

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Problème de réduction d'un système d'équations différentielles contenant un petit paramètre devant quelques dérivées : applications

Boudrenghien, Jean Marie

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

1976 - 1977

PROBLEME DE REDUCTION D'UN SYSTEME
D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES CONTENANT
UN PETIT PARAMETRE DEVANT QUELQUES
DERIVEES - APPLICATIONS .

PROMOTEUR :

G. PLOTNIKOVA

BOUDRENGHIEN

JEAN - MARIE

FMB 1/1977/9

Je tiens à remercier tous ceux qui ont
collaboré à ce travail et particulière-
ment Madame G. Plotnikova et Monsieur
P. Habets pour leur traduction commentée
de textes russes, de même que Messieurs
D. Wexler et E. Feytmans pour leurs
conseils et critiques précieux.

J.M. Boudrenghien.

INTRODUCTION :

Les associations biologiques sont des systèmes vivants hiérarchisés. Cette hiérarchie apparaît sous divers points de vue et notamment quant aux vitesses d'accroissement propre relatives des populations en interaction. Cette constatation, et le fait de considérer un modèle d'équations différentielles pour décrire des systèmes biologiques; engendre assez naturellement des petits paramètres dans le modèle. Dans de telles circonstances, l'étude d'un second modèle déduit du premier en annulant ces paramètres serait avantageux. Les théorèmes de A.N. Tikhonov - (.1.), (.5.) - nous donnent des conditions suffisantes permettant cette réduction lorsque les paramètres apparaissent devant des dérivées.

La première partie de ce travail est entièrement basée sur (.1.), dont nous avons modifié la démonstration du théorème de base, et sur (.5.), dont nous avons corrigé une légère erreur.

A partir d'une littérature récente (.12.), nous avons très partiellement analysé une méthode qui, lorsque la réduction proposée est licite, fournit la solution du modèle d'équations différentielles original sous forme de séries asymptotiques; cette méthode ne nécessite pas l'intégration des équations.

C'est dans le cadre des oscillations de relaxation (parce qu'elles présentent toutes les caractéristiques du mouvement qui apparaissent dans la première partie) que nous avons fait cette seconde étude.

PRELIMINAIRES : Position des problèmes dans des cas élémentaires et sur des exemples simples.

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \quad t, x, \mu \in \mathbb{R} \\ \mu > 0$$

$$(2) \quad x(t_0) = x_0$$

Considérons l'équation différentielle (1) soumise à la condition initiale (2).

Le théorème de dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport aux paramètres nous dit que la solution de cette équation sera continue par rapport à μ si f est continue par rapport à tous ses arguments et vérifie la condition de Lipschitz par rapport à (x, μ) .

Ainsi, si on considère l'équation

$$(3) \quad \mu \frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ pour (2),}$$

nous voyons que nous avons un problème de continuité de la solution de cette équation en $\mu = 0$.

Donc, si (3) admet une solution pour (2), on ne peut affirmer que cette solution sera proche, pour μ petit, de la courbe d'équation $f(t, x) = 0$.

La question que nous nous posons est de savoir sous quelles hypothèses nous aurons cette proximité et pour quel intervalle de t .

En outre, nous voudrions que ce résultat soit indépendant de petites perturbations dans la condition initiale (2).

Nos conclusions pourront être étendues à des systèmes différentiels plus généraux.

Soit donc (3) où f est continue et bornée sur Ω , ouvert de \mathbb{R}^2 .

Pour $\mu \rightarrow 0$, $\left| \frac{dx}{dt} \right| \rightarrow \infty$ et $\text{sign} \frac{dx}{dt} = \text{sign} f$. Donc si $f(t, \hat{x})$ est non nul, les tangentes aux courbes intégrales sont d'autant plus parallèles à

l'axe ox que μ est petit. La seule situation où l'on peut espérer avoir
 $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \phi(t)$

(où $x(t, \mu)$ désigne une solution de (3) et $x = \phi(t)$ désigne la racine, supposée ici unique et de classe C^1 , de $f(t, x) = 0$)

de façon indépendante des conditions initiales sera donc le cas où f est négatif au dessus de $x = \phi(t)$ et positif en dessous.

Si f est différentiable, la condition suffisante pour avoir cette situation est

$$(4) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\phi(t)} < 0$$

Ce cas sera naturellement appelé le cas stable. Les autres situations possibles sont un cas d'instabilité et deux cas de semi-stabilité (dans ces deux derniers cas, on peut espérer que $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \phi(t)$ pour des conditions initiales d'un côté seulement de $x = \phi(t)$).

Plaçons-nous par exemple dans un des cas de semi-stabilité et voyons ce qui se passe pour $\mu \rightarrow 0$ (fig. 1).

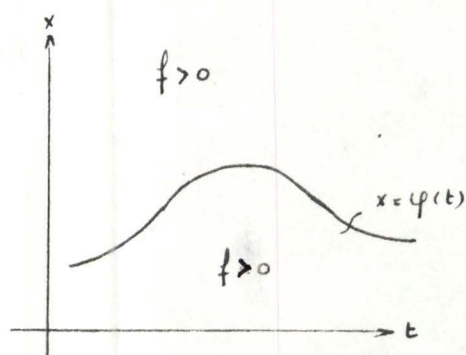


fig. 1

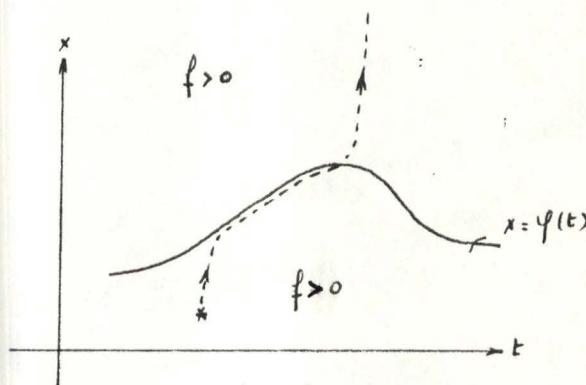


fig. 2

Si on remarque que :

- 1) $(x_0 - \phi(t_0)) f(t_0, x_0) < 0$ est une condition suffisante pour que $x(t, \mu)$ s'approche de $x = \phi(t)$;
- 2) plus μ est petit, plus ce rapprochement est rapide;
- 3) $\frac{dx}{dt}$ ne s'annule qu'en $x = \phi(t)$;

on voit que, pour μ assez petit, $x(t, \mu)$ s'approchera de $x = \phi(t)$ et restera dans son voisinage aussi longtemps que $\phi'(t)$ est positif, et ne traversera cette courbe (pour s'en éloigner dans notre cas) qu'à l'instant où $\phi'(t)$ s'annule (fig. 2).

Des raisonnements analogues peuvent se faire dans les autres cas (stable, instable et semi-stable).

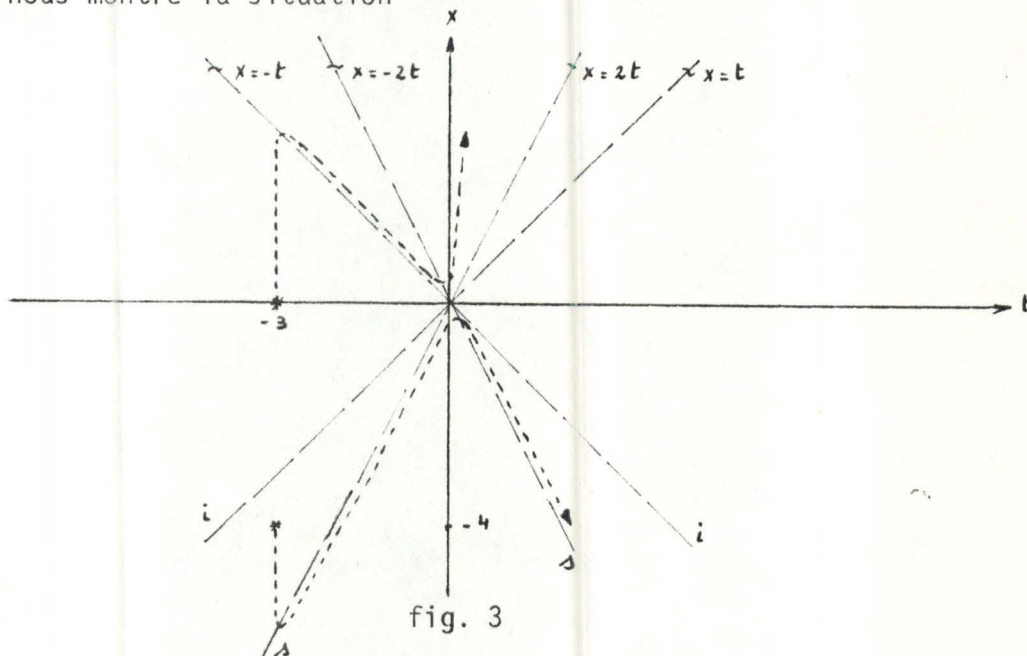
Que se passe-t-il quand $f(t, x) = 0$ admet plusieurs racines ?

Une étude analogue nous montre que la solution $x(t, \mu)$ s'approchera de la racine stable ou semi-stable la plus proche en suivant d'autant plus près la droite $t = t_0$ que μ est petit. Ensuite, elle restera au voisinage de cette racine jusqu'au moment où elle rencontrera soit une autre racine (dont la nature décidera de l'évolution de $x(t, \mu)$), soit un morceau d'une autre nature de la même racine.

Exemple : Considérons

$$(5) \quad \mu \dot{x} = (x^2 - t^2)(x^2 - 4t^2) \quad \mu > 0$$

et analysons qualitativement l'évolution de $x(t, \mu)$ pour deux conditions initiales distinctes $(-3; 4)$ et $(-3, 0)$ et pour μ très petit. La fig. 3 nous montre la situation



De cet exemple (5) se dégagent quatre types de comportement pour la solution de ce problème particulier. Ces quatre types de comportement sont caractéristiques aux systèmes que l'on va envisager.

Ils sont (par exemple pour la solution partant de $(-3, 0)$) :

- 1) un "*mouvement rapide*", correspondant au morceau de trajectoire allant de $(-3, 0)$ aux abords de la racine $x = -t$;
- 2) un "*mouvement d'atterrissage*", correspondant au morceau de trajectoire voisin de l'endroit où la courbe intégrale atteint les parages de $x = -t$;
- 3) un "*mouvement lent*", correspondant au prolongement du "*morceau d'atterrissage*" et allant jusqu'aux abords de l'endroit où la trajectoire quitte le voisinage de $x = -t$.
- 4) un "*mouvement de chute*", correspondant au voisinage de l'endroit où la trajectoire quitte le voisinage de $x = -t$.

N.B. Les frontières de ces différents morceaux pourront être précisées dans la seconde partie de ce travail.

La première partie de ce travail présentera le théorème de Tikhonoy qui donne des conditions suffisantes pour que la solution d'un système de type (6), pour (7), tende pour $\epsilon \rightarrow 0$ vers la solution supposée unique du système (8), toujours pour (7), ceci avec des hypothèses faibles sur les seconds membres de (6)

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, t) & x \in \mathbb{R}^n \\ \epsilon \frac{dy}{dt} = F(x, y, t) & y \in \mathbb{R}^m \\ & \epsilon \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \\ 0 = F(x, y, t) \end{cases}$$

La seconde partie fournira une méthode qui présentera différents morceaux d'une solution de systèmes autonomes particuliers de type (6), ceci sous forme de séries asymptotiques; cette présentation ne nécessitera que la connaissance des seconds membres des systèmes. Les systèmes que nous considérerons dans cette seconde partie sont ceux qui peuvent donner naissance à des oscillations de relaxation.

PREMIERE PARTIE : Théorème de Tikhonov (1948) (1.)

I.1. Soit

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, z) & x \in \mathbb{R}^{n-1}; z, t \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}_0^+ \\ \mu \frac{dz}{dt} = F(t, x, z) & f = (f_1, \dots, f_{n-1}) \end{cases}$$

où f et F sont des fonctions bornées et continues dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^{n+1} et à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^{n-1} et dans \mathbb{R} .

Par le théorème de Peano (.2.), on a que pour les conditions initiales,

$$(1.2) \quad \begin{cases} x(t^{(0)}, \mu) = x^{(0)}, \\ z(t^{(0)}, \mu) = z^{(0)}, \end{cases}$$

le système (1.1) admet une solution

$$(1.3) \quad \begin{cases} x = x(t, \mu), \text{ pour autant que } (t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)}) \in \Omega \\ z = z(t, \mu) \end{cases}$$

Pour $\mu = 0$, on a le système réduit

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, z) \\ F(t, x, z) = 0 \end{cases}$$

soumis à

$$(1.5) \quad x(t^{(0)}) = x^{(0)}.$$

I.2. Hypothèses :

(1.6) De l'équation $F(t, x, z) = 0$, on peut extraire $z = \phi(t, x)$ sur un ouvert D_ϕ de \mathbb{R}^n .

(1.7) ϕ est continue sur D_ϕ .

(1.8) $(t^{(0)}, x^{(0)})$ est intérieur à D_ϕ .

(1.9) Pour (1.5), le système (1.4) admet une solution unique, notée $\bar{x}(t)$, sur l'ouvert d'existence de celle-ci.

(1.10) $z = \phi(t, x)$ est une racine isolée de $F(t, x, z) = 0$ et F change de signe en cette racine.

Autrement dit $\forall d$ tel que $\bar{d} \subset D_\phi, \exists \epsilon_0 > 0$ tel que $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$
 $F(t, x, \phi(t, x) + \epsilon) \cdot F(t, x, \phi(t, x) - \epsilon) < 0$, ceci $\forall (t, x) \in d$.

I.3. Position du problème :

I.3.1. A quelles conditions la solution $x(t, \mu), z(t, \mu)$ de (1.1) tend-elle, pour μ tendant vers 0, vers la solution du système (1.4), équivalent au système (1.11) :

(1.11) $\frac{d\bar{x}}{dt} = f(t, \bar{x}, \phi(t, \bar{x}))$

pour la condition initiale

(1.12) $\bar{x}(t^{(0)}) = x^{(0)}$.

Nous noterons

(1.13) $\bar{z}(t) = \phi(t, \bar{x}(t))$.

I.3.2. La limite de la solution considérée de (1.1) dépend-elle du choix de $z^{(0)}$ et cette limite est-elle stable par rapport aux conditions initiales ?

Par là, nous entendons : s'il y a effectivement convergence de la solution de (1.1) vers la solution de (1.11), pour $\mu \rightarrow 0$ et pour les conditions initiales (1.2), (1.12), y aura-t-il encore convergence pour les conditions initiales

$$\begin{cases} x(t^{(0)} + \delta, \mu) = x^{(0)} + \eta \\ z(t^{(0)} + \delta, \mu) = z^{(0)} + \epsilon \end{cases} \quad \text{et } \bar{x}(t^{(0)} + \delta) = x^{(0)} + \eta$$

où δ, η et ϵ sont de petites perturbations.

I.4. On dira que $z = \phi(t, x)$ est une racine stable si dans (1.10),

$$F(t, x, \phi(t, x) + \varepsilon) < 0 \quad \text{et} \quad F(t, x, \phi(t, x) - \varepsilon) > 0$$

N.B. Si F est différentiable par rapport à z , une condition suffisante de stabilité est $\frac{\partial F}{\partial z}(t, x, \phi) < 0$.

I.5. Soit une surface $z = h(t, x)$; $x \in \mathbb{R}^{n-1}$; $t, z \in \mathbb{R}$, déterminée sur un ouvert $D_h \subset \mathbb{R}^n$. On dira qu'elle est bien orientée par rapport au système d'équations différentielles

$$(1.14) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \psi(t, x, z) \\ \frac{dz}{dt} = \psi'(t, x, z) \end{cases}$$

si le champ de vecteurs défini par les parties droites de (1.14) traverse la surface dans un même sens en tout point de cette surface. Plus précisément, si $z = h(t, x)$ est différentiable et n'a pas de normale perpendiculaire à l'axe oz , la traduction analytique de cette propriété est la constance du signe de S_h sur toute la surface où

$$(1.15) \quad S_h(t, x) = - \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h(t, x)}{\partial x_i} \psi_i(t, x, h(t, x)) + \psi'(t, x, h(t, x))$$

N.B. S_h est le produit scalaire du vecteur du champ au point $(t, x, h(t, x))$ avec la normale à la surface en ce point.

I.6. Considérons le système (1.1). On peut trouver deux surfaces C^1

$$(1.16) \quad z = h(t, x) \quad (t, x) \in K$$

$$(1.17) \quad z = H(t, x) \quad (t, x) \in K$$

(K : compact arbitraire de D_ϕ), n'ayant pas de normales perpendiculaires à l'axe oz et telles que

$$(1.18) \quad \forall \eta \text{ tel que } 0 < \eta < \varepsilon_0 \quad \forall (t, x) \in K$$

$$\begin{cases} \phi(t, x) - \eta < h(t, x) < \phi(t, x) \\ \phi(t, x) < H(t, x) < \phi(t, x) + \eta \end{cases}$$

En effet $\phi(t, x)$ est continue sur le compact K .

Alors $\exists \mu_0 > 0$ tel que $\forall \mu : 0 < \mu < \mu_0$, le champ vectoriel déterminé par les parties droites de (1.1) est bien orienté par rapport à h et à H , sur K . En effet f et F sont bornées dans Ω .

De plus si $z = \phi(t, x)$ est stable, le champ traverse h dans le sens des z croissants et H dans le sens opposé. En effet, on a

$$(1.19) \quad \forall \mu < \mu_0 \quad \forall (t, x) \in K$$

$$\begin{cases} S_h(t, x) = - \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, h(t, x)) + \frac{1}{\mu} F(t, x, h(t, x)) > 0 \\ S_H(t, x) = - \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, H(t, x)) + \frac{1}{\mu} F(t, x, h(t, x)) < 0 \end{cases}$$

Nous avons (1.19) parce que $z = \phi(t, x)$ est stable, que $\eta < \epsilon_0$, que $\mu < \mu_0$ et que $\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial x_i}$ sont continues et donc bornées sur K de même que f_i et F ($i = 1, \dots, n-1$).

Dès lors, pour $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ suffisamment proche de la surface $z = \phi(t, x)$ (notion précisée en I.8), la courbe image de la solution (1.3) traverse $z = h(t, x)$ ou $z = H(t, x)$, pour μ assez petit, en un temps $t_1(\mu)$. De plus, si $\mu \rightarrow 0$, la norme de la vitesse du point représentatif de la solution (1.3) tend vers $+\infty$ (car la composante de cette vitesse suivant l'axe oz , la seule non bornée, tend vers $+\infty$ si $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ est en-dessous de $z = \phi(t, x)$ et vers $-\infty$ si ces c.i. (*) sont au-dessus). Dans ce cas, on voit que $t_1(\mu) \rightarrow t^{(0)}$.

N.B. Ceci est une justification intuitive donnant une image géométrique de la situation. Une justification systématique sera donnée en I.8.

Remarquons que pour les instants ultérieurs à $t_1(\mu)$, cette solution (1.3) reste comprise entre $z = h(t, x)$ et $z = H(t, x)$ d'après (1.19). On a donc

$$(1.20) \quad h(t, x(t, \mu)) \leq z(t, \mu) \leq H(t, x(t, \mu)) \quad \forall t \text{ tel que } t_1(\mu) \leq t \leq T_K(\mu)$$

(*) c.i. sera mis pour "conditions initiales".

où T_K est l'instant pour lequel la projection parallèle à oz sur l'espace \mathbb{R}^n des (x, t) de la courbe intégrale considérée de (1.1) quitte K . En d'autres termes, T_K est l'instant de percée de cette courbe intégrale dans le cylindre $K \times \mathbb{R}$.

I.7. Si $z = \phi(t, x)$ n'est pas stable, l'orientation du champ par rapport à h et H sera inversée et donc :

a) si $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ n'est pas sur $z = \phi(t, x)$, la solution (1.3) ne peut s'approcher de $z = \phi(t, x)$ et donc de la solution de (1.11) quand $\mu \rightarrow 0$. En effet, si en I.6., on choisit $\eta < |z^{(0)} - \phi(t^{(0)}, x^{(0)})|$, le "tube" de rayon η centré en $z = \phi(t, x)$ est interdit à la courbe (1.3);

b) si (1.3) est constamment sur $z = \phi(t, x)$,

exemple :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, z) \equiv 0 \\ \mu \frac{dz}{dt} = F(t, x, z) \equiv z - z_0 \end{cases}$$

c.i. $\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ z^{(0)} = z_0 \end{cases}$

il y aura malgré tout, parmi les courbes intégrales de (1.1) avec des c.i. perturbées, des courbes s'écartant de $z = \phi(t, x)$ c'est-à-dire de $z = z_0$ dans notre exemple.

Conclusion : Si $z = \phi(t, x)$ est une racine instable de $F(t, x, z) = 0$, il n'existe pas de conditions initiales pour lesquelles (1.3) tende, pour $\mu \rightarrow 0$, vers la solution de (1.4) de façon "stable" par rapport aux conditions initiales.

I.8. Introduisons la notion de zone d'influence de la racine stable $z = \phi(t, x)$.

On appellera zone d'influence de la racine stable $z = \phi(t, x)$ l'ensemble des points $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ tels que

si $z^{(0)} > \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$, alors $(t^{(0)}, x^{(0)}, z) \in \Omega$ et $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z) < 0$
 $\forall z$ tel que $z^{(0)} \geq z > \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$

si $z^{(0)} < \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$, alors $(t^{(0)}, x^{(0)}, z) \in \Omega$ et $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z) > 0$
 $\forall z$ tel que $z^{(0)} \leq z < \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$

I.9. Théorème :

Si $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ est intérieur à la zone d'influence de $z = \phi(t, x)$, racine stable de $F(t, x, z) = 0$, alors

$$(1.21) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t)$$

$$(1.22) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \bar{z}(t)$$

Remarquons que cette limite est indépendante du choix de $z^{(0)}$ (cfr (1.11), (1.12)) et que (1.21) et (1.22) restent valables pour des conditions initiales suffisamment peu perturbées par rapport à $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ puisque ce point est intérieur à la zone d'influence.

En outre (1.21) a lieu uniformément sur $[t^{(0)}, \tilde{T}_K]$ et (1.22) uniformément sur tout intervalle du type $[t^*, \tilde{T}_K]$ où $t^* > t^{(0)}$, et $\tilde{T}_K = \inf \{T_K(\mu); \mu > 0\}$.

I.10. ■ Pour fixer les idées, soit $z^{(0)} < \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$. Comme $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ est un point intérieur de la zone d'influence de $z = \phi(t, x)$, $\exists \eta_0$ tel que tous les points (t, x, z) vérifiant $|t - t^{(0)}| \leq \eta_0$; $|x_i - x_i^{(0)}| \leq \eta_0$, $i = 1, \dots, n-1$; $z^{(0)} \leq z < \phi(t, x)$ sont dans cette même zone. L'ensemble de ces points sera noté U .

Soit maintenant $\varepsilon_0 > 0$ et soient $z = h(t, x)$ et $z = H(t, x)$, deux surfaces bien orientées par rapport au champ vectoriel déterminé par les parties droites de (1.1) et tel que

$$\forall (t, x) \in K \quad \phi(t, x) - \varepsilon_0 < h(t, x) < \phi(t, x) < H(t, x) < \phi(t, x) + \varepsilon_0$$

Soient M et δ tels que

$$M > 1$$

$$\forall (t, x, z) \in U \quad |f_i(t, x, z)| < M; \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\forall (t, x, z) \in U \text{ tel que } z \leq h(t, x) \quad F(t, x, z) > \delta > 0$$

(ceci est possible car $F > 0$ et continue sur le compact $\{(t, x, z) : |t - t^{(0)}| \leq \eta_0; |x_i - x_i^{(0)}| \leq \eta_0, i = 1, \dots, n-1; z^{(0)} \leq z \leq h(t, x)\}$).

Soit $t_1^{(0)}$ arbitraire tel que $t^{(0)} < t_1^{(0)} \leq t^{(0)} + \frac{\eta_0}{M}$.

Notons $t_1(\mu)$ la première valeur pour laquelle $x(t, \mu), z(t, \mu)$ traverse h . Pour μ assez petit, une telle valeur existe et est plus petite que $t_1^{(0)}$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$|t_1^{(0)} - t^{(0)}| < \eta_0; \quad z^{(0)} \leq z(t_1^{(0)}, \mu) < h(t_1^{(0)}, x(t_1^{(0)}, \mu)) \text{ et}$$

$$\frac{dz}{dt} > \frac{\delta}{\mu}, \text{ donc aussi } \int_{t^{(0)}}^{t_1^{(0)}} \frac{dz}{dt} dt \geq \frac{\delta}{\mu} (t_1^{(0)} - t^{(0)})$$

$$\text{et si } \mu < \frac{\delta(t_1^{(0)} - t^{(0)})}{L} \quad \text{où } L = \max_{\substack{|t - t^{(0)}| \leq \eta_0 \\ |x_i - x_i^{(0)}| \leq \eta_0; i = 1, \dots, n-1}} (h(t, x) - z^{(0)}) + 1$$

on aurait $z(t_1^{(0)}, \mu) - z(t^{(0)}, \mu) > L$ et donc $h(t_1^{(0)}, x(t_1^{(0)}, \mu)) - z^{(0)} \geq L$, ce qui est absurde.

La courbe $x(t, \mu), z(t, \mu)$ traverse donc $z = h$ sur n'importe quel intervalle $]t^{(0)}, t_1^{(0)}[$ à condition que μ soit assez petit. Ensuite, étant entre h et H , elle ne peut plus quitter cette région, du moins jusqu'à l'instant \tilde{T}_K , c'est-à-dire

$$\forall \mu < \mu_0(\varepsilon_0) \quad \forall t \in [t_1(\mu), \tilde{T}_K], \quad h(t, x(t, \mu)) \leq z(t, \mu) \leq H(t, x(t, \mu))$$

d'où

$$(1.23) \quad z(t, \mu) = \phi(t, x(t, \mu) + \varepsilon(t, \mu))$$

avec $|\varepsilon(t, \mu)| < 2 \varepsilon_0$
 $\forall t$ tel que $t_1(\mu) \leq t \leq \tilde{T}_K$

De plus, nous avons montré que $t_1(\mu) \rightarrow t^{(0)}$, pour $\mu \rightarrow 0$.
 On conclut que $x(t, \mu)$ vérifie le système

$$(1.24) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, \phi(t, x) + \varepsilon(t, \mu))$$

avec les conditions initiales

$$(1.25) \quad x_i(t_1(\mu), \mu) = x_i^{(0)} + \eta_i(\mu) \quad i = 1, \dots, n-1$$

où $\eta_i(\mu) \rightarrow 0$, pour $\mu \rightarrow 0$. En effet

$$\eta_i(\mu) = \int_{t^{(0)}}^{t_1(\mu)} f_i(t, x, z) dt \leq M(t_1(\mu) - t^{(0)})$$

Soit $t^* > t^{(0)}$ arbitraire, $\exists \mu^*$ tel que $\mu \leq \mu^* \Rightarrow t^{(0)} < t_1(\mu) \leq t^*$
 D'autre part,

$$(1.23) \Rightarrow \forall \mu \leq \mu^* \leq \mu_0(\varepsilon_0) \quad (\varepsilon_0 > 0 \text{ arbitraire})$$

$$|\varepsilon(t, \mu)| < 2 \varepsilon_0 \quad \forall t \in [t^*, \tilde{T}_K]$$

Donc

$$(1.24) \quad x(t, \mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \bar{x}(t) \text{ uniformément sur } [t^*, \tilde{T}_K] \quad (*)$$

Montrons que

$$(1.26) \quad x(t, \mu) \xrightarrow{\text{C.U.}} \bar{x}(t) \text{ sur } [t^{(0)}, \tilde{T}_K]$$

Remarquons que $\forall \mu > 0 \quad \forall t, s \in [t^{(0)}, \tilde{T}_K], |x(t, \mu) - x(s, \mu)| \leq M |t - s|$
 et donc que la famille $\{x(t, \mu)\}_{\mu > 0}$ est uniformément équicontinue sur $[t^{(0)}, \tilde{T}_K]$.

Par l'équicontinuité en $t^{(0)}$, on a que $\forall \varepsilon > 0, \exists t_1^* > t^{(0)}$ tel que

(*) th. 4.3, p. 59 in (.3.)

$$\forall \mu > 0 \quad t^{(0)} \leq t \leq t_1^* \Rightarrow |x(t, \mu) - x(t^{(0)}, \mu)| < \epsilon/2$$

Par la continuité de $\bar{x}(t)$ en $t^{(0)}$, on a que $\forall \epsilon > 0, \exists t_2^* > t^{(0)}$ tel que

$$\forall \mu > 0 \quad t^{(0)} \leq t \leq t_2^* \Rightarrow |\bar{x}(t) - \bar{x}(t^{(0)})| < \epsilon/2$$

D'où

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad t^{(0)} \leq t \leq \min(t_1^*, t_2^*) \Rightarrow |x(t, \mu) - \bar{x}(t)| < \epsilon$$

; par (1.24)

$$x(t, \mu) \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{C.U.} \bar{x}(t) \quad \text{sur } [\min(t_1^*, t_2^*), \tilde{T}_K]$$

d'où l'on tire (1.26).

Par ailleurs, d'après (1.23) et (1.24), on a que $z(t, \mu) \xrightarrow{C.U.} \bar{z}(t)$ sur $[t^*, \tilde{T}_K]$ où $t^* > t^{(0)}$, arbitraire et K compact arbitraire de D_ϕ . ■

I.11. Si en outre les parties droites de (1.1) sont définies $\forall z \in \mathbb{R}$, on peut introduire les notions suivantes :

- la zone d'influence $+\infty$ est l'ensemble des points $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ tel que $z^{(0)} > \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$ et $\forall z \in [\phi(t^{(0)}, x^{(0)}), z^{(0)}]$, $(t^{(0)}, x^{(0)}, z) \in \Omega$ et $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z) > 0$;
- la zone d'influence $-\infty$ est l'ensemble des points $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ tel que $z^{(0)} < \phi(t^{(0)}, x^{(0)})$ et $\forall z \in [z^{(0)}, \phi(t^{(0)}, x^{(0)})]$, $(t^{(0)}, x^{(0)}, z) \in \Omega$ et $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z) < 0$.

Nous n'étudierons pas le comportement de (1.3) lorsque $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ est dans l'une de ces deux zones éventuelles.

(Retenons simplement que $\left| \frac{dz}{dt} \right| \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{} \infty \quad \forall (t, x, z) \in \Omega$.)

I.12. Si $F(t, x, z) = 0$ possède plusieurs racines stables isolées $z = \phi_k(t, x)$ ($k = 1, \dots, p$), alors tout point (t, x, z) qui n'appartient pas à la surface déterminée par l'une de ces racines, appartient au bien au

domaine d'influence d'une racine stable quelconque, ou bien à l'une des deux zones infinies éventuelles, ou bien se trouve à la limite des zones d'influence de deux racines stables. Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ n'est pas dans une des zones introduites en I.11, et si $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)}) \neq 0$, le point représentatif de (1.3) dans \mathbb{R}^{n+1} se déplace presque parallèlement à oz ($\mu \ll 1$ et f, F bornées dans Ω), dans le sens des z croissants ou décroissants suivant le signe de $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ et F ne change pas de signe jusqu'au moment où elle s'annule. Dans ce cas, le point limite détermine la racine stable de façon que le point $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ soit intérieur ou à la frontière de la zone d'influence de cette racine stable. Si on a $F(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)}) = 0$ sans que $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ soit sur une surface stable, c'est que ce point est à la frontière de deux zones d'influence, frontière qui définit donc une racine instable et inversement.

N.B. 1) Dans (I.12), $(t^{(0)}, x^{(0)}) \in \bigcap_{k=1}^p D_{\phi_k}$.

- 2) Le fait de considérer des racines semi-stables n'introduit aucune difficulté supplémentaire, ni même un raisonnement différent. C'est pourquoi nous avons exclu ce cas dans les hypothèses du théorème.

I.13. Considérons l'ensemble limite des courbes $x(t, \mu), z(t, \mu)$ pour $\mu \rightarrow 0$. Cet ensemble comprend plusieurs morceaux :

- a) Un segment parallèle à l'axe oz à partir de $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ jusqu'au point $(t^{(0)}, x^{(0)}, \phi(t^{(0)}, x^{(0)}))$ qui se trouve à la racine stable $z = \phi(t, x)$ de $F(t, x, z) = 0$ dans le domaine d'influence de laquelle se trouve le point initial.
- b) Une courbe correspondant aux $\bar{x}(t), \bar{z}(t)$. Cette courbe commence en $(t^{(0)}, x^{(0)}, \phi(t^{(0)}, x^{(0)}))$ et va jusqu'au point $(\tilde{T}_K, x^{(K)}, \phi(\tilde{T}_K, x^{(K)}))$ où $(T_K, x^{(K)})$ est à la frontière du compact arbitraire K choisi dans D_{ϕ} .

N.B. $(t_n, x^{(n)})$ désignera $(t_n, \bar{x}(t_n))$.

Pour les instants ultérieurs à \tilde{T}_K , on ne peut prédire ce qu'est cet ensemble limite dans le cas général.

Nous verrons dans la seconde partie de ce travail que cet ensemble limite peut en fait être une trajectoire périodique ayant le caractère d'oscillations de relaxation.

I.14. On peut considérer de façon analogue le système

$$(1.27) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, z) & x \in \mathbb{R}^n; z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \\ \mu_j \frac{dz_j}{dt} = F_j(t, x, z) & \mu_j > 0; j = 1, \dots, m \end{cases}$$

où f et $F = (F_1, \dots, F_m)$ sont continues et bornées dans leur ouvert de définition commun $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ (ou un quelconque de tels ouverts), et à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m .

Dans ce cas, nous examinons le comportement d'une courbe intégrale décrite par

$$(1.28) \quad x(t, \mu_j), z(t, \mu_j); j = 1, \dots, m,$$

et déterminée par

$$(1.29) \quad \begin{cases} x(t^{(0)}, \mu_j) = x^{(0)} \\ z(t^{(0)}, \mu_j) = z^{(0)} \end{cases}$$

pour $\mu_j \rightarrow 0; j = 1, \dots, m$

Le système réduit correspondant est alors :

$$(1.30) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, z) \\ F(t, x, z) = 0 \end{cases}$$

où

$$(1.31) \quad x(t^{(0)}) = x^{(0)}$$

Supposons que (1.30) a une solution unique $\bar{x}(t), \bar{z}(t)$ pour (1.31); considérons les systèmes d'équations :

$$(1.32) \quad F(t, x, z_1, \dots, z_{j_0-1}, z, z_{j_0+1}, \dots, z_m) = 0$$

$$j_0 = 1, \dots, m$$

On supposera que (1.32) admettant une racine isolée dans le sens défini auparavant :

$$(1.33) \quad z_{j_0} = \phi_{j_0}(t, x, z_1, \dots, z_{j_0-1}, z_{j_0+1}, \dots, z_m) \quad j_0 = 1, \dots, m$$

En outre, on suppose que de (1.33), on peut obtenir de façon univoque

$$(1.34) \quad z_j = \phi_j(t, x) \quad j = 1, \dots, m$$

où les ϕ_j sont définis sur un ouvert D_ϕ de \mathbb{R}^{n+1} .

Dans ce cas, (1.34) sera appelée racine normale isolée de l'équation $F(t, x, z) = 0$.

On dira que (1.34) est stable si chaque fonction (1.33) est stable dans le sens défini plus haut.

La zone d'influence de (1.34) sera ici définie comme l'ensemble des (t, x, z) appartenant aux zones d'influence de toutes les racines (1.33).

Dans ces conditions, Tikhonov a montré le théorème suivant, essentiellement basé sur le même raisonnement que le précédent :

Théorème :

Si $(t^{(0)}, x^{(0)}, z^{(0)})$ est intérieur à la zone d'influence de (1.34), alors

$$(1.35) \quad \lim_{\mu_j \rightarrow 0} x(t, \mu_j) = \bar{x}(t) \quad j = 1, \dots, m$$

$$(1.36) \quad \lim_{\mu_j \rightarrow 0} z(t, \mu_j) = \bar{z}(t) = \Phi(t, \bar{x}(t)) \quad j = 1, \dots, m$$

(1.35) et (1.36) ayant lieu uniformément respectivement sur $[t^{(0)}, \tilde{T}_K]$ et sur $[t^, \tilde{T}_K]$ (mêmes notations qu'au théorème 1) et indépendamment du choix de $z^{(0)}$ et de façon "stable" par rapport aux conditions initiales.*

Si (1.34) est instable, c'est-à-dire si au moins une surface (1.33) est instable, alors on n'a jamais (1.35) et (1.36), du moins de façon "stable" par rapport aux conditions initiales.

Remarque : Si le système (1.33) n'était pas totalement résoluble par rapport à z , les surfaces définies par (1.33) n'auraient pas d'intersection commune. On comprend que dans ce cas, le comportement de (1.28) dépendrait de la façon dont les μ_j tendent vers 0. Ce cas ne sera pas envisagé ici.

I.15. En 1952, Tikhonov écrivit un article reprenant essentiellement l'idée du précédent. En renforçant les hypothèses de son théorème, il a obtenu un énoncé plus adapté aux notions classiques de stabilité (.5.).

Théorème :

Considérons les systèmes suivants :

$$(1.37) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, t) \\ \mu \frac{dz}{dt} = F(x, z, t) \end{cases}, \text{ système complet}$$

pour les c.i.

$$(1.38) \begin{cases} x(t^{(0)}, \mu) = x^{(0)} \\ z(t^{(0)}, \mu) = z^{(0)} \end{cases}$$

$$(1.39) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, t) \\ 0 = F(x, z, t) \end{cases}, \text{ système dégénéré}$$

pour les c.i.

$$(1.40) \quad x(t^{(0)}) = x^{(0)}$$

$$(1.41) \quad \frac{dz}{dr} = F(x, z, t), \text{ système auxiliaire}$$

pour les c.i.

$$(1.42) \quad z(r_0) = z^{(0)}$$

où, dans les systèmes (1.37), (1.39) et (1.41), f et F sont des fonctions continues et bornées d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^{n+m+1} à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ; dans le système (1.39), l'équation $F(t, x, z) = 0$ admet une racine unique isolée $z = \phi(x, t)$ où ϕ est une fonction continue d'un fermé borné \bar{D} de \mathbb{R}^{n+1} à valeurs dans \mathbb{R}^m ; dans le système (1.41), x et t sont des paramètres appartenant à \bar{D} ; nous supposons en outre que les systèmes (1.37), (1.39) et (1.41) ont une solution unique pour les c.i. données, respectivement (1.38), (1.40) et (1.42).

Précisons encore deux notions :

a) $z = \phi(x, t)$ est une racine isolée de l'équation $F(t, x, z) = 0$ dans le sens suivant :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.q. } \forall \bar{z} : |\bar{z} - \phi(x, t)| < \epsilon, \bar{z} \neq \phi(x, t); (x, t) \in \bar{D} \\ \Rightarrow F(t, x, \bar{z}) \neq 0.$$

b) Pour les c.i. $(t^{(0)}, x^{(0)})$, la zone d'influence de la racine isolée $z = \phi(x, t)$ est l'ensemble des points $z^{(0)}$ tels que la solution de (1.41), pour (1.42), tend, pour r tendant vers ∞ , vers $\phi(x^{(0)}, t^{(0)})$.

Dans ces conditions, la solution du système complet tend pour μ tendant vers 0 vers la solution du système dégénéré si :

- 1) la racine $z = \phi(x, t)$ est une solution asymptotiquement stable du système auxiliaire et stable à la Liapounov pour toutes les valeurs fixées dans \bar{D} des paramètres x et t ;
- 2) les conditions initiales $z^{(0)}$ appartiennent à la zone d'influence de $z = \phi(x, t)$ pour les conditions initiales $(t^{(0)}, x^{(0)})$.

Cette convergence est uniforme pour tout temps ne dépassant pas l'instant où la solution de (1.39) quitte le domaine $\bar{D} \times \mathbb{R}^m$.

Remarque :

Ce théorème a lui aussi été généralisé dans (.5.) à des systèmes de type (1.27).

Après la démonstration d'un lemme sur laquelle nous allons revenir, la démonstration de ce théorème se base essentiellement sur la même idée que celle du théorème de 1948; c'est pourquoi nous ne la ferons pas.

Enoncé du lemme :

Si le système (1.41) admet $z = \phi(x, t)$ comme point singulier asymptotiquement stable et stable à la Liapounov pour tout (x, t) dans \bar{D} , alors

$$\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon), \text{ indépendant de } (x, t) \text{ t.q. } \forall z_0 = \phi(t, x)$$

$$|z(0) - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} z(\varepsilon) = z_0 & \text{(a)} \\ |z(r) - z_0| < \varepsilon \quad \forall r > 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

ceci $\forall (t, x) \in \overline{D}$

Or, dans (.6.), on trouve un contre-exemple de(a) :

Soit le système (variables polaires de \mathbb{R}^2) :

$$(1.42) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r(a^2 - r^2)^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

pour lequel $r \equiv 0$ est un point singulier asymptotiquement stable et stable à la Liapounov $\forall a \in [0, 1]$, uniquement pour des c.i. dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon a. Il n'existe donc pas de $\delta > 0$ t.q. les solutions à c.i. dans la boule de rayon δ centrée à l'origine, tendent pour $t \rightarrow \infty$ et pour tout a dans $[0, 1]$, vers $r \equiv 0$.

L'erreur qui a été commise dans la démonstration du lemme est la suivante : en vertu des hypothèses du lemme, on a que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (t_0, x_0) \in \overline{D}, \exists \delta(\varepsilon, x_0, t_0) \text{ t.q. } |z(0) - \phi(t_0, x_0)| < \delta(\varepsilon, x_0, t_0)$$

$$\Rightarrow |z(\varepsilon) - \phi(t_0, x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \text{a1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} z(r) = \phi(t_0, x_0) \quad \text{a2)}$$

$$\text{Soit } \overline{\delta}(\varepsilon, x_0, t_0) = \sup_{(x_0, t_0) \in \overline{D}} \delta(\varepsilon, x_0, t_0). \text{ On a } \overline{\delta} \leq \varepsilon.$$

De ceci, Tikhonov conclut que sur la frontière de la boule centrée en $\phi(t_0, x_0)$ et de diamètre $2\overline{\delta}$, il y a au moins un point \overline{z}_ε t.q. la trajectoire issue de ce point rencontre la boule de diamètre 2ε centrée en $\phi(t_0, x_0)$ en au moins un temps r_0 . Ceci est faux car il se peut que la trajectoire issue d'un point quelconque de cette frontière reste constamment comprise entre les deux boules considérées sans rencontrer celle de rayon ε .

Ceci nous amène à modifier légèrement les hypothèses du théorème de 1952 en demandant que la racine $z = \phi(x, t)$ soit uniformément (par rapport à x et à t dans \bar{D}) asymptotiquement stable et stable à la Liapounov.

. De nombreux travaux ont été faits sur le même problème que celui posé par Tikhonov, même dans le cas où les seconds membres des systèmes différentiels dépendent également du petit paramètre. Dans ce cadre, signalons un théorème de Anosov qui généralise strictement celui de Tikhonov de 1952 à des seconds membres de classe C^1 dépendant du petit paramètre (.8.). Ce théorème sera énoncé dans le paragraphe I.16. Dans (.7.), on peut également trouver une extension de ces théorèmes à des c.i. dépendant également du petit paramètre.

I.16. Exemples d'application du théorème de Tikhonov et du théorème d'Anosov (énoncé dans cette section).

Dans ce paragraphe, nous envisageons d'abord le modèle de Michaelis-Menten d'une réaction enzymatique où intervient naturellement un petit paramètre. Ensuite nous examinerons le problème posé par le modèle de Volterra dans le cas d'une association biologique d'un nombre impair d'espèces qui se trouvent en relation "proie-prédateur".

I.16.1. Modèle de Michaelis-Menten de réaction fermentative.

Considérons le problème suivant :

Que se passe-t-il si on met en présence une certaine quantité E de ferment avec une quantité S de substrat, sachant que le substrat est introduit à vitesse constante v ?

Cette réaction présente trois stades :

1° mise en présence du ferment et du substrat :



2° formation d'un complexe :



3° production d'un produit et de ferment :



Le schéma général de cette réaction est :



(réversibilité a priori des deux "sous-réactions").

Les coefficients k_i sont les vitesses relatives de transition d'un stade à un autre.

Habituellement, on fait l'approximation suivante :

la vitesse de formation de [E S] à partir de P + E peut être négligée ($k_{-2} \approx 0$).

Les équations du modèle de Michaelis-Menten sont :

$$(E.1) \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt} = -k_1 SE + k_{-1} [ES] + v & (E.1.1) \\ \frac{dE}{dt} = -k_1 SE + k_{-1} [ES] + k_2 [ES] & (E.1.2) \\ \frac{d[ES]}{dt} = k_1 SE - k_{-1} [ES] - k_2 [ES] & (E.1.3) \\ \frac{dP}{dt} = k_2 [ES] & (E.1.4) \end{cases}$$

où les quantités S, E, [ES] et P sont exprimées en moles/litre.

De (E.1.2) et (E.1.3), on tire

$$(E.2) \quad \frac{d(E + [ES])}{dt} = 0$$

d'où

$$(E.3) \quad E + [ES] = E_0 \quad ([ES]_0 = 0)$$

Ceci réduit (E.1) et on obtient

$$(E.4) \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt} = -k_1 S(E_0 - [ES]) + k_{-1} [ES] + v & (E.4.1) \\ \frac{d[ES]}{dt} = k_1 E_0 S - [ES] (k_{-1} + k_2 + k_1 S) & (E.4.2) \end{cases}$$

Remarque :

.. A ce niveau, les biologistes déduisent qu'au "steady-state", et donc là où le second membre de (E.4.2) s'annule, on a

$$[ES] = \frac{E_0 S}{K_m + S} \quad (*) \quad \text{où } K_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

Cette relation est effectivement accessible expérimentalement. En fait, cette accessibilité ne trouve pas de justification dans la méthode qui a fourni la relation. Cette méthode nous dit que si le steady-state existe, alors on a (*).

Le théorème de Tikhonov va nous dire qu'en fait (*) est un steady-state stable dans le sens du théorème. Ceci sera du même fait une explication de l'accessibilité de (*) ..

En annulant les seconds membres de (E.4), on obtient les valeurs stationnaires de S et [ES] :

$$(E.5) \quad \bar{S} = \frac{k_m v}{k_2 E_0 - v} ; \quad [ES] = \frac{v}{k_2}$$

Remarquons que $\bar{S} > 0$ et donc

$$(E.6) \quad k_2 E_0 > v$$

Passons aux variables sans dimensions :

$$(E.7) \quad x = \frac{[ES]}{[ES]} ; \quad y = \frac{S}{\bar{S}}$$

(E.4) devient

$$(E.8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{T_x} [ay - x(a + y - 1)] \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{T_y} [-y(a - x) + bx + (a - b - 1)] \end{cases}$$

où

$$a = \frac{E_0}{[ES]} = \frac{E_0 k_2}{v} > 1 \quad \text{par (E.6)}$$

$$b = \frac{k_{-1}(a-1)}{k_{-1} + k_2}$$

$$T_x = (k_1 \bar{S})^{-1}$$

$$T_y = (k_1 [ES])^{-1}$$

Or l'expérience montre que $\frac{T_x}{T_y} = \frac{[ES]}{\bar{S}}$ peut être d'ordre 10^{-4} et même d'ordre inférieur. Dans de telles conditions, $\frac{T_x}{T_y}$ est un petit paramètre du problème.

Par

$$(E.9) \quad \frac{T_x}{T_y} = \epsilon ; \quad t = t/T_y$$

(E.8) devient

$$(E.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{dx}{dt} = ay - x(a - 1 + y) \end{array} \right. \quad (E.10.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -y(a - x) + bx + (a - b - 1) \end{array} \right. \quad (E.10.2)$$

En posant

$$(E.11) \quad \bar{x} = \frac{ay}{(a - 1 + y)} \quad \text{et} \quad (E.12) \quad \xi = x - \bar{x}$$

et en considérant y comme paramètre, on obtient l'équation aux variations correspondant à (E.10.1) :

$$(E.13) \quad \varepsilon \frac{d\xi}{dt} = - (a - 1 + y)\xi$$

qui admet comme solution

$$(E.14) \quad \xi = \xi_0 \exp \left\{ - (a - 1 + y) \frac{t}{\varepsilon} \right\}$$

d'où on déduit que \bar{x} est un équilibre asymptotiquement uniformément stable de (E.10.1) (et isolé), par (E.6) et le fait que y doit être positif.

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Tikhonov qui nous dit que la solution de (E.10) tend vers la solution de (E.10.2) où $x = \bar{x}$, quand ε tend vers 0, et uniformément sur tout compact de l'axe réel positif.

Ceci justifie le fait que l'on puisse atteindre expérimentalement la relation (E.11) qui est, en termes de variables initiales, la relation (*). C'est cette relation qui permet d'obtenir la loi de Michaelis-Menten qui établit un rapport entre la vitesse de réaction enzymatique et la concentration S .

I.16.2. Modèle de Volterra d'une association biologique d'un nombre impair d'espèces en relation "proie-prédateur"

Soit $N_i, (i = 1, \dots, n)$ le nombre d'individus de l'espèce i . En supposant que les N_i soient des fonctions dérivables du temps t , Volterra étudie un cas assez général d'interaction qui peut être décrite par les équations

$$(E.15) \quad \frac{dN_i}{dt} = a_i N_i + \frac{1}{\beta_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} N_i N_j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

où $a_i, a_{ij} \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ et la matrice $A = (a_{ij})$ est antisymétrique.

Supposons que le déterminant de A soit non nul. Dans ce cas, il existe un point d'équilibre non nul $M_0 (N_{10}, \dots, N_{n0})$ défini par les équations

$$(E.16) \quad \beta_i a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} N_{j0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Si $n = 2k$, on peut démontrer le théorème suivant (.9.) :

Théorème :

Si aucune racine de l'équation

$$\text{Det } B = 0 \text{ où } B = (B_{ij}); B_{ij} = \frac{a_{ij} N_{j0}}{\beta_i} - \delta_{ij} \lambda_i$$

n'est un multiple d'une autre, alors il existe, dans un voisinage de M_0 , $k = \frac{n}{2}$ familles à deux paramètres de solutions périodiques.

Malheureusement, si $n = 2k + 1$, alors le déterminant de A est toujours nul et le théorème n'est plus applicable.

Volterra montre ((.10.), p. 59), que dans ce cas, il est impossible que toutes les espèces subsistent avec des variations bornées. D'autre part, en étudiant une association biologique réelle, on ne peut jamais être sûr du nombre exact d'espèces en interaction. En outre, la procédure habituelle consiste à négliger les espèces "trop rares", en supposant implicitement que les solutions d'un modèle complet (avec toutes les espèces en interaction considérées) et d'un modèle réduit sont toujours proches.

Nous allons montrer, à l'aide d'un théorème de Anosov (.8.), que cette hypothèse exige des précautions, et étudier l'approximation du "modèle complet impair" par un modèle réduit pair dans le cas où un des coefficients a_i (a_n par exemple) est beaucoup plus grand qu'un autre, a_k par exemple, et de même signe.

Soit donc le système (E.15) et introduisons un petit paramètre $\varepsilon = \frac{a_k}{a_n} > 0$; (E.15) peut s'écrire

$$(E.17) \quad \begin{cases} \frac{dN_s}{dt} = a_s N_s + \frac{1}{\beta_s} \sum_{j=1}^n a_{sj} N_s N_j, & s = 1, \dots, n; n = 2k + 1 \\ \varepsilon \frac{dN_n}{dt} = a_k N_n + \varepsilon \frac{1}{\beta_n} \sum_{j=1}^n a_{nj} N_n N_j, & \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

que nous appellerons modèle complet.

Appelons

$$(E.18) \quad \frac{dN_s}{dt} = a_s N_s + \frac{1}{\beta_s} \sum_{r=1}^{n-1} a_{sr} N_s N_r, \quad s = 1, \dots, n-1$$

le modèle réduit.

Énonçons le théorème de Anosov :

Soient le système complet

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} = F(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{où } x \in \mathbb{R}^n; y \in \mathbb{R}^m; f, F \in C^1(\Omega); \\ (\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m+1}) \\ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0] ; \varepsilon \ll 1, \end{array}$$

le système réduit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, 0) \\ 0 = F(x, y, 0), \end{cases}$$

et le système auxiliaire

$$\dot{y} = F(x, y, 0) \quad \text{où } x \text{ est paramètre.}$$

Nous supposons que le système d'équations $F(x, y, 0) = 0$ possède une racine $\bar{y} = \bar{y}(x)$, unique et isolée dans un domaine D de \mathbb{R}^n .

Théorème :

Si

(1) $\forall x \in D, \bar{y} = \bar{y}(x)$ est une position d'équilibre uniformément asymptotiquement stable et stable à la Liapounov du système auxiliaire,

(2) $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathcal{D}$, où \mathcal{D} compact de la zone d'influence de la racine $\bar{y} = \bar{y}(x)$,

N.B. Ici la zone d'influence de $\bar{y} = \bar{y}(x)$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ pour lesquels les solutions du système auxiliaire avec les c.i. (x, y) tendent vers \bar{y} pour $t \rightarrow +\infty$,

(3) t_1 est tel que pour $t^{(0)} \leq t \leq t_1$, la solution $\bar{x}(x^{(0)}, t)$ du système réduit ne sort pas de D ,

alors $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$ et $V(x^{(0)}, y^{(0)})$, voisinage de $(x^{(0)}, y^{(0)})$ tels que $\varepsilon > \varepsilon_0$ et $(\bar{x}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}) \in V(x^{(0)}, y^{(0)}) \Rightarrow |x(\bar{x}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, t, \varepsilon) - \bar{x}(x^{(0)}, t)| \leq \delta, \forall t \in [t^{(0)}, t_1]$

(par $x(x^{(0)}, y^{(0)}, t, \varepsilon)$, nous notons la solution du système complet pour les c.i. $(t^{(0)}, x^{(0)}, y^{(0)})$).

Appliquons ce théorème pour $x = N = (N_1, \dots, N_{n-1})$
 $y = N_n$

La racine $\bar{y} = \bar{y}(x)$ est ici

$$(E.19) \quad N_n = 0$$

et le système auxiliaire

$$(E.20) \quad \dot{N}_n = a_k N_n.$$

Nous voyons donc que nous sommes dans les hypothèses du théorème de Anosov uniquement si a_k , et donc a_n , sont négatifs.

Et donc, on peut négliger la $n^{\text{ème}}$ espèce (à coefficient d'accroissement propre élevé) seulement si cette espèce est prédatrice. En effet, dans ce cas seulement, nous pouvons affirmer que les solutions du modèle complet de $2k + 1$ espèces et du modèle réduit de $2k$ espèces sont arbitrairement proches sur un intervalle fini du temps si leurs conditions initiales sont suffisamment proches.

I.16.3. Systemes biologiques - Modèle différentiel - Hiérarchie temporelle.

Les phénomènes biologiques et biochimiques que l'on observe sont en général très complexes. D'une part, un modèle mathématique d'équations différentielles est assez bien adapté à la description de ces phénomènes et d'autre part, l'emploi d'un tel modèle est a priori très délicat.

En effet, la particularité principale de ces phénomènes est une variation temporelle de certaines quantités caractéristiques (nombre d'individus de chaque espèce, biomasse, ...), variation due aux changements d'autres quantités.

Cependant, ces interactions peuvent être complexes (ainsi pour le modèle de Volterra, les seconds membres des équations différentielles sont des polynômes en les variables dépendantes et même, pour les modèles de **Monod** en biochimie, des fractions polynomiales); elles sont aussi multiples (les systèmes biologiques sont des systèmes ouverts et influençables par quantité de facteurs extérieurs).

Du point de vue du mathématicien, il est donc important de disposer de critères permettant la simplification d'un modèle différentiel initial. La simplification la plus naturelle consistant à diminuer le nombre d'équations déterminant le comportement du système. Cette simplification, que l'on fait toujours lorsqu'on écrit un modèle différentiel est en fait très souvent justifiée.

En effet, la plupart des états stationnaires biologiques et biochimiques sont en fait des états d'équilibre jouissant d'un certain type de stabilité. Ceci n'est évidemment pas une justification suffisante de la simplification effectuée. Il faut ajouter à cela le fait que les associations biologiques évoluent suivant une hiérarchie temporelle qui engendre naturellement des petits paramètres dans le modèle d'équations différentielles.

Si, dans le modèle "complet" on néglige l'équation qui décrit la variation d'une quantité $Q(t)$ et que l'on remplace $Q(t)$ par sa valeur stationnaire \bar{Q}

(resp. sa valeur initiale Q_0) dans les autres équations, c'est pour la raison suivante :

On sait que \bar{Q} est un équilibre jouissant d'une certaine stabilité et d'autre part, on s'intéresse particulièrement au comportement de quantités P_i , $i = 1, \dots, n$, qui varient beaucoup plus lentement que Q . Dans ce cas, on sait que lorsqu'on obtiendra une variation sensible des quantités P_i , $i = 1, \dots, n$, la quantité Q aura atteint une valeur très proche de \bar{Q} depuis longtemps.

Ceci justifie intuitivement le fait que l'on puisse souvent remplacer les "variables rapides" par leur valeur stationnaire (resp. les "variables lentes" par leur valeur initiale, ceci par un raisonnement analogue).

La théorie de Tikhonov est une justification systématique de cette simplification.

Sous certaines hypothèses, nous disposons de conditions suffisantes nous permettant de dire si une solution de (1.1), pour μ petit, est une approximation uniforme de la solution de (1.4), respectivement pour les c.i. (1.2) et (1.5) et cela dans des domaines de variations bien définis des variables x et t .

Dans un cadre plus restreint (celui de systèmes de type (1.1) autonomes et admettant des trajectoires ayant le caractère d'oscillations de relaxation), nous allons d'abord définir la notion de solution discontinue de systèmes du type (1.4); ensuite, nous verrons dans quelles circonstances cette solution est approximée de façon uniforme par la solution (que nous supposerons unique) de (1.1); finalement, nous construirons des séries asymptotiques de différents "morceaux" de la solution de (1.1), séries qui ne nécessiteront que la connaissance du second membre de (1.1).

SECONDE PARTIE : Présentation asymptotique des équations de différents "morceaux" de solution d'un système différentiel, dans le cadre d'oscillations de relaxation (.12.)

II.A. Oscillations de relaxations.

II.A.1. Exemple :

Considérons le système

$$(II.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y - \frac{1}{3} x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad \text{où } t, x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon \text{ petit paramètre réel}$$

et le système dégénéré

$$(II.2) \quad \begin{cases} y - \frac{1}{3} x^3 + x = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Toutes les trajectoires de (II.2) sont sur la courbe d'équation

$$(II.3) \quad y - \frac{1}{3} x^3 + x = 0 \quad (\text{fig. 4})$$

et on a en fait cinq trajectoires entières de (II.2)

$$(-\infty, S_1), (+\infty, S_2), (0, S_1), (0, S_2), (0)$$

(ces cinq trajectoires étant considérées comme morceaux de (II.3)).

Les directions du mouvement sont indiquées par des flèches.

Il faut remarquer que le point de phase de (II.2) commençant son mouvement en P_0 et se trouvant par exemple sur la branche $(-\infty, S_1)$ de (II.3) atteint S_1 en un temps fini. A partir de ce point, il ne sort aucune trajectoire de (II.2). C'est pour cela qu'en ne considérant que le système dégénéré, on ne peut pas faire de conclusion quant au comportement ultérieur d'un tel point de phase.

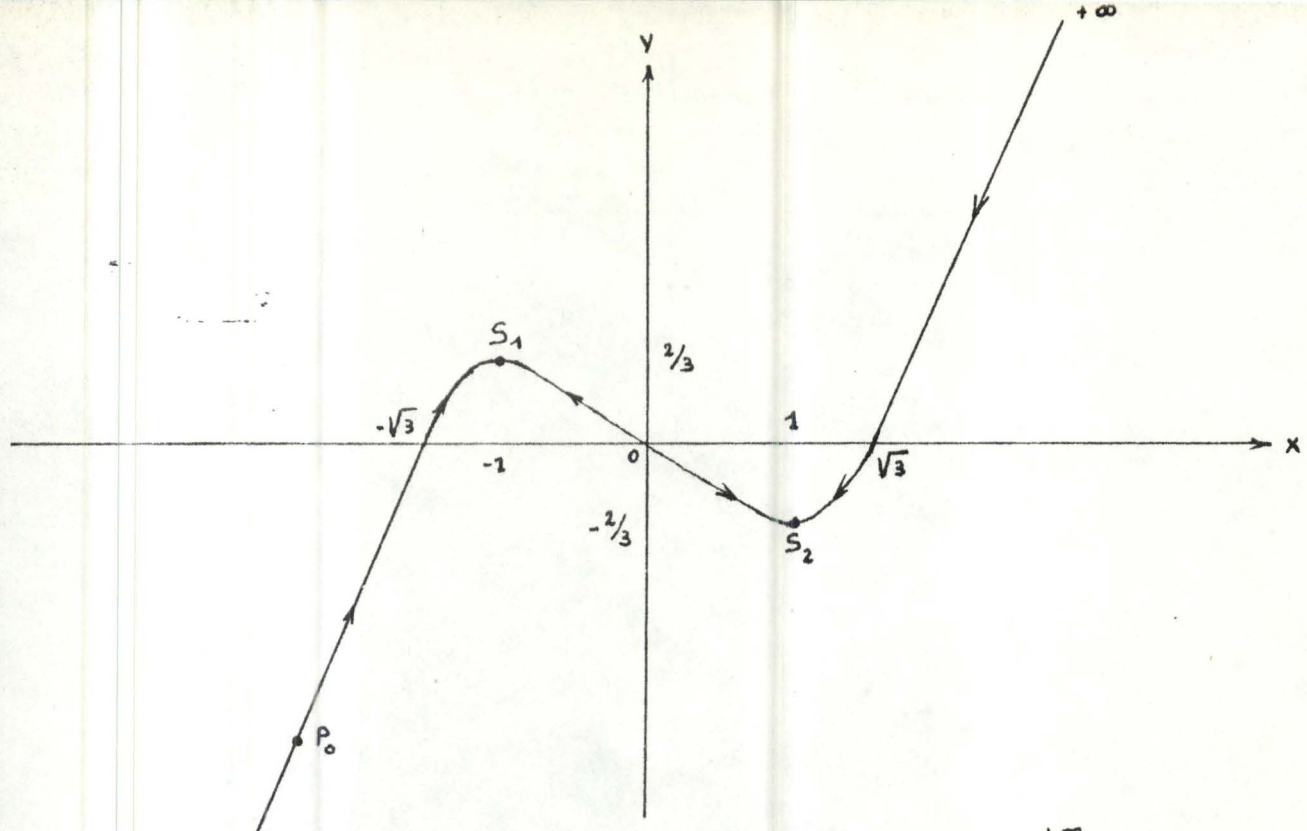


fig. 4

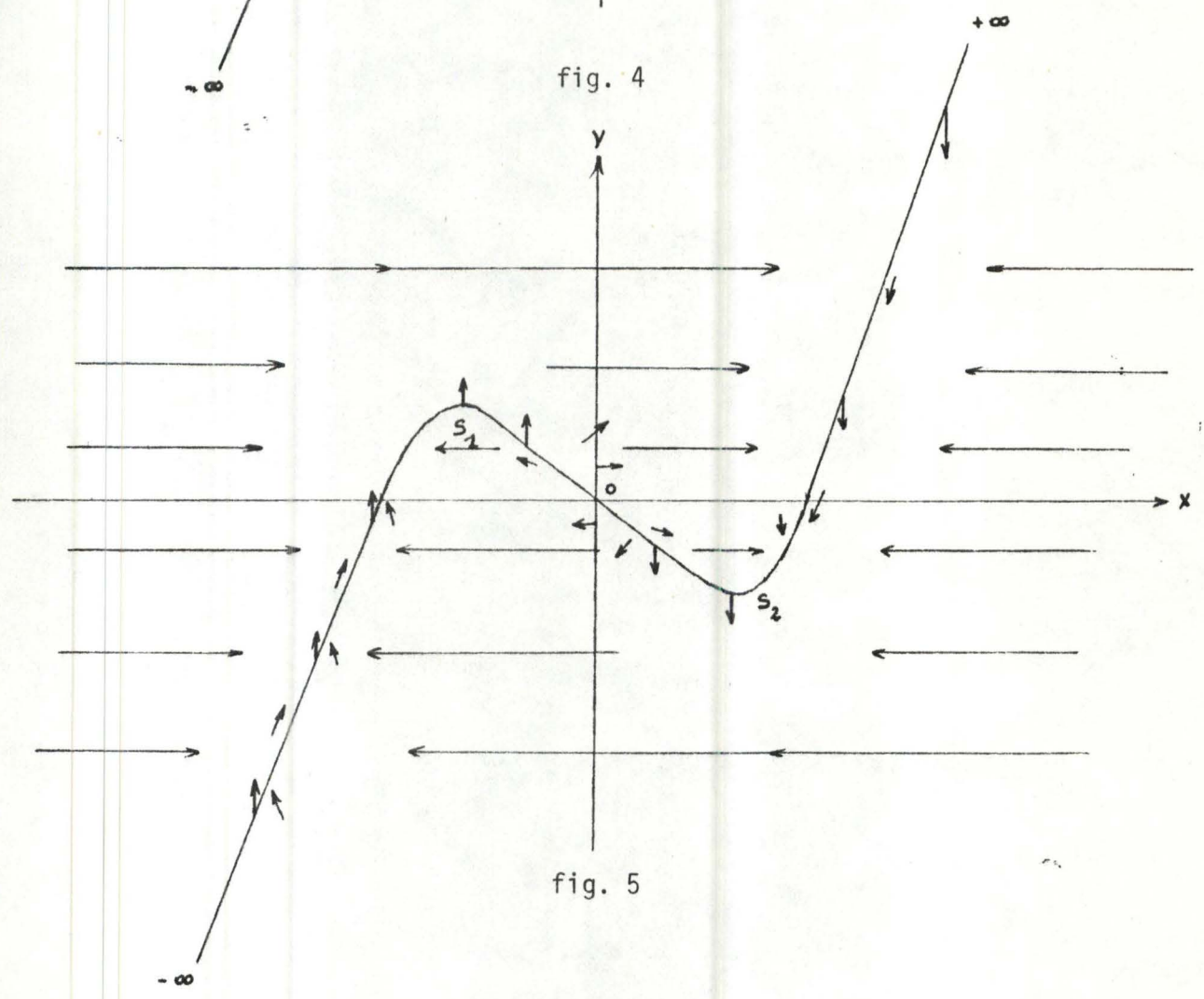


fig. 5

D'autre part, il est facile de construire un champ vectoriel des vitesses de phase du système (II.1) ($\varepsilon \ll 1$) (fig. 5). L'analyse de ce champ montre que la trajectoire de (II.1) commençant en Q_0 qui n'est pas sur (II.3), entre dans un petit voisinage de la branche $(-\infty, S_1)$ ou de la branche $] + \infty, S_2[$ et ensuite passe, pour les temps ultérieurs, au voisinage de la courbe fermée déterminée par les arcs (P_2, S_1) , (P_1, S_2) de (II.3) et les segments horizontaux (S_1, P_1) et (S_2, P_2) . Nous noterons cette courbe Θ_0 (fig. 6).

Au voisinage de ce contour Θ_0 , il existe une trajectoire fermée Θ_ε de (II.1) (cfr par exemple théorème V, section 2, chap. VI de (.11.)).

Les équations (II.1) nous montrent que les morceaux de Θ_ε qui se trouvent au voisinage des arcs (P_2, S_1) et (P_1, S_2) de Θ_0 sont parcourus par le point de phase avec une vitesse lente par rapport à la vitesse de parcours des morceaux voisins des segments (S_1, P_1) et (S_2, P_2) qui pour ε très petit, sont parcourus presque instantanément (la composante horizontale de la vitesse de phase y est d'ordre ε^{-1}).

Ce sont des mouvements périodiques de ce type que l'on appelle mouvements ou oscillations de relaxation.

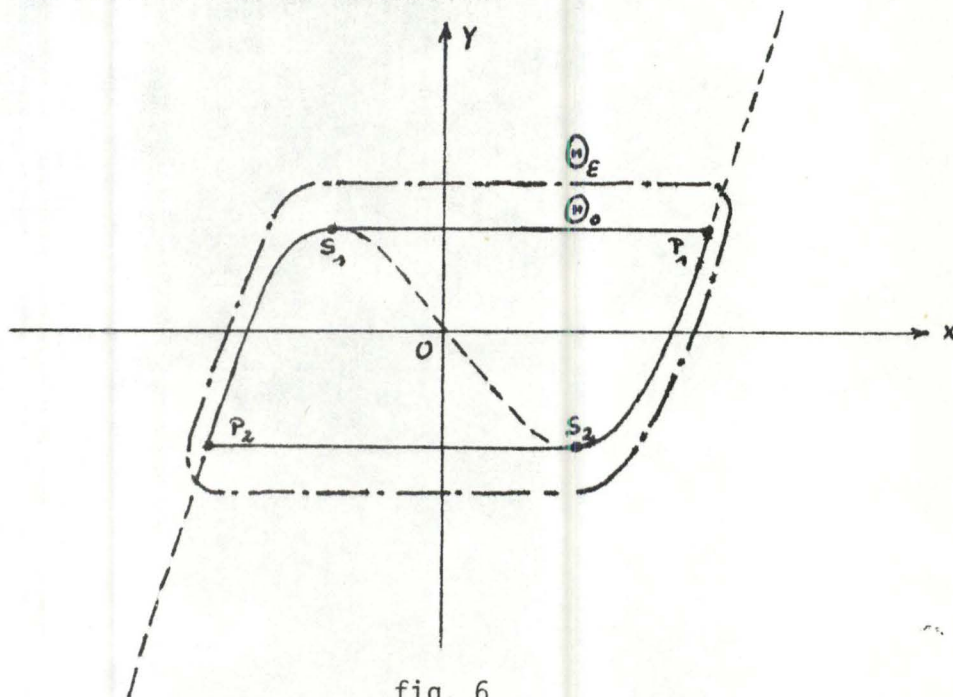


fig. 6

II.A.2. Cas d'un système de deux équations différentielles scalaires autonomes du premier ordre

Considérons le système

$$(II.4) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

où x, y sont des scalaires réels et ϵ réel, petit et positif; f et g de classe C^1 et bornées sur leur domaine de définition commun, et le système dégénéré

$$(II.5) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Nous avons vu sur un exemple que des systèmes de type (II.4) pouvaient admettre des trajectoires fermées ayant le caractère d'oscillations de relaxation. Les différents types de mouvements que l'on observe sur cet exemple sont en fait typiques pour les systèmes de type (II.4) :

- mouvement de chute (voisinage de S_1 et S_2);
- mouvement rapide (voisinage des segments $(S_1 P_1)$ et $(S_2 P_2)$);
- mouvement d'atterrissage (voisinage de P_1 et P_2);
- mouvement lent (voisinage des arcs $(P_1 S_2)$ et $(P_2 S_1)$),

Les mouvements lents et rapides peuvent être expliqués en termes de stabilité et d'instabilité des positions d'équilibre de l'équation

$$(II.6) \quad \epsilon \dot{x} = f(x, y) \quad \text{où } y \text{ paramètre}$$

Les mouvements de chute et d'atterrissage peuvent être expliqués par la bifurcation de la nature de ces positions d'équilibre.

Considérons dans \mathbb{R}^2 la courbe Γ d'équation

$$(II.7) \quad f(x, y) = 0$$

Nous supposons que Γ est unique et que $\forall V_\Gamma$, voisinage de Γ , $\exists A_{V_\Gamma} > 0$ t.q. $\forall x, y (x, y) \notin V_\Gamma \Rightarrow |f(x, y)| \geq A_{V_\Gamma}$.

L'ensemble de tous les points de Γ où

$$(II.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) < 0$$

est vérifiée sera appelé morceau stable de Γ .

L'ensemble des points de Γ où

$$(II.9) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) > 0$$

est vérifiée sera appelée morceau instable de Γ .

Les morceaux stables et instables de Γ sont séparée par les points où

$$(II.10) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$$

est vérifiée. Nous supposerons que ces points sont isolés sur Γ .

Considérons l'équation (II.6). Il existe une correspondance biunivoque entre les points de Γ et toutes les positions d'équilibre de la famille d'équations (II.6) où y est paramètre. En vertu de (II.8) et (II.9), les morceaux stables de Γ sont composés des points d'équilibre stable de (II.6) et les morceaux instables des points d'équilibre instable. Les points séparant ces morceaux sont les points où (II.7) et (II.10) sont vérifiées et sont des points de confluence des positions d'équilibre stables et instables de (II.6).

Analysons les caractéristiques du mouvement sur une trajectoire de phase arbitraire de (II.4) (fig. 7).

En chaque point du plan de phase (x, y) (ou bien dans un domaine plus restreint où on considère (II.4)), le vecteur de vitesse de phase est déterminé par

$$(II.11) \quad \sigma(x, y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), g(x, y) \right) \quad (\text{ex. fig. 5}).$$

Soit Q_0 le point initial du mouvement, s'il est à distance finie, non nulle de la courbe d'équation (II.7), alors le vecteur de vitesse de phase possède une première composante infiniment grande (à condition que Q_0 ne soit pas "trop près" de (II.7)) et une seconde bornée, pour ε très petit. La coor-

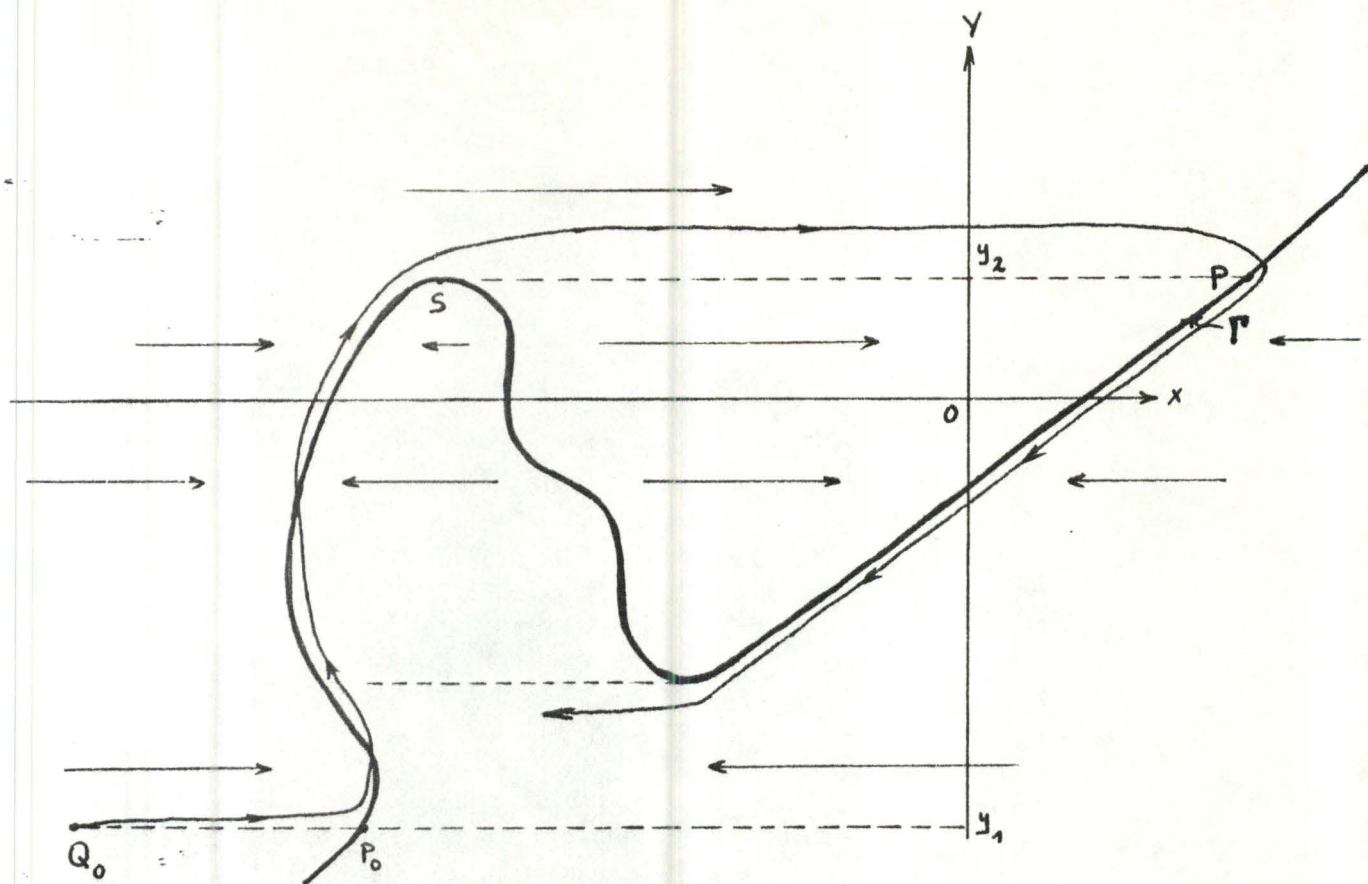


fig. 7

donnée x varie donc très vite pendant un temps où y ne change presque pas. Le mouvement sur la trajectoire de (II.4) considérée est presque horizontal (parallèle à la droite d'équation $y = y_1$ où $Q_0(x_0, y_1)$) en vertu de

$$(II.12) \quad \epsilon \dot{x} = f(x, y_1)$$

Le caractère de ce mouvement ne change pas jusqu'au moment où les composantes du vecteur vitesse de phase deviennent de même ordre. Pour cela, le point de phase doit s'approcher de Γ à une distance d'ordre ϵ . Autrement dit, le point de première coordonnée x qui se déplace suivant la loi (II.12) doit s'approcher d'une des positions d'équilibre stable de (II.12).

Si l'équation (II.12) n'a pas de position d'équilibre stable, le point de phase de (II.4) va à l'infini presque instantanément en suivant une "quasi-parallèle" à la droite d'équation $y = y_1$. Si le point de phase s'est approché effectivement d'un équilibre stable de (II.12), le mouvement ultérieur est plus régulier : le point représentatif "suit" la position d'équilibre

stable de (II.6), qui se déplace sur la courbe Γ si y varie. La variation de y est "lente" en vertu de (II.5) et de nos hypothèses sur g . Si sur ce morceau stable de Γ , il n'existe plus de position d'équilibre de (II.6), alors y atteint une valeur de bifurcation, par exemple $y = y_2$ (fig. 7). Dans le cas où il n'y a pas de telle valeur, le point de phase de (II.4) s'en va à l'infini, "lentement", en restant au voisinage de Γ . Si la position d'équilibre stable disparaît effectivement en $y = y_2$, le point de phase de (II.4) s'en va, "suivant" la droite d'équation $y = y_2$ dans un voisinage d'une autre position d'équilibre stable de

$$(II.13) \quad \epsilon \dot{x} = f(x, y_2)$$

Si cette position n'existe pas, il s'en va à l'infini.

Comme nous l'avons vu, ce type de mouvement peut être une trajectoire fermée et correspondre à des oscillations de relaxation. Il se peut que l'on ait plusieurs trajectoires de ce type pour un même système (II.4) (fig. 8). Ces considérations nous amènent à appeler x la variable rapide et y la variable lente.

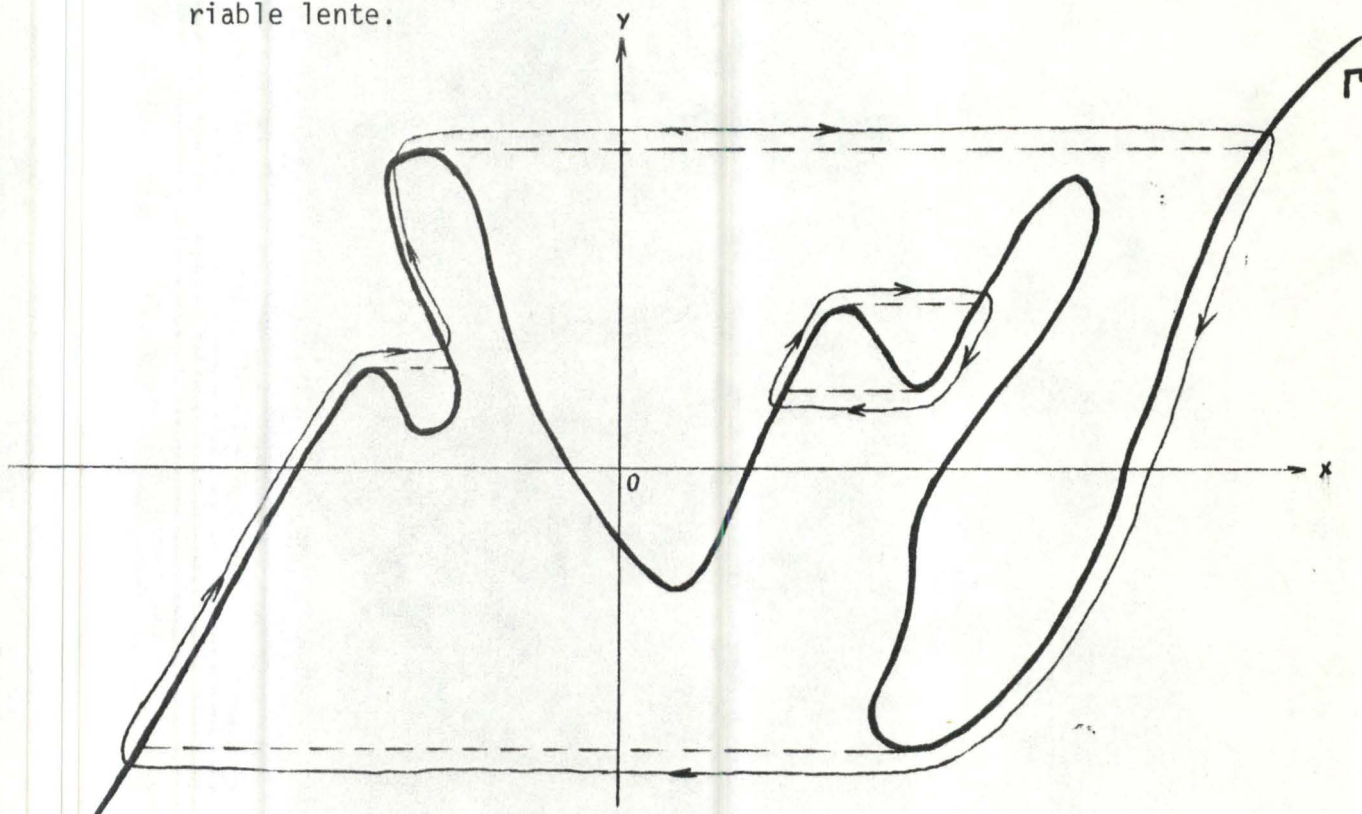


fig. 8

L'équation (II.6) où y est paramètre est l'équation des mouvements rapides correspondant au système (II.4).

Tout ceci peut être répété pour des systèmes (II.4) où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Nous avons analysé le cas $m = n = 1$ car il peut être facilement visualisé. Nous garderons ce cadre, non restrictif, dans la suite.

II.A.3. Equations du système dégénéré et leurs solutions.

Considérons le système (II.5). En vertu de la première équation de (II.5), les trajectoires du système dégénéré se trouvent sur la courbe Γ d'équation (II.7). Soit Γ_* la réunion des morceaux stables de Γ ; soit Γ_0 l'ensemble des points vérifiant (II.10) -

Pour trouver les solutions de (II.5), il faudrait d'abord résoudre (II.7) par rapport à x et trouver

$$(II.14) \quad x = \psi(y),$$

puis résoudre

$$(II.15) \quad \dot{y} = g(\psi(y), y).$$

Soit (x_0, y_0) un point quelconque de Γ tel que

$$(II.16) \quad x_0 = \psi(y_0)$$

et soit

$$(II.17) \quad y = y(t),$$

solution de (II.15) vérifiant

$$(II.18) \quad y_0 = y(t_0).$$

Il est clair que

$$(II.19) \quad \begin{aligned} x &= x(t) \equiv \psi(y(t)) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

est une solution de (II.5) de conditions initiales (x_0, y_0) pour $t = t_0$. Autrement dit, les trajectoires de (II.19) en $t = t_0$ partent de (x_0, y_0) et restent sur Γ , du moins là où Γ a pour équation (II.14). La construction de (II.19) est donc possible pour les valeurs de t telles que

$$(II.20) \quad f(x, y(t)) = 0$$

est vérifiée et peut être résolue de façon univoque par rapport à x . En vertu du théorème de fonctions implicites, on peut dire que la solution (II.19) est bien déterminée de t_0 à t_1 où t_1 est le premier instant où

$$(II.21) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) = 0;$$

c'est-à-dire l'instant où la trajectoire atteint pour la première fois Γ_0 en

$$(II.22) \quad S(x(t_1), y(t_1)).$$

En général, nous ne pouvons rien dire sur le comportement ultérieur de (II.19) en ne considérant que le système (II.5); à partir de (II.22), nous n'avons aucune trajectoire de (II.5) pour des temps croissants. Mais si on peut traiter les trajectoires de (II.5) comme les limites des trajectoires de (II.4) pour $\varepsilon \rightarrow 0$, alors en tenant compte de l'analyse faite plus haut, dans certains cas nous pourrions prolonger (II.19) pour $t > t_1$: Pour $t \in [t_0, t_1[$, le mouvement se passe sur Γ_- ; pour $t = t_1$, il coïncide avec (II.22). Supposons que sur la droite d'équation

$$(II.23) \quad y = y(t_1),$$

il existe une trajectoire de (II.6) qui, pour $r \rightarrow -\infty$, s'approche de $x(t_1)$ et pour $r \rightarrow +\infty$ de x_* , où dans (II.6), on a d'abord fait le changement d'échelle $t = \frac{t}{\varepsilon}$. Dans ce cas, le point de phase de (II.5) fait un saut, pour $t = t_1$, à partir de (II.22) jusqu'au point

$$(II.24) \quad P(x_*, y(t_1))$$

de Γ_- . Le mouvement ultérieur du point de phase se passera sur Γ_- jusqu'à la rencontre éventuelle avec un nouveau point de Γ_0 où on aura de nouveau une "chute" et ainsi de suite. Dans ce cas, la fonction

$$(II.25) \quad (x(t), y(t))$$

est discontinue et vérifie (II.5) partout sauf aux points de chute. Cette fonction ainsi construite sera appelée solution discontinue de (II.5) (dans le cas où elle peut être construite comme nous l'avons fait). La trajectoire correspondante dans le plan de phase est une courbe continue mais comprend des morceaux de deux types qui se succèdent (morceaux de Γ_- parcourus en un temps fini non nul et morceaux de parallèles à l'axe x , parcourus instantanément). Si avec ces morceaux, on obtient une trajectoire fermée, nous l'appellerons trajectoire périodique.

II.B. Présentation asymptotique des solutions par rapport au petit paramètre.

Dans cette section, nous nous proposons de trouver les solutions de (II.4) sous forme de séries en ϵ , séries telles que si on tronque la série à un certain rang, on soit capable de prédire l'ordre de l'erreur commise, en fonction de ϵ .

Dans le cadre que nous nous sommes fixés (celui des oscillations de relaxation), cela pourra être fait pour toute la trajectoire divisée en un nombre fini de morceaux.

Le calcul des coefficients des séries ne nécessitera que la connaissance de f et de g . Ces résultats ont été obtenus par Michenko et Rozov et sont le prolongement des recherches de Pontriaguine.

II.B.1. Détermination du cadre de travail.

Soit

$$(1.1) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

où x, y, ϵ sont des réels et f et g sont définies sur tout le plan de phase (x, y) , différentiables autant de fois qu'il faudra.

Soit

$$(1.2) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

le système dégénéré.

Soit Γ la courbe unique d'équation

$$(1.3) \quad f(x, y) = 0$$

Nous supposons que Γ n'est pas forcément connexe et que tous ses points sont ordinaires dans le sens où

$$(1.4) \quad [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 > 0$$

est vérifiée sur Γ . Les points de Γ pour lesquels on a

$$(1.5) \quad f'_x(x, y) = 0$$

seront dits non réguliers. Nous supposons que les points non réguliers de Γ sont isolés et non dégénérés dans le sens que l'on a :

$$(1.6) \quad f''_x(x, y) \neq 0$$

en tous les points non réguliers de Γ .

Soit le morceau régulier de Γ limité par S^* et S (fig. 9). Sur ce morceau, la relation (1.3) peut être résolue par rapport à x et on peut écrire l'équation de ce morceau sous la forme

$$(1.7) \quad x = x_0(y)$$

où $y \in]s_2^*, s_2[$. Dans ce cas, on a

$$(1.8) \quad f(x_0(y), y) \equiv 0,$$

relation d'où l'on tire

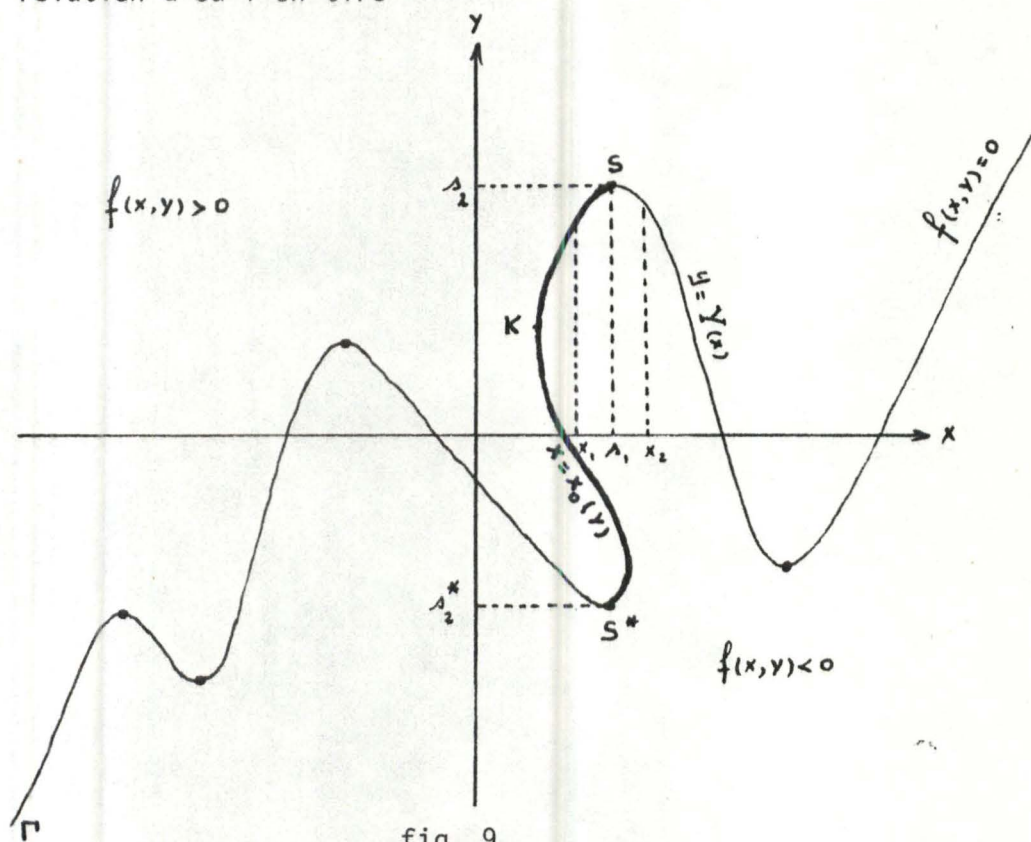


fig. 9

$$(1.9) \quad x'_0(y) = - \frac{f'_y(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)}$$

Soit $S(s_1, s_2)$ un point non régulier de Γ . Au voisinage de ce point, la relation (1.3) n'est pas résoluble par rapport à x . Mais en vertu de (1.4), on a $f'_y(x, y) \neq 0$ au voisinage de S et (1.3) peut être écrite sous la forme

$$(1.10) \quad y = Y(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad s_1 \in]x_1, x_2[$$

Dans ce cas, $Y(s_1) = s_2$ et on a

$$(1.11) \quad f(x, Y(x)) \equiv 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

De (1.11), (1.5) et (1.6) on déduit

$$(1.12) \quad Y'(s_1) = 0, \quad Y''(s_1) = - \frac{f''_x(s_1, s_2)}{f''_y(s_1, s_2)} \neq 0$$

En utilisant la formule de Taylor, écrivons (1.10) sous la forme

$$(1.13) \quad y = s_2 - \frac{f''_x(s_1, s_2)}{2 f''_y(s_1, s_2)} (x - s_1)^2 + \frac{Y'''(s_1 + \theta(x - s_1))}{6} (x - s_1)^3$$

où $\theta \in [0, 1]$ et $x_1 \leq x \leq x_2$.

La relation (1.6) nous montre que dans un voisinage de S , la courbe Γ peut être décrite par l'équation (1.13) d'une "parabole".

Nous dirons que le morceau de Γ compris entre S^* et S est stable si on a

$$(1.14) \quad f'_x(x_0(y), y) < 0$$

$\forall y \in]s_2^*, s_2[$ (instable si > 0).

Comme entre S^* et S , f'_x ne s'annule pas sur Γ , f a des signes différents des deux côtés de Γ . Nous avons supposé que les points non réguliers étaient non dégénérés, et donc chacun de ces points est une frontière commune à un morceau stable et un morceau instable de Γ . Nous allons supposer en outre que sur les morceaux stables et aux points singuliers, il n'y a pas de position d'équilibre de (1.1) (c'est-à-dire qu'en ces points $g(x, y) \neq 0$).

Le point S sera appelé point de chute si en S, on a

$$(1.15) \quad \text{sign} [f''_x(s_1, s_2) \cdot f'_y(s_1, s_2) \cdot g(s_1, s_2)] = 1$$

c'est-à-dire une des quatre situations illustrées à la fig. 10.

La relation (1.15) implique en fait que si S est maximum local (respectivement minimum), alors g(S) est positif (respectivement négatif).

D'après nos hypothèses, g aura le même signe sur tout le morceau stable dont une extrémité est S. Si ce morceau est borné, il est limité par un point de chute et par un point qui n'est pas un point de chute. Le point $P(x^*, y^*)$ du plan de phase de (1.1) appartiendra à la zone d'attraction du morceau stable (1.7) entre S^* et S si $x = x(\theta)$, solution de

$$(1.16) \quad \frac{dx}{d\theta} = f(x, y^*)$$

pour la condition initiale $x(0) = x^*$, vérifie la propriété

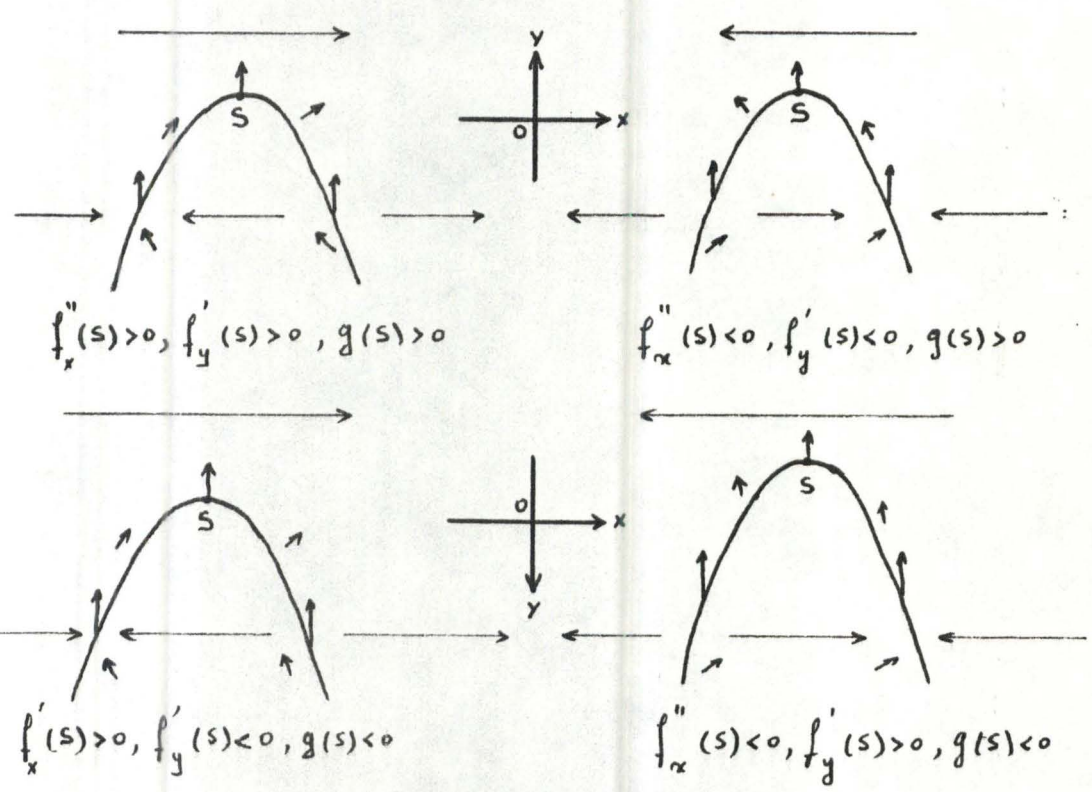


fig. 10

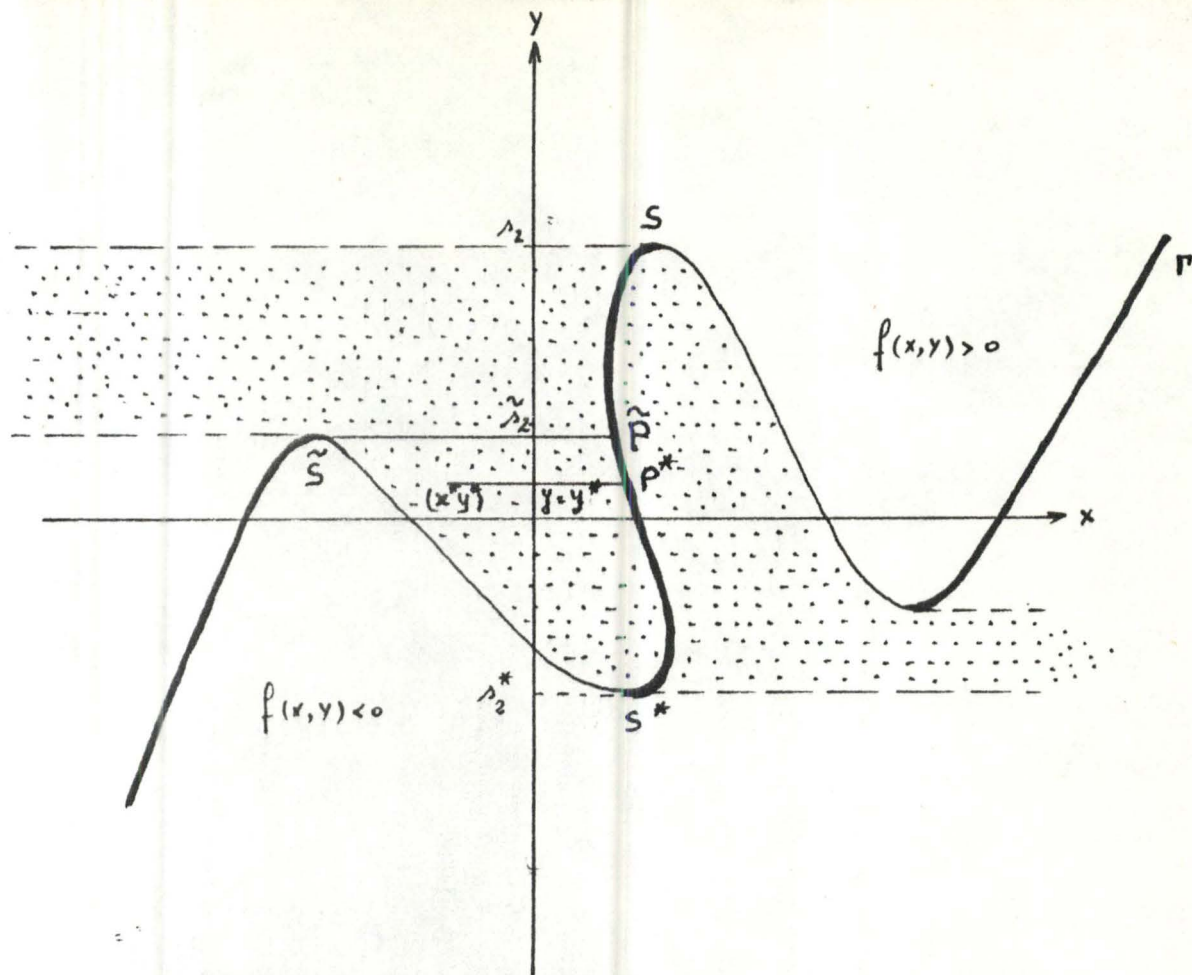


fig. 11

$$(1.17) \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta) = x_0(y^*)$$

Nous retrouvons l'équation des mouvements rapides de (1.1), (1.16) qui n'est autre que la première équation de (1.1) où on considère y comme paramètre et où on est passé au temps $\theta = t/\varepsilon$.

Si (x^*, y^*) appartient à la zone d'attraction du morceau stable (1.7) alors le point $P^*(x_0(y^*), y^*)$ sera appelé point d'atterrissage (fig. 11).

Enfin, nous supposons que parmi tous les points singuliers de Γ , deux points ne peuvent avoir la même ordonnée.

Soit $\tilde{S}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ un point de chute situé sur la frontière de la zone d'attraction d'un morceau stable (1.7) et distinct de S^* et de S . $\tilde{s}_2 \in]s_2^*, s_2[$. Si la branche instable qui sort de la position d'équilibre semi-stable $x = \tilde{s}_1$ de (1.16) pour $y^* = \tilde{s}_2$ possède la propriété (1.17), alors \tilde{P} , point d'intersection de la droite d'équation $y = \tilde{s}_2$ avec le morceau $S^* S$ de Γ , sera appelé le point d'atterrissage qui suit le point de chute \tilde{S} . Sinon, le point d'atterrissage qui suit le point de chute \tilde{S} n'est pas déterminé (fig. 11).

II.B.2. Approximation d'ordre zéro.

Pour le système (1.2), nous avons introduit la notion de solution périodique discontinue (nous ne nous intéressons ici qu'aux trajectoires ayant le caractère d'oscillations de relaxations) et de trajectoire de phase continue associée.

Nous ne considérerons pas ici les trajectoires de phase issues de points instables ou non réguliers de Γ .

Soulignons que les trajectoires de phase de (1.2) peuvent être calculées si f et g sont connues ainsi que le point initial.

Soit $Q_0(x_0, y_0)$ le point initial.

Soient, pour cette condition initiale, θ_0 et θ_ε les trajectoires de phase des systèmes (1.2) et (1.1).

Et soit

$$(2.1) \quad x = x(t, \varepsilon), \quad y = y(t, \varepsilon)$$

la solution unique de (1.1) telle que

$$(2.2) \quad x(t_0, \varepsilon) = x_0, \quad y(t_0, \varepsilon) = y_0$$

Toutes nos hypothèses nous permettent d'affirmer que θ_0 est la limite uniforme de θ_ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (*).

(*) théorème p. 674 de (.11.)

II.B.3. Construction du développement asymptotique pour le mouvement lent.

Soit le morceau de mouvement lent $\tilde{P}S$ du morceau stable de la trajectoire Θ_0 coïncidant avec un morceau de la courbe Γ . $\tilde{P}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ est ici un point d'atterrissage, et $S(s_1, s_2)$ un point de chute qui est un point frontière du morceau d'équation (1.7); le second point frontière étant $S^*(s_1^*, s_2^*)$ (le cas où $s_2^* = \pm \infty$ n'est pas exclu ici).

Nous avons la relation suivante

$$s_2^* \text{ sign } g(S) < \tilde{p}_2 \text{ sign } g(S) < s_2 \text{ sign } g(S).$$

Soit $R(r_1, r_2)$ un point quelconque de ce morceau, proche de S , et $R^0(r_1^0, r_2^0)$ un point quelconque de ce morceau, proche de \tilde{P} .

L'équation du morceau de Γ , $R^0 R$, peut être écrite sous la forme

$$(3.1) \quad x = x_0(y), \quad r_2^0 \text{ sign } g(S) \leq y \text{ sign } g(s) \leq r_2 \text{ sign } g(s)$$

Soit $R^*(r_1^*, r_2^*)$ un point du morceau $S^* S$, proche de S^* . En vertu de la stabilité de (1.7), il existe $k > 0$, telle que le long de $R^* R$

$$(3.2) \quad f'_x(x_0(y), y) \leq -k$$

Comme il n'y a pas de points d'équilibre de (1.1) sur le morceau stable (1.7), il existe U_m , voisinage du morceau $R^0 R$ de Γ , défini par

$$r_2^0 \text{ sign } g(S) \leq y \text{ sign } g(S) \leq r_2 \text{ sign } g(S), \quad |x - x_0(y)| \leq \delta$$

tel que, pour ϵ assez petit, le champ vectoriel défini par les parties droites de (1.1) soit partout dirigé vers Θ_0 sur la frontière de U_m , sauf peut-être en $y = r_2$ ou en $y = r_2^0$.

De plus, en diminuant k si nécessaire, on a la relation

$$(3.3) \quad |g(x, y)| \geq k > 0$$

en chaque point de U_m .

En vertu des considérations de II.B.2, on sait que la trajectoire Θ_ϵ entre dans U_m par le morceau de sa frontière d'équation $y = r_2^0$ et quitte ce domaine par le morceau d'équation $y = r_2$.

On obtient

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x'_n(y) = h(x_0(y), y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{h_x^{(k)}(x_0(y), y)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_k}(y)$$

Et en égalant les coefficients des mêmes puissances de ε , on a que

$$h(x_0(y), y) = 0$$

$$\begin{aligned} (3.8) \quad x'_0(y) &= h'_x(x_0(y), y) x_1(y) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(y) &= \sum_{k=1}^n \frac{h_x^{(k)}(x_0(y), y)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_k}(y) \\ &= h'_x(x_0(y), y) x_n(y) + \sum_{k=2}^n \frac{h_x^{(k)}(x_0(y), y)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_k}(y) \end{aligned}$$

D'où, en vertu de (1.8), (1.9), (3.2), (3.3), (3.8), on a

$$(3.9) \quad x_1(y) = - \frac{f'_y(x_0(y), y) g(x_0(y), y)}{f'_x{}^2(x_0(y), y)}$$

$$(3.10) \quad x'_n(y) = \frac{1}{h'_x(x_0(y), y)} (x'_{n-1}(y) - \sum_{k=2}^n \frac{h_x^{(k)}(x_0(y), y)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_k}(y))$$

$$(3.11) \quad h'_x(x_0(y), y) = \frac{f'_x(x_0(y), y)}{g(x_0(y), y)} \neq 0$$

Les $x_i(y)$, $i = 0, 1, \dots$, sont déterminés et différentiables si y varie entre s_2^* et s_2 et chacune de ces fonctions peut être calculée uniquement

à l'aide des parties droites de (1.1) et de leurs dérivées.

Dans le paragraphe suivant, on verra que

$$(3.12) \quad X_n(y, \varepsilon) = x_0(y) + \varepsilon x_1(y) + \dots + \varepsilon^n x_n(y)$$

est une approximation asymptotique d'ordre ε^{n+1} du morceau lent (3.4) de θ_ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le sens où

$$(3.13) \quad x_\varepsilon(y, \varepsilon) = X_{N-1}(y, \varepsilon) + o(\varepsilon^N); \quad r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq \\ \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$$

$$\forall N \in \mathbb{N}_0$$

En particulier on a bien que le morceau (3.1) de θ_0 est une approximation d'ordre zéro de ce morceau de mouvement lent.

II.B.4. Démonstration de (3.13).

Nous allons établir la liaison entre les fonctions $X_n(y, \epsilon)$ et la trajectoire θ_ϵ , c'est-à-dire voir pour quels morceaux de cette trajectoire la présentation asymptotique de type (3.13) est valide.

Ensuite, nous démontrerons la formule (3.13) pour les morceaux lents (3.4) de θ_ϵ .

Lemme 1 : Si R^* et R sont fixés comme en II.B.3, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n > 0$ t.q.

$$(4.1) \quad |x_n(y)| \leq M_n, \quad r_2^* \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$$

Ce résultat découle immédiatement des relations (3.9), (3.10), (3.11), (3.2) et du fait que f et g et leurs dérivées sont bornées dans un voisinage du morceau $R^* R$ de θ_0 ne contenant pas les points non réguliers S^* et S où $h'_x(x_0(y), y) = 0$.

Lemme 2 : Pour ϵ assez petit, $\exists C_n > 0$ t.q. le produit scalaire du champ vectoriel défini par les parties droites de (1.1) par le gradient de la courbe (4.2) (resp. (4.3)), évalué en un point arbitraire de cette courbe, soit > 0 (resp. < 0) où

$$(4.2) \quad K_1(y, x) \equiv x - X_n(y, \epsilon) + C_n \epsilon^{n+1} = 0$$

$$r_2^* \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$$

$$(4.3) \quad K_2(y, x) \equiv x - X_n(y, \epsilon) - C_n \epsilon^{n+1} = 0$$

$$r_2^* \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$$

Démonstration :

Ce produit scalaire que nous noterons $\left. \frac{dK_1}{dt} \right|_{(1.1)}$, est égal à

$$\left. \frac{dK_1}{dt} \right|_{(1.1)} = \frac{dx}{dt} - \frac{dX_n(y, \epsilon)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

et en vertu de (1.1) et de (4.2),

$$\left. \frac{dK_1}{dt} \right|_{(1.1)} = \frac{1}{\varepsilon} g(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) \left\{ h(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) - \varepsilon \frac{dX_n(y, \varepsilon)}{dy} \right\}$$

Trouvons le terme dominant de cette expression pour ε assez petit.

Par le lemme 1, on a que

$$(4.4) \quad g(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) = g(x_0(y), y) + O(\varepsilon)$$

$$h(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) = h(X_n(y, \varepsilon), y) - C_n \varepsilon^{n+1} h'_X(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+2})$$

Par le processus de construction des $x_i(y)$ (3.8), nous avons

$$(4.5) \quad \varepsilon \frac{dX_n}{dy} = h(X_n(y, \varepsilon), y) + \varepsilon^{n+1} x_{n+1}(y) h'_X(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Les relations (4.4), (4.5) et (3.11) donnent que

$$\left. \frac{dK_1}{dt} \right|_{(1.1)} = -\varepsilon^n \{C_n + x_{n+1}(y)\} f'_X(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+1})$$

En vertu de (4.1) et (3.2), il est possible de choisir $C_n > 0$ assez grand

pour que $\left. \frac{dK_1}{dt} \right|_{(1.1)}$ soit strictement positif sur tout le segment $[r_2^*, r_2]$

(la démonstration est analogue pour $\left. \frac{dK_2}{dt} \right|_{(1.1)}$).

Soit R_0 un point intérieur à l'arc $R^* R$ de Γ . Démontrons le théorème suivant :

Théorème 1 :

Soient (1.7) un morceau stable de Γ , la fonction $X_n(y, \varepsilon)$, $n \geq 0$, déterminée par (3.12) et $x = x(y, \varepsilon)$ la solution de (3.5) pour la c.i. $y = r_2^0$.

Supposons que $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists c > 0$ t.q. $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$(4.6) \quad |x(r_2^0, \varepsilon) - X_n(r_2^0, \varepsilon)| < C \varepsilon^{n+1}$$

Alors $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, la solution de (3.5) est déterminée sur tout le segment

$$(4.7) \quad r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$$

et peut être écrite sous la forme

$$(4.8) \quad x(y, \varepsilon) = X_n(y, \varepsilon) + R_n(y, \varepsilon), \quad \forall y \text{ t.q. (4.7)}.$$

De plus, on a que $\exists C'_n > 0$ t.q.

$$(4.9) \quad |R_n(y, \varepsilon)| < C'_n \varepsilon^{n+1}$$

uniformément sur (4.7).

Démonstration :

1. Remarque : dans (.12.), chap. II, § 19-22, on montre que l'on a effectivement (4.6).

2. ■ Ce théorème est en fait un corollaire du lemme 2. En effet, considérons la bande π entre les courbes (4.2) et (4.3) et soit C_n une constante telle que le lemme 2 soit vérifié (fig. 13).

En augmentant encore éventuellement C_n , en vertu du lemme 2 et de (4.6), on peut affirmer que le point initial $(x(r_2^0, \varepsilon), r_2^0)$ correspond à une trajectoire de phase de (1.1) qui se trouve dans la bande π de laquelle cette trajectoire ne peut sortir et dans laquelle il n'y a aucune position d'équilibre de (1.1) si ε est assez petit. C'est pourquoi la solution de (3.5) est déterminée sur tout le segment (4.7) et que son graphique se trouve à l'intérieur de la bande π . De ceci, on déduit (4.8) et (4.9). ■

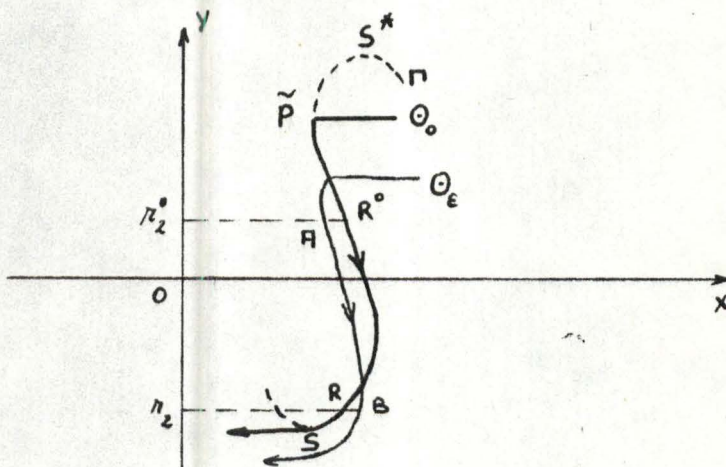


fig. 13

II.B.5. Coordonnées locales au voisinage du point de chute $S(s_1, s_2)$.

Les formules (3.9), (3.10), (3.11) montrent que la série (3.6) ne peut plus être considérée comme présentation asymptotique de la trajectoire θ_ε sur tout le segment $[r_2^0, s_2]$. Ceci à cause de la singularité du point S . Nous allons donc construire d'autres séries asymptotiques au voisinage de ce point S .

Pour trouver ces séries, introduisons à la place de x et y , les coordonnées locales ξ et η de manière que le point de chute soit à l'origine et qu'un arc de Γ , voisin de S , devienne une parabole. On peut passer à ces coordonnées comme suit :

Au voisinage de S , l'équation de Γ est (1.13). Soit la fonction

$$(5.1) \quad y = \phi(x) \equiv x \sqrt{\frac{f''_x(S)}{2 f'_y(S)}} - \frac{x Y'''(s_1 + \theta x)}{6} \operatorname{sign} [f''_x(S) f'_y(S)]$$

Cette fonction est réelle au voisinage de $x = 0$ et est dérivable. De plus, on a

$$(5.2) \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = \sqrt{\frac{f''_x(S)}{2 f'_y(S)}}$$

En vertu de (1.12), $\exists \rho_{-1} < 0, \exists \rho_{+1} > 0$ t.q. $\forall x \in [\rho_{-1}, \rho_{+1}] \quad \phi'(x) > 0$.

De (5.1), il est donc possible d'extraire $x = \psi(y)$, $-q_* \leq y \leq q^*$ où q_* et q^* sont deux nombres réels positifs. Donc $\exists q, 0 < q < 1$ t.q. ψ est bien définie sur $[-q, q]$. Soient $\rho_{-1} = \psi(-q)$ et $\rho_{+1} = \psi(q)$.

Considérons $U_S = \{(x, y) \mid s_1 + \rho_{-1} \leq x \leq s_1 + \rho_{+1} \text{ et } s_2 - q \leq y \leq s_2 + q\}$.

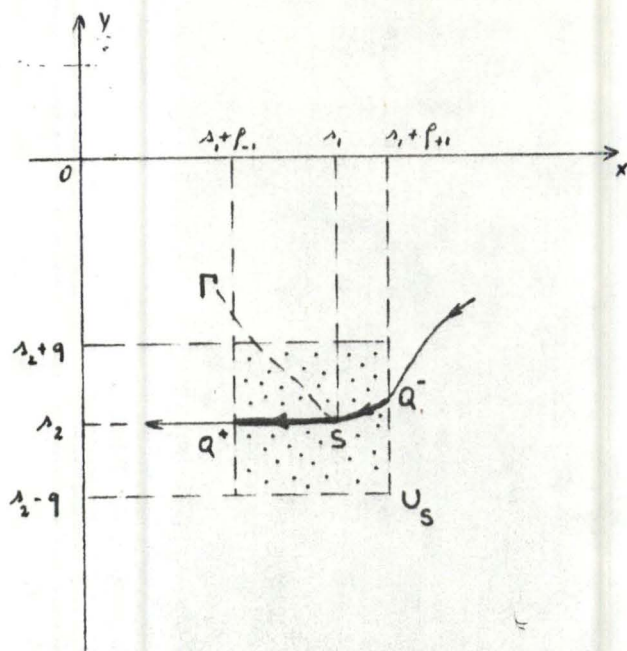
En choisissant q assez petit, on peut dire que dans U_S , f''_x , f'_y , et g gardent le même signe.

Introduisons

$$(5.3) \quad \begin{cases} \xi = \phi(x - s_1) \operatorname{sign} f''_x(S) \\ \eta = (y - s_2) \operatorname{sign} g(S) \end{cases} \quad \begin{cases} x = s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)) \\ y = s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S) \end{cases}$$

Ces formules établissent une correspondance biunivoque entre U_S et un voisinage U_0 de l'origine du plan des nouvelles variables.

$$f_x''(s) < 0, f_y'(s) > 0, g(s) < 0$$



$$\text{sign} [f_x''(s) f_y'(s) g(s)] = 1$$

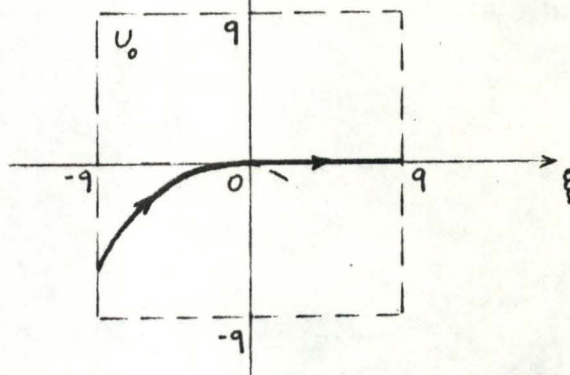


fig. 14

$$U_0 = \{(\xi, \eta) \mid |\xi| \leq q \text{ et } |\eta| \leq q\} \quad (\text{fig. 14})$$

Par (1.15) et (1.13), le morceau de (1.10) qui correspond à $x \in [s_1 + \rho_{-1}, s_1 + \rho_{+1}]$ a pour équation

$$(5.4) \quad \eta = -\xi^2, \quad -q \leq \xi \leq q.$$

En effet, en vertu de (5.3), (5.4) n'est rien d'autre que

$$y = s_2 - (x-s_1)^2 \left| \frac{f_x''(s)}{f_y'(s)} \right| \text{sign } g(s) - (x-s_1)^3 \frac{Y'''(s_1 + \theta(x-s_1))}{6} \text{sign } (g(s))$$

$$f_x''(s) f_y'(s)), \quad x \in [s_1 + \rho_{-1}, s_1 + \rho_{+1}],$$

qui, grâce à (1.15), est exactement (1.13) pour $x \in [s_1 + \rho_{-1}, s_1 + \rho_{+1}]$.

La relation (1.11), sur $x \in [s_1 + \rho_{-1}, s_1 + \rho_{+1}]$, devient par (5.3) la relation

$$(5.5) \quad f(s_1 + \psi(\xi \text{ sign } f_x''(s)), s_2 - \xi^2 \text{ sign } g(s)) \equiv 0, \quad |\xi| \leq q.$$

Au voisinage de S , le morceau stable de Γ a pour équation dans les nouvelles coordonnées

$$\eta = -\xi^2, \quad -q \leq \xi < 0.$$

Dans ces mêmes coordonnées, (1.1) devient

$$(5.6) \quad \epsilon \dot{\xi} = \frac{\xi^2 + \eta}{\alpha(\xi, \eta)}$$

$$\dot{\eta} = \beta(\xi, \eta)$$

où

$$(5.7) \quad \alpha(\xi, \eta) \equiv \frac{(\xi^2 + \eta)\psi'(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)) \operatorname{sign} f''_x(S)}{f(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S))},$$

$$\beta(\xi, \eta) \equiv |g(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S))|$$

Remarquons que $\alpha(\xi, \eta)$ est bien déterminée partout dans U_0 , y compris sur la courbe d'équation (5.4). En effet, en vertu de (5.5), on a que

$$\begin{aligned} f(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S)) &= \\ &= (\xi^2 + \eta) f'_y(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f''_x(S)), s_2 - \xi^2 \operatorname{sign} g(S) + \\ &\quad + \theta(\xi^2 + \eta) \operatorname{sign} g(S)) \operatorname{sign} g(S) \end{aligned}$$

où $\theta \in [0, 1]$ et $f'_y(x, y) \neq 0$ dans U_S .

On a aussi que $\alpha(\xi, \eta)$ et $\beta(\xi, \eta)$ sont dérivables par rapport à ξ et η autant de fois que nécessaire dans la suite.

Enfin, on a que $\forall (\xi, \eta) \in U_0 \exists k > 0$ t.q.

$$(5.8) \quad \alpha(\xi, \eta) \geq k; \quad \beta(\xi, \eta) \geq k$$

Ceci est dû au fait que, par (1.15), g est non nul dans U_S .

Notation : Dans la suite de ce paragraphe, les fonctions α, β, γ , des variables ξ et η dérivées par rapport à ξ (resp. η) k fois et évaluées en $(\xi, -\xi^2)$ seront notées $\alpha_{\xi}^{(k)}, \beta_{\xi}^{(k)}, \gamma_{\xi}^{(k)}$ (resp. $\alpha_{\eta}^{(k)}, \beta_{\eta}^{(k)}, \gamma_{\eta}^{(k)}$).

Soient $Q^-(q_1^-, q_2^-)$ et $Q^+(q_1^+, q_2^+)$ les points de Θ_0 tels que

$$q_1^- = s_1 + \rho_{-\text{sign } f_x''(S)} = s_1 + \psi(-q \text{ sign } f_x''(S))$$

$$q_1^+ = s_1 + \rho_{\text{sign } f_x''(S)} = s_1 + \psi(q \text{ sign } f_x''(S))$$

Q^- est sur le morceau stable de Γ et Q^+ sur le morceau horizontal "sortant" de S (fig. 14). L'équation du morceau $Q^- Q^+$ de Θ_0 s'écrit dans les nouvelles variables

$$(5.9) \quad \eta = \eta_0(\xi) \equiv -\xi^2, \quad -q \leq \xi < 0 \\ \equiv 0, \quad 0 \leq \xi \leq q$$

Nous avons vu que Θ_0 est une approximation uniforme de Θ_ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est pourquoi, pour ε assez petit, Θ_ε entre dans U_S en traversant le segment d'équation

$$x = q_1^-, q_2^- \text{ sign } g(S) \leq y \text{ sign } g(S) \leq s_2 \text{ sign } g(S)$$

et quitte U_S en traversant le segment d'équation

$$x = q_1^+, s_2 \text{ sign } g(S) \leq y \text{ sign } g(S) \leq s_2 \text{ sign } g(S) + q$$

De plus, cette trajectoire Θ_ε se trouve dans U_S partout au-dessus du morceau $Q^- Q^+$ de Θ_0 si $g(S) > 0$ et partout au-dessous si $g(S) < 0$. Le morceau de Θ_ε qui se trouve dans U_S sera appelé "morceau de chute".

En vertu de (5.3), la courbe Θ_ε devient dans U_0 une courbe décrite par un point de coordonnée $(\xi(t, \varepsilon), \eta(t, \varepsilon))$.

II.B.6. Présentation asymptotique de la trajectoire au début du morceau de chute.

Dans U_0 , nous avons la relation (5.8) et la courbe image par (5.3) de θ_ε , θ'_ε , est partout au-dessus de la courbe d'équation (5.9), θ'_0 . Sur θ'_ε , la coordonnée ξ varie de façon monotone en fonction du temps et l'équation de ce morceau peut être présentée sous la forme

$$(6.1) \quad \eta = \eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon), \quad |\xi| \leq q$$

Cette fonction (6.1) est une solution de

$$(6.2) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \varepsilon \frac{\gamma(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta}$$

où

$$(6.3) \quad \gamma(\xi, \eta) \equiv \alpha(\xi, \eta) \beta(\xi, \eta),$$

définie partout dans U_0 et dérivable autant de fois qu'il sera nécessaire dans la suite.

Les relations (5.8) nous disent que $\exists k > 0$ t.q. $\forall (\xi, \eta) \in U_0$,

$$(6.4) \quad \gamma(\xi, \eta) \geq k$$

Nous allons en fait rechercher la solution de (6.2) non sur $[-q, q]$, mais sur $[-q, -\sigma_1]$ où $\sigma_1 > 0$, $\sigma_1 \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (ceci pour la validité du développement asymptotique que l'on va obtenir).

Nous recherchons donc

$$(6.5) \quad \eta = \eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1$$

sous forme de série formelle

$$(6.6) \quad \eta = \eta_0(\xi) + \varepsilon \eta_1(\xi) + \dots + \varepsilon^n \eta_n(\xi) + \dots$$

et coïncidant avec (6.1) sur leur intervalle de définition commun de telle sorte que (6.6) vérifie formellement (6.2) sur $-q \leq \xi < 0$. Les coefficients de (6.6) peuvent être déterminés de la façon suivante :

Pour $\eta_0(\xi)$ on prend (5.9) considérée sur $-q \leq \xi < 0$. Ce choix est naturel car (5.9) est un morceau de θ'_0 .

Ensuite, nous remplaçons η par (6.6) dans (6.2) et nous dérivons formellement en utilisant la formule

$$(6.7) \quad \frac{1}{z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n z_n} = \frac{1}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} z_{i_1} \dots z_{i_k}$$

Nous obtenons

$$\eta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta'_n = \varepsilon \left[\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \right] \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\eta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \right]$$

c'est-à-dire

$$\eta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta'_n = \frac{\gamma}{\eta_1} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} + \\ + \frac{1}{\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{v=1}^{n-1} A_{n,v}$$

où

$$A_{n,v} = \left[\sum_{k=1}^v \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \right] \times \left[\sum_{l=1}^{n-v} \frac{(-1)^l}{\eta_1^{l+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=n-v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_l+1} \right] \\ = \sum_{k=1}^v \sum_{l=1}^{n-v} \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \frac{(-1)^l}{\eta_1^{l+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=n-v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_l+1}$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de ε , on obtient

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \eta'_0 &= \frac{\gamma}{\eta_1} \\ \eta'_1 &= \gamma'_n - \frac{\gamma}{2} \eta_2 \\ &\vdots \\ \eta'_n &= \frac{-\gamma}{2} \eta_{n+1} + \phi_n(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \phi_n(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n) &= \gamma \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} + \\ &+ \frac{1}{\eta_1} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} + \\ &+ \sum_{v=1}^{h-1} \sum_{l=1}^v \sum_{k=1}^{n-v} \frac{\gamma^{(l)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \cdot \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \\ &\quad \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(6.9) \quad \eta_1(\varepsilon) = \frac{-\gamma}{2\varepsilon}$$

et comme $-\frac{\gamma}{2} = -\frac{4\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0$, il est possible de trouver η_n par récurrence;

on obtient en fait pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \eta_n(\varepsilon) &= \frac{\eta_1^2}{\gamma} (-\eta'_{n-1} + \phi_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon} \eta'_{n-1} + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \phi_{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} (\eta_1 \eta'_{n-1} - \eta_1 \phi_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\xi} \left[\eta_1 \eta'_{n-1} - \gamma \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\eta_1^k} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} - \right. \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{i_1+\dots+i_k=n-1} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \\
&\quad - \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{l=1}^v \sum_{k=1}^{n-v-1} \frac{\gamma_n^{(l)k}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \cdot \\
&\quad \left. \cdot \frac{(-1)^k}{\eta_1^k} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-v-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \right]
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que, dans les crochets, la somme du second et du quatrième termes est égale à

$$\sum_{v=1}^{n-2} \eta_{n-v} \eta'_v$$

■ Si nous reprenons l'expression de η'_v obtenue en (6.8), nous avons que

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{n-2} \eta_{n-v} \eta'_v &= \gamma \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{k=1}^v \eta_{n-v} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} + \\
&+ \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{k=1}^v \frac{\gamma_n^{(k)}}{k!} \sum_{i_1+\dots+i_k=v} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \frac{1}{\eta_1} \eta_{(n-v-1)+1} + \\
&+ \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{v-1} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{v-r} \eta_{n-v} \frac{\gamma_n^{(l)k}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=r \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-r \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1}
\end{aligned}$$

Dans le second membre, le premier terme peut encore s'écrire

$$\gamma \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{r=k}^{n-2} \eta_{n-v} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1}$$

$$\left(\text{car } \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{k=1}^v \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{v=k}^{n-2} \right),$$

c'est-à-dire encore

$$\gamma \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{k+1}=n-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_{k+1}+1} \quad (\text{où } i_{k+1} = n-v-1)$$

Dans ce même membre, le troisième terme est égal à

$$\sum_{r=1}^{n-2} \sum_{v=r+1}^{n-2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{v-r} \eta_{n-v} \frac{\gamma_n^{(1)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=r \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-r \\ i_j \geq 1}}$$

$$\eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \left(\text{car } \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{=r+1}^{v-1} \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{v=r+1}^{n-2} \right)$$

$$\text{Or } \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{v=r+1}^{n-2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{v-r} \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{n-2-r} \sum_{v=k+r}^{n-2};$$

$$\sum_{v=k+r}^{n-2} \eta_{n-v} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=v-r \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} = \sum_{i_1+\dots+i_{k+1}=n-r-1} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_{k+1}+1} \quad (\text{où } i_{k+1} = n-v-1)$$

Et donc ce troisième terme s'écrit

$$\sum_{r=1}^{n-2} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{n-2-r} \frac{\gamma_n^{(1)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=r \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{k+1}=n-r-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_{k+1}+1}$$

D'où on déduit que

$$\sum_{v=1}^{n-2} \eta_{n-v} \eta'_v = \gamma \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \sum_{i_1+\dots+i_{k+1}=n-1} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_{k+1}+1} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{l=1}^v \frac{\gamma^{(1)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=v \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{1}{\eta_1} \eta_{(n-v-1)+1}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{n-2-\nu} \frac{\gamma_{\eta}^{(1)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=\nu \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{(-1)^k}{\eta_1^{k+1}} \cdot \\
& \quad \cdot \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{k+1}=n-\nu-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_{k+1}+1} \\
& = - \left[\gamma \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\eta_1^k} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} + \right. \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{n-1-\nu} \frac{\gamma_{\eta}^{(1)}}{l!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_l=\nu \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \frac{(-1)^k}{\eta_1^k} \cdot \\
& \quad \cdot \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n-\nu-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1+1} \dots \eta_{i_k+1} \left. \right] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la relation de récurrence plus commode

$$\begin{aligned}
(6.10) \quad \eta_n(\xi) &= \frac{1}{2\xi} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_{n-\nu}(\xi) \eta'_{\nu}(\xi) - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\gamma_{\eta}^{(\nu)}(\xi, -\xi^2)}{\nu!} \times \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{\nu}=n-1 \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_{\nu}}(\xi) \right], \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

Les relations (6.10) montrent que les $\eta_j(\xi)$ sont définies et dérivables sur $[-q, 0[$. Remarquons que le calcul de ces fonctions ne nécessite que la connaissance de $\gamma(\xi, \eta)$ et de ses dérivées sur $[-q, 0[$.

Dans le paragraphe suivant, nous verrons que

$$(6.11) \quad H_n(\xi, \varepsilon) = \eta_0(\xi) + \varepsilon \eta_1(\xi) + \dots + \varepsilon^n \eta_n(\xi),$$

pour $\varepsilon \rightarrow 0$, est une approximation asymptotique du morceau (6.5) de θ_{ε} dans le sens où, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $\forall N_1 \in \mathbb{N}$,

$$(6.12) \quad \eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) = H_{N_1-1}(\xi, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N_1-\lambda_1(3N_1-2)}), \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1$$

où

$$(6.13) \quad \sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1/3.$$

II.B.7. Liens entre les fonctions $H_n(\xi, \epsilon)$ et la trajectoire Θ_ϵ .

Lemme 3 : $\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n > 0$ t.q.

$$(7.1) \quad |\xi^{3n-2} \eta_n(\xi)| \leq M_n, \quad -q \leq \xi < 0$$

Démonstration :

Démontrons (7.1) par récurrence sur n

1° $\eta_0(\xi) = 0(\xi^2)$, $-q \leq \xi < 0$; $\eta_1(\xi) = \frac{-\gamma}{2\xi} = 0(\xi^{-1})$, $-q \leq \xi < 0$ et

$$\eta_2(\xi) = \frac{-\gamma^2 - \xi\gamma\gamma'}{8\xi^2} = 0(\xi^{-4}), \quad -q \leq \xi < 0. \quad (7.1) \text{ est donc vérifiée pour}$$

$n = 0, 1, 2.$

2° Soit (7.1) vérifiée pour $p \leq n-1$, c'est-à-dire

$$\forall p \leq n-1 \quad \eta_p(\xi) = 0(\xi^{2-3p}), \quad -q \leq \xi < 0 \quad (*)$$

Montrons d'abord que

$$\forall p \leq n-1 \quad \forall m > 0 \quad \eta_p^{(m)}(\xi) = 0(\xi^{2-m-3p}), \quad -q \leq \xi < 0 \quad (**)$$

D'après (*), $\forall p \leq n-1 \quad \eta_p(\xi) = \frac{\mu_p(\xi)}{\xi^{3p-2}}$ où $-q \leq \xi < 0$ et où $\mu_p(\xi)$ est bornée sur cet intervalle.

Remarquons que, en vertu de (6.10) et (*), la fonction $\mu_p(\xi)$ est une combinaison linéaire (à coefficients qui sont des puissances entières positives ou nulles de ξ) de produits de puissance entières positives ou nulles de γ et de quelques-unes de ses dérivées. En vertu de nos hypothèses, on a donc que $\mu_p^{(k)}(\xi)$ est bornée sur $[-q, 0[$, quel que soit l'entier naturel k (car $\mu_p^{(k)}(\xi)$ est de la même forme que $\mu_p(\xi)$)

$$\text{C'est pourquoi } \forall p \leq n-1 \quad \eta_p'(\xi) = \frac{\xi \mu_p'(\xi) - (2p-2) \mu_p(\xi)}{\xi^{3p-1}} = 0(\xi^{1-3p})$$

$$\xi \in [-q, 0[,$$

c'est-à-dire (**) pour $m = 1$.

Nous voyons que $\eta_p'(\xi)$ (et il en sera évidemment de même pour toutes les

dérivées de $\eta_p(\xi)$ est aussi de la forme $\frac{\mu_p(\xi)}{\xi^{3p-1}}$ sur $[-q, 0[$ et que, par un raisonnement analogue à celui fait pour $m = 1$, on obtiendra (***) pour $m \geq 1$.

Dans ce cas, la formule (6.10) nous montre que

$$\begin{aligned} \eta_n(\xi) &= O(\xi^{-1}) \left[\sum_{v=1}^{n-1} O(\xi^{2-3(n-v)}) O(\xi^{1-3v}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{n-1} O(1) \sum_{\substack{i_1+\dots+i_v=n-1 \\ i_j \geq 1}} \prod_{j=1}^v O(\xi^{2-3i_j}) \right] \\ &= O(\xi^{-1}) [O(\xi^{3(1-n)}) + O(\xi^{5-3n})] \\ &= O(\xi^{2-3n}) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la formule (7.1) et du lemme 3.

Montrons maintenant que si, $\forall n \geq 1$ $\eta_n(\xi) = \frac{1}{\xi^{3n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^n \xi^k$, lorsque $\xi \rightarrow 0^-$

(7.2), cette série formelle est telle que

$$(7.3) \quad \eta_0^1 = -\frac{\gamma}{2}, \quad \eta_0^n = -\frac{3n-4}{4} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^v \eta_0^{n-v}, \quad n \geq 2$$

D'après (7.2), $\eta_1 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^1 \xi^k$; or $\eta_1 = \frac{-\gamma}{2\xi}$, d'où $\eta_0^1 = \frac{-\gamma}{2}$.

D'après (7.2) encore, $\eta_2 = \frac{1}{\xi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^2 \xi^k$; or $\eta_2 = \frac{-\gamma^2 - \xi\gamma\gamma'}{8\xi^4}$, d'où

$$\eta_0^2 = \frac{-\gamma^2}{8} = -\frac{3(2)-4}{4} \sum_{v=1}^{2-1} \eta_0^v \eta_0^{(2-1)+1-v}.$$

Soit (7.3) vraie $\forall p \leq n-1$; montrons qu'elle l'est aussi pour $p = n$:

$$\text{D'après (7.2), } \eta_n = \frac{1}{\xi^{3n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^n \xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^n \xi^{k+2-3n}, \quad n \geq 2$$

D'autre part, nous avons la formule (6.10). Nous obtenons donc pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^n \xi^{k+2-3n} = \frac{1}{2\xi} \left[\sum_{v=1}^{n-1} (\xi^{2-3(n-v)}) \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{n-v} \xi^k \right] \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2-3v) \xi^{k+1-3v} \eta_k^v + \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{v'} \xi^{k+2-3v} \right) - \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\gamma_n^{(v)}}{v!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_v=n-1 \\ i_j \geq 1}} \prod_{j=1}^v \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{i_j} \xi^{k+2-3i_j}$$

D'où on déduit que

$$\eta_0^n = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^{n-v} (-3v+2) \eta_0^v$$

Il reste donc à voir que le second membre de cette relation est égal à

$$- \frac{3n-4}{4} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^v \eta_0^{n-v} \quad \text{pour } n \geq 2$$

Distinguons deux cas :

1) $n = 2k+1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^{n-v} (-3v+2) \eta_0^v &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^k \eta_0^{n-v} \eta_0^v (-3v+2-3(n-v)+2) \\ &= \frac{-3n+4}{2} \sum_{v=1}^k \eta_0^{n-v} \eta_0^v \\ &= - \frac{3n-4}{4} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^v \eta_0^{n-v} \end{aligned}$$

2) $n = 2k$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^{n-v} (2-3v) \eta_0^v &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{k-1} \eta_0^{n-v} (2-3v) \eta_0^v + \frac{1}{2} \sum_{v=k+1}^{n-1} \eta_0^{n-v} (2-3v) \eta_0^v + \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta_0^{n-k} (2-3k) \eta_0^k \\ &= \frac{4-3n}{2} \sum_{v=1}^{k-1} \eta_0^{n-v} \eta_0^v + \frac{2-3k}{2} \eta_0^{n-k} \eta_0^k \\ &= \frac{4-3n}{4} \sum_{v=1}^{n-1} \eta_0^{n-v} \eta_0^v \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la relation (7.3). Cette relation montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\eta_0^n < 0$ et donc que

(7.4)

 $\eta_n(\xi) \rightarrow +\infty$ pour $\xi \rightarrow 0^-$ si n est impair $\eta_n(\xi) \rightarrow -\infty$ pour $\xi \rightarrow 0^-$ si n est pairLemme 4 : Soient les courbes d'équation

$$(7.5) \quad K_1(\xi, \eta) \equiv \eta - H_n(\xi, \varepsilon) + C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} = 0, \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1$$

$$(7.6) \quad K_2(\xi, \eta) \equiv \eta - H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} = 0, \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1$$

Pour ε assez petit, $\exists C_n > 0$ t.q., en chaque point de la courbe d'équation $K_1 = 0$ (resp. $K_2 = 0$), $\left. \frac{dK_1}{d\xi} \right|_{(6.2)}$ (resp. $\left. \frac{dK_2}{d\xi} \right|_{(6.2)}$) est > 0 pour n impair (resp. < 0) et < 0 pour n pair (resp. > 0).

Démonstration :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dK_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} &= \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \frac{C_n \varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} \\ &= \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}})}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}} - \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} - \frac{(3n+1)C_n \varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+2}} \end{aligned}$$

Trouvons le terme dominant de cette expression pour ε assez petit et pour $\xi \in [-q, -\sigma_1]$

$$1) \quad \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}})}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}} = \varepsilon [\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon)) \frac{1}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} - \gamma'_n(\xi, H_n) C_n$$

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} \cdot \frac{1}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} + \gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon)) \frac{C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}}{(H_n(\xi, \varepsilon) + \xi^2)^2} - \\ &- \gamma'_n(\xi, H_n(\xi, \varepsilon)) C_n^2 \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} \frac{1}{(\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon))^2} + \dots \end{aligned}$$

où tous les termes du second membre, à partir du quatrième, sont d'ordre supérieur ou égal à $\varepsilon^{2n-\lambda_1(6n-2)}$ pour $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, $\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$.

On obtient, en rangeant les termes par puissances croissantes en ϵ , que le premier membre de cette dernière relation est égal à

$$\epsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \epsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon)} + \epsilon^n \frac{4 C_n}{\gamma \xi^{3n-1}} + O(\epsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$$

En effet, le terme dominant de $\epsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \epsilon))}{(\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon))^2}$ est le terme en ϵ^n qui s'écrit $\frac{C_n \gamma \epsilon^{n+2}}{\epsilon^2 \eta_1^2 \xi^{3n+1}} = \epsilon^n \frac{4 C_n}{\gamma \xi^{3n-1}}$ (les autres termes sont au moins d'ordre $\epsilon^{n+2-\lambda_1(3n+1)}$).

D'autre part, le terme dominant de $\gamma'_n(\xi, H_n(\xi, \epsilon)) C_n \frac{\epsilon^{n+2}}{\xi^{3n+1}} \frac{1}{\xi^2 + H_n}$ est $\frac{\gamma'_n C_n \epsilon^{n+1}}{\eta_1 \xi^{3n+1}}$; or γ'_n est d'ordre ξ^{-2} et η_1 est d'ordre ξ^{-1} . D'où

$$\gamma'_n(\xi, H_n(\xi, \epsilon)) C_n \frac{\epsilon^{n+2}}{\xi^{3n+1}} \frac{1}{\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon)} = O(\epsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$$

sur $[-q, -\sigma_1]$ où $\sigma_1 = \epsilon^{\lambda_1}$.

2) Si on pose $A(\xi, \epsilon) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon^k \eta_k$,

$$\frac{dH_n(\xi, \epsilon)}{d\xi} = \epsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \epsilon)) + A(\xi, \epsilon)}{\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon) + A(\xi, \epsilon)} - \frac{dA(\xi, \epsilon)}{d\xi} \quad (*)$$

$$= \epsilon [\gamma(\xi, H_n(\xi, \epsilon)) + \gamma'_n(\xi, H_n(\xi, \epsilon)) A(\xi, \epsilon) + \dots] \left[\frac{1}{\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon)} \right.$$

$$\left. - \frac{A(\xi, \epsilon)}{(\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon))^2} + \dots \right] - \frac{dA(\xi, \epsilon)}{d\xi}$$

$$= \epsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \epsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \epsilon)} + \text{des termes provenant :}$$

→ du premier terme de (*) et tous d'ordre ϵ^{n+1} au moins, sauf

- $\varepsilon \gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon)) \frac{A(\xi, \varepsilon)}{(\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon))^2}$ dont le terme dominant est

- $\varepsilon \gamma \frac{\varepsilon^{n+1} \eta_{n+1}}{\varepsilon^2 \eta_1^2}$ qui est d'ordre ε^n et vaut $-\varepsilon^n \frac{4 \xi^2}{\gamma} \eta_{n+1}$ (ici nous avons considéré l'ordre en ε pour ξ fixé).

→ du second terme de (*). Celui d'ordre le moins élevé en ε (pour ξ fixé) est $\varepsilon^{n+1} \eta'_{n+1}$ qui est d'ordre $\varepsilon^{n+1} \xi^{-1+2-3(n+1)}$, c'est-à-dire $\varepsilon^{n+1} \eta'_{n+1} = O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$, $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$.

et donc nous avons obtenu les relations

$$(7.7) \quad \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon)) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}} = \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} + \varepsilon^n \frac{4 C_n}{\gamma \xi^{3n-1}} + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$$

$-q \leq \xi \leq -\sigma_1; \sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$

$$(7.8) \quad \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} = \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} - \varepsilon^n \frac{4 \xi^2}{\gamma} \eta_{n+1} + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$$

$-q \leq \xi \leq -\sigma_1; \sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$

Ces égalités montrent que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\left. \frac{dK_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} = \varepsilon^n \frac{4}{\xi^{3n-1} \gamma} \{ \xi^{3n+1} \eta_{n+1}(\xi) + C_n \} + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)})$$

$n-\lambda_1(3n-1)$

où le premier terme du second membre est d'ordre $\varepsilon^{n-\lambda_1(3n-1)}$ en vertu de (6.4) et de (7.1) et est donc dominant par rapport au second si et seulement si $0 < \lambda_1 < 1/3$.

Dès lors, toujours en vertu de (7.1), $\exists C_n > 0$ t.q. $\left. \frac{dK_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} < 0$ en tout

point de (7.5), pour ε assez petit, si n est pair (> 0 si n est impair).

La démonstration de la seconde partie du lemme 4 est en tous points semblable.

Théorème 2 :

Soient λ_1 t.q. $0 < \lambda_1 < 1/3$, $H_n(\xi, \epsilon)$, $n \geq 0$ déterminée par (6.11) et $\eta = \eta(\xi, \epsilon)$ la solution de (6.2) pour la c.i. $\xi = -q$. Supposons que $\exists \epsilon_0 > 0$, $\exists C > 0$ t.q. $\forall \epsilon < \epsilon_0$

$$(7.9) \quad |\eta(-q, \epsilon) - H_n(-q, \epsilon)| < C \epsilon^{n+1}$$

Alors $\forall \epsilon < \epsilon_0$, la solution de (6.2) est déterminée sur tout le segment $[-q, -\sigma_1]$, $\sigma_1 = \epsilon^{\lambda_1}$ et peut être écrite sous la forme

$$(7.10) \quad \eta(\xi, \epsilon) = H_n(\xi, \epsilon) + R_n(\xi, \epsilon), \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1$$

De plus, on a que $\exists C'_n > 0$ t.q.

$$(7.11) \quad |R_n(\xi, \epsilon)| < C'_n \epsilon^{n+1-\lambda_1(3n+1)} \quad \text{uniformément sur } [-q, -\sigma_1].$$

Démonstration :

■ Ce théorème est en fait un corollaire du lemme 4. Il est clair que pour n impair, la courbe (7.6) passe partout au-dessus de la courbe (7.5) et pour n pair, en-dessous. Considérons la bande π entre ces deux courbes et soit $C_n > 0$ une constante telle que le lemme 4 soit vérifié. Par ce lemme et en vertu de (7.9), la trajectoire considérée de (6.2) se trouve à l'intérieur de la bande π (il suffit éventuellement d'augmenter C_n de telle manière que le point initial $(-q, \eta(-q, \epsilon))$ soit dans π) et est déterminée sur tout le segment $[-q, -\sigma_1]$. De ceci on déduit (7.10) et (7.11). ■

Vérifions que l'on a bien la relation (7.9) :

Il existe une relation entre les coefficients des séries (3.6) et (6.6).

Formellement, (6.6) devient grâce à (5.3) :

$$(7.12) \quad y = s_2 + \eta_0(\phi(x - s_1) \operatorname{sign} f'_x(S)) \operatorname{sign} g(S) + \\ + \epsilon \eta_1(\phi(x - s_1) \operatorname{sign} f''_x(S)) \operatorname{sign} g(S) + \dots \\ + \epsilon^n \eta_n(\phi(x - s_1) \operatorname{sign} f^{(n)}_x(S)) \operatorname{sign} g(S) + \dots$$

qui est une inversion formelle de (3.6) et dont le coefficient de ϵ^n est

exprimé à l'aide des coefficients de (3.6) dont les indices ne dépassent pas n (*). Grâce aux formules (3.10) et (6.10), il suffit de voir ceci pour les premiers coefficients de (7.12) que nous réécrivons formellement

$$(7.13) \quad y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) + \dots \quad \text{t.q.}$$

$$(7.14) \quad f(x, y_0(x)) \equiv 0.$$

Nous avons que $y'_0(x) = -\frac{f'_x(x, y_0(x))}{f'_y(x, y_0(x))}$ et $x'_0(y) = -\frac{f'_y(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)}$.

De plus, les relations $f(x_0(y), y) \equiv 0$ et (5.5) montrent que

$$(7.15) \quad x_0(s_2 + \eta_0(\xi) \text{ sign } g(S)) \equiv s_1 + \psi(\xi \text{ sign } f''_x(S))$$

où $\eta_0(\xi)$ est donnée par (5.9).

$$\text{D'autre part } x_1(y) = -\frac{f'_y(x_0(y), y) g(x_0(y), y)}{f'^2_x(x_0(y), y)} = x'_0(y) \frac{g(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)}$$

Nous allons maintenant montrer que $\frac{g(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)} = -\eta_1(\phi(x - s_1) \text{ sign } f''_x(S))$,

ce qui achèvera la démonstration de (*).

Portons (7.13) dans

$$(7.16) \quad \frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

et dérivons formellement de telle sorte que (7.13) vérifie formellement (7.16). Nous obtenons, en égalant les coefficients des puissances de ε^0 , que

$$y'_0(x) = \frac{g(x, y_0(x))}{f'_y(x, y_0(x)) y_1(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où on déduit que } \frac{g(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)} &= \frac{-g(x_0(y), y)}{f'_y(x, y_0(x)) y'_0(x)} = \frac{-y'_0(x) f'_y(x, y_0(x)) y_1(x)}{f'_y(x, y_0(x)) y'_0(x)} \\ &= -y_1(x) \end{aligned}$$

Or d'après (7.13) et (7.12), $-y_1(x) = -\eta_1(\phi(x - s_1) \text{ sign } f''_x(S))$.

Montrons maintenant que (6.5), qui décrit la trajectoire Θ_ε au début du morceau de chute, vérifie bien (7.9) quel que soit $n \geq 0$. Choisissons q comme cela a été suggéré au paragraphe II.B.5.

Soit $Q^-(q_1^-, q_2^-)$ comme dans II.B.5 (fig. 14 et 15) et soit $B(q_1^-, r_2)$ le point d'intersection de Θ_ε avec la droite d'équation $x = q_1^-$, qui est sur la frontière de U_S ; soit encore $R(r_1, r_2)$ le point ayant la même ordonnée que B et qui se trouve sur l'arc PS .

Le point B est un point final d'un morceau de mouvement lent et un point initial d'un morceau de chute. Il est évident que r_2 dépend de ε et aussi que $r_2 \rightarrow s_2$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$; c'est pour cette raison que le morceau de mouvement lent AB de Θ_ε peut être représenté par les séries asymptotiques des paragraphes II.B.3 et II.B.4.

Dans (7.9) intervient la valeur de $\eta_\varepsilon(-q, \varepsilon)$ que l'on peut calculer de la façon suivante :

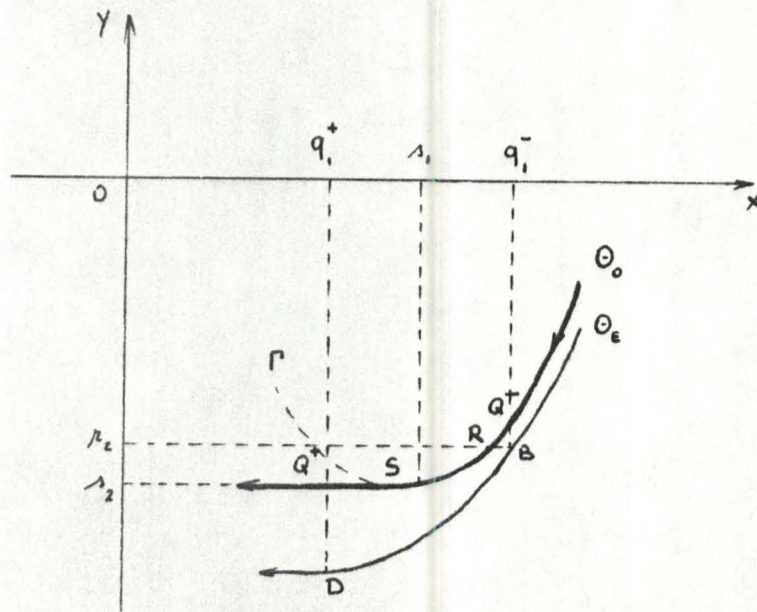


fig. 15

Fixons $n \geq 0$ et, en utilisant (3.13), on peut calculer l'abscisse de B :

$$(7.17) \quad q_1^- = x_\varepsilon(r_2, \varepsilon) = X_n(r_2, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$$

(7.17), par (5.3), devient

$$(7.18) \quad s_1 + \psi(-q \operatorname{sign} f_x''(S)) = X_n(s_2 + \eta_\varepsilon(-q, \varepsilon) \operatorname{sign} g(S), \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$$

En vertu de la liaison établie entre les séries (3.6) et (6.6) par l'intermédiaire de (5.3) et donc de (7.12), nous savons que (7.18) est inversible et que l'on a

$$\eta_\varepsilon(-q, \varepsilon) = H_n(-q, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$$

c'est-à-dire (7.9).

Dans (.12.), le second chapitre est consacré à une étude similaire à celle faite dans notre seconde partie, et ceci pour le reste de la trajectoire Θ_ϵ divisée en un nombre fini de morceaux :

Nous avons étudié les morceaux de mouvement lent et les débuts de morceaux de mouvement de chute. Les auteurs de (.12.) étudient ensuite les voisinages des points de chute, les fins de morceaux de chute, les morceaux de mouvement rapide et d'atterrissage.

L'étude de ces deux derniers morceaux est faite sous l'hypothèse qu'ils sont consécutifs à un morceau de chute. On obtient donc des présentations asymptotiques pour toute la trajectoire Θ_ϵ excepté pour les morceaux de mouvement rapide et d'atterrissage qui commencent au point de phase initial. Le second chapitre de (.12.) se termine par l'étude de ces deux types de mouvement.

Le chapitre III détermine les conditions d'existence de solutions périodiques stables ayant le caractère de relaxation, pour les systèmes différentiels de type (1.1).

L'intérêt principal de toute cette étude est de déterminer la période T de la solution de (1.1) dont la trajectoire est Θ_ϵ . Le chapitre IV permet d'établir la formule

$$T_\epsilon = K_{0,0} + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^\nu\left(\frac{1}{\epsilon}\right) :$$

$$\begin{array}{lll} \text{où } (n) = k & \text{si} & n = 3k \\ & k+1 & \text{si} & n = 3k+1 \\ & k & \text{si} & n = 3k+2 \end{array}$$

Dans cette formule, le calcul des coefficients $K_{n,\nu}$ ne nécessite que la connaissance des seconds membres de (1.1). Ces résultats sont publiés pour la première fois dans (.12.) et sont le prolongement de travaux de Pontriaguine. Cette étude complète n'a pu être faite dans le cadre du présent travail.

BIBLIOGRAPHIE :

- (.1.) A.N. TIKHONOV, "On the dependance of the solutions of differential equations on a small parameter",
Matematitscheskii Sbornik, 22, 193-205, 1948,
(en russe).
- (.2.) I.G. PETROVSKI, "Ordinary differential equations", (p. 29),
Prentice-Hall, I.N.C., 1966.
- (.3.) E.A. CODDINGTON, N. LEVINSON, "Theory of ordinary differentiel equations",
McGraw-Hill book company, 1955.
- (.4.) I. ROMANOVSKI, N. STEPANOVA, D. TCHERNAVSKI, "Modèles mathématiques en biophysique",
Moscou, 1975, "Nanka", (en russe).
- (.5.) A.N. TIKHONOV, "Systèmes d'équations différentielles contenant un petit paramètre devant les dérivées",
Matematitscheskii Sbornik, 31 (73) N3, 1952.
- (.6.) F.C. HOPPENSTEADT, "Journal of mathematical analysis and applications",
18, 129-134, 1967.
- (.7.) J.J. LEVIN, N. LEVINSON, "Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and associated boundary layer equations",
J. Rational Mech. Anal. 3, 247-270, 1954.
- (.8.) D.A. ANOSOV, "Sur les cycles limites des systèmes d'équations différentielles contenant un petit paramètre",
Matematitscheskii Sbornik, 50, N3, 1960, (en russe).

- (.9.) G.N. DOUBOSCHINE, "Introduction à la stabilité du mouvement",
Univ. de Moscou, 1952, (en russe).
- (.10.) V. VOLTERRA, "Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour
la vie",
Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- (.11.) A. ANDRONOV, A. VITT, S. KHAIKIN, "Theory of oscillations",
Pergamon Press, 1966.
- (.12.) MICHENKO - ROZOV, "Equations différentielles contenant un petit
paramètre et oscillations de relaxation",
Moscou, 1975, "Nanka", (en russe).