} = (w_r, w_\theta, w_\phi)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = C_\ell^2 F_1 (\Delta; r, \theta, \phi), \quad (3-25)$$

$$\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = C_t^2 F_2 (w_r; r, \theta, \phi), \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = C_t^2 F_3 (w_r, w_\theta, w_\phi; r, \theta, \phi), \quad (3-27)$$

et
$$\frac{\partial^2 w_\phi}{\partial t^2} = C_t^2 F_4 (w_r, w_\theta, w_\phi; r, \theta, \phi). \quad (3-28)$$

Les équations (3-25) et (3-26) sont découplées. On les résout en séparant d'abord le temps en posant :

$$\Delta(r, \theta, \phi, t) = e^{i\omega t} \Delta(r, \theta, \phi)$$

$$w_r(r, \theta, \phi, t) = e^{i\omega t} w_r(r, \theta, \phi).$$

Cela nous conduit pour $\Delta(r, \theta, \phi)$ à l'équation :

$$(\nabla^2 + h^2) \Delta(r, \theta, \phi) = 0. \quad (3-29)$$

Si, de plus, on pose $w'_r(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} w_r(r, \theta, \phi)$, (3-26) donne :

$$(\nabla^2 + k^2) w'_r(r, \theta, \phi) = 0. \quad (3-30)$$

Les équations (3-29) et (3-30) sont des équations de Helmholtz scalaires homogènes que l'on traite par séparation de variable de la manière classique (voir annexe 4).

Pour résoudre (3-27), on utilise la relation :

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (3-31)$$

qui permet d'exprimer la dépendance en w_ϕ de F_3 en fonction de w_r et w_θ . Comme w_r a été calculé plus haut, on obtient pour $w_\theta(r, \theta, \phi, t)$ une équation découplée de la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_\theta = C_t^2 F_3'(w_\theta; r, \theta, \phi). \quad (3-32)$$

L'équation (3-32) peut être résolue de la même façon que (3-25) et (3-26) en utilisant un autre changement de variable :

$$w_\theta'(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{\sin \theta} w_\theta(r, \theta, \phi, t). \quad (3-33)$$

Le calcul de $w_\phi(r, \theta, \phi, t)$ s'effectue aisément à partir de (3-27) lorsque $w_r(r, \theta, \phi, t)$ et $w_\theta(r, \theta, \phi, t)$ ont été déterminés.

Il reste à calculer le déplacement $\vec{u}(r, \theta, \phi, t)$ à partir de son rotationnel $\vec{w}(w_r, w_\theta, w_\phi)$ et de sa divergence $\Delta(r, \theta, \phi, t)$. Pour cela, on a (annexe 5) la formule :

$$\vec{u}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{k} \operatorname{rot} \vec{w} - \frac{1}{h} \operatorname{grad} \Delta. \quad (3-34)$$

On trouvera au chapitre 4 (4-42) l'expression générale du déplacement \vec{u} ainsi calculé. Celui-ci est une combinaison linéaire de 3 termes dont les coefficients sont A, B et C :

$$\vec{u}(r, \theta, \phi, t) = A \vec{u}_A(r, \theta, \phi, t) + B \vec{u}_B(r, \theta, \phi, t) + C \vec{u}_C(r, \theta, \phi, t). \quad (3-35)$$

3-5 Conditions limites.

Le système (3-4) des conditions aux limites en $r = a$ s'exprime facilement en fonction des composantes u_r , u_θ et u_ϕ du déplacement et de sa divergence $\Delta(r, \theta, \phi, t)$ sous la forme (annexe 2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{rr} (r, \theta, \phi) = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} (u_r) = 0 \quad (3-36a) \\ \tau_{r\theta} (r, \theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta) - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) = 0 \quad (3-36b) \quad (3-36) \\ \tau_{r\phi} (r, \theta, \phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_r) + \frac{\partial}{\partial r} (u_\phi) - \frac{u_\phi}{r} = 0. \quad (3-36c) \end{array} \right.$$

Après avoir remplacé les composantes de $\vec{u}(r, \theta, \phi, t)$ par leur expression générale calculée plus haut, on établit la condition de compatibilité du système pour que les 3 constantes de la formule générale (3-35) du déplacement ne soient pas toutes nulles.

La condition de compatibilité se factorise en 2 équations qui sont les équations des fréquences des déplacements. Ces équations caractéristiques contiennent des fonctions de Bessel de première espèce dans le cas de la sphère et de fonctions de Hankel de seconde espèce dans le cas de la cavité sphérique.

3-6 Les équations des fréquences et les différents types de vibrations.

La première équation des fréquences s'écrit pour $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
 & B_{n+1/2}(\eta) \left\{ \frac{C_t}{C_l} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} \left(\frac{B_{n+1/2}(\eta)}{B_{n+3/2}(\eta)} - \frac{n+1}{\eta} \right) \right] B_{n+3/2}(\xi) \right. \\
 & \left. + \left[-\frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n+1)}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{2n(n-1)(n+2)}{\eta^2} \right) \frac{B_{n+3/2}(\eta)}{B_{n+1/2}(\eta)} \right] B_{n+1/2}(\xi) \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{3-37}$$

où

$$\eta = \frac{\omega \cdot a}{C_t}, \quad = \frac{\omega \cdot a}{C_l} \quad \text{et } B_i(x) = J_i(x) \quad \text{ou } H_i^{(1)}(x).$$

L'équation (3-37) donne les fréquences des vibrations sphéroïdales $\vec{u}_S(r, \theta, \phi, t)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \vec{u}_S(r, \theta, \phi, t) = A \vec{u}_A(r, \theta, \phi, t) + C \vec{u}_C(r, \theta, \phi, t) \quad (B=0) \end{array} \right\} \tag{3-38}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \operatorname{div} \vec{u}_S(r, \theta, \phi, t) \neq 0 \end{array} \right\} \tag{3-39}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \operatorname{rot} \vec{u}_S(r, \theta, \phi, t) \neq 0 \quad \text{sauf pour } n = 0. \end{array} \right\} \tag{3-40}$$

Si $n = 0$, on est dans le cas des vibrations radiales pures. Le cas $n = 1$ est un cas spécial pour lequel le centre de la sphère se déplace sur un axe passant par les pôles.

La seconde équation des fréquences s'écrit pour $n = 1, 2, \dots$:

$$\boxed{(n-1) B_{n+1/2}(\eta) - B_{n+3/2}(\eta) = 0} \tag{3-41}$$

avec les mêmes notations que (3-37). Elle donne les fréquences des

vibrations "torsionales" dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$1) \vec{u}_T(r, \theta, \phi, t) = B \vec{u}_B(r, \theta, \phi, t) \quad (A=C=0) \quad (3-42)$$

$$2) \operatorname{div} \vec{u}_T(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (3-43)$$

$$3) \operatorname{rot} \vec{u}_T(r, \theta, \phi, t) \neq 0 \quad (3-44)$$

4) la composante radiale $(\vec{u}_T)_r$ est nulle.

Pour $n = 1$ et $m = 0$, on a des rotations pures autour de l'axe passant par les pôles de la sphère.

Il est à signaler que dans la présentation de H. Lamb (15) reprise par A.E.H. Love (17), les vibrations sphéroïdales dites de deuxième classe, sont associées aux harmoniques sphériques ω_n et ϕ_n tandis que les vibrations "torsionales" dites de première classe, sont associées aux harmoniques sphériques χ_n .

Remarquons que suivant la méthode des potentiels de Helmholtz, les vibrations sphéroïdales sont associées aux potentiels scalaires ϕ et χ alors que les vibrations "torsionales" dérivent du potentiel scalaire ψ .

On a ainsi le tableau suivant :

	VIBRATIONS SPHEROIDALES.	VIBRATIONS TORSIONALES.
Méthode des potentiels	\vec{u}_A, \vec{u}_C	\vec{u}_B
Méthode de Lamb	ω_n, ϕ_n	χ_n
Méthode de Sezawa	ϕ, χ	ψ

CHAPITRE 4

VIBRATIONS D'UNE SPHERE ET D'UNE CAVITE SPHERIQUE.

4-1 Introduction

Soit une sphère de rayon a .
 On choisit l'origine des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) au centre de la sphère.

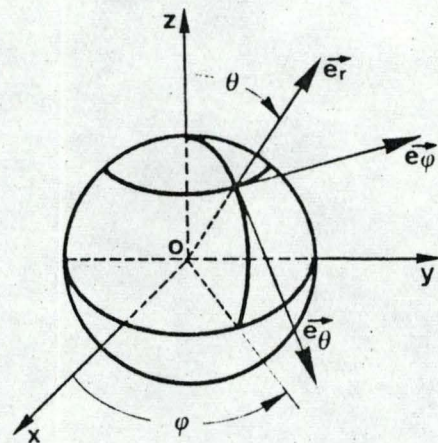


Figure 4-1.

L'équation de Lamé pour un milieu élastique isotrope non soumis à des forces extérieures s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (4-1)$$

où \vec{u} est le vecteur déplacement de composantes u_r, u_θ, u_ϕ
 ρ est la masse spécifique du solide
 λ et μ sont les coefficients de Lamé.

On résout l'équation de Lamé en coordonnées sphériques : Figure 1 (chap 3)

4 - 2 Résultats principaux du chapitre

Dans ce paragraphe les principaux résultats de calcul sont écrits avec la numérotation suivant laquelle ils apparaissent dans la résolution détaillée.

$$\text{On pose } \begin{cases} \text{div } \vec{u} = \Delta \\ \text{rot } \vec{u} = \vec{w} \end{cases} \text{ où } \vec{w} = (w_r, w_\theta, w_\phi).$$

On obtient à partir de Lamé (4-1), 4 équations scalaires, aux dérivées partielles, en Δ , w_r , w_θ et w_ϕ

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \phi^2} \right] \quad (4-5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = \mu \left[\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} w_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial w_r}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \phi^2} \right] \quad (4-10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (w_\phi \sin \theta)}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta} \right] \quad (4-11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial t^2} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w_\phi r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (w_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \phi} \right] \quad (4-12)$$

Solution de ces équations aux dérivées partielles :

$$\Delta = \frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \left[A P_n^m(\cos \theta) + A' Q_n^m(\cos \theta) \right] \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-17)$$

$$w_r = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \left[B P_n^m(\cos \theta) + B' Q_n^m(\cos \theta) \right] \left[G \cos m\phi + H \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-19)$$

$$w_\theta = \left\{ \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \left[C \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + C' \frac{Q_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] + \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right) \right. \\ \left. \left[B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + B' \frac{dQ_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \right\} \left[G \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-31)$$

$$w_\phi = \left\{ \frac{1}{m} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \left[C \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + C' \frac{dQ_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \frac{m}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right) \right. \\ \left. \left[B \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + B' \frac{Q_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \right\} \left[-G \sin m\phi + H \cos m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-38)$$

Le déplacement $\vec{u} = \frac{1}{k^2} \text{rot } \vec{w} - \frac{1}{h^2} \text{grad } \Delta$ s'écrit :

$$u_r = \left\{ \frac{-n(n+1)}{mk^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \left[C P_n^m(\cos \theta) + C' Q_n^m(\cos \theta) \right] - \frac{1}{h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right. \\ \left. \left[A P_n^m(\cos \theta) + A' Q_n^m(\cos \theta) \right] \right\} \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-42)$$

$$u_{\theta} = \left\{ -\frac{1}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \left[A \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) + A' \frac{d}{d\theta} Q_n^m(\cos \theta) \right] - \frac{m}{n(n+1) \sin \theta} \right. \\ \left. \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \left[B P_n^m(\cos \theta) + B' Q_n^m(\cos \theta) \right] - \frac{1}{k^2 m r} \right. \\ \left. \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right) \left[C \frac{dP_n^m}{d\theta} + C' \frac{dQ_n^m}{d\theta} \right] \right\} \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-43)$$

$$u_{\phi} = \left\{ \frac{m}{h^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \left[A P_n^m(\cos \theta) + A' Q_n^m(\cos \theta) \right] - \frac{1}{n(n+1)} \right. \\ \left. \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \left[B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + B' \frac{dQ_n^m}{d\theta} \right] + \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \right. \\ \left. \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right) \left[C P_n^m(\cos \theta) + C' Q_n^m(\cos \theta) \right] \right\} \\ \left[E \sin m\phi - F \cos m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-44)$$

Les conditions limites pour une sphère libre c'est-à-dire sans tension à la surface $r = a$, s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_{\phi}}{\partial r} - \frac{u_{\phi}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad \text{en } r = a$$

La condition de compatibilité de ce système donne :

$$2 \frac{h}{k} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} \left(\frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} - \frac{(n+1)}{\eta} \right) \right] \frac{J_{n+3/2}(\xi)}{J_{n+1/2}(\xi)} +$$

$$\left[-\frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n+1)}{\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{2n(n-1)(n+2)}{\eta^3} \right) \frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} \right] = 0$$

(4-58)

ou bien

$$(n-1) J_{n+1/2}(\eta) - \eta J_{n+3/2}(\eta) = 0$$

(4-63)

où on pose $\eta = ka$, $\xi = ha$

Les racines de l'équation (4-58) donnent les fréquences des oscillations sphéroïdales et celles de l'équation (4-63) les fréquences des oscillations torsionales.

4-3 Transformation de l'équation de Lamé

$$\text{Posons } \text{div } \vec{u} = \Delta \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{u} = \vec{w}$$

(4-1)

L'équation de Lamé (4-1) devient :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta) - \mu \nabla \times (\vec{w})$$

(4-2)

a) Calcul de la divergence de (4-2) :

$$\rho \frac{\partial^2 \nabla \cdot \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla (\Delta) - \mu \nabla \cdot (\nabla \times \vec{w})$$

(4-3)

or $\nabla \cdot \nabla = \text{div grad} = \text{Laplacien} = \nabla^2$ et $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) = \text{div rot} = 0$.

L'équation (4-3) devient :

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\Delta) \quad (4-4)$$

Le Laplacien en coordonnées sphériques (annexe 2) donne :

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \phi^2} \right] \quad (4-5)$$

b) Calcul du rotationnel de (4-2) :

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{u})}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \times \nabla (\Delta) - \mu \nabla \times [\nabla \times (\vec{w})] \quad (4-6)$$

Puisque $\nabla \times \nabla (\Delta) = \text{rot grad d'un scalaire} = 0$, (4-6) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = - \mu \nabla \times [\nabla \times (\vec{w})] \quad (4-7)$$

Calcul de la composante radiale de l'équation (4-7) :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = - \left[\text{rot rot } \vec{w} \right]_r$$

le rot rot \vec{w} (annexe 2) donne :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 (r w_\phi)}{\partial \phi \partial r} \quad (4-8)$$

on exprime le 1er et le 4ème terme du membre de droite en se servant de la relation $\text{div } \vec{w} = 0$ (puisque $\vec{w} = \text{rot } \vec{u}$ et $\text{div rot} = 0$).

La dérivée partielle par rapport à r de $\text{div } \vec{u}$ (annexe 2) donne :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 w_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 (r w_\phi)}{\partial r \partial \phi} = 0 \quad (4-9)$$

Par (4-9), la somme du 1er et du 4ème terme du membre de droite de (4-8) est égale à :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 w_r) = \frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} w_r$$

L'équation (4-8) devient ainsi :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} w_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \phi^2} \quad (4-10)$$

Calcul de la composante angulaire (w_θ) de l'équation (4-7) :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = - \left[\text{rot rot } w \right]_\theta$$

Le rot rot \vec{w} (annexe 3) donne :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = - \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (w_\theta) \right] \right] \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial r} \left[\sin \theta \left[\frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] \right] \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} (w_\phi \sin \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \phi^2} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r w_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta} \quad (4-11)$$

Calcul de la composante angulaire (w_ϕ) de l'équation (4-7) :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial t^2} = - \left[\text{rot rot } w \right]_\phi$$

Le rot rot \vec{w} (annexe 3) donne :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial t^2} = - \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta w_\phi) \right] \right] \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (w_\theta) \right] \right] \right\}$$

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r w_\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} \right) \quad (4-12)$$

4-4 Solution des équations aux dérivées partielles (4-5), (4-9), (4-10) et (4-11) déduites de Lamé.

a) Equation pour $\Delta = \text{div } \vec{u}$ (4-5) :

Par (annexe 1), l'équation (4-5) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\Delta) \quad (4-13)$$

$$\text{séparons le temps : } \Delta(t, r, \theta, \phi) = \Delta(r, \theta, \phi) e^{i\omega t} \quad (4-14)$$

L'équation (4-12) devient :

$$\rho (-\omega^2) \Delta = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\Delta).$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 (\Delta) + h^2 \Delta = 0 \quad \text{où} \quad h^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}$$

c'est une équation de Helmholtz scalaire homogène dont la solution générale (annexe 4) est :

$$\Delta(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A Z_{n+1/2}^{(i)}(hr) + B Z_{n+1/2}^{(i+1)}(hr) \right] \cdot \left[C P_n^m(\cos \theta) + D Q_n^m(\cos \theta) \right] \cdot \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] \quad (4-15)$$

$i = 1$ ou 3 .

Pour la sphère, $Z_{n+1/2}^{(1)}$ et $Z_{n+1/2}^{(2)}$ sont les fonctions de Bessel de 1ère et 2ème espèce : $J_{n+1/2}$ et $Y_{n+1/2}$.

Pour la cavité sphérique, $Z_{n+1/2}^{(3)}$ et $Z_{n+1/2}^{(4)}$ sont les fonctions de Hankel de 1ère et 2ème espèce : $H_{n+1/2}^{(1)}$ et $H_{n+1/2}^{(2)}$.

$P_n^m(\cos \theta)$ et $Q_n^m(\cos \theta)$ sont les fonctions de Legendre associées de 1ère et 2ème espèce.

Remarque :

(4-16)

Pour la sphère, on élimine $Y_{n+1/2}(hr)$ car cette fonction est irrégulière en $r = 0$, ainsi que $Q_n^m(\cos \theta)$ car cette fonction est irrégulière en $\cos \theta = \pm 1$, c'est-à-dire $\theta = 0$ ou π .

Par (4-13), (4-14) et (4-15), on obtient donc :

$$\Delta(t, r, \theta, \phi) = \frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \cdot \left[A P_n^m(\cos \theta) \right] \cdot \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-17)$$

b) Equation radiale pour $\vec{w} = \text{rot } \vec{u}$ (4-10) :

Posons $w_r = \frac{w'_r}{r}$ (dans l'équation (4-10) pour obtenir $\nabla^2 w'_r$ dans le membre de droite. L'équation (4-10) devient ainsi :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w'_r}{\partial t^2} = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial w'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w'_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3} w'_r + \frac{4}{r^2} \frac{\partial w'_r}{\partial r} - \frac{4}{r^3} w'_r + \frac{2}{r^3} w'_r$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w'_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w'_r}{\partial \phi^2}$$

En simplifiant l'équation et en utilisant (annexe 2) on obtient :

$$\rho \frac{\partial^2 w'_r}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 (w'_r)$$

séparons le temps : $w'_r(t, r, \theta, \phi) = w'_r(r, \theta, \phi) e^{i\omega t}$ (4-18)

$$\rho(-\omega^2)w'_r = \mu \nabla^2 (w'_r)$$

$$\nabla^2 (w'_r) + k^2 w'_r = 0 \quad \text{où}$$

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$$

=> $w'_r = r w_r =$ solution de Helmholtz

=> $w_r = \frac{1}{r}$. solution de Helmholtz. On a donc par (4-18) et (annexe 4) :

$$w_r(t, r, \theta, \phi) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \left[B P_n^m(\cos \theta) \right] \left[G \cos m\phi + H \sin m\phi \right] e^{i\omega t} \quad (4-19)$$

c) Equation angulaire pour $\vec{w} = \text{rot } \vec{u}$ (composante w_θ) (4-11):

On exprime le premier terme du membre de droite de (4-11) en fonction de w_θ et w_r en utilisant la relation $\text{div } \vec{w} = 0$. (annexe 2)

En multipliant $\text{div } \vec{w}$ par $\sin^2 \theta$ et en dérivant ensuite cette relation par rapport à θ , on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial (w_\theta \sin \theta)}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w_\phi \sin \theta)}{\partial \theta \partial \phi} = 0$$

Cette relation permet ainsi d'éliminer w_ϕ dans l'équation (4-11) qui s'écrit donc :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial (w_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta}$$

Posons $w = \frac{w'_\theta}{\sin \theta}$ pour faire apparaître $\nabla^2 w'_\theta$ dans le membre de droite et multiplions les 2 membres par $\sin \theta$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 w'_\theta}{\partial t^2} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w'_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (w'_\theta)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial (w'_\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta} \right]$$

||
 $\nabla^2 (w'_\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w'_\theta}{\partial t^2} = \nabla^2 (w'_\theta) + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta}$$

séparons le temps $w'_\theta(t, r, \theta, \phi) = w'(r, \theta, \phi) \cdot e^{i\omega t}$ (4-20)

$$\Rightarrow \nabla^2 (w'_\theta) + k^2 w'_\theta = - \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta}$$

En effectuant toutes les dérivées, on obtient :

$$\nabla^2 (w'_\theta) + k^2 w'_\theta = - \frac{2}{r^2} \left[r \cos \theta \frac{\partial w_r}{\partial r} + 2 \cos \theta w_r + \sin \theta \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] \quad (4-21)$$

Ceci est une équation de Helmholtz non homogène dont la solution est :

w'_θ = solution de Helmholtz homogène + une solution particulière

$$\text{donc } w'_\theta = \frac{w'_\theta}{\sin \theta} = \frac{\text{solution de Helmholtz homogène}}{\sin \theta} + \frac{w'_\theta \text{ particulière}}{\sin \theta} \quad (4-22)$$

Calcul d'une solution particulière de l'équation (4-21)

On remplace dans l'équation (4-21) w_r par sa valeur trouvée en (4-19) que l'on note :

$$w_r(r, \theta, \phi) = f(r) \text{ BP}_n^m(\cos \theta) h(\phi) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(r) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \\ h(\phi) = G \cos m\phi + H \sin m\phi \end{array} \right.$$

Pour faciliter les calculs, on pose $x = \cos \theta$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - x^2 \quad (4-23)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \cos \theta} \cdot \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{Dans (4-21) on a } \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot f(r) h(\phi) \left(B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right)$$

L'équation (4-21) devient :

$$\boxed{\nabla^2(w'_\theta) + k^2 w'_\theta = -\frac{2}{r^2} \left[r \cdot x h(\phi) B P_n^m(x) \frac{df(r)}{dr} + 2x h(\phi) f(r) B P_n^m(x) + f(r) h(\phi) (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]} \quad (4-24)$$

$$\text{Posons } w'_\theta \text{ particulier} = R(r) (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} h(\phi) \quad (4-25)$$

La dépendance en ϕ de w'_θ est $h(\phi)$ car la dépendance en ϕ doit être la même dans les 2 membres de l'équation (4-24). La dépendance particulière en x de w'_θ permet de se servir de l'équation de Legendre associée dans la suite des calculs.

Par le changement de variable (4-23), le laplacien (annexe 2) devient :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2 (1-x^2)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla^2 (w'_\theta) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} h(\phi) \\ &+ \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \left[(x^2-1) \frac{d}{dx} (BP_n^m(x)) \right] \right] \cdot h(\phi) \\ &+ \frac{1}{r^2 (1-x^2)} R(r) \cdot (-m^2) h(\phi) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} (x^2-1) \end{aligned}$$

(4-26)

Le 2ème terme du membre de droite de (4-26) s'écrit :

$$\frac{R(r)}{r^2} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \left[2x \frac{d}{dx} (BP_n^m(x)) + (x^2-1) \frac{d^2}{dx^2} (BP_n^m(x)) \right] \right]$$

Par l'équation de Legendre associée (annexe 1), ce terme devient :

$$\frac{R(r)}{r^2} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] BP_n^m(x) \right] \quad (4-27)$$

L'équation (4-24) devient donc en utilisant (4-26) et (4-27) et en simplifiant par $h(\phi)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \cdot (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \\
& + \frac{R(r)}{r^2} \left[-2x n(n+1) B P_n^m(x) + (1-x^2) n(n+1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} - m^2 B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right] \\
& + \frac{m^2 R(r)}{r^2} B \frac{dP_n^m(x)}{dx} + k^2 R(r) (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \\
& = - \frac{2}{r^2} \left[rx B P_n^m(x) \frac{df(r)}{dr} + 2x \cdot f(r) B P_n^m(x) + f(r) (x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]
\end{aligned}$$

Identifions dans cette équation, les coefficients de $x B P_n^m(x)$ et de $(x^2 - 1) B \frac{dP_n^m(x)}{dx}$

On obtient ainsi 2 équations :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n(n+1)R}{r^2} + k^2 R = \frac{-2f}{r^2} \right. \quad (4-28)$$

$$\left. + \frac{2n(n+1)R}{r^2} = + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{4f}{r^2} \right] \quad (4-29)$$

L'équation (4-29) donne :

$$R = \frac{1}{n(n+1)} r \frac{df}{dr} + 2f$$

$$\text{or } f(r) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}}$$

$$R = \frac{1}{n(n+1)r} \left[\frac{1}{2} r^{-1/2} J_{n+1/2}(kr) + r^{+1/2} \frac{d}{dr} J_{n+1/2}(kr) \right]$$

donc
$$R(r) = \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left[r^{1/2} J_{n+1/2}(kr) \right] \quad (4-30)$$

et ce R vérifie aussi l'équation (4-28).

Par (4-25), (4-30) et le changement de variable $x = \cos \theta$, on a

$$w'_\theta \text{ particulier} = \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left[r^{1/2} J_{n+1/2}(kr) \right] \sin \theta B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \\ \left[G \cos m\phi + H \sin m\phi \right]$$

Par (4-22) on obtient ainsi :

$$w_\theta(t, r, \theta, \phi) = \left\{ \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} C \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{1}{n(n+1)r} \right. \\ \left. \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right\} \cdot (G \cos m\phi + H \sin m\phi) e^{i\omega t} \quad (4-31)$$

d) Equation angulaire pour $\vec{w} = \text{rot } \vec{u}$ (composante w_ϕ) :

Pour calculer w_ϕ , on se sert de l'équation (4-11) qui s'écrit :

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (w_\phi \sin \theta)}{\partial \phi \partial \theta} = - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial r \partial \theta}$$

Par (4-19), (4-31) et la relation $k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (w_\phi \sin \theta)}{\partial \phi \partial \theta} = \\
& \left\{ -\frac{k^2}{\omega^2} (i\omega)^2 \left[\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} C \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left[\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right] B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \right. \\
& + \frac{1}{r} \left[\frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot C \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{1}{n(n+1)} \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \cdot \right. \\
& \left. \left. \left. B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \right. \right. \\
& - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} C \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) B \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \\
& \left. - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right) \cdot B \frac{dP_n^m}{d\theta} \right\} (G \cos m\phi + H \sin m\phi) e^{i\omega t}
\end{aligned}
\tag{4-32}$$

La dépendance en ϕ et en t doit être la même dans le membre de gauche et dans le membre de droite, c'est pourquoi on doit avoir :

$$w_\phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{m} (G \sin m\phi - H \cos m\phi) w_\theta(r, \theta) e^{i\omega t} \tag{4-33}$$

Ainsi dans les 2 membres apparaît le même terme en ϕ et en t :

$$(G \cos m\phi + H \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

qui se simplifie.

Par le changement de variable (4-23) , l'équation (4-32) devient donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1) \sqrt{1-x^2}}{r^2 (1-x^2)} \frac{\partial}{\partial x} (w_\phi(r, x) \sqrt{1-x^2}) = \\
& k^2 \left\{ \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{P_n^m(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(-1)}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left[\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right] B \frac{dP_n^m}{dx} \sqrt{1-x^2} \right\} \\
& + \frac{1}{r} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} \left[\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right] C \frac{P_n^m(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(-1)}{n(n+1)} \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. B \frac{dP_n^m}{dx} \sqrt{1-x^2} \right\} \\
& - \frac{m^2}{r^2 (1-x^2)} \left\{ \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{P_n^m(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(-1)}{n(n+1)r} \frac{d}{dr} \left[\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. B \frac{dP_n^m}{dx} \sqrt{1-x^2} \right\} \\
& - \frac{(-1)}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] B \frac{dP_n^m}{dx} \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Multiplions les 2 membres par $\sqrt{1-x^2} r^2$ et mettons les fonctions de x en évidence :

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{dx} (w_\phi \sqrt{1-x^2}) = \\
& C P_n^m(x) \left[k^2 J_{n+1/2}(kr) r^{3/2} + r \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \\
& + B (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \left[\frac{-k^2 r}{n(n+1)} \frac{d}{dr} [\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)] - \frac{r}{n(n+1)} \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + r \frac{d}{dr} \left[\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] \right] \\
& + C \frac{P_n^m(x)}{(1-x^2)} \left[-m^2 \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right] \\
& + B \frac{dP_n^m}{dx} \left[\frac{m^2}{r n(n+1)} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right]
\end{aligned}$$

(4-34)

Le terme $k^2 r^{3/2} J_{n+1/2}(kr) + r \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr))$

$$= \left[k^2 r^2 j_n(kr) + r \frac{d^2}{dr^2} (r j_n(kr)) \right] \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \quad \text{où } j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$$

$$= \left[k^2 r^2 j_n(kr) + 2r \frac{d}{dr} j_n(kr) + r^2 \frac{d^2}{dr^2} j_n(kr) \right] \sqrt{\frac{2k}{\pi}}$$

Par l'équation de Bessel sphérique (annexe 1), ce terme devient :

$$\begin{aligned}
 &= n(n+1) j_n(kr) \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \\
 &= n(n+1) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}
 \end{aligned}$$

La somme du premier et du troisième terme du membre de droite de (4-34) s'écrit donc :

$$\left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] C P_n^m(x) \cdot \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \quad (4-35)$$

Par l'équation de Legendre associée (annexe 1), le terme (4-35) est égal à :

$$- \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} (C P_n^m(x)) - 2x \frac{d}{dx} (C P_n^m(x)) \right] \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}$$

ou

$$- \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} (C P_n^m(x)) \right] \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \quad (4-36)$$

Le deuxième terme du membre de droite de (4-34) est nul (annexe 1) (4-37)

Par (4-36) et (4-37), l'équation (4-34) devient :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 - \frac{d}{dx} (w_\phi \sqrt{1-x^2}) &= \frac{-J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} (C P_n^m(x)) \right] \\
 &+ \frac{m^2}{rn(n+1)} \frac{d}{dr} \left[\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr) \right] B \frac{dP_n^m}{dx}
 \end{aligned}
 }$$

on intègre par rapport à x :

$$\begin{aligned}
 -w_{\phi}(r, \theta) \sqrt{1-x^2} &= \frac{-J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} (1-x^2) \frac{d}{dx} (C P_n^m(x)) \\
 &+ \frac{m^2}{r n(n+1)} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) B P_n^m(x)
 \end{aligned}$$

Le changement de variable $x = \cos \theta$ donne :

$$\begin{aligned}
 -w_{\phi}(r, \theta) \sin \theta &= \frac{-J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \sin^2 \theta C \frac{dP_n^m}{d\theta} \left(-\frac{1}{\sin \theta}\right) \\
 &+ \frac{m^2}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) B P_n^m(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

donc

$$w_{\phi}(r, \theta) = \frac{-J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} C \frac{dP_n^m}{d\theta} - \frac{m^2}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)).$$

Par (4-33) w_{ϕ} s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
 w_{\phi}(t, r, \theta, \phi) &= \left[\frac{1}{m} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} C \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{m}{n(n+1)r} \right. \\
 &\left. \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) B \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] (-G \sin m\phi + H \cos m\phi) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

4-5 Calcul du déplacement \vec{u}

Δ et \vec{w} sont calculés en (4-17), (4-19), (4-31) et (4-38).

Dans le chapitre 3, on a montré que le déplacement \vec{u} s'écrit en fonction de Δ et \vec{w} .

$$\vec{u} = \frac{1}{k^2} \text{rot } \vec{w} - \frac{1}{h^2} \text{grad } \Delta$$

a) Calcul du déplacement radial u_r :

$$u_r = \frac{1}{k^2} [\text{rot } w]_r - \frac{1}{h^2} [\text{grad } \Delta]_r$$

L'expression du rot et du grad en coordonnées sphériques (annexe 2), donne :

$$u_r = \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) - \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial \Delta}{\partial r}$$

En remplaçant Δ, w_θ et w_ϕ par (4-17), (4-31) et (4-38), on obtient :

$$u_r = \left\{ \frac{1}{k_m^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d}{d\theta} (C P_n^m)) + \frac{m}{n(n+1)k^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (B P_n^m) \right\} (-G \sin m\phi + H \cos m\phi) e^{i\omega t}$$

$$+ \left\{ -\frac{m}{k^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} C \frac{P_n^m}{\sin^2 \theta} - \frac{m}{k^2 n(n+1)r^2} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \frac{B}{\sin \theta} \frac{d P_n^m}{d\theta} \right\} (-G \sin m\theta + H \cos m\phi) e^{i\omega t}$$

$$- \frac{1}{h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{1/2}} \right) \cdot A P_n^m(\cos \theta) (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

Les termes contenant la constante B s'annulent.

Pour que les dépendances en ϕ soient toutes les mêmes dans le membre de droite, on pose $G = -F$ et $H = E$ (4-40)

En regroupant les termes, (4-39) devient :

$$u_r = \left\{ \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{m} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} (C P_n^m) \right] - \frac{m C P_n^m}{\sin^2 \theta} \right] \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} - \frac{A P_n^m(\cos \theta)}{h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right\} (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

(4-41)

En simplifiant le premier terme du membre de droite par l'équation de Legendre associée (annexe 1), (4-41) s'écrit :

$$u_r = \left\{ - \frac{n(n+1)}{m k^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} C P_n^m(\cos \theta) - \frac{1}{h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{1/2}} \right) \right\} A P_n^m(\cos \theta) [E \cos m\phi + F \sin m\phi] e^{i\omega t}$$

(4-42)

b) Calcul du déplacement angulaire u_θ :

$$u_\theta = \frac{1}{k^2} [\text{rot } w]_\theta - \frac{1}{h^2} [\text{grad } \Delta]_\theta$$

Par (annexe 2), u_θ s'écrit :

$$u_{\theta} = \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_{\phi}) - \frac{1}{h^2 r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$

En remplaçant Δ , w_r , w_{ϕ} par (4-17), (4-19), (4-38) et par (4-40), on obtient :

$$u_{\theta} = \frac{m}{k^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} \cdot B P_n^m \cdot (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

$$+ \left\{ - \frac{1}{k^2 m r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot C \frac{dP_n^m}{d\theta} - \frac{m}{n(n+1)k^2 r \sin \theta} \right.$$

$$\left. \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot B P_n^m \right\} \cdot (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

$$- \frac{1}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} A \frac{d}{d\theta} P_n^m \cdot (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

regroupons les termes :

$$u_{\theta} = \left\{ - \frac{1}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} A \frac{d}{d\theta} P_n^m - \frac{m}{\sin \theta k^2} \right.$$

$$\left[- \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} + \frac{1}{n(n+1)r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right]$$

$$\cdot B P_n^m - \frac{1}{k^2 m r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot C \frac{dP_n^m}{d\theta} \left. \right\} \cdot$$

$$(E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

Le deuxième terme du membre de droite peut se simplifier (annexe 1) u_θ s'écrit donc finalement :

$$u_\theta = \left\{ -\frac{1}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \cdot A \frac{d}{d\theta} P_n^m - \frac{m}{m(n+1) \sin\theta} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{1/2}} \cdot B P_n^m - \frac{1}{k^2 m r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot C \frac{dP_n^m}{d\theta} \right\} (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$$

(4-43)

c) Calcul du déplacement angulaire u_ϕ

$$u_\phi = \frac{1}{k} (\text{rot } w)_\phi - \frac{1}{h^2} (\text{grad } \Delta)_\phi$$

Le rot et le grad en coordonnées sphériques (annexe 2) donnent :

$$u_\phi = \frac{1}{k r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{h^2 r \sin \theta} \frac{\partial \Delta}{\partial \phi}$$

En remplaçant Δ , w_r , w_θ par (4-17), (4-19), (4-31) et par (4-40), on obtient :

$$\begin{aligned}
 u_{\phi} = & \left\{ \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot CP_n^m + \frac{1}{k^2 n(n+1)r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right. \\
 & \left. \cdot \frac{B dP_n^m}{d\theta} \right\} (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t} \\
 & - \frac{1}{k^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} \cdot B \frac{dP_n^m}{d\theta} (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t} \\
 & + \frac{m}{h^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \cdot AP_n^m (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned}
 u_{\phi} = & \left\{ \frac{m}{h^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \cdot AP_n^m + \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{n(n+1)r} \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) - \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} \right] \cdot B \frac{dP_n^m}{d\theta} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k^2 r \sin \theta} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot CP_n^m \right\} \cdot \\
 & (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite peut se simplifier (annexe 1). u_ϕ s'écrit finalement :

$$u_\phi = \left\{ \frac{m}{h^2 \sin\theta} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} A P_n^m - \frac{1}{n(n+1)} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} B \frac{dP_n^m}{d\theta} + \frac{1}{k^2 r \sin\theta} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \cdot C P_n^m \right\} (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t}$$

(4-44)

4-6 Conditions limites pour une sphère libre :

Puisque la sphère est libre, la tension à la surface $r = a$ est nulle.

Les 3 composantes du tenseur des tensions : τ_{rr} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\phi}$ sont donc nulles en $r = a$ (cfr chapitre 3).

τ_{rr} , $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{r\phi}$ en coordonnées sphériques sont donnés en (annexe 2)

a) Calculs de τ_{rr} :

$$\tau_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = a \quad (4-45)$$

En remplaçant Δ et u_r par (4-17) et (4-42), (4-45) devient :

$$\lambda \frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} A P_n^m(\cos\theta) \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} + \left[- \frac{2\mu n(n+1)}{m k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right) C P_n^m(\cos\theta) - \frac{2\mu}{h^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) A P_n^m(\cos\theta) \right] \cdot \left[E \cos m\phi + F \sin m\phi \right] e^{i\omega t} = 0$$

La simplification par $[E \cos m\phi + F \sin m\phi] e^{i\omega t}$ donne :

$$\left\{ \left[\frac{\lambda J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} - \frac{2\mu}{h^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right] A - \left[\frac{2\mu}{m} \frac{n(n+1)}{k^2} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right) \right] C \right\} P_n^m(\cos \theta) = 0 \quad (4-46)$$

en $r = a$

b) Calcul de $\tau_{r\theta}$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en } r = a$$

La substitution de u_r et u_θ par (4-42) et (4-43) et la simplification par $(E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}$ donne :

$$\left[-\frac{A}{h} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \right) - \frac{C}{mk^2} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{C}{mk^2} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \cdot \\ \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} + \left[\frac{m B}{n(n+1) \sin \theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) \right] P_n^m(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{A}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} + \frac{C}{mk^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\
& - \left[\frac{mB}{n(n+1)\sin\theta} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \\
& + \left[-\frac{A}{rh^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) - \frac{n(n+1)C}{mk^2 r} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right) \right] \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = 0
\end{aligned}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ et $\frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta}$ mis en évidence, le coefficient de A simplifié par (annexe 1) et l'équation multipliée par (-1) donne :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{h^2} \left[+ r \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right] A + \frac{1}{mk^2} \right. \\
& \left[n(n+1) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] C \right\} \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \quad (4-47) \\
& + \frac{mB}{n(n+1)\sin\theta} \left[-\frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) + \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] P_n^m(\cos\theta) = 0 \quad \text{en } r=a
\end{aligned}$$

c) Calcul de $\tau_{r\theta}$

$$\tau_{r\phi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{u_r}{\partial\phi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} = 0.$$

La substitution de u_r et u_ϕ par (4-42) et (4-44) et la simplification par $(E \sin m\phi - F \cos m\phi)e^{i\omega t}$, donne :

$$\begin{aligned}
 & m \left[\frac{A}{r \sin \theta h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) + \frac{n(n+1)C}{mk^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} \right] P_n^m(\cos \theta) \\
 & + \left[\frac{mA}{h^2 \sin \theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \right) + \frac{C}{k^2 r \sin \theta} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right. \\
 & \left. - \frac{C}{r^2 k^2 \sin \theta} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) P_n^m(\cos \theta) \right] - \frac{B}{n(n+1)} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) \\
 & + \left[\frac{-mA}{h^2 \sin \theta} \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} - \frac{C}{k^2 r^2 \sin \theta} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} \\
 & P_n^m(\cos \theta) + \frac{B}{n(n+1)} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta} = 0
 \end{aligned}$$

Mettons $P_n^m(\cos \theta)$ et $\frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d \theta}$ en évidence et simplifions le coefficient de A (annexe I).

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{mA}{h^2 \sin\theta} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right] \\ & + \frac{C}{k^2 \sin\theta} \left[n(n+1) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} j_{n+1/2}(kr)) \right. \\ & \left. - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] P_n^m(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \\
 + \frac{B}{n(n+1)} \left[- \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) + \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = 0$$

en $r = a$ (4-48)

Posons :

$$\alpha = \lambda \frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} - \frac{2\mu}{h^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \quad \text{en } r = a \quad (4-49)$$

$$\beta = \frac{-2\mu}{m} \frac{n(n+1)}{k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right) \quad \text{en } r = a$$

$$\gamma = \frac{1}{h^2} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right) \right] \quad \text{en } r = a$$

$$\delta = \frac{1}{mk^2} \left[n(n+1) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \quad \text{en } r = a$$

$$\epsilon = \frac{m}{n(n+1)\sin\theta} \left[-\frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) + \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] \quad \text{en } r = a$$

Les conditions limites (4-46), (4-47) et (4-48) multipliée par $\frac{\sin\theta}{m}$ donnent par (4-49) les 3 équations :

$$\left[\begin{array}{l} (\alpha A + \beta C) P_n^m(\cos\theta) = 0 \\ (\gamma A + \delta C) \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + \epsilon B P_n^m(\cos\theta) = 0 \\ (\gamma A + \delta C) P_n^m(\cos\theta) + \frac{\epsilon \sin^2\theta}{m^2} B \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4-50)$$

Pour que le système (4-50) soit compatible en A, B, C, il faut et il suffit que le déterminant soit égal à zéro :

$$\text{dét} \left(\begin{array}{ccc} \alpha P_n^m(\cos\theta) & 0 & \beta P_n^m(\cos\theta) \\ \gamma \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} & \epsilon P_n^m(\cos\theta) & \delta \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\ \gamma P_n^m(\cos\theta) & \epsilon \frac{\sin^2\theta}{m^2} \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} & \delta P_n^m(\cos\theta) \end{array} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon P_n^m \left(\alpha \delta (P_n^m)^2 - \gamma \beta (P_n^m)^2 \right) - \frac{\sin^2 \theta}{m^2} \varepsilon \frac{dP_n^m}{d\theta} \left(\alpha P_n^m \delta \frac{dP_n^m}{d\theta} - \gamma \frac{dP_n^m}{d\theta} \beta P_n^m \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_n^m)^3 \left[\varepsilon (\alpha \delta - \gamma \beta) \right] - P_n^m \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \right)^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{m^2} \varepsilon (\alpha \delta - \gamma \beta) \right] = 0$$

Simplifions par $P_n^m (\cos \theta)$

$$\Leftrightarrow \left[\left(P_n^m (\cos \theta) \right)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{m^2} \left(\frac{d P_n^m (\cos \theta)}{d \theta} \right)^2 \right] \left[\varepsilon (\alpha \delta - \gamma \beta) \right] = 0$$

Le premier facteur est différent de zéro, c'est-à-dire

$$\frac{d P_n^m (\cos \theta)}{d \theta} \neq \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m (\cos \theta)$$

car la dérivée d'une fonction de Legendre s'écrit :

$$\frac{d P_n^m (\cos \theta)}{d \theta} = n \cotg \theta P_n^m (\cos \theta) - \frac{n+m}{\sin \theta} P_{n-1}^m (\cos \theta).$$

Le déterminant s'annule donc pour :

$$\varepsilon = 0 \quad (4-51)$$

$$\text{ou} \quad \alpha \delta - \gamma \beta = 0 \quad (4-52)$$

ce "ou" est exclusif, car ils ne pourraient s'annuler en même temps.

Si l'on prend $\varepsilon = 0$ comme condition de compatibilité, le système des conditions limites (4-50) donne $A = C = 0$.

Par contre, si l'on prend $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$, on obtient $B = 0$.

En effectuant toutes les dérivées, α , β , γ , δ et ε , donnés en (4-49), s'écrivent :

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m}{n(n+1)\sin\theta} \left[(-n+1) \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{3/2}} + \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{1/2}} \right] \\ \alpha &= \frac{-2n(n-1)\mu}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(ha)}{a^{5/2}} - \frac{4\mu}{h} \frac{J_{n+3/2}(ha)}{a^{3/2}} + (\lambda+2\mu) \frac{J_{n+1/2}(ha)}{a^{1/2}} \\ \delta &= \frac{1}{m} \left[\frac{2(n^2-1)}{k^2} \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{5/2}} + \frac{2}{k} \frac{J_{n+3/2}(ka)}{a^{3/2}} - \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{1/2}} \right] \\ \gamma &= \frac{2(n-1)}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(ha)}{a^{5/2}} - \frac{2}{h} \frac{J_{n+3/2}(ha)}{a^{3/2}} \\ \beta &= \frac{1}{m} \left[\frac{-2n(n+1)(n-1)\mu}{k^2} \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{5/2}} + \frac{2n(n+1)\mu}{k} \frac{J_{n+3/2}(ka)}{a^{3/2}} \right] \end{aligned} \right. \quad (4-53)$$

Calcul de l'équation 4-52 :

$$\begin{array}{l}
 \text{Divisons } \alpha \text{ par } \frac{2\mu}{a^{1/2}} J_{n+1/2}(ha) \\
 \delta \text{ par } \frac{1}{a^{1/2}} J_{n+1/2}(ka) \\
 \gamma \text{ par } \frac{2}{a^{1/2}} J_{n+1/2}(ha) \\
 \beta \text{ par } \frac{\mu}{a^{1/2}} J_{n+1/2}(ka) .
 \end{array} \quad (4-54)$$

$J_{n+1/2}(ha)$ et $J_{n+1/2}(ka)$ ne peuvent être égaux à zéro (voir remarque).

$$\text{Posons } M = \frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} \quad \text{et } N = \frac{J_{n+3/2}(\xi)}{J_{n+1/2}(\xi)} \quad \text{où } \eta = ka \text{ et } \xi = ha . \quad (4-55)$$

Par les étapes de calcul (4-54) et (4-55), l'équation (4-52) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{m} \left(-\frac{n(n-1)}{h^2 a^2} - \frac{2}{ha} N + \frac{(\lambda+2\mu)}{2\mu} \right) \left(\frac{2(n^2-1)}{k^2 a^2} + \frac{2}{ka} M - 1 \right) \\
 & - \frac{1}{m} \left(\frac{(n-1)}{h^2 a^2} - \frac{1}{ha} N \right) \left(\frac{-2n(n+1)(n-1)}{k^2 a^2} + \frac{2n(n+1)}{ka} M \right) = 0 \quad (4-56)
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{\eta}{k} \quad \text{par (4-55)}$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{k^2}{h^2} \quad \text{puisque } h^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \quad \text{et } k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$$

L'équation (4-56) s'écrit donc :

$$\left(\frac{-n(n-1)k^2}{h^2 \eta^2} - \frac{2k}{h\eta} N + \frac{k^2}{2h^2} \right) \left(\frac{2(n^2-1)k^2}{k^2 \eta^2} + \frac{2}{\eta} M - 1 \right) - \left(\frac{(n-1)k^2}{h^2 \eta^2} - \frac{k}{h\eta} N \right) \left(\frac{-2n(n+1)(n-1)}{\eta^2} + \frac{2n(n+1)}{\eta} M \right) = 0 \quad (4-57)$$

Après l'avoir multipliée par $\frac{h^2}{k^2}$, l'équation (4-57) devient :

$$\frac{2h(n-1)(n+2)}{k \eta^2} MN - \frac{2h(n-1)(n+2)(n+1)}{k \eta^3} N - \frac{2n(n-1)(n+2)M}{\eta^3} + \frac{2h}{k\eta} N + \frac{M}{\eta} + \frac{(n-1)(2n+1)}{\eta^2} - \frac{1}{2} = 0$$

Par (4-55), on a finalement :

$$\boxed{2\frac{h}{k} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} \left(\frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} - \frac{n+1}{\eta} \right) \frac{J_{n+3/2}(\xi)}{J_{n+1/2}(\xi)} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n+1)}{\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{2n(n-1)(n+2)}{\eta^3} \right) \frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} \right] = 0} \right.}$$

(4-58)

C'est l'équation des fréquences des oscillations sphéroïdales.

Remarque

Remultiplions l'équation (4-58) par $J_{n+1/2}(\eta) \cdot J_{n+1/2}(\xi)$ et montrons que ces deux facteurs ne peuvent pas être nuls.

- 1) Si $J_{n+1/2}(\eta) = 0$ et $J_{n+1/2}(\xi) \neq 0$, l'équation (4-58) devient après simplification par $J_{n+3/2}(\eta)$:

$$2 \frac{h}{k} \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} J_{n+3/2}(\xi) + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{\eta^3} \right) J_{n+1/2}(\xi) = 0 \quad (4-59)$$

Cette équation est incompatible avec $J_{n+1/2}(\eta) = 0$ car elle impose des valeurs de η différentes. Vérifions le pour $n = 0$ et $n = 1$.

Pour $n = 0$, l'équation (4-59) s'écrit :

$$\frac{J_{3/2}(\xi)}{J_{1/2}(\xi)} = \frac{\eta k}{4h} \quad (4-60)$$

or

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \text{ et } J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad (4-61)$$

$$\Rightarrow \frac{J_{3/2}(x)}{J_{1/2}(x)} = \frac{1}{x} - \cotg x$$

Par (4-61) et le remplacement de ξ par ha et de k/h par C_ℓ/C_t , l'équation (4-60) s'écrit :

$$\frac{\text{tg}(ha)}{ha} = \frac{1}{1 - (ha C_\ell / 2C_t)^2} \quad (4-62)$$

Les racines non triviales de cette équation (graphique 2-2) sont incompatibles avec celles de l'équation $J_{1/2}(\eta) = 0$ qui sont (4-61) :

$$\eta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 1$, l'équation (4-59) s'écrit :

$$\frac{1}{\eta} J_{3/2}(\xi) = 0, \quad \xi = \frac{h}{k} \eta$$

Les racines non triviales de cette équation, qui sont (4-61) :

$\text{tg} \left(\frac{h}{k} \eta \right) = \frac{h}{k} \eta$ sont incompatibles avec les racines de $J_{3/2}(\eta) = 0$:

$$\text{tg}(\eta) = \eta.$$

2) Si $J_{n+1/2}(\xi) = 0$ et $J_{n+1/2}(\eta) \neq 0$, l'équation (4-58) devient après simplification par $J_{n+1/2}(\eta) \cdot J_{n+3/2}(\xi)$:

$$\frac{2h}{k} \frac{1}{\eta} + \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} \left(\frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} - \frac{(n+1)}{\eta} \right) = 0$$

Pour $n = 0$, on obtient par (4-61) : $\text{tg} \eta = -\frac{\eta h}{k}$ dont les racines sont incompatibles avec celles de l'équation $J_{1/2}(\xi) = 0$.

L'équation (4-51) s'écrit :

$$\frac{m}{n(n+1) \sin \theta} \left((-n+1) \frac{J_{n+1/2}(ka)}{a^{3/2}} + k \frac{J_{n+3/2}(ka)}{a^{1/2}} \right) = 0$$

Multiplions par $a^{3/2}$ et remplaçons ka par η :

$$\frac{m}{n(n+1) \sin \theta} \left((n-1) J_{n+1/2}(\eta) - \eta J_{n+3/2}(\eta) \right) = 0 \quad (4-63)$$

C'est l'équation des fréquences des oscillations torsionales.

4-7. Cas d'une cavité sphérique :

On choisit l'origine des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) au centre de la cavité sphérique.

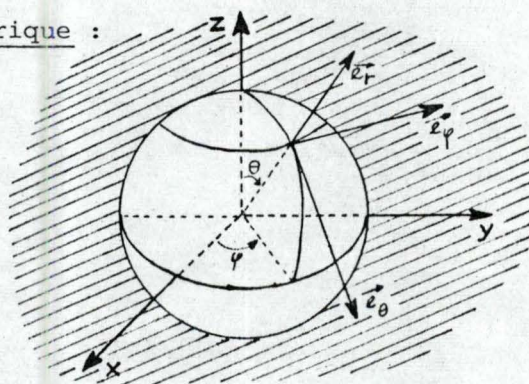


Figure 4-2.

Le problème d'une cavité sphérique dans un solide infini élastique se traite de la même façon que la sphère.

La seule différence réside dans le remplacement des fonctions de Bessel de 1ère et 2ème espèces par les fonctions de Hankel de 1ère et 2ème espèces $H_{n+1/2}^{(1)}$ et $H_{n+1/2}^{(2)}$ (voir équation 4-15).

Remarque

Le choix de la fonction de Hankel de 1ère ou de 2ème espèce donne au déplacement une forme d'onde rentrante ou sortante. En effet :

$$H_{n+1/2}^i(kr) = \sqrt{\frac{2kr}{\pi}} h_n^i(kr)$$

Lorsque kr tend vers l'infini, on a :

$$j_n(kr) \text{ tend vers } \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$y_n(kr) \text{ tend vers } -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\text{donc } h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + i y_n(kr) \longrightarrow \frac{i^{(-n)}}{ikr} e^{ikr}$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - i y_n(kr) \longrightarrow \frac{-i^n}{ikr} e^{-ikr}$$

$$\Rightarrow H_{n+1/2}^{(1)}(kr) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i^{(-n)}}{\sqrt{kr}} e^{ikr} \quad \text{quand } kr \rightarrow \infty$$

$$H_{n+1/2}^{(2)}(kr) \longrightarrow -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i^n}{\sqrt{kr}} e^{-ikr} \quad \text{quand } kr \rightarrow \infty$$

Si l'on choisit $H_{n+1/2}^{(1)}$, on obtient le facteur $e^{i(kr + \omega t)}$ qui donne au déplacement u la forme d'une onde rentrante. Par contre si l'on choisit $H_{n+1/2}^{(2)}$, le facteur $e^{i(-kr + \omega t)}$ donne à \vec{u} une forme d'onde sortante.

Pour la cavité, on choisit des déplacements sous forme d'onde sortante.

Les conditions limites pour une cavité libre sont les mêmes que celles de la sphère libre. En effet, la tension nulle à la surface $r = a$, s'écrit :

$$\mathbf{T} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } r = a \quad \text{où } \vec{n} = (-1, 0, 0)$$

$$\text{c'est-à-dire } \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{r\phi} = 0 \quad \text{en } r = a.$$

Le déplacement \vec{u} et l'équation des fréquences de la cavité sphérique s'obtiennent donc en remplaçant J_n par $H_n^{(2)}$ dans les expressions (4-42), (4-44), (4-58) et (4-59) obtenues pour la sphère.

4-8. Cas particulier $n = 0$

L'équation des fréquences des modes sphéroïdaux pour une sphère (4-58) donne, lorsque $n = 0$, l'équation des fréquences des vibrations radiales calculée au chapitre 2.

Soit $n = 0$, par (4-61) l'équation (4-58) s'écrit :

$$\frac{2h}{k} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{2 \cotg \eta}{\eta^2} \right] \left[\frac{\beta}{h\eta} - \cotg \left(\frac{h\eta}{k} \right) \right] + \left[-\frac{1}{2} - \frac{\cotg \eta}{\eta} \right] = 0$$

ou

$$\frac{h}{k\eta} \left[\frac{4 \cotg \eta}{\eta} + 2 \right] \left[\frac{k}{h\eta} - \cotg \left(\frac{h\eta}{k} \right) \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{4 \cotg \eta}{\eta} + 2 \right] = 0$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{4 \cotg \eta}{\eta} + 2 \right] \left[\frac{1}{\eta^2} - \frac{h}{k\eta} \cotg \left(\frac{h\eta}{k} \right) - \frac{1}{4} \right] = 0$$

le deuxième facteur de cette équation donne, en remplaçant η par ka et h/k par C_t/C_ℓ , l'équation des fréquences du cas radial (2-11).

Le premier facteur doit être écarté car ses racines éliminent dans (4-53) les termes δ et γ qui ont m en dénominateur et qui ne peuvent exister lorsque $n = 0$ car $-n \leq m \leq n \Rightarrow m = 0$.

Le même raisonnement peut se faire pour le cas du trou.

Soit $n = 0$, par la substitution de J_n par $H_n^{(2)}$ et par (4-61),

l'équation (4-58) s'écrit :

$$\frac{2h}{k} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{2i}{\eta^2} \right] \left[\frac{k}{h\eta} - i \right] + \left[-\frac{1}{2} - \frac{i}{\eta} \right] = 0$$

$$\frac{h}{k\eta} \left[2 + \frac{4i}{\eta} \right] \left[\frac{k}{h\eta} - i \right] - \frac{1}{4} \left[2 + \frac{4i}{\eta} \right] = 0$$

$$\left[2 + \frac{4i}{\eta} \right] \left[\frac{1}{\eta^2} - \frac{hi}{k\eta} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

Le deuxième facteur de cette équation donne l'équation des fréquences d'une cavité dans le cas radial (2-12).

Le premier facteur doit être écarté, car sa racine $\eta = \frac{\omega a}{C_t} = -2i$ donne une pulsation imaginaire, ce qui supprime le caractère périodique du facteur $e^{i\omega t}$.

CHAPITRE 5

LES ONDES DE SURFACE

5-1 Introduction

L'observation des secousses liées aux tremblements de terre met en évidence l'existence de 3 vitesses de propagation pour les ondes sismiques. Les 2 premières vitesses, soient C_ℓ et C_t sont celles d'ondes peu destructrices. Ce sont les ondes longitudinales et transversales auxquelles sont associés des déplacements dirigés suivant la direction de propagation dans le cas des ondes longitudinales et contenus dans le plan normal à la direction de propagation dans le cas des ondes transversales. La troisième vitesse, soit C_R , inférieure aux deux premières (en fait $C_R < C_t < C_\ell$), est celle des ondes de surface.

Les ondes de surface possèdent les caractéristiques suivantes :

- 1) Le déplacement associé est de type elliptique (comme pour les vagues du milieu marin), et il est contenu dans le plan normal à la surface et dirigé suivant la direction de propagation.
- 2) L'amplitude du déplacement décroît à mesure que l'on s'enfonce vers le centre de la terre.

C'est Lord Rayleigh, en 1885, qui le premier a mis en évidence mathématiquement l'existence d'ondes ayant ces caractéristiques. Rayleigh a déterminé des ondes de surface dans un milieu semi-infini bordé par un plan avec une tension nulle à la surface. La méthode de Rayleigh est

décrite dans la première partie de ce chapitre.

Dans le cas de la sphère, nous ne connaissons pas de procédé similaire qui mettrait en évidence des ondes de surface. Toutefois, par un processus de passage à la limite à partir de l'équation des fréquences des oscillations sphéroïdales, on retrouve l'équation des vitesses établie par Rayleigh dans le cas décrit ci-dessus. Ce processus est expliqué dans la seconde partie de ce chapitre.

Remarquons que le modèle mathématique de Rayleigh est utilisé en séismologie et en géophysique grâce à une approximation locale de la surface terrestre par un plan.

L'intérêt des ondes de surfaces est évident lorsqu'on considère l'énergie qu'elles transportent. On trouve chez K.F. Graff (12) p. 356 un exemple où pour une perturbation due à une force ponctuelle normale à la surface, 67 % de l'énergie est transportée par les ondes de surface (27 % pour les ondes transversales et 6 % pour les ondes longitudinales).

5-2 Ondes de surfaces dans un demi-espace limité pour un plan (ondes de Rayleigh).

On travaille en coordonnées cartésiennes et on choisit que le milieu occupé par la matière soit le demi-espace $z \geq 0$. On suppose le vide dans le demi-espace $z < 0$. La frontière est ainsi formée par le plan $z = 0$.

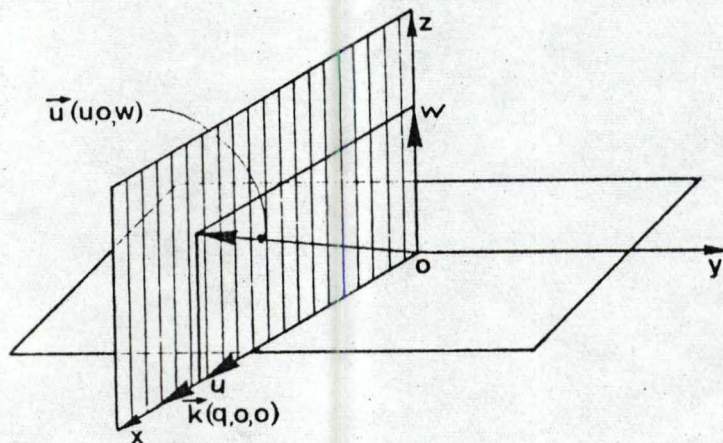


Figure 5-1.

Le milieu élastique étant homogène et isotrope, l'équation d'onde s'écrit (voir annexe III) :

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (5-1)$$

En considérant les vitesses longitudinale et transversale :

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (5-1) \text{ s'écrit :}$$

$$(c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + c_t^2 \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (5-2)$$

On envisage comme solution une onde plane se propageant suivant l'axe ox et dont l'amplitude décroît lorsque z augmente :

$$\vec{u} = \vec{a} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} f(z) \quad (5-3)$$

où \vec{k} = vecteur d'onde , ω = pulsation
 et \vec{r} = vecteur position : $\vec{r} = (x, y, z)$.

Puisque la direction de propagation est ox, on sait que $\vec{k} = (q, 0, 0)$. Si on appelle C la vitesse de phase (ou vitesse de propagation), on a : $C \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = \frac{\omega}{\rho}$.

De plus, on peut montrer que $f(z)$ doit être une exponentielle : $e^{-\alpha z}$.

$$\text{On obtient donc : } \vec{u} = \vec{a} e^{i(qx - \omega t)} e^{-\alpha z} \quad (5-4)$$

La résolution du problème se fait en 2 étapes :

- 1) On introduit \vec{u} dans l'équation d'onde, ce qui donne la forme des composantes a_x , a_y et a_z du vecteur \vec{a} . Il reste des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales du problème.
- 2) On traite les conditions limites qui fournissent la valeur de C ($C = \frac{\omega}{q}$), vitesse de propagation de l'onde superficielle.

1. Traitement de l'équation d'onde :

$$a) \Delta \vec{u} = \Delta (\vec{a} e^{-\alpha z} e^{i(qx - \omega t)})$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\vec{a} e^{-\alpha z} e^{i(qx - \omega t)})$$

$$\Delta \vec{u} = \vec{a} (\alpha^2 - q^2) e^{-\alpha z} e^{i(qx - \omega t)} \quad (5-5)$$

$$b) \quad \text{div } \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{a} e^{-\alpha z} e^{i(qx-\omega t)})$$

$$\Leftrightarrow \text{div } \vec{u} = (a_x iq - a_z \alpha) e^{-\alpha z} e^{i(qx-\omega t)}. \quad (5-6)$$

$$c) \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = (iq, 0, -\alpha) \text{div } \vec{u}$$

$$= (-a_x q^2 - a_z iq\alpha, 0, -\alpha a_x iq + a_z \alpha^2) e^{-\alpha z + i(qx-\omega t)} \quad (5-7)$$

$$d) \quad \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{a} e^{-\alpha z} e^{i(qx-\omega t)}) = -\omega^2 \vec{a} e^{-\alpha z} e^{i(qx-\omega t)}. \quad (5-8)$$

L'équation d'onde vectorielle par rapport à \vec{a} se décompose en 3 équations scalaires par rapport à a_x , a_y et a_z .

$$\left[\begin{array}{l} (C_l^2 - C_t^2) (-a_x q^2 - iq a_z \alpha) + C_t^2 a_x (\alpha^2 - q^2) = -\omega^2 a_x \end{array} \right. \quad (5-9a)$$

$$\left[\begin{array}{l} C_t^2 a_y (\alpha^2 - q^2) = -\omega^2 a_y \end{array} \right. \quad (5-9b)$$

$$\left[\begin{array}{l} (C_l^2 - C_t^2) (-a_x iq\alpha + a_z \alpha^2) + C_t^2 a_z (\alpha^2 - q^2) = -\omega^2 a_z \end{array} \right. \quad (5-9c)$$

On peut regrouper (5-9a), (5-9b) et (5-9c) dont les inconnues sont a_x , a_y et a_z dans le système suivant écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 c_t^2 - q_\ell^2 c^2 + \omega^2 & 0 & (c_\ell^2 - c_t^2)(-iq\alpha) \\ 0 & c_t^2(\alpha^2 - q^2) + \omega^2 & 0 \\ (c^2 - c_t^2)(-iq\alpha) & 0 & \alpha^2 c_\ell^2 - q^2 c_t^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

Le système (5-11) est homogène en a_x, a_y, a_z . Pour que les solutions ne soient pas trivialement nulles, il faut que $\vec{a} \neq \vec{0}$, ce qui est possible si la condition de compatibilité du système est vérifiée.

En tenant compte du fait que $\omega = qc$, la condition de compatibilité de (5-11) se factorise comme suit :

$$\alpha^4 - \alpha^2 q^2 (2 - c^2/c_\ell^2 - c^2/c_t^2) + q^4 (1 - c^2/c_\ell^2) (1 - c^2/c_t^2) = 0 \quad (5-12)$$

ou bien

$$c_t^2 (\alpha^2 - q^2) + q^2 c^2 = 0. \quad (5-13)$$

(5-12) est une équation bicarrée en α dont les racines sont

$$\alpha_1^2 = q^2 (1 - c^2/c_\ell^2) \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = q^2 (1 - c^2/c_t^2). \quad (5-14)$$

La racine de (5-13) est $\alpha^2 = \alpha_2^2$.

La condition de compatibilité détermine ainsi 2 possibilités pour α^2 : $\alpha^2 = \alpha_1^2$ ou $\alpha^2 = \alpha_2^2$.

Or, la dépendance en z de la solution est $e^{-\alpha z}$. Pour que l'exponentielle décroisse lorsque z augmente par valeurs positives, il faut choisir les valeurs POSITIVES de α_1 et α_2 , c'est-à-dire :

$$\alpha_1 = q \sqrt{1 - c^2/c_\ell^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = q \sqrt{1 - c^2/c_t^2} \quad (5-15)$$

α_1 et α_2 sont appelés les FACTEURS DE PENETRATION de l'onde de surface.

Pour $\alpha = \alpha_1$, le système (5-11) admet les racines :

$$a_z = \frac{i\alpha_1}{q} a_x \quad \text{et} \quad a_y = 0; a_x \text{ arbitraire.} \quad (5-16)$$

En posant $a_x = -iqC_1$ ($C_1 \in \mathbb{C}$ arbitraire), on obtient le premier vecteur propre du problème :

$$\vec{u}_1 = (-iq C_1, 0, \alpha_1 C_1) e^{-\alpha_1 z} e^{i(qx - \omega t)}. \quad (5-17)$$

Avec $\alpha = \alpha_2$, le système (5-11) admet les racines :

$$a_x = \frac{-i\alpha_2}{q} a_z \quad \text{et} \quad a_y = C_3 \quad (C_3 \in \mathbb{C} \text{ arbitraire}), (5-18)$$

En choisissant $a_x = -i\alpha_2 C_2$ ($C_2 \in \mathbb{C}$ arbitraire), le second vecteur propre s'écrit :

$$\vec{u}_2 = (-i \alpha_2 C_2, C_3, q C_2) e^{-\alpha_2 z + i(qx - \omega t)} \quad (5-19)$$

La solution générale a donc la forme suivante :

$$\vec{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)) \quad \text{où}$$

$$u(x, y, z, t) = -i(q C_1 e^{-\alpha_1 z} + \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 z}) e^{-i(qx - \omega t)} \quad (5-20a)$$

$$v(x, y, z, t) = C_3 e^{-\alpha_2 z} e^{i(qx - \omega t)} \quad (5-20b)$$

$$w(x, y, z, t) = (\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 z} + q C_2 e^{-\alpha_2 z}) e^{i(qx - \omega t)} \quad (5-20c)$$

2. Traitement des conditions aux limites :

a) Calcul du tenseur des déformations.

En coordonnées cartésiennes, le tenseur des déformations a les

$$\text{composantes : } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ pour } i \text{ et } j = 1, 2, 3. \quad (5-21)$$

En tenant compte du fait que pour le déplacement calculé plus

$$\text{haut, on a } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ puisqu'il n'y a pas de dépendance}$$

en y , on obtient le tenseur des déformations suivant :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5-22)$$

b) Calcul du tenseur des tensions.

Soit τ le tenseur de tensions. La loi de Hooke pour un matériau homogène isotrope dit que :

$$\tau = \lambda(\text{Trace } S) E + 2\mu S \quad (E = \text{matrice unité}) \quad (5-23)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé du milieu.

Ainsi, le tenseur complet s'écrit :

$$\tau = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} & \mu \frac{\partial v}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} & \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \frac{\partial v}{\partial z} & (\lambda+2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5-24)$$

c) Expression de la condition à la limite.

Comme dans les chapitres précédents, l'absence de tension à la surface s'exprime par :

$$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ avec } \vec{n} = (0, 0, 1). \quad (5-25)$$

(\vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface $z = 0$).

En notant τ_{ij} les composantes du tenseur des tensions, (5-25) donne les 3 équations suivantes :

$$\tau_{13} = 0 \iff \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (5-26a)$$

$$\tau_{23} = 0 \iff \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (5-26b)$$

$$\tau_{33} = 0 \iff (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5-26c)$$

En introduisant les expressions de u , v et w dans τ_{13} , τ_{23} , τ_{33} et en tenant compte du fait que $(\lambda + 2\mu)/\mu = c^2/c_t^2$, on obtient par un calcul simple les 3 expressions ci-dessous :

$$\tau_{13} = i \mu q e^{i(qx - \omega t)} \left(2 \alpha_1 c_1 e^{-\alpha_1 z} + q c_2 \left(2 - \frac{c^2}{c_t^2} \right) e^{-\alpha_2 z} \right) \quad (5-27a)$$

$$\tau_{23} = -\mu \alpha_2 c_3 e^{-\alpha_2 z} e^{i(qx - \omega t)} \quad (5-27b)$$

$$\tau_{33} = \mu q e^{i(qx-wt)} \left(C_1 e^{-\alpha_1 z} q \left(\frac{C^2}{C_t^2} - 2 \right) - 2 C_2 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z} \right). \quad (5-27c)$$

Si on exprime que $z = 0$ dans (5-27), il vient :

$$\left[\begin{array}{l} i \mu q e^{i(qx-wt)} (2\alpha_1 C_1 - q C_2 (C^2/C_t^2 - 2)) = 0 \end{array} \right. \quad (5-28a)$$

$$\left. \begin{array}{l} - \mu \alpha_2 C_3 e^{i(qx-wt)} = 0 \end{array} \right. \quad (5-28b)$$

$$\left[\begin{array}{l} \mu q e^{i(qx-wt)} (C_1 q (C^2/C_t^2 - 2) - 2 C_2 \alpha_2) = 0. \end{array} \right. \quad (5-28c)$$

Ces trois équations doivent être vérifiées $\forall t > 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dès lors :

$$(5-28b) \Rightarrow C_3 = 0, \quad (5-29)$$

(5-28a) et (5-28c) forment un système de 2 équations homogènes à 2 inconnues C_1 et C_2 dont la condition de compatibilité ($\det = 0$) s'écrit :

$$q^2 (C^2/C_t^2 - 2)^2 = 4 \alpha_1 \alpha_2. \quad (5-30)$$

En remplaçant α_1 et α_2 par leur expression

$$\alpha_1 = q \left(1 - C^2/C_l^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = q \left(1 - C^2/C_t^2 \right)^{1/2},$$

on obtient l'équation :

$$\left[\frac{C^2}{C_t^2} - 2 \right]^2 = 4 \left[1 - \frac{C^2}{C_\ell^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{C^2}{C_t^2} \right]^{1/2} \quad (5-31)$$

(5-31) est "l'équation de RAYLEIGH" qui donne la vitesse de propagation C ou C_R des ondes de surface en fonction des vitesses de propagation C_ℓ et C_t des ondes longitudinales et transversales.

d) Recherche de C_R à partir de l'équation de Rayleigh.

L'expérience montre que la vitesse de propagation des ondes de surface est la plus petite des 3 vitesses de propagation. En fait, on a :

$$0 < C_R < C_t < C_\ell. \quad (5-32)$$

L'existence et l'unicité d'une racine de l'équation de Rayleigh (5-31) vérifiant cette condition a été démontrée (voir (4) Tome II, p. 407-408).

Pour trouver cette racine, on élève les 2 membres de (5-31) au carré et en posant $\xi = C_R/C_t$, il vient après un développement élémentaire où l'on simplifie pour ξ^2 ($\xi \neq 0$) :

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8 \left(3 - 2 \frac{C_t^2}{C_\ell^2} \right) \xi^2 - 16 \left(1 - \frac{C_t^2}{C_\ell^2} \right) = 0. \quad (5-33)$$

Cette équation montre que ξ ne dépend que du rapport C_t^2/C_ℓ^2 qui est constant pour chaque milieu élastique donné. En effet :

$$\frac{C_t^2}{2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \quad \text{en fonction des coefficients de Lamé } \lambda \text{ et } \mu$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad \text{en fonction du coefficient de Poisson } \nu.$$

Pour tous les matériaux connus, ν varie entre 0 et 1/2. (Cela correspond à la variation de λ entre zéro et l'infini). Pour $\lambda = \mu$, on a $\nu = 1/4$.

Ainsi, pour $\nu = 0$, ξ vaut 0.874032 tandis que pour $\nu = 1/2$, ξ vaut 0.955312 et toutes les valeurs de ξ sont comprises entre ces 2 valeurs extrêmes. On a le tableau suivant :

ν	λ	C_t/C_ℓ	$\xi = C_R/C_t$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.874032
1/4	$\lambda = \mu$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.919402
1/2	ν	0	0.955312

On constate également que la vitesse de propagation C_R des ondes de surface ne dépend pas de la longueur d'onde ou de la fréquence, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de phénomène de dispersion d'ondes.

d) Forme générale du déplacement

L'équation (5-29) montre que $C_3 = 0$, c'est-à-dire que la composante suivant y du déplacement associé à l'onde de surface est nul.

La forme générale du déplacement est donc :

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \left(u(x, y, z, t), 0, w(x, y, z, t) \right) \quad (5-34)$$

où u et w sont donnés par les formules (5-20). Il apparaît donc clairement que le déplacement associé à une onde de surface plane dans un demi-espace limité par un plan n'a de composante que suivant la direction de propagation de l'onde et la normale à la surface limite.

Remarques :

1. En choisissant une direction de propagation quelconque $\vec{k} = (q, p, 0)$ dans le plan xoy , on trouve un déplacement $\vec{u} = (u, v, w)$ dont les composantes suivant ox et oy : u et v ont la propriété :

$$\frac{u}{v} = \frac{q}{p} \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0. \quad (5-35)$$

Cela prouve que le déplacement est contenu dans le plan formé par la direction de propagation \vec{k} et l'axe OZ qui est normal à la surface limite.

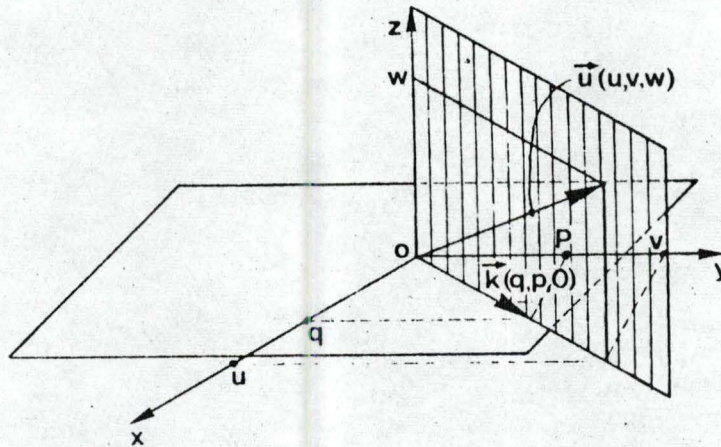


Figure 5-2.

- 2) En observant les formules (5-20a) et (5-20c) qui donnent u et w , on remarque l'imaginaire i qui crée un déphasage de $\pi/2$ entre u et w . De ce déphasage, il résulte que le déplacement de chaque particule au cours du temps est elliptique autour de la position de repos.

5-3. Ondes de surface d'une sphère.

On a vu dans le paragraphe précédent que le déplacement associé à une onde de surface est contenu dans le plan comprenant la direction de propagation et le vecteur normal à la surface. Cela correspond pour la sphère, à un déplacement dirigé suivant \vec{e}_θ et \vec{e}_r (fig.3-1). Or, on a vu à la fin du chapitre 3 que seuls les déplacements sphéroïdaux ont une composante dirigée suivant \vec{e}_r . Il est donc normal d'envisager ce type de déplacement pour rechercher des ondes de surface.

La technique consiste à faire tendre n vers l'infini dans l'équation des fréquences des oscillations sphéroïdales qui a été établie au chapitre IV. A la limite, cette dernière a la même forme que l'équation de Rayleigh (5-31), ce qui permet de retrouver les ondes de surface.

a) Passage à la limite

L'équation (4-58) des fréquences des oscillations sphéroïdales s'écrit :

$$2 \frac{h}{k} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{(n-1)(n+2)}{\eta^2} \left(\frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} - \frac{(n+1)}{\eta} \right) \right] \frac{J_{n+1/2}(\xi)}{J_{n+1/2}(\xi)}$$

$$- \frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{2n(n-1)(n+2)}{\eta^3} \right) \frac{J_{n+3/2}(\eta)}{J_{n+1/2}(\eta)} = 0$$

avec

$$\eta = \frac{\omega a}{c_t}, \quad \xi = \frac{\omega a}{c_\ell}, \quad h = \frac{\omega}{c_\ell}, \quad k = \frac{\omega}{c_t} \quad \text{et } a = \text{rayon de la sphère.}$$

$$\text{Posons } \nu = n + \frac{1}{2}.$$

Remarquons que pour n grand, on a les relations suivantes : $\nu > \eta > \xi$. (5-36)

On peut voir dans les tables (chapitre V) que la première inégalité est vraie à partir de $n = 16$ pour $\lambda = \mu$ et à partir de $n = 37$ pour $\lambda = \infty$. La seconde inégalité est évidente puisque $\eta = \xi \frac{c_\ell}{c_t}$ est toujours > 1 .

$$\text{En posant } \nu \operatorname{sech} \alpha_1 = \xi \text{ et } \nu \operatorname{sech} \beta_1 = \eta, \quad (\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0) \quad (5-37)$$

on obtient grâce à l'approximation de Debye ((1) p. 365) pour $\nu \gg :$

$$J_{\nu}(\nu \operatorname{sech} \alpha_1) \approx \frac{\exp \nu(\tanh \alpha_1 - \alpha_1)}{\sqrt{2 \pi \nu \tanh \alpha_1}} \quad (5-38a)$$

$$\text{et } J_{\nu+1}(\nu \operatorname{sech} \alpha_1) \approx \frac{\exp \nu(\tanh \alpha_1 - \alpha_1) - \alpha_1}{\sqrt{2 \pi(\nu+1) \tanh \alpha_1 + 2 \operatorname{csch}(2\alpha_1)}} \quad (5-38b)$$

$$\text{Ainsi : } \frac{J_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu}(\xi)} \approx \frac{e^{-\alpha_1}}{\sqrt{1 + (\coth^2 \alpha_1)/\nu}} \quad (5-39a)$$

$$\text{De même } \frac{J_{\nu+1}(\eta)}{J_{\nu}(\eta)} \approx \frac{e^{-\beta_1}}{\sqrt{1 + (\coth^2 \beta_1)/\nu}} \quad (5-39b)$$

Eliminons α_1 et β_1 par les relations (5-37). On a :

$$\nu/\xi = \cosh \alpha_1 \quad (5-40a)$$

$$\text{et } \nu/\eta = \cosh \beta_1 \quad (5-40b)$$

$$\text{D'où } (\coth \alpha_1)^2 = (\cosh \alpha_1 / \sinh \alpha_1)^2 = \frac{(\nu/\xi)^2}{(\nu/\xi)^2 - 1}$$

or $\xi = \frac{h}{k} \eta$, ce qui donne finalement :

$$(\coth \alpha_1)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu}\right)^2} \quad (5-41)$$

En remplaçant $\coth^2 \alpha_1$ à l'aide de (5-41) dans l'expression

$\sqrt{1 + (\coth^2 \alpha_1)/v}$, on obtient après un calcul simple :

$$\sqrt{1 + \frac{\coth^2 \alpha_1}{v}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{v}\right)^2 + \frac{1}{v}}{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{v}\right)^2}} . \quad (5-42)$$

Par un calcul semblable, on obtient :

$$(\coth \beta_1)^2 = (\cosh \beta_1 / \sinh \beta_1)^2 = \frac{(v/\eta)^2}{(v/\eta)^2 - 1} ,$$

ce qui donne : $(\coth \beta_1)^2 = \frac{1}{1 - (\eta/v)^2}$ (5-43)

et finalement

$$\sqrt{1 + \frac{\coth^2 \beta_1}{v}} = \sqrt{\frac{1 - (\eta/v)^2 + 1/v}{1 - (\eta/v)^2}} . \quad (5-44)$$

Calcul du rapport $J_{\nu+1}(\xi)/J_{\nu}(\xi)$.

Transformons d'abord le numérateur $e^{-\alpha_1}$ qui apparaît dans (5-39a).

$$e^{-\alpha_1} = (e^{\alpha_1})^{-1} = (\cosh \alpha_1 + \sinh \alpha_1)^{-1} = \left(v/\xi + \sqrt{v^2/\xi^2 - 1} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\nu/\xi \left(1 + \sqrt{1 - \xi^2/\nu^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{puisque } \nu/\xi > 0 \\
 &= \left[\frac{\nu}{\eta} \frac{k}{h} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \right)^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{puisque } \xi = \frac{h}{k} \eta .
 \end{aligned} \tag{5-45}$$

si on pose $A = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \right)^2}$, (5-45) s'écrit plus simplement:

$$e^{-\alpha_1} = \frac{h}{k} \cdot \frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+A} . \tag{5-46}$$

A l'aide de (5-39a), (5-42) et (5-46), on obtient finalement :

$$\frac{J_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu}(\xi)} = \frac{\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+A}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{\nu} \right) / \left(1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \right)^2 \right)}} . \tag{5-47}$$

Calcul du rapport $J_{\nu+1}(\eta)/J_{\nu}(\eta)$.

La transformation est similaire à la précédente.

En posant $B = \sqrt{1 - (\eta/\nu)^2}$, le numérateur $e^{-\beta_1}$ de (5-39b) s'écrit :

$$e^{-\beta_1} = \frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+B} . \tag{5-48}$$

A l'aide de (5-39b), (5-44) et (5-48), on obtient donc :

$$\frac{J_{\nu+1}(\eta)}{J_{\nu}(\eta)} = \frac{\frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+B}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\right) / \left(1 - \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^2\right)}} \quad (5-49)$$

Transformation des autres quantités de l'équation des fréquences

On va exprimer tout en fonction de ν , h et k . Cela donne :

$$(n-1)(n+2) = (\nu - 3/2)(\nu + 3/2) , \quad (5-50a)$$

$$(n + 1) = (\nu + 3/2) , \quad (5-50b)$$

$$(n-1)(2n+1) = (\nu - 3/2) 2\nu , \quad (5-50c)$$

$$2n(n-1)(n+2) = (2\nu - 1)(\nu - 3/2)(\nu + 3/2) , \quad (5-50d)$$

$$c_t/c_\ell = \frac{\omega/k}{\omega/h} = \frac{h}{k} . \quad (5-50e)$$

Transformation de l'équation des fréquences

Par (5-47), (5-49) et (5-50), l'équation des fréquences devient :

$$2 \frac{k}{k} \left\{ \frac{1}{\eta} + \frac{(\nu-3/2)(\nu+3/2)}{\eta^2} \left[\frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+B} \left(\frac{1 - (\eta/\nu)^2}{1 - (\eta/\nu)^2 + 1/\nu} \right)^{1/2} - \frac{\nu+1/2}{\eta} \right] \right\}$$

$$\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+A} \left(\frac{1 - (\eta h/\nu k)^2}{1 - (\eta h/\nu k)^2 + 1/\nu} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} + \frac{2\nu(\nu-3/2)}{\eta^2}$$

$$+ \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{(2\nu-1)(\nu-3/2)(\nu+3/2)}{\eta^2} \right] \frac{\eta}{\nu} \frac{1}{1+A} \left(\frac{1 - (\eta/\nu)^2}{1 - (\eta/\nu)^2 + 1/\nu} \right)^{1/2} = 0 \quad (5-51)$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a $\nu \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow \infty$. Ainsi on a les résultats (5-52) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} &\rightarrow 0 ; \quad \frac{(\nu-3/2)(\nu+3/2)}{\eta^2} \rightarrow \frac{\nu^2}{\eta^2} ; \quad \frac{\nu+1/2}{\eta} \rightarrow \frac{\nu}{\eta} ; \\ \frac{2\nu(\nu-3/2)}{\eta^2} &\rightarrow \frac{2\nu^2}{\eta^2} ; \quad \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{(2\nu-1)(\nu-3/2)(\nu+3/2)}{\eta^2} \right) \rightarrow -\frac{2\nu^3}{\eta^3} \\ \left(\frac{1 - (\eta/\nu)^2}{1 - (\eta/\nu)^2 + 1/\nu} \right)^{1/2} &\rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1 - (\eta h/\nu k)^2}{1 - (\eta h/\nu k)^2 + 1/\nu} \right)^{1/2} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Grâce à (5-52), l'équation (5-51) devient après développement du premier membre :

$$2 \frac{h^2}{k^2} \frac{1}{1+A} \frac{1}{1+B} - 2 \frac{h^2}{k^2} \frac{\nu^2}{\eta^2} \frac{1}{1+A} - \frac{1}{2} + 2 \frac{\nu^2}{\eta^2} - 2 \frac{\nu^2}{\eta^2} \frac{1}{1+B} = 0 \quad (5-53)$$

$$\text{Or } A = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{\nu}\right)^2} \Rightarrow (1-A^2) \left(\frac{\nu}{\eta}\right)^2 = \left(\frac{h}{k}\right)^2. \quad (5-54a)$$

de même

$$B = \sqrt{1 - (\eta/\nu)^2} \Rightarrow 1-B^2 = (\eta/\nu)^2. \quad (5-54b)$$

Ainsi

$$\left(\frac{h}{k}\right)^2 \text{ s'écrit encore : } \left(\frac{h}{k}\right)^2 = \frac{1-A^2}{1-B^2}. \quad (5-54c)$$

Grâce à (5-54), l'équation (5-53) prend la forme :

$$2 \frac{1-A}{(1-B^2)} \frac{1}{1+B} - 2 \frac{1-A}{(1-B^2)} - \frac{1}{2} + \frac{2}{(1-B^2)} - \frac{2}{(1-B^2)} \frac{1}{1+B} = 0 \quad (5-55)$$

On peut multiplier (5-55) par $\frac{(1-B^2)^2}{2}$ puisque $1 - B^2 \neq 0$ et on obtient après un développement élémentaire :

$$(1 + B^2) = 4 AB \quad (5-56)$$

En remplaçant A et B par leur valeur (voir (5-54)), on obtient finalement l'équation (5-57) qui a la même forme que l'équation de Rayleigh (5-31), mais avec d'autres variables :

$$\left[(\eta/v)^2 - 2 \right]^2 = 4 \left[1 - \left(\frac{h}{k} \frac{\eta}{v} \right)^2 \right]^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{v} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5-57)$$

b) Interprétation de l'équation (5-57)

En comparant (5-31) et (5-57) et en tenant compte du fait que $\frac{h}{k} = \frac{c_t}{c_l}$, que $\eta = \frac{a}{c_t}$ et que $v = n + 1/2$, on obtient :

$$\frac{\omega a}{n+1/2} = C_R \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (5-58)$$

où C_R est la vitesse de propagation des ondes de surface du même milieu élastique dans le cas d'un demi-espace limité par un plan. Envisageons le problème des déplacements sous forme d'ondes progressives au lieu d'ondes stationnaires. Soit une onde progressive passant par les pôles

et se propageant suivant la direction \vec{e}_θ . Le déplacement à la surface étant proportionnel à $P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases}$, on peut supposer que la longueur d'onde λ à la surface dans la direction \vec{e}_θ vaut approximativement $\frac{2 \pi a}{n + 1/2}$ où a est le rayon de la sphère (cfr Eringen (10) p. 833 et Sato et Usami (26) p. 45). Par (5-58), on obtient alors :

$C_R = \lambda \omega / 2\pi = C$ où C est la vitesse de propagation de l'onde progressive dans la direction \vec{e}_θ . On interprète ce résultat par le fait que lorsque n devient grand, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde $= \frac{2 a\pi}{n+1/2}$ devient petite par rapport au rayon, les ondes se resserrent à la surface et se propagent à la vitesse des ondes de surface du cas plan (ondes de Rayleigh).

5-4 Ondes de surface d'une cavité sphérique.

On a vu dans le chapitre IV que les déplacements pour la cavité sphérique sont obtenus à partir de ceux de la sphère en remplaçant les fonctions de Bessel de première espèce $J_{n+1/2}(kr)$ ou $J_{n+1/2}(hr)$ par des fonctions de Hankel de deuxième espèce $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$ ou $H_{n+1/2}^{(2)}(hr)$.

De même que dans le cas de la sphère (paragraphe précédent, on pourrait dans le but de retrouver l'équation de Rayleigh (5-31), faire tendre n vers l'infini dans l'équation des fréquences des vibrations sphéroïdales de la cavité sphérique. Or, pour effectuer le processus de passage à la limite, il est nécessaire de connaître un développement des fonctions de Hankel de deuxième espèce à variable complexe pour $n \rightarrow \infty$. Il faudrait en outre connaître le comportement des fréquences des oscillations sphéroïdales de la cavité lorsque n est grand. Dans le cas de la sphère, les

fréquences ont été calculées par Sato et Usami (Tables au chapitre VI).

Or, pour la cavité sphérique, le calcul des racines de l'équation des fréquences sphéroïdales nécessiterait la connaissance du comportement des fonctions de Hankel d'indice demi-entier à variable complexe.

Ne connaissant ni le développement pour $n \rightarrow \infty$ des fonctions de Hankel à variable complexe, ni les racines de l'équation des fréquences de la cavité, il ne nous a pas été possible d'effectuer le passage à la limite comme dans le cas de la sphère.

Signalons cependant pour l'étude des fonctions de Hankel à variable complexe, les références (7), (9) et (19).

CHAPITRE 6

VALEURS NUMERIQUES ET REPRESENTATION GEOMETRIQUE.

6-1 Fréquences des oscillations libres

Les solutions numériques des équations (4-58) et (4-63) qui donnent les fréquences des oscillations sphéroïdales et torsionales d'une sphère libre homogène ont été calculées par Sato et Usami (1962) dans les tables qui suivent: (6-1), (6-2) et (6-3).

Les valeurs données sont celles de η d'où on peut tirer la fréquence ν :

$$\eta = ka = \frac{\omega a}{c_t} = \frac{2\pi\nu a}{c_t} \quad \text{où } \nu \text{ est la fréquence .}$$

Ces solutions numériques sont sans dimension et sont donc valables pour des sphères aussi petites que l'on veut.

Remarque.

Les racines de l'équation des fréquences sphéroïdales pour $n = 0$ sont les fréquences des vibrations radiales de la sphère (chapitre 2).

Prenons $\lambda = \mu$. Les tables donnent dans ce cas :

$$\eta = \frac{\omega a}{c_t} = 4.440 , 10.494 , 16.073 , 21.579$$

$$\lambda = \mu \Rightarrow \frac{c_l}{c_t} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \eta = \frac{\omega a \sqrt{3}}{c_l} = x \sqrt{3} .$$

Les racines x correspondantes sont donc :

$x = 2.563, 6.059, 9.280, 12.459$, qui sont bien les racines de l'équation des fréquences des vibrations radiales, données au graphique (2-2) du chapitre 2.

Table 6-1 Fréquences des oscillations torsionales d'une sphère homogène.

(Les 5 premières racines i sont données pour chaque indice de Bessel n , $\eta = \frac{2\pi\nu a}{c_t}$).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5
1	*	5.763	9.095	12.322	15.514
2	2.501	7.136	10.514	13.771	16.983
3	3.865	8.444	11.881	15.175	18.412
4	5.095	9.712	13.210	16.544	19.809
5	6.266	10.950	14.510	17.885	21.180
6	7.404	12.166	15.787	19.204	22.529
7	8.520	13.364	17.045	20.503	23.860
8	9.621	14.548	18.287	21.786	25.174
9	10.711	15.720	19.515	23.054	26.473
10	11.792	16.882	20.731	24.310	27.760
11	12.866	18.035	21.937	25.555	29.035
12	13.935	19.180	23.134	27.789	30.299
13	14.999	20.319	24.322	28.015	31.555
14	16.058	21.452	25.504	29.233	32.802
15	17.115	22.579	26.678	30.443	34.040
16	18.168	23.702	27.847	31.647	35.272
17	19.218	24.820	29.010	32.844	36.497
18	20.266	25.934	30.168	34.035	37.716
19	21.313	27.044	31.321	35.222	38.929
20	22.357	28.151	32.470	36.403	40.136
21	23.399	29.255	33.615	37.579	41.339
22	24.439	30.356	34.756	38.751	42.536
23	25.479	31.454	35.893	39.919	43.730
24	26.517	32.550	37.027	41.083	44.919
25	27.554	33.643	38.158	42.244	46.104
26	28.590	34.735	39.286	43.401	47.285
27	29.624	35.824	40.412	44.555	48.462
28	30.658	36.910	41.534	45.705	49.637
29	31.691	37.996	42.654	46.853	50.807
30	32.723	39.079	43.772	47.998	51.975
31	33.754	40.161	44.888	49.140	53.140
32	34.785	41.241	46.001	50.280	54.302
33	35.814	42.319	47.112	51.417	55.461
34	36.843	43.396	48.221	52.553	56.618
35	37.872	44.472	49.329	53.685	57.772
36	38.900	45.546	50.435	54.816	58.924
37	39.927	46.619	51.539	55.945	60.074
38	40.954	47.691	52.641	57.071	61.221
39	41.980	48.762	53.742	58.196	62.366
40	43.005	49.831	54.841	59.319	63.509
41	44.031	50.900	55.938	60.440	64.650
42	45.055	51.967	57.035	61.560	65.790
43	46.080	53.034	58.130	62.678	66.927
44	47.104	54.099	59.223	63.794	68.063
45	48.127	55.164	60.316	64.909	69.197
46	49.150	56.228	61.407	66.022	70.329
47	50.173	57.291	62.497	67.134	71.459
48	51.196	58.353	63.585	68.244	72.588
49	52.218	59.414	64.673	69.353	73.716
50	53.240	60.474	65.760	70.461	74.842

Table 6-2 Fréquences des oscillations sphéroïdales d'une sphère homogène avec $\lambda = \mu$. (Les 5 premières racines i sont données pour chaque indice de Bessel n , $\eta = \frac{2\pi va}{c_t}$).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5
0	4.440	10.494	16.073	21.579	
1	*	3.424	6.771	7.744	10.695
2	2.640	4.865	8.329	9.780	12.157
3	3.916	6.454	9.705	11.718	13.639
4	5.009	8.062	11.039	13.553	15.201
5	6.033	9.636	12.368	15.179	16.818
6	7.023	11.157	13.710	16.662	18.509
7	7.995	12.615	15.073	18.060	20.197
8	8.955	14.007	16.461	19.415	21.836
9	9.907	15.339	17.867	20.751	23.400
10	10.855	16.619	19.282	22.080	24.886
11	11.798	17.857	20.692	23.412	26.308
12	12.739	19.064	22.086	24.752	27.686
13	13.670	20.245	23.456	26.103	29.036
14	14.612	21.408	24.797	27.464	30.370
15	15.546	22.556	26.108	28.831	31.697
16	16.478	23.692	27.390	30.200	33.022
17	17.410	24.818	28.645	31.564	34.350
18	18.341	25.936	29.878	32.917	35.683
19	19.269	27.047	31.092	34.254	37.021
20	20.199	28.152	32.290	35.573	38.364
21	21.126	29.253	33.474	36.873	39.710
22	22.054	30.349	34.646	38.152	41.055
23	22.981	31.441	35.809	39.412	42.395
24	23.908	32.529	36.964	40.655	43.726
25	24.833	33.615	38.111	41.882	45.046
26	25.759	34.697	39.252	43.096	46.353
27	26.684	35.777	40.388	44.298	47.641
28	27.610	36.855	41.519	45.489	48.921
29	28.534	37.930	42.645	46.671	50.182
30	29.459	39.004	43.767	47.846	51.430
31	30.382	40.074	44.886	49.013	52.664
32	31.307	41.144	46.001	50.174	53.887
33	32.230	42.212	47.113	51.330	55.099
34	33.154	43.279	48.223	52.480	56.302
35	34.077	44.343	49.329	53.626	57.497
36	35.001	45.408	50.434	54.768	58.683
37	35.923	46.469	51.536	55.907	59.864
38	36.847	47.530	52.636	57.041	61.038
39	37.769	48.590	53.734	58.173	62.207
40	38.691	49.648	54.830	59.302	63.371
41	39.614	50.706	55.924	60.428	64.530
42	40.536	51.762	57.016	61.551	65.686
43	41.459	52.818	58.107	62.672	66.837
44	42.380	53.872	59.197	63.791	67.985
45	43.303	54.926	60.284	64.907	69.130
46	44.225	55.979	61.371	66.022	70.272
47	45.147	57.031	62.456	67.134	71.411
48	46.068	58.082	63.540	68.245	72.548
49	46.991	59.133	64.622	69.354	73.682
50	47.912	60.183	65.704	70.461	74.814

Table 6-3 Fréquences des oscillations sphéroïdales d'une sphère homogène, avec $\lambda = \infty$. (Les 5 premières racines i sont données pour chaque indice de Bessel n , $\eta = \frac{2\pi\nu a}{C_t}$).

$n \backslash i$	1	2	3	4	5
1	*	3.870	7.443	10.713	13.920
2	2.666	5.473	8.877	12.161	15.386
3	4.002	7.100	10.298	13.577	16.817
4	5.161	8.674	11.719	14.975	18.226
5	6.246	10.169	13.142	16.363	19.617
6	7.294	11.588	14.564	17.745	20.995
7	8.320	12.941	15.974	19.122	22.365
8	9.332	14.240	17.366	20.496	23.728
9	10.334	15.496	18.733	21.864	25.085
10	11.328	16.723	20.073	23.224	26.437
11	12.318	17.923	21.386	24.574	27.781
12	13.303	19.104	22.674	25.911	29.125
13	14.285	20.268	23.940	27.233	30.461
14	15.264	21.420	25.186	28.540	31.788
15	16.241	22.561	26.415	29.832	33.107
16	17.216	23.693	27.629	31.109	34.416
17	18.189	24.818	28.830	32.371	35.715
18	19.161	25.936	30.020	33.620	37.004
19	20.132	27.048	31.200	34.858	38.282
20	21.101	28.155	32.371	36.084	39.550
21	22.070	29.258	33.535	37.300	40.808
22	23.038	30.356	34.692	38.507	42.057
23	24.005	31.451	35.843	39.706	43.296
24	24.971	32.543	36.988	40.897	44.527
25	25.937	33.631	38.128	42.081	45.750
26	26.903	34.717	39.264	43.259	46.966
27	27.867	35.800	40.395	44.432	48.175
28	28.832	36.881	41.523	45.599	49.377
29	29.795	37.960	42.647	46.761	50.573
30	30.759	39.036	43.768	47.919	51.764
31	31.722	40.111	44.886	49.032	52.950
32	32.685	41.184	46.001	50.222	54.131
33	33.647	42.255	47.113	51.368	55.308
34	34.610	43.324	48.223	52.511	56.480
35	35.571	44.392	49.331	53.651	57.648
36	36.533	45.459	50.436	54.787	58.813
37	37.495	46.524	51.539	55.921	59.974
38	38.456	47.588	52.640	57.052	61.132
39	39.417	48.651	53.739	58.181	62.287
40	40.378	49.712	54.836	59.308	63.439
41	41.338	50.773	55.932	60.432	64.588
42	42.299	51.832	57.026	61.554	65.735
43	43.259	52.890	58.119	62.673	66.879
44	44.219	53.948	59.210	63.791	68.020
45	45.179	55.004	60.299	64.907	69.160
46	46.139	56.060	61.387	66.022	70.297
47	47.099	57.114	62.474	67.134	71.432
48	48.058	58.168	63.560	68.245	72.565
49	49.018	59.221	64.644	69.354	73.696
50	49.977	60.273	65.727	70.462	74.825

6-2 Calcul de la période des oscillations sphéroïdales ayant la plus basse fréquence. Application au cas de la terre.

1. Calcul de la période

Les tables du paragraphe 6-1 donnent les valeurs de $\eta = \omega a / C_t$.

Or $C_t = \sqrt{\mu/\rho}$ et $\omega = 2\pi/T$, donc $T = \frac{2\pi a}{C_t \eta}$ où $a =$ rayon de la sphère (6-1)
et $T =$ période.

2. Calcul de C_t

$C_t = \sqrt{\mu/\rho}$ où $\mu =$ module de cisaillement du matériau
et $\rho =$ la densité du milieu.

Or $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ où $E =$ module de Young (6-2)
et $\nu =$ coefficient de Poisson.

Pour l'acier, on a : $\mu(\text{acier}) = 7,907 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ puisque
 $E(\text{acier}) = 20,4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ et $\nu(\text{acier}) = 0,29$.

Comme la densité de la terre vaut $\rho(\text{terre}) = 5,52 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, on obtient en supposant la terre aussi rigide que l'acier, la vitesse de propagation des ondes transversales qui vaut :

$C_t = \sqrt{\mu/\rho} = 3,785 \text{ m/s}$ (6-3)

3. Calcul de la période T dans le cas de la terre

On suppose également la terre incompressible, ce qui revient à dire $\lambda = \infty$. En consultant la table des fréquences des oscillations

sphéroïdales, on trouve que la fréquence la plus basse correspond au mode fondamental pour $n = 2$. On a dans ce cas $\eta = 2,666$. (6-4)
 En prenant le rayon de la terre $a = 6,37010^6$ m, on obtient avec (6-1), (5-3) et (6-4) :

$$T = \frac{2\pi \times 6,370 \times 10^6}{2,666 \times 3,785} = 3.966,37 \text{ secondes} \quad (6-5)$$

$$= 66,11 \text{ minutes}$$

4. Remarque

On a constaté expérimentalement que l'onde élastique se propageant autour de la terre et qui possède la plus grande longueur d'onde et la plus basse fréquence correspond effectivement aux oscillations sphéroïdales pour $n = 2$. La période observée est de ± 54 minutes. Pour obtenir ce résultat mathématiquement, il faudrait tenir compte de la pesanteur, de la rotation de la terre, de l'inhomogénéité de la terre qui est formée de couches de natures différentes et il faudrait aussi connaître les valeurs précises des constantes élastiques des différents matériaux qui la composent.

6-3 Modes de vibration de la sphère

On trouvera ci-dessous les expressions générales des 2 types de vibrations de la sphère dont les caractéristiques sont décrites dans le paragraphe 6 du chapitre 3.

1. Modes torsionaux.

$$\begin{aligned}
 (u_T)_r &= 0 \\
 (u_T)_\theta &= \frac{-mB}{n(n+1)} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t} \\
 (u_T)_\phi &= \frac{-B}{n(n+1)} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} (E \sin m\phi - F \cos m\phi) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \quad (6-6)$$

Remarquons qu'il n'existe pas de mode torsional pour $n = 0$.

2. Modes sphéroïdaux.

$$\begin{aligned}
 (u_S)_r &= \left[-\frac{A}{h^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right) - \frac{n(n+1)C}{k^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} \right] P_n^m(\cos\theta) \\
 &\quad (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t} \\
 (u_S)_\theta &= \left[-\frac{A}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} - \frac{C}{k^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\
 &\quad (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t} \\
 (u_S)_\phi &= m \left[\frac{A}{h^2} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{3/2}} + \frac{C}{k^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \\
 &\quad (E \cos m\phi + F \sin m\phi) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \quad (6-7)$$

3. Représentation graphique pour $m = 0$.

Lorsque le problème est indépendant de la longitude, on a $m = 0$ et les déplacements se représentent assez simplement. (Fig. 6-1).

4. Analogie avec les ondes de Rayleigh et de Love ($m = 0$).

Les caractéristiques des ondes de Rayleigh sont décrites dans le chapitre 5. Quant aux ondes de Love, elles apparaissent dans un milieu semi-infini formé d'un substrat et d'une couche superficielle de natures différentes. L'amplitude des déplacements est constante dans la couche superficielle et diminue exponentiellement avec la profondeur dans le substrat. C'est une onde de surface si on considère l'ensemble couche + substrat. Le déplacement associé à une onde de Love a une seule composante transversale (perpendiculaire à la direction de propagation et parallèle à la surface du milieu).

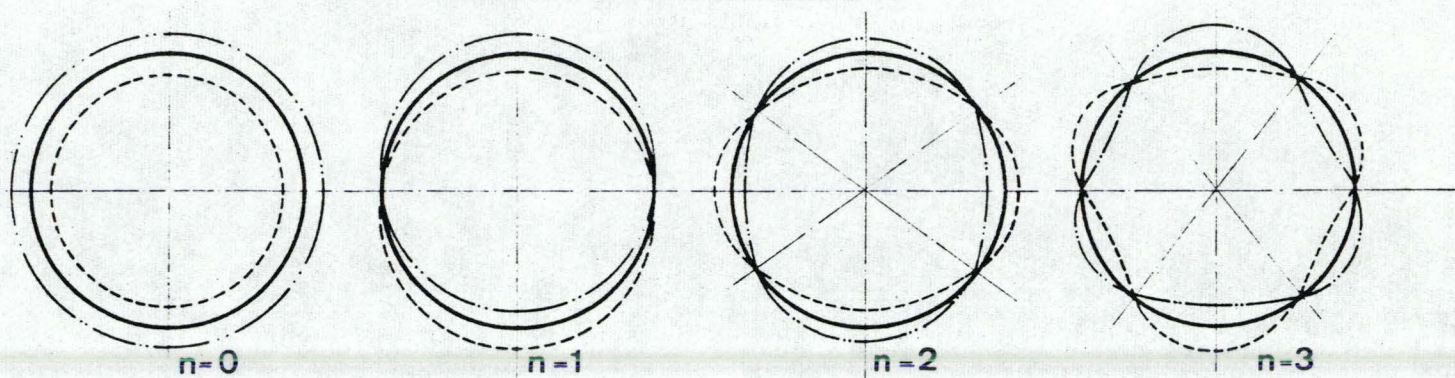
Or, quand $m = 0$, il ne subsiste dans les déplacements torsionaux de la sphère que la composante $(u_T)_\phi$, tandis que les déplacements sphéroïdaux ne conservent que les composantes $(u_S)_r$ et $(u_S)_\theta$. En envisageant le problème en fonction d'ondes progressives dans la direction \vec{e}_θ , il apparaît donc que les modes torsionaux n'ont qu'un déplacement transversal parallèle à la surface, alors que le déplacement associé aux modes sphéroïdaux est situé dans le plan normal à la surface et contenant la direction de propagation.

On voit donc l'analogie qui existe entre les déplacements associés :

- a) aux modes torsionaux et aux ondes de Love;
- b) aux modes sphéroïdaux et aux ondes de Rayleigh.

(voir figure 6-2).

modes sphéroïdaux (m=0)



modes torsionaux (m=0)

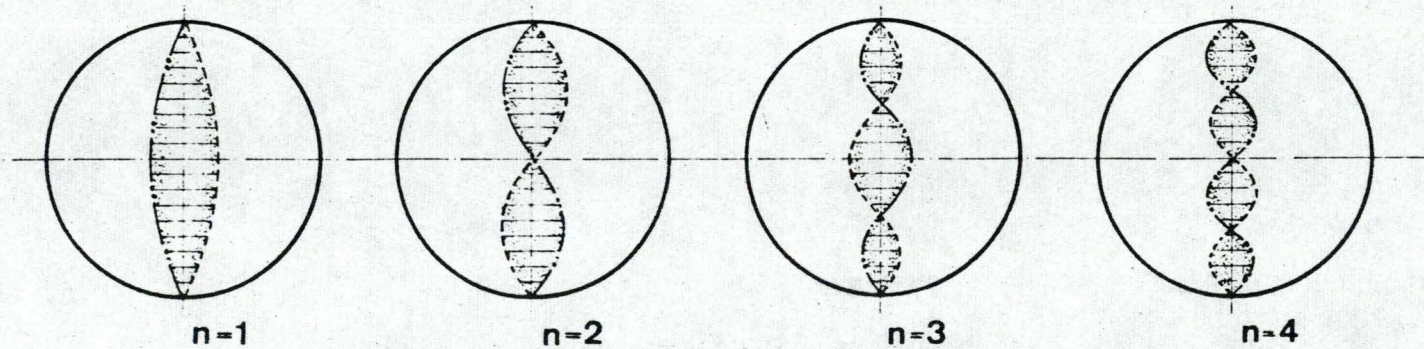


Figure 6-1.

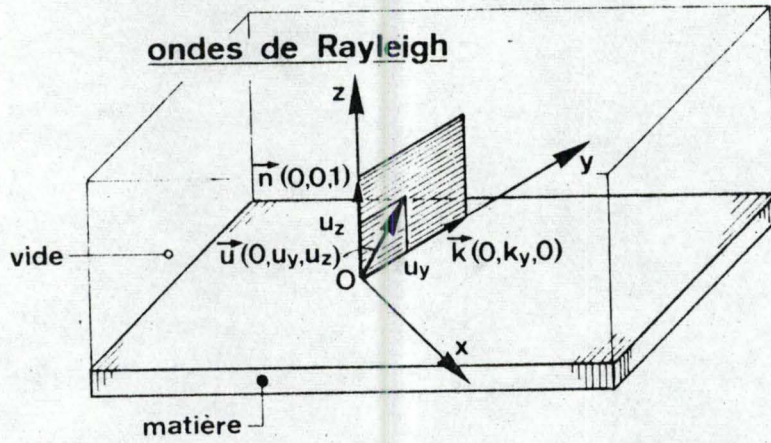


Figure 6-2(a).

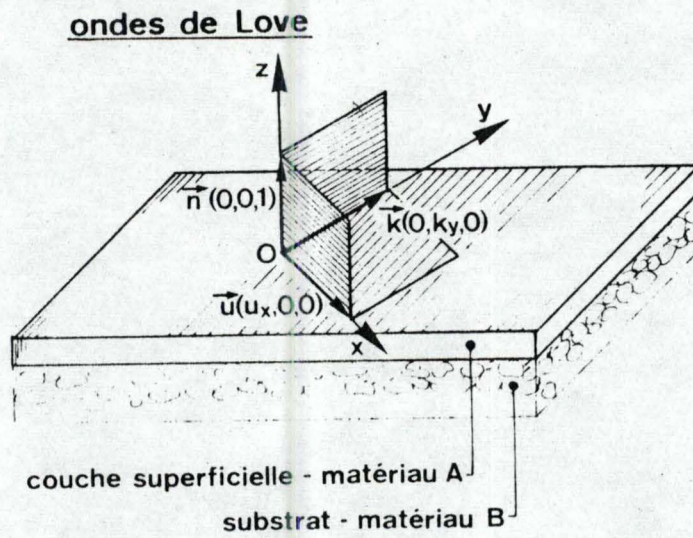


Figure 6-2(b).

CONCLUSIONS ET EXTENSIONS

Le calcul des modes de vibration d'une sphère homogène ou d'une cavité sphérique dans un milieu homogène est un problème bien connu. Il existe plusieurs méthodes de résolution (cfr chapitre III) ; on a choisi dans ce travail la méthode de Sezawa plutôt que celle d'Eringen afin d'avoir un développement direct jusqu'à l'expression des déplacements sphéroïdaux et torsionaux. En effet, Eringen, après avoir calculé les composantes u_r , u_θ et u_ϕ du déplacement complet, fait appel aux résultats de Sato et Usami, lesquels se sont référés au travail de Sezawa pour scinder le déplacement complet en parties sphéroïdale et torsionale.

Le calcul des ondes de surface, quant à lui, exige encore quelques développements. On ne connaît en effet aucune forme explicite d'ondes de surface autour de la sphère ou de la cavité sphérique.

En fait, pour la sphère, on connaît explicitement les modes de vibration ordinaires et leurs fréquences (calculées par Sato et Usami (24)). Plus précisément, pour chaque mode de la sphère (c'est-à-dire m et n fixés), l'équation des fréquences détermine les valeurs de $\eta = \omega a/C_t$ où $C_t = \mu/\rho$ est fixée par le matériau : ainsi, la fréquence angulaire $\omega = \eta C_t/a$ est inversement proportionnelle au rayon. Cela signifie que pour un mode donné, les fréquences associées sont d'autant plus grandes que le rayon de la sphère est petit. D'autre part, la dépendance des déplacements par rapport à r (distance au centre) est déterminée par l'argument (kr ou hr) des fonctions de Bessel qui est proportionnel à $\eta r/a$. Pour une fréquence donnée, la dépendance est donc proportionnelle à la profondeur relative r/a .

Le problème de la cavité sphérique est immédiat lorsqu'on a résolu celui de la sphère : il suffit de choisir les fonctions de Bessel appropriées. Dans ce cas cependant, les fréquences (complexes) des vibrations ne sont pas connues. Pour les calculer, il faudrait employer un procédé numérique correspondant à celui qu'ont employé Sato et Usami pour la sphère ;

la difficulté vient du fait qu'il s'agit ici de fonctions de Hankel à variable complexe dont on ne connaît pas très bien le comportement.

Dans le cas particulier des vibrations radiales ($n=0$), on a pu calculer aussi bien les fréquences des vibrations de la sphère que celles de la cavité sphérique. On constate une différence importante entre les 2 cas : pour la sphère, il existe une infinité de fréquences possibles alors qu'il n'en existe qu'une seule pour la cavité. Ce fait est peut-être spécifique au cas particulier et il demande à être confirmé ou infirmé par le calcul des fréquences complexes de la cavité pour d'autres valeurs de n .

Les ondes de surface ordinaires du cas plan (ondes de Rayleigh) possèdent deux caractéristiques importantes :

1. un facteur de pénétration par lequel leur amplitude diminue avec la profondeur;
2. une vitesse de propagation fixée pour chaque matériau et déterminée par "l'équation de Rayleigh".

C'est précisément parce que, lorsque n tend vers l'infini, la vitesse de propagation des vibrations sphéroïdales tend vers cette vitesse caractéristique que l'on considère que celles-ci deviennent des ondes de surface. Sur ce point, autant la méthode utilisée par Ansell (2) que celle que l'on a utilisée au chapitre V se basent sur le même raisonnement.

Toutefois, on peut se demander si l'égalité des vitesses de propagation est une preuve suffisante pour considérer que l'on obtient des ondes de surface. Cela revient en effet à éliminer a priori le cas d'ondes de surface se propageant autour d'une sphère avec une vitesse différente de celle des ondes de surface dans un milieu semi-infini bordé par un plan.

Il est utile de constater à cet égard que les ondes de surface autour d'une sphère ou d'une cavité sphérique ne sont pas déterminées avec un facteur de pénétration comme les ondes de Rayleigh ordinaires. Le rôle du facteur de pénétration semble lié dans ce cas à la variation de l'indice n

(des fonctions de Bessel). Une approche sommaire pour les premières valeurs de n montre en effet que lorsque n augmente, l'amplitude des vibrations sphéroïdales diminue progressivement au centre de la sphère. Ce phénomène demande à être vérifié à l'aide d'une méthode numérique pour les grandes valeurs de n et s'il est confirmé, on aura une autre preuve que les vibrations sphéroïdales se comportent comme des ondes de surface lorsque n tend vers l'infini.

La méthode de Ansell (2) citée plus haut est intéressante car elle donne une transformation des ondes stationnaires en ondes progressives dans la direction θ autour de la sphère, ce qui permet de mettre en évidence plus explicitement les ondes de surface. De plus, ce procédé est applicable à la fois dans le cas de la sphère et dans celui de la cavité sphérique.

En fait, pour une perturbation ponctuelle ($m = 0$), on a des déplacements proportionnels à $\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \nu} e^{i\omega t}$ où $\nu = \nu(\omega)$. Cette forme est obtenue par l'application d'une transformation de Watson sur la forme ordinaire des déplacements. Le noeud de la méthode décrite par Ansell est d'écrire la fonction de Legendre $P_{\nu-1/2}(-\cos \theta)$ en termes de fonctions de Clemmow $E_{\nu-1/2}(\pm \theta)$ par l'intermédiaire de la formule suivante :

$$\frac{\pi}{2} \frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \nu} = E_{\nu-1/2}(-\theta) - E_{\nu-1/2}(-(2\pi-\theta)) + E_{\nu-1/2}(-\theta - 2\pi) - E_{\nu-1/2}(-(2\pi-\theta) - 2\theta) + \dots \quad (C-1)$$

La mise sous forme d'ondes progressives dans la direction de θ vient du fait que lorsque ν est grand, on obtient le facteur $\exp(i\omega(t \pm \theta a))$ dans le développement des fonctions de Clemmow $E_{\nu-1/2}(\pm \theta)$. (a est le rayon de la sphère ou de la cavité sphérique).

ANNEXE 1FONCTIONS SPECIALES
-----A) EQUATIONS DE BESSELL'équation de Bessel cylindrique s'écrit :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

Solution $y(x) = A J_n(x) + B Y_n(x)$

ou

$$y(x) = A H_n^{(1)}(x) + B H_n^{(2)}(x)$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

est la fonction de Bessel
de première espèce

$$Y_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} D_k x^k$$

est la fonction de Bessel
de seconde espèce.

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i Y_n(x) \quad \text{et} \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i Y_n(x)$$

sont les fonctions de Hankel de première et seconde espèces.

Si $x = kr$, l'équation de Bessel cylindrique s'écrit :

$$r^2 \frac{d^2 y(kr)}{dr^2} + 2r \frac{dy(kr)}{dr} + (k^2 r^2 - n^2) y(kr) = 0$$

L'équation de Bessel sphérique s'écrit :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) y(x) = 0$$

Solution :

$$y(x) = A j_n(x) + B y_n(x) \quad \text{ou} \quad y(x) = A h_n^{(1)}(x) + B h_n^{(2)}(x)$$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad \text{et} \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x)$$

sont les fonctions de Bessel sphériques de première et seconde espèce .

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x) \quad \text{et} \quad h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x)$$

sont les fonctions de Hankel sphériques de première et de deuxième espèces.

Si $x = kr$, l'équation de Bessel sphérique s'écrit :

$$r^2 \frac{d^2 j_n(kr)}{dr^2} + 2r \frac{dj_n(kr)}{dr} + (k^2 r^2 - n(n+1)) j_n(kr) = 0 \quad (1)$$

Résultats utilisés dans le mémoire :

a) L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dj_n(kr)}{dr} \right) + k^2 r^2 j_n(kr) = n(n+1) j_n(kr)$$

Divisons par r et dérivons ensuite par rapport à r .

On obtient :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d j_n(kr)}{dr} \right) \right] + k^2 \frac{d}{dr} (r j_n(kr)) = n(n+1) \frac{d}{dr} \left(\frac{j_n(kr)}{r} \right)$$

$$b) \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{d}{dr} (r j_n(kr)) \right] - \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d j_n(kr)}{dr} \right) \right]$$

est identiquement nul.

$$c) - \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (\sqrt{r} J_{n+1/2}(kr)) - \frac{J_{n+1/2}(kr)}{r^{5/2}} \right] = \frac{1}{n(n+1)} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}$$

$$d) \frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} - \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{3/2}} \right) = -r \frac{d}{dr} \left(\frac{J_{n+1/2}(hr)}{r^{5/2}} \right)$$

Les résultats b), c) et d) sont obtenus en utilisant les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \\ \frac{d}{dx} J_n(x) = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \end{array} \right.$$

Si $x = kr$, ces relations s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dr} J_n(kr) = \frac{n}{r} J_n(kr) - J_{n+1}(kr) \\ \frac{d}{dr} J_n(kr) = -\frac{n}{r} J_n(kr) + J_{n-1}(kr) \end{array} \right.$$

B) EQUATION DE LEGENDRE

L'équation de Legendre associée s'écrit :

$$(1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} y(x) = 0$$

où $y(x) = A P_n^m(x) + B Q_n^m(x)$

$P_n^m(x)$ et $Q_n^m(x)$ sont les fonctions de Legendre de première et de deuxième espèce .

Si $x = \cos \theta$, l'équation de Legendre s'écrit :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0$$

ANNEXE II

EXPRESSION DU GRADIENT, DE LA DIVERGENCE,
DU ROTATIONNEL, DU LAPLACIEN
et
CALCUL DU TENSEUR DES TENSIONS EN COORDONNEES
SPHERIQUES.

A) EXPRESSION EN COORDONNEES CURVILIGNES GENERALES

En coordonnées curvilignes générales, l'élément de longueur ds vérifie :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} dx^i dx^k \quad \text{où } g_{ik} = \text{produit scalaire des vecteurs} \\ \text{de base } \vec{e}_i \text{ et } \vec{e}_k.$$

N.B. : $g^{ik} = \frac{1}{g} \cdot \text{cofacteur de } g_{ik}$.

Pour un repère orthonormé $g_{ik} = 0$ pour $i \neq k$.

Posons $g = \det(g_{ij})$ et $e_i = \|\vec{e}_i\| = \sqrt{g_{ii}}$

Dans ces coordonnées, grad, div, rot et laplacien s'écrivent :

a) $\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \text{vecteur covariant dont les composantes sont : } a_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$

b) $\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} a^i)$

c) $\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{tenseur antisymétrique } b_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}$, formé

à partir des composantes covariantes du vecteur.

Remarque :

En 3 dimensions, on obtient donc un tableau 3 x 3 qui n'a que 3 composantes distinctes :

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

(a,b,c) est un vecteur habituellement appelé "le rotationnel".

d) Laplacien $\phi = \nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k})$ où $\sum_k g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$

sont les composantes contravariantes du gradient.

e) Calcul du tenseur des tensions

Le principe des tensions de Cauchy nous dit qu'en un point d'une surface fermée, la densité des forces de contact vis-à-vis de cette surface dépend uniquement de la normale à cette surface au point considéré. Ainsi, la tension en un point P s'écrit :

$$\vec{T} \cdot \vec{n} \quad \text{où} \quad T = \tau_{ij} = \text{tenseur des tensions}$$

\vec{n} = normale extérieure à la surface au point P.

On travaille dans le domaine linéaire de l'élasticité, c'est-à-dire le domaine où la relation tension - déformation est linéaire.

Cette relation s'appelle : LOI DE HOOKE.

Pour un matériau élastique isotrope, la loi de Hooke en coordonnées cartésiennes s'écrit :

(A partir d'ici, on utilise la convention d'Einstein).

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

où τ_{ij} est le tenseur des tensions

$$\varepsilon_{ij} \text{ est le tenseur des déformations } = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right)$$

λ et μ sont les constantes de Lamé du matériau .

δ_{ij} est le symbole de Kronecker

En coordonnées curvilignes générales, la loi de Hooke s'écrit :

$$\tau_{ij} = \left[\lambda g^{ij} g^{mn} + \mu (g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm}) \right] \varepsilon_{mn} = \text{tenseur contravariant}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (\nabla_n u_m + \nabla_m u_n) \\ \nabla_n u_m = \frac{\partial u_m}{\partial x^n} - \Gamma_{mn}^j u_j \text{ est la dérivée covariante par rapport} \\ \text{aux composantes covariantes de } u \\ \Gamma_{jk}^i = \vec{e}^i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \text{ est le symbole du Christoffel.} \end{array} \right.$$

Propriétés

$$1) \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

$$2) \quad \Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right]$$

$$3) \quad \Gamma_{jk}^i = g^{i\alpha} \Gamma_{\alpha,jk}$$

B) EXPRESSION EN COORDONNEES NATURELLES

Dans le cas d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales, on introduit les composantes naturelles qui donnent les "longueurs" des composantes. Les composantes naturelles sont liées aux composantes covariantes et contravariantes par les formules suivantes:

$$\bar{a}_i = \sqrt{a_i a^i} = a^i e_i = \frac{a_i}{e_i}$$

La règle générale est de diviser les composantes covariantes et de multiplier les composantes contravariantes par les modules des vecteurs de base (\vec{e}_i) correspondants.

Exemple en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \\ &= e_1^2 dr^2 + e_2^2 d\theta^2 + e_3^2 d\phi^2 \\ &= d\bar{x}_1 + d\bar{x}_2 + d\bar{x}_3 \end{aligned}$$

Dans ce cas, les formules principales de dérivation deviennent en terme de ces composantes naturelles :

a) grad ϕ = vecteur dont les composantes sont $\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$

b) div \vec{a} = $\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{a}_i}{e_i} \right)$

$$c) (\text{rot } \vec{a})_{ik} = \frac{1}{e_i e_k} \left[\frac{\partial (\bar{a}_k e_k)}{\partial x^i} - \frac{\partial (\bar{a}_i e_i)}{\partial x^k} \right]$$

$$d) \text{Laplacien } \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial \left(\sqrt{g} \frac{1}{(e_k)^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right)}{\partial x^k}$$

e) Le tenseur des déformations en coordonnées naturelles s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_{mn} = \frac{1}{e_m e_n} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^n} e_m \bar{u}_m + \frac{\partial}{\partial x^m} e_n \bar{u}_n - \sum_j (\Gamma_{mn}^j + \Gamma_{nm}^j) \bar{u}_j e_j \right]$$

avec

$$\sum_j (\Gamma_{mn}^j + \Gamma_{nm}^j) = 2 \sum_j \Gamma_{mn}^j$$

La loi de Hooke en coordonnées naturelles s'écrit :

$$\bar{\tau}_{ij} = e_i e_j \left[\lambda g^{ij} g^{mn} e_m e_n \bar{\epsilon}_{mn} + 2\mu g^{im} g^{jn} e_m e_n \bar{\epsilon}_{mn} \right]$$

Puisque les coordonnées sont orthogonales ($g^{ij} = 0$ si $i \neq j$), on a :

$$\bar{\tau}_{ij} = e_i e_j \left[\lambda g^{ij} g^{mn} e_m^2 \bar{\epsilon}_{mm} + 2\mu g^{ii} g^{jj} e_i e_j \bar{\epsilon}_{mm} \right]$$

C) EXPRESSION EN COORDONNEES SPHERIQUES

Les coordonnées x^1, x^2, x^3 sont : r, θ, ϕ

L'élément de surface $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$

La matrice des g_{ik} s'écrit :

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{1,22} = -r \quad , \quad \Gamma_{2,12} = r \quad , \quad \Gamma_{2,33} = -r^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{3,13} = r \sin^2\theta \quad , \quad \Gamma_{3,23} = r^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -r \quad , \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2\theta \quad , \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{23}^3 = \cotg \theta$$

$$g = \det g_{ik} = r^4 \sin^2\theta$$

$$e_1 = \sqrt{g_{11}} = 1 \quad , \quad e_2 = \sqrt{g_{22}} = r \quad , \quad e_3 = \sqrt{g_{33}} = r \sin\theta$$

Les expressions du grad, de la div., du rot et du Laplacien deviennent donc en coordonnées sphériques :

$$a) \text{ grad } \Delta = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} \right)$$

$$b) \text{ div } \vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (u_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (u_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_\phi r)}{\partial \phi} \right]$$

$$= \frac{2u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

$$c) \text{ rot } \vec{w} = \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta w_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r w_\theta) \right], \right.$$

$$\left. \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta w_\phi) \right], \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] \right\}$$

$$\text{rot rot } \vec{w} =$$

$$\left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta w_\phi) \right) \right] \right] \right\},$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (w_\theta) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \right] \right],$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta w_\phi) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta w_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (w_\theta) \right) \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

$$d) \nabla^2 (\Delta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \phi^2}$$

Résultat utilisé dans le mémoire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial (\Delta)}{\partial r}) = \frac{2}{r} \frac{\partial (\Delta)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (\Delta)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Delta)}{\partial r^2}$$

e) Le tenseur des tensions en coordonnées sphériques

Le tenseur des déformations en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_{12} = \bar{\epsilon}_{r\theta} = \bar{\epsilon}_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$$

$$\bar{\epsilon}_{13} = \bar{\epsilon}_{r\phi} = \bar{\epsilon}_{\phi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]$$

$$\bar{\epsilon}_{23} = \bar{\epsilon}_{\theta\phi} = \bar{\epsilon}_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

Pour $m = n$, on a $\bar{\epsilon}_{mm} = \frac{1}{e_m} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} e_m u_m - \sum_j \Gamma_{mm}^j e_j u_j \right)$

$$\bar{\epsilon}_{11} = \bar{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = \bar{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = \bar{\epsilon}_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cotg\theta}{r} u_\theta$$

La loi de Hooke s'écrit :

$$\bar{\tau}_{ij} = e_i e_j (\lambda g^{ij} g^{mm} e_m^2 \bar{\epsilon}_{mm} + 2\mu g^{ii} g^{jj} e_i e_j \bar{\epsilon}_{ij})$$

remarque : $g^{mm} e_m^2 \bar{\epsilon}_{mm} = \bar{\epsilon}_{mm} = \text{div } \vec{u} = \Delta$

Pour $i = j$ $\bar{\tau}_{ii} = e_i^2 (\lambda \frac{1}{2} \Delta + 2\mu \frac{1}{2} \frac{1}{e_i e_i} e_i^2 \bar{\epsilon}_{ii}) = \lambda \Delta + 2\mu \bar{\epsilon}_{ii}$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\bar{\tau}_{\theta\theta} = \lambda \Delta + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

$$\bar{\tau}_{\phi\phi} = \lambda \Delta + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cotg\theta}{r} u_\theta \right)$$

$$\text{Pour } i \neq j, \quad \bar{\tau}_{ij} = e_i e_j \left(0 + 2\mu \frac{1}{2} \frac{1}{2} e_i e_j \bar{\epsilon}_{ij} \right) = 2\mu \bar{\epsilon}_{ij}$$

$$\Rightarrow \left[\bar{\tau}_{\theta r} = \bar{\tau}_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \right.$$

$$\left. \bar{\tau}_{\phi\theta} = \bar{\tau}_{\theta\phi} = \mu \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cotg \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \right.$$

$$\left. \bar{\tau}_{\phi r} = \bar{\tau}_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] \right]$$

ANNEXE III

EQUATION DE LAME

Pour résoudre des problèmes dynamiques en élasticité linéaire isotrope, on se sert :

1. des équations du mouvement

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i \quad \text{où } \tau_{ji} = \text{tenseur des tensions} \quad (\text{A3-1})$$

f = force extérieure par unité de volume

ρ = densité du milieu

a_i = composante de l'accélération.

2. de la loi de Hooke qui donne une relation linéaire entre les tensions et les déformations :

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad \text{où } \epsilon_{ij} = \text{tenseur des déformations} \quad (\text{A3-2})$$

λ et μ sont les constantes de Lamé du milieu

3. du tenseur des déformations qui pour des petits déplacements (c'est-à-dire dans le domaine de la déformation linéaire) s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A3-3})$$

Afin d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles dans les seules variables u_i , on remplace d'abord dans (A3-2) ε_{ij} par sa valeur tirée de (A3-3)

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A3-4})$$

et on introduit ensuite (A3-4) dans (A3-1).

$$\lambda \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_m} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + f_i = \rho a_i$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_m} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho a_i ,$$

ce qui, en notation vectorielle, peut encore s'écrire :

$$\boxed{(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

ou encore, en remplaçant $\nabla^2 \vec{u}$ par $\text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$:

$$\boxed{(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}} .$$

ANNEXE IV

RESOLUTION DE L'EQUATION DE HELMHOLTZ HOMOGENE

En coordonnées sphériques (Annexe II), l'équation de Helmholtz $\nabla^2 F + k^2 F = 0$, s'écrit :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] F(r, \theta, \phi) + k^2 F(r, \theta, \phi) = 0$$

$F(r, \theta, \phi)$ est séparable sous la forme : $F_1(r) F_2(\theta) F_3(\phi)$. En effectuant la séparation, on trouve :

$$\left\{ r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} + (k^2 r^2 - p^2) F_1 = 0 \right. \quad (\text{A4-1})$$

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF_2}{d\theta} \right) + \left(p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right) F_2 = 0 \right. \quad (\text{A4-2})$$

$$\left\{ \frac{d^2 F_3}{d\phi^2} + q^2 F_3 = 0 \right. \quad (\text{A4-3})$$

où p et q sont les constantes de séparation.

La solution de (A4-3) est $F_3(\phi) = E e^{iq\phi} + F e^{-iq\phi}$. Pour l'unicité des solutions sur la sphère, $F_3(\phi)$ doit être de période 2π ; cela impose à q d'être entier. Soit $q = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ensuite, q étant fixé, l'équation (A4-2) n'admet des solutions non triviales régulières que si $p = n(n+1)$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ et $-n \leq m \leq +n$. En posant $\mu = \cos \theta$, l'équation (A4-2) s'écrit :

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 F_2}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dF_2}{d\mu} + n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} F_2 = 0 \quad (\text{A4-5})$$

(A4-5) est l'équation de Legendre associée dont la solution est

$$F_2(\theta) = C P_n^m(\mu) + D Q_n^m(\mu).$$

Par le changement de variable $F_1(r) = R(r)/\sqrt{kr}$, l'équation (A4-1) prend la forme d'une équation de Bessel cylindrique d'indice $n + 1/2$:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - (n + \frac{1}{2})^2) R = 0$$

dont la solution est $R(r) = A J_{n+1/2}(kr) + B Y_{n+1/2}(kr)$.

La solution générale de l'équation de Helmholtz s'écrit donc :

$$F(r, \theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A J_{n+1/2}(kr) + B Y_{n+1/2}(kr) \right] \left[C P_n^m(\cos \theta) + D Q_n^m(\cos \theta) \right] (E e^{im\phi} + F e^{-im\phi})$$

où les constantes A, B, C, D, E et F dépendent de k, n et m .

ANNEXE V

COMPARAISON ENTRE LES POTENTIELS DE LAME ϕ ET $\vec{\psi}$
 DU DEPLACEMENT ET LE ROTATIONNEL ET LA DIVER-
 GENCE \vec{w} ET Δ .

Soit $\vec{u}(r, \theta, \phi, t)$ le déplacement, on a vu dans le chapitre 3 que l'on peut décomposer \vec{u} en potentiels de Lamé ϕ et $\vec{\psi}$ tq $\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}$ (3-5)
 (en ajoutant éventuellement la condition de jauge). (3-6)

Dans ce cas, si \vec{u} est solution de l'équation de mouvement (3-1), les potentiels de Helmholtz doivent vérifier les équations suivantes :

$$c_{\ell}^2 \nabla^2 (r, \theta, \phi, t) = \partial^2 \phi (r, \theta, \phi, t) / \partial t^2 \quad (3-7)$$

et

$$c_t^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} (r, \theta, \phi, t) = \partial^2 \vec{\psi} (r, \theta, \phi, t) / \partial t^2 \quad (3-8)$$

où

$$c_{\ell}^2 = \lambda + 2\mu/\rho \quad \text{et} \quad c_t^2 = \mu/\rho.$$

En choisissant pour ϕ et $\vec{\psi}$ une dépendance par rapport au temps de la forme $e^{i\omega t}$, on trouve facilement que ϕ et $\vec{\psi}$ vérifient les équations suivantes :

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \phi, t) + h^2 \phi(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (\text{A5-1})$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi}(r, \theta, \phi, t) - k^2 \vec{\psi}(r, \theta, \phi, t) = 0 \quad (\text{A5-2})$$

où

$$h = \omega/C_\ell \quad \text{et} \quad k = \omega/C_t.$$

Or, avec $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ et $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, la décomposition (3-5) de \vec{u} donne immédiatement :

$$\nabla(r, \theta, \phi, t) = \nabla^2 \phi(r, \theta, \phi, t) \quad (\text{A5-3})$$

et

$$\vec{w}(r, \theta, \phi, t) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi}(r, \theta, \phi, t) \quad (\text{A5-4})$$

puisque la divergence d'un rotationnel et le gradient d'une divergence sont deux quantités identiquement nulles.

Les comparaisons de (A5-1) avec (A5-3) et de (A5-1) avec (A5-4) montrent que :

$$\phi(r, \theta, \phi, t) = -\frac{1}{h^2} \Delta(r, \theta, \phi, t) \quad (\text{A5-5})$$

et

$$\vec{\psi}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{k^2} \vec{w}(r, \theta, \phi, t). \quad (\text{A5-6})$$

La formule (3-5) peut donc s'écrire :

$$\vec{u}(r, \theta, \phi, t) = -\frac{1}{h^2} \text{grad } \Delta(r, \theta, \phi, t) + \frac{1}{k^2} \text{rot } \vec{w}(r, \theta, \phi, t). \quad (\text{A5-7})$$

REFERENCES

1. ABRAMOWITZ M. et STEGUN I.A., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical Tables, Dover Publications, INC., New-York, 1964.
2. ANSELL, J.H., Legendre Functions, The Hilbert Transform and surface waves on a sphere, Geophys. J.R. Astr. Soc. Chap. 32, pp. 95-117, 1973.
3. BROMWICH T.J.I'A., On the influence of Gravity on elastic waves and in particular, on the vibrations of an Elastic Globe, Proceedings of the mathematical society, vol. 30, 1898.
4. BRUNE J.N., NAFE J.E. et ALSOP L.E., The polar phase shift of surface waves on a sphere, Bulletin of the seismological society of America, vol. 51, n° 2, pp. 247-257, 1961.
5. BURRIDGE, R., The Legendre functions of the second kind with complex argument in the theory of wave propagation, Journal Math. Phys., vol. 45, 1966.
6. CLEMMOW P.C., An infinite Legendre integral transform and its inverse. Proc. Cambridge, Philos. Soc. Vol 57, 1961.
7. COCHRAN J.A., The zeros of Hankel functions as functions of their order, Numerische mathematik 7, 238-250, 1965.
8. DIEULESAINT E. et ROYER D., Ondes élastiques dans les solides, Masson et Cie, Paris 6°, 1974.
9. DÖRING B., Complex zeros of cylinder functions, Mathemat. of comput., 1965.

10. ERINGEN A.C., SUHUBI E.S., Elastodynamics, vol II (Linear theory) Academic Press, New-York, San Francisco, London, 1975.
11. EWING W.M., YARDETZKY W.S., PRESS F., Elastic Waves in Layered Media Mc Graw-Hill B.C. Inc., New-York, Toronto, London, 1957.
12. GRAFF K.F., Wave motion in elastic solids, Clarendon Press, Oxford, 1975.
13. GRAY A. and MATHEWS G.B., Bessel Functions, 2e édition, Dover Publication, New-York, 1966.
14. HUGHES W.F. and GAYLORD E.W., Basic Equations of Engineering science, Schaum Publishing Co, New-York, 1964.
15. LAMB H., The vibrations of an Elastic sphere, Proceedings of the mathematical society, vol. 13, 1881.
16. LANDAU et LIFCHITZ, Théorie de l'élasticité, Editions MIR, Moscou, 1967.
17. LOVE A.E.H., A treatise of mathematical theory of elasticity, Ch.12, vibrations of spheres and cylinders, Cambridge Univ. Press, London and New-York, 1944.
18. LOVE A.E.H., Some Problems of geodynamics, Cambridge Univ. Press, London and New-York, 1911.
19. MAGNUS W. and KOTIN L., The zeros of the Hankel function as a function of its order, Numerische Mathematik, 2, 228-244, 1960.
20. MAGNUS W., OBERHETTINGER F., SONI R.P., Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics, 3e édition, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, 1966.

21. MARINA R.L. and DALLY J.W., Rayleigh wave propagation along curved boundaries, *Develop. Mech*, 5, 819-31, 1969.
22. NAGASE M., Diffraction of Elastic waves by a spherical surface, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 11, n° 3, 1956.
23. NIKIFOROV A. et OUVAROV V., Eléments de la théorie des fonctions spéciales, Editions de Moscou, 1976.
24. RONVEAUX A., Cours de mathématiques appliquées, Fac. Univ. N-D de la Paix, Namur, 1973.
25. PINKNEY H., Surface motion on a solid elastic sphere following a brief localized disturbance, Ph. D. Thesis, Stanford Univ. Stanford California 1956.
26. SATO Y. and USAMI T., Basic study on the oscillation of a homogeneous elastic sphere, *Geophys. Mag.* Vol. 31, 1962.
27. SCHOLTE J.G.J., On seismic waves in a spherical earth, *Kon. Ned. Meteor. inst.* Vol. 65, 1956.
28. SEDOV L., Mécanique des milieux continus, T2, Editions MIR, Moscou 1973.
29. SEZAWA K., On the propagation of Rayleigh waves on plane and spherical surfaces, *Bull. Earthquake Research. Inst. (Tokyo)*, vol. 2, pp. 21-28, 1927.
30. SEZAWA K., Propagation of Love-Waves on a spherical surface and allied problems, *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo)*, vol. 7, pp. 347-456, 1929.
31. SEZAWA K., Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution, *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo)*, vol. 6, pp. 1-18, 1929.

32. SPIEGEL M.R., Vector Analysis, Schaum's outline, New-York, 1959.
33. VIKTOROV I.A., Rayleigh and Lamb waves : physical theory and applications, Plenum press, New-York, 1967.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1.

1-1 Introduction	1
1-2 Table des symboles	3

CHAPITRE 2.

Vibrations radiales d'une sphère et d'une cavité sphérique.

2-1 Vibrations radiales d'une sphère	4
2-2 Vibration radiales d'une cavité sphérique	9

CHAPITRE 3.

Etude des vibrations d'une sphère. Présentation de trois méthodes.

3-1 Position du problème	13
3-2 Méthode des potentiels de Lamé et de Helmholtz	16
3-3 Méthode de Lamb	19
3-4 Méthode de Sezawa	21
3-5 Conditions limites	24
3-6 Les équations des fréquences et les différents types de vibrations	24

CHAPITRE 4.

Vibrations d'une sphère et d'une cavité sphérique.

4-1 Introduction	27
4-2 Résultats principaux du chapitre	28
4-3 Transformation de l'équation de Lamé	31
4-4 Solution des équations aux dérivées partielles déduites de Lamé	35

4-5 Calcul du déplacement \vec{u}	48
4-6 Conditions limites pour une sphère libre	53
4-7 Cas d'une cavité sphérique	65
4-8 Cas où $n = 0$	67

CHAPITRE 5.

Les ondes de surface.

5-1 Introduction	69
5-2 Ondes de surface dans un demi-espace limité pour un plan	70
5-3 Ondes de surface d'une sphère	83
5-4 Ondes de surface d'une cavité sphérique	91

CHAPITRE 6.

Valeurs numériques et représentation géométrique.

6-1 Fréquences des oscillations libres	93
6-2 Calcul de la période des oscillations sphéroïdales ayant la plus basse fréquence. Application au cas de la terre	98
6-3 Modes de vibration de la sphère	99

<u>CONCLUSIONS ET EXTENSIONS</u>	104
--	-----

ANNEXE 1

Fonctions spéciales.

A) Equations de Bessel	107
B) Equation de Legendre	110

ANNEXE 2.

Expression du gradient, de la divergence, du rotationnel, du laplacien et calcul du tenseur des tensions en coordonnées sphériques.

A) Expression en coordonnées curvilignes générales	111
B) Expression en coordonnées naturelles	114
C) Expression en coordonnées sphériques	115

ANNEXE 3.

Equation de Lamé.	121
---------------------------	-----

ANNEXE 4.

Résolution de l'équation de Helmholtz homogène	123
--	-----

ANNEXE 5.

Comparaison entre les potentiels de Lamé ϕ et $\vec{\psi}$ du déplacement et le rotationnel et la divergence \vec{w} et Δ	125
---	-----

<u>REFERENCES</u>	127
-----------------------------	-----