THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Réduction d'observations Doppler de satellites artificiels

Maniquet, Etienne; Vangeneberg, Françoise

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

REDUCTION D'OBSERVATIONS DOPPLER

DE SATELLITES ARTIFICIELS

MANIQUET Etienne
&
VANGENEBERG Françoise

INTRODUCTION

Les observations Doppler, mesurant les vitesses radiales d'un satellite à partir des variations de fréquence d'un émetteur embarqué sont aujourd'hui couramment utilisées en géophysique.

L'avantage essentiel de ce type d'observations est d'être facile à réaliser. Elles sont un peu moins précises que les observations Laser par exemple, mais la diminution de la précision est largement compensée par la facilité d'utilisation.

Actuellement, l'Observatoire Royal de Belgique fait partie d'un réseau d'observation de satellites artificiels par effet Doppler. Ces observations servent essentiellement à la résolution de deux problèmes:

- La détermination de la trajectoire d'un satellite artificiel.
- La détermination de la position de la station connaissant avec précision les coordonnées du satellite.

La connaissance de la position de la station à un moment donné est essentielle dans de nombreux cas: en navigation par exemple (détermination de la position d'un bateau)

On peut aussi déterminer avec précision la position du pôle et l'état de rotation de la terre à tout moment.

Nous avons construit un programme traitant ces problèmes. Le travail consiste à tester une méthode de réduction rapide et précise des observations malgré le mauvais conditionnement des systèmes obtenus.

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas de la détermination de la trajectoire d'un satellite à partir de ses conditions initiales. En l'occurence, les observations sont simulées, et ceci par différents modèles:

- Le modèle Képlérien, ne tenant compte que de la force centrale.

- Le modèle de Brower reprenant les cinq premiers termes du développement du potentiel terrestre.

- L'intégration numérique, encore plus précise.

A ces observations ainsi simulées, nous ajustons une trajectoire reprise par l'un des modèles.

- Ajustement d'une trajectoire Képlérienne à des observations calculées par le modèle Képlérien, ou par le modèle de Brower.

- Ajustement d'une trajectoire calculée par le modèle de Brower à des observations calculées par intégration numérique.

En second lieu, nous avons considéré le problème inverse: connaissant la position du satellite dans l'espace, on observe les positions relatives, station-satellite, pour plusieurs stations, et on en déduit leurs positions par un processus itératif.

Au chapitre 1, nous décrivons les systèmes d'axes et d'unités employés à divers moments du travail.

Le chapitre 2 explique la méthode de correction différentielle pour des observations de vitesse radiale pour mesures Doppler. Nous ne ferons que citer les autres types d'observations possibles. Le principe de la méthode est d'établir des équations d'observations dont les seconds membres sont les différences obtenues entre les valeurs calculées et les valeurs observées.
Nous ne ferons qu'effleurer le point de vue technique de la méthode.

Au chapitre 3, nous considérons le cas particulier d'une orbite polaire. Nous étudierons analytiquement le problème de l'indétermination qui naît par la position particulière de la station par rapport au plan de l'orbite.

Le chapitre 4 applique la méthode pour la correction de la position et de la vitesse de la station. Nous construisons ici les formules et nous étudierons les différents résultats obtenus par cette méthode.

Le chapitre 5 présente dans une première partie le développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques et l'importance relative des différents termes intervenant dans ce développement. Cette étude permet de voir l'importance de l'erreur commise lorsqu'on arrête le développement à un certain stade et que l'on néglige les autres termes. Dans la seconde partie du chapitre, nous utilisons le développement du potentiel terrestre pour le problème des deux corps, en ne retenant que les termes d'ordre J_2 dans le potentiel. Ceci conduit à des formules de calcul des éléments osculateurs, et nous nous sommes pour cela référés à l'article de D.Brower.

Le chapitre 6 traite essentiellement des résultats numériques obtenus à partir de la méthode de calcul des éléments osculateurs décrite au chapitre 5. On y compare ces résultats à ceux obtenus par un programme d'intégration numérique. De même on compare les résultats donnés par le modèle Képlérien avec ceux donnés par l'intégration numérique.

Au chapitre 7, on trouvera les résultats numériques obtenus après avoir tâché d'ajuster une trajectoire képlérienne à une trajectoire calculée par le modèle de Brower. Dans la seconde partie du chapitre, on utilise la méthode de correction différentielle pour ajuster une trajectoire calculée par le modèle de Brower à une trajectoire calculée par intégration numérique.

Nous placerons en annexe tout ce qui concerne la programmation. Nous avons corrigé les sous-routines existantes.

Nous avons construit 4 nouvelles sous-routines:

- SPHERE: qui calcule les coefficients quand la position et la vitesse de la station sont repérées en coordonnées sphériques.
- CYLIND: qui calcule les coefficients quand la position et la vitesse de la station sont repérées en coordonnées cylindriques.
- STAVIT1 qui détermine la position de la station et sa vitesse dans le repère cartésien à partir de $\{r, \theta, \varphi\}$
- STAVIT2 qui fait la même chose à partir de $\{r, \theta, z_0\}$

&&&&&&&&

On distinguera dans le travail une première partie reprenant des notions de base et reprises dans les 2 premiers chapitres. Cette partie est commune et la rédaction du premier chapitre a été faite par F. Vangénéberg. La rédaction du second a été faite par E. Maniquet.
Les matières reprises aux chapitres 3 et 4 ont été traitées par E. Manàquet, tandis que les chapitres 5,6,7 l'ont été par F. Vangénéberg.

&&&&&&&&&&&&&&&

CHAPITRE I

SYSTEMES D'AXES

ET CHOIX DES UNITES

1. Choix d'un système de coordonnées

Différents systèmes de coordonnées sont possibles, chacun présentant différents avantages et s'adaptant plus ou moins bien à la situation.

Considérons uniquement les systèmes les plus employés :

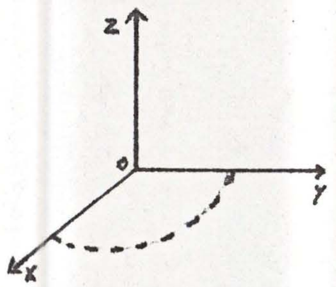
1.1 Référentiel cartésien $\{\vec{r},\vec{v}\}$

L'origine O du système est choisie au centre de la terre.

Les axes OX,OY pris dans le plan équatorial.

On peut encore distinguer ici deux systèmes :

- un repère fixe

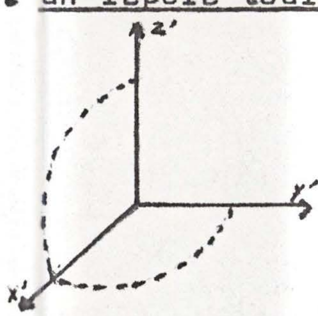


OX dirigé suivant le point vernal

OY est perpendiculaire à OX dans le plan équatorial et dans le sens de la rotation de la terre

OZ complète le trièdre de telle sorte qu'il soit dextrogyre

- un repère tournant lié à la terre

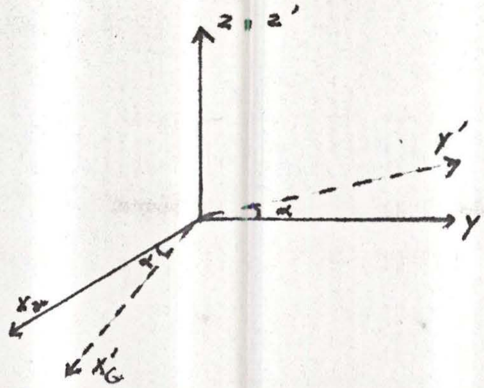


OX' pris dans le plan méridien de GREENWITCH

OY' perpendiculaire à OX dans le sens de la rotation de la terre

OZ' complète le trièdre pour le rendre dextrogyre

Si on se rappelle la définition du temps sidéral : l'angle horaire du point vernal γ sur la sphère locale , on voit aisément que l'on passe d'un système à l'autre par une rotation d'un angle égal au temps sidéral de GREENWITCH.



La relation entre les coordonnées d'un point dans le système fixe et ses coordonnées dans le système mobile s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} X_F &= X_M \cos\alpha - Y_M \sin\alpha \\ Y_F &= X_M \sin\alpha + Y_M \cos\alpha \\ Z_F &= Z_M \end{aligned}}$$

Considérons aussi les vitesses exprimées dans les deux systèmes :

En notant $(\dot X_M , \dot Y_M , \dot Z_M)$ les vitesses dans le repère mobile, nous avons la relation :

$$\begin{pmatrix} \dot X'_F \\ \dot Y'_F \\ \dot Z'_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot X_M \\ \dot Y_M \\ \dot Z_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad (\times)$$

où $(0,0,\omega)$ est le vecteur rotation de la terre.

L'équation $(\times)$ nous donne donc les vitesses dans le repère fixe, mais exprimées dans le repère mobile.

Il suffit donc d'appliquer une rotation d'un angle ω pour obtenir ce vecteur dans le repère fixe c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot X_F &= (\dot X_M - \omega Y_M)\cos\alpha - (\dot Y_M + \omega X_M)\sin\alpha \\ \dot X_F &= (\dot X_M - \omega Y_M)\sin\alpha + (\dot Y_M + \omega X_M)\cos\alpha \\ \dot Z_F &= \dot Z_M \end{aligned}}$$

où α est le temps sidéral de GREENWITCH.

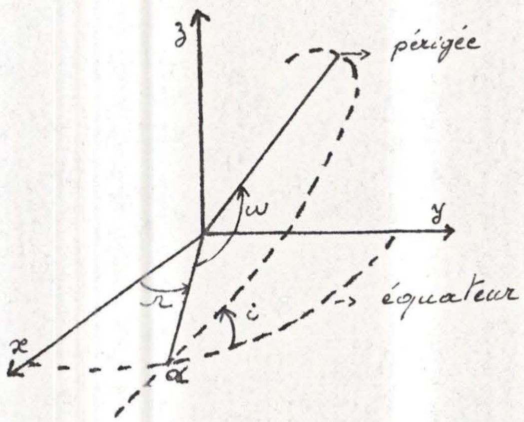
1.2 Eléments orbitaux

Dans le problème des 2 corps (terre-satellite), la résolution des équations de mouvement nous montre que le satellite se déplace le long d'une trajectoire képlérienne (ellipse).

Dans ce cas, son mouvement est entièrement décrit par les paramètres suivants :

a) $a = \frac{1}{2}$ grand axe de l'ellipse
e = excentricité de l'ellipse
i = son inclinaison
Ω = longitude du noeud ascendant
ω = argument du périgée
τ = temps de passage au périgée

c'est-à-dire graphiquement :



α = noeud ascendant : le point intersection du plan équatorial avec l'orbite (pris dans le sens de passage des z négatifs aux z positifs)

Il faut remarquer que le dernier paramètre : τ est souvent remplacé par M : l'anomalie moyenne. Elle vaut :
$M = n\,(t - t_o)$ où n = le moyen mouvement donné par $n = k\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

Remarque

Le système de paramètres orbitaux décrit ci-dessus présente plusieurs indéterminations

- si $\begin{cases} i = 0 \\ \text{ou } i = \pi \end{cases}$ alors Ω n'est pas défini : le plan orbital est alors confondu avec le plan équatorial
- si $e = 0$: le périgée n'est pas défini : on ne connaît donc pas ω

Ces deux cas d'indétermination se rencontrent couramment lors de l'observation de trajectoires de satellites artificiels.

Le cas de l'excentricité nulle sera traité en détail dans le chapitre (III).

b) Un second système de paramètres orbitaux est souvent utilisé. Il s'agit du système : $[a, C_\ell, S_\ell, U, V]_{t=to}$

où $a = \frac{1}{2}$ grand axe de l'ellipse

$C_\ell = (e\cos E)_{t=to}$

$S_\ell = (e\sin E)_{t=to}$ où E = anomalie excentrique

U = vecteur unitaire dirigé suivant le vecteur position

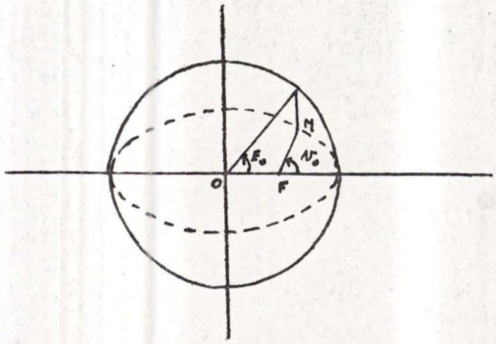
V = vecteur unitaire perpendiculaire à U dans le plan orbital : dans le sens des anomalies vraies croissantes

Ce système sera souvent utilisé car il est toujours défini contrairement au cas précédent

Remarque

Nous avons parlé - anomalie excentrique
- anomalie vraie
- anomalie moyenne

La dernière valeur a été définie dans les paramètres orbitaux. Voyons graphiquement la signification des 2 autres.



soit la position du satellite en un temps t = to : M

Nous voyons sur le graphique les angles E_0 = anomalie excentrique

v_0 = anomalie vraie

et nous avons la relation :

$nt = M = E - e \sin E$

ce qui permet de déduire l'anomalie excentrique de l'anomalie moyenne par un procédé de NEWTON-RAPHSON.

Les formules de passage d'un système de coordonnées à l'autre ne sont pas explicites ici. Nous nous reférons pour cela à Escobal.

1.3 <u>Les éléments osculateurs</u>

Lorsque l'on résout le problème des deux corps sans tenir compte des perturbations d'aucune sorte, l'orbite tracée par le satellite est alors une ellipse et les paramètres orbitaux décrits ci-avant déterminent à tout moment la position et la vitesse du satellite.

Mais le problème posé n'est pas le cas d'une terre tout à fait sphérique, mais aplatie aux deux pôles. Néanmoins, si en un instant to fixé, nous supposons que toutes les influences perturbatrices cessent, le satellite ayant une position r et une vitesse v se trouverait alors sur une trajectoire képlérienne dont les éléments orbitaux se déterminent facilement à partir de r et de v.

Les paramètres elliptiques ainsi trouvés sont appelés <u>éléments osculateurs</u> et déterminent l'<u>orbite osculatrice</u> en un temps to.

En fait, le satellite ne se déplace pas réellement le long de cette trajectoire elliptique. Mais il est à remarquer que les forces perturbatrices étant faibles comparées à la force centrale, les positions effectives différeront relativement peu des positions données par le modèle képlérien.

2. Choix des unités

2.1 Nous utiliserons dans les chapitres 5, 6 et 7 le système d'unités suivant :

- unité de temps : le jour
- unité de distance : le rayon équatorial terrestre
  Re = 6378 160 m
- tous les angles rencontrés se mesurent en radians
- unité de masse : la masse de la terre : $M = 595.10^{25}$ kg

Valeurs des constantes dans ce système d'unités :

G : la constante gravifique vaut : $107,088300472 \frac{Re}{(jour)^2}$

ω : la vitesse angulaire de la terre $= 2\pi$

Les valeurs choisies ici sont celles adoptées par A. DEPRIT.
Comparons les avec celles de UAI (union astronomique internationale)

GE = MG avec M = masse de la terre
G = constante gravifique

$$GE_{(UAI)} = 398.603.10^9 (m^3/sec^2) M$$

$$GE_{(DEPRIT)} = 1\,1467,50409810 \frac{(Re)^3}{(jour)^2} .M$$

$$= 398605049706291 (m^3/sec^2).M$$

La différence entre ces deux valeurs correspond à l'imprécision des mesures.

2.2 Dans les chapitres 3, 4 nous utiliserons les mêmes unités sauf en ce qui concerne le temps : nous prendrons la minute comme unité de temps.

La valeur des constantes est alors :

$$G = 0.55309\ 10^{-2} (Re^3/min^2).M$$

$$\omega = 2\pi/1440 = 0.437527\ 10^{-2} \text{ Rad/min}$$

Une dernière remarque s'impose encore quant à l'introduction des données. Il est évident que lorsque l'on considère des éléments orbitaux (elliptiques), ceux-ci s'expriment dans un repère fixe.

Par contre, si nous introduisons des coordonnées cartésiennes représentant des observations, celles-ci seront exprimées dans un repère tournant avec la terre, ce qui est normal puisque des observations ne peuvent être faites que dans le repère tournant.

Lors des passages entre le système fixe et le système mobile, on a vu dans le début du chapitre que la connaissance du temps sidéral de GREENWITCH était indispensable. Celui-ci, comme tous les angles se mesure en radians. Il vaut, rappelons-le, l'angle horaire du point γ.

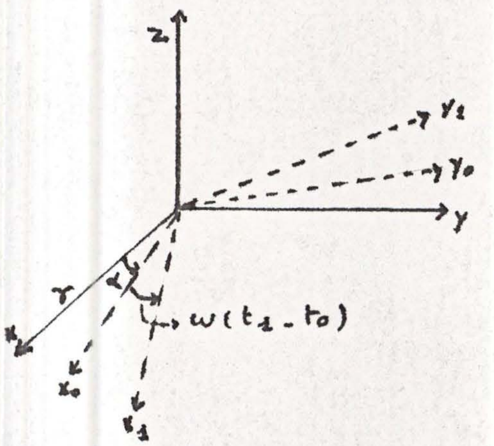
Mais ce que l'on connaît en général en un lieu donné, c'est le temps universel et non le temps sidéral.

Si on connaît le temps sidéral de GREENWITCH au moment initial pour des temps ultérieurs, on a

$$TS_i = TSo + \omega(t_i - to)$$

où $(t_i - to)$ = laps de temps universel écoulé entre le moment initial et le moment où on veut connaître le temps sidéral de GREENWITCH.

$\Rightarrow \omega(t_i - to)$ est donc l'angle parcouru par le repère tournant entre les deux instants.



α = temps sidéral de GREENWITCH au moment initial to

CHAPITRE II - METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE DANS LA DETERMINATION D'UNE ORBITE

2-1 Situation du problème

Nous considérons ici le problème des deux corps c'est-à-dire d'un côté nous avons la terre et de l'autre, le satellite.

Nous négligerons, dans un premier temps, les effets provenant de l'applatissement de la terre, ainsi que de toute force perturbatrice.

Supposons que nous disposons d'observations qui permenttent de calculer une certaine quantité W qui dépend seulement de la position et de la vitesse du satellite, tous les autres paramètres liés à l'observation ou à la théorie du mouvement étant connue par ailleurs.

Nous avons donc :

$$W = W(a,e,i,\Omega,\omega,M)$$

Problème

Si nous disposons de telles observations à des instants différents et d'une approximation initiale des éléments orbitaux, est-il possible de trouver un nouvel ensemble d'éléments représentant mieux l'orbite du satellite ?

La réponse est affirmative. C'est le but de la méthode de correction différentielle que nous allons développer ici dans le cas général.

Il faut se rappeler que dans le problème des deux corps, les éléments elliptiques $[a,e,i,\Omega,\omega,\tau]$ sont constants dans le temps.

Nous supposerons encore que la quantité observée est sans erreur.

2-2 Exposé de la méthode

Soit N le nombre d'observations

Soit $(a_o,e_o,i_o,\Omega_o,\omega_o,M_o)$ l'ensemble nous donnant la première approximation de l'orbite à l'instant $t=t_o$.

Soit (a,e,i,Ω,ω,M) les éléments exacts à l'instant $t=t_o$ que nous recherchons.

Soit $(\Delta a_o,\Delta e_o,\Delta i_o,\Delta\Omega_o,\Delta\omega_o,\Delta M_o)$ les corrections à ajouter à $(a_o,e_o,i_o,\Omega_o,\omega_o,M_o)$ pour avoir les éléments exacts (a,e,i,Ω,ω,M)

Pour chaque instant t_i correspondant aux temps d'observation la quantité W_i s'écrit :

$$W_i = W(a_o+\Delta a_o, e_o+\Delta e_o, i_o+\Delta i_o, \Omega_o+\Delta\Omega_o, \omega_o+\Delta\omega_o, M_o+\Delta M_o) \qquad (1)$$

l'indice i de W_i indique que l'on considère le i^{eme} temps

Nous supposerons que les premières valeurs estimées $(a_o,e_o,i_o,\Omega_o,\omega_o,M_o)$ sont proches des valeurs exactes (a,e,i,Ω,ω,M).

Cette hypothèse nous autorise à développer W_i en série de Taylor en négligeant les termes du second ordre.

On suppose donc que l'approximation n'est pas trop mauvaise. C'est l'expérience qui nous donnera la limite d'acceptibilité, et nous indiquera ce que "pas trop mauvaise" signifie.

Si nous développons (1) en série de Taylor jusqu'au premier ordre nous obtenons :

$$W_i = W(a_o,e_o,i_o,\Omega_o,\omega_o,M_o) + \frac{\partial W_i}{\partial a_o}\Delta a_o + \frac{\partial W_i}{\partial e_o}\Delta e_o + \frac{\partial W_i}{\partial i_o}\Delta i_o + \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_o}\Delta\Omega_o + \frac{\partial W_i}{\partial \omega_o}\Delta\omega_o + \frac{\partial W_i}{\partial M_o}\Delta M_o \qquad (2)$$

où les dérivées sont prises au temps $t=t_i$

Nous avons remplacé les $da_o, de_o, di_o, d\Omega_o, d\omega_o, dM_o$ respectivement par les différences finies $\Delta a_o, \Delta e_o, \Delta i_o, \Delta\omega_o, \Delta\Omega_o, \Delta M_o$.

$W(a_o,e_o,i_o,\Omega_o,\omega_o,M_o)$ est la valeur qu'aurait pris W_i si les éléments présumés avaient été exacts. On l'appelle valeur calculée de W et elle sera notée W_{ci} par opposition à W_{oi} qui est la quantité observée.

Les W_{ci} sont calculés soit par intégration numérique à partir de la valeur approchée de W au temps $t=t_o$, soit analytiquement.

Si nous considérons l'équation (2) nous trouvons

$$(W_c - W_o)_i = \frac{\partial W_i}{\partial a_o}\Delta a_o + \frac{\partial W_i}{\partial e_o}\Delta e_o + \frac{\partial W_i}{\partial i_o}\Delta i_o + \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_o}\Delta \Omega_o + \frac{\partial W_i}{\partial \omega_o}\Delta \omega_o$$

$$+ \frac{\partial W_i}{\partial M_o}\Delta M_o \qquad (3)$$

i variant de 1 jusque N

où les dérivées sont prises au temps t_i (les t_i étant les temps d'observation)

Les coéfficients $\frac{\partial W_i}{\partial a_o}$, $\frac{\partial W_i}{\partial e_o}$, $\frac{\partial W_i}{\partial i_o}$, $\frac{\partial W_i}{\partial \Omega_o}$, $\frac{\partial W_i}{\partial \omega_o}$, $\frac{\partial W_i}{\partial M_o}$ seront calculés soit analytiquement (voir chapitre III) soit numériquement suivant le principe :

Donnons à W un petit accroissement connu Δa et calculons les W avec les nouveaux éléments orbitaux :

$$a_o + \Delta a, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o$$

Nous obtenons:

$$W_i\ (a_o + \Delta a, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o) = W_i\ (a_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o) + \Delta a \frac{\partial W_i}{\partial a_o}$$

ou encore :

$$\frac{\partial W_i}{\partial a_o} = \frac{W_i(a_o + \Delta a, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o) - W_i(a_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o)}{\Delta a}$$

Cette dernière relation permet de calculer le premier coéfficient de l'équation 3. Les autres coéfficients se calculent par le même principe. On obtient :

$$\frac{\partial W_i}{\partial e_o}, \frac{\partial W_i}{\partial i_o}, \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_o}, \frac{\partial W_i}{\partial \omega_o}, \frac{\partial W_i}{\partial M_o}$$

en considérant respectivement les accroissements

$$e_o + \Delta e_o\ ,\ i_o + \Delta i_o\ , \Omega_o + \Delta \Omega_o,\ \omega_o + \Delta \omega_o\ ,\ M_o + \Delta M_o$$

et en gardant chaque fois les autres éléments constants.

Tous ces coéfficients seront calculés pour chaque temps t_i.

Ce n'est pas cette méthode que nous avons exploité ici.

Le calcul analytique dans le cas particuler où la fonction W est la fonction "range rate" notée $\dot{\rho}$ (et qui est la dérivée de la norme de la position relative du satellite par rapport à la station) sera fait dans un cas particuler au chapitre suivant.
Nous supposons donc maintenant que nous connaissons les dérivées apparaissant dans les N équations (3).
Ce même ensemble (3) représente donc un système de N équations à six inconnues $\Delta a_o, \Delta e_o, \Delta i_o, \Delta\Omega_o, \Delta\omega_o, \Delta M_o$ que l'on résoudra par moindres carés. On obtiendra alors les six accroissemants cherchés.
L'approximation faite en négligeant les termes du second ordre fait que l'on n'obtient pas du premier coup la solution. Il donnera le nouvel ensemble d'éléments orbitaux qui servira de valeur de départ pour l'itération suivante. On recommencera le processus toujours avec les mêmes observations; les seules valeurs qui changeront seront les valeurs calculées.
Nous recommencerons ainsi le processus jusqu'à ce que les résidus $(W_c - W_o)_i$ deviennent aussi petits.
Si la première approximation de départ avait été exacte, les résidus $(W_c - W_o)_i$ auraient été égaux à zero. Mais en général ce n'est pas le cas.
Le processus utilisé corrige alors les valeurs initiales des éléments orbitaux $(a_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o)$ pour que les W_{ci} calculés à partir de ces éléments collent au mieux avec les valeurs observées W_{oi}.
Donc si les valeurs de départ sont acceptables, nous devons nous attendre à une diminution des résidus au fur et à mesure des itérations.
Toutefois ils ne s'annulent jamais puisque nous avons négligé des forces perturbatrices dans les calculs des W_{ci} et puisque nous avons arrêté les développements au 1er ordre.
Le principe de la méthode de correction différentielle est très général. Ici nous l'avons exposé partant des éléments elliptiques. On peut de la même façon adopter une méthode corrigeant les éléments cartésiens.

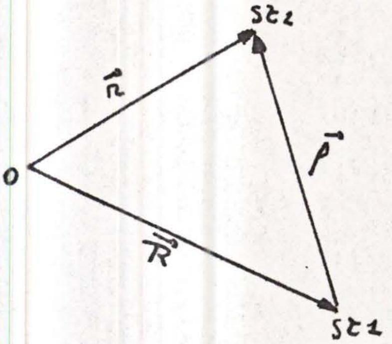
2-3 Correction différentielle basée sur les observations Doppler

La méthode Doppler procède par mesure de vitesses radiales à partir des variations de fréquences d'un émetteur embarqué.
Nous donnerons ici une idée du fonctionnement.

Principe du fonctionnement

On enregistre simultanément à l'aide d'un enregistreur magnétique les signaux émis par le satellite et les signaux horaires. Ensuite on mesure les fréquences reçues par comparaison avec un oscillateur. Lorsque l'on a l'égalité entre les fréquences on lit sa valeur sur le cadran d'un fréquencemètre.
Cette méthode est plus facile, que celle basée sur les observations de l'ascension droite et de la déclinaison du satellite qui sont relevées par photographies ou que celle basée sur les observations mesurant la distante station - satellite, observations faites avec un laser qui demande de bonnes conditions météorologiques, puisque les signaux peuvent être captés automatiquement et indépendamment des conditions météorologiques. On dispose donc plus facilement d'un bon réseau de station d'observation. Les mesures de fréquences sont actuellement très précises et peuvent atteindre le centième de hertz.

La fonction W s'écrit ici



puisque $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$

$\vec{r}$ = vecteur position du satellite
= (x,y,z)

$\vec{R}$ = vecteur position de la station
= (X,Y,Z)

et ceci dans le repère absolu

St_1 = station
St_2 = satellite

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} - \dot{x}X - x\dot{X} - \dot{y}Y - y\dot{Y} - \dot{z}Z - z\dot{Z}}{\rho}$$

En écrivant l'équation aux différences pour les N temps d'observation on obtient un système à six inconnues, Δx_o, Δy_o, Δz_o, $\Delta \dot{x}_o$, $\Delta \dot{y}_o$, $\Delta \dot{z}_o$, que l'on résout par les moindres carrés.
On itère le processus jusqu'au moment ou la différence

$\dot{\rho}_{ci} - \dot{\rho}_{oi}$ ait la précision souhaitée pour chaque temps

$\dot{\rho}_{ci}$ = vitesse radiale calculée

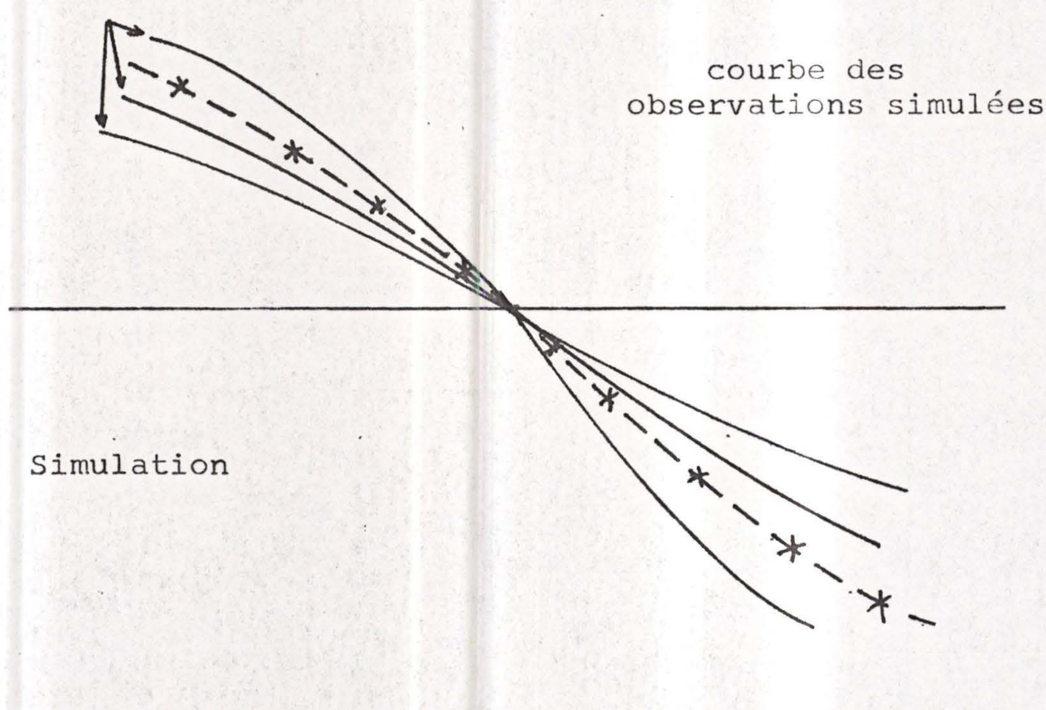
$\dot{\rho}_{oi}$ = vitesse radiale observée

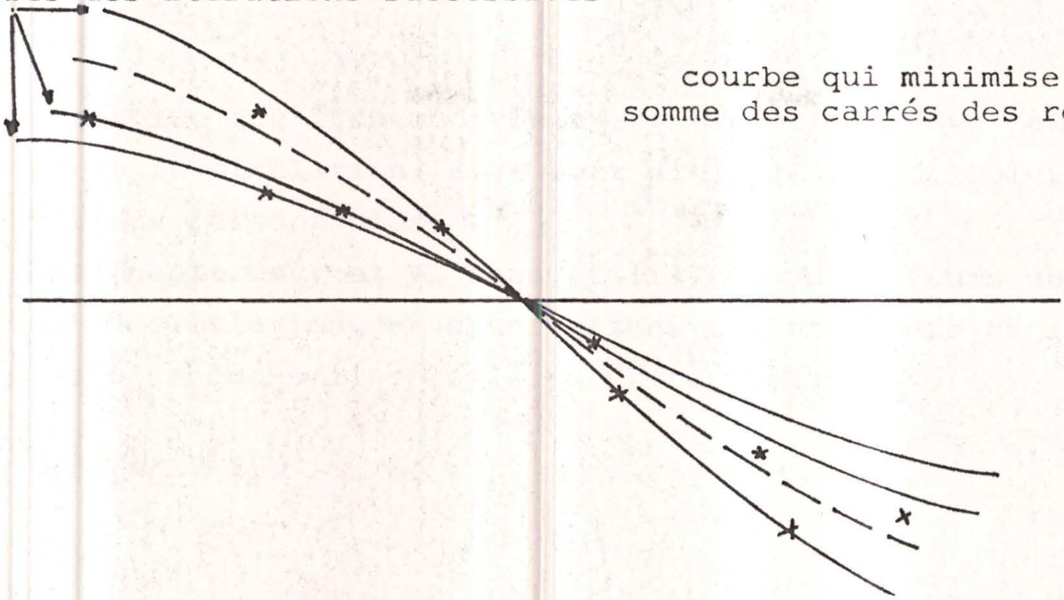
Nous ferons le développement analytique de la méthode, de correction différentielle basée sur les observations Doppler au chapitre III

2-4 Principe de la simulation

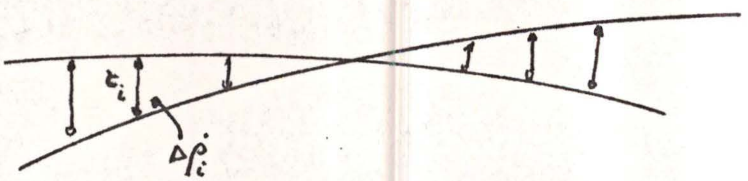
Nous venons de décrire comment il est possible par correction différentielle d'ajuster à un certain nombre de données d'observation une courbe correspondant à une orbite keplérienne. On peut donc ramener une série de N observations d'un ou plusieurs passages de satellite à une série de six paramètres elliptiques.

Courbes dues aux itérations successives





Pour un ou plusieurs passages du satellite et à partir d'une approximation relativement bonne de la position et de la vitesse X en un des temps, on cherche par itérations successives la position et la vitesse X_o qui au même temps s'associe à une trajectoire elliptique qui minimise la somme de carrés des résidus Doppler sur les temps d'observation.



Dans ce premier temps, comme les observations se situent sur une courbe heplérienne, la somme des carrés des résidus doit tendre vers O (aux erreurs d'arrondis près).

L'approximation de départ est simulée en perturbant un ou plusieurs éléments elliptiques de la trajectoire comprenant les observations (et en recalculant les éléments cartésiens issus de la nouvelle orbite obtenue).

Rappel

La trajectoire que l'on modifie n'est keplerienne que pour les besoins de la simulation. Elle sert simplement à calculer des observations raisonnables.

Dans les chapitres V et VI nous utiliserons d'ailleurs une autre méthode de simulation des observations tenant compte de la force perturbatrice due à l'applatissement terrestre.

CHAPITRE III - APPLICATION DE LA METHODE A UNE ORBITE CIRCULAIRE POLAIRE

Résultats analytiques

3-1 Définitions de quelques éléments orbitaux - Explication de la méthode

Considérons une station pouvant effectuer des observations Doppler.
On aura donc N valeurs $\dot{\rho}_{oi}$ correspondantes i = 1...N

avec $\dot{\rho}_{oi}$ vitesse radiale observée

N = nombre total d'observations

Disposant de ces N observations, on veut connaître au mieux la position r_o et la vitesse v_o du satellite à un instant $t = t_o$

Nous noterons : $\vec{X}_o = (\vec{r}_o, \vec{v}_o)$ vecteur position - vitesse du satellite ou temps $t = t_o$

$\vec{X} = (\vec{r}, \vec{v})$ vecteur position - vitesse en un temps t quelconque

La position et la vitesse du satellite et de station sont exprimées dans le repère absolu $\vec{r}\,(x,y,z)$

$\vec{v}\,(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

$R_i = (X,Y,Z) =$ vecteur position de la station

Nous supposerons que l'orbite du satellite est parfaitement képlérienne.

Pour la méthode de correction différentielle, nous devons résoudre le système

$$(\dot{\rho}_c - \dot{\rho}_o)_i = \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial x_o}\Delta x_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial y_o}\Delta y_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial z_o}\Delta z_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{x}_o}\Delta \dot{x}_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{y}_o}\Delta \dot{y}_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{z}_o}\Delta \dot{z}_o$$

où les dérivées sont prises au temps $t=t_i$, i = I....N

$$\dot{\rho}_i = \dot{\rho}_i\,(x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o, X_o, Y_o, Z_o, \dot{X}_o, \dot{Y}_o, \dot{Z}_o)$$

On suppose les coordonnées de la station et sa vitesse sont connues exactement c'est - à - dire : $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}$ sont nuls.

Les inconnues sont : $\Delta x_o, \Delta y_o, \Delta z_o, \Delta \dot{x}_o, \Delta \dot{y}_o, \Delta \dot{z}_o$

Pour résoudre le problème, il faut connaître :

$\dot{\rho}_{ci}$: range rate calculés aux N temps correspondant aux observations.

$\dot{\rho}_{oi}$: range rate fournis, donnés.

3-2 Développement analytique

3-2-1 Calcul des $\dot{\rho}_{ci}$

Soient $x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o \quad t=t_o$ les éléments cartésiens correspondant donc au problème des deux corps au temps $t=t_o$

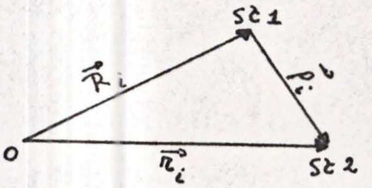
Nous considérons ce sextuple comme première approximation de la position et de la vitesse du satellite. C'est-à-dire que la méthode de correction différentielle à chaque itération corrigera le vecteur.

Par une méthode numérique - résolution de l'équation de Kepler - on calcule la position et la vitesse du satellite aux N temps correspondant aux observations.

Nous avons donc :

$$[x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]_{t=t_i} \qquad i=1.....N \qquad (2)$$

On suppose que l'on a :



o = centre terre

St1 = station

St2 = satellite

on a la relation vectorielle $\vec{\rho}=\vec{r}-\vec{R}$

Pour la simplification des écritures, on laisse tomber les indices i.

$$\begin{aligned}\vec{\rho}\cdot\vec{\rho} &= (\vec{r}-\vec{R})\cdot(\vec{r}-\vec{R}) = \rho^2\\ &= r^2-2\vec{r}\cdot\vec{R}+R^2\\ &= x^2+y^2+z^2-2xX-2yY-2zZ+X^2+Y^2+Z^2\end{aligned}$$

Si on dérive on a :

$$\rho\dot{\rho} = x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}-\dot{x}X-x\dot{X}-\dot{y}Y-\dot{z}Z-y\dot{Y}-z\dot{Z} \qquad (3)$$

Après calcul des positions et des vitesses de la station

$(X,Y,Z,\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$ aux N temps (4)

On remplace (2) et (4) dans (3) et on a $\dot{\rho}$ recherché.

3-2-2 Calcul de $\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta}$ où $\eta \in \{x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o\}$

Si on dérive (3) par rapport à η on obtient :

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta} = \frac{\partial x}{\partial\eta}(L'_x-\frac{\dot{\rho}}{\rho}L_x)+\frac{\partial y}{\partial\eta}(L'_y-\frac{\dot{\rho}}{\rho}L_y)+\frac{\partial z}{\partial\eta}(L'_z-\frac{\dot{\rho}}{\rho}L_z)+\frac{\partial\dot{x}}{\partial\eta}L_x+\frac{\partial\dot{y}}{\partial\eta}L_y+\frac{\partial\dot{z}}{\partial\eta}L_z \tag{5}$$

où $\begin{cases} L_x = \frac{x-X}{\rho} & L_y = \frac{y-Y}{\rho} & L_z = \frac{z-Z}{\rho} \\ L'_x = \frac{\dot{x}-\dot{X}}{\rho} & L'_y = \frac{\dot{y}-\dot{Y}}{\rho} & L'_z = \frac{\dot{z}-\dot{Z}}{\rho} \end{cases}$

Remarquons que $\frac{\partial X}{\partial\eta} = \frac{\partial Y}{\partial\eta} = \frac{\partial Z}{\partial\eta} = \frac{\partial\dot{X}}{\partial\eta} = \frac{\partial\dot{Y}}{\partial\eta} = \frac{\partial\dot{Z}}{\partial\eta} = 0$

Si on étudie (5) pour connaître $\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta}$ il faut connaître

- $L_x, L_y, L_z, L'_x, L'_y, L'_z$ → peuvent être calculés assez facilement
- $\frac{\partial x}{\partial\eta}$, $\frac{\partial y}{\partial\eta}$, $\frac{\partial z}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\dot{x}}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\dot{y}}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\dot{z}}{\partial\eta}$ où $\eta \in \{x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o\}$
- Sous forme matricielle on doit calculer :

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\vec{X}_o} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{X}_o = (\vec{r}_o, \vec{v}_o) \\ \vec{X} = (\vec{r}, \vec{v}) \end{cases}$$

3-2-3 Calcul de $\frac{\partial\vec{X}}{\partial\vec{X}_o}$

Nous prendrons comme éléments elliptiques l'ensemble :
$\{a, S_e, C_e, \vec{U}_o, \vec{S}_o\}$

où a = demi-grand axe

$C_e = e \cos E_o$ où e = exentricité

E_o = anomalie exentrique en $t=t_o$

$S_e = e \sin E_o$

$\vec{U}_o$ = vecteur unitaire de même direction que $\vec{r}_o$

$\vec{S}_o$ = vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{U}_o$ dans le plan de l'orbite pour calculer $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_o}$ on calcule en fait

$$\boxed{\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_o} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o}} \qquad \text{où } q \in \left\{a, C_e, S_e, U_o, S_o\right\}$$

3-2-4 Calcul de $\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o}$

Nous supposons établies les relations suivantes :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_o} - \frac{V_o^2}{\mu}$$

$$C_e = 1 - \frac{r_o}{a}$$

$$S_e = \frac{r_o \dot{r}_o}{\mu a}$$

$$\vec{U}_o = \begin{bmatrix} \frac{x_o}{r_o} \\ \frac{y_o}{r_o} \\ \frac{z_o}{r_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{x_o} \\ U_{y_o} \\ U_{z_o} \end{bmatrix}$$

μ = masse de la terre

$$\dot{r}_o = \dot{\vec{r}}_o \cdot \vec{U}_o$$

$$V_o^2 = \dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2 + \dot{z}_o^2$$

$$\vec{S}_o = \sqrt{\mu p}\, \vec{V}_o = \begin{bmatrix} r_o \dot{x}_o - \dot{r}_o x_o \\ r_o \dot{y}_o - \dot{r}_o y_o \\ r_o \dot{z}_o - \dot{r}_o z_o \end{bmatrix}$$

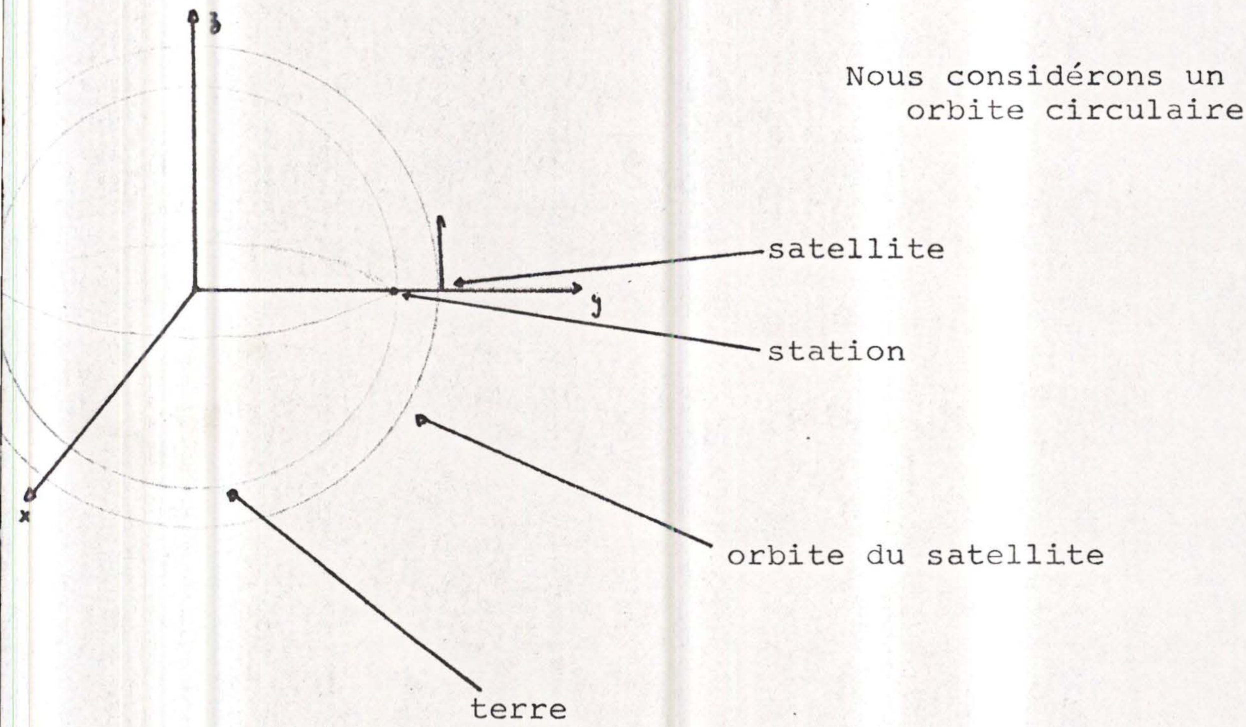
Nous obtenons $\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o}$ en différentiant les formules ci-dessus

Les dérivées partielles des éléments q par rapport à X_o sont données en toute généralité dans le chapître 9 de "Determination of orbits" d'Escobal.

Les formules données par Escobal sont fort compliquées et peu lisibles. C'est pourquoi nous tâcherons de prendre un cas particulier ce qui nous amène aux hypothèses simplificatrices suivantes.

Nous supposerons d'abord la station placée à l'équateur et la terre est supposée fixe

Nous prendrons les conditions initiales au zenith de la station et nous placerons le plan de l'orbite dans un plan de coordonnée.



De ces trois hypothèses nous déduisons que :

a) $\dot{x}_o = \dot{x}_o = 0$ car orbite dans le plan (y,z)

$\dot{y}_o = 0$ car orbite circulaire et conditions initiales sont au zenith

$z_o = 0$ car conditions initiales au zenith

b) puisque l'on a un orbite circulaire

$$a = r_o = y_o = r = p \text{ car } p = a(1-e^2)$$

$$e = 0 = C_e = 0 = S_e$$

c) $$\vec{U}_o = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{S}_o = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r_o \dot{z}_o \end{vmatrix}$$

d) $\dot{r}_o = \vec{r}_o \cdot \vec{U}_o = 0 \qquad V_o = \dot{z}_o$

Si nous reportons ces simplifications dans la matrice obtenue dans le chapître 9 de "Determination of orbits" d'Escobal nous obtenons

$$\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o} = \left[\frac{\partial a}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial C_e}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial S_e}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial U_{x_o}}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial U_{y_o}}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial U_{z_o}}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial S_{x_o}}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial S_{y_o}}{\partial \vec{X}_o} \quad \frac{\partial S_{z_o}}{\partial \vec{X}_o} \right]^{\tau}$$

nous obtenons une matrice (6x9) égale à :

$$\begin{vmatrix}
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2a^2\dot{z}_o \\
0 & \dot{z}^2 & 0 & 0 & 0 & 2y\dot{z}_o \\
0 & 0 & \frac{\dot{z}_o}{\sqrt{a}} & 0 & \frac{y_o}{\sqrt{a}} & 0 \\
\frac{1}{y_o} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{y_o} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & y_o & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dot{z}_o & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dot{z}_o & 0 & 0 & 0 & y_o
\end{vmatrix}$$

3-2-5 Calcul de la matrice $\frac{\partial \vec{X}}{\partial q}$

$q \in \{a, S_e, C_e, \vec{U}_o, \vec{S}_o\}$

La matrice $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$ est obtenue en dérivant partiellement par rapport à q :

$\vec{r} = x_\nu \vec{U}_o + y_\nu \vec{V}_o$ où $x_\nu = r\cos(v-v_o)$

$y_\nu = r\sin(v-v_o)$

v = anomalie vraie au temps t

v_o = anomalie vraie au temps t_o

et en exprimant les dérivées partielles en fonction de r , r_o, $\sin(v-v_o)$, $\cos(v-v_o)$, S_e, C_e.

Nous donnons ensuite les $\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial q}$ puisque les $\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q}$ en découlent.

En effet :

$$\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial q} = \dot{\vec{r}} \frac{\partial r}{\partial q} + r \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q}$$

et donc $$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial q} - \dot{\vec{r}} \frac{\partial r}{\partial q} \right]$$

où $$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial x}{\partial q} + y \frac{\partial y}{\partial q} + z \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

Pour trouver $\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial q}$ nous dérivons l'expression

$$r\dot{\vec{r}} = \sqrt{\mu a}\; D\vec{U} + \sqrt{\mu p}\; \vec{V} \qquad \text{ou} \qquad D = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\sqrt{\mu a}}$$

Il apparaît encore une simplification

En effet, si l'on considère un orbite circulaire, le produit

$\vec{r}.\dot{\vec{r}} = 0 \qquad D = 0$

Pour obtenir les formules générales, il faut se référer à Escobal. Nous reprendrons simplement les résultats avec toutes les simplifications.

1) $$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} = A_1\vec{U}_o + A_2\vec{S}_o$$

où $A_1 = \cos(v-v_o) + \frac{3}{2}(M-M_o)\sin(v-v_o)$

$A_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{1}{2} \sin(v-v_o) - \frac{3}{2}(M-M_o)\cos(v-v_o) \right]$

2) $$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial C_e} = C_1\vec{U}_o + C_2\vec{S}_o$$

où $C_1 = -r\,(1 + \sin^2(v-v_o))$

$C_2 = \frac{r}{\sqrt{p}} \cos(v-v_o)\sin(v-v_o)$

3) $$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial S_e} = S_1\vec{U}_o + S_2\vec{S}_o$$

où $S_1 = r\sin(v-v_o)\,(2 - \cos(v-v_o))$

$S_2 = \sqrt{a}\,(1 - \cos(v-v_o))^2$

4) $\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial a} = \tilde{A}_1 \vec{U}_o + \tilde{A}_2 \vec{S}_o$

où $\tilde{A}_1 = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin(v-v_o) + \frac{3}{2} (M-M_o) \sqrt{\frac{1}{a}} \cos(v-v_o)$

$\tilde{A}_2 = \frac{3}{2} \frac{M-M_o}{r} \sin(v-v_o)$

5) $\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial C_e} = \tilde{C}_1 \vec{U}_o + \tilde{C}_2 \vec{S}_o$

où $\tilde{C}_1 = - \sqrt{a} \sin(v-v_o) \cos(v-v_o)$

$\tilde{C}_2 = - \sin^2(v-v_o)$

6) $\frac{\partial r\dot{\vec{r}}}{\partial S_e} = \tilde{S}_1 \vec{U}_o + \tilde{S}_2 \vec{V}_o$

où $\tilde{S}_1 = - \sqrt{a} \cos(v-v_o) \left[\cos(v-v_o) - 2\right]$

$\tilde{S}_2 = \sin(v-v_o) \left[2 - \cos(v-v_o)\right]$

Les deux autres constantes qui interviennent dans le calcul de la matrice sont :

$$\tilde{U} = - \sqrt{\mu p} \sin(v-v_o)$$
$$\tilde{S} = \cos(v-v_o)$$

En tenant compte de toutes les simplifications nous obtenons :

$\xi \in \left\{a, C_e, S_e\right\}$ $\quad\quad$ $\vec{U} = \left\{U_{X_o}, U_{Y_o}, U_{Z_o}\right\}$

$\vec{V} = \left\{V_{X_o}, V_{Y_o}, U_{Z_o}\right\}$

$H \in \left\{X, Y, Z\right\}$ $\quad\quad$ $\dot{H} \in \left\{\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}\right\}$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial q} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi} & \frac{\partial H}{\partial U} & \frac{\partial H}{\partial V} \\ \frac{\partial \dot{H}}{\partial \xi} & \frac{\partial \dot{H}}{\partial U} & \frac{\partial \dot{H}}{\partial V} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_1 & C_1 & S_1 \\ A_2 y_o \dot{z}_o & C_2 y_o \dot{z}_o & S_2 y_o \dot{z}_o \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial U} = x_\nu \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial V} = \frac{y_\nu}{\sqrt{p}} \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}\left[\tilde{A}_1 - \frac{\dot{y}A3}{r}\right] & \frac{1}{r}\left[\tilde{C}_1 - \frac{\dot{y}}{r}C3\right] & \frac{1}{r}\left[\tilde{S}_1 - \frac{\dot{y}}{r}S3\right] \\ \frac{1}{r}\left[\tilde{A}_2 y_o \dot{z}_o - \frac{\dot{z}A3}{r}\right] & \frac{1}{r}\left[\tilde{C}_2 y_o \dot{z}_o - \frac{\dot{z}C3}{r}\right] & \frac{1}{r}\left[\tilde{S}_2 y_o \dot{z}_o - \frac{\dot{z}S3}{r}\right] \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial U} = \begin{vmatrix} \frac{\tilde{U}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\,(U1) & \frac{yzx_\nu}{r} \\ 0 & -\frac{y\dot{z}x_\nu}{r^2} & \frac{U_2}{r} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V} = \begin{vmatrix} \frac{\tilde{S}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_4}{r} & -\frac{\dot{y}zy_\nu}{r^2\,p} \\ 0 & \frac{yy_\nu \dot{z}}{r^2\,p} & \frac{S_5}{r} \end{vmatrix}$$

avec : $A3 = A_1 y + A_2 z y_o \dot{z}_o$ $\qquad U1 = \tilde{U} - \frac{1}{r} \dot{y} y x_\nu$

$C3 = C_1 y + C_2 z y_o \dot{z}_o$ $\qquad U_2 = \tilde{U} - \frac{1}{r} z x_\nu \dot{z}$

$S3 = S_1 y + S_2 z y_o \dot{z}_o$ $\qquad S_4 = \tilde{S} - \frac{1}{r} \dot{y} y \frac{y_\nu}{\sqrt{p}}$

$S_5 = \tilde{S} - \dot{z} \frac{1}{r} z \frac{y_\nu}{\sqrt{p}}$

3-2-6 Calcul des coefficients

Connaissant les matrices $\frac{\partial \vec{X}}{\partial q}$ et $\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o}$ nous pouvons calculer

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_o} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \vec{X}_o}$$

Cette matrice obtenue nous calculons les coéfficients en reprenant la formule (5)

Nous considérons encore les simplifications $\dot{x} = x = 0$

et $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$

pour le calcul de $L_x, L'_x, L_y, L'_y, L_z, L'_z$

Toutes opérations effectuées nous avons

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x_o} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial y_o} = {} & (2A_1 + C_1 \dot{z}_o^2)\,(L'_y - \frac{\dot{\rho}}{\rho} L_y) \\ & + (2A_2 y_o \dot{z}_o + C_2 y_o \dot{z}_o^2 + \frac{y_\nu}{\sqrt{p}} \dot{z}_o)\,(L'_z - \frac{\dot{\rho}}{\rho} L_z) \\ & + \left[\frac{2}{r}(\tilde{A}_1 - \frac{A3\dot{y}}{r}) + \frac{\dot{z}_o^2}{r}(\tilde{C}_1 - \frac{\dot{y}C3}{r})\right] L_y \\ & + \left[\frac{2}{r}(A_2 y_o \dot{z}_o - \frac{\dot{z}A3}{r}) + \frac{\dot{z}_o^2}{r}(\tilde{C}_2 y_o \dot{z}_o - \frac{\dot{z}C3}{r})\right] L_z \\ & + \frac{\dot{z}_o}{r} S_5 L_z - \frac{\dot{z}_o}{r^2} \frac{z}{\sqrt{p}} \dot{y} y_\nu L_y\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\dot\rho}{\partial z_o} = \left(\frac{S_1\dot z_o}{\sqrt{a}} - \frac{\dot z_o y}{\sqrt{p}} \right) \left(L'_y - \frac{\dot\rho}{\rho} L_y \right)$$

$$+ \left(\frac{S_2 y_o \dot z_o^2}{\sqrt{a}} + \frac{x}{y_o} \right) \left(L'_z - \frac{\dot\rho}{\rho} L_z \right)$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \left(\tilde S_1 - \frac{\dot y}{r} S3 \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{y_o} \dot y z x_\nu - \frac{\dot z_o}{r} S4 \right] L_y$$

$$+ \left[\frac{\dot z_o}{\sqrt{a} r} \left(\tilde S_2 y_o \dot z_o - \frac{\dot z}{r} S3 \right) + \frac{1}{r y_o} U_2 - \frac{\dot z_o}{r^2} \frac{yy}{\sqrt{p}} \dot z \right] L_z$$

$$\frac{\partial\dot\rho}{\partial \dot x_o} = 0$$

$$\frac{\partial\dot\rho}{\partial \dot y_o} = \frac{S_1 y_o}{\sqrt{a}} \left(L'_y - \frac{\dot\rho}{\rho} L_y \right) + \frac{S_2 y_o \dot z_o}{a} \left(L'_z - \frac{\dot\rho}{\rho} L_z \right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\tilde S_1 - \frac{\dot y S3}{r} \right] L_y + \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\tilde S_2 y_o \dot z_o - \frac{\dot z S3}{r} \right] L_z$$

$$\frac{\partial\dot\rho}{\partial \dot z_o} = \left(2a^2 \dot z_o A_1 + 2C_1 y_o \dot z_o \right) \left(L'_y - \frac{\dot\rho}{\rho} L_y \right)$$

$$+ \left(2a^2 \dot z_o^2 y_o A_2 + 2C_2 y_o^2 \dot z_o^2 + \frac{y_o y_\nu}{\sqrt{p}} \right) \left(L'_z - \frac{\dot\rho}{\rho} L_z \right)$$

$$+ \left[2a\dot z_o \left(\tilde A_1 - \frac{\dot y A3}{r} \right) + 2\dot z_o \left(\tilde C_1 - \frac{\dot y}{r} C3 \right) - \frac{\dot y}{r} \frac{z y_\nu}{\sqrt{p}} \right] L_y$$

$$+ \left[2a\dot z_o \left(\tilde A_2 y_o \dot z_o - \frac{\dot z}{r} A3 \right) + 2\dot z_o \left(\tilde C_2 y_o z_o - \frac{\dot z}{r} C3 \right) + S5 \right] L_z$$

<u>Remarque</u> : Ces résultats ont été vérifiés numériquement

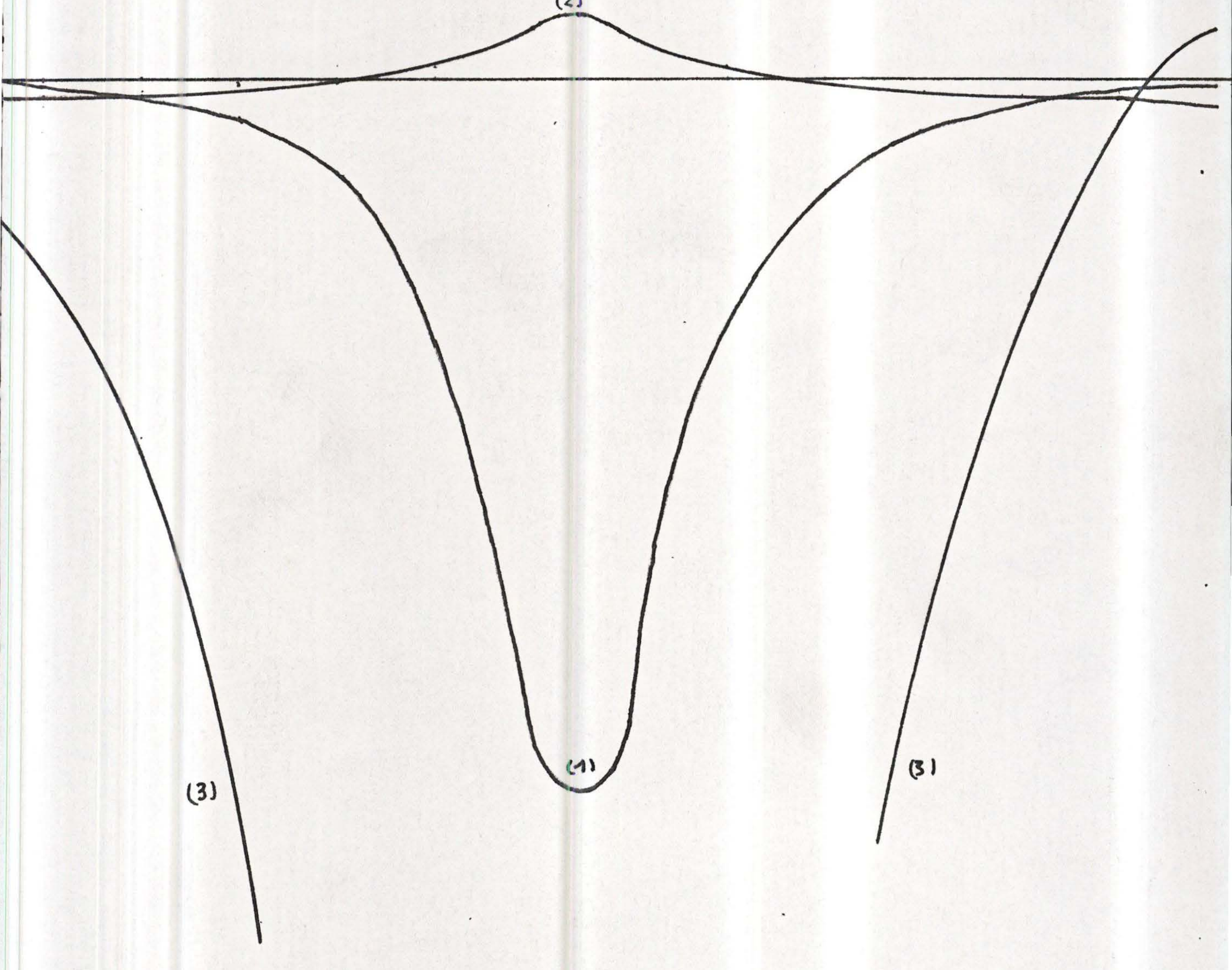
Ce que nous obtenons ici ce sont les coéfficients du système (5)

Nous remarquons que deux des coéfficients $\frac{}{x_o}$ et $\frac{}{\dot x_o}$ sont nuls

cela montre analytiquement que le système est indéterminé

c'est le plan de l'orbite qui est mal déterminé.

Courbe des coéfficients (Fig 1)



$(1) = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial y_0}$

$(2) = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}_0}$

$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial z_0} \approx$ axe.

$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{z}_0}$ (3)

Si nous voulons représenter de manière symbolique le système nous avons

$$\dot{\rho}_c - \dot{\rho}_o = \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial x_o} \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial y_o} \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial z_o} \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial \dot{x}_o} \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial \dot{y}_o} \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial \dot{z}_o}$$

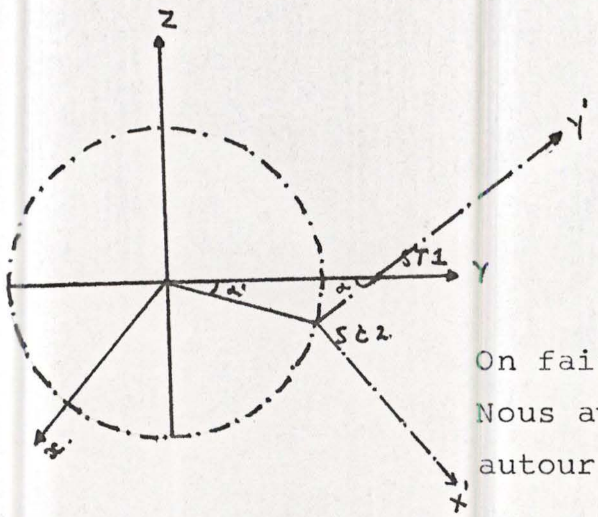
calculé au temps

$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{|cccccc|} (t_1) & (t_1) & (t_1) & (t_1) & (t_1) & (t_1) \\ (t_2) & (t_2) & (t_2) & (t_2) & (t_2) & (t_2) \\ \vdots & & & & & \\ (t_n) & (t_n) & (t_n) & (t_n) & (t_n) & (t_n) \\ \hline (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array} \qquad \begin{vmatrix} \Delta x_o \\ \Delta y_o \\ \Delta z_o \\ \Delta \dot{x}_o \\ \Delta \dot{y}_o \\ \Delta \dot{z}_o \end{vmatrix}$$

Nous observons par les formules des coéfficients pages 3-10 et -12 que les colonnes (1) et (4) dans la représentation ci-dessus sont nulles

Nous avons représenté ici les autres coéfficients du système et nous considérons le deuxième le passage observé (Figure 1)
Nous avions trouver en étudiant les résultats analytiques que deux colonnes du système étaient nulles. L'étude de ce graphique nous montre que l'on ne doit pas s'attendre à d'autres indéterminations car comme le montre le dessin aucun coéfficient n'est combinaison linéaire des autres.
A première vue nous pouvons donc dire que la seule indétermination qui existe provient de la géométrie du problème.
Nous allons maintenant étudier cette indétermination.

Dans un premier temps nous avons vu qu'en considérant une orbite circulaire polaire nous arrivions à un système indéterminé.
Nous supposerons toujours une orbite circulaire mais nous sortons la station du plan de l'orbite.



St1 = satellite

St2 = station

On fait un changement d'axe
Nous avons une rotation d'angle α
autour de l'axe z

Numériquement il faut donner d'autres valeurs à la position de la station

Nous avons considéré $0 < \alpha' \leq 5°$

Pour trouver analytiquement les résultats il faut développer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ jusqu'au premier ordre.

Résultats analytiques

Puisqu'il faut voir comment se lève l'indétermination nous ne regarderons que les coéfficients $\frac{\partial \rho}{\partial x_o}$ et $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}_o}$

Comme le satellite est toujours dans le plan yz le seul changement apparaitra avec les coordonnées de la station

Le changement interviendra dans L_X et L'_X

$$L_X = - \frac{\sin\alpha'}{\rho}$$

$$L'_X = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x_o} = \frac{x_v}{y_o} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \sin\alpha' - \frac{\tilde{V}}{r y_o} \frac{\sin\alpha'}{\rho}$$

$$\equiv \frac{r \cos (v - v_o)}{y_o} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \sin\alpha' + \sqrt{a} \sin (v - v_o) \frac{\sin\alpha'}{r y_o \rho}$$

$$\text{or } \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + X^2 + Y^2 + Z^2$$
$$= y^2 + z^2 - 2\,y \cos\alpha' + 1$$

$$\rho\dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} - x\dot{X} - \dot{x}X - y\dot{Y} - \dot{y}Y - z\dot{Z} - \dot{z}Z$$
$$= -\,y \sin\alpha' + z\dot{z} + y\dot{y}$$

$$\dot{\rho} = \frac{-\,y \sin\alpha' + z\dot{z} + y\dot{y}}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2\,y\cos\alpha' + 1}}$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial x_o} = \sin\alpha' \left[\cos(v-v_o) \frac{y\dot{y} + z\dot{z} - y\sin\alpha'}{\sqrt{(y^2 + z^2 - 2y\cos \quad + 1)^3}} + \frac{\sqrt{a}}{y_o^2} \frac{\sin(v-v_o)}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2y\cos\alpha' + 1}} \right]$$

Si nous développons en approximation on a

$$\sin\alpha' \simeq \alpha' \quad ; \quad \cos\alpha' \simeq 1$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial x_o} = \alpha' \left[\cos(v-v_o) \frac{z\dot{z} + y\dot{y} - y\alpha'}{\sqrt{(y^2 + z^2 - 2y + 1)^3}} + \frac{\sqrt{a}}{y_o^2} \frac{\sin(v-v_o)}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2y + 1}} \right]$$

De la même manière nous trouvons

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial \dot{x}_o} = \frac{y_o Y}{\sqrt{p}} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \sin\alpha' - \tilde{S} \frac{\sin\alpha'}{\rho}$$

$$= \frac{r y_o \sin(v-v_o)}{\sqrt{p}} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \sin\alpha' - \cos(v-v_o) \frac{\sin\alpha'}{\rho}$$

$$= \sin\alpha' \left[\frac{y_o^2}{p} \sin(v-v_o) \frac{z\dot{z} + y\dot{y} - y\sin\alpha'}{\sqrt{(y^2+z^2 - 2y\cos \quad +1)^3}} - \cos(v-v_o) \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2-2y\cos\alpha' + 1}} \right]$$

Si nous tenons compte des approximations nous avons

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}_o} = \alpha' \left[\frac{y_o^2}{p} \sin(v-v_o) \frac{z\dot{z} + y\dot{y} - y\alpha'}{\sqrt{\left[(y-1)^2 + z^2\right]^3}} - \frac{\cos(v-v_o)}{\sqrt{(y-1)^2 + z^2}} \right]$$

Résultats numériques

Les résultats numériques montrent que le fait de sortir la station du plan de l'orbite donne un système parfaitement inversible
Nous nous sommes posé alors une autre question. L'indétermination ne vient-elle pas du fait que la station et le satellite sont dans le prolongement 'un de l'autre sur un axe de coordonnée.
Ici des résultats nient cette possibilité. Pour le vérifier, nous avons effectuer une rotation d'angle α autour de z .
Les coéfficients du système surdéterminé dans le repère X'Y'Z sont

- $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial x'_o} = \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial x_o} \cos\alpha + \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial y_o} \sin\alpha$

- $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial y'_o} = - \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial x_o} \sin\alpha + \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial y_o} \cos\alpha$

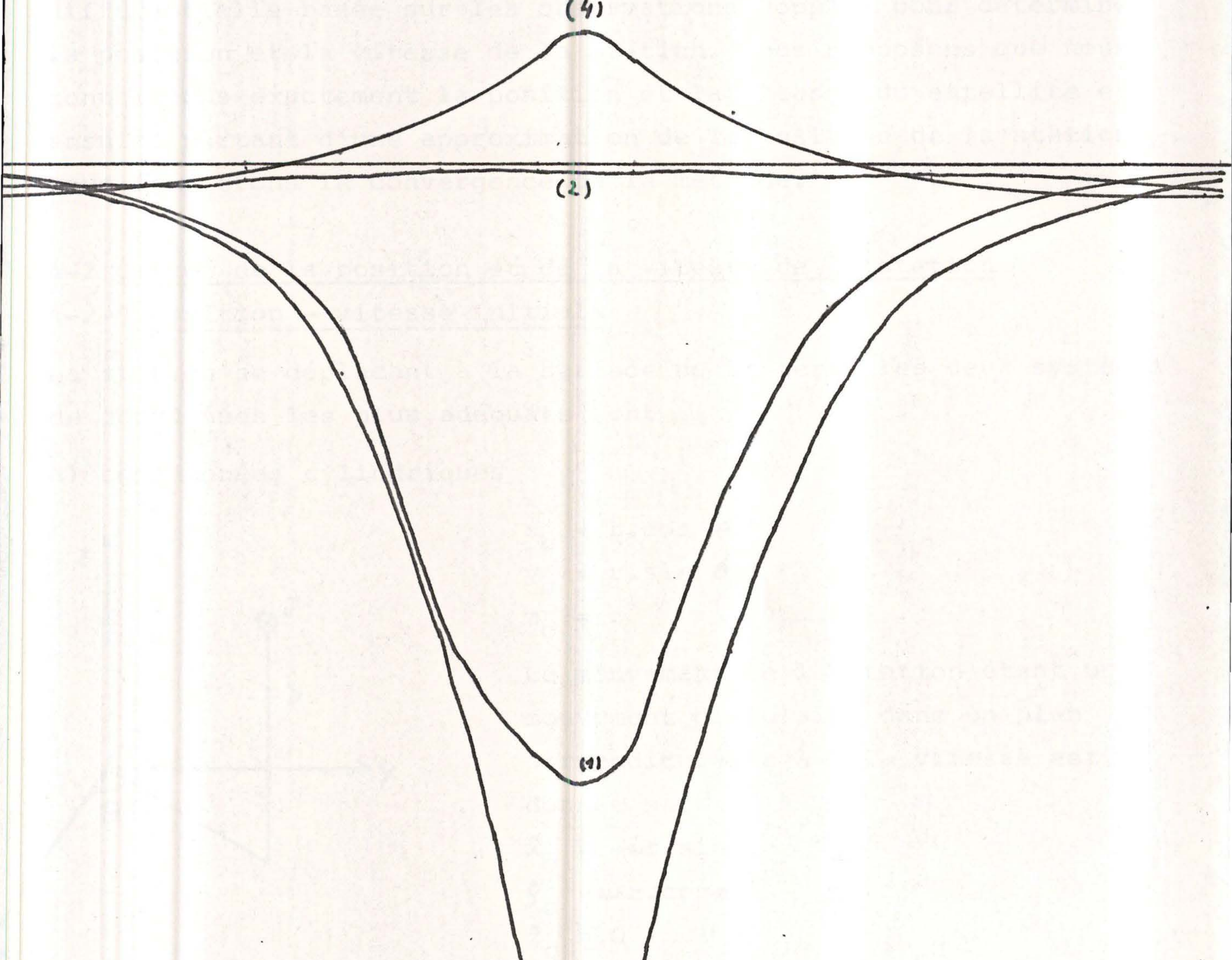
Nous avons des formules du même type pour $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}'_o}$ et $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}'_o}$

Nous reportons ici les résultats obtenus durant le deuxième passage observé (Fig. 2)

Il est évident que les $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial z_o}$ et $\dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{z}_o}$ ne changent pas

Si on étudie la variation de quatre coéfficents on remarque qu'ils ne sont pas combinaison linéaire l'un de l'autre ce qui montre que le système est résoluble
En conclusion nous pouvons dire que l'indétermination est due à la géométrie du problème

Courbe des coéfficients dans le nouveau repère (Fig. 2)



$(1) = \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial x'_0}$

$(2) = \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}'_0}$

$(3) = \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial y'_0}$

$(4) = \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}'_0}$

CHAPITRE IV - APPLICATION DE LA METHODE POUR DETERMINER LA POSITION ET LA VITESSE DE LA STATION

4-1 Situation du problème

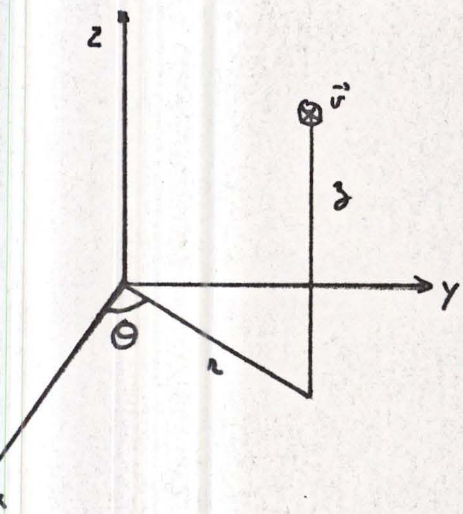
Ce que l'on veut faire c'est appliquer la méthode de correction différentielle basée sur les observations Doppler pour déterminer la position et la vitesse de la station. Nous supposons que nous connaissons exactement la position et la vitesse du satellite et ensuite partant d'une approximation de la position de la station nous étudierons la convergence de la méthode.

4-2 Calcul de la position et de la vitesse de la station

4-2-1 Position - vitesse initiale

La station se déplacant à la surface de la terre les deux systèmes de coordonées les plus adéquats sont

a) coordonnées cylindriques



$x_o = r.\cos\theta$

$y_o = r.\sin\theta$

$z_o = z$

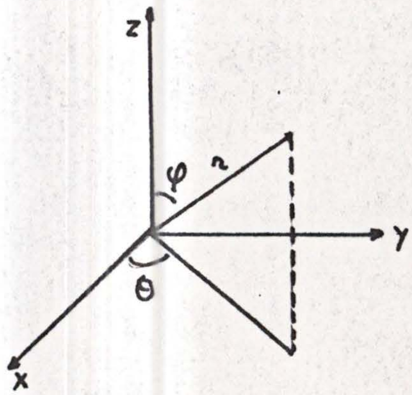
Le mouvement de la station étant un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à z la vitesse est donnée par

$\dot{x}_o = -\omega r.\sin\theta$

$\dot{y}_o = \omega r.\cos\theta$

$\dot{z}_o = 0$

b) coordonnées sphériques



$$x_o = r.\sin\varphi.\cos\theta$$
$$y_o = r.\sin\varphi.\sin\theta$$
$$z_o = r.\cos\varphi$$
$$\dot{x}_o = -r\omega\sin\varphi.\sin\theta$$
$$\dot{y}_o = r\omega\sin\varphi.\cos\theta$$
$$\dot{z}_o = 0$$

4-2-2 Position - vitesse au temps t

Puisque le mouvement de la station se fait dans un plan perpendiculaire à l'axe z la seule quantité qui va varier c'est l'angle θ. Nous avons donc

a) coordonnées cylindriques

$$x = r\cos(\theta + \omega t)$$
$$y = r\sin(\theta + \omega t)$$
$$z = z$$
$$\dot{x} = -r\omega\sin(\theta + \omega t)$$
$$\dot{y} = r\omega\cos(\theta + \omega t)$$
$$\dot{z} = 0$$

b) coordonnées sphériques

$$x = r\sin\varphi\cos(\theta + \omega t)$$
$$y = r\sin\varphi\sin(\theta + \omega t)$$
$$z = r\cos$$
$$\dot{x} = -r\omega\sin\varphi.\sin(\theta + \omega t)$$
$$\dot{y} = r.\omega.\sin\varphi\cos(\theta + \omega t)$$
$$\dot{z} = 0$$

où ω = vitesse de rotation de la terre

4-3 Développement analytique de la méthode

Nous considérons une station pouvant effectuer des observations Doppler

Nous avons toujours $\dot{\rho}_{oi}$ = la vitesse radiale observée

N = nombre total d'observations

$\vec{x}_o = (\vec{r}_o, \vec{v}_o)$ vecteur position - vitesse de la station au temps $t=t_o$

$\vec{x} = (\vec{r}, \vec{v})$ vecteur position - vitesse de la station au temps $t = t$

Nous supposerons une orbite parfaitement képlérienne

Nous avons vu au chapitre II que nous devions résoudre un système de N équations du type (3 p.2-3) où W reste la fonction "vitesse radiale" noté $\dot{\rho}$

Le système (3 p.2-3) est de la forme

$$\dot{\rho}_c - \dot{\rho}_o = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \omega} \Delta \omega \qquad (4\text{-}1)$$

où les dérivées sont prises au temps $t=t_i$ $i = 1,\ldots,N$

Pour simplifier les écritures, nous laisserons tomber les indices i

Nous supposerons que les coordonnées du satellite et sa vitesse sont connues exactement et que $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}$ sont nuls.

où (X,Y,Z) = vecteur position du satellite

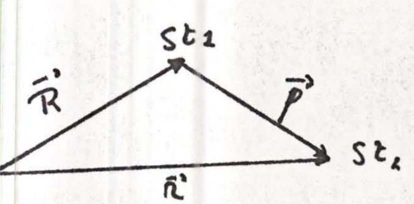
$(\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$ = vecteur vitesse du satellite

Pour résoudre ce système il faut connaître

- $\dot{\rho}_c$ = les range rate calculés aux N temps correspondant aux observations
- $\dot{\rho}_o$ = Le range rate observé, fourni
- Les coéfficients $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \eta}$ où $\eta \in \{r,\theta,\varphi,\omega\}$ ou $\eta \in \{r,\theta,\zeta,\omega\}$.

4-3-1 Calcul de $\dot{\rho}_c$

Le calcul est le même que celui effectué au chapitre III et on note directement le résultat



St2 = satellite

St1 = station

O = centre de la terre

$$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho} = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\dot{\rho}\rho = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} - \dot{x}X - \dot{y}Y - \dot{z}Z - x\dot{X} - y\dot{Y} - z\dot{Z} \qquad (4\text{-}2)$$

Après le calcul des positions et vitesse de la station

$(X,Y,Z,\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$ (a) aux N temps

Les $(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ (b) sont donnés

si nous reportons (a) et (b) dans (4-2) nous avons les vitesses relatives cherchées $\dot{\rho}_c$

4-3-2 <u>Calcul des $\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta}$ où $\eta \in \{r,\theta,\varphi,\omega\}$ ou $\eta \in \{r,\theta,\mathfrak{z},\omega\}$.</u>

Pour calculer $\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta}$ nous simplifierons en calculant

$$\boxed{\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\eta} = \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\vec{x}}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial\eta}} \qquad \vec{x} = (x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

ceci est la formule fondamentale

$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\vec{x}}$ est 1 matrice (6x1)

$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\eta}$ est 1 matrice (4x6)

4-3-2-a Calcul de $\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial x}$

En partant de (5-2) on a

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} - \dot{x}X - \dot{y}Y - \dot{z}Z - x\dot{X} - y\dot{Y} - z\dot{Z}}{\rho}$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial x} = \frac{\rho(\dot{x} - \dot{X}) - \dot{\rho}\rho\,(1/2\rho)\,(2x - 2X)}{\rho^2}$$

$$= \frac{\rho(\dot{x} - \dot{X}) - \dot{\rho}(x - X)}{\rho^2}$$

De la même façon nous trouvons

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial y} = \frac{\rho(\dot{y} - \dot{Y}) - \dot{\rho}(y - Y)}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial z} = \frac{\rho(\dot{z} - \dot{Z}) - \dot{\rho}(z - Z)}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} = - \frac{\rho x}{\rho^2} = - \frac{x}{\rho}$$

Par le même calcul nous obtenons $\frac{\partial \rho}{\partial \dot{y}} = - \frac{y}{\rho}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \dot{z}} = - \frac{z}{\rho}$$

Ce calcul est indépendant du fait que $\eta \in \{r, \theta, \varphi, \omega\}$ ou $\eta \in \{r, \theta, z, \omega\}$.

4-3-2-b Calcul de $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta}$ où $\eta \in \{r, \theta, z, \omega\}$

Pour obtenir cette matrice nous portons les résultats en -2-2 a

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta + \omega t) \\ \sin(\theta + \omega t) \\ 0 \\ -\omega \sin(\theta + \omega t) \\ \omega \cos(\theta + \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta + \omega t) \\ r \cos(\theta + \omega t) \\ 0 \\ - r\omega \cos(\theta + \omega t) \\ - r\omega \sin(\theta + \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \omega} \begin{vmatrix} -t\, r \sin(\theta + \omega t) \\ t\, r \sin(\theta + \omega t) \\ 0 \\ -t\, r\omega \cos(\theta + \omega t) - r \sin(\theta + \omega t) \\ r \cos(\theta + \omega t) - t\, r\omega \sin(\theta + \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

4-3-2-c Calcul de $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta}$ où $\eta \in \{r, \theta, \varphi, \omega\}$

Si on part des équations obtenues en 4-2-2 b nous arrivons aux résultats

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \left| \begin{matrix} \sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ \sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ \sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ 0 \end{matrix} \right| \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \left| \begin{matrix} -r\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ r\sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ 0 \\ -r\sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ -r\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ 0 \end{matrix} \right|$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \left| \begin{matrix} r\cos\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ r\cos\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ -r\sin\varphi \\ -r\cos\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ r\cos\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ 0 \end{matrix} \right|$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \omega} = \left| \begin{matrix} -t\,r\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \\ tr\sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ 0 \\ -r\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) - r\omega t\sin\varphi\cos(\theta+\omega t) \\ r\sin\varphi\cos(\theta+\omega t) - r\omega t\sin\varphi\sin(\theta+\omega t) \end{matrix} \right|$$

Pour calculer $\frac{\partial \dot\rho}{\partial \eta}$ où $\eta \in \{r,\theta,\varphi,\omega\}$ ou $\in \{r,\theta,z,\omega\}$ il faut faire le produit d'une matrice (6x2) $\frac{\partial \dot\rho}{\partial \vec{x}}$ calculée en (4-3-2-a) par la matrice (6x4) calculée respectivement en (4-3-2-b) et (4-3-2-c)

4-4 Remarque importante

1) Les éléments que nous corrigeons sont respectivement $\{r,\theta,\varphi,\omega\}$ ou $\{r,\theta,z,\omega\}$. Nous pourrions nous poser la question pourquoi ne pas corriger comme au chapitre III directement $(x_o,y_o,z_o,\dot{x}_o,\dot{y}_o,\dot{z}_o)$ de la station.
   Vu le nouvement de la station les six valeurs $(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ ne sont pas indépendantes ce qui aurait conduit dans l'algorithme

à système mal déterminé et qui n'aurait donné aucun résultat valable .

Le nombre maximun de paramètres indépendants quatre et ce sont respectivement $\{r, \theta, \varphi, \omega\}$ ou $\{r, \theta, z, \omega\}$

2) Les sous-routines calculant ces matrices sont placées en annexe

Résultats numériques

Dans cette partie nous rassemblerons et commenterons les divers résultats obtenus en tâchant d'interpréter au mieux leurs portées relatives.

Tableaux de convergence

Pour ne pas compliquer outre mesure les schémas de résultats nous considérons que le satellite est sur une orbite circulaire.

Nous prenons toujours la même orbite.

vecteur position du satellite $x = 0$
$y = -\ 1{,}018066$
$z = 0{,}416583$

vecteur vitesse du satellite $x = 0$
$y = -\ 0{,}026854$
$z = -\ 0{,}065627$

Pour garder une homogénéité entre les deux problèmes nous considérons encore que la station se trouve dans le plan de l'orbite.

Convergence par élément

Comme cas particulier nous avons perturbé r

$r = r + 5$ km

nombre de passages = 1

nombre d'équations = 13

Etude des résultats

r converge après 14 itérations

θ converge après 11 itérations

φ converge après 8 itérations

Pour une perturbation relativement petite de r il faut 14 itérations pour avoir la convergence

Ce que nous avons testé ici c'est la convergence des éléments (r, θ, φ).

Par rapport aux autres itérations c'est dans la première que la correction est la plus importante.

1^{ere} itération : $2 \cdot 10^{-6} \rightarrow 2 \cdot 10^{-7}$

itération 2 → 14 : $2 \cdot 10^{-7} \rightarrow 4 \cdot 10^{-9}$

arrive plus vite à la valeur de convergence (8 itérations) alors que r converge le moins vite (14 itérations)

Evolution du nombre d'itération avec la perturbation

Nous considérons ici l'angle φ

Nous considérons un seul passage avec 13 équations

φ observé = 1,570796

perturbation	n° d'itération
$\varphi_c = \varphi_o + 7{,}85 \cdot 10^{-5}$	2
$\varphi_c = \varphi_o + 1{,}587 \cdot 10^{-4}$	3
$\varphi_c = \varphi_o + 3{,}174 \cdot 10^{-4}$	7
$\varphi_c = \varphi_o + 4{,}761 \cdot 10^{-4}$	12
$\varphi_c = \varphi_o + 7{,}936 \cdot 10^{-4}$	14
$\varphi_c = \varphi_o + 9{,}523 \cdot 10^{-4}$	15
$\varphi_c = \varphi_o + 1{,}11 \cdot 10^{-3}$	16
$\varphi_c = \varphi_o + 1{,}269 \cdot 10^{-3}$	17
$\varphi_c = \varphi_o + 1{,}428 \cdot 10^{-3}$	18
$\varphi_c = \varphi_o + 1{,}587 \cdot 10^{-3}$	19

Ce que nous remarquons c'est que le nombre d'itération augmente avec la perturbation.

Nous observons aussi que les paramètres tendent tous vers la même valeur

$$r = 0.999999$$
$$\theta = -1,540369$$
$$\varphi = 1,570796$$

Nous n'avons pas voulu trouver la limite de convergence

Influence du nombre d'équations

Pour deux perturbations de r (resp. 5 et 13 km) nous avons considéré 1,2 puis 3 passages acceptés. Nous nous attendions à avoir une convergence plus rapide si nous considérions plusieurs équations. Nous avons remarqué en fait que cela n'accelère aucunement la convergence.

$r = r + 5$ km

n° d'équations	n° de passage	résultat
13	1	17 itérations
26	2	ne converge pas
37	3	ne converge pas

$r = r + 15$ km

n° d'équations	n° de passage	résultat
13	1	23 itérations
26	2	ne converge pas
37	3	ne converge pas

Remarque

Même si nous avons donné la méthode théorique pour calculer $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \eta}$ avec $\eta \in \{r, \theta, \varphi, \omega\}$ dans ces résultats nous n'avons considéré ω constant et égal à $0,43752\ 10^{-2}$

Nous allons maintenant donner quelques résultats si ω varie

Nous consiérons que $r, \theta, \varphi, \omega$ varient. Nous présentons ici les différents résultats obtenus.

(a) $r_c = r_o + 7.93.10^{-5}$	1 passage	pas de convergence
(b) $\theta_c = \theta_o + 1.587.10^{-5}$	1 passage	pas de convergence
(c) $\varphi_c = \varphi_o + 7.85.10^{-5}$	1 passage	pas de convergence
(d) $\varphi_c = \varphi_o + 7.85.10^{-5}$	3 passages	convergence (3)
(e) $r_c \quad r_o + 7.93.10^{-5}$	3 passages	pas de convergence
(f) $\theta_c = \theta_o + 1.587.10^{-5}$	3 passages	pas de convergence

En étudiant (e) et (d) nous avions pensé que l'augmentation d'équations allaient donné de meilleurs résultats. Ces espérances ont été démenties par les résultats obtenus en (e) et (f).
Nous remarquons que le fait de considérer ω variable ne donne pas de bons résultats. C'est ce qui nous a poussé à étudier simplement la variation de r, θ, φ

Remarques générales

- Ici nous avons testé la convergence de r, θ, φ. Pour être plus complets nous aurions dû tester la valeur des composantes correspondantes à la position et à la vitesse de la station. Il est probable que dû aux erreurs de troncature dans le calcul la convergence des six composantes aurait été plus lente.
- Parallèlement nous avons testé la convergence en considérant les coordonnées cylindriques. Les résultats étant moins bons nous ne les avons pas repris ici. Par résultats moins bons nous voulons dire que la convergence était plus lente.

CHAPITRE 5
DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL TERRESTRE
RESOLUTION DU PROBLEME PRINCIPAL DU SATELLITE ARTIFICIEL

Situation du problème

Le problème posé est la détermination de la trajectoire d'un satellite artificiel connaissant sa position et sa vitesse initiale.

Il s'agit donc de résoudre les équations de mouvement d'une petite masse autour d'un sphéroïde aplati. On néglige les effets des autres planètes sur le mouvement du satellite, de même que le freinage atmosphérique.

Les équations du mouvement sont alors :

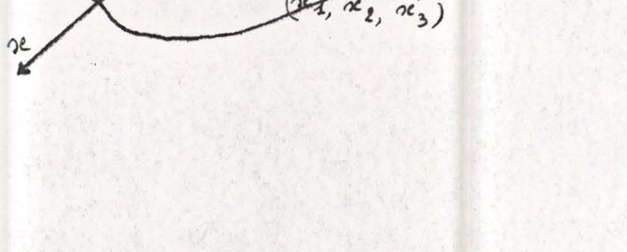
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{array}\right.$$

où U est le potentiel créé par la terre ; tenant compte de son aplatissement aux pôles.

5.1 Forme du potentiel terrestre

Considérons tout d'abord un corps continu A quelconque de densité $\rho(x)$ et de volume W.

Choisissons l'origine du système d'axes à l'intérieur du volume :



en coordonnées sphériques

$$x_1 = r \cos \phi \cos \lambda$$
$$x_2 = r \cos \phi \sin \lambda$$
$$x_3 = r \sin \phi$$

et de même pour le point x'

$$x'_1 = r' \cos \phi \cos \lambda'$$
$$x'_2 = r' \cos \phi' \sin \lambda'$$
$$x'_3 = r' \sin \phi'$$

Le potentiel créé par le corps A au point x extérieur à A vaut :

$$\boxed{V = \iiint_W G \frac{\rho(x')}{|x-x'|} \, dW}$$

où X' parcourt le volume W.

Supposons $\|x\| > \|x'\|$ pour tout point x' appartenant au volume W.

Il est à remarquer que l'hypothèse ainsi faite est peu restrictive : seule la partie comprise entre la surface terrestre et une sphère ayant pour rayon le Rayon équatorial sera ainsi négligée dans le modèle. Ceci ne constitue qu'une région d'altitude maximum égale à 20 km au-dessus du pôle.

Grâce à cette hypothèse, nous pouvons utiliser le développement en série :

$$\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{(r^2 - 2r\,r' \cos \quad + r'^2)^{1/2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\cos \gamma) \frac{r'^n}{r^{n+1}}$$

où γ est l'angle formé entre les deux vecteurs x et x'

Pn $(\cos\gamma)$ = polynôme de Legendre de degré n

ou plus analytiquement:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

En portant cette expression dans l'intégrale, nous avons:

$$V = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\lambda, \phi)$$

après avoir posé:

$$Y_n(\lambda, \varphi) = \iiint \rho(x') r'^n P_n(\cos\gamma)\, dW.$$

En observant la figure, on remarque que l'angle γ dépend à la fois du point x et de x'. On peut séparer ces dépendances par le théorème d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin\phi) P_n^m(\sin\phi') f_m(\lambda,\lambda')$$

avec: $f_m(\lambda,\lambda') = \cos[m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda']$

$$P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d^m} P_n(\mu)$$

En reportant la valeur de Pn $(\cos\gamma)$ dans $Y_n(\lambda,\phi)$, on obtient:

$$Y_n(\lambda,\phi) = \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\sin\phi)(C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda)$$

avec $$C_n^m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_W r'^n P_n^m(\sin\phi') \cos(m\lambda') g(x')\, dw$$

et $$S_n^m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_W r'^n P_n^m(\sin\phi') \sin(m\lambda') g(x')\, dw$$

les termes:

$\frac{1}{r^{n+1}} P_n^o(\sin\phi)$ = termes zonaux. Ceux-ci ne dépendent pas de la longitude. Ils décrivent un potentiel à symétrie cylindrique.

De plus

Si n est pair: ces termes présentent une symétrie par rapport au plan équatorial.

Les autres termes sont appelés termes tesséraux

En résumé, nous avons donc pu mettre le potentiel terrestre sous la forme

$$V = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\lambda, \phi)}{r^{n+1}}$$

où $Y_n(\lambda, \phi) = \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\sin\phi)\,(C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda)$

avec C_n^m et S_n^m prenant les valeurs décrites ci-dessus.

Remarquons que le premier terme du développement

$$-\frac{G}{r} \iiint_W \rho(x')\, dW = -\frac{GM}{r}$$

représente le potentiel créé par un corps de masse M concentrée au point origine, centre de la terre.

La notation employée jusqu'à présent dans le développement du potentiel présente certains inconvénients :

- les parties zonales et tésérales ne se distinguent pas bien
- C_n^m et S_n^m ne sont pas sans dimension
- P_n^m peuvent devenir grands lorsque n grandit

C'est pourquoi on utilise souvent une autre notation:

$$\boxed{V = -\frac{M}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n J_n \bar{P}_n(\sin\phi) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\sin\phi)\left[\bar{C}_n^m \cos m\lambda + \bar{S}_n^m \sin m\lambda\right]\right]}$$

où R est le rayon équatorial terrestre

$$\bar{J}_n = -\frac{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}{MR^n} C_n^o$$

$$\bar{P}_n^m = \left(\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} P_n^m$$

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_n^m \\ \bar{S}_n^m \end{pmatrix} = \left(\frac{(n-m)!}{2(2n+1)(n-m)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{MR^n} \begin{pmatrix} C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix}$$

Les fonctions harmoniques sont ainsi normalisées à 4π les termes ayant J_n pour coefficient sont des termes zonaux car ils ne dépendent pas de λ.

On ne travaillera ici qu'avec les termes zonaux.

Grandeur des coefficients

Des observations de satellites artificiels ont permis d'évaluer les coefficients tels que

$$\bar{J}_2 = 484\ 10^{-6}$$

Les autres termes sont de l'ordre de 10^{-6} et plus petits

5.2 Solution du problème principal du satellite artificiel

Le problème principal du satellite artificiel que nous allons considérer consiste donc en la résolution des équations de mouvement d'une masse m soumise à un potentiel de la forme:

$$\boxed{U = \frac{\mu}{r} + \mu \frac{R_e^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \beta)}$$

c'est-à-dire le potentiel terrestre réduit au premier terme zonal. Les variables intervenant dans cette formule ont été décrites au paragraphe précédent.

Si I est l'inclinaison instantanée de l'orbite avec le plan équatorial, g l'argument du périgée et f l'anomalie vraie, nous avons :

$$\sin \beta = \sin I \sin (g + f)$$

d'où l'on tire la fonction perturbatrice:

$$R = \frac{R_e^2 J_2}{a^3} \left(- \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f)$$

Le développement de la méthode suivante est basé sur l'article de . BROWER : " Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. ".

Si nous prenons a = le demi grand axe
e = l'excentricité } osculateurs, nous pouvons définir un nouveau système de coordonnées : les variables de DELAUNAY où $L = (\mu a)^{\frac{1}{2}}$

$G = L (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$

$H = G \cos I$

l = anomalie moyenne

g = argument du périgée

h = longitude du noeud ascendant

Les équations du mouvement en ces variables deviennent alors :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l} \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h}$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G} \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H} \qquad (1)$$

Remarquons que dans ces variables, F, l'hamiltonien du problème des deux corps prend une forme simple :

$F = -\dfrac{\mu^2}{2L^2}$ indépendante des variables angulaires.

Exprimé en ces variables, l'hamiltonien du problème perturbé vaut :

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \mu^4 \frac{J_2 R^2}{L^6} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right]$$

où seuls les termes $\frac{a^3}{r^3}$ et $\frac{a^3}{r^3} \cos (2g + 2f)$ ne sont pas encore exprimés en les variables de DELAUNAY.

Ceci se fait en les développant en série :

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{L^3}{G^3} + \sum_{j=1}^{\infty} 2 P_j \cos jl$$

$$\frac{a^3}{r^3} \cos (2g + 2f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j \cos (2g + jl)$$

où P_j et Q_j sont des séries de puissance de l'excentricité e :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2}$$

5.2.1 Processus général de résolution du problème

L'idée de base est de passer des variables (L, G, H, l, g, h) à un nouveau système de paramètres qui rende F indépendant des variables angulaires c'est-à-dire une transformation

$$(L, G, H, l, g, h) \longrightarrow (L', G', H', l', g', h')$$

à partir d'une fonction génératrice S (L', G', H', l', g', h') de telle sorte que l'on passe de l'hamiltomien F (L, G, H, l, g, h) à F^* (L', G', H', -, -, -) où le - marque l'absence de la variable correspondante.

La fonction génératrice S étant telle que

$$L = \frac{\partial S}{\partial l'} \quad G = \frac{\partial S}{\partial g} \quad H = \frac{\partial S}{\partial h}$$

$$l' = \frac{\partial S}{\partial L'} \quad g = \frac{\partial S}{\partial G'} \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'} \qquad \text{(II)}$$

Les équations de mouvement deviennent :

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial l'} \qquad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F^*}{L'}$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial g'} \qquad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial G'} \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{dH'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial h'} \qquad \frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial H'}$$

F^* étant indépendant des angles, nous constatons alors que la résolution du système d'équations III conduit à :

$$\begin{cases} L', G', H' = \text{constantes} \\ l', g', h' = \text{fonctions linéaires du temps} \end{cases}$$

En remplaçant alors les valeurs ainsi obtenues dans le système (II), on retrouve l'expression des variables originales en fonction du temps et des constantes d'intégration.

5.2.2 1re étape : solution du 1er et du 2me ordre

Il est à remarquer que dès le départ, la variable angulaire h n'apparaît pas dans l'hamiltonien du problème. Il reste donc 2 variables angulaires à éliminer : l et g. Dans un premier pas, on élimine la variable l.

La fonction génératrice de la transformation est obtenue par une méthode de VON ZEIPEL.

Nous utiliserons un développement en série de puissances du paramètre J_2 jusqu'à l'ordre 2.

Nous avons alors :

$F = Fo + F_1$ = l'hamiltonien original où les indices indiquent les puissances de J_2

De même :

$S = S_o + S_1 + S_2 \ldots$

$F^* = F_o^* + F_1^* + F_2^*$

à partir de l'égalité :

$F\ (L, G, H, l, g, -) = F\ \ (L', G', H', -, g', -)$

où les 2 membres sont développés en série de puissances de J_2 ; on identifie les mêmes puissances de J_2 jusqu'à l'ordre 2 : ceci pour des exigences pratiques, et on sépare les parties séculaires (F_{1s}) et périodiques (F_{1p})

On peut ainsi obtenir S_1 et par identification, on aura : (L, G, H, l, g, h) en fonction des nouvelles variables (L', G', H', l', g', h').

On procède de même avec S_2 et F_2^*

Jusqu'à présent, le problème est réduit à la solution du système d'équations canoniques ayant pour hamiltonien :

$$F^* = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^4 R^2\ J2}{L'\ G'^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{H^2}{G'^2}\right) + F_2^*$$

où F_2^* dépend encore de la variable angulaire g

On effectue alors un nouveau changement de variables

$(L', G', H', l', g', h') \longrightarrow (L'', G'', H'', l'', g'', h'')$

par une fonction génératrice S qui permettra d'éliminer la variable angulaire g du second ordre de l'hamiltonien.

De nouveau on utilise l'égalité $F^{*} = F^{**}$ où F^{**} est une fonction de (L', G', H) et est donnée par

$$F^{**} = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^4 Re^2 J_2}{L'^3 G'^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) + F_2^{**}$$

Par identification des puissances de J2, jusqu'au second ordre, on tire (l', g', h', L', G', H') en fonction des nouvelles variables qui rendent l'hamiltonien indépendant des variables angulaires.

La méthode employée ici consiste donc en 2 changements de variables canoniques successifs (à partir des variables de DELAUNAY) amenant l'Hamiltonien à une forme indépendante des variables angulaires. Il s'agit alors d'exprimer les anciennes variables en fonction des nouvelles mais en retenant que les coefficients des puissances de J2 jusqu'à l'ordre 2.

Il faut remarquer ici que les formules développées par D. BROWER sont d'application pour des valeurs suffisamment éloignées de l'inclinaison critique (63°26'). Celle-ci annule en effet l'expression $(1 - 5\cos^2 I)$ intervenant au dénominateur dans l'expression de g'.

5.2.3 <u>2me étape : influence des 3me, 4me et 5me harmoniques</u>

Les coefficients de ces termes sont très petits, de telle sorte qu'on ne considère que la partie séculaire et pas les termes de courte période, c'est-à-dire la partie de l'Hamiltonien dépendante de l.

Prenons par exemple :

$$U_4 = \frac{\mu J_4 Re^4}{r^5} \left(1 - 10\sin^2\beta + \frac{35}{3} \sin^4\beta \right)$$

donné par le développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques.

On exprime alors U_4 en les variables de DELAUNAY.

L'adjonction de ce terme au potentiel considéré amène des variations dans F_{2s}^{*}, F_{2p}^{*}

c'est-à-dire $$F^*_{2s} \longrightarrow F^*_{2s} + 4\, F^*_{2s}$$

$$F^*_{2p} \longrightarrow F^*_{2p} + 4\, F^*_{2p}$$

amenant des différences dans l'expression de (L, G, H, l, g, h) obtenue précédemment.

$\Rightarrow$ $\Delta_4 S^*_1$, $\Delta^*_4 G'$, $\Delta_4 l'$...

Les formules explicites de ces valeurs nous sont données par D. BROWER.

L'influence des 3me et 5me harmoniques est similaire. Il faut remarquer néanmoins que l'introduction d'harmoniques impaires est nécessaire si la terre n'a pas de symétrie par rapport à l'équateur.

Importance pratique

L'intérêt des développements ainsi obtenus réside dans le calcul des éléments osculateurs définis au 1er chapitre. Ces éléments (a, e, I, w, Ω, M) apparaissant alors sous la forme d'une partie constante (a", e", I", w", Ω", M") et de termes supplémentaires dûs à la présence d'harmoniques d'ordre supérieur dans le potentiel terrestre.

CHAPITRE 6
APPLICATIONS NUMERIQUES DE LA METHODE DE RECHERCHE DES ELEMENTS OSCULATEURS

La méthode décrite au paragraphe précédent permet donc de calculer des éléments osculateurs en un temps t à partir des éléments moyens (la partie constante des paramètres). Cette méthode a été programmée par A. DEPRIT.

On utilisera essentiellement les sous routines suivantes :

- BRWRA : qui calcule des fonctions des éléments moyens
- BRWR : qui calcule les éléments osculateurs au temps t

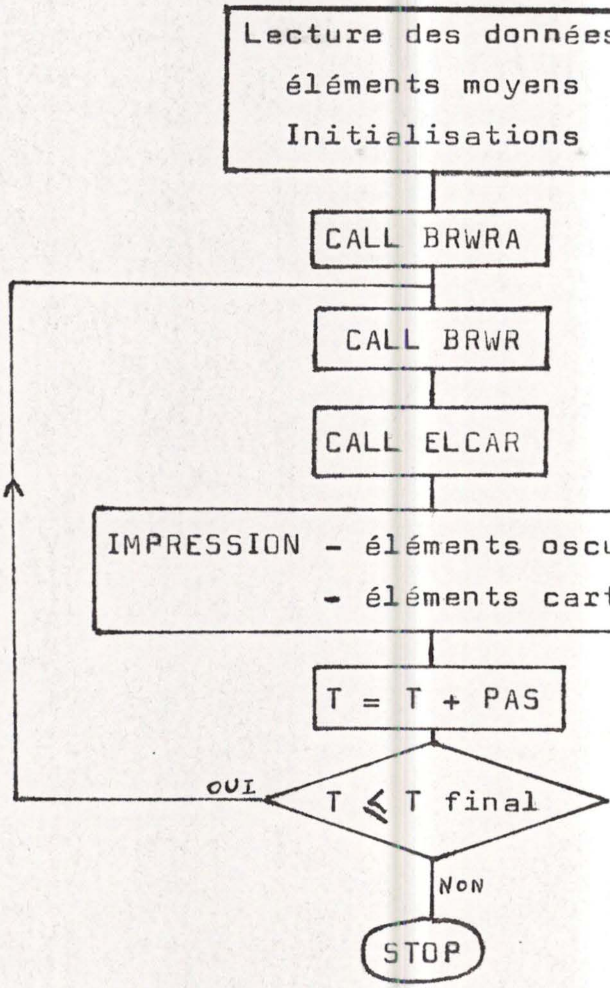
Les autres blocs employés : ARITH - BROWER - ANGLES -EPOQUE HRDWR sont essentiellement des blocs de données. La description et le mode d'utilisation de ces sous-routines et blocs Data sont faits dans l'annexe . De même, la sous-routine RWRB calculant les éléments moyens à partir des éléments osculateurs au temps initial y sera décrite.

Enfin, nous utiliserons également d'autres sous programmes construits par F. PAUL et E. VANDEPUT. Leur description se trouve dans leur mémoire de Licence.

6.1.1 Calcul des positions et vitesses d'un satellite par la méthode de BROWER à partir des éléments moyens

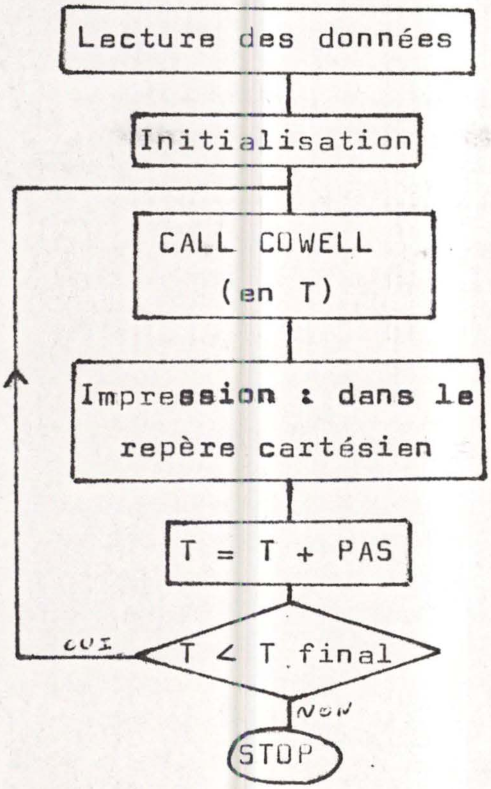
Les éléments moyens que l'on introduit en données fixent l'orbite et à partir de là, on calcule les éléments osculateurs en des temps ultérieurs.

Construction du programme :



6.1.2 Calcul des positions et vitesses du satellite par intégration numérique : méthode de COWELL (programmée par D. STANDAERT)

Données : position et vitesse en T = o (correspondants aux éléments osculateurs donnés par BROWER en T = o)



6.1.3 Calcul des positions et vitesses par le modèle Képlérien

Il s'agit à nouveau d'un programme tout à fait similaire aux deux premiers, où l'appel de la sous-routine (CAWELL) est remplacé par (POSVIT) c'est-à-dire : étant donné les éléments osculateurs obtenus par la 1re méthode au temps T = o, cette dernière sous-routine calcule les fonctions que le satellite aurait au temps t sur une trajectoire Képlérienne décrite par ces éléments.

On ne reprendra pas ici l'organigramme, il est tout à fait parallèle au second.

6.2.1 Comparaison des résultats obtenus sur une courte période

Dans un premier temps, nous avons utilisé les programmes décrits ci-dessus pour un intervalle de temps relativement court (environ un passage du satellite) et un pas petit (5 minutes)

La comparaison des résultats a été faite pour les paramètres orbitaux moyens :

$a = 1.165459487066$

$e = 0.0049451797$

$I = 1.561053071$

$\Omega = 0.2193494075$

$\omega = 3.617166431$

$M = - 0.8667626451$

<u>Comparaison sur le vecteur position</u> :

Le tableau (1) groupe les différences observées entre les points calculés par intégration numérique et ceux calculés à partir du modèle de BROWER tel qu'il était initialement.

La première colonne donne les temps d'observation.

Les trois suivantes donnent les différences sur chaque composante, et la quatrième colonne, la norme du vecteur différence.

Le tableau (2) est semblable, mais dans le cas où on compare l'intégration numérique avec le cas képlérien.

La figure (6.1) traduit la situation graphiquement pour le cas de la norme du vecteur différence.

Tableau 1 : Vecteur position : différence entre intégration numérique et méthode de BROWER.

temps (en min)	composante x (en m)	composante y (en m)	composante z (en m)	norme du vecteur différence (en m)
0	0	0	0	0
5	+3 444	+791.5	+2 415	4 281
10	+3 443	+ 777	+ 998	3 668
15	+3 849	+ 863	+ 474	3 974
20	+4 855	+1 078	-364	4 986.5
25	+7 543	+1 663	-1 807	7 933
30	+10 161	+2 255	-1 044	10 460
35	+10 506	+2 362	+2 085	10 968
40	+ 8 281	+1 888	+4 168	9 461
45	+ 5 765	+1 322	+3 589	6 918
50	+ 4 588	+1 052	+2 745	5 449
55	+ 3 862	+ 888	+2 428	4 647
60	+ 3 516	+ 799	+1 236	3 811
65	+13 880	+2 312	-26 139	26 241
70	+21 499	+4 127	-22 436	31 361
75	+28 722	+5 903	-17 594	34 196
80	+35 835	+7 701	-10 915	38 244
85	+39 363	+8 751	-524	40 327
90	+36 943	+8 488	+10 896	39 440
95	+30 995	+7 399	+19 572	37 396
100	+23 725	+5 959	+25 131	35 070

Tableau 2 : Vecteur position : intégration numérique
modèle képlérien

temps (en min)	composante x (en m)	composante y (en m)	composante z (en m)	norme du vecteur différence (en m)
0	0	0	0	0
5	+264	+58	-244	364
10	+1 280	+284	-546	1 420
15	+2 914	+650	-216	2 993
20	+4 552	+1 017	+1 082	4 788
25	+5 547	+1 238	+3 109	6 478
30	+5 653	+1 250	+5 266	7 826
35	+5 104	+1 103	+7 051	8 774
40	+4 328	+896	+8 393	9 485.6
45	+3 520	+680	+9 597	10 245.7
50	+2 447	+413	+10 978	11 255
55	+610	-10	+12 450	12 465
60	-2 300	-659	+13 418	13 629
65	-6 040	-1 480	+13 079	14 482
70	-9 775	-2 290	+10 937	14 846
75	-12 459	-2 854	+ 7 180	14 660
80	-13 380	-3 007	+ 2 665	13 970
85	-12 520	-2 741	- 1 516	12 905
90	-10 504	-2 198	- 4 605	11 678
95	- 8 147	-1 568	- 6 521	10 552
100	- 5 913	- 971	- 7 728	9 779

Normes du vecteur différence

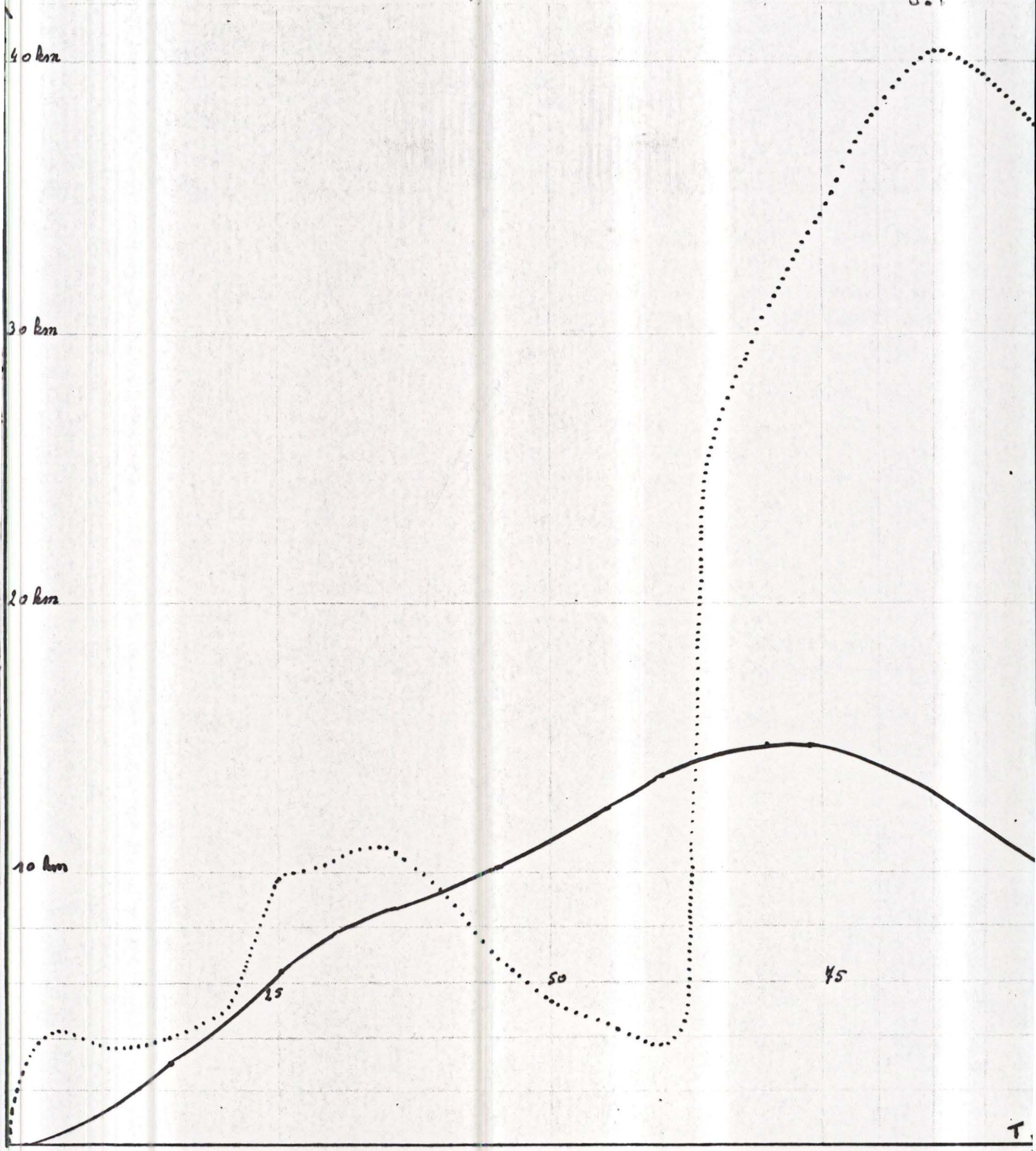


Figure (6.1) échelle : en abcisse : 1 cm = 5 minutes

en ordonnée: 1 cm = 2 km

... différence entre IN et B

--- différence entre IN et K

Conclusions:

Il semblait donc que le fait d'avoir tenu compte de la perturbation due à la présence des cinq premières harmoniques sphériques n'améliorait guère la précision du calcul des positions et vitesses d'un satellite à partir de sa position et de sa vitesse au temps initial. Au contraire la figure 6.1 montre qu'au temps "60 minutes", les différences deviennent nettement plus grandes entre l'intégration numérique et le modèle de BROWER qu'entre l'intégration numérique et le modèle Képlérien.

Ces coordonnées étant obtenues à partir des éléments osculateurs, nous avons comparé ceux-ci afin de voir si certains étaient plus affectés que d'autres.

L'examen du cas de l'inclinaison et du demi-grand axe avait donné de bons résultats (l'amélioration était alors environ d'un facteur multiplicatif 100).

Pour l'excentricité, l'amélioration était moins nette, et on avait une courbe qui oscillait, mais restait du même ordre de grandeur que dans le cas de la comparaison avec le modèle Képlérien.

Pour la longitude du noeud ascendant, on a pu observer un saut de l'erreur au voisinage du temps critique (où les différences sur le vecteur position devenaient grandes).

Mais, comme le montre le tableau (3), le saut n'était qu'un passage d'une différence de 10^{-7} à 10^{-5} radian) c'est-à-dire une différence d'environ 65m.

Il faudrait une différence de $5\ 10^{-3}$ radians environ pour expliquer le saut de 30 kilomètres.

Tableau 3 : comparaison sur la longitude du noeud ascendant

temps	IN - B	IN - K
0	0	0
5	0	$-3\ 10^{-7}$
10	$-7.7\ 10^{-9}$	$-4\ 10^{-7}$
15	$-1.9\ 10^{-8}$	$-1.5.10^{-6}$
20	$-2.99\ 10^{-8}$	$-4.5.10^{-6}$
25	$-3.62\ 10^{-8}$	$-9.4.10^{-6}$
30	$-1.55\ 10^{-8}$	$-1.57.10^{-5}$
35	$+3.012.10^{-7}$	$+2.23.10^{-5}$
40	$3.199.10^{-7}$	$-2.84.10^{-5}$
45	$3.283.10^{-7}$	$-3.29.10^{-5}$
50	$3.293.10^{-7}$	$-3.55.10^{-5}$
55	$3.246.10^{-7}$	$-3.64.10^{-5}$
60	$3.187.10^{-7}$	$-3.65.10^{-5}$
65	$-7.28767.10^{-5}$	$-3.69.10^{-5}$
70	$-7.28726.10^{-5}$	$-3.85.10^{-5}$
75	$-7.28696.10^{-5}$	$-4.02.10^{-5}$
80	$-7.28862.10^{-5}$	$-4.74.10^{-5}$
85	$-7.30243.10^{-5}$	$-5.41.10^{-5}$
90	$-7.32032.10^{-5}$	$-6.01.10^{-5}$
95	$-7.32437.10^{-5}$	$-6.68.10^{-5}$
100	$-7.32612.10^{-5}$	$-7.08.10^{-5}$

La courbe suivante nous traduit les résultats. On voit donc qu'au point "65 minutes", la différence devient beaucoup plus grande qu'avant, et c'est à ce moment qu'elle dépasse la différence observée entre intégration numérique et le modèle Képlérien.

La longitude du noeud ascendant

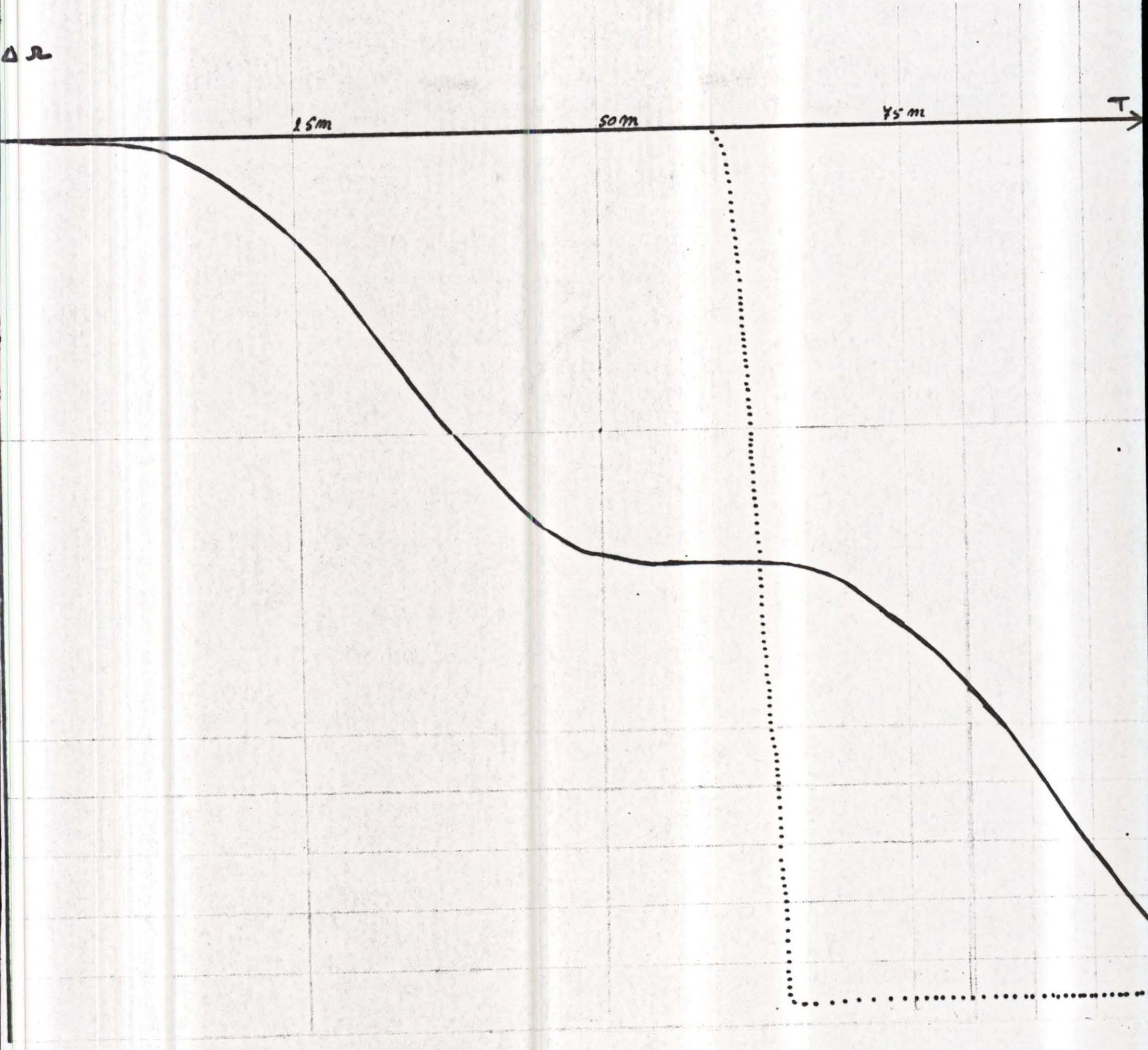


Figure (6.2) échelle : en abcisse 1 cm = 5 minutes

en ordonnée 1 cm = $0.5\ 10^{-5}$ radians

... : différences entre IN et B

--- : différences entre IN et K

En observant l'anomalie moyenne et l'argument du périgée, on constate que les différences sur ces éléments sont grandes : de l'ordre de 10^{-3} radians. Mais l et g intervenant par leur somme, dans le cas des comparaisons entre l'intégration numérique et le modèle Képlérien, ces erreurs se compensent comme on peut le voir au tableau 5. Elles n'influencent donc pas le résultat final.

Par contre, dans le cas des comparaisons entre intégration numérique et BROWER, les différences se compensent jusqu'au moment critique. On peut le voir à partir du tableau 6 : après le temps 60, on a un décalage.

En observant des résultats semblables pour d'autres données, on a pu remarquer que ce saut se faisait chaque fois au moment où l'anomalie moyenne prenait la valeur π et qu'on avait le saut inverse lorsqu'elle passait à la valeur 2π.

Il s'agissait donc d'une erreur ne se produisant que pour des valeurs de l comprises entre π et 2π.

Or, dans le calcul des éléments osculateurs, on considère à un moment : aretg (f) où f est l'anomalie vraie qui est relativement proche de l.

Cette fonction aretg était supposée prendre ses valeurs entre 0 et 2π. Mais la fonction DATAN2 sur ordinateur ne prend ses valeurs qu'entre $-\pi$ et $+\pi$. On avait donc un décalage de 2π pour les valeurs de l comprises entre π et 2π.

Avec un test supplémentaire, on a pu éliminer cette difficulté en ajoutant 2π à l'aretg de f lorsque celui-ci était négatif.

Tableau 5 : Comparaison de l'argument du périgée et de l'anomalie moyenne calculés par intégration numérique et calculés par le modèle képlérien

temps	$g_{IN} - g_K$	$l_{IN} - l_K$	$g + l$
0	0	0	0
5	0.0331385	-0.0325901	$5.484\ 10^{-4}$
10	0.0988749	-0.0977544	$1.8205\ 10^{-3}$
15	0.1256607	-0.1241236	$1.5371\ 10^{-3}$
20	0.0431141	-0.0414406	$1.6735\ 10^{-3}$
25	-0.1392504	0.1407538	$1.5034\ 10^{-3}$
30	-0.261843	0.26295	$1.107\ 10^{-3}$
35	-0.2461909	0.246832	$6.411\ 10^{-4}$
40	-0.1417005	0.1419818	$2.813\ 10^{-4}$
45	-0.0114455	0.0116118	$1.663\ 10^{-4}$
50	0.091039	-0.0906875	$3.515\ 10^{-4}$
55	0.1192208	-0.118429	$7.918\ 10^{-4}$
60	0.0645205	-0.0631604	$1.3601\ 10^{-3}$
65	0.0030786	-0.0011902	$1.8884\ 10^{-3}$
70	0.0171912	-0.0149682	$2.223\ 10^{-3}$
75	0.1056133	-0.1033408	$2.2725\ 10^{-3}$
80	0.2254009	-0.2233624	$2.1385\ 10^{-3}$
85	0.3276857	-0.3260688	$1.6169\ 10^{-3}$
90	0.356584	-0.3554144	$1.1696\ 10^{-3}$
95	0.2645493	-0.2636788	$8.705\ 10^{-4}$
100	0.0985284	-0.0976847	$8.437\ 10^{-4}$

Tableau 6 :

Comparaison de l'argument du périgée et de l'anomalie moyenne calculés par intégration numérique et calculés par le modèle de BROWER

temps	$g_{IN} - g_B$	$l_{IN} - l_B$	$\Delta g + \Delta l$
0	0	0	
5	$6.3811\ 10^{-3}$	$6.3856\ 10^{-3}$	$-4.5\ 10^{-6}$
10	$-6.1489\ 10^{-3}$	$6.1389\ 10^{-3}$	$-\ 1\ 10^{-5}$
15	$-4.3901\ 10^{-3}$	$4.373\ 10^{-3}$	$-1.71\ 10^{-5}$
20	$-3.7153\ 10^{-3}$	$3.6897\ 10^{-3}$	$-2.56\ 10^{-5}$
25	-0.025 58	0.0257917	$2.117\ 10^{-4}$
30	$-7.1695\ 10^{-3}$	$7.1277\ 10^{-3}$	$-4.18\ 10^{-5}$
35	0.0402012	-0.0402482	$-\ 4.7\ 10^{-5}$
40	0.0474372	-0.0474897	$-5.25\ 10^{-5}$
45	0.015693	-0.0157516	$-5.86\ 10^{-5}$
50	$-8.3209\ 10^{-3}$	$8.2558\ 10^{-3}$	$-6.51\ 10^{-5}$
55	$-6.2641\ 10^{-3}$	$6.1924\ 10^{-3}$	$-7.17\ 10^{-5}$
60	$-8.218\ 10^{-4}$	$-7.443\ 10^{-3}$	$-7.75\ 10^{-5}$
65	$1.194\ 10^{-3}$	$-5.0295\ 10^{-3}$	$-3.8355\ 10^{-3}$
70	$5.3549\ 10^{-3}$	$-9.1917\ 10^{-3}$	$-3.8368\ 10^{-3}$
75	-0.0193402	+0.0155039	$-3.8363\ 10^{-3}$
80	-0.0618523	+0.058016	$-3.8363\ 10^{-3}$
85	-0.0728262	+0.06898	$-3.8462\ 10^{-3}$
90	-0.0347017	+0.030860	$-3.8417\ 10^{-3}$
95	$2.125\ 10^{-4}$	$-4.0563\ 10^{-3}$	$-3.8438\ 10^{-3}$
100	$-2.2587\ 10^{-3}$	$-1.5867\ 10^{-3}$	$-3.8454\ 10^{-3}$

La courbe (5) reprend les résultats donnés par les tableaux 5 et 6.

L'argument du périgée - l'anomalie moyenne

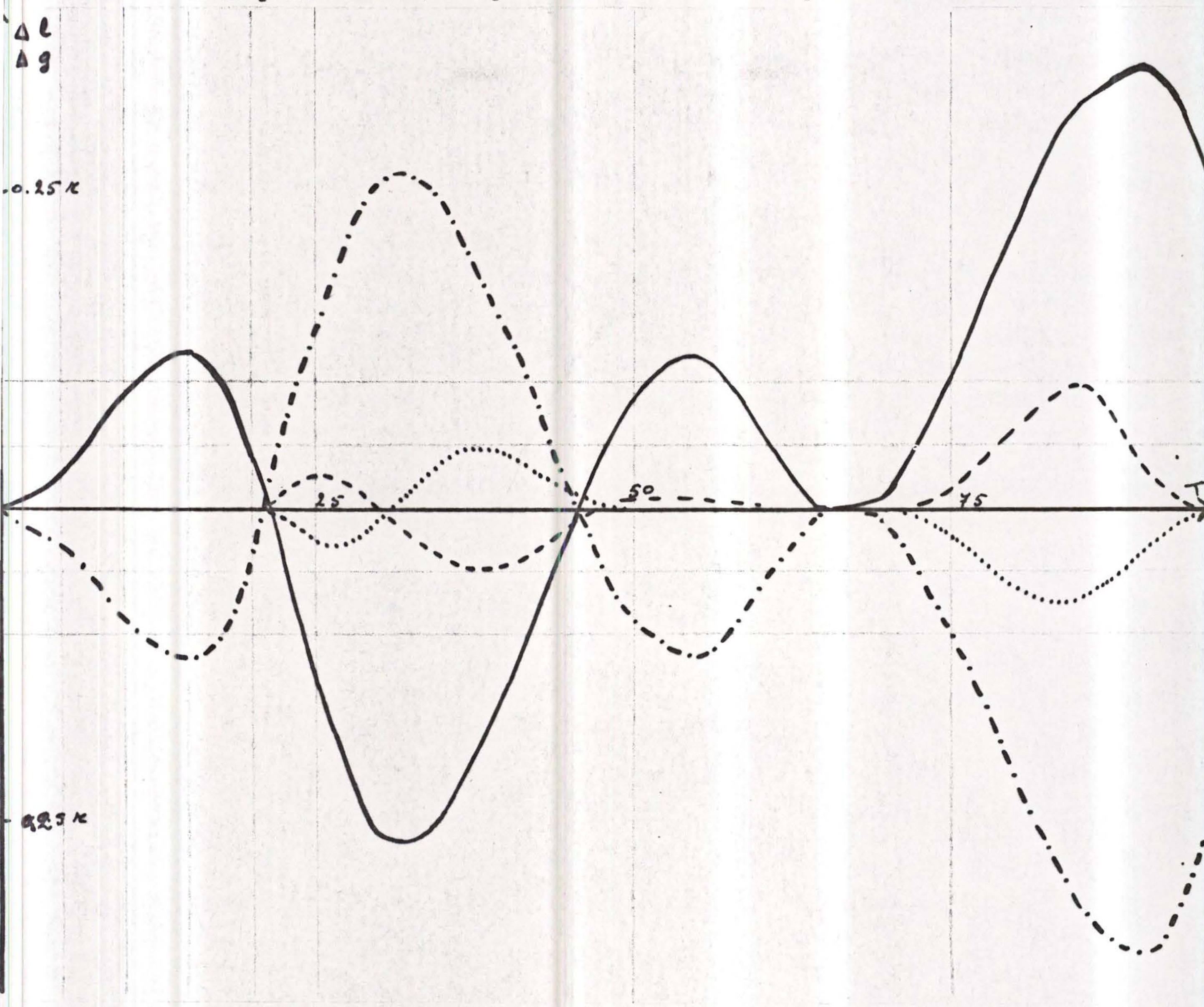


Figure 6.3

échelles : en abcisse 1 cm =5 minutes

en ordonnée 1 cm = 0.05 radians

... ≠ sur g entre IN et B

— ≠ sur g entre IN et K

-- ≠ sur l entre IN et B

-.-.≠ sur l entre IN et K

Après avoir effectué la transformation pour le calcul des éléments osculateurs dans la sous-routine BRWR, nous avons obtenu des résultats nettement meilleurs. Le tableau 7 les donne pour le cas des mêmes éléments moyens que dans les exemples précédents.

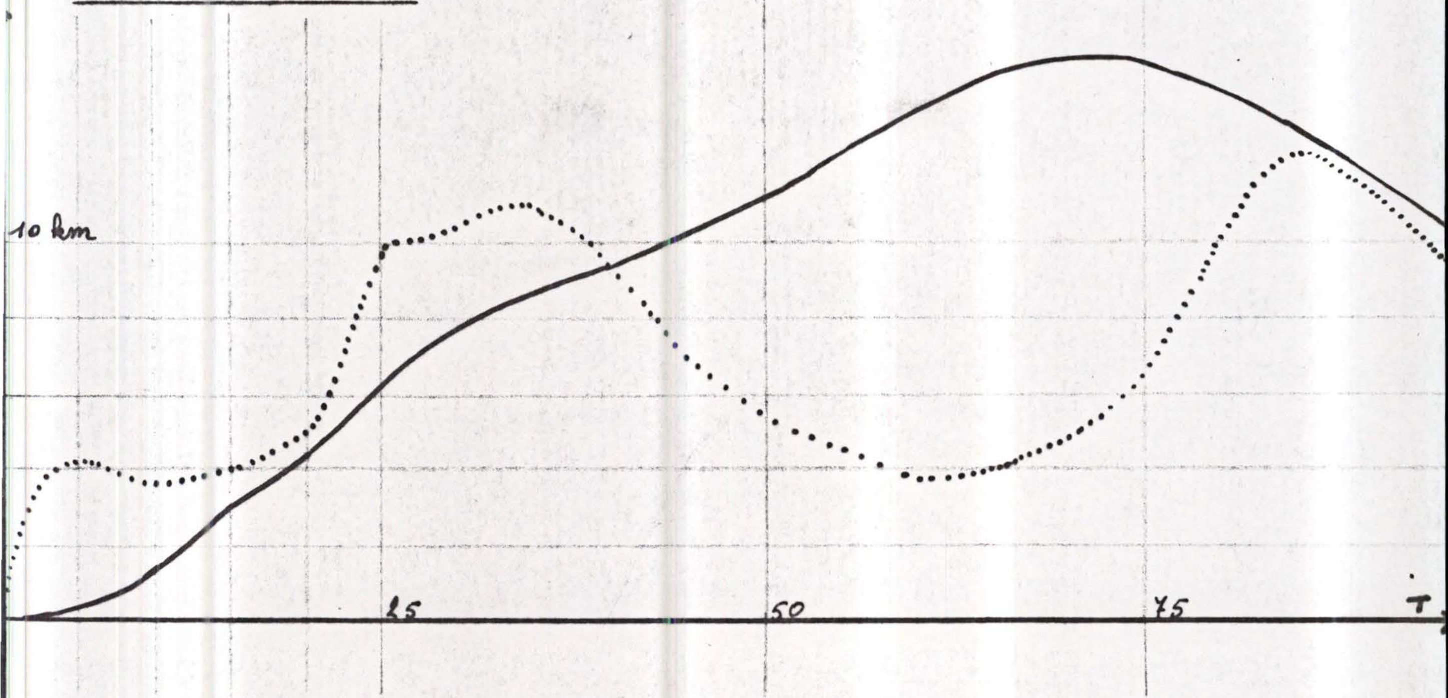
Tableau 7 : Comparaison sur le vecteur position

temps (en min)	composante x (en m)	composante y (en m)	composante z (en m)	norme du vecteur différence (en m)
0	0	0	0	0
5	3444	791	2415	4281
10	3443	777	998	3668
15	3849	863	474	3974
20	4855	1078	-364	4986
25	7543	1663	-1807	7933
30	10161	2255	-1044	10460
35	10506	2362	2085	10968
40	8281	1888	4168	9461
45	5765	1322	3589	6918
50	4588	1052	2745	5449
55	3862	888	2428	4647
60	3516	799	1236	3811
65	3945	882	67	4043
70	4630	1031	259	4750
75	6360	1406	-1806	6643
80	9895	2187	-1934	10316
85	12078	2696	384	12381
90	10664	2413	3663	11531
95	7986	1828	4823	9506
100	5979	1375	4141	7401

et la figure (6.4) nous donne graphiquement ces résultats.

Norme du vecteur différence

a) sur la position



b) sur la vitesse

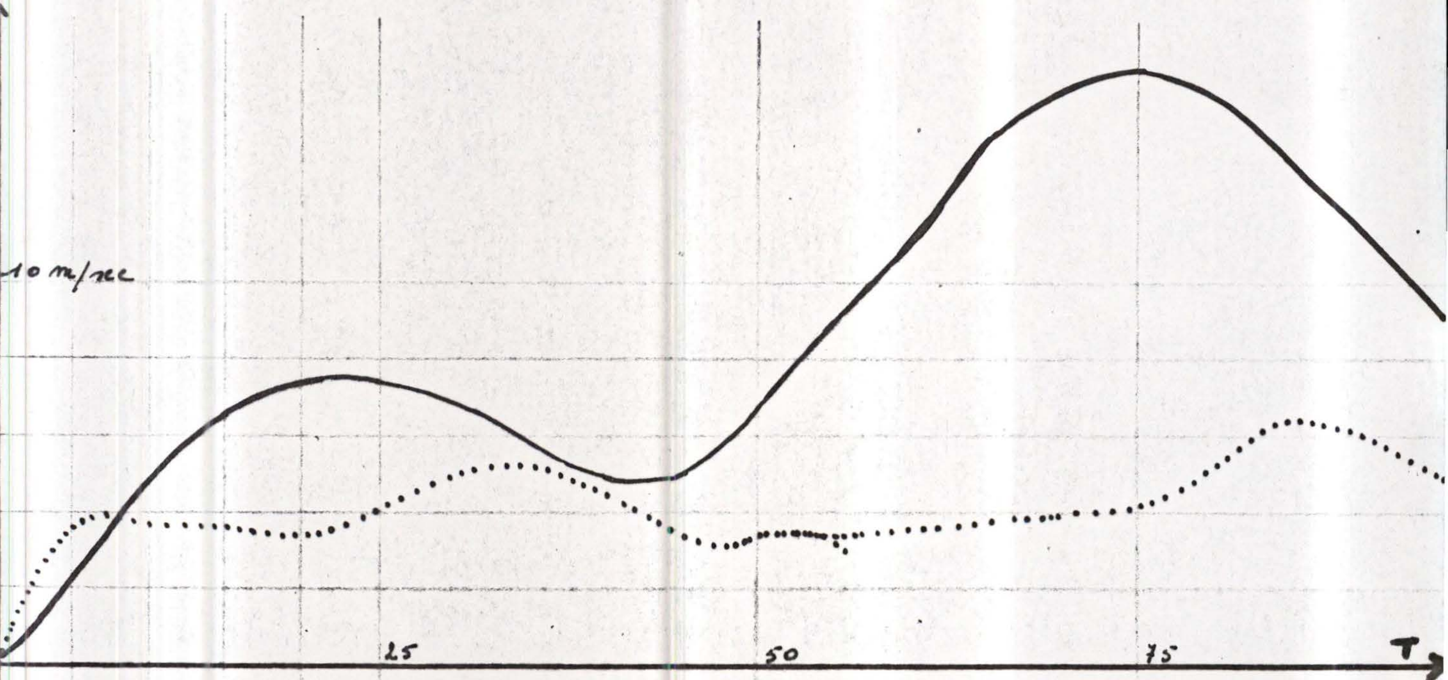


figure (6-4) ... différence entre IN et B
— différence entre IN et K

La comparaison des éléments osculateurs est restée la même pour ce qui est du demi-grand axe, de l'inclinaison et de l'anomalie moyenne.

Seuls l'argument du périgée et la longitude du noeud ascendant ont été affectés par la transformation.

Considérons le graphique (5.5) des différences sur l'inclinaison osculatrice :

Si la courbe (a) représente les différences entre l'inclinaison osculatrice calculée par intégration numérique et l'inclinaison de l'orbite képlérienne, alors la courbe (b) des différences entre l'inclinaison calculée par intégration numérique et celle calculée par le modèle de BROWER se confond avec l'axe des abcisses.

Le tableau (8) et la figure (6.6) donnent la comparaison de l'excentricité. On constate là que celle-ci continue à osciller, et l'amélioration du calcul de celle-ci n'est pas importante. Mais il faut remarquer que cette excentricité est fort petite ($0.5.10^{-2}$).

En observant les résultats donnés dans le cas d'une excentricité plus grande (0.05), on a pu voir que les différences entre les positions calculées par intégration numérique et celles calculées par le modèle de BROWER étaient beaucoup moins grandes. La norme du vecteur différence, par exemple, vaut alors au maximum 1117 m (sur 100 minutes) alors que dans le cas où e = 0.005, elle vaut 12531m comme on peut le voir par le tableau 7.

L'inclinaison

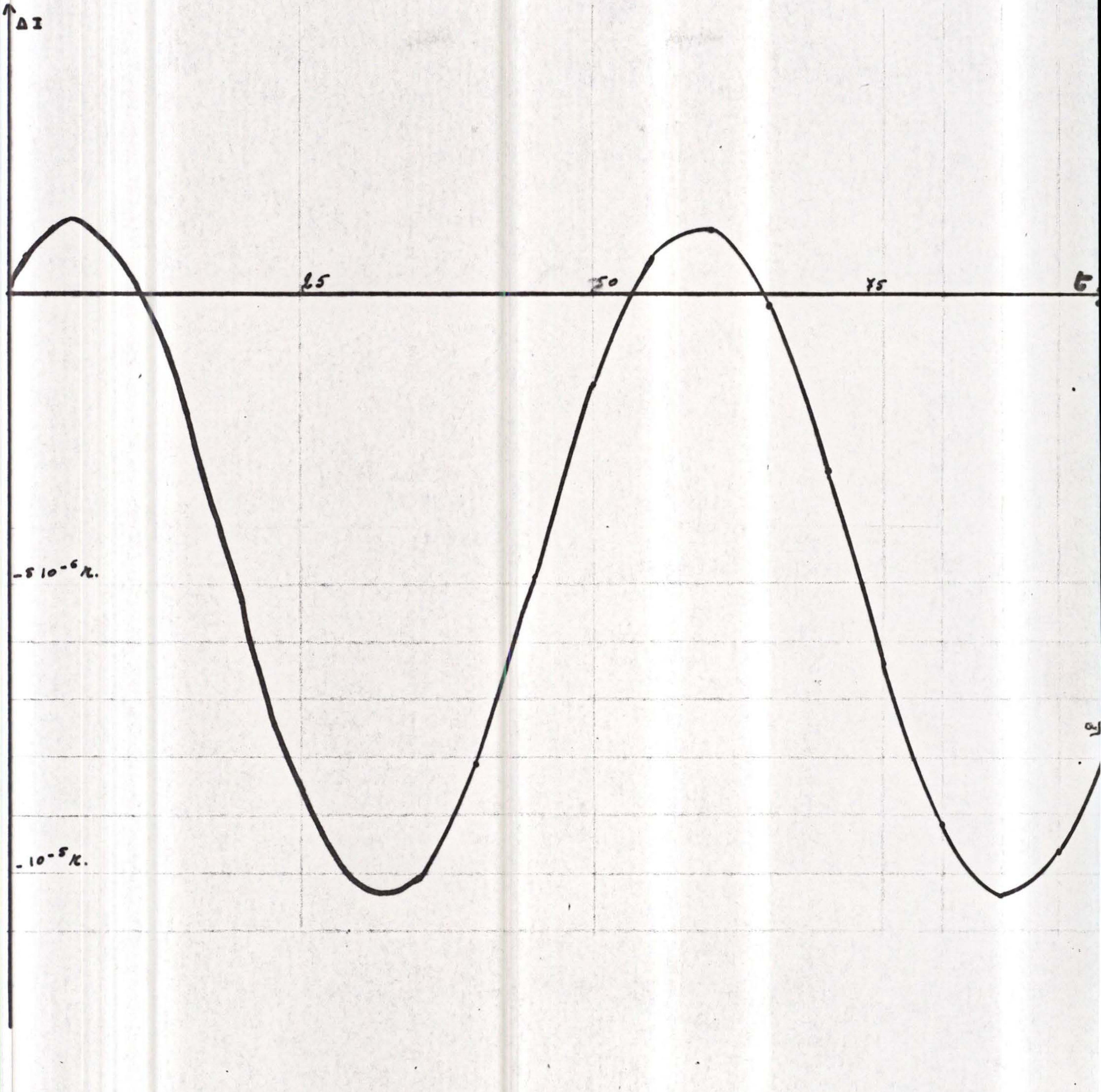


figure 6.5 échelles en abcisse 1 cm = 5 minutes
en ordonnée 1 cm = 10^{-6} radians

Tableau 8 : comparaison sur l'excentricité

temps	$l_{IN} - l_B$	$l_{IN} - l_K$
0	0	0
5	$0.049\ 10^{-2}$	$0.035\ 10^{-2}$
10	$0.048\ 10^{-2}$	$0.026\ 10^{-2}$
15	$0.049\ 10^{-2}$	$0.026\ 10^{-2}$
20	$0.048\ 10^{-2}$	$0.085\ 10^{-2}$
25	$0.056\ 10^{-2}$	$0.098\ 10^{-2}$
30	$0.072\ 10^{-2}$	$0.048\ 10^{-2}$
35	$0.073\ 10^{-2}$	$0.020\ 10^{-2}$
40	$0.061\ 10^{-2}$	$0.064\ 10^{-2}$
45	$0.052\ 10^{-2}$	$0.066\ 10^{-2}$
50	$0.051\ 10^{-2}$	$0.031\ 10^{-2}$
55	$0.052\ 10^{-2}$	$0.016\ 10^{-2}$
60	$0.051\ 10^{-2}$	$0.038\ 10^{-2}$
65	$0.051\ 10^{-2}$	$0.011\ 10^{-2}$
70	$0.051\ 10^{-2}$	$0.046\ 10^{-2}$
75	$0.051\ 10^{-2}$	$0.095\ 10^{-2}$
80	$0.058\ 10^{-2}$	$0.106\ 10^{-2}$
85	$0.071\ 10^{-2}$	$0.072\ 10^{-2}$
90	$0.072\ 10^{-2}$	$0.004\ 10^{-2}$
95	$0.059\ 10^{-2}$	$-0.054\ 10^{-2}$
100	$0.050\ 10^{-2}$	$-0.058\ 10^{-2}$

L'excentricité

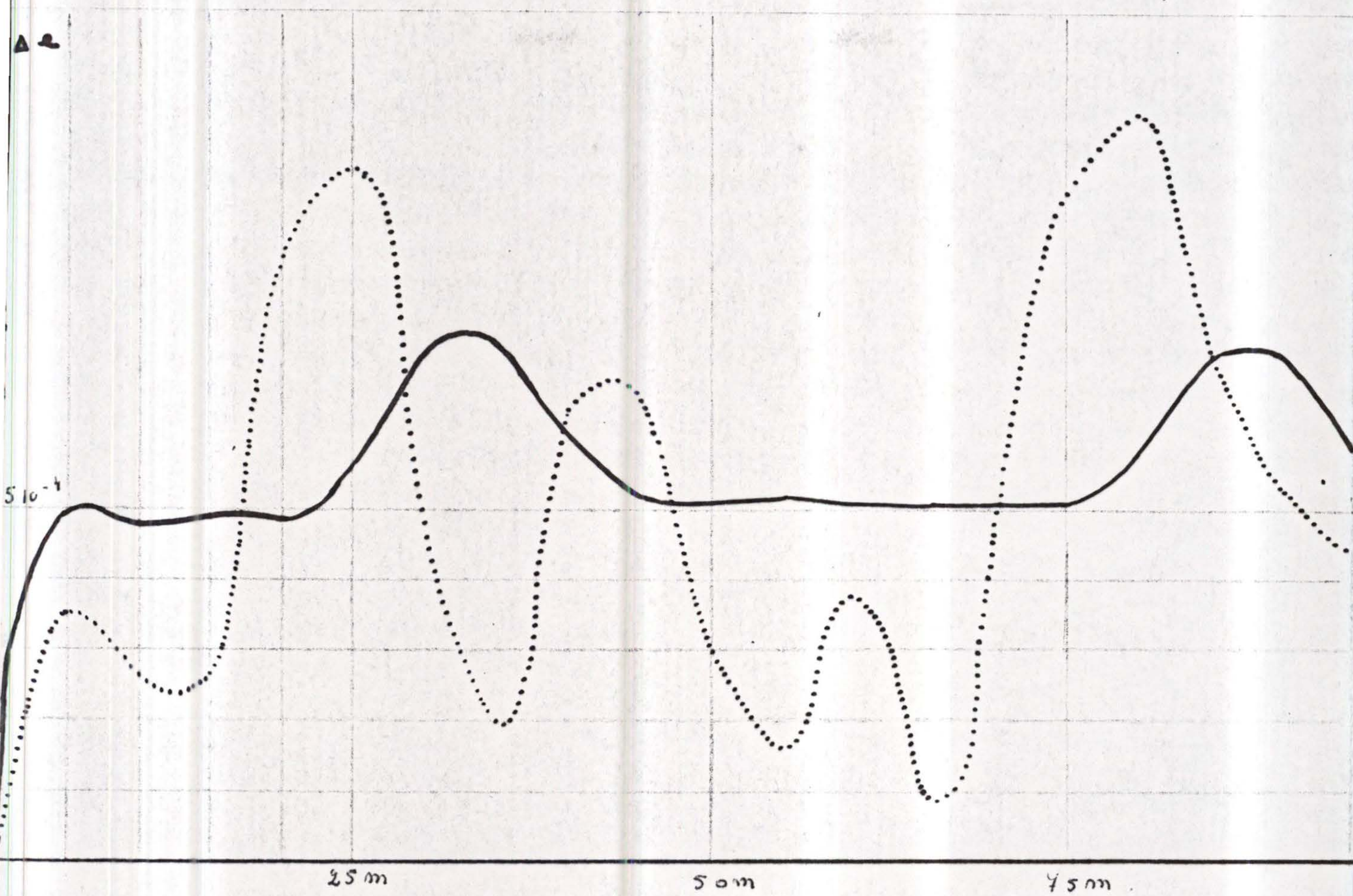


figure (6.6)

échelles en abcisse 1 cm = 5 minutes

en ordonnée 1 cm = 10^{-4}

••• = différence entre IN et B

— = différence entre IN et K

Enfin, toujours pour les mêmes éléments moyens de l'orbite, considérons la comparaison de l'anomalie moyenne et de l'argument du périgée.

Le tableau 8 donne également les différences sur la somme de ces deux éléments, ce qui permet de voir que les erreurs se compensent. On ne reprendra ici que les valeurs pour les temps supérieurs à 60 minutes ; pour les temps précédents, il suffit de se référer au tableau 6. De même, la comparaison de ces éléments entre l'intégration numérique et le modèle de Képler a été faite au tableau 5.

Tableau 8

temps (en min)	$g_{IN} - g_B$ (en radians)	$l_{IN} - l_B$ (en radians)	$\Delta g + \Delta l$ (en radians)
65	$-5.0295.10^{-3}$	$4.9484.10^{-3}$	$-8.11.10^{-5}$
70	$-9.1918.10^{-3}$	$9.1094.10^{-3}$	$-8.24.10^{-5}$
75	0.0155039	-0.0155859	$-8.2.10^{-5}$
80	0.058016	-0.0580979	$-18.19.10^{-5}$
85	0.0689877	-0.0690718	$-8.41.10^{-5}$
90	0.0308601	-0.0309473	$-8.72.10^{-5}$
95	$-4.0563.10^{-3}$	$3.9669.10^{-3}$	$-8.94.10^{-5}$
100	$-1.5867.10^{-3}$	$1.4957.10^{-3}$	$-9.1.10^{-5}$

Conclusions :

L'introduction des 5 premières harmoniques sphériques dans le développement du potentiel terrestre a donc pu améliorer la précision du calcul des positions d'un satellite à partir de ses conditions initiales, mais dans une mesure relativement petite, du moins pour le cas d'une petite excentricité.

Quant aux éléments osculateurs, ceux-ci sont calculés avec une précision beaucoup plus grande, sauf l'excentricité.

6.2.2 Comparaison des résultats sur une longue période

Dans un second temps, considérons le même type de comparaisons que celles faites jusqu'à présent, mais cette fois sur une période plus étendue et à intervalles de temps plus grands.

Le but essentiel de ce test est de voir si les différences s'amplifient avec le temps. Nous avons toujours pris la même orbite d'observation, et comparé les composantes du vecteur position d'heure en heure durant un jour.

Le tableau 9 groupe les résultats ainsi obtenus.

Tableau 9 : Comparaison sur le vecteur position

temps (en h)	$x_{IN} - x_B$ (en m)	$y_{IN} - y_B$ (en m)	$z_{IN} - z_B$ (en m)	norme du vecteur différence (en m)
1h	3 515	798	1 236	3 810
2h	3 526	797	1 112	3 782
3h	6 242	1 378	-1 370	6 537
4h	7 857	1 735	-1 546	8 193
5h	13 371	2 998	2 132	13 868
6h	6 520	1 485	-3 316	7 469
7h	7 241	1 672	5 621	9 318
8h	3 571	793	- 556	3 658
9h	3 249	775	4 787	5 837
10h	6 446	1 399	3 300	7 375
11h	2 962	675	1 301	3 304
12h	15 514	3 423	-2 712	16 117
13h	6 794	1 523	1 345	7 091
14h	12 756	2 915	7 486	15 075
15h	2 510	537	-1 460	2 953
16h	5 687	1 363	8 947	10 689
17h	5 446	-541	-5 686	7 892
18h	1 109	308	5 576	5 694
19h	13 561	2 952	-5 733	15 016
20h	4 136	917	-283	4 246
21h	-19 520	4 387	5 012	20 625
22h	1 516	324	596	1 660
23h	10 418	2 435	11 020	15 359
24h	3 368	668	-6 720	7 546

La figure (6.7) reproduit ces résultats graphiquement

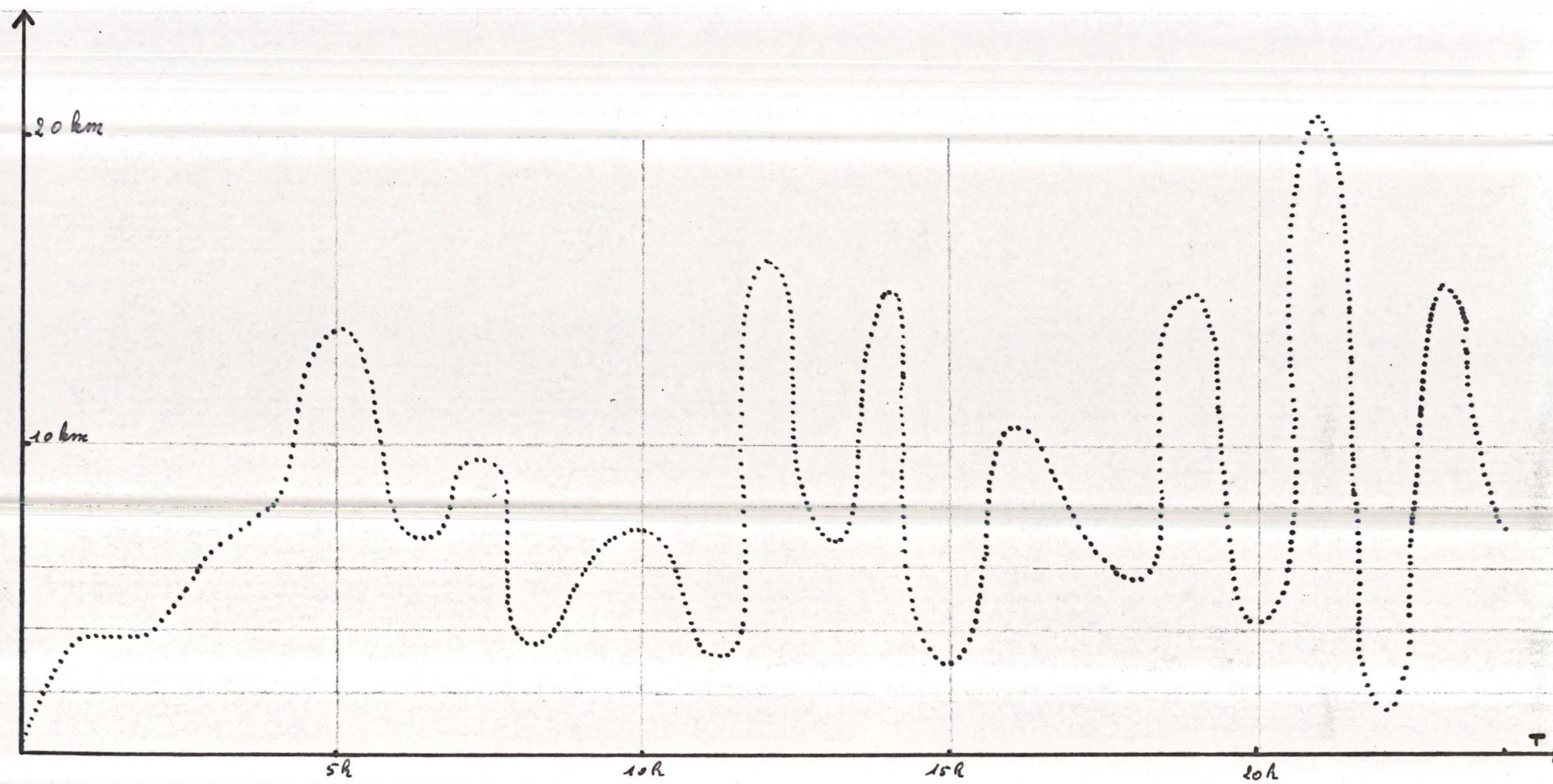


Figure (6.7)

échelles: en abcisse : 1 cm = 1 heure

en ordonnée : 1 cm = 2 km

Considérons deux éléments osculateurs particuliers : l'anomalie moyenne et l'argument du périgée et comparons-les aux mêmes τ avec les résultats donnés par l'intégration numérique.

Tableau 10

temps (en h)	différences sur l	différences sur g	différences sur (l + g)
1h	$443\ 10^{-4}$	$-8.218\ 10^{-4}$	$7.75\ 10^{-5}$
2h	$7.0022\ 10^{-3}$	$7.1072\ 10^{-3}$	$-1.05\ 10^{-4}$
3h	$5.2755\ 10^{-3}$	$-5.4438\ 10^{-3}$	$-1.683\ 10^{-4}$
4h	$2.4754\ 10^{-2}$	$-2.497\ 10^{-2}$	$-2.162\ 10^{-4}$
5h	$5.76068\ 10^{-2}$	$-5.787\ 10^{-2}$	$-2.632\ 10^{-4}$
6h	$-4.43774\ 10^{-2}$	$4.40573\ 10^{-2}$	$-3.201\ 10^{-4}$
7h	$1.213\ 10^{-4}$	$-4.79\ 10^{-4}$	$-3.577\ 10^{-4}$
8h	$8.4698\ 10^{-3}$	$-8.899\ 10^{-3}$	$-4.299\ 10^{-4}$
9h	$2.9188\ 10^{-3}$	$-3.3837\ 10^{-3}$	$-4.649\ 10^{-4}$
10h	$-8.7279\ 10^{-3}$	$8.1859\ 10^{-3}$	$-5.42\ 10^{-4}$
11h	$1.03587\ 10^{-2}$	$-1.09375\ 10^{-2}$	$-5.788\ 10^{-4}$
12h	$6.8908\ 10^{-2}$	$-6.9541\ 10^{-2}$	$-6.323\ 10^{-4}$
13h	$-4.4249\ 10^{-2}$	$4.3557\ 4\ 10^{-2}$	$-6.922\ 10^{-4}$
14h	$-1.1313\ 10^{-3}$	$3.966\ 10^{-4}$	$-7.347\ 10^{-4}$
15h	$6.4373\ 10^{-3}$	$-7.2337\ 10^{-3}$	$-7.964\ 10^{-4}$
16h	$-8.2451\ 10^{-3}$	$-7.4159\ 10^{-3}$	$-8.292\ 10^{-4}$
17h	$3.853\ 10^{-4}$	$-1.294\ 10^{-3}$	$-9.051\ 10^{-4}$
18h	$6.3662\ 10^{-3}$	$-7.3007\ 10^{-3}$	$-9.345\ 10^{-4}$
19h	$2.60372\ 10^{-2}$	$-2.70312\ 10^{-2}$	$-9.94\ 10^{-4}$
20h	$4.9409\ 10^{-3}$	$-5.3848\ 10^{-3}$	$-1.0439\ 10^{-3}$
21h	$4.069\ 10^{-2}$	$-4.17875\ 10^{-2}$	$-1.094\ 10^{-3}$
22h	$-2.97237\ 10^{-2}$	$2.8563\ 10^{-2}$	$-1.1607\ 10^{-3}$
23h	$-2.799\ 10^{-4}$	$-9.212\ 10^{-4}$	$-1.201\ 10^{-3}$
24h	$6.9144\ 10^{-3}$	$-8.1875\ 10^{-3}$	$-1.273\ 10^{-3}$

Comparaison de l'anomalie moyenne et de l'argument du périgée pendant un jour

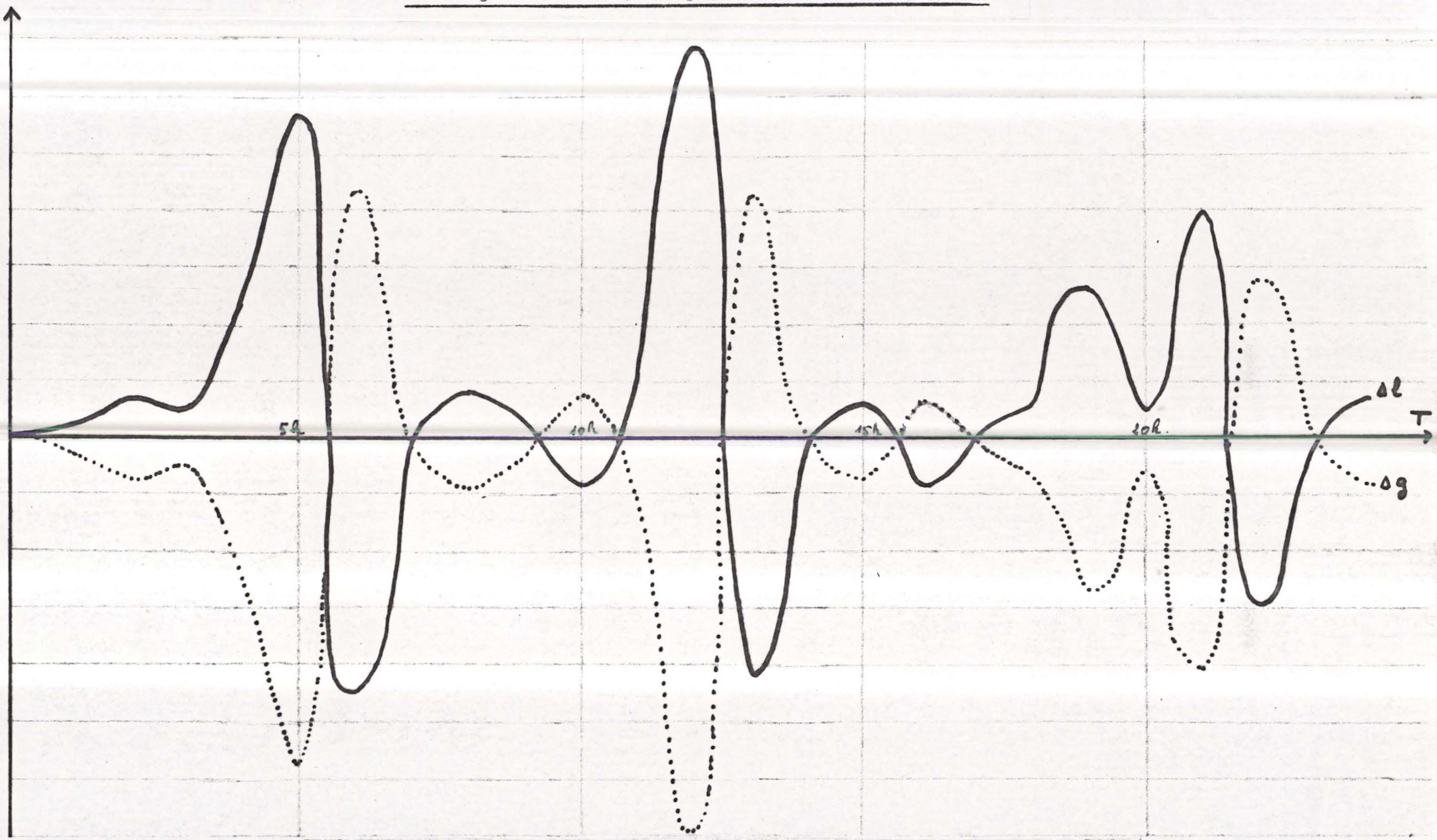


Figure (6-8) échelles: en abcisse 1 cm = 1h

en ordonnée 1cm = 0.01 radian

...... : cas de l'argument du perigée

——— : cas de l'anomalie moyenne

Conclusions :

Le tableau 9 nous permet de voir que les différences avec l'intégration numérique ne s'accroissent pas démesurément avec le temps. Un seul instant donne une différence de 20 km, alors que dès la première heure, on avait des différences de 12 km comme on peut le voir par le tableau 7.

Les comparaisons sur l'argument du périgée et sur l'anomalie moyenne permettent de voir que le décalage sur (l + g) croît toujours avec le temps (en norme), mais en restant très faible.

En observant les résultats donnés par des comparaisons semblables sur une orbite ayant une excentricité dix fois plus grande, nous avons pu voir notamment que la norme du vecteur différence sur la position était nettement plus petite. Pour un intervalle de temps de 100 minutes, les différences étaient de l'ordre de 1 km alors que dans le cas présenté ci-avant, il était de 11 km. Ceci paraît significatif et le calcul semble donc meilleur pour des excentricités plus grandes. Il faut remarquer néanmoins que beaucoup de satellites artificiels ont de petites excentricités.

Il faut encore remarquer que les figures (6.7) et (6.8) sont très imprécises, et que les courbes effectives des différences oscillent autour des courbes ici présentées.

CHAPITRE 7
APPLICATIONS DE LA METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE

7.1 Ajustement d'une orbite képlérienne à des observations calculées par le modèle de BROWER

Nous allons maitenant appliquer la méthode de correction différentielle décrite au chapitre 2 au cas d'observations simulées par le programme A. DEPRIT appliquant la théorie de BROWER.

La programmation de cette méthode est tout-à-fait semblable à ce qui a été fait par F. PAUL et E. VANDEPUT dans leur mémoire de licence, si ce n'est le fait que les positions observées du satellite sont obtenues cette fois à partir des éléments osculateurs donnés par le modèle de BROWER.

7.1.1 Reprenons les grandes étapes de la méthode

a) Calcul des positions observées du satellite par le modèle de BROWER

A chaque point calculé, on considère la position de la station au même temps et on regarde si le satellite est visible par la station. Si c'est le cas, on retient l'observation et on passe au temps suivant.

Sinon, on calcule les coordonnées au temps suivant.

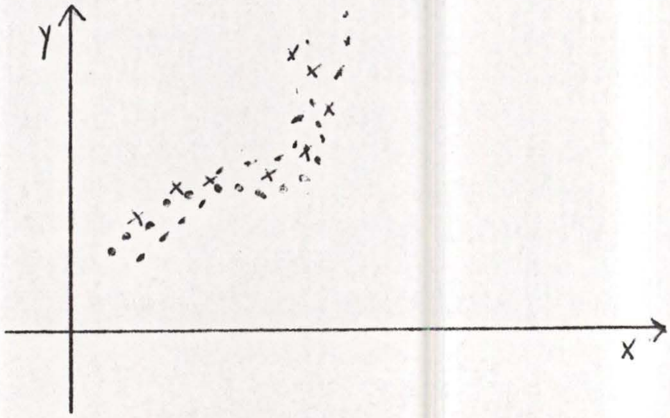
On continue le procédé jusqu'à ce que l'on ait le nombre de passages voulus du satellite.

N.B. : les calculs ne se font pas directement dans le système cartésien : ce sont les éléments osculateurs que le modèle calcule. De là, on repasse au repère cartésien par la sous-routine "ELCAR".

Enfin, un passage du satellite dont l'élévation maximum serait inférieure à 10 degrés est refusé pour des raisons pratiques.

b) Dans un second temps, nous tachons d'ajuster une trajectoire képlérienne aux points observés obtenus par la première partie du programme.

Jusqu'à présent, nous avons une situation graphique du type suivant (dans le plan (x, y) par exemple) où on retient 3 passages



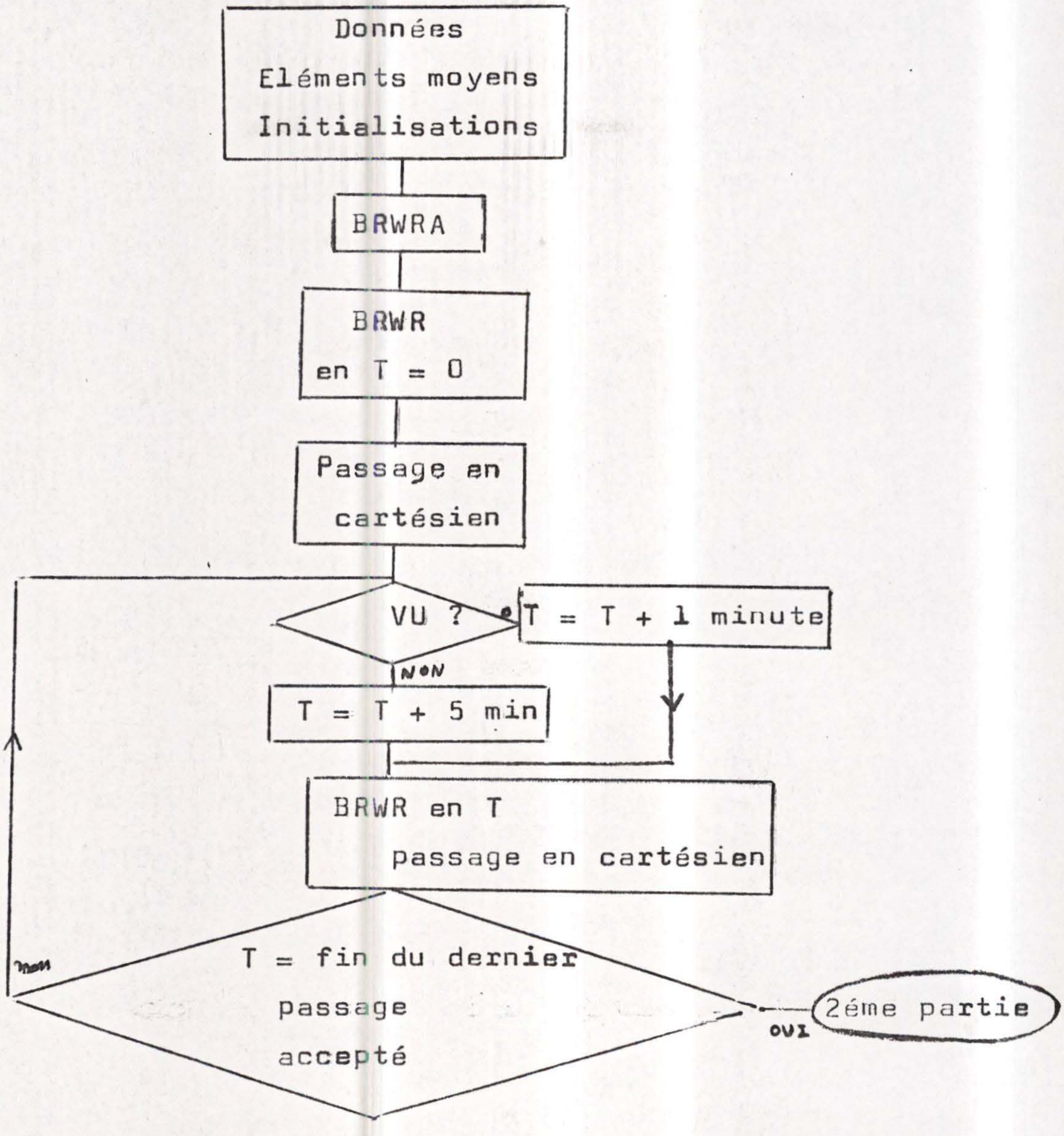
Comme première approximation des conditions initiales, on prend

- soit les coordonnées cartésiennes au temps = 0 correspondant aux éléments osculateurs en ce temps
- soit les coordonnées cartésiennes correspondant aux éléments moyens

Ensuite, on calcule les positions que le satellite occuperait aux temps retenus s'il était sur une orbite képlérienne et ayant pour conditions initiales l'approximation première X0.

On utilise alors la méthode de correction différentielle pour corriger cette approximation - c'est-à-dire par un processus itératif, chaque fois qu'on a corrigé l'approximation X0, on calcule à nouveau les positions et vitesses du satellite aux temps retenus. On continue jusqu'à ce que la correction soit suffisamment petite.

Nous avons donc le schéma général suivant pour la 1ère partie du programme :



Pour la seconde partie du programme, nous reprenons exactement le procédé utilisé précédemment.

7.1.2 Résultats obtenus

On n'a pas pu en général ajuster une orbite képlérienne aux observations ainsi simulées.

données : <u>les éléments moyens</u>

- $a'' \doteq 1.165459487066$
- $l'' = 0.004945451797$
- $I'' = 1.56105307\ 1$
- $\Omega'' = 0.2193494075$
- $\omega'' = 3.617766431$
- $M'' = -0.8667626451$

la latitude de la station : Béta = 0

temps sidéral de GREENWITCH au moment initial :

To = 3.032509270795

temps sidéral de GREENWITCH au temps initial + longitude de la station Tog = 1.461712944

Avec ces données, la méthode n'a jamais convergé , que l'on retienne 1, 2 ou 3 passages du satellite.

Dans le cas où on retient 3 passages, on a une première approximation des conditions initiales :

XO (1) = - 1.045816670443

XO (2) = - 0.230420013431

XO (3) = 0.4497519658903

XO (4) = -38.00400898455

XO (5) = -9.867650320492

XO (6) = -91.53560750943

correspondant aux éléments moyens de l'orbite des observations.

Les itérations suivantes nous donnent la situation graphique présentée au graphique (1) dans le plan (x, y)

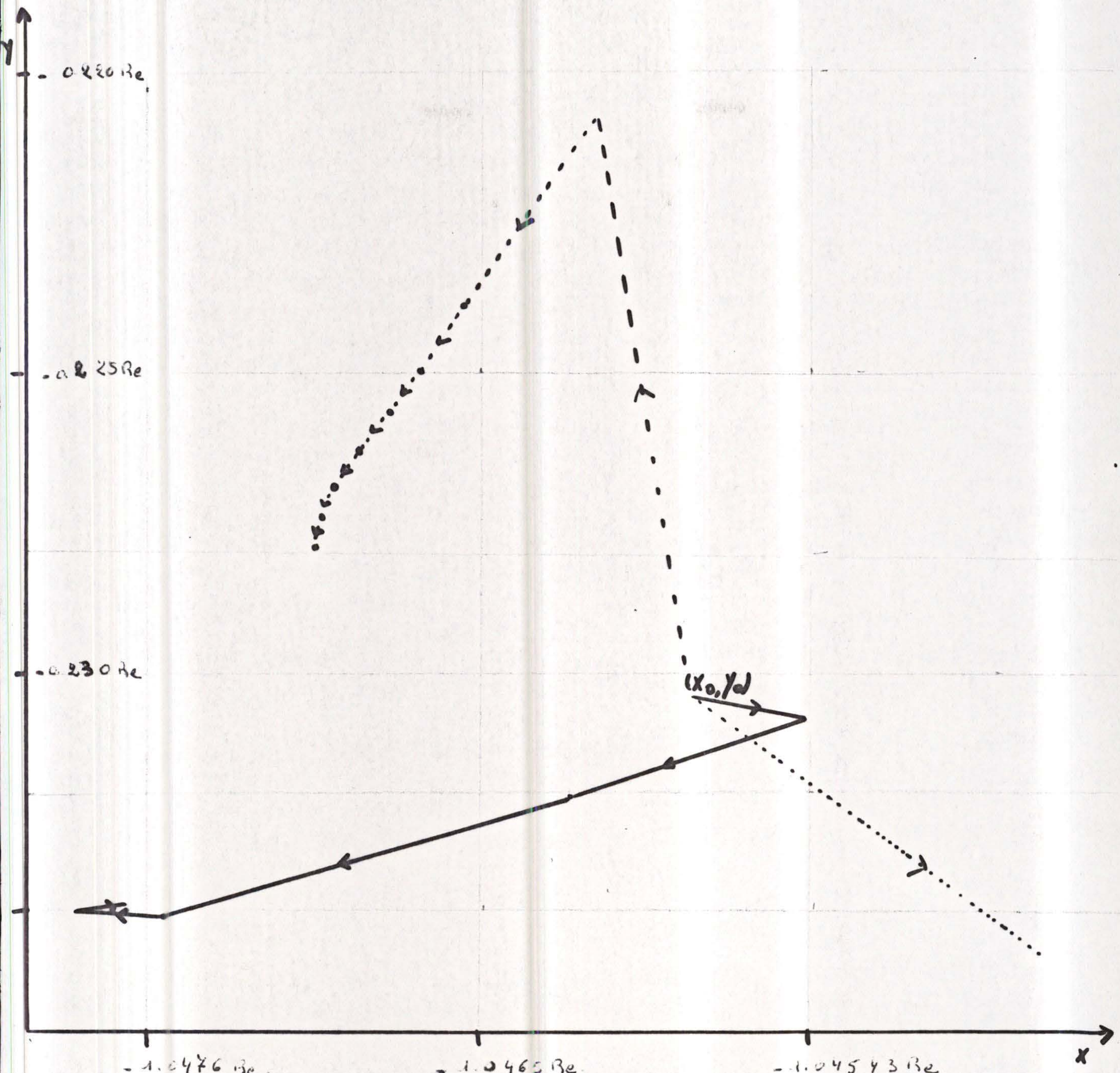


Figure 1: échelles: en abcisse: 1 cm = 10^{-3} Re
en ordonnée: 1 cm = 10^{-3} Re

—— : 3 passages

--- : 2 passages

... : 1 passage

Le graphique pourrait laisser croire à une convergence de la méthode après la quatrième itération.

Néanmoins, l'observation des résultats numériques montre que pour les itérations suivantes, la correction ne diminue plus, et même pour d'autres composantes (composante z et composantes de la vitesse), elle oscille encore à la onzième itération, et on n'a donc pas encore atteint à ce moment le seuil de convergence.

Les positions observées lors des deux premiers passages étant plus proches des positions calculées que dans le cas du troisième passage, on considère le cas où deux passages seulement sont retenus.

La première approximation du vecteur X0 est alors la même que lorsqu'on retient trois passages.

La figure 1 nous donne également la situation graphique dans le plan (x, y).

Comme dans le premier cas, le graphique laisse croire à une convergence du moins pour les composantes x et y. Mais ici aussi, la correction reste toujours du même ordre de grandeur à partir de la quatrième itération jusque la dix-septième où on n'a toujours pas atteint le seuil de convergence.

Enfin, si on ne retient qu'un seul passage, toujours pour les mêmes données, la méthode diverge après quinze itérations et la figure montre les résultats obtenus pour les six premières itérations dans le cas où on ne retient qu'un seul passage.

D'autres cas envisagés ont également fourni des résultats négatifs.

Notamment pour les données suivantes :

<u>éléments moyens de l'orbite d'observation</u>

a" = 1.144931767

l" = 0.097245

I" = 1.139944110

Ω" = 1.7949660425

ω" = 1.013407766

M" = -0.85469279288

Béta = 0.D0   Position de la station: Pos (1) = 1.D0

To = 0.D0   Pos (2) = 0.D0

TOG = 0.D0   Pos (3) = 0.D0

Ici aussi la méthode diverge. On a en effet à la deuxième itération un vecteur correcteur : C égal à

C (1) = 1.204431567

C (2) = 0.4804451791

C (3) = 1.951852616

C (4) = 110.7468169

C (5) = -279.8682975

C (6) = 113.9299561   (en rayon équatorial pour la position et en rayon équatorial par jour pour la vitesse) et on est ainsi tout-à-fait éloigné des réelles conditions initiales.

Une troisième série de données a également donné la divergence de la méthode. Il s'agit de

a" = 1.1523421898

l" = 0.08245369745

I" = 1.5423687952

Ω" = 1.325468742

ω" = 1.542389631

M" = -0.65423189

To = 0.D0   Pos (1) = 1.D0

TGO= 0.D0   Pos (2) = 0.D0

BETA= 0.D0   Pos (3) = 0.D0

et là, la méthode diverge à la troisème itération.

Un seul cas étudié a donné la convergence. Il s'agissait des données suivantes :

$a'' = 1.165459487066$

$e'' = 0.004945451797$

$I'' = 1.561053071$

$\omega'' = 3.617166431$

$M'' = -0.8667626451$

$\Omega'' = 0.2193494075$

To = 1.803435215683

TOG = 0.232638888889

BETA = 0

Pos (1) = -0.9940563382

Pos (2) = 0.108866875

Pos (3) = 0. 0

L'approximation première des conditions initiales étant :

XO (1) = -1.044656752875

XO (2) = -0.213727125053

XO (3) = 0.451054493236

XO (4) = -37.178850050755

XO (5) = -9.205397284816

XO (6) = -91.846202346106

et le point de convergence :

$XO_F(1) = -1.047712042$

$XO_F(2) = -0.2279346849$

$XO_F(3) = 0.4464737573$

$XO_F(4) = -37.00508058$

$XO_F(5) = -9.161224773$

$XO_F(6) = -91.98827977$

c'est-à-dire que la correction totale (en valeur absolue) vaut :

0.001808 R_e c'est-à-dire ± 12km
0.000732 R_e ± 4,6 km
0.00458 R_e ± 30 km
0.17376 R_e/J ± 12 m/sec
0.04417 R_e/J ± 3,3 m/sec
0.142077 R_e/J ± 10,5 m/sec

et on voit donc que même dans ce cas, les différences sont grandes bien que la méthode converge après neuf itérations.

REMARQUE IMPORTANTE :

Soulignons encore le fait que ces difficultés résultent vraisemblablement du maque de précision dans le calcul des positions observées par le modèle de BROWER.

Les résultats présentés ici ont en effet été obtenus avant que le changement BRWR, signalé au chapitre 6 n'ait été fait.

En comparant les positions retenues du satellite, on a pu voir que certains points calculés par le modèle de BROWER différaient de ceux calculés par le modèle keplérien de plus de 40 km, ceci provenant du calcul erroné des éléments osculateurs dans BRWR.

On n'a pu, faute de temps revoir ces résultats.

7.2 Ajustement d'une orbite calculée par le modèle de BROWER à une orbite calculée par intégration numérique

Dans ce paragraphe, nous nous attacherons essentiellement aux résultats numériques donnés par l'application de la méthode.

7.2.1 Le schéma général est le suivant :

a) - introduction des données : les éléments moyens de l'orbite
- calcul de la position et de la vitesse du satellite au temps initial sur l'orbite ainsi déterminée
- calcul des coordonnées aux temps successifs considérés, par intégration numérique : les positions observées
- stockage des positions acceptables

b) recherche des positions calculées aux temps retenus : ceci à partir des éléments osculateurs calculés par la sous-routine BRWR

Par la méthode de correction différentielle, on ajuste une telle orbite aux points observés obtenus par la première partie.

7.2.2 Résultats numériques

a) Etant donné l'orbite des observations dont les éléments moyens sont :

$a'' = 1.165459487066$

$e'' = 0.0049451797$

$I'' = 1.561053071$

$\Omega'' = 0.2193494075$

$\omega'' = 3.617166431$

$M'' = -0.8667626451$

Les conditions initiales dans le système cartésien sont alors :

$X_o = -1.047236$ $\dot{X}_o = -37.119116$

$Y_o = -0.228980$ $\dot{Y}_o = -9.191737$

$Z_o = 0.449181$ $\dot{Z}_o = -91.867235$

Dans le cas où on retient 3 passages et 50 équations, nous avons le tableau de convergence suivant :

Tableau (1)

n° de l'itération	Position x y z calculée	Vitesse x y z calculée	r	v
1	-1.046598 -0.228840 0.451475	-37.192209 -9.200783 -91.811226	1.162568	99.484752
2	-1.046641 -0.228842 0.451466	-37.190462 - 9.201917 -91.808089	1.162604	99.481308
3	-1.046639 -0.228842 0.451466	-37.190462 - 9.201917 -91.808089	1.162603	99.481479
4	-1.046639 0.228842 0.451464	-37.190504 - 9.201710 -91.808270	1.162601	99.481472

La correction totale (différence entre les conditions initiales et le point de convergence)vaut donc :

cor (1) = $-5.971\ 10^{-4}$ Re $\simeq$ 3 808 m

cor (2) = $-1.381\ 10^{-4}$ Re $\simeq$ 881 m

cor (3) = $-2.284\ 10^{-3}$ Re $\simeq$ 14 567 m

cor (4) = 0.0713879 Re/j $\simeq$ 5.2 m/sec

cor (5) = $9.9727\ 10^{-3}$ Re/j $\simeq$ 0.736 m/sec

cor (6) = 0.058965 Re/j $\simeq$ 4.3 m/sec

et dans le plan (x, y) par exemple, nous avons la représentation graphique suivante (fig 7.2) et on voit là que l'on atteint immédiatement le seuil de convergence

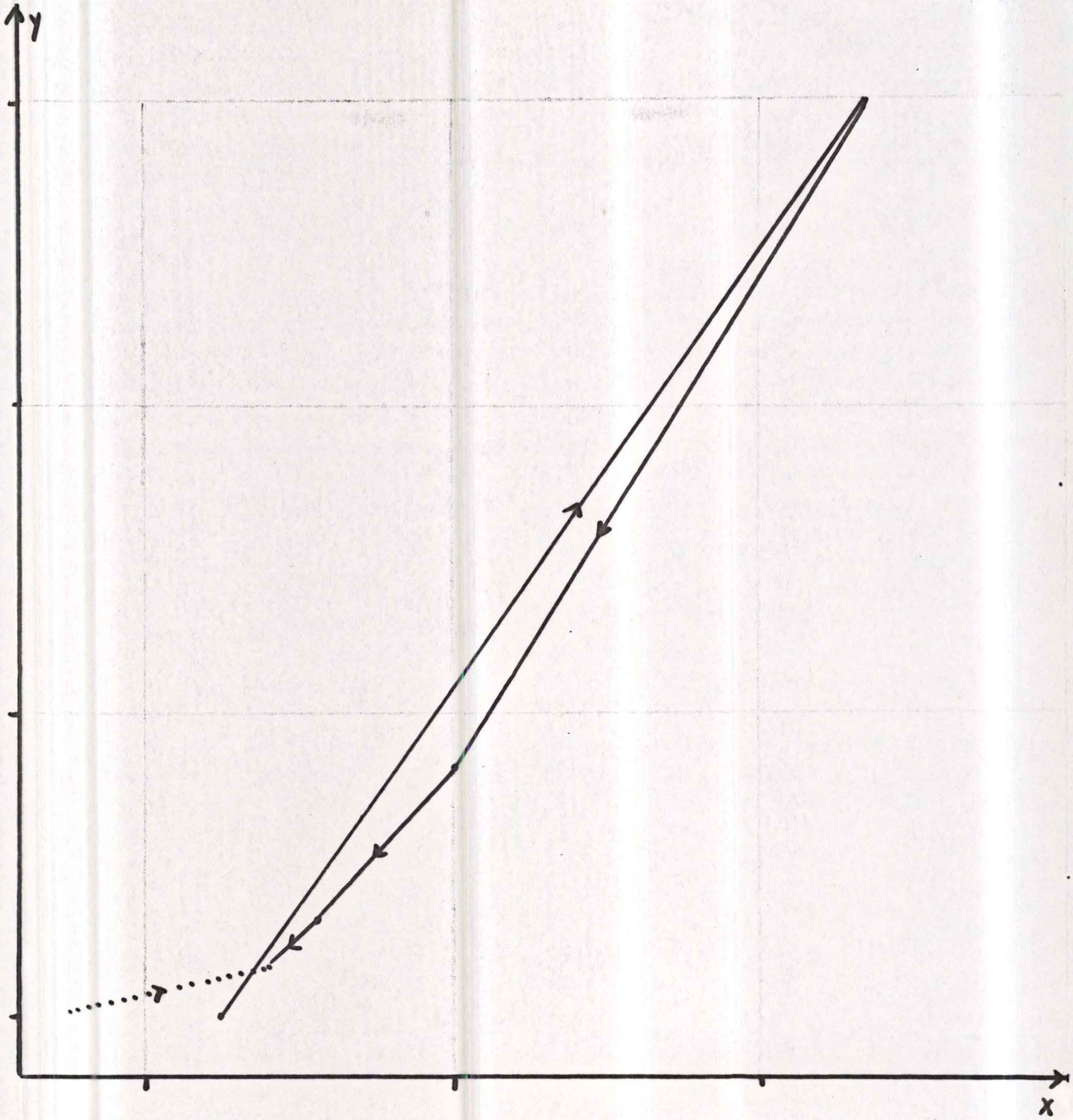


Figure (7.2) échelles: en abcisse et en ordonnée:

$1 \text{ cm} = 2\ 10^{-2}$ Re

... : cas sans perturbation

—— : cas avec perturbation

b) Nous allons maintenant considérer le cas de la même orbite d'observation, mais où cette fois, on ne prendra plus comme approximation première du vecteur Xo, les conditions initiales prises pour l'intégration numérique. On perturbera ces conditions.

Soit donc la perturbation :

Xo (1) = Xo (1) + 0.5 D -03

c'est-à-dire une perturbation sur la composante x d'environ 3km.

Dans ce cas-là aussi, on a obtenu la convergence de la méthode. Les résultats sont présentés dans le tableau 2 et par la figure 2

Tableau 2

n° de l'itération	Position calculée x y z	Vitesse calculée $\dot{x}$ $\dot{y}$ $\dot{z}$	r	v
0	-1.046736 -0.228980 -0.449181	-37.119116 -9.191737 -91.867235	1.161831	99.508.318
1	-1.044649 -0.226020 0.455.588	-38.104291 -10.696101 -91.329116	1.161868	99.542457
2	-1.046057 -0.228182 0.452718	-37.451416 -9.5815311 -91.680452	1.162435	99.497333
3	-1.046442 -0.228695 0.451769	-37.249370 -9.287148 -91.782848	1.162513	99.487977
4	-1.046618 -0.228837 0.451469	-37.192428 -9.202895 -91.809092	1.162583	99.483059
5	-1.046639 -0.228842 0.451465	-37.190477 -9.201713 -91.808263	1.162601	99.481456

Tableau 2 (suite)

n° de l'itération	Position calculée x y z	Vitesse calculée $\dot{x}$ $\dot{y}$ $\dot{z}$	r	v
6	-1.046639 -0.228842 0.451465	-37.190506 -9.201712 -91.808269	1.162601	99.481472
7	-1.046639 -0.228842 0.451465	-37.190505 -9.201710 -91.808270	1.162601	99.481472

En augmentant la perturbation sur la composante x (10^{-3}) on n'a plus obtenu la convergence vers les conditions initiales. Il est à remarquer, que déjà dans le tableau 2 on n'atteint pas immédiatement le seuil de convergence.

On a une correction totale :

sur la position : 619 m sur x
880 m sur y
14567 m sur z

sur la vitesse : 5.2 m/sec sur x
0.73 m/sec sur y
4.35 m/sec sur z

7.2.3 Si on donne maintenant une perturbation dans la direction de la trajectoire (environ), on a obtenu les résultats suivants :

PERTURBATIONS		NOMBRE D'ITERATIONS
	0	4
xo zo	xo + 0.1D-03 zo + 0.1D-03	5
xo zo	xo + 0.1D-03 zo + 0.8D-03	6
xo zo	xo + 0.1D-03 zo + 1. D-03	6

ANNEXE

DESCRIPTION ET UTILISATION DES PROGRAMMES EMPLOYES

Dans les chapitres 5, 6 et 7, nous utilisons certains sous-programmes que nous allons maintenant décrire :

Valeurs transmises par COMMON dans le programme principal

Vecteur D MOYEN

. COMMON / MOYEN / DMOYEN

. 41 Composantes

Les 6 premières composantes sont les paramètres elliptiques moyens dans l'ordre suivant : demi-grand axe - excentricité - anomalie moyenne - argument du périgée - inclinaison - longitude du noeud ascendant.

Les 6 composantes suivantes sont les éléments moyens de DELAUNAY. Dans l'ordre : l, g, h, L, G, H décrits au chapitre 5.

Les autres composantes sont des fonctions des éléments elliptiques moyens et sont calculés par la sous-routine BRWRA.

En ce qui nous concerne, seules les 6 premières composantes de ce vecteur sont à initialiser pour fixer l'orbite. Ces éléments sont à introduire dans les unités suivantes :

unité	de longueur	: le rayon équatorial
	de temps	: le jour
	d'angle	: le radian
	de masse	: la masse de la terre

Vecteur NOMBRE

donné par COMMON : COMMON / ARITH / NOMBRE

de dimension 40

Ce vecteur est un bloc de données numériques telles que les 10 premiers entiers (en double précision), 1/2, 1/3...

Son utilité est le gain de place mémoire ainsi obtenu.

ecteur DBROW

e dimension 89

onné par COMMON / BROWER / DBROW

Il s'agit également ici d'un bloc de données numériques ; ce ont des coefficients intervenant dans le calcul de fonctions des léments moyens (dans BRWRA) et des éléments osculateurs (dans BRWR).

ecteur ANGLE

le dimension 9

ntroduit par : COMMON / ANGLES /ANGLE

Ce sont aussi des données telles que : π, 2π, $2/\pi$, $\pi/4$,... l'expression d'un degré en fraction décimale de radian,...

ecteur DPOQUE

le dimension 17

ntroduit par : COMMON / EPOQUE / DPOQUE

Les 5 premières composantes de ce vecteur décrivent le moment nitial ; dans l'ordre : le mois, le jour, l'année, l'heure (seconde), la minute.

En fait, seules les composantes 2 et 4 sont utilisées avec la première composante désignant le jour et la quatrième le temps au jour considéré, les composantes 6 à 11 sont les éléments osculateurs au moment initial dans l'ordre suivant : a, e, l, g, i, h.

Les composantes 12 à 17 sont les éléments de DELAUNAY au moment initial dans l'ordre : l, g, h, L, G, H.

Ce vecteur est essentiellement utilisé lorsque connaissant les éléments osculateurs au moment initial, on cherche les éléments moyens de l'orbite. Il faut alors assigner ces valeurs aux composantes du vecteur DPOQUE.

Variable TOL

Il s'agit d'une simple valeur numérique fixant la précision dans le calcul de l'anomalie excentrique à partir de l'anomalie moyenne et de l'excentricité par une méthode de NEWTON RAPHSON.

2 Sous-programmes employés : description et utilisation

a) sous-routine : BRWRA

C'est une sous-routine n'ayant pas d'argument. Les valeurs introduites le sont par COMMON de même que les sorties.

Ces commons ARITH - BROWER (DBROW) - MOYEN (DMOYEN)

Cette sous-routine calcule des fonctions des éléments elliptiques moyens préalablement introduits dans les 6 premières composantes du vecteur DMOYEN.

Ces fonctions sont par exemple : le moyen mouvement,

$\frac{J_2}{2(a'')^2}$, $\frac{J_3}{(a'')^3}$ ....

Toutes ces valeurs intervenant plus tard dans le calcul des éléments osculateurs par exemple.

b) sous-routine : BRWR

Cette sous-routine calcule les éléments osculateurs en un temps quelconque à partir des éléments moyens de l'orbite et des fonctions de ces éléments moyens calculées par la sous-routine BRWRA.

Les arguments de cette sous-routine : (OK1 , DAY, HOUR)

- entrées : DAY, HOUR : 2 variables de temps indiquant le jour (DAY : variable entière) et l'heure (HOUR : variable réelle, exprimée en jour) à laquelle on veut calculer les éléments osculateurs.
- sorties : OK1 : un vecteur à six composantes qui sont les éléments osculateurs au moment : DAY - HOUR. Ses composantes sont dans l'ordre : a, e, l, g, i, h.

Ces variables sont toujours exprimées en les mêmes unités : rayon équatorial, jour radian, masse terrestre.

<u>Les blocs utilisés</u> :

COMMON / ANGLES / ANGLE
COMMON / ARITH / NOMBRE
COMMON / BROWER / DBROW
COMMON / EPOQUE / DPOQUE
COMMON / MOYEN / DMOYEN

Le calcul de ces éléments est fait par les formules données par D. BROWER.

<u>c) fonction KEPEQ</u>

Ce sous-programme fonction calcule l'anomalie excentrique, connaissant l'anomalie moyenne et l'excentricité par une méthode itérative et avec une précision fixée par la variable TOL.

Blocs COMMON : COMMON / ARITH / NOMBRE
COMMON / HRDWR / TOL

<u>Les arguments</u> : SE, CE, L, ECC

- entrées : l'excentricité : ECC
  l'anomalie moyenne : L
- sorties : la fonction Kepeq : anomalie excentrique
  SE = sinus de l'anomalie excentrique
  CE = cosinus de l'anomalie excentrique

<u>d) sous-routine : RWRB</u>

Ce sous-programme permet de calculer les éléments moyens de DELAUNAY en connaissant les éléments osculateurs au temps initial. Il s'agit donc presque du travail inverse de la sous-routine BRWR.

Il n'y a pas non plus d'argument . Les valeurs sont passées par : COMMON / ANGLES / ANGLE
COMMON / ARITH / NOMBRE
COMMON / BROWER / DBROW
COMMON / EPOQUE / DPOQUE
COMMON / MOYEN / DMOYEN

Les éléments osculateurs au temps initial sont introduits dans les composantes 6 à 11 du vecteur DPOQUE.

Les éléments moyens obtenus sont placés dans les composantes 7 à 12 du vecteur DMOYEN. On peut à partir de là obtenir facilement les éléments elliptiques moyens en inversant les formules de DELAUNAY. On place alors les éléments ainsi obtenus dans les 6 premières composantes du vecteur D MOYEN.

L'idée de la méthode employée pour le calcul des éléments moyens dans RWRB est la suivante : D BROWER nous donne donc (pour l'anomalie moyenne par exemple) la formule :

$$l = l' + J2\ F\ (e', l' \ldots) + G\ (J2^2)$$

c'est-à-dire $l' = l - J2\ F\ (e', l', \ldots) + G\ (J2^2)$

Si dans cette formule, on remplace F (e', l',...) par F (e, l,...), on commet une erreur de l'ordre de J2. Comme le terme F (e', l',...) est multiplié par J2, l'erreur commise reste toujours de l'ordre de $J2^2$ c'est-à-dire

$$l' = l - J2\ F\ (e, l, \ldots) + G\ (J2^2)$$

et on obtient ainsi l'anomalie moyenne l', à partir de l'anomalie osculatrice l.

En reprenant les formules donnant la position et la vitesse de la station nous construisons les sous-routines STAVIT

1)En coordonnées cylindriques

```
      SUBROUTINE STAVIT(RSTAT,RAU,PARAM,T2)
      COMMON/ETI3/OMEGA
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION RSTAT(3),RAU(3),PARAM(3)
      A1=PARAM(2)+OMEGA*T2
      A2=PARAM(1)*OMEGA
      RSTAT(1)=PARAM(1)*DCOS(A1)
      RSTAT(2)=PARAM(1)*DSIN(A1)
      RSTAT(3)=PARAM(3)
      RAU(1)=-A2*DSIN(A1)
      RAU(2)=A2*DCOS(A1)
      RAU(3)=0.D0
      RETURN
      END
```

2)En coordonnées sphérique

```
      SUBROUTINE STAVIT(PARAM,T,RS,VS)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION PARAM(3),RS(3),VS(3)
      A=PARAM(2)+PARAM(4)*T
      R=PARAM(1)
      PHI=PARAM(3)
      RS(1)=R*DSIN(PHI)*DCOS(A)
      RS(2)=R*DSIN(PHI)*DSIN(A)
      RS(3)=R*DCOS(PHI)
      PAR=0.D0
      DO 1 I=1,2
    1 PAR=PAR+RS(I)**2
      R=DSQRT(PAR)
      VS(1)=-OMEGA*R*DSIN(A)
      VS(2)=OMEGA*R*DCOS(A)
      VS(3)=0.D0
      RETURN
      END
```

Nous allons calculer les coefficients du système 4-1 en programmant les formules des pages 4-4 à4-6

1) <u>Sous-routine cylind</u>

```
      SUBROUTINE CYLIND(T,R,RPT,COEF,X9,PO,PARAM)
      COMMON/ETI3/OMEGA/
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION COEF(4),DRODX(6),DXDRAW(4,6),PO(3)
      DIMENSION X9(6),PARAM(3)
      DO 15 I=1,3
      J=I+3
      DRODX(I)=-(R*X9(J)+RPT*(PO(I)-X9(I)))
      DRODX(I)=DRODX(I)/(R*R)
   15 DRODX(J)=-X9(I)/R
      DO 16 I=1,4
      DO 16 J=1,6
   16 DXDRAW(I,J)=0.DO
      A1=PARAM(2)+PARAM(4)*T
      A2=PARAM(4)*PARAM(1)
      A3=T*PARAM(1)
      A4=A3*OMEGA
      DXDRAW(1,1)=DCOS(A1)
      DXDRAW(1,2)=DSIN(A1)
      DXDRAW(1,4)=-PARAM(4)*DXDRAW(1,2)
      DXDRAW(1,5)=PARAM(4)*DXDRAW(1,1)
      DXDRAW(2,1)=-PARAM(1)*DXDRAW(1,2)
      DXDRAW(2,2)=PARAM(1)*DXDRAW(1,1)
      DXDRAW(2,4)=-A2*DXDRAW(1,1)
      DXDRAW(2,5)=-A2*DXDRAW(1,2)
      DXDRAW(3,3)=1.DO
      DXDRAW(4,1)=-A3*DXDRAW(1,2)
      DXDRAW(4,2)=A3*DXDRAW(1,1)
      DXDRAW(4,4)=-A4*DXDRAW(1,1)-PARAM(1)*DXDRAW(1,2)
      DXDRAW(4,5)=-A4*DXDRAW(1,2)+PARAM(1)*DXDRAW(1,1)
      DO 17 I=1,4
   17 COEF(I)=0.DO
```

```
      DO 18 I=1,4
      DO 18 J=1,6
   18 COEF(I)=COEF(I)+DXDRAW(I,J)*DRODX(J)
      RETURN
      END
```

2) <u>Sous-routine sphére</u>

```
      SUBROUTINE SPHERE(PARAM,COEF,T,PO,R,RPT,X9)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION PARAM(4),COEF(2),DRODX(6)
      DIMENSION DXDRAW(4,6),PO(3),X9(6)
      DO 15 I=1,3
      J=I+3
      DRODX(I)=-(R*X9(J)+RPT*(PO(I)-X9(I)))
      DRODX(I)=DRODX(I)/(R*R)
   15 DRODX(J)=-X9(I)/R
      DO 16 I=1,4
      DO 16 J=1,6
   16 DXDRAW(I,J)=0.D0
      A=DCOS(PARAM(2)+PARAM(4)*T)
      B=DSIN(PARAM(2)+PARAM(4)*T)
      C=DSIN(PARAM(3))
      D=DCOS(PARAM(3))
      DXDRAW(1,1)=C*A
      DXDRAW(1,2)=C*B
      DXDRAW(1,3)=D
      DXDRAW(1,4)=-PARAM(4)*c*B
      DXDRAW(1,5)=PARAM(4)*C*A
      DXDRAW(2,1)=-PARAM(1)*C*B
      DXDRAW(2,2)=PARAM(1)*C*A
      DXDRAW(2,4)=-PARAM(4)*PARAM(1)*A*C
      DXDRAW(2,5)=-PARAM(4)*PARAM(1)*C*B
      DXDRAW(3,1)=PARAM(1)*D*A
      DXDRAW(3,2)=PARAM(1)*D*B
      DXDRAW(3,3)=-PARAM(1)*C
      DXDRAW(3,4)=-PARAM(4)*PARAM(1)*D*B
```

```
      DXDRAW(3,5)=PARAM(1)*PARAM(4)*A*D
      DXDRAW(4,5)=PARAM(1)*A*C-T*PARAM(1)*PARAM(4)*C*B
      DXDRAW(4,4)=PARAM(1)*C*A-T*PARAM(4)*PARAM(1)*C*B
      DXDRAW(4,2)=PARAM(1)*A*C*T
      DXDRAW(4,1)=-T*PARAM(1)*C*B
      DO 17 I=1,4
   17 COEF(I)=0.DO
      DO 18 I=1,4
      DO 18 J=1,6
   18 COEF(I)=COEF(I)+DXDRAW(I,J)*DRODX(J)
      RETURN
      END
```

Signification des variables

RSTAT,RS	=vecteur position de la station
RAU,VS	=vecteur vitesse de la station
PARAM	vecteur des paramètres r, ,z, r, , ,
COEF	=vecteur des coefficient
T	=temps considéré
PO	=vecteur position de la station
R	=distance station-satellite (dans SPHERE et CYLIND)
RPT	=range rate
DRODX	=matrice
DXDRAW	=matrice

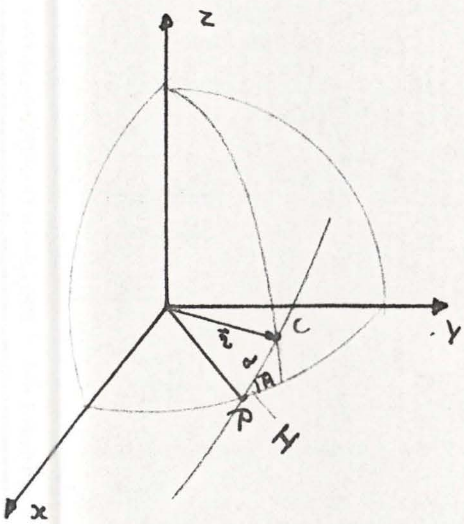
Calcul des éléments elliptiques

Le problème du calcul de certains éléments elliptiques est plus délicat pour des petites valeurs de l'exentricité et donc pour $e = o$

Les éléments qui posent un problème sont MO = anomalie moyenne
GE = anomalie exentrique
W = argument du périgée

Si $e = 0$ on ne sait pas déterminer le périgée; il faut donc le fixer arbitrairement c'est-à-dire fixer W calculer ainsi MO et GE

On fixe le périgée dans la direction du point d'intersection entre le plan de l'orbite et le plan équatorial.



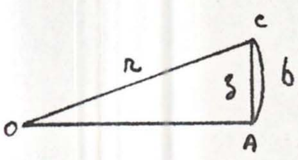
On place le périgée en P
c'est-à-dire W=O

Puisque nous considérons un orbite circulaire MO=GE = arc a sur le dessin

Par la règle du sinus dans un triangle sphérique on a

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A} \quad \text{or } A = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin I} \quad \text{car } B=I$$



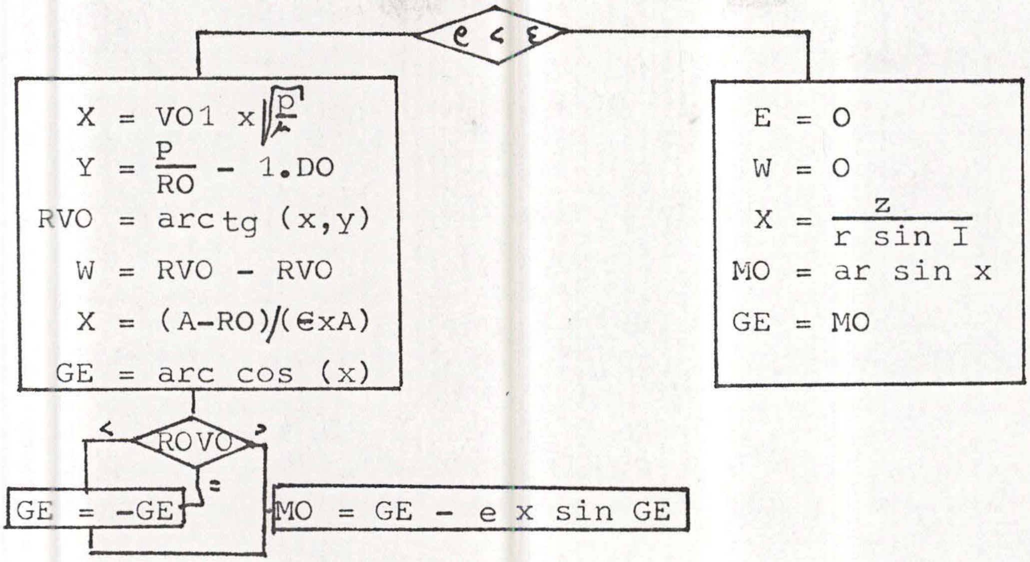
Calcul de sinb

$$\sin b = \frac{z}{r}$$

$$\sin a = \frac{z}{r \sin I}$$

Organigramme

Soit valeur de contrôle sur la valeur de l'exentricité



Programme

```
        ZZZ = 1.DO -10
        IF (E.LT.ZZZ) GOTO 40
        X = (VO1 * DSQRT (P/MU)
        Y = P/RO - 1.DO
        RVO = DATAN 2(X,Y)
        W = RVO - RVO
        X = (A-RO)/(E*A)
        GE = DARCOS (X)
        IF (ROVO)10,10,11
10      GE = -GE
11      MO = GE - E*D SIN(GE)
        GOTO41
40      E = O.DO
        W = O.DO
        X = XO(3) / (RO*DSIN(RI))
        MO = DARSIN(X)
        GE = MO
41      CONTINUE
```

Correction de la sous-routine DERPA

Le problème est apparu lors du calcul de sin $(v-v_o)$ et cos $(v-v_o)$ et plus particulièrement dans le calcul de la parité du signe de sin $(v-v_o)$

Calcul de cos $(v-v_o)$

v_o = anomalie VRAIE au temps t=0

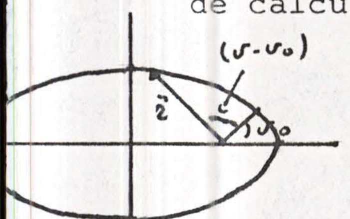
v = anomalie VRAIE au temps t

on passe par le produit scalaire et on a

$$\cos(v-v_o) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_o}{\|r\|\,\|r_o\|}$$

Calcul de sin $(v-v_o)$

la valeur de sin $(v-v_o)$ ne pose pas de problème il suffit de calculer



$$\sin(v-v_o) = \sqrt{1-\cos^2(v-v_o)}$$

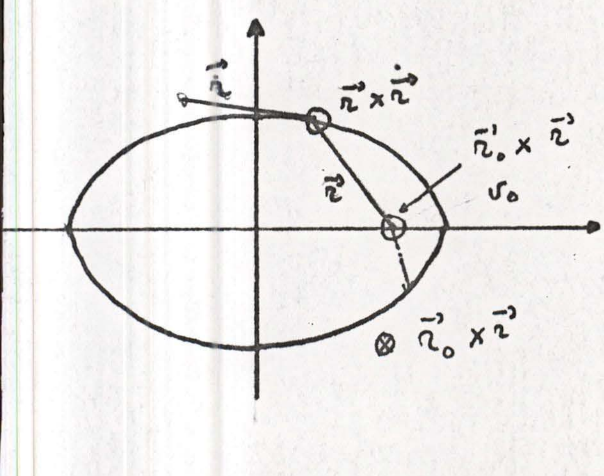
Le problème est de connaître le signe de sin $(v-v_o)$

Pour trouver la parité du signe nous considérons un produit vectoriel

1) $\vec{r}_o \times \vec{r}$ où $\vec{r}_o$ = position au temps initial

2) $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ $\quad\vec{r}$ = position au temps considéré

En fait nous considérons les composantes des produits vectoriels



On considère le signe d'une composante de $\vec{r}_o \times \vec{r}$

On considère la composante correspondante de $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Si elle est positive le signe de sin $(v-v_o)$ = signe de la composante de $\vec{r}_o \times \vec{r}$

Exemple : considérons la composante X

- $(\vec{r}_o \times \vec{r})_X$ est positive

$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_X$ est positive

le signe de sin est + $\Rightarrow (v-v_o) < \pi$

$$-\cdot- \quad (r_o \times r)_X \quad 0$$

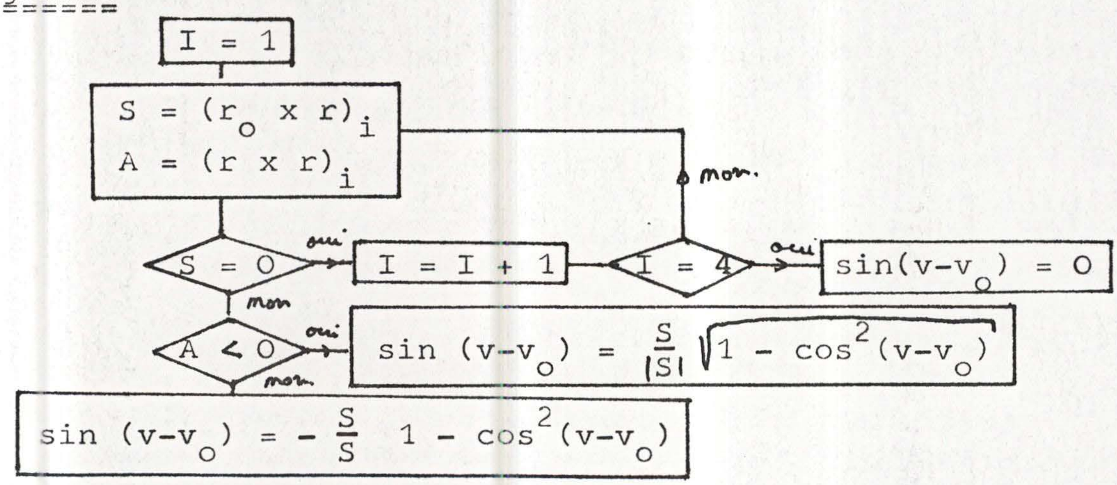
$$(r \times r)_X \quad 0$$

$$\sin (v-v_o) < 0 \rightarrow \pi < (v-v_o) < 2\pi$$

Mais il faut tenir compte de toutes les composantes car il se peut que l'on tombe sur une composante = 0

Si elles sont toutes = 0 on a $\sin (v-v_o) = 0$

Organigramme



Programme

```
      SSS = 1.D-10
      S = XO(1)*X(2) - X(1)*XO(2)
      XL = X(1) * X(5) - X(2)*X(4)
      IF (DABS(S).GT.SSS) GOTO 777
      S = XO(2)*X(3) - X(2)*XO(3)
      XL = X(2)*X(6) - X(3)*X(6)
      IF(DABS(S).GT.SSS)GOTO 777
      S = XO(3)*X(1) - XO(1)*X(3)
      XL = X(3)*X(4) - X(1)*X(6)
      IF(DABS (S).GT.SSS) GOTO 777
      S = O.DO
      GOTO 995
777   S = S / DABS(S)
```

```
      IF(X(2).GT.0.D0) GOTO 995
      S = -S
995   !
      !
      !
      !
      suite du programme
```

TABLE DES MATIERES

B I B L I O G R A P H I E

I D. BROWER " Solution of the problem of artificial satellite theory without drag "

The astronomical journal, 64

II KAULA: "Theory of Satellite geodesy"

Blaisdell publishing company

Walthan, Massachussetts, Toronto- London

III HENRARD: " Le potentiel gravitationnel de la terre.

(séminaire de mécanique céleste)

IV ESCOBAL "Methods of orbit détermination"

TRW Space technology laboratories.

V F. PAUL - E. VANDEPUT " Determination de la trajectoire d'un satellite artificiel par les observations Doppler."

Mémoire de licence aux FNDP I975

VI M. MOONS - D. STANDAERT " Integration des équations de mouvement d'un satellite artificiel."

Mémoire de licence aux FNDP - I975