MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Introduction à l'étude des systèmes gyroscopiques

Hardy, André

Award date:
1976

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

Introduction à l'étude des Systèmes Gyroscopiques /1

Tome I

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Licencié en Sciences mathématiques

par

André HARDY
Jules SOLOT

Promotrice : Madame G. PLOTNIKOVA

INTRODUCTION

Le fonctionnement de très nombreux dispositifs mécaniques, électriques et autres est décrit par un système d'équations différentielles; le pendule en est un exemple. Souvent, un mouvement stable (le sens doit être précisé) intéressera davantage l'utilisateur. Ainsi, la position du pendule au repos est stable : pour toute perturbation le pendule reste dans un voisinage de la position initiale.

La continuité par rapport aux conditions initiales signale que deux solutions voisines au départ restent proches pour un petit intervalle de temps. Cependant, elles peuvent s'écarter indéfiniment quand $t \longrightarrow \infty$.

Liapounov proposa deux méthodes pour étudier la stabilité : la première présuppose connue une solution et est basée sur l'analyse des valeurs propres de la matrice du système normal associé.
La seconde, appelée méthode directe, ne requiert pas la connaissance d'une solution; elle exige la construction d'une fonction de Liapounov.

Dans ce travail, nous abordons quelques questions relatives à la stabilité de mouvements.

Nous considérons trois types de forces, à savoir les forces potentielle, gyroscopique, dissipative.

Notre étude se divise en deux parties; la première regroupe les quatre premiers chapitres.

Au chapitre 1, nous présentons le concept de force gyroscopique en nous basant sur les travaux classiques de Thomson et Tait (1879). Nous analysons plusieurs types de systèmes pour lesquels ces forces apparaissent. Plusieurs exemples illustrent les résultats développés.

Dans le chapitre 2, nous étudions la stabilité d'un système soumis à l'action de forces gyroscopiques, et ensuite, gyroscopiques et dissipatives. Nous considérons aussi des systèmes soumis à des forces potentielles sur lesquels agissent soit des forces gyroscopiques, soit des forces dissipatives, soit des forces gyroscopiques et dissipatives ensemble. Une question importante envisagée ici concerne la stabilisation d'une position instable.

Le chapitre 3 envisage les équations "simplifiées". En général, le mouvement est décrit par des équations différentielles du second ordre. Parfois, on peut simplifier ces équations et se ramener à des équations du premier ordre. Ces dernières sont appelées équations simplifiées ou équations de précession. Cependant, les résultats tirés de ces dernières sont souvent non admissibles.

Nous définissons d'abord les équations de précession et précisons le sens du mot "admissible". Ensuite, en suivant le schéma du chapitre 2, nous énonçons des critères d'admissibilité des solutions des équations de précession et analysons les questions de stabilité à partir de celles-ci. Ce chapitre est basé sur l'ouvrage de Merkine [9]

L'étude développée dans le chapitre 4 ne s'inscrit pas directement dans la ligne des précédents.

En effet, l'étude de la stabilité du gyroscope dans la suspension de Cardan soumis à des forces dissipatives du type Coulomb agissant sur l'axe de l'anneau intérieur (chapitre 5) ne peut se faire à partir des équations de précession.
Nous utilisons ici la méthode directe de Liapounov.
Ce quatrième chapitre s'inspire d'un article de G.K. Pozharitskii qui décrit une méthode de construction d'une fonction de Liapounov sur base d'intégrales premières.

Dans le chapitre 5, nous analysons aussi la stabilité du gyroscope dans la suspension de Cardan sur lequel n'agit aucune force dissipative.

Tous les résultats signalés sont valides pour des systèmes linéaires. Certains s'appliquent également à des systèmes non linéaires; nous les avons indiqués.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : FORCES GYROSCOPIQUES 1

§ 1 - 1 : Définition et structure des forces gyroscopiques 2

§ 1 - 2 : Présence des forces gyroscopiques dans les systèmes contenant des coordonnées cycliques 8

§ 1 - 3 : Présence des forces gyroscopiques dans les systèmes rhéonômes 24

§ 1 - 4 : Présence des forces gyroscopiques dans les équations différentielles du mouvement perturbé 30

CHAPITRE 2 : ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME SOUMIS A L'ACTION DE FORCES GYROSCOPIQUES, DISSIPATIVES ET POTENTIELLES 37

§ 2 - 1 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système soumis à l'action de forces gyroscopiques 39

§ 2 - 2 : Influence des forces dissipatives sur la stabilité d'un système soumis à des forces gyroscopiques 49

§ 2 - 3 : Influence des forces gyroscopiques et dissipatives sur la stabilité du mouvement d'un système soumis à des forces potentielles 56

CHAPITRE 3 : STABILITE A PARTIR DES EQUATIONS SIMPLIFIEES .. 78

§ 3 - 1 : Introduction des équations simplifiées ... 79

§ 3 - 2 : Admissibilité des solutions des équations simplifiées 82

§ 3 - 3 : Condition nécessaire d'admissibilité des solutions des équations de précession 84

§ 3 - 4 : Condition d'admissibilité des solutions des équations de précession pour les systèmes linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques 86

§ 3 - 5 : Condition d'admissibilité des solutions des équations de précession pour les systèmes linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques et dissipatives dont la dissipation est complète..... 89

§ 3 - 6 : Conditions suffisantes et conditions nécessaires de stabilité des équations de précession associées à un système potentiel 95

§ 3 - 7 : Condition d'admissibilité des solutions des équations de précession pour les systèmes potentiels linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques 100

CHAPITRE 4 : ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME A PARTIR DE SES INTEGRALES PREMIERES 111

§ 4 - 1 : Introduction au problème 111

§ 4 - 2 : La méthode de Chetaev 113

§ 4 - 3 : Théorèmes fondamentaux 114

§ 4 - 4 : Etude d'un cas particulier 118

§ 4 - 5 : Comparaison des méthodes de Chetaev et Pozharatskii 132

CHAPITRE 5 : ETUDE DU GYROSCOPE DANS LA SUSPENSION DE CARDAN 145

§ 5 - 1 : Description sommaire de l'appareil 146

§ 5 - 2 : Utilité du gyroscope 148

§ 5 - 3 : Introduction de repères 149

§ 5 - 4 : Recherche de l'énergie cinétique 151

§ 5 - 5 : Etude du gyroscope libre 153

§ 5 - 6 : Etude du gyroscope non libre 164

§ 5 - 7 : Stabilisation du gyroscope non libre par des forces dissipatives 175

APPENDICES

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

C H A P I T R E 1

F O R C E S G Y R O S C O P I Q U E S

Chapitre I : FORCES GYROSCOPIQUES.

Dans ce premier chapitre, nous introduirons les forces gyroscopiques et nous montrerons que certaines forces, apparaissant dans les systèmes contenant des coordonnées cycliques, dans les systèmes rhéonômes et dans les équations différentielles du mouvement perturbé, peuvent être interprétées comme des forces gyroscopiques.

De nombreux exemples illustreront les résultats obtenus.

§ 1 - 1 : Définition et structure des forces gyroscopiques.

1. Définition [1]

. On appelle "force gyroscopique" une force dont le travail sur les déplacements réels est nul.

Soient donc $M_1, \ldots, M_n$ n points matériels repérés par les vecteurs positions $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ et $\vec{\Gamma}_1, \ldots, \vec{\Gamma}_n$ des forces agissant sur ces n points.

Le travail de ces forces sur les déplacements réels $\vec{dr}_1, \ldots, \vec{dr}_n$ est :

$$\vec{\Gamma}_1 \vec{dr}_1 + \vec{\Gamma}_2 \vec{dr}_2 + \ldots + \vec{\Gamma}_n \vec{dr}_n$$

ou sous forme vectorielle :

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{dr}$$

où
$$\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\Gamma}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\Gamma}_n \end{pmatrix} \qquad \vec{dr} = \begin{pmatrix} \vec{dr}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{dr}_n \end{pmatrix}$$

Les forces $\vec{\Gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont des forces gyroscopiques ssi

$$\boxed{\vec{\Gamma} \cdot \vec{dr} = o} \qquad (1 - 1 - 1)$$

. On peut formuler la définition d'une autre façon ;

soit $\vec{v}_k = \dfrac{\vec{dr}_k}{dt}$ $(k = 1, \ldots, n)$ la vitesse du point M_k.

En divisant l'égalité (1 - 1 - 1) par dt nous obtenons :

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{v} = o \quad \text{où} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{v}}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\vec{v}}_n \end{pmatrix} \qquad (1 - 1 - 2)$$

donc

les forces $\vec{\Gamma}_i$ ($i = 1, ..., n$) sont des forces gyroscopiques ssi la somme des puissances de ces forces est nulle.

2. Structure des forces gyroscopiques.

. Soient $q_1, ..., q_s$ les coordonnées généralisées d'un système mécanique et Γ_i ($i = 1, ..., s$) des forces gyroscopiques agissant sur lui.
En général, on a : $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(q_j, \dot{q}_j, t)$

Montrons que les forces gyroscopiques dépendent bien des vitesses $\dot{q}$
en effet, dans la relation

$$\Gamma_1 \dot{q}_1 + ... + \Gamma_s \dot{q}_s = o \qquad (1 - 1 - 3)$$

les vitesses $\dot{q}_i$ ($i = 1, ..., s$) sont linéairement indépendantes.

si $\vec{\Gamma} \neq \vec{\Gamma}(\dot{q})$, pour que l'équation (1 - 1 - 3) soit vérifiée, il faut que $\vec{\Gamma} = \vec{o}$
Donc les forces gyroscopiques dépendent généralement des vitesses.

Dans tout ce travail nous supposerons que les forces gyroscopiques dépendent <u>linéairement</u> des vitesses, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= g_{11}\dot{q}_1 + g_{12}\dot{q}_2 + \dots + g_{1s}\dot{q}_s \\
\Gamma_2 &= g_{21}\dot{q}_1 + g_{22}\dot{q}_2 + \dots + g_{2s}\dot{q}_s \\
&\vdots \\
\Gamma_s &= g_{s1}\dot{q}_1 + g_{s2}\dot{q}_2 + \dots + g_{ss}\dot{q}_s
\end{aligned} \qquad (1 - 1 - 4)$$

où

$$g_{ij} = g_{ij}\ (q,\ t)$$

Les coefficients g_{ij} sont appelés "coefficients gyroscopiques" et la matrice G formée de ces derniers "matrice gyroscopique".

Sous forme matricielle les égalités (1 - 1 - 4) s'écrivent :

$$\vec{\Gamma} = G\vec{\dot{q}} \quad \text{où} \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \dots & g_{1s} \\ \vdots & & \\ g_{s1} & g_{s2} \dots & g_{ss} \end{pmatrix} \qquad (1 - 1 - 5)$$

. Propriété.

> Les forces Γ_i $(i = 1, \dots, s)$ sont des forces gyroscopiques ssi les coefficients g_{ij} vérifient les relations d'antisymétrie :
>
> $$\begin{aligned} g_{ii} &= 0 \quad (i = 1, \dots, s) \\ g_{ij} &= -g_{ji} \quad (i = 1, \dots, s;\ j = 1, \dots, s;\ i \neq j) \end{aligned}$$

démonstration :

a) condition nécessaire.

Dans les expressions (1 - 1 - 4), multiplions Γ_i par $\dot{q}_i$

et sommons :

$$\Gamma_1\dot{q}_1 + \Gamma_2\dot{q}_2 + \dots + \Gamma_s\dot{q}_s = g_{11}\dot{q}_1^2 + g_{22}\dot{q}_2^2 + \dots +$$

$$+ g_{ss}\dot{q}_s^2 + (g_{12} + g_{21})\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + (g_{13} + g_{31})\,\dot{q}_1\dot{q}_3 +$$

$$+ \dots + (g_{s-1,s} + g_{s,s-1})\,\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s$$

(1 - 1 - 6)

Le membre de gauche de cette équation est nul.

Nous avons donc :

$$g_{11}\dot{q}_1^2 + \dots + g_{ss}\dot{q}_s^2 + (g_{12} + g_{21})\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots +$$

$$+ (g_{s-1,s} + g_{s,s-1})\,\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s = 0$$

(1 - 1 - 7)

Cette égalité doit être vérifiée quelles que soient les vitesses généralisées $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$.

Considérons quelques cas particuliers

- soit $\dot{q}_1 \neq 0 \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dots = \dot{q}_s = 0$

  la relation (1 - 1 - 7) devient : $g_{11}\dot{q}_1^2 = 0$

  elle est vérifiée si $g_{11} = 0$

  de façon analogue on montre :

  $$g_{11} = g_{22} = \dots = g_{ss} = 0 \qquad (1 - 1 - 8)$$

- soit $\dot{q}_1 \neq 0 \quad \dot{q}_2 \neq 0 \quad \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = \dots = \dot{q}_s = 0$

  la relation (1 - 1 - 7) devient :

  $(g_{12} + g_{21})\,\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0$

  elle est vérifiée si $g_{12} = -g_{21}$

  de façon analogue on montre :

  $$g_{kj} = -g_{jk} \quad \forall j, k \quad j \neq k \qquad (1 - 1 - 9)$$

  Les formules (1 - 1 - 8) et (1 - 1 - 9) démontrent la condition nécessaire.

b) condition suffisante.

supposons que les coefficients g_{ij} vérifient les relations d'antisymétrie :

$$g_{ii} = 0 \quad \forall i$$

$$g_{kj} = - g_{jk} \quad \forall j, k \quad j \neq k.$$

dans ce cas l'égalité (1 - 1 - 6) devient :

$$\Gamma_1 \dot{q}_1 + \dots + \Gamma_s \dot{q}_s = 0$$

par définition les forces Γ_i $(i = 1, \dots, s)$ sont des forces gyroscopiques.

Ceci achève la démonstration de la propriété.

. <u>Conséquence</u> :

la matrice G s'écrit :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & \dots & g_{1s} \\ -g_{12} & 0 & \dots & g_{2s} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ -g_{1s} & -g_{2s} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice antisymétrique.

Notons par $|G|$ son déterminant

par une propriété d'algèbre [2], on a

$$|G| \geqslant 0$$

$$|G| = 0 \quad \text{si } s \text{ est impair.}$$

Nous allons illustrer ces notions par un exemple.

3. Exemple.

Considérons le mouvement relatif d'un point.
Nous allons montrer que la force de coriolis d'inertie $\vec{J}_c$ est une force gyroscopique.

La force $\vec{J}_c$ est donnée par la formule [3]

$$\vec{J}_c = 2\,m\,\vec{v}_r \times \vec{w}$$

où $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires dirigés respectivement le long des axes mobiles x, y, z, on a :

$$\vec{J}_c = 2m \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les projections du vecteur $\vec{J}_c$ sur les axes x, y, z

on a :

$$\Gamma_1 = \qquad 2\,m\,w_z\,\dot{y} - 2\,m\,w_y\,\dot{z}$$

$$\Gamma_2 = -\,2\,m\,w_z\,\dot{x} \qquad + 2\,m\,w_x\,\dot{z}$$

$$\Gamma_3 = 2\,m\,w_y\,\dot{x} - 2\,m\,w_x\,\dot{y}$$

- les forces Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ dépendent linéairement des vitesses
- la matrice des coefficients de ces vitesses est antisymétrique

donc la force $\vec{J}_c$ est bien une force gyroscopique.

§ 1 - 2 : Présence de forces gyroscopiques dans les systèmes contenant des coordonnées cycliques.

Nous allons voir dans ce paragraphe que les équations du mouvement d'un système contenant des coordonnées cycliques peuvent être trasnformées en une forme qui fait apparaître des forces gyroscopiques. Nous en déduirons un théorème important, celui de Thomson. [1]

Nous noterons par $p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées cycliques et par $q_1, \ldots, q_s$ les coordonnées non cycliques ou déterminantes.

1. Equations du mouvement et fonction de Routh.

. Considérons un système scléronôme.

Dans ce cas on peut grouper les termes de l'énergie cinétique de la façon suivante [3] :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} b_{kj} \dot{q}_j \dot{p}_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \dot{p}_k \dot{p}_j \qquad (1 - 2 - 1)$$

où a_{kj}, b_{kj}, c_{kj} ne dépendent que de $q_1, \ldots, q_s$ en effet, par définition, T ne peut contenir les coordonnées cycliques $p_1, \ldots, p_n$

Montrons que le premier et le troisième terme de T sont des formes quadratiques définies positives.

Pour cela considérons par exemple

$$\phi(\dot{p}, \dot{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \dot{p}_k \dot{p}_j \qquad (1 - 2 - 2)$$

supposons qu'il existe $\dot{p}'_k$ $(k = 1, \ldots, n)$

tels que $\phi(\dot{p}', \dot{p}') \leq 0$

et posons $\dot{q}_j = \dot{q}'_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$

$\dot{p}_k = \dot{p}'_k \quad (k = 1, \ldots, n)$

dans ce cas :

$$T(\dot{q}'; \dot{p}') = \phi(\dot{p}'; \dot{p}') \leq 0$$

ce qui est absurde.

Une démonstration identique peut être faite pour la première forme quadratique.

. Analysons maintenant en détail la présence de coordonnées cycliques dans un tel système; on obtient les résultats suivants (appendice 1 - 2)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \qquad (1 - 2 - 3)$$

$$(j = 1, \ldots, s)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} \qquad (1 - 2 - 4)$$

où $R = T^* - \sum_{r=1}^{n} c_r \dot{p}_r$

La fonction R est appelée "fonction de Routh".

A l'aide de R les équations du mouvement pour les coordonnées déterminantes s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \ldots, s) \qquad (1 - 2 - 5)$$

Les mouvements dans les coordonnées cycliques sont donnés par la formule :

$$p_r = p_{ro} - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial R}{\partial c_r}\, dt \quad (r = 1, \ldots, n)$$

2. Structure de la fonction de Routh.

En transformant la fonction R nous allons faire apparaître dans les équations du mouvement (1 - 2 - 5) des forces gyroscopiques.

En reportant (A - 1 - 2) dans (1 - 2 - 1) on obtient :

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_j \; +$$

$$\frac{1}{|C|} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} b_{kj}\, \dot{q}_j \sum_{m=1}^{n} C_{mk} \left(c_m - \sum_{h=1}^{s} b_{mh}\, \dot{q}_h\right)$$

$$+ \frac{1}{2|C|^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \sum_{m=1}^{n} C_{mk} \left(c_m - \sum_{h=1}^{s} b_{mh}\, \dot{q}_k\right) .$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} \left(c_i - \sum_{r=1}^{s} b_{ir}\, \dot{q}_r\right)$$

changeons ~~les index des sommes~~ :

dans le 2$^{\text{ème}}$ terme, remplaçons h par k et k par h

dans le 3$^{\text{ème}}$ terme, remplaçons k par h et h par k

r par j et j par r

nous obtenons :

$$T^{*} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \left(a_{kj} - \frac{2}{|C|} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, b_{mk} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|C|^2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{mk}\, b_{ij} \sum_{h=1}^{r} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir} \right) \dot{q}_k\, \dot{q}_j$$

$$+ \frac{1}{2|C|^2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_m\, c_i \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir} +$$

$$\frac{1}{|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, \dot{q}_j\, c_m$$

$$- \frac{1}{2|C|^2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, \dot{q}_j\, c_m \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir}$$

$$- \frac{1}{2|C|^2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} b_{mk}\, \dot{q}_k\, c_i \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir}$$

or

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir} = \sum_{h=1}^{n} C_{mh} \left(c_{h1}\, C_{i1} + c_{h2}\, C_{i2} = \right.$$

$$\left. \dots + c_{hn}\, C_{in} \right)$$

$$= |C|\, C_{mi}$$

on a aussi

$$.) \; \frac{1}{|C|^2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{mk}\, b_{ij} \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir}$$

$$= \frac{1}{|C|^2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{mk}\, b_{ij}\, |C|\, C_{mi}$$

$$= \frac{1}{|C|} \sum_{m=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} b_{mk}\, b_{hj}\, C_{mh}$$

$$.) \frac{1}{|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, c_m\, \dot{q}_j$$

$$- \frac{1}{2|C|^2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, \dot{q}_j\, c_m \sum_{h=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh} C_{ir}$$

$$- \frac{1}{2|C|^2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{mk}\, c_i\, \dot{q}_k \sum_{h=1}^{r} \sum_{r=1}^{n} c_{hr}\, C_{mh}\, C_{ir}$$

$$= \frac{1}{|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, c_m\, \dot{q}_j$$

$$- \frac{1}{2|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, \dot{q}_j\, c_m\, C_{mi}$$

$$- \frac{1}{2|C|} \sum_{k=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{mk}\, \dot{q}_k\, c_i\, C_{mi}$$

$$= \frac{1}{|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, c_m\, \dot{q}_j$$

$$- \frac{1}{2|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, c_m\, \dot{q}_j$$

$$- \frac{1}{2|C|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{hm}\, b_{hj}\, c_m\, \dot{q}_j$$

$$= 0$$

car les mineurs sont symétriques c'est-à-dire

$$C_{mh} = C_{hm}$$

d'où nous avons :

$$T^{*} = R_2 - R_o$$

avec

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \left(a_{kj} - \frac{1}{|C|} \sum_{h=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mh}\, b_{hj}\, b_{mk}\right) \dot{q}_k\, \dot{q}_j$$

$$(1 - 2 - 7)$$

$$R_o = - \frac{1}{2\,|C|} \sum_{m=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} C_{mh}\, c_m\, c_h$$

Remarques :

R_2 est une forme quadratique des vitesses non cycliques $\dot{q}_i$

T^{*} ne contient pas de termes linéaires en $\dot{q}_i$

$- R_o$ est une forme quadratique des constantes d'intégration c_i

R_2 et $- R_o$ sont definies positives par rapport aux $\dot{q}_i$ et c_i respectivement.

Ces développements nous donnent une forme intéressante pour T^{*} et donc pour R.

Grâce aux equations du mouvement exprimées à l'aide de la fonction de Routh R, nous allons mettre en évidence un système où interviennent les forces gyroscopiques.

Nous avons :

$$R = T^{*} - \sum_{r=1}^{n} c_r \dot{p}_r$$

$$= R_2 - R_o - \frac{1}{|C|} \sum_{r=1}^{n} c_r \sum_{m=1}^{n} C_{mr} (c_m - \sum_{h=1}^{s} b_{mh} \dot{q}_h)$$

$$= R_2 + \frac{1}{2|C|} \sum_{r=1}^{m} \sum_{m=1}^{n} C_{mr} \; c_m \, c_r$$

$$- \frac{1}{|C|} \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{mr} \, c_m \, c_r$$

$$+ \frac{1}{|C|} \sum_{h=1}^{s} \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} c_r \; C_{mr} \, b_{mh} \, \dot{q}_h$$

Donc $R = R_2 + R_1 + R_o$ (1 - 2 - 8)

où

$$R_1 = \sum_{k=1}^{s} a_k \dot{q}_k \qquad (1 - 2 - 9)$$

$$a_k = \frac{1}{|C|} \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} c_r \; C_{mr} \, b_{mk} \quad (k = 1, \ldots, s)$$

Transformons les équations du mouvement (1 - 2 - 5) en tenant compte de (1 - 2 - 8) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (R_2 + R_1 + R_o)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (R_2 + R_1 + R_o)}{\partial q_k} = Q_k$$

$$(k = 1, \ldots, s)$$

(1 - 2 -10)

En notant $\Gamma_k = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k}\right)$ et en remarquant

que

$\frac{\partial R_o}{\partial \dot{q}_k} = o \quad (k = 1, \ldots, s)$, nous pouvons ecrire :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = Q_k \quad \frac{\partial R_o}{\partial q_k} + \Gamma_k \quad (k = 1, \ldots, s)}$$

(1 - 2 -11)

<u>Interprétation de ce résultat :</u>

Comme R_2 est une forme quadratique définie positive des vitesses $\dot{q}_k$ = $(k = 1, \ldots, s)$, les équations (1 - 2 -11) Peuvent être interprétées comme les équations différentielles du mouvement d'un système réduit dont l'énergie cinétique est R_2.

Les forces généralisées comprennent trois termes :

Q_k , $\frac{\partial R_o}{\partial q_k}$, Γ_k

.) Q_k est la force généralisée correspondant au système initial.

.) - R_o peut être interprété comme une énergie potentielle.
Les forces conservatives $B_k = \frac{\partial R_o}{\partial q_k}$ sont

appelées des forces centrifuges généralisées.

L'exemple qui termine ce paragraphe illustre bien ce fait.

.) montrons que les forces Γ_k sont des forces gyroscopiques. En utilisant les formules (1- 2 - 9) on obtient successivement :

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{k=1}^{s} a_k \dot{q}_k = a_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^{s} a_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_j$$

d'où

$$\Gamma_k = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$\Gamma_k = \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j$$

avec

$$g_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j}$$

Les forces Γ_k dépendent linéairement des vitesses.

La matrice G est antisymétrique.

Donc on a bien des forces gyroscopiques.

Conclusion :

si les équations du mouvement d'un système contiennent des coordonnées cycliques, elles peuvent être transformées sous la forme (1 - 2-11) avec

- les forces gyroscopiques Γ_k
- les forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle $- R_o$
- les forces généralisées Q_k
- l'énergie cinétique R_2

Cas particulier.

- Il peut arriver que le système (1 - 2-11) ne contienne pas de forces gyroscopiques.

En effet, si le second terme de l'expression de l'énergie cinétique (1 - 2 - 1) est nul, R_1 sera nul et par le fait même les forces Γ_k (k = 1, ..., s) seront aussi nulles. Dans ce cas, on dit que le système n'est pas lié gyroscopiquement et les équations (1 - 2 -11) prennent la forme :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = Q_k + \frac{\partial R_o}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{1 - 2 -12}$$

- Si en plus on suppose que le système se meut par inertie, c'est-à-dire $Q_k = 0$ (k = 1, ..., s) les équations (1 - 2 -12) deviennent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{\partial R_o}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{1 - 2 -13}$$

Dans le cas où le système n'est pas lié gyroscopiquement, R_2 est l'énergie cinétique des mouvements explicites q_k (c'est-à-dire le mouvement par rapport aux coordonnées explicites).

On a aussi que $-R_o$ est l'énergie cinétique des mouvements cachés p_k

en effet, $R_o = -\frac{1}{2|C|}\sum_{m=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} C_{mh}\, c_m\, c_h$

par l'équation (1 - 2 - 2) on a :

$$c_h = \sum_{j=1}^{s} b_{hj}\,\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{hj}\,\dot{p}_j$$

$$c_h = \sum_{j=1}^{s} c_{hj}\,\dot{p}_j$$

$$c_m = \sum_{k=1}^{s} c_{mk}\,\dot{p}_k$$

$$R_o = -\frac{1}{2|C|}\sum_{m=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} C_{mh}\left(\sum_{k=1}^{s} c_{mk}\,\dot{p}_k\right)\left(\sum_{j=1}^{s} c_{hj}\,\dot{p}_j\right)$$

$$R_o = -\frac{1}{2|C|}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \dot{p}_k\,\dot{p}_j\left(\sum_{h=1}\left(\sum_{m=1} C_{mh}\,c_{hj}\right)c_{hk}\right)$$

$$\sum_{m=1}^{n} C_{mh}\,c_{hj} = 0 \quad \text{si } h \neq j$$

$$= |C| \quad \text{si } h = j$$

$$R_o = -\frac{1}{2|C|}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{jk}\; C\;\dot{p}_k\,\dot{p}_j$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} - R_o &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{jk} \dot{p}_k \dot{p}_j \\ R_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}}$$

Rappelons les équations ordinaires du mouvement d'un système dont l'énergie potentielle est V et l'énergie cinétique est T.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

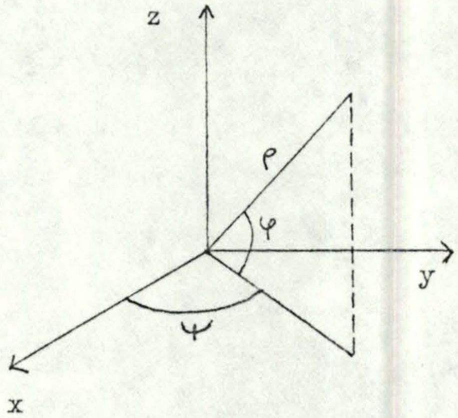
Remarquons l'analogie de cette équation avec (1 - 2 -13). On en déduit un théorème fondamental, celui de Thomson [1]

Théorème de Thomson.

> Si un système n'est pas lié de façon gyroscopique et se meut par inertie, il peut être interprété comme un système soumis à l'action de forces conservatrices dont l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique des mouvements cachés.
> L'énergie cinétique de ce système est l'énergie cinétique des mouvements explicites.

En vertu de ce théorème, toute l'énergie potentielle peut être considérée, dans ce cas, comme l'énergie cinétique de certains mouvements cachés non observables.
Cette idée appartient à Hertz [5]
Les résultats de ce paragraphe sont importants.
Voici un exemple simple les illustrant.

3. Exemple. Mouvement d'un point matériel dans un système de coordonnées sphériques.



Supposons que le point matériel est bien déterminé par les coordonnées sphériques ρ, ψ, φ

Les coordonnées cartésiennes sont déterminées par les formules :

$$x = \rho \cos\varphi \cos\psi$$

$$y = \rho \cos\varphi \sin\psi$$

$$z = \rho \sin\varphi$$

En considérant ρ, φ, ψ comme fonction du temps, l'énergie cinétique s'écrit [4]

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\cos^2\varphi\right) \qquad (1-2-14)$$

Si la force généralisée correspondant à la coordonnée ψ est nulle, alors par définition, ψ est une coordonnée cyclique. Dans ce cas, elle peut être éliminée des équations de mouvement par la fonction de Routh.

Remarque.

On peut dire à l'avance que les équations du mouvement pour les coordonnées ρ et φ ne feront pas apparaître de forces gyroscopiques.

En effet, l'expression de l'énergie cinétique ne contient pas de termes produit des vitesses $\dot{\rho}$ et $\dot{\varphi}$.

On a l'intégrale première

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = C \qquad C \text{ est une constante.}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m\rho^2 \cos^2\varphi \ \dot{\psi} = C$$

d'où $\dot{\psi} = \dfrac{C}{m\rho^2 \cos^2\varphi}$

$$T^* = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \frac{C^2}{m\rho^2\cos^2\varphi}$$

c'est-à-dire

$$T^* = R_2 - R_o$$

où $R_2 = \dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$

$$R_o = -\frac{1}{2}\frac{C^2}{m\rho^2\cos^2\varphi}$$

En vertu de (1 - 2 - 8) où $R_1 = 0$ nous pouvons écrire :

$$R = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}\frac{C^2}{m\rho^2\cos^2\varphi}$$

Les équations (1 - 2 -11) nous donnent les équations du mouvement pour les coordonnées ρ et φ

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{C^2}{m\rho^3\cos^2\varphi} = Q_\rho$$

$$m\rho^2\ddot{\varphi} - 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \frac{C^2\sin\varphi}{m\rho^2\cos^3\varphi} = Q_\varphi$$

où Q_ρ et Q_φ sont les forces généralisées correspondant respectivement aux coordonnées non cycliques ρ et φ.

<u>Si le point se meut dans un plan</u>, les coordonnées sphériques deviennent des coordonnées polaires.

On a : $\psi = 0$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

si la force généralisée correspondant à la coordonnée φ est nulle (c'est le cas des forces centrales [4]) alors φ sera une coordonnée cyclique et on aura l'intégrale suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} = C \qquad C = \text{constante.}$$

C'est l'intégrale des aires [4]

On a successivement :

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{m\rho^2}$$

$$T^* = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{m\rho^2}$$

$$R_2 = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2$$

$$R_o = -\frac{1}{2}\frac{C^2}{m\rho^2}$$

$$R = R_2 + R_o$$

$$R_1 = 0$$

d'où $R = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}\frac{C^2}{m\rho^2}$

L'équation du mouvement pour la coordonnée ρ est donnée par :

$$m\ddot{\rho} - \frac{C^2}{m\rho^3} = Q_\rho$$

ou

$$\boxed{m\ddot{\rho} = Q_\rho + \frac{\partial R_o}{\partial \varphi}} \qquad (1 - 2 - 15)$$

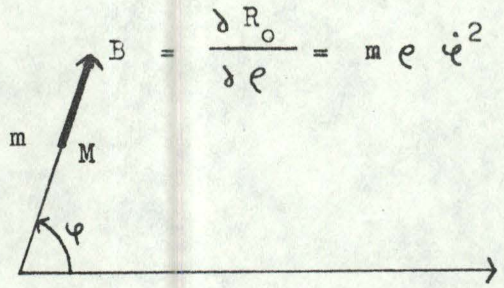
Interprétation :

(1 - 2 -15) représente l'équation du mouvement d'un point sur une droite (suivant le rayon vecteur ρ)

La force $B = \frac{\partial R_o}{\partial \rho} = \frac{C^2}{m \rho^3}$ est dirigée le long du rayon vecteur et tend à éloigner le point M du point O appelé pôle.

B est donc une force centrifuge habituelle

Q_ρ est une force généralisée.



§ 1 - 3 : Présence des forces gyroscopiques dans les systèmes rhéonômes.

Considérons un système de n points matériels dont le mouvement est soumis à des liaisons holonômes.
Les équations de liaison s'écrivent :

$$f_r\,(x_i,\, y_i,\, z_i,\, t) = o \qquad \begin{array}{l}(r = 1, \ldots, h)\\(i = 1, \ldots, n)\end{array}$$

Si la position du système est bien déterminée par $3n$ coordonnées, le nombre de coordonnées généralisées est $s = 3n - h$.

On peut donc exprimer x_i, y_i, z_i $(i = 1, \ldots, n)$ de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{l} x_i = x_i\,(q_1, \ldots, q_s, t)\\ y_i = y_i\,(q_1, \ldots, q_s, t)\\ z_i = z_i\,(q_1, \ldots, q_s, t)\end{array}\right. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

On en déduit :

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

L'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

s'écrit

$$\boxed{T = T_2 + T_1 + T_o}$$

où $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$

$$T_1 = \sum_{k=1}^{s} a_k \dot{q}_k$$

$$T_o = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2 \right)$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)$$

Conséquence :

Dans un système scléronôme : $T_1 = T_o = 0$

dans ce cas $T = T_2$

par conséquent T_2 est définie positive.

Les équations du mouvement d'un système rhéonôme s'écrivent :

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k + \frac{\partial T_o}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j - \frac{\partial a_k}{\partial t} \qquad (k = 1, \ldots, s) \\ \hfill (1-3-1) \\ \text{où } g_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \end{gathered}}$$

où $\sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j$ sont des forces gyroscopiques.

Conclusion :

Dans le cas général, nous voyons que les équations différentielles du mouvement d'un système rhéonôme contiennent des forces gyroscopiques linéaires.

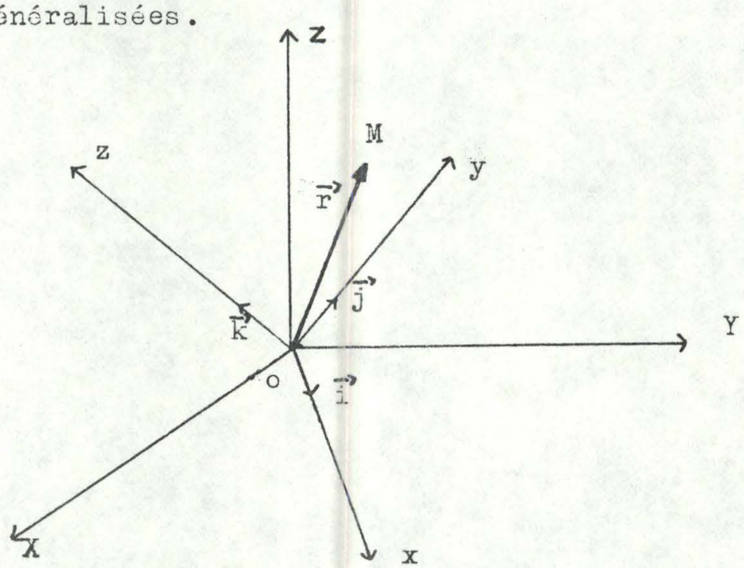
Les forces $B_k = \frac{\partial T_c}{\partial q_k}$ (k = 1, ..., s) sont aussi appelées "forces centrifuges généralisées".

Les équations (1 - 3 - 1) se distinguent des équations (1 - 2 -11) par les termes

$$- \frac{\partial a_k}{\partial t} \quad (k = 1, \ldots, s).$$

Exemple : <u>Mouvement relatif d'un point.</u>

Nous allons montrer que certains termes apparaissant dans les équations du mouvement relatif d'un point peuvent être interprétés comme des forces gyroscopiques ou des forces centrifuges généralisées.



Soient O, X, Y, Z un repère absolu d'origine O, fixe dans l'espace et O, x, y, z un autre repère, de même origine O, tournant par rapport au premier à la vitesse constante $\vec{w}$.

$\vec{r}$ est le vecteur position de l'objet M et m sa masse.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ représentent des vecteurs unitaires suivant les axes x, y, z respectivement.

Soit $\vec{v}_r$ la vitesse relative de M.

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

où $\vec{v}_e = \vec{w} \times \vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}\,(x, y, z)$$

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}.\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, (\vec{v}_r^{\,2} + 2\, \vec{v}_r\, \vec{v}_e + \vec{v}_e^{\,2})$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m \Big((w_y z - w_z y)\, \dot{x} + (w_z x - w_x z)\, \dot{y} +$$

$$(w_x y - w_y x) \dot{z} \Big) + \frac{1}{2} m \Big((w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2 \Big)$$

T peut donc être mis sous la forme $T = T_2 + T_1 + T_o$

où $$T_2 = \frac{1}{2} m \; (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T_1 = m \Big((w_y z - w_z y)\, \dot{x} + (w_z x - w_x z)\, \dot{y} + (w_x y - w_y x)\, \dot{z} \Big)$$

$$T_o = \frac{1}{2} m \Big((w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2 \Big)$$

Nous tirons des équations (1 - 3 - 1) :

$$m \ddot{x} = X + \frac{\partial T_o}{\partial x} + 2 m w_z \dot{y} - 2 m w_y \dot{z}$$

$$m \ddot{y} = Y + \frac{\partial T_o}{\partial y} - 2 m w_z \dot{x} + 2 m w_x \dot{z}$$

$$m \ddot{z} = Z + \frac{\partial T_o}{\partial z} + 2 m w_y \dot{x} - 2 m w_x \dot{y}$$

où X, Y, Z sont les forces généralisées.

On a :

$$\Gamma_x = \quad 2 m w_z \dot{y} - 2 m w_y \dot{z}$$

$$\Gamma_y = -2 m w_z \dot{x} + 2 m w_x \dot{z}$$

$$\Gamma_z = 2 m w_y \dot{x} - 2 m w_x \dot{y}$$

Ces forces dépendent linéairement des vitesses et la matrice des coefficients de ces dernières est antisymétrique.

On se trouve donc en présence de forces gyroscopiques.

Montrons à présent que la force $\vec{B}$ dont les composantes sont $\frac{\partial T_o}{\partial x}$, $\frac{\partial T_o}{\partial y}$, $\frac{\partial T_o}{\partial z}$ est une force centrifuge.

$$\frac{\partial T_o}{\partial x} = m\,(w_z\,w_z\,x - w_x\,w_z\,z - w_x\,w_y\,y + w_y\,w_y\,x + w_x\,w_x\,x - w_x\,w_x\,x)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial x} = m\,(w^2\,x - (\vec{w}.\vec{r})\,w_x)$$

de même

$$\frac{\partial T_o}{\partial y} = m\,(w^2\,z - (\vec{w}.\vec{r})\,w_y)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial z} = m\,(w^2\,z - (\vec{w}.\vec{r})\,w_z)$$

$$\vec{B} = \frac{\partial T_o}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial T_o}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial T_o}{\partial z}\,\vec{k}$$

$$\vec{B} = m\,(w^2\,\vec{r} - (\vec{w}.\vec{r})\,\vec{w})$$

posons $\vec{w}^o = \dfrac{\vec{w}}{w}$

on a : $\vec{B} = mw^2\,(\vec{r} - (\vec{w}^o.\vec{r})\,\vec{w}^o)$

$$\vec{w}^o.\vec{r} = \|\vec{w}^o\|\,.\,\|\vec{r}\|\,\cos\alpha$$
$$= r.\cos\alpha$$
$$= ON$$

$(\vec{w}^o.\vec{r})\,\vec{w}^o = \overline{ON}$

$\vec{r} - (\vec{w}^o.\vec{r})\,\vec{w}^o = \overline{NM}$

$B = mw^2\,\overline{NM}$

$|B| = mw^2\rho$

B est donc bien une force centrifuge [4]

§ 1 - 4 : Présence de forces gyroscopiques dans les équations différentielles du mouvement perturbé.

Soient $q_1, \ldots, q_s$ les coordonnées généralisées d'un système scléronôme.

Son énergie cinétique s'écrit [3] :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

où les coefficients a_{kj} ne dépendent pas explicitement du temps.

Ecrivons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (1 - 4 - 1)$$

Supposons que l'on veuille étudier la stabilité du mouvement par rapport aux coordonnées q_i ($i = 1, \ldots, s$) et aux vitesses $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, s$)

Soit $q_j = q_j (t)$ ($j = 1, \ldots, s$) une solution particulière des équations (1 - 4 - 1).
Pour obtenir les équations aux variations nous perturbons la solution $q_j (t)$ en $q_j = q_j (t) + x_j$ de sorte que q_j reste une solution de (1 - 4 - 1).

x_j est appelé "perturbation".

Nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T (\vec{q} + \vec{x}, \dot{\vec{q}} + \dot{\vec{x}})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T (\vec{q} + \vec{x}, \dot{\vec{q}} + \dot{\vec{x}})}{\partial q_k} = Q_k(t, \vec{q} + \vec{x}, \dot{\vec{q}} + \dot{\vec{x}})$$

$$(1 - 4 - 2)$$

où

$$T(\vec{q}+\vec{x},\dot{\vec{q}}+\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\sum_k \sum_j a_{kj}(q_1+x_1, \ldots, q_s+x_s)\cdot$$

$$\cdot(\dot{q}_k+\dot{x}_k)(\dot{q}_j+\dot{x}_j)$$

$$Q(t, \vec{q}+\vec{x},\dot{\vec{q}}+\dot{\vec{x}}) = Q(t, q_1+x_1, \ldots, q_s+x_s, \dot{q}_1+\dot{x}_1, \ldots, \dot{q}_s+\dot{x}_s)$$

En développant $a_{kj}(\vec{q}+\vec{x})$, $\dfrac{\partial a_{kj}(\vec{q}+\vec{x})}{\partial q_\alpha}$, $Q_k(t, \vec{q}+\vec{x},\dot{\vec{q}}+\dot{\vec{x}})$

en série par rapport à $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$ et en reportant ces valeurs dans l'équation (1 - 4 - 2) nous obtenons :

$$\sum_j a_{kj}(\vec{q})\,\ddot{q}_j + \sum_j \sum_\alpha \left(\frac{\partial a_{kj}(\vec{q})}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha j}(\vec{q})}{\partial q_k}\right)\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_j$$

$$+ \sum_j (a_{kj}\ddot{x}_j + b_{kj}\dot{x}_j + g_{kj}\dot{x}_j + c_{kj}x_j) = Q_k(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) + X_k \qquad (1 - 4 - 3)$$

où X_k représente les termes en $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$ de puissance supérieure à un.

$$a_{kj} = a_{kj}(\vec{q})$$

$$b_{kj} = \sum_\alpha \frac{\partial a_{kj}(\vec{q})}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha - \frac{\partial Q_k(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_j}$$

$$g_{kj} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial a_{k\alpha}(\vec{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{j\alpha}(\vec{q})}{\partial q_k}\right)\dot{q}_\alpha$$

$$c_{kj} = \sum_\beta \frac{\partial a_{k\beta}(\vec{q})}{\partial q_j}\ddot{q}_\beta + \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 a_{k\beta}(\vec{q})}{\partial q_\alpha \partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}(\vec{q})}{\partial q_k \partial q_j}\right)\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta)$$

$$- \frac{\partial Q_k(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_j}$$

Etablissons les équations du mouvement dans les coordonnées q_k

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_k} = Q_k(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

où Q_k $(k = 1, \ldots, s)$ sont les forces généralisées.

Etant donnée la forme particulière de T, les équations du mouvement dans les coordonnées q_k

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_k} = Q_k (t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

prennent la forme :

$$\sum_j a_{kj} (\vec{q})\, \ddot{q}_j + \sum_j \sum_\alpha \left(\frac{\partial a_{kj} (\vec{q})}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha j} (\vec{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_j = Q_k (t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

où Q_k $(k = 1, \ldots, s)$ sont les forces généralisées.

En vertu des équations (1 - 4 - 3) on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{s} (a_{kj} \ddot{x}_j + b_{kj} \dot{x}_j + g_{kj} \dot{x}_j + c_{kj} x_j) = X_k \qquad (k = 1, \ldots, s)}$$

(1 - 4 - 4)

ce sont les <u>équations aux variations ou équations du mouvement perturbé</u>.

Dans (1 - 4 - 4) considérons plus particulièrement le terme

$$\sum_j g_{kj} \dot{x}_j$$

Il peut être interprété comme une force dépendant linéairement des vitesses et dont les coefficients forment une matrice antisymétrique.

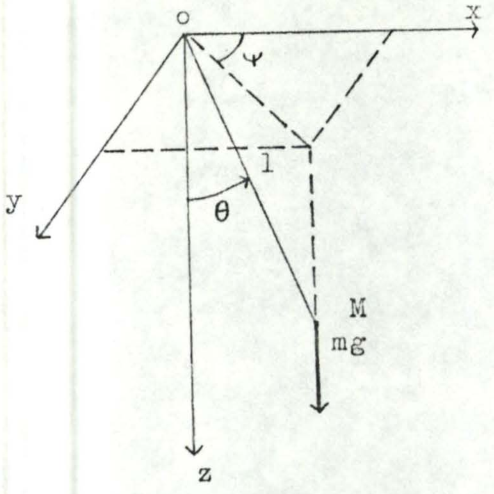
Il s'agit donc, par définition, d'une force gyroscopique.

Conclusion :

Les forces gyroscopiques apparaissent dans les équations aux variations.

Dans l'exemple suivant les équations du mouvement ne contiennent pas de forces gyroscopiques. Pourtant les équations aux variations les font apparaître.

Exemple : le pendule conique.



- Considérons tout d'abord le pendule sphérique.
L'objet M, attaché au bout d'un fil de longueur l, possède une masse m.

On a successivement :

$$x = l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos\psi = l \sin\theta \cos\psi$$
$$y = l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin\psi = l \sin\theta \sin\psi$$
$$z = l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\dot{x} = l\,\dot{\theta} \cos\theta \cos\psi - l\,\dot{\psi} \sin\theta \sin\psi$$
$$\dot{y} = l\,\dot{\theta} \cos\theta \sin\psi + l\,\dot{\psi} \sin\theta \cos\psi$$
$$\dot{z} = - l\,\dot{\theta} \sin\theta$$

$$T = \frac{ml^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta\right)$$

$$V = - m g l \cos\theta$$

En nous servant des équations de Lagrange, nous pouvons écrire les équations du mouvement :

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + mg\, l \cos\theta = 0$$
$$ml^2 \ddot{\psi} \sin^2\theta + 2\, ml^2 \dot{\psi} \sin\theta \cos\theta\, \dot{\theta} = 0$$

après avoir divisé par ml^2 nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\ &\ddot{\psi}\sin^2\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0 \end{aligned} \qquad (1-4-5)$$

si le point M a uniquement un mouvement dans un plan horizontal, on a un <u>pendule conique</u>.

Dans ce cas :

$$\theta = \alpha = \text{constante} \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\psi = \psi_0 + wt \qquad \dot{\psi} = w \qquad \ddot{\psi} = 0$$

et la seconde des équations $(1-4-5)$ devient une identité.

La première se transforme en

$$- w^2 \sin\alpha\cos\alpha + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$$

ou $\boxed{w^2 \cos\alpha = \frac{g}{l}}$

- Supposons que le mouvement du pendule subit une petite perturbation et cherchons les équations du mouvement perturbé par rapport aux coordonnées ψ, θ, $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$

Pour cela posons $\psi = \psi_0 + wt + x$

$$\theta = \alpha + y$$

Nous avons alors $\dot{\psi} = w + \dot{x} \qquad \dot{\theta} = \dot{y}$

$$\ddot{\psi} = \ddot{x} \qquad \ddot{\theta} = \ddot{y}$$

et les équations $(1-4-5)$ prennent la forme

$$\ddot{x} \sin^2 (\alpha + y) + 2 \dot{y} (\dot{x} + w) \sin (\alpha + y) \cos (\alpha + y) = 0$$

$$\ddot{y} - (w + \dot{x})^2 \sin (\alpha + y) \cos (\alpha + y) + \frac{g}{l} \sin (\alpha + y) = 0$$

$$(1 - 4 - 6)$$

Développons $\sin(\alpha + y)$, $\cos (\alpha + y)$ et $\sin^2 (\alpha + y)$ en série par rapport à y :

$$\sin (\alpha + y) = \sin\alpha + \cos\alpha \, y + \dots$$
$$\cos (\alpha + y) = \cos\alpha - \sin\alpha \, y + \dots$$
$$\sin^2(\alpha + y) = \sin^2\alpha + \sin 2\alpha \, y + \dots$$

En ne prenant dans ces équations que les termes du premier ordre et en reportant ces valeurs dans (1 - 4 - 6) nous obtenons les équations aux variations

$$\sin^2\alpha \, \ddot{x} + w \sin 2\alpha \, \dot{y} = X \qquad (1 - 4 - 7)$$

$$\ddot{y} + w^2 \sin^2\alpha \, y - w \sin 2\alpha \, \dot{x} = Y$$

où X, Y représentent les termes de puissance supérieure à un par rapport à x, $\dot{x}$, y et $\dot{y}$.
Dans ces équations, les termes gyroscopiques sont

$$w \sin 2\alpha \, \dot{y}$$
$$- w \sin 2\alpha \, \dot{x}$$

car ils dépendent linéairement des vitesses et la matrice de leurs coefficients est antisymétrique.

Conclusion :

Bien que les équations du mouvement (1 - 4 - 5) ne contiennent pas de forces gyroscopiques, les équations aux variations (1 - 4 - 7) les font apparaître.

CHAPITRE 2

ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME SOUMIS A L'ACTION DE FORCES GYROSCOPIQUES, DISSIPATIVES ET POTENTIELLES

CHAPITRE 2 : ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME SOUMIS A L'ACTION DE FORCES GYROSCOPIQUES, DISSIPATIVES ET POTENTIELLES.

. Dans ce chapitre, nous essayerons de synthétiser les différents résultats obtenus en soumettant le système à chaque type séparément ou à plusieurs de ces types simultanément. Nous étudierons d'abord la stabilité et le mouvement d'un système soumis à l'action de forces gyroscopiques. Ensuite, nous analyserons l'influence de forces dissipatives. Enfin, nous étudierons l'influence des forces gyroscopiques et dissipatives sur un système potentiel.

. Nous insistons davantage sur les systèmes linéarisés. Certaines démonstrations sont valables pour les systèmes complets, notamment celles du paragraphe 2 - 3 - 4. Dans les autres cas, nous indiquerons sous quelles conditions les résultats s'appliquent au système complet.

. Avant d'aborder l'étude des différents cas, établissons les <u>équations du mouvement</u> utilisées dans la suite. Elles sont du type

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k + \Gamma_k \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{2 - 0}$$

où $\Gamma_k = H \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j$ $(k = 1, \ldots, s)$ sont des forces gyroscopiques.

Q_k est une force généralisée potentielle

H est un paramètre.

1 - a) justifions d'abord ces équations à partir du chapitre I.

La notion de la fonction de Routh nous a fourni les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = Q_k + \frac{\partial R_o}{\partial q_k} + \Gamma_k \quad (k = 1, \ldots, s)$$

où les q_k sont les coordonnées non cycliques

$$\Gamma_k = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k}\right)$$

Pour certains systèmes, le terme R_o est constant; c'est notamment le cas du gyroscope dans la suspension de Cardan. Dès lors, le terme R_2 se trouve explicitement dans l'expression de l'énergie cinétique T; nous le noterons T_2. Ces considérations sont illustrées dans l'étude du gyroscope au chapitre 5. Cet exemple permettra d'expliciter davantage notre pensée.

b) le paramètre H s'introduit "naturellement".

Il correspond souvent à une grandeur physique : tension d'un champ magnétique, moment cinétique ...
Si une coordonnée est cyclique, elle donne naissance à une intégrale première; le paramètre H provient alors de la constante d'intégration.

2. Nous pouvons cependant introduire les équations (2 - 0) d'une autre manière. T_2 serait alors l'énergie cinétique totale du système; les forces gyroscopiques Γ_k ne proviendraient plus du terme R_1 mais correspondraient à des forces extérieures supplémentaires appliquées au système.

- Attention !
nous supposons que les systèmes considérés sont scléronômes. Dans ce cas, l'énergie cinétique peut s'exprimer à l'aide d'une forme quadratique en les vitesses.

§ 2 - 1 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système soumis à l'action de forces gyroscopiques.

1. Le mouvement d'un tel système est décrit par les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = H \sum_{j=1}^{s} g_{jk}\, \dot{q}_j \quad (k = 1, \ldots, s)$$

(2 - 1 - 1)

où T_2 est une forme quadratique du type

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_j$$

Le problème est linéarisé si nous supposons que les coefficients a_{kj} ne dépendent pas de $q_1, \ldots, q_s$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_k} = 0$$

Dans ce cas on a :

$$\sum_{j=1}^{s} (a_{kj}\, \ddot{q}_j + H\, g_{kj}\, \dot{q}_j) = 0 \quad (k = 1, \ldots, s)$$

(2 - 1 - 2)

ou en divisant par H et en notant $\mu = H^{-1}$:

$$\sum_{j=1}^{s} (\mu\, a_{kj}\, \ddot{q}_j + g_{kj}\, \dot{q}_j) = 0 \quad (k = 1, \ldots, s)$$

(2 - 1 - 3)

ou sous forme matricielle :

$$\boxed{\mu\, A \ddot{\vec{q}} + G \dot{\vec{q}} = \vec{O}}$$

(2 - 1 - 4)

où $A = (a_{kj})$ est une matrice symétrique

$G = (g_{kj})$ est une matrice antisymétrique.

2. L'origine des coordonnées ($q_k = 0$, $k = 1, \ldots, s$) est une position d'équilibre du système (appendice 2 - 1).
Dès lors, l'équation vectorielle (2 - 1 - 4) coïncide en forme avec l'équation du mouvement perturbé au voisinage de l'origine (appendice 2 - 1).
Nous supposons que les perturbations initiales, en t = o, sont données par

$$\vec{q}(o) = \vec{q}_o \ , \quad \dot{\vec{q}}(o) = \dot{\vec{q}}_o$$

3. Théorème 2 - 1 - 1.

> La position d'équilibre du système linéaire scléronôme sur lequel agissent seulement des forces gyroscopiques est toujours stable par rapport aux vitesses.

Démonstration.

Nous essayons de trouver une fonction de Liapounov V (appendice 00)
Dans ce but, multiplions (2 - 1 - 4) par $\dot{\vec{q}}$:

$$\mu A \ddot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}} + G \dot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}} = 0$$

mais G est antisymétrique, d'où $G \dot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}} = 0$.
En divisant par μ, il reste :

$$A \ddot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}} = 0.$$

Intégrons la partie gauche de cette équation par rapport au temps et notons par V le résultat.
On a :

$$V = \frac{1}{2} A \dot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

V est bien une fonction de Liapounov car

a) V est définie positive puisque $V = T_2$

b) $\dot{V} = A\ddot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} = 0$ est semi-définie négative et le théorème est démontré.

<u>Remarque</u> :

Ce théorème reste valable pour <u>le système non linéarisé</u>.

a) si les a_{kj} sont constants mais les forces gyroscopiques non linéaires, la démonstration utilise le même procédé que la précédente. Ici cependant le terme $G\dot{\vec{q}}$ est remplacé par $\vec{\Gamma}$, mais on sait que $\vec{\Gamma} \cdot \dot{\vec{q}} = 0$.

b) pour les a_{kj} dépendant de $q_1, \ldots, q_s$, ce théorème a été démontré par V. Roumiantsev [6]

4. <u>Théorème 2 - 1 - 2.</u>

> Pour que la position d'équilibre du système linéaire scléronôme soumis uniquement à l'action de forces gyroscopiques soit stable par rapport aux coordonnées, il faut et il suffit que $|G| \neq 0$.

<u>Condition suffisante</u> :

. intégrons (2 - 1 - 4) une fois par rapport au temps :

$$\mu A\dot{\vec{q}} + G\vec{q} = \vec{C} \qquad (2 - 1 - 5)$$

où $\vec{C}$ est un vecteur constant d'intégration déterminé par les conditions initiales :

$$\vec{C} = \mu A\dot{\vec{q}}_0 + G\vec{q}_0$$

. nous introduisons un vecteur intermédiaire en vue d'annuler le membre de droite de (2 - 1 - 5) :

$\vec{q} = \vec{x} + \vec{a}$

où $\vec{a}$ est un vecteur constant déterminé plus bas.

Reportons $\vec{q}$ dans (2 - 1 - 5) :

$\mu \; A \dot{\vec{x}} + G \vec{x} + G \vec{a} = \vec{c}$

mais G est une matrice régulière; nous pouvons choisir

$\vec{a} = G^{-1} \vec{c},$

il reste alors

$$\mu \; A \dot{\vec{x}} + G\vec{x} = \vec{0} \qquad (2 - 1 - 6)$$

. nous remarquons que les équations (2 - 1 - 4) et (2 - 1 - 6) coïncident en forme .
Par le théorème (2 - 1 - 1) nous déduisons la stabilité du mouvement par rapport à $\vec{x}$.

. Alors, le mouvement est stable par rapport à $\vec{q}$.
Pour le voir, utilisons les définitions reprises dans l'appendice OO [7]

a) le mouvement est stable par rapport à $\vec{x} \Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon : \; \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I) \; (\exists \eta (\varepsilon, t_0) > 0) \mid$$
$$(\forall \vec{x}_0 : \|\vec{x}_0\| < \eta)(\forall t \geqslant t_0 : t \in J(t_0, \vec{x}_0))$$
$$\|\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon_1 = \varepsilon + \|\vec{a}\|, \; \forall t_0, \exists \eta_1 = \eta + \|\vec{a}\| \mid$$
$$((\|\vec{x}_0\| + \|\vec{a}\|) < \eta_1)(\|\vec{x} + \vec{a}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{a}\| < \varepsilon_1)$$

b) mais $\vec{q} = \vec{x} + \vec{a}$

d'où $\|\vec{q}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{a}\|$

nous déduisons alors :

$(\forall \varepsilon_1 : \varepsilon_1 > 0)\ (\forall t_0 \in I)(\exists \eta_1(\varepsilon, t_0) > 0)\ |$

$(\forall \vec{q}_0 : \|\vec{q}_0\| < \eta_1)(\forall t \geqslant t_0 : t \in J\ (t_0, \vec{q}_0)):$

$\|\vec{q}\ (t, t_0, \vec{q}_0)\| < \varepsilon_1.$

C'est la définition de stabilité par rapport à $\vec{q}$.

Condition nécessaire :

Nous démontrons la contraposée $|G| = 0 \Rightarrow$ non stabilité.
Nous utilisons à cet effet la théorie des diviseurs élémentaires. [8]

a) le déterminant caractéristique associé aux équations du mouvement $A\ddot{\vec{q}} + H\,G\,\dot{\vec{q}} = \vec{0}$ est : (appendice 2 - 1)

$$\Delta(m) = |A\,m^2 + H\,G\,m| = 0$$

ou

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} a_{11}\,m^2 & a_{12}m^2 + Hg_{12}m \ \ldots & a_{1s}m^2 + Hg_{1s}m \\ a_{12}\,m^2 + Hg_{12}m & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{s1}\,m^2 + Hg_{s1}m & \ldots\ldots & a_{ss}\,m^2 \end{vmatrix}$$

nous représentons $\Delta(m)$ par

$$\Delta(m) = m^s\,(a_1\,m^s + \ldots + a_s) = 0$$

mais $a_s = 0$ car $a_s = \begin{vmatrix} 0 & \ldots\ldots & Hg_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ Hg_{s1} & \ldots & 0 \end{vmatrix} = -H^s\,|G| = 0$

vu que $|G| = 0$

nous déduisons que

$$\Delta(m) = m^s\,(a_1\,m^s + \ldots + a_{s-1}\,m)$$ a au moins s + 1 racines m nulles.

b) Construisons à présent les diviseurs élémentaires de la matrice

$$M = A m^2 + H G m.$$

Notons D_k le plus grand diviseur commun des mineurs d'ordre k de M.

D'après la forme de M, nous voyons que

$$\begin{aligned}
&D_1 = m \\
&D_2 \text{ est divisible par } m^2 \\
&D_3 \text{ est divisible par } m^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&D_s \text{ est divisible par } m^s
\end{aligned} \qquad (2 - 1 - 8)$$

Considérons les polynômes E_k définis par

$$E_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \qquad (k = 1, \ldots, s ; D_0 = 1)$$

Par (2 - 1 - 8), tous les $E_k(m)$ sont divisibles par m, donc les équations $E_k(m) = 0$ ont au moins une racine nulle.

c) D'autre part, $\Delta(m)$ peut s'écrire :

$$\Delta(m) = L E_1(m) \cdot \ldots \cdot E_s(m)$$

où L est une constante non nulle (cfr appendice 2-1)

d) Du point a) nous déduisons qu'au moins un des polynômes invariants E_i a une racine nulle de multiplicité supérieure à 1.

Du théorème 3 de l'appendice 0 - 0, découle l'instabilité du mouvement par rapport aux coordonnées.

5. Corollaire.

> soit un système linéaire scléronôme sur lequel agissent seulement des forces gyroscopiques. Si le nombre de coordonnées généralisées est impair, la position d'équilibre est instable par rapport aux coordonnées.

Ce résultat est immédiat si l'on se rappelle que G est antisymétrique. Dès lors $|G| = 0$ pour un nombre impair de coordonnées.

6. Appliquons ces théorèmes à l'étude de la stabilité du mouvement d'un électron dans un champ magnétique constant.

- Dans l'appendice 2 - 1, nous établissons les équations du mouvement de l'électron :

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} H \dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{e}{c} H \dot{x} \qquad (2 - 1 - 9)$$

$$m\ddot{z} = 0$$

où m est la masse de l'électron
c est la vitesse de la lumière
H est la tension du champ magnétique supposée constante.

Les membres de droite sont les composantes d'une force gyroscopique car

a) ils dépendent linéairement des vitesses

b) $G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e}{c}H & 0 \\ -\frac{e}{c}H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

Remarquons l'introduction "naturelle" du paramètre H.

. Etudions la stabilité de ce mouvement.

Supposons qu'au temps initial $t = o$, la vitesse de l'électron soit nulle. La position initiale est alors une position d'équilibre et les équations (2 - 1 - 9) coïncident avec celles du mouvement perturbé.

a) Pour le mouvement dans l'espace $|G| = 0$.
D'après le théorème 2 - 1 - 2, toute position d'équilibre est instable par rapport à une coordonnée au moins.

b) Considérons la projection du mouvement sur le plan (x, y), perpendiculaire à H.
Nous notons par G_1 la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{e}{c} H \\ -\frac{e}{c} H & 0 \end{pmatrix}$

$|G_1|$ n'est pas nul; la projection du mouvement sur le plan (x, y) sera donc stable par rapport à x et y.

c) En fait, par calculs, on remarque que l'électron décrit un mouvement hélicoïdal d'axe parallèle à $\vec{z}$.
On utilise ce résultat en physique expérimentale pour trouver le rapport $\frac{m}{e}$ pour l'électron ou pour d'autres particules chargées.

7. Description du mouvement.

Nous supposons que le mouvement non perturbé est stable, c'est-à-dire que $|G| \neq 0$.

. Pour l'équation

$$\mu A \dot{\vec{x}} + G \vec{x} = \vec{C} \qquad (2 - 1 - 10)$$

Nous cherchons une solution sous la forme :

$$\vec{x} = \vec{D} e^{\lambda t}$$

où $\vec{D}$ est un vecteur inconnu et λ une valeur inconnue.

En remplaçant dans (2 - 1 - 10), on a

$$(A\gamma + G)\vec{D} = \vec{0} \quad \text{où} \quad \gamma = \mu\lambda \qquad (2 - 1 - 11)$$

nous lui associons le déterminant caractéristique :

$$\Delta(\gamma) = |A\gamma + G| = 0 \qquad (2 - 1 - 12)$$

. Les racines de (2 - 1 - 12) sont imaginaires pures

soit $\gamma = \alpha + \beta i$ une racine de (2 - 1 - 12)

posons $\vec{D} = \vec{M} + \vec{N} i$

(2 - 1 - 11) devient :

$$(A(\alpha + \beta i) + G)(\vec{M} + \vec{N} i) = \vec{0}$$

en séparant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\alpha A \vec{M} + G\vec{M} - \beta A \vec{N} = \vec{0} \qquad (2 - 1 - 13)$$

$$\alpha A \vec{N} + G\vec{N} + \beta A \vec{M} = \vec{0}$$

mais $G\vec{M}.\vec{M} = G\vec{N}.\vec{N} = 0$

$A\vec{M}.\vec{N} = A\vec{N}.\vec{M}$

$A\vec{M}.\vec{M}$ et $A\vec{N}.\vec{N}$ sont strictement positifs.

Sommons les équations (2 - 1 - 13) après multiplication de la première par $\vec{M}$ et de la seconde par $\vec{N}$:

$$\alpha(A\vec{M}.\vec{M} + A\vec{N}.\vec{N}) = 0$$

d'où $\alpha = 0$ et $\gamma = \beta i$.

. On peut montrer plus : les racines γ sont complexes conjuguées [9] , donc du type

$\pm \gamma_1 i, \ldots, \pm \gamma_n i$ avec $n = \frac{s}{2}$

mais nous avons $\gamma = \mu\lambda$ et donc les racines correspondantes :

$$\lambda_k = H \gamma_k i \quad \text{avec} \gamma_{n+j} = -\gamma_j$$

$$(k = 1, \ldots, 2n, \; j = 1, \ldots, n)$$

. Conclusion :

le mouvement du système soumis uniquement à l'action de forces gyroscopiques telles que $|G| \neq 0$ est composé de $n = \frac{s}{2}$ oscillations harmoniques dites de nutation. Chaque oscillation se passe à une distance $\vec{a} = G^{-1}\vec{C}$ de la position initiale.

§ 2 - 2 : Influence des forces dissipatives sur la stabilité d'un système soumis à des forces gyroscopiques.

1. Définition générale des forces dissipatives.

. soit un système dont la position est déterminée par les coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_s$

Une force dissipative $\vec{D}\ (\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ est une force dont le travail sur tout déplacement réel $\vec{dq}$ est inférieur ou égal à zéro $\vec{D}.\ \vec{dq} \leqslant 0.$ ou en terme de puissance : $N = \vec{D}.\dot{\vec{q}} = \sum_{k=1}^{s} D_k\ \dot{q}_k \leqslant 0$

. la dernière inégalité montre que $\vec{D}$ doit nécessairement dépendre des vitesses. Sinon on pourrait, dans certains cas, choisir des $\dot{q}_k$ suffisamment grands pour que $N > 0$. Cependant $\vec{D}$ peut ne pas dépendre des q_k.

. la force dissipative agit contre les vitesses.

. si, quel que soit $\dot{\vec{q}}$, N est strictement négative, la dissipation est dite complète; sinon on la qualifie d'incomplète

$$(2 - 2 - 1)$$

. dans ce paragraphe, nous utiliserons des forces généralisées dissipatives linéaires en les vitesses :

$$D_k = -\ (b_{k1}\ \dot{q}_1 + b_{k2}\ \dot{q}_2 + \ldots + b_{ks}\ \dot{q}_s)(k = 1, \ldots, s) \qquad (2 - 2 - 2)$$

où les b_{kj} sont des constantes positives telles que

$b_{kj} = b_{jk}$

Ces équations définissent bien des forces dissipatives car $N = \vec{D}.\dot{\vec{q}} = - B \dot{\vec{q}}.\dot{\vec{q}} \leqslant 0$.

pour la force pesanteur on introduit le potentiel; de même ici, nous introduisons une forme quadratique F telle que

$$D_k = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\text{d'où } F = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = \frac{1}{2} B \dot{\vec{q}}.\dot{\vec{q}}$$

<u>F s'appelle "fonction de dissipation de Rayleigh."</u>

. dans le cas linéaire, la définition (2 - 2 - 2) équivaut à avoir une forme F définie positive de toutes les vitesses car $N = - B \dot{\vec{q}}.\dot{\vec{q}} = - 2 F$

2. . les équations du mouvement du système considéré s'obtiennent à partir de (2 - 1 - 3) en ajoutant la force dissipative :

$$\sum_{j=1}^{s} (\mu a_{kj} \ddot{q}_j + g_{kj} \dot{q}_j) = -\mu \sum_{j=1}^{s} b_{kj} \dot{q}_j \quad (k = 1, \ldots, s)$$

(2 - 2 - 3)

ou sous forme matricielle :

$$\boxed{\mu A \ddot{\vec{q}} + (\mu B + G) \dot{\vec{q}} = \vec{C}} \qquad (2 - 2 - 4)$$

où A et B sont des matrices symétriques

G est une matrice antisymétrique

. pour étudier la stabilité, nous considérons des variables $\vec{z}$ obtenues à partir de $\vec{q}$ à l'aide d'une transformation

$$\vec{q} = \Lambda \vec{z}$$

où Λ est une matrice régulière définie plus bas.

L'équation (2 - 2 - 4) devient :

$$\mu A \Lambda \ddot{\vec{z}} + (\mu B \Lambda + G \Lambda) \dot{\vec{z}} = \vec{0}$$

en multipliant par Λ' (transposée de Λ) :

$$\mu \Lambda' A \Lambda \ddot{\vec{z}} + (\mu \Lambda' B \Lambda + \Lambda' G \Lambda) \dot{\vec{z}} = \vec{0}$$

Les théorèmes 1 et 2 de l'appendice 2 - 2 permettent de choisir Λ telle que

$\Lambda' A \Lambda = E$ E matrice unité

$\Lambda' B \Lambda = B_o$ B_o matrice diagonale

de plus $\Lambda' G \Lambda$ reste antisymétrique, nous notons encore cette matrice par G.

Il reste finalement :

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{z}} + (\mu B_o + G) \dot{\vec{z}} = \vec{0}} \qquad (2 - 2 - 5)$$

. l'origine des coordonnées ($z_k = o$, $k = 1, \ldots, s$) est une position d'équilibre du système. Dès lors, l'équation vectorielle (2 - 2 - 5) coïncide avec l'équation du mouvement perturbé au voisinage de l'origine.

Nous supposons que les perturbations initiales sont :

en $t = o$, $\vec{z}(o) = \vec{z}_o$; $\dot{\vec{z}}(o) = \dot{\vec{z}}_o$

3. Théorème 2 - 2 - 1.

La position d'équilibre du système linéaire scléronôme sous l'action des forces gyroscopiques et dissipatives de dissipation complète est toujours

a) ASYMPTOTIQUEMENT STABLE par rapport aux VITESSES

b) STABLE par rapport aux COORDONNEES.

. utilité de ce théorème

si un système linéaire scléronôme est soumis à l'action uniquement de forces gyroscopiques et s'il est instable ($|G| = 0$), on peut le stabiliser en ajoutant des forces dissipatives de dissipation complète.

. démonstration de a)

nous appliquons le théorème de stabilité asymptotique par rapport aux vitesses (cfr appendice CO)

* Construisons d'abord une fonction de Liapounov V.
En multipliant (2 - 2 - 5) par $\dot{\vec{z}}$, nous obtenons

$$\mu\, \ddot{\vec{z}}.\dot{\vec{z}} + \mu\, B_o\, \dot{\vec{z}}.\dot{\vec{z}} + G\, \vec{z}.\dot{\vec{z}} = 0$$

mais G est antisymétrique; donc le dernier terme s'annule.
Divisons par μ, il reste

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(\dot{\vec{z}}.\dot{\vec{z}}) = -\,B_o\,\dot{\vec{z}}.\dot{\vec{z}}$$

nous choisissons évidemment $V = \frac{1}{2}\,\dot{\vec{z}}.\dot{\vec{z}}$

* V vérifie les hypothèses du théorème de Liapounov

i) V est définie positive : évident

ii) $\dot{V}$ est définie négative par rapport aux vitesses

$\dot{V} = - B_o \vec{\dot{z}}.\vec{\dot{z}}$. Mais B_o est une matrice diagonale;

$\dot{V}$ peut s'écrire alors

$$\dot{V} = - (b_1 \dot{z}_1^2 + \ldots + b_s \dot{z}_s^2)$$

il nous suffit de montrer l'implication :

dissipation complète $\Longrightarrow b_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, s)$

nous le vérifions dans l'appendice 2 - 2.

iii) V admet une borne supérieure infinitésimale petite car V ne dépend pas explicitement du temps. [12]

⁎ En conclusion, par le théorème, le mouvement est asymptotiquement stable par rapport aux vitesses.

démonstration de b).

Elle ressemble à la démonstration de la condition suffisante du théorème 2 - 1 - 2.

⁎ Intégrons (2 - 2 - 5) une fois par rapport au temps :

$$\mu \vec{\dot{z}} + (\mu B_o + G) \vec{z} = \vec{c} \qquad (2 - 2 - 6)$$

où $\vec{c}$ est le vecteur constant d'intégration déterminé par les conditions initiales. Donc,

$$\vec{c} = \mu \vec{\dot{z}}_o + (\mu B_o + G) \vec{z}_o$$

Introduisons le vecteur intermédiaire $\vec{x}$ tel que

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{a}$$

où $\vec{a}$ sera choisi en vue d'annuler $\vec{c}$ dans (2 - 2 - 6)

En remplaçant $\vec{z}$ dans cette équation, on a :

$$\mu \vec{\dot{x}} + (\mu B_o + G) \vec{x} + (\mu B_o + G) \vec{a} = \vec{c} \qquad (2 - 2 - 7)$$

Mais $(\mu B_o + G)^{-1}$ existe (appendice 2 - 2)
nous choisissons alors

$$\vec{a} = (\mu B_o + G)^{-1} \vec{c}$$

(2 - 2 - 7) devient alors

$$\mu \dot{\vec{x}} + (\mu B_o + G) \vec{x} = \vec{0}. \qquad (2 - 2 - 8)$$

* les équations (2 - 2 - 8) et (2 - 2 - 5) ont la même forme. D'après le a) nous déduisons la stabilité asymptotique de l'origine par rapport à $\vec{x}$

* En conséquence, l'origine est stable par rapport à $\vec{z}$.
La démonstration est analogue à celle développée dans le théorème 2 - 1 - 2.
Le caractère asymptotique n'intervient pas dans le raisonnement.

Cependant l'origine n'est pas asymptotiquement stable par rapport à $\vec{z}$. Mais le mouvement va tendre vers la position $\vec{z} = \vec{a}$ car $\vec{z} = \vec{x} + \vec{a}$.

* Finalement, nous concluons que le mouvement est stable par rapport à $\vec{q}$.
En effet, $\vec{q} = \Lambda \vec{z}$; il suffit alors de réécrire la définition de stabilité pour $\vec{z}$ et $\vec{q}$.

Ainsi se termine la démonstration de la stabilité par rapport aux coordonnées.

4. Systèmes non-linéaires.

. Nous donnons ici l'énoncé du théorème concernant la stabilité des systèmes non-linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques et dissipatives. Ce problème dépasse le cadre de notre travail, la démonstration n'est pas développée ici. On peut se référer à [9]

. les équations du mouvement perturbé généralisent l'équation (2 - 2 - 4). Nous y ajoutons les termes non-linéaires. Soit aussi $H = \mu^{-1}$, nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(A(\vec{q})\,\dot{\vec{q}}\right) + \left(B(\vec{q}) + H\,G(\vec{q})\right)\dot{\vec{q}} = Q_2(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

(2 - 2 - 9)

$$\text{où } Q_2(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A(\vec{q})}{\partial \vec{q}}\,\dot{\vec{q}}.\dot{\vec{q}}$$

. Théorème.

> la position d'équilibre $\vec{q} = \dot{\vec{q}} = \vec{0}$ du système non-linéaire scléronôme soumis à l'action de forces gyroscopiques et dissipatives de dissipation complète est stable par rapport à $\vec{q}$ et $\dot{\vec{q}}$.
> De plus, chaque mouvement perturbé s'approche asymptotiquement d'une des positions d'équilibre $\vec{q} = \vec{a}$.

§ 2 - 3 : Influence des forces gyroscopiques et dissipatives sur la stabilité du mouvement d'un système soumis à des forces potentielles.

Nous étudions d'abord un système soumis à l'action de forces uniquement potentielles. Ensuite, nous déterminerons l'influence

i) des forces gyroscopiques

ii) des forces dissipatives

iii) des forces gyroscopiques et dissipatives.

Attention :

Nous supposons que les liaisons sont holonômes.
Le système reste scléronôme.

2 - 3 - 1 Stabilité du système potentiel.

1. Introduisons la fonction potentielle notée V.
Supposons que la position d'équilibre soit $\vec{q} = \vec{o}$
et qu'en cette position l'énergie potentielle soit nulle.

$$V\ (\vec{O}) = 0.$$

Nous noterons T l'énergie cinétique du système.
Nous pouvons de suite déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Théorème 2 - 3 - 1

> a) si dans la position d'équilibre isolée ($q_k = o$, $k = 1, \ldots, s$) la fonction potentielle a un minimum ($V = o$), alors cette position d'équilibre est stable. (théorème de Lagrange-Dirichlet).
>
> b) si la position d'équilibre isolée est stable et si V est analytique, alors V a un minimum en ce point [14]

Nous rappelons brièvement la démonstration de a).
D'après les hypothèses, la fonction V est définie positive.
L'énergie totale T + V est alors définie positive par rapport à $\vec{q}$ et $\dot{\vec{q}}$.
De plus, comme le système est conservatif, l'énergie se conserve et sa dérivée par rapport au temps est nulle.
La fonction T + V vérifie la définition d'une fonction de Liapounov. Nous déduisons donc la stabilité de la position d'équilibre.

2. Les coordonnées normales.

Ces coordonnées nous permettront d'énoncer d'autres critères de stabilité.

Supposons que les liaisons soient holonômes. Les équations du mouvement perturbé au voisinage de $\vec{q} = \vec{o}$ sont dans ce cas :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, s)}$$

(2 - 3 - 1)

. Développons T et V en série par rapport à $\dot{\vec{q}}$ et $\vec{q}$ respectivement. Nous supposons que ces développements existent.

$$* \quad V(\vec{q}) = V(\vec{o}) + \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}\right)_{\vec{o}} \vec{q} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{q}^2}\right)_{\vec{o}} \vec{q}\cdot\vec{q} + \ldots$$

(2 - 3 - 2)

Mais $V(\vec{O}) = 0$ par hypothèse

$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}\right)_{\vec{o}} = 0$ car $\vec{O}$ est un minimum isolé (Théorème 2 - 3 - 1)

Notons la matrice des dérivées secondes par

$$C = (C_{kj}) = \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j}\right)_{\vec{o}}\right)$$

Cette matrice est symétrique car $C_{kj} = C_{jk}$

L'équation (2 - 3 - 2) devient :

$$V(\vec{q}) = \frac{1}{2} C \vec{q}\cdot\vec{q} + \ldots$$

$$* \quad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}, \vec{o}) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)_{\vec{o}} \dot{\vec{q}} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vec{q}}^2}\right)_{\vec{o}} \dot{\vec{q}}\cdot\dot{\vec{q}} + \ldots$$

(2 - 3 - 3)

Nous supposons le système scléronôme, donc T est une forme quadratique en $\dot{\vec{q}}$; les deux premiers termes du membre de droite s'annulent en $\dot{\vec{q}} = \vec{0}$.
Notons la matrice des dérivées secondes par A.
Cette matrice est symétrique également et en plus définie positive.
L'équation (2 - 3 - 1) devient :

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} A \dot{\vec{q}}.\dot{\vec{q}} + \dots$$

. en remplacant dans (2 - 3 - 1) T et V par leur développement, nous obtenons :

$$\boxed{A \ddot{\vec{q}} + C \vec{q} = \vec{Q}} \qquad (2 - 3 - 4)$$

où le vecteur $\vec{Q}$ de composantes $Q_1, \dots, Q_s$ contient les termes d'ordre supérieur à 2 par rapport à $\vec{q}$ et $\dot{\vec{q}}$

. construction des coordonnées normales

Passons des coordonnées $\vec{q}$ à des coordonnées $\vec{x}$ à l'aide d'une matrice orthogonale régulière Λ
Nous avons donc

$$\vec{q} = \Lambda \vec{x}$$

Λ sera déterminée plus loin.

Remplaçons $\vec{q}$ dans (2 - 3 - 4) et multiplions à gauche par Λ', la matrice transposée de Λ :

$$\Lambda' A \Lambda \ddot{\vec{x}} + \Lambda' C \Lambda \vec{x} = \Lambda' \vec{X}_1 = \vec{X} \qquad (2 - 3 - 5)$$

où $\vec{X}_1$ est le vecteur $\vec{Q}$ exprimé en fonction de $\vec{x}$.

Nous savons que A et C sont symétriques et A définie positive. Nous choisissons alors Λ telle que (appendice 2 - 2)

$\Lambda' A \Lambda = E$

$\Lambda' C \Lambda = C_o$

où C_o est une matrice diagonale du type

$$C_o = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_s \end{pmatrix}$$

les c_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ annulent l'équation

dét $(\lambda A - C) = 0$

Après transformation (2 - 3 - 5) devient donc :

$$\ddot{\vec{x}} + C_o \vec{x} = \vec{X}$$

ou sous forme scalaire

$$\boxed{\ddot{x}_k + c_k x_k = X_k \quad (k = 1, \ldots, s)}$$

(2 - 3 - 6)

on appelle coordonnées normales les nouvelles coordonnées $x_1, \ldots, x_s$.

. Critères de stabilité du système linéaire.

* nous considérons donc le système

$$\ddot{x}_k + c_k x_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (2 - 3 - 7)$$

nous remarquons que chaque équation ne contient qu'une coordonnée. Ceci nous ramène à l'étude de la stabilité pour s équations différentielles ordinaires du second ordre.

Les équations (2 - 3 - 7) peuvent être facilement intégrées :

$x_k = A_k \cos(\sqrt{c_k}\, t + B_k)$ pour $c_k > 0$

$x_k = A_k t + B_k$ pour $c_k = 0$

$x_k = A_k e^{\sqrt{-c_k}\, t} + B_k e^{\sqrt{-c_k}\, t}$
pour $c_k < 0$

où A_k et B_k sont les constantes d'intégration.

* on appelle <u>coefficients de stabilité</u> les valeurs c_k.
Cette définition a un sens car

i) si $c_k > 0 \ \forall k$ l'équilibre est stable pour le système linéaire. Le mouvement perturbé se compose d'oscillations harmoniques des coordonnées normales.

ii) <u>s'il existe au moins un</u> k tel que $c_k \leqslant 0$, l'équilibre est instable par rapport à la coordonnée x_k

le nombre de coefficients c_k strictement négatifs s'appelle le <u>degré d'instabilité</u>.

* nous savons que (appendice 2 - 2)

$$\text{dét } C = \text{dét } C_o = c_1 \ldots c_s$$

d'où nous déduisons la propriété :

dét $C > 0$ ssi le degré d'instabilité est pair ou nul
dét $C < 0$ ssi le degré d'instabilité est impair

Ceci nous donne directement un renseignement sur la stabilité à partir du développement de la fonction potentielle V.
Cette propriété interviendra dans les théorèmes des paragraphes ultérieurs.

2 - 3 - 2 : Influences des forces gyroscopiques sur la stabilité du mouvement des systèmes potentiels.

Nous étudions l'influence des forces gyroscopiques sur la stabilité de la position d'équilibre $\vec{q} = \vec{o}$ du système potentiel. Nous donnons aussi des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation gyroscopique d'une position d'équilibre instable.

1. <u>les équations du mouvement perturbé</u>.

par analogie avec (2 - 3 - 1), les équations s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} + \Gamma_k \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (2 - 3 - 8)$$

où $\vec{\Gamma}$ représente la force gyroscopique.

Développons $\vec{\Gamma}$ par rapport à $\dot{\vec{q}}$ en supposant que

$\vec{\Gamma}(\vec{o}) = \vec{o}$:

$\vec{\Gamma} = - H\, G\, \dot{\vec{q}} + \ldots$

où G est une matrice antisymétrique ($g_{kj} = - g_{jk}$).

et H un paramètre.

L'équation (2 - 3 - 8) devient :

$$\boxed{A\,\ddot{\vec{q}} + H\,G\,\dot{\vec{q}} + C\,\vec{q} = \vec{Q}} \qquad (2 - 3 - 9)$$

où le vecteur $\vec{Q}$ contient les termes d'ordre supérieur à 2 par rapport à $\vec{q}$ et $\dot{\vec{q}}$.

L'équation linéaire correspondante est

$$\boxed{A\,\ddot{\vec{q}} + H\,G\,\dot{\vec{q}} + C\,\vec{q} = \vec{0}} \qquad (2 - 3 - 10)$$

2. Théorème 2 - 3 - 2.

> si la position d'équilibre d'un système linéaire scléronôme soumis à l'action de forces uniquement potentielles est stable, cette stabilité se conserve lorsqu'on ajoute des forces gyroscopiques.

. écrivons d'abord les équations pour les coordonnées normales. Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent nous amène à :

$$\ddot{x}_k + c_k x_k - H \sum_{j=1}^{s} g_{kj} \dot{x}_j = 0 \quad (k = 1, \ldots, s)$$

ou sous forme normale

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k$$

$$\frac{dy_k}{dt} = - c_k x_k + H \sum_{j=1}^{s} g_{kj} y_j$$

. Nous appliquons la technique de Liapounov

$$\text{soit } L = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=i}^{s} y_k^2 + \sum_{k=i}^{s} c_k x_k^2 \right)$$

L est définie positive car l'équilibre est stable et donc tous les c_k sont strictement positifs.

$$\frac{dL}{dt} = H \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} y_k g_{kj} y_j = 0$$ car G est antisymétrique.

En conclusion, L vérifie la définition de fonction de Liapounov et les forces gyroscopiques ne détruisent pas la stabilité.

. Remarque :

On peut étendre ce théorème au système complet. L'intégrale d'énergie du système potentiel n'est pas modifiée avec les forces gyroscopiques. En effet, le travail de ces dernières est nul sur tout déplacement réel. Cette intégrale d'énergie définit une fonction de Liapounov.

3. Condition nécessaire de stabilisation gyroscopique.

Théorème 2 - 3 - 3 (Théorème de Thomson et Tait [13])

> Si la position d'équilibre d'une système linéaire scléronôme potentiel est instable et de degré impair d'instabilité, alors on peut la stabiliser avec des forces gyroscopiques.

la relation (2 - 3 - 10) donne l'équation linéarisée du mouvement.

Considérons l'équation caractéristique associée :

$$\Delta(\lambda) = |A\lambda^2 + HG\lambda + C| = 0$$

ou en développant :

$$\Delta(\lambda) = a_o\lambda^{2s} + a_1\lambda^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0$$

avec $a_o = \text{dét } A$

$a_{2s} = \text{dét } C$

D'une part, le degré d'instabilité est impair, d'où

$$a_{2s} = \text{dét } C < 0$$

c'est-à-dire $\Delta(o) < 0$ (2 - 3 - 11)

D'autre part, si λ tend vers l'infini, $\Delta(\lambda)$ tend vers $a_o \lambda^{2s}$. Mais a_o = dét $A > 0$, d'où

$$\Delta(\lambda)/_{\lambda \to \infty} > 0. \qquad (2 - 3 - 12)$$

(2 - 3 - 11) et (2 - 3 - 12) impliquent que l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ a au moins une racine réelle positive λ.
Dans la solution de (2 - 3 - 10) apparaîtra un terme du type $\vec{y}\, e^{\lambda t}$ avec $\lambda > 0$. Le système reste donc instable.

Conclusion :

Pour pouvoir stabiliser la position d'équilibre, il est nécessaire que le degré d'instabilité soit pair.

Remarque :

d'après le théorème de première approximation, nous pouvons généraliser le résultat obtenu au système complet (2 - 3 - 9)

4. Conditions suffisantes de stabilisation gyroscopique.

Dans cette étude, nous utilisons les équations dites de "précession". Ces équations seront expliquées et commentées dans le chapitre suivant.
Nous admettons ici que l'équation vectorielle de précession associée à l'équation (2 - 3 - 10) est :

$$H\,G\,\dot{\vec{u}} + C\,\vec{u} = \vec{0} \qquad (2 - 3 - 13)$$

l'équation caractéristique correspondante s'écrit :

$$\Delta^{(p)}(\lambda) = |H\,G\,\lambda + C| = 0 \qquad (2 - 3 - 14)$$

Introduisons enfin

$$\Delta^{(n)}(\lambda) = |A\,\lambda + H\,G| = 0 \qquad (2 - 3 - 15)$$

Théorème 2 - 3 - 4.

> Si la position d'équilibre d'un système linéaire scléronôme potentiel est instable.
> Si on y ajoute des forces gyroscopiques telles que
> a) $|G| \neq 0$, $|C| \neq 0$
> b) le système de précession (2 - 3 - 13) soit stable
> c) toutes les racines de (2 - 3 - 14) et de (2 - 3 - 15) soient distinctes
>
> alors, pour le paramètre H choisi assez grand, la position d'équilibre instable sera stabilisée.

La démonstration est développée dans l'appendice 2 - 3 car on utilise des résultats obtenus au chapitre 3.

Exemple :

supposons qu'un mouvement perturbé instable soit décrit par le système :

$$\ddot{q}_1 + c_1 q_1 = 0 \qquad \text{avec } c_1 < 0,\ c_2 < 0$$
$$\ddot{q}_2 + c_2 q_2 = 0$$

Nous ajoutons les forces gyroscopiques

$$\Gamma_1 = - H \dot{q}_2 , \Gamma_2 = H \dot{q}_1$$

le système s'écrit alors, sous forme matricielle :

$$A \ddot{\vec{q}} + H G \dot{\vec{q}} + C \vec{q} = \vec{0}$$

$$\text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- on vérifie facilement que les hypothèses du théorème sont bien satisfaites. Pour un H convenable, les forces gyroscopiques stabilisent le mouvement.

- Montrons le même résultat à partir de l'étude des racines de l'équation caractéristique

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + (H^2 + c_1 + c_2)\,\lambda^2 + c_1\, c_2 = 0$$

Le mouvement se stabilise si les racines λ^2 sont réelles et négatives. Pour cela, il nous faut choisir H tel que :

$$H^2 + c_1 + c_2 > 0$$

$$c_1\, c_2 > 0$$

$$(H^2 + c_1 + c_2)^2 - 4\, c_1\, c_2 > 0.$$

La seconde condition est immédiate. Les autres conditions se ramènent à

$$H > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2}$$

Donc pour H suffisamment grand, le mouvement devient stable.

Remarques :

Ce théorème nous permet de remplacer l'étude des racines d'une équation caractéristique d'ordre 2s par l'étude des racines de 2 équations (2 - 3 - 14) et (2 - 3 - 15) qui sont d'ordre s.
Ce théorème s'applique au système complet si les hypothèses du théorème de première approximation sont vérifiées.

2 - 3 - 3 : Influence des forces dissipatives sur la stabilité du mouvement des systèmes potentiels.

1. Les équations du mouvement perturbé.

elles sont du type :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + D_k \quad (k = 1, \ldots, s)$$

$$(2 - 3 - 16)$$

où $\vec{D}$ représente la force dissipative.

Développons $\vec{D}$ par rapport à $\dot{\vec{q}}$ en supposant que $\vec{D}(\vec{0}) = \vec{0}$

$$\vec{D} = - B\dot{\vec{q}} + \ldots$$

où B est une matrice symétrique.

L'équation (2 - 3 - 16) devient :

$$\boxed{A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}}$$

et l'équation linéarisée correspondante

$$\boxed{A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{0}}$$

2. Théorèmes.

Nous énonçons 3 théorèmes qui seront démontrés dans le paragraphe suivant. Là, nous ajouterons des forces gyroscopiques mais celles-ci ne joueront aucun rôle dans les raisonnements. Les démonstrations pour les équations linéarisées sont développées dans [12]

Théorème 2 - 3 - 5.

Les forces dissipatives ne détruisent pas la stabilité de la position d'équilibre d'un système potentiel.

Théorème 2 - 3 - 6.

Si la position d'équilibre d'un système potentiel est stable, elle devient asymptotiquement stable si l'on ajoute des forces dissipatives de dissipation complète.

Théorème 2 - 3 - 7.

Une position d'équilibre isolée instable d'un système potentiel ne peut être stabilisée avec des forces dissipatives de dissipation complète.

Ces théorèmes sont valables pour les systèmes non linéarisés.

2 - 3 - 4 : Influences des forces dissipatives sur la stabilité du mouvement des systèmes potentiels gyroscopiques.

Les équations du mouvement perturbé s'obtiennent à partir de (2 - 3 - 8) et (2 - 3 - 16) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} + \Gamma_k + D_k \quad (k = 1, \ldots, s)$$

(2 - 3 - 17)

ou

$$\boxed{A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + HG\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}} \qquad (2 - 3 - 18)$$

1. <u>Proposition.</u>

Nous avons l'équation

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + V) = N,}$$

où N est la puissance des forces dissipatives.

<u>démonstration.</u>

multiplions chaque équation (2 - 3 - 17) par $\dot{q}_k$ et sommons

$$\sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial q_k} =$$

$$- \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \Gamma_k + \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k D_k \qquad (2 - 3 - 12)$$

mais

$$\sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \Gamma_k = 0$$ par la définition de force gyroscopique

$$\sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k D_k = N$$ par la définition de force dissipative

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

(2 - 3 - 19) devient :

$$\sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{dT}{dt} + \sum_{k=1}^{s} \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{dV}{dt} + N \tag{2 - 3 - 20}$$

par le théorème d'Euler [11], nous savons que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt} 2T$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

en remplaçant dans (2 - 3 - 20) il reste

$$\frac{d}{dt} 2T - \frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt} + N$$

ou enfin

$$\frac{d}{dt}(T + V) = N$$

interprétation physique.

d'après la définition, nous savons que $N \leq 0$.
La proposition montre donc que l'énergie mécanique totale $(T + V)$ diminue avec le temps.

2. Théorème 2 - 3 - 8.

> Des forces gyroscopiques et dissipatives arbitraires ne détruisent pas la stabilité d'une position d'équilibre isolée d'un système potentiel.

Démonstration.

Nous cherchons une fonction de Liapounov H soit $H = T + V$

Vérifions les 2 propriétés :

a) H est définie positive. Comme la position d'équilibre pour le système potentiel est stable et isolée, d'après le théorème 2 - 3 - 1, V a un minimum en cette position et est donc définie positive par rapport aux coordonnées.

b) $\dot{H} = \frac{d}{dt}(T + V) = N$ qui est semi-défini négative

nous avons donc bien une fonction de Liapounov et la stabilité est conservée.

3. Théorème 2 - 3 - 9.

> Si la position d'équilibre isolée du système est stable pour certaines forces potentielles, alors elle devient asymptotiquement stable si l'on ajoute des forces gyroscopiques arbitraires et des forces dissipatives de dissipation complète.

. Démonstration.

Nous appliquons le théorème de stabilité asymptotique de Liapounov (cfr appendice 00)

La fonction $H = T + V$ vérifie les hypothèses.

a) H est définie positive

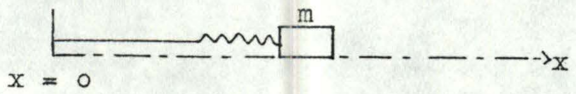
b) $\dot{H} = N$ est définie négative car la dissipation est complète

c) H admet une limite supérieure infinitésimale petite car H ne dépend pas explicitement du temps [12]

La position d'équilibre devient asymptotiquement stable.

. Exemple.

Mouvement d'un ressort dans un espace unidimensionnel.



* Sur la masse m s'exerce la force de rappel

$$F = -kx,$$

où k, la constante de raideur du ressort, est une constante strictement positive.

Cette force dérive du potentiel $V = \frac{k x^2}{2}$

L'équation du mouvement perturbé autour de la position d'équilibre $x = o$ s'écrit :

$$m\ddot{x} + k x = o$$

d'où $x = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B \right)$

et le mouvement est stable.

* Appliquons au système la force dissipative de dissipation complète :

$$D = - b\dot{x} \quad \text{avec} \quad b > o$$

l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = o$$

La solution est du type

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

où λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $b^2 - 4\,km > o$, ces racines seront réelles négatives et le mouvement amorti sera donc asymptotiquement stable.

. <u>la réciproque n'est pas vraie</u>.

Bien que la dissipation soit incomplète , la position d'équilibre peut devenir asymptotiquement stable. Montrons-le sur un exemple :

* Considérons le système potentiel stable :

$$\ddot{q}_1 + 6\,q_1 + 4\,q_2 = o$$

$$\ddot{q}_2 + 4\,q_1 + 6\,q_2 = o$$

les racines de l'équation caractéristiques sont :

$$\lambda 1,\, 2 = \pm\, i\,\sqrt{2}$$

$$\lambda 3,\, 4 = \pm\, i\,\sqrt{10}$$

* Ajoutons les forces gyroscopiques

$$\Gamma_1 = - 2\,\dot{q}_2 \text{ et } \Gamma_2 = 2\,\dot{q}_1$$

ainsi que la force dissipative $D_1 = - 4\,\dot{q}_1$

La dissipation est incomplète car $N = -4\dot{q}_1^2$ n'est pas définie négative par rapport à $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$.

Dans ce cas, les équations du mouvement sont transformées en :

$$\ddot{q}_1 + 4\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 6q_1 + 4q_2 = 0$$

$$\ddot{q}_2 - 2\dot{q}_1 + 4q_1 + 6q_2 = 0$$

l'équation caractéristique associée admet les racines

$$\lambda_{1,\,2} = -1 \pm i$$

$$\lambda_{3,\,4} = -1 \pm 3i$$

La présence dans les racines du facteur réel strictement négatif implique la stabilité asymptotique de la position d'équilibre.

4. Dans certains cas, la position d'équilibre instable du système potentiel peut être stabilisé par des forces gyroscopiques (cfr 2 - 3 - 2). Que se passe-t-il si l'on ajoute des forces dissipatives ?

<u>Théorème 2 - 3 - 10</u>.

Soit une position d'équilibre isolée instable du système potentiel. On ne peut stabiliser une telle position en ajoutant des forces gyroscopiques arbitraires et des forces dissipatives <u>de dissipation complète</u>.

. <u>Démonstration</u>.

Nous voulons appliquer un théorème d'instabilité de

Krasovski [13] (cfr appendice 2 - 3)

* Définissons d'abord l'ensemble K comme l'ensemble des points pour lesquels $\dot{\vec{q}} = \vec{o}$ et $\vec{q} \neq \vec{o}$. Montrons que K ne contient pas de trajectoires complètes du système.

En effet, supposons que les vecteurs $\vec{q} \neq \vec{o}$ et $\dot{\vec{q}} = \vec{o}$ soient solutions des équations du mouvement (2 - 3 - 17). Ces derniers vecteurs devraient vérifier la relation

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_k}\right|_{\vec{q} \neq \vec{o}} = o \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

$$(\text{car } T(\vec{o}, \vec{o}) = o, \ \vec{D}(\vec{o}) = \vec{o}, \ \vec{\Gamma}(\vec{o}) = \vec{o})$$

Mais ceci est impossible car la position d'équilibre est isolée et la dérivée partielle ne peut s'annuler qu'en $\vec{q} = \vec{o}$

* cherchons une fonction W qui vérifie les autres hypothèses :

soit $W = -(T + V)$

Par la proposition du paragraphe 2 - 3 - 4 nous avons :

$$\frac{dW}{dt} = -N$$

De là, nous déduisons que

a) $\dot{W} = o$ dans l'ensemble K et $\dot{W} > 0$ à l'extérieur de K car la dissipation est complète.

b) au voisinage de la position d'équilibre, il existe des points pour lesquels $W > 0$.

En effet, la position d'équilibre est instable et isolée. Donc, dans un voisinage de $\vec{q} = \vec{o}$, $\dot{\vec{q}} = \vec{o}$, le potentiel V prend des valeurs négatives.

Choisissons $\dot{\vec{q}} = \vec{o}$.

Dans ce cas, pour les points du voisinage considéré, la fonction $W = -(T + V)$ est positive.

Les hypothèses sont ainsi vérifiées, la stabilisation s'avère impossible.

. Remarque.

Des forces dissipatives, de dissipation complète, détruisent donc la stabilité obtenue à partir de forces gyroscopiques.

On appelle stabilité temporelle la stabilité obtenue en ajoutant des forces gyroscopiques.

Par contre, la stabilité est conservée si l'on ajoute des forces dissipatives. Nous parlerons de stabilité absolue ou séculaire.

CHAPITRE 3

STABILITE A PARTIR DES EQUATIONS SIMPLIFIEES

CHAPITRE 3 : STABILITE A PARTIR DES EQUATIONS SIMPLIFIEES.

Il est parfois possible de tirer des conclusions qualitatives (stabilité, ...) sur la solution des équations du mouvement d'un système gyroscopique à partir de la solution d'équations plus simples appelées "équations simplifiées" ou "équations de précession".

L'étude de ces dernières fait l'objet de ce chapitre.
Les trois premiers paragraphes nous introduirons à ces notions d'une façon générale.

Nous essayerons ensuite, à l'aide des équations de précession, de simplifier la résolution des problèmes présentés dans le deuxième chapitre.

§ 3 - 1 : Introduction des équations simplifiées.

• Dans ce paragraphe nous considérerons les équations du mouvement sous la forme (voir chapitre II) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k + H \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j \qquad (3 - 1 - 1)$$

où

• $g_{jk} = - g_{kj} \quad g_{jj} = o \quad (k = 1, \ldots, s; \ j = 1, \ldots, s)$

• les forces gyroscopiques $H \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j$ dépendent linéairement du paramètre H

• T_2, Q_k, g_{jk} ne dépendent pas de H

• T_2 est une forme quadratique définie positive des vitesses non cycliques $\dot{q}_j$ $(j = 1, \ldots, s)$

En annulant T_2 dans les équations (3 - 1 - 1) on obtient :

$$H \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j + Q_k = o \qquad (3 - 1 - 2)$$

Ces équations sont appelées les <u>équations simplifiées</u> ou les <u>équations de précession</u>.

• Interprétons physiquement ces équations. [9]
Dans l'expression des équations du mouvement (3 - 1 - 1) l'énergie cinétique T est divisée en deux parties; la première, T_2, est une forme quadratique des vitesses non cycliques $\dot{q}_j$.

La seconde partie, dépendant des vitesses cycliques, apparaît après transformation, sous la forme $H \sum_{j=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_j$ et met en évidence le paramètre H. Ce dernier est issu des intégrales premières provenant des coordonnées cycliques (voir exemple du chapitre 5).

T_2 ne dépend pas de H.

Pour de **grandes valeurs** de ce paramètre, la seconde partie de l'énergie cinétique devient très grande de telle **sorte qu'on** puisse négliger T_2 par rapport à elle.

Dans les équations (3 - 1 - 2), on l'annule.

Dans le cas du gyroscope, H est lié à la vitesse angulaire de celui-ci autour de son axe principal d'inertie.
Pour que H soit grand, il suffit que cette vitesse soit grande.

. Dans la suite nous noterons par u_j $(j = 1, \ldots, s)$ la solution des équations (3 - 1 - 2) et par q_j $(j = 1, \ldots, s)$ la solution de (3 - 1 - 1).

Nous aurons donc :

$$\boxed{H \sum_{j=1}^{s} g_{kj} \dot{u}_j = Q_k \quad (k = 1, \ldots, s)}$$

(3 - 1 - 3)

. Si on est en présence des équations complètes du mouvement où T_2 est développé, pour retrouver les équations de précession, il suffit d'annuler toutes les accélérations $\ddot{\vec{q}}$ et tous les produits des vitesses généralisées $\dot{\vec{q}}$.

- La dénomination"équation de précession" est due au fait suivant : les équations complètes du gyroscope conduisent à un mouvement de précession et de nutation pour l'extrémité de son axe; les équations de précession ne déterminent que le mouvement de précession (chapitre 5).

- Les équations de précession ne sont pas des équations du mouvement au sens strict du terme. Néanmoins la solution de (3 - 1 - 1) peut parfois être remplacée,dans les études qualitatives, par la solution des équations simplifiées (3 - 1 - 3).
Dans ce cas on dit que cette dernière est <u>admissible</u>.

- Remarquons que la solution générale de (3 - 1 - 1) dépend de 2s constantes arbitraires tandis que la solution de (3 - 1 - 3) n'en contient que s.
De plus, le membre de gauche des équations simplifiées est linéaire en les vitesses $\dot{u}_j$ $(j = 1, ..., s)$.

§ 3 - 2 : Admissibilité des solutions des équations simplifiées.

. Considérons les équations du mouvement (3 - 1 - 1) avec les conditions initiales :

$$t = o \quad q_k = q_{ko}$$
$$\dot{q}_k = \dot{q}_{ko} \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (3 - 2 - 1)$$

Soit u_k une solution des équations de précession (3 - 1 - 3) qui coïncide au moment initial avec la solution des équations (3 - 1 - 1) c'est-à-dire :

$$t = o \quad u_k = q_{ko} \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (3 - 2 - 2)$$

Supposons que cette solution contient n facteurs $\overset{(p)}{\lambda}_1, \ldots, \overset{(p)}{\lambda}_n$ de t. [10]

On aura : $u_k = u_k (\lambda^{(p)} t)$ $(k = 1, \ldots, s)$

Les équations (3 - 1 - 1) étant du second ordre, le nombre de facteurs intervenant dans leur solution sera supérieur à n [10]

Indiquons-les par $\overset{-(p)}{\lambda}_1, \ldots, \overset{-(p)}{\lambda}_n, \overset{(n)}{\lambda}_1, \ldots, \overset{(n)}{\lambda}_m$

D'après les notations utilisées, la solution de (3 - 1 - 1) peut être présentée sous la forme :

$$q_k = q_k (\overset{-(p)}{\lambda} t, \overset{(n)}{\lambda} t) \quad (k = 1, \ldots, s)$$

Les nombres λ dépendent en général du paramètre H.

. Choisissons deux nombres positifs ε_o et ε arbitrairement petits.

Si à partir de ceux-ci on peut trouver une valeur H_o du paramètre H telle que, pour tout H supérieur à H_o, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1) $$\left| \frac{\bar{\lambda}_k^{(p)} - \lambda_k^{(p)}}{\lambda_k^{(p)}} \right| < \varepsilon_o \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (3 - 2 - 3)$$

2) les valeurs $\bar{\lambda}^{(p)}$ et $\lambda^{(p)}$ sont telles que les fonctions $q_k (\lambda^{(p)}t, \lambda^{(n)}t)$ ne se distinguent pas qualitativement des fonctions $q_k (\bar{\lambda}^{(p)}t, \lambda^{(n)}t)$ (3 - 2 - 4)

(le mot "qualitativement" doit être précisé dans chaque cas particulier).

3) $$\forall t \geqslant o : \left| q_k (\lambda^{(p)}t, \lambda^{(n)}t) - u_k (\lambda^{(p)}t) \right| < \varepsilon$$

$$(k = 1, \ldots, s) \qquad (3 - 2 - 5)$$

alors on dit que la solution (3 - 2 - 2) des équations de précession (3 - 1 - 3) est <u>admissible</u>.

Dans le cas contraire on dit qu'elle est <u>inadmissible</u>. [9]

§ 3 - 3 : Condition nécessaire d'admissibilité des solutions des équations de précession.

Dans le premier paragraphe de ce chapitre nous avons établi les équations de précession. Mais il est inutile d'écrire ces dernières si leur solution n'est pas admissible.
Nous voyons donc l'importance de critères qui nous permettent de dire à priori si la solution des équations simplifiées existe et est admissible.

Remarque :

Si les équations différentielles du mouvement sont correctement écrites, on peut dire à priori qu'elles n'ont qu'une seule solution vérifiant des conditions initiales données.
En effet, un système physique ne peut se trouver dans deux positions différentes au même moment; si les équations correspondent bien à la réalité (sont écrites correctement), il est logique de considérer qu'elles ont une et une seule solution.
Mais les équations de précession ne sont pas les équations du mouvement, d'où on n'a pas nécessairement leur unicité pour des conditions initiales données.
Le théorème suivant donne donc une condition nécessaire d'admissibilité des solutions des équations simplifiées.

Théorème :

> Si les forces généralisées Q_k ne dépendent pas des vitesses $\dot{\vec{q}}$ et si le déterminant de la matrice gyroscopique G est nul dans la position initiale, alors les équations de précession (3 - 1 - 3), ou bien n'ont pas de solution vérifiant les conditions initiales (3 - 2 - 2), ou bien en ont une infinité.

Démonstration :

Considérons les équations simplifiées (3 - 1 - 3).
Les dérivées $\dot{u}_j$ entrent de façon linéaire dans le membre de gauche de cette équation.
Puisque $|G| = o$ dans la position initiale, ce système d'équation n'a pas de solution ou en admet une infinité [2].

Corollaire :

> Si les forces généralisées Q_k ne dépendent pas des vitesses $\dot{\vec{q}}$ et si nous avons un nombre impair de coordonnées déterminantes, alors les équations de précession n'ont pas de solution ou en admettent une infinité.

Démonstration :

Dans ce cas G est une matrice antisymétrique d'ordre impair; son déterminant est donc nul. Nous vérifions ainsi les hypothèses du théorème précédent.

Conclusion :

La condition $|G| \neq o$ est donc nécessaire pour le passage des solutions des équations du mouvement aux solutions des équations simplifiées pour les systèmes scléronômes dont les forces généralisées ne dépendent pas des vitesses.

§ 3 - 4 : Condition d'admissibilité des solutions des équations de précession pour les systèmes linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du § 2 - 1.

Nous considérons donc les équations du mouvement sous la forme :

$$\mu \; A\ddot{\vec{q}} + G\dot{\vec{q}} = \vec{o} \qquad (3 - 4 - 1)$$

avec les conditions initiales

$$t = o \quad \dot{\vec{q}}(o) = \dot{\vec{q}}_o \; ; \vec{q}(o) = \vec{q}_o \qquad (3 - 4 - 2)$$

On a le théorème suivant :

> Soit un système linéaire **scléronôme soumis uniquement** à l'action de forces gyroscopiques; supposons $|G| \neq o$. Dans ce cas la solution des équations simplifiées existe et est admissible.

Démonstration :

- Considérons le système linéaire autonome (3 - 4 - 1).
  Les équations simplifiées peuvent être obtenues en y annulant les dérivées secondes $\ddot{\vec{q}}$.
  En notant par $\vec{u}$ leur solution nous pouvons écrire :

  $$G \dot{\vec{u}} = \vec{o}$$

  Nous imposons les conditions initiales suivantes :

  $$t = o \quad \vec{u} = \vec{q}_o$$

  Puisque $|G| \neq o$ ce système a comme unique solution : $\dot{\vec{u}} = \vec{o}$

- En intégrant le système (3 -4 -1) par rapport au temps, on obtient :

$$\mu\ A\dot{\vec{q}} + G\vec{q} = \vec{c}$$

où $\vec{c}$ est un vecteur constant d'intégration arbitraire.

En vertu de (3 - 4 - 2) nous avons :

$$\vec{c} = \mu\ A\dot{\vec{q}}_o + G\vec{q}_o \qquad (3 - 4 - 3)$$

Passons à un nouveau vecteur $\vec{q} = \vec{x} + \vec{a}$ où $\vec{a}$ est constant :

$$\mu\ A\,\dot{\vec{x}} + G\,\vec{x} + G\,\vec{a} = \vec{c} \qquad (3 - 4 - 4)$$

Comme $|G| \neq 0$ nous pouvons poser

$$\vec{a} = G^{-1}\,\vec{c} \qquad (3 - 4 - 5)$$

L'équation (3 - 4 - 4) prend la forme :

$$\mu\ A\,\dot{\vec{x}} + G\,\vec{x} = \vec{o} \qquad (3 - 4 - 6)$$

Eliminons $\vec{c}$ des équations (3 - 4 - 3) et (3 - 4 - 5) :

$$\vec{a} = \mu\ G^{-1}\ A\,\dot{\vec{q}}_o + \vec{q}_o$$

Comme $\vec{u} = \vec{q}_o$ on peut écrire

$$\vec{q} = \vec{x} + \vec{a} = \vec{x} + \mu\ G^{-1}\ A\dot{\vec{q}}_o + \vec{q}_o = \vec{x} + \vec{\varepsilon} + \vec{q}_o$$

où $\vec{\varepsilon} = \mu\ G^{-1}\ A\,\dot{\vec{q}}_o$

c'est-à-dire

$$\vec{q} - \vec{u} = \vec{x} + \vec{\varepsilon} \qquad (3 - 4 - 7)$$

Pour démontrer l'admissibilité des solutions des équations simplifiées nous devons vérifier les conditions (3 - 2 - 3), (3 - 2 - 4) et (3 - 2 - 5).

- Les conditions (3 - 2 - 3) et (3 - 2 - 4) sont immédiatement vérifiées car $\vec{u} = \vec{q}_o$ est une constante (dans ce cas il n'y a pas de $\lambda^{(p)}$ ni de $\bar{\lambda}^{(p)}$)

- Il reste à voir que (3 - 2 - 5) est vérifié quand H prend de grandes valeurs.

Le théorème 2 - 1 - 2 nous affirme la stabilité du système par rapport au vecteur $\vec{x}$.

Donc par définition [7], pour de petites valeurs de $|\vec{x}(o)|$ on a de petites valeurs de $|\vec{x}|$; or $|\vec{x}(o)| = |\vec{\varepsilon}|$

en effet, de (3 - 4 - 7) on déduit : $\vec{q}_o - \vec{q}_o = \vec{x}(o) + \vec{\varepsilon}$

donc, pour de grandes valeurs du paramètre H, on peut rendre $|\vec{q} - \vec{u}|$ aussi petit que l'on veut.

La condition (3 - 2 - 5) est donc aussi vérifiée.

Ceci achève la démonstration du théorème.

<u>Conclusion</u> :

Dans les hypothèses considérées, la solution des équations simplifiées représente une très bonne approximation de la solution complète.

Ce résultat simplifie donc énormément la résolution des problèmes qualitatifs (stabilité, ...) relatifs à de tels systèmes.

§ 3 - 5 : Condition d'admissibilité des solutions des équations de précession pour les systèmes linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques et dissipatives dont la dissipation est complète.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du § 2 - 2.

Nous considérons donc les equations du mouvement sous la forme (2 - 2 - 5) :

$$\mu \ddot{\vec{z}} + (\mu B_o + G) \dot{\vec{z}} = \vec{o} \qquad (3 - 5 - 1)$$

où B_o est une matrice diagonale et G une matrice antisymetrique.

Nous choisissons les conditions initiales suivantes :

$$t = o \quad \vec{q}(o) = \vec{q}_o \quad \dot{\vec{q}}(o) = \dot{\vec{q}}_o \qquad (3 - 5 - 2)$$

Considérons le système simplifié :

$$(\mu B_o + G) \dot{\vec{u}} = \vec{o} \qquad (3 - 5 - 3)$$

avec les conditions initiales :

$$t = o \quad \vec{u} = \vec{q}_o \qquad (3 - 5 - 4)$$

Posons $\Delta(\mu) = \det (B_o \mu + G)$

on a : $\Delta(\mu) \neq o$ (appendice 2 - 2)

Donc le système simplifié (3 - 5 - 3) a comme unique solution : $\dot{\vec{u}} = \vec{o}$

Les conditions initiales (3 - 5 - 4) imposent :

$$\vec{u}(t) = \vec{z}_o \qquad (3 - 5 - 5)$$

On a le théorème suivant :

> Pour que la solution des équations de précession d'un système lineaire scléronôme surlequel agissent des forces gyroscopiques et dissipatives dont la dissipation est complète soit admissible il faut et il suffit que $|G| \neq o$

Démonstration :

. Intégrons l'équation (3 - 5 - 1) par rapport au temps :

$$\mu \dot{\vec{z}} + (\mu B_o + G) \vec{z} = \vec{c} \qquad (3 - 5 - 6)$$

où $\vec{c}$ est un vecteur constant d'intégration.

En vertu de (3 - 5 - 2)

$$\vec{c} = \mu \dot{\vec{z}}_o + (\mu B_o + G) \vec{z}_o \qquad (3 - 5 - 7)$$

Passons au nouveau vecteur $\vec{x}$ par la formule

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{a} \qquad (3 - 5 - 8)$$

On obtient :

$$\mu \dot{\vec{x}} + (\mu B_o + G) \vec{x} + (\mu B_o + G) \vec{a} = \vec{c}$$

Comme $|\mu B_o + G| \neq o$ nous pouvons poser :

$$\vec{a} = (\mu B_o + G)^{-1} \vec{c} \qquad (3 - 5 - 9)$$

L'équation (3 - 5 - 6) prend la forme

$$\mu \dot{\vec{x}} + (\mu B_o + G) \vec{x} = \vec{o} \qquad (3 - 5 -10)$$

En éliminant $\vec{c}$ des équations (3 - 5 - 7) et (3 - 5 - 9) :

$$\vec{a} = \mu (\mu B_o + G)^{-1} \dot{\vec{z}}_o + \vec{z}_o$$

En utilisant cette expression de $\vec{a}$ dans (3 - 5 - 8) et en utilisant (3 - 5 - 5):

$$\vec{z}(t) - \vec{u}(t) = \vec{x} + \vec{\alpha} \qquad (3 - 5 -11)$$

où

$$\vec{\alpha} = \mu (\mu B_o + G)^{-1} \dot{\vec{z}}_o \qquad (3 - 5 -12)$$

Par le théorème 2 - 2 - 1, nous pouvons dire :

$$\vec{x}(t) \longrightarrow \vec{o} \quad \text{si} \quad t \longrightarrow \infty$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t \to \infty} (\vec{z}(t) - \vec{u}(t)) = \vec{\alpha} \qquad (3 - 5 -13)$$

Ecrivons l'égalité vectorielle (3 - 5 - 12) sous la forme scalaire :

$$\alpha_k = \frac{\mu}{\Delta(\mu)} \sum_{j=1}^{s} \Delta_{jk}(\mu)\, \dot{z}_{oj} \qquad (3 - 5 - 14)$$

où $\Delta_{jk}(\mu)$ est le mineur de l'élément (i, j) de la matrice $\mu B_o + G$.

. Condition suffisante

Nous pouvons écrire $\Delta(\mu)$ sous la forme (appendice 3 - 5) :

$$\Delta(\mu) = a_o \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \dots + a_{s-2}\mu^2 + a_s \qquad (s = 2\,n)$$

(3 - 5 -15)

où $a_o =$ det B

$a_s = \Delta(o) = |G| \neq o$

Pour des valeurs assez grandes du paramètre H on a :

$$\Delta(\mu) = |G| + O(\mu^2) \simeq |G|$$

Avec la diminution de μ les nombres $|\alpha_k|$ peuvent donc être rendus aussi petits que l'on veut.

L'équation (3 - 5 - 11) donne :

$$\vec{x}(o) = -\vec{\alpha}$$

Au moment initial le module du vecteur $\vec{x}$ est très petit pour de grandes valeurs de H.

Donc en vertu de la stabilité asymptotique du système par rapport à $\vec{x}$, le module de ce dernier tend vers o c'est-à-dire sera petit pour tout temps t positif.

Donc pour de grandes valeurs du paramètre H, la différence $|\vec{z}(t) - \vec{u}(t)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut.

La troisième condition d'admissibilité de la solution des équations simplifiées est donc satisfaite.

Les conditions (3 - 2 - 3) et (3 - 2 - 4) sont également vérifiées puisque $\vec{u} = \vec{q_o}$ est une constante.

• Condition nécessaire

Supposons $|G| = o$

dans ce cas $\Delta(\mu)$ peut s'écrire de deux façons différentes suivant que s est pair ou impair, à savoir (appendice 3 - 5) :

$$\Delta(\mu) = a_o \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \ldots + a_s ; \; a_s = |G| ; \; s = 2n$$

$$\Delta(\mu) = a_o \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \ldots + a_{s-1}\mu ; \; s = 2n + 1 \qquad (3 - 5 - 16)$$

dans les 2 cas, $\Delta(\mu)$ a au moins une racine nulle car $a_s = o$

soit m la multiplicité de la racine nulle de l'équation $\Delta(\mu) = o$

on a donc :

$$\Delta(\mu) = a_{s-m} \mu^m (1 + O(\mu^2)) ; \; a_{s-m} \neq o ; \; m \geq 1 \qquad (3 - 5 - 17)$$

Pour démontrer la non-admissibilité des solutions des équations de précession, il suffit de voir qu'il existe au moins un système de conditions initiales de l'équation (3 - 5 - 1) pour lequel on ne puisse pas diminuer α_q en diminuant μ. Ainsi la troisième condition d'admissibilité ne sera plus satisfaite.

Comme $a_{s-m} \neq o$, il existe un mineur d'ordre s-m de G non nul, tous les mineurs d'ordre supérieur étant nuls. (appendice 3 - 5).

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il s'agit du mineur formé des s-m premières lignes et des s-m premières colonnes, à savoir

$$\begin{vmatrix} o & g_{12} & \cdots & g_{1,\, s-m} \\ g_{21} & o & \cdots & g_{2,\, s-m} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{s-m,1} & g_{s-m,2} & \cdots & o \end{vmatrix} \neq o \qquad m \geqslant 1$$

(3 - 5 -18)

Choisissons les conditions initiales pour l'équation (3 - 5 - 1) de la manière suivante :

$$\dot{z}_{o1} = \dot{z}_{o2} = \ldots = \dot{z}_{o,\, s-1} = o \qquad \dot{z}_{os} \neq o$$

Avec ces valeurs, l'équation (3 - 5 - 14) devient :

$$\alpha_s = \frac{\mu}{\Delta(\mu)} \Delta_{ss}(\mu)\ \dot{z}_{os} \qquad (3 - 5 - 19)$$

$$\text{où } \Delta_{ss}(\mu) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mu b_1 & \cdots & g_{1,s-m} & \cdots & g_{1,s-1} \\ \vdots & & & & \\ g_{s-m,1} & \cdots & \mu b_{s-m} & \cdots & q_{s-m,\, s-1} \\ \hline \vdots & & & & \vdots \\ g_{s-1,1} & \cdots & g_{s-1,s-m} & \cdots & \mu b_{s-1} \end{array}\right|$$

Pour $\mu = o$, tous les mineurs diagonaux de $\Delta_{ss}(\mu)$ d'ordre supérieur à s-m sont nuls mais parmi ceux d'ordre s-m, il y en a au moins un qui est non nul, à savoir (3 - 5 - 18). Développons $\Delta_{ss}(\mu)$ en puissance de μ; on obtient :

$$\Delta_{ss}(\mu) = a'_o \mu^{s-1} + a'_2\ \mu^{s-3} + \ldots + a'_{s-m} \mu^{m-1}$$

où $a'_{s-m} \neq o$.

Pour μ assez petit on déduit l'estimation suivante :

$$\Delta_{ss}(\mu) = a'_{s-m}\,\mu^{m-1}\,(1 + 0\,(\mu^2)) \qquad (3 - 5 - 20)$$

En utilisant les expressions (3 - 5 - 16), (3 - 5 - 20) et (3 - 5 - 19) :

$$\alpha_s = \frac{1 + 0\,(\mu^2)}{1 + 0\,(\mu^2)} \cdot \frac{a'_{s-m}}{a_{s-m}} \cdot \dot{z}_{os}$$

Donc si μ diminue, la valeur de α_s ne peut pas être rendue aussi petite que l'on veut et les équations de précession ne sont donc pas admissibles.

Nous en déduisons la nécessité de la condition $|G| \neq 0$.

§ 3 - 6 : Conditions suffisantes et conditions nécessaires de stabilité des équations de précession associées à un système potentiel.

Le théorème de Thomson détermine seulement une condition nécessaire de stabilisation gyroscopique d'une position d'équilibre instable d'un système potentiel.

Pour trouver des conditions suffisantes nous allons considérer le système de précession associé.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du § 2 - 3.

Nous considérerons donc les équations du mouvement sous la forme (2 - 3 - 8)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \Gamma_k \quad (k = 1, \ldots, s) \qquad (3 - 6 - 1)$$

où Γ_k représente la force gyroscopique.

V est l'énergie potentielle.

Les équations de précession correspondantes ont la forme :

$$H\, G(\vec{u})\, \dot{\vec{u}} = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad (3 - 6 - 2)$$

1. Théorème.

> si dans la position d'équilibre isolée, l'énergie potentielle V a un extremum (maximum ou minimum), alors la position d'équilibre du système simplifié est stable.

Démonstration :

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer cette position d'équilibre à l'origine.

Multiplions les deux membres de l'équation (3 - 6 - 2) par $\dot{\vec{u}}$. En appliquant la définition des forces gyroscopiques on obtient :

$$\dot{\vec{u}} \cdot \vec{\text{grad}}\ V = 0$$

L'énergie potentielle V ne dépend que des coordonnées $\vec{u}$, par conséquent :

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{u}}\ \dot{\vec{u}} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial u_k}\ \dot{u}_k = \frac{dV}{dt} = 0$$

On a donc l'intégrale d'énergie du système simplifié :

$$V(u_1, \ldots, u_s) = h$$

où h est une constante d'intégration.

La fonction V est donc définie au voisinage de 0 tandis que sa dérivée totale par rapport au temps en vertu des équations du mouvement (3 - 6 - 2) est nulle.

La position d'équilibre du système simplifié est donc stable.

__Remarque__ :

Par le théorème du § 3 - 3, ce théorème détermine une condition suffisante de stabilité pour le système simplifié seulement si on a un nombre pair de coordonnées u_i

__Corollaire__ :

Si la position d'équilibre d'un système potentiel est stable, la position d'équilibre du système simplifié est stable aussi.

__Démonstration__ :

Par la réciproque du théorème de Lagrange - Dirichlet (appendice 00) l'énergie potentielle du système potentiel a un minimum.

La thèse se déduit immédiatement du théorème précédent.

2. <u>Conditions nécessaires de stabilité de la position d'équilibre d'un système linéaire simplifié.</u>

Dans ce qui précède, nous avons travaillé avec les équations simplifiées (3 - 6 - 2) issues des équations complètes (3 - 6 - 1).

Le système linéaire associé à (3 - 6 - 1) a la forme (2 - 3 -10) :

$$A \ddot{\vec{q}} + HG \dot{\vec{q}} + c\vec{q} = \vec{o} \qquad (3 - 6 - 3)$$

Le système simplifié associé s'écrit :

$$HG \dot{\vec{u}} + c\, \vec{u} = \vec{o} \qquad (3 - 6 - 4)$$

En passant aux coordonnées normales, la matrice C prend la forme C_o.

Les équations (3 - 6 -4) deviennent :

$$HG \dot{\vec{u}} + C_o \vec{u} = \vec{o}$$

L'énergie potentielle $V = \frac{1}{2} C \vec{u}\,\vec{u}$ se transforme en :

$$V = \frac{1}{2} C_o \vec{u}\,\vec{u} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} c_k u_k^2$$

L'équation caractéristique du système de précession (3 - 6 - 4) est :

$$\Delta^{(p)} (\lambda) = \det (HG\lambda + C) = o \qquad (3 - 6 - 5)$$

Supposons $|G| \neq o$; pour cela il faut que s soit pair.

Posons $H\lambda = Y$.

L'équation caractéristique (3 - 6 - 5) devient :

$$\Delta^{(p)} (Y) = \det (GY + C) = o \qquad (3 - 6 - 6)$$

Or $\Delta^{(p)}(Y)$ vérifie la relation (appendice 3 - 6)

$$\Delta^{(p)}(Y) = \Delta^{(p)}(-Y).$$

Cette égalité exprime le fait que l'équation (3 - 6 - 5) ne contient Y que dans les puissances paires.

On a :

$$a_{2n} Y^{2n} + a_{2n-2} Y^{2n-2} + \dots = a_{4n-2} Y^2 + a_{4n} = 0 \qquad (3 - 6 - 7)$$

où $a_{2n} = \det G$

$a_{4n} = \det C$

Conclusion :

Pour avoir la stabilité de la position d'équilibre du système linéaire scléronôme simplifié, il faut que toutes les racines de l'équation (3 - 6 - 7) par rapport à Y^2 soient réelles négatives.

3. De ce qui précède nous pouvons aussi déduire les théorèmes suivants :

- Si l'énergie potentielle V a un extremum dans la position d'équilibre isolée, le système potentiel linéaire simplifié est stable (par le théorème du § 3 - 6).

- Si la position d'équilibre isolée d'un système potentiel est instable et a un degré impair de stabilité, le système de précession est instable (par le théorème de Thomson et Tait).

4. Remarques.

Si nous supposons que le mouvement de précession est stable, toutes les racines de (3 - 6 - 7) par rapport à Y^2 sont réelles et négatives. Par rapport à Y elles sont purement imaginaires.
Notons-les par $Y_k i$ $(k = 1, \dots, 2n)$

Dans ce cas les racines de l'équation (3 - 6 -5) par rapport à λ sont :

$$\lambda_k^{(p)} = \frac{Y_k}{H} i \qquad (k = 1, \dots, 2n)$$

$$Y_{n+j} = - Y_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

où les valeurs Y_k $(k = 1, \dots, 2n)$ ne dépendent pas de H.
Donc pour de grandes valeurs de H toutes les racines λ_k sont petites en module.

Par conséquent, le mouvement stable du système potentiel simplifié est formé de $n = \frac{s}{2}$ oscillations harmoniques de fréquence très petite et de très grande période. [9]

§ 3 - 7 : Condition d'admissibilité de la solution des équations simplifiées pour les systèmes <u>potentiels</u> linéaires scléronômes soumis à l'action de forces gyroscopiques.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du § 2 - 3.
Nous considérons donc les équations du mouvement sous la forme (2 - 3 -10)

$$A\ddot{\vec{q}} + HG\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{o} \qquad (3 - 7 - 1)$$

On a le théorème suivant :

> Si on ajoute au système potentiel linéaire scléronôme (3 - 7 - 1) des forces gyroscopiques vérifiant les conditions
>
> 1) $|G| \neq o \quad |C| \neq o$
>
> 2) le système de précession est stable
>
> 3) les équations
>
> $$\Delta^{(n)}(\lambda) = |A\lambda + HG| = o \qquad (3 - 7 - 2)$$
>
> $$\Delta^{(p)}(\lambda) = |HG\lambda + C| = o \qquad (3 - 7 - 3)$$
>
> n'ont que des racines distinctes,
>
> Alors, pour des valeurs assez grandes de H, la solution des équations de précession est admissible.

Démonstration :

. Etant dans les mêmes hypothèses que celles du théorème 2 - 3 - 4, nous pouvons déduire les résultats suivants :

$$\lambda_k^{(p)} = \frac{Y_k}{H} i \ ; \ Y_{n-j} = - Y_j \quad (k = 1, \ldots, 2\,n; \; j = 1, \ldots, n)$$

(3 - 7 - 4)

$$\lambda_k^{(n)} = H\, \gamma_k\, i \ ; \ \gamma_{n+j} = - \gamma_j \quad (k = 1, \ldots, 2\,n; \; j = 1, \ldots, n)$$

(3 - 7 - 5)

$$\overline{\lambda}_k^{(p)} = \frac{Y_k\,(\mu)}{H} i \ ; \ Y_{n+j}\,(\mu) = - Y_j\,(\mu)$$

$$(k = 1, \ldots, 2\,n; \; j = 1, \ldots, n\,)$$

(3 - 7 - 6)

$$\overline{\lambda}_k^{(n)} = H\, \gamma_k\,(\mu)\, i \ ; \ \gamma_{n+j}\,(\mu) = - \gamma_j(\mu)$$

$$(k = 1, \ldots, 2\,n; \; j = 1, \ldots, n)$$

(3 - 7 - 7)

$$Y_k\,(\mu) = Y_k + 0\,(\mu^2) \ ; \ \gamma_k\,(\mu) = \gamma_k + 0\,(\mu^2)$$

(3 - 7 - 8)

$$Y_k = Y_k\,(o) \qquad \gamma_k = \gamma_k\,(o) \qquad (3 - 7 - 9)$$

Nous devons vérifier les conditions (3 - 2 - 3), (3 - 2 - 4) et (3 - 2 - 5).

La relation (3 - 2 - 3) est immédiatement satisfaite car en vertu des équations (3 - 7 - 4), (3 - 7 - 6), (3 - 7 - 8), (3 - 7 - 9), et pour de petites valeurs de μ on a :

$$\left| \frac{\overline{\lambda}^{(p)}_k - \lambda^{(p)}_k}{\lambda^{(p)}_k} \right| = \left| \frac{(Y_k(\mu) - Y_k)\, i}{Y_k\, i} \right| = \left| \frac{0\,(\mu^2)}{Y_k} \right| < \mathcal{E} .$$

Comme $\overline{\lambda}^{(p)}_k = \lambda^{(p)}_k + \frac{0\,(\mu)}{H}\, i$, pour de grandes valeurs de H, la condition (3 - 2 - 4) est aussi vérifiée.

Il reste à établir l'inégalité (3 - 2 - 5).

Pour cela, écrivons les équations de précession associées à (3 - 7 - 1):

$$HG\,\dot{\vec{u}} + C\,\vec{u} = \vec{o} \qquad (3 - 7 - 10)$$

La solution peut être cherchée sous la forme

$$\vec{u} = e^{\lambda t}\,\vec{D}^{(p)} \qquad (3 - 7 - 11)$$

où $\vec{D}^{(p)}$ est un vecteur inconnu et λ une valeur inconnue.

En introduisant cette valeur de $\vec{u}$ dans (3 - 7 - 10) on obtient :

$$(HG\,\lambda + C)\;\vec{D}^{(p)}\;e^{\lambda t} = \vec{o}$$

ou, en posant $Y = H\lambda$ (3 - 7 -12)

$$(G\,Y + C)\ \vec{D}^{(p)} = \vec{o} \qquad (3 - 7 -13)$$

L'équation vectorielle (3 - 7 - 13) est équivalente à s équations scalaires :

$$\begin{array}{l} c_{11}\ D_1^{(p)} + \ldots + (g_{1s}\ Y + c_{1s})\ D_s^{(p)} = o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (g_{s1}\ Y + c_{s1})\ D_1^{(p)} + \ldots + c_{ss}\ D_s^{(p)} = o \end{array} \qquad (3 - 7 -14)$$

Le déterminant de ce système d'équations linéaires homogènes par rapport aux valeurs $D_1^{(p)}, \ldots, D_s^{(p)}$ correspond au déterminant (2 - 3 - 6)

$$\Delta(Y, o) = |G\,Y + C| = o \qquad (3 - 7 -15)$$

Nous avons vu que ses racines sont des nombres imaginaires purs et nous les avions notés par $Y_k\, i$ $(k = 1, \ldots, 2n)$

En reportant ces valeurs dans (3 - 7 - 13) nous obtenons :

$$(G\,Y_k\, i + C)\ \vec{D}_k^{(p)} = \vec{o} \qquad (3 - 7 -16)$$

où $\vec{D}_k^{(p)}$ est la valeur du vecteur $\vec{D}^{(p)}$ correspondant à la racine $Y_k\, i$.

Si l'on reporte cette dernière dans (3 - 7 - 14) nous pouvons dire que les équations de ce système sont linéairement dépendantes car dans ce cas $|G\,Y_k + C| = o$.

Néanmoins le rang de ce système est $(s-1)$ car on a vu précédemment que les racines $Y_k\, i$ étaient simples [2].

Eliminons une équation du système (3 - 7 - 14), par exemple la dernière. Les autres peuvent être présentées sous la forme [2] :

$$\frac{D^{(p)}_{1k}}{\Delta_1\,(Y_k\, i)} = \frac{D^{(p)}_{2k}}{\Delta_2\,(Y_k\, i)} = \ldots = \frac{D^{(p)}_{sk}}{\Delta_s\,(Y_k\, i)}$$

(3 - 7 -17)

où $D^{(p)}_{1k}$, ..., $D^{(p)}_{sk}$ sont les composantes du vecteur $\vec{D}^{(p)}_k$ correspondant à la racine $Y_k\, i$ et Δ_1, ..., Δ_s les mineurs des éléments de la dernière ligne de la matrice $(G\,Y + C)$

Au moins un des mineurs $\Delta_j\,(Y_k\, i)$ est non nul.

De plus les composantes du vecteur $\vec{D}^{(p)}_k$ et le vecteur lui-même sont déterminés à une constante multiplicative près, que nous fixons de façon arbitraire.

Nous pouvons dès lors calculer, pour chaque racine $Y_k\, i$ de (3 - 7 - 15), un vecteur $\vec{D}^{(p)}_k$:

$$D^{(p)}_k = \begin{pmatrix} D^{(p)}_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{(p)}_{sk} \end{pmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

En utilisant (3 - 7 -11) et (3 - 7 -12), nous trouvons s solutions particulières linéairement indépendantes de (3 - 7 -10), à savoir

$$\vec{u}_1 = \vec{D}_1^{(p)} \exp\left(\frac{Y_1}{H} i\ t\right),\ \ldots\ \vec{u}_s = \vec{D}_s^{(p)} \exp\left(\frac{Y_s}{H} i\ t\right)$$

La solution générale prend la forme :

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k\ \vec{D}_k^{(p)} \exp\left(\frac{Y_k}{H} i\ t\right) \qquad (3 - 7 -18)$$

où α_k ($k = 1, \ldots, s$) sont des constantes arbitraires.

En vertu des conditions initiales pour (3 - 7 -10) :

$$\vec{q}_o = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k\ \vec{D}_k^{(p)} \qquad (3 - 7 -19)$$

L'équation vectorielle (3 - 7 -19) détermine les nombres α_k.

or

$$D^{(p)} = \begin{pmatrix} D_{11}^{(p)} & \ldots & D_{1s}^{(p)} \\ & & \\ D_{s1}^{(p)} & \ldots & D_{ss}^{(p)} \end{pmatrix} ; \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

A l'aide de ces notations (3 - 7 -19) devient :

$$\vec{q}_o = D^{(p)} \vec{\alpha}$$

La matrice $D^{(p)}$ est régulière [2]

On peut donc écrire :

$$\vec{\alpha} = (D^{(p)})^{-1} \vec{q}_o$$

. Passons maintenant à la construction de la solution générale du système complet (3 - 7 - 1)

Cette dernière peut être cherchée sous la forme :

$$\vec{q} = \vec{D}(\mu) \quad e^{\lambda t} \qquad (3 - 7 - 20)$$

où $\vec{D}(u)$ est un vecteur inconnu et λ une valeur inconnue.

En introduisant (3 - 7 - 20) dans (3 - 7 - 1) :

$$(A \lambda^2 + HG \lambda + C) \quad \vec{D}(\mu) = \vec{o} \qquad (3 - 7 - 21)$$

Soit $\Delta(\lambda)$ son équation caractéristique.

$$\Delta(\lambda) = | A \lambda^2 + HG \lambda + C | = o \qquad (3 - 7 - 22)$$

A chacune de ses racines λ_k on peut associer un vecteur $\vec{D}_k(\mu)$ qui peut être trouvé à partir de (3 - 7 - 21) de la même façon que $\vec{D}_k^{(p)}$.

Mais ici nous allons utiliser une autre méthode dans le but de mettre en évidence le petit paramètre μ.

Pour cela on recherche $\vec{D}_k(\mu)$ sous forme de série par rapport à μ :

$$D_k(\mu) = \vec{D}_{ko} + \mu\,\vec{D}_{k1} + \mu^2\,\vec{D}_{k2} + \ldots$$

(3 - 7 -23)

Les zéros de $\Delta(\lambda)$, donnés par (3 - 7 - 6) et (3 - 7 - 7), peuvent être présentés en 2 groupes; le premier contiendra les nombres $\bar{\lambda}_k^{(p)}(\mu)$ correspondant aux racines des équations de précession; les autres racines $\bar{\lambda}_k^{(n)}(\mu)$ appartiendront au deuxième groupe (voir § 2 - 3).

Notons par $D_k^{(p)}(\mu)$ et $D_k^{(n)}(\mu)$ les valeurs du vecteur $\vec{D}_k(\mu)$ associé respectivement au premier et au second groupe des racines de (3 - 7 -22).

En reportant $\bar{\lambda}_k^{(p)}(\mu)$ et $\vec{D}_k^{(p)}(\mu)$ dans (3 - 7 -23) :

$$\left(A\left(\mu\,Y_k\,i + O(\mu^2)\right)^2 + G\left(Y_k i + O(\mu^2)\right) + C\right)\left(\vec{D}_{ko}^{(p)} + \mu\,\vec{D}_{k1}^{(p)} + \ldots\right)$$

$$= \vec{o}$$

Pour $\mu = o$ on a :

$$(G\,Y_k\,i + C)\;\vec{D}_{ko}^{(p)} = \vec{o} \qquad (3 - 7 -24)$$

En comparant les équations (3 - 7 -16) et (3 - 7 -24) nous voyons que les vecteurs $\vec{D}_{ko}^{(p)}$ et $\vec{D}_k^{(p)}$ coïncident.

En considérant (3 - 7 -23) on peut écrire :

$$\vec{D}_k^{(p)}(\mu) = \vec{D}_k^{(p)} + \vec{O}(\mu) \qquad (3 - 7 -25)$$

La solution générale de (3 - 7 - 1) peut être présentée sous la forme :

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^{s} \left(\alpha_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(p)} (\mu) \; \exp \left(\frac{Y_k (\mu)}{H} i \; t\right) \right.$$

$$\left. + \beta_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(n)} \; (\mu) \; \exp \left(H \; \gamma_k(\mu) \; i \; t\right)\right)$$

$$(3 - 7 -27)$$

où $\alpha_k (\mu)$ et $\beta_k (\mu)$ sont des constantes arbitraires dépendant en général du paramètre μ.

En utilisant les conditions initiales nous pouvons écrire les équations qui déterminent les valeurs $\alpha_k (\mu)$ et $\beta_k (\mu)$

$$\vec{q}_o = \sum_{k=1}^{s} \left(\alpha_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(p)} (\mu) + \beta_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(n)} (\mu) \right))$$

$$(3 - 7 -28)$$

$$\dot{\vec{q}}_o = \sum_{k=1}^{s} \left(\alpha_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(p)} (\mu) \; \frac{Y_k (\mu)}{H} \; i \; + \right.$$

$$\left. \beta_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(n)} \; H \; \gamma_k (\mu) \; i \right)$$

En divisant la seconde équation par Hi on obtient :

$$- i \; \mu \; \dot{\vec{q}}_o = \sum_{k=1}^{s} \left(\mu^2 \; \alpha_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(p)} (\mu) \; Y_k (\mu) \; + \right.$$

$$\beta_k (\mu) \; \vec{D}_k^{(n)} (\mu) \; \gamma_k (\mu)$$

$$(3 - 7 -29)$$

Nous allons chercher $\alpha_k(\mu)$ et $\beta_k(\mu)$ sous forme de série par rapport à μ :

$$\alpha_k(\mu) = \alpha_k^{(o)} + \mu\,\alpha_k^{(1)} + \dots$$

$$\beta_k(\mu) = \beta_k^{(o)} + \mu\,\beta_k^{(1)} + \dots$$

(3 - 7 -30)

En utilisant ces expressions dans (3 - 7 -28) et (3 - 7 -29) et en tenant compte de (3 - 7 - 8), (3 - 7 -25) et (3 - 7-26), nous pouvons comparer, dans les résultats obtenus, les termes de puissance o et 1 par rapport à μ pour finalement obtenir deux systèmes d'équations nous permettant de déterminer $\alpha_k^{(o)}$, $\beta_k^{(o)}$, $\alpha_k^{(1)}$ et $\beta_k^{(1)}$:

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\alpha_k^{(o)}\,\vec{D}_k^{(p)} + \beta_k^{(o)}\,\vec{D}_k^{(n)}\right) = \vec{q}_o \;;\; \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{(s)}\,\gamma_k\,\vec{D}_k^{(n)} = \vec{o}$$

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\alpha_k^{(1)}\,\vec{D}_k^{(p)} + \beta_k^{(1)}\,\vec{D}_k^{(n)}\right) = \vec{o} \;;\; \sum_{k=1}^{s} \beta_k^{(1)}\,\gamma_k\,\vec{D}_k^{(n)} = -i\dot{\vec{q}}_o$$

(3 - 7 -31)

Comme la matrice $D^{(n)}$ est régulière et $\gamma_k \neq o$ $(k = 1, \dots, s)$ nous avons :

$$\beta_k^{(o)} = o \qquad (3 - 7 -32)$$

par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{(o)}\,\vec{D}_k^{(p)} = \vec{q}_o$$

En comparant cette expression avec la formule (3 - 7 -19), nous voyons que les nombres $\alpha_k^{(o)}$ et α_k coïncident :

$$\alpha_k^{(o)} = \alpha_k \qquad (3 - 7 - 33)$$

(les valeurs α_k sont déterminées à partir des équations de précession !)

Les équations (3 - 7 -31) déterminent les constantes $\alpha_k^{(1)}$ et $\beta_k^{(1)}$. Ces dernières ne dépendent pas du paramètre μ car les vecteurs $\vec{D}_k^{(p)}$, $\vec{D}_k^{(n)}$ et les nombres γ_k n'en dépendent pas.

En utilisant les égalités (3 - 7 -30), (3 - 7 -32) et (3 - 7 -33), nous obtenons une estimation pour les constantes $\alpha_k(\mu)$ et $\beta_k(\mu)$:

$$\alpha_k(\mu) = \alpha_k + 0(\mu)$$

$$\beta_k(\mu) = 0(\mu) \qquad (3 - 7 -34)$$

Considérons de nouveau la solution générale (3 - 7 -27) et remplaçons-y les constantes $\alpha_k(\mu)$ et $\beta_k(\mu)$ par leurs estimations (3 - 7 -34), les vecteurs $\vec{D}_k^{(p)}(\mu)$ et $\vec{D}_k^{(n)}(\mu)$ par leurs valeurs approximatives (3 - 7 -25) et (3 - 7 -26) et les nombres $Y_k(\mu)$ et $\gamma_k(\mu)$ par Y_k et γ_k suivant les équations (3 - 7 - 8); on obtient :

$$\vec{q}(t) = \sum_{k=1}^{s} ((\alpha_k + 0(\mu))\ \vec{D}_k^{(p)} \exp\left(\frac{Y_k}{H}\, it\right)$$

$$+ 0(\mu)\ \vec{D}_k^{(n)} \exp(H\gamma_k\, it))$$

En utilisant la solution générale des équations de précession (3 - 7 - 18), on peut écrire :

$$\vec{q}\,(t) - \vec{u}\,(t) = O\,(\mu) \sum_{k=1}^{s} \left(\vec{D}_k^{(p)} \exp\left(-\frac{\gamma_k}{H}\, it\right) + \vec{D}_k^{(n)} \exp\left(H\,\gamma_k\, it\right)\right)$$

Cette expression montre que, pour de grandes valeurs du paramètre H, la différence $\vec{q}\,(t) - \vec{u}\,(t)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut.
La condition (3 - 2 - 5) est donc vérifiée.
Ceci achève la démonstration du théorème.

Conclusion :

La solution des équations de précession est donc admissible pour les systèmes linéaires scléronômes sur lesquels agissent des forces gyroscopiques vérifiant les conditions citées au début de ce paragraphe.

Remarque :

L'admissibilité des solutions des équations simplifiées ne demande pas la présence de forces dissipatives.
Si l'on vérifie les hypothèses du théorème qui précède, on peut donc utiliser les équations de précession, quelles que soient les forces dissipatives présentes dans le système.

L'étude des solutions des équations du mouvement d'un système et de leur stabilité s'avère parfois difficile et fastidieuse.

Les résultats de ce chapitre nous permettent, dans certains cas, de simplifier la résolution de tels problèmes et apparaissent, par le fait même, comme fondamentaux.

Nous avons voulu montrer dans les exemples du chapitre 5 que si certaines hypothèses ne sont pas vérifiées, la solution des équations simplifiées peuvent ne pas exister, être tout à fait différentes des véritables solutions ou en différer qualitativement.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

Introduction à l'étude des Systèmes Gyroscopiques /2

Tome II

Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Licencié en Sciences mathématiques

par

André HARDY

Jules SOLOT

Promotrice : Madame G. PLOTNIKOVA

C H A P I T R E   4

E T U D E   D E   L A   S T A B I L I T E   D ' U N   S Y S T E M E   A   P A R T I R   D E   S E S   I N T E - G R A L E S   P R E M I E R E S

CHAPITRE 4 : ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME A PARTIR DE SES INTEGRALES PREMIERES.

§ 4 - 1 : Introduction au problème.

. Dans un grand nombre de systèmes mécaniques apparaissent des intégrales premières (conservation de l'énergie, du moment angulaire ...) [4]. D'autre part le théorème de stabilité de Liapounov nous fournit un critère assez simple pour étudier cette dernière.

. Supposons que les équations du mouvement perturbé sont du type [12]

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\ (x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

supposons encore que ce système admet p intégrales premières

$$U_1\ (x_1, \ldots, x_n, t)$$
$$\vdots$$
$$U_p\ (x_p, \ldots, x_n, t)$$

avec $p < n$ et $U_i\ (o, \ldots, o, t) = o\ \forall i$

Nous voudrions déterminer une fonction de Liapounov. Cherchons-la sous la forme

$$\phi\ (U_1, \ldots, U_p) = f\ (x_1, \ldots, x_n, t)$$

. Une des conditions est de suite réalisée : la dérivée de ϕ par rapport à t s'annule :

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial U_1} \dot{U}_1 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial U_p} \dot{U}_p = 0$$

Il nous reste donc à analyser le caractère défini ou non défini de f par rapport à $x_1, \dots, x_n$.

§ 4 - 2 : La méthode de Chetaev.

Cette méthode est basée sur le choix d'une fonction

$\phi(U_1, \ldots, U_p)$ de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_p U_p + C_1 U_1^2 + \ldots \pm C_p U_p^2$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, C_1, \ldots, C_p$ sont des constantes à déterminer de manière à rendre, si possible, la fonction $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ définie par rapport à $x_1, \ldots, x_n$.

Il suffit pour cela que le développement de $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ commence par une forme quadratique définie car les termes d'ordre supérieur à 2 sont négligeables.

G.K. Pozharitskii a étudié des conditions suffisantes de stabilité à partir de la forme particulière :

$$\Psi(U_1, \ldots, U_p) = U_1^2 (x_1, \ldots, x_n, t) + \ldots + U_p^2 (x_1, \ldots, x_n, t)$$

Nous reprenons ici quelques résultats [22]

Nous verrons sous quelles conditions cette fonction est définie positive et le rapport qui existe entre ϕ et Ψ.

§ 4 - 3 : Théorèmes fondamentaux.

Bien qu'ils soient importants, nous ne démontrons pas ici ces théorèmes. Le lecteur intéressé peut consulter [22]

1. Théorème 1.

Il existe une fonction $\phi(U_1, \ldots, U_p)$ définie (c'est-à-dire une fonction $f\ (x_1, \ldots, x_n, t)$ définie par rapport à $x_1, \ldots, x_n$)

ssi

$\Psi(U_1, \ldots, U_p)$ est définie par rapport à $x_1, \ldots, x_n$

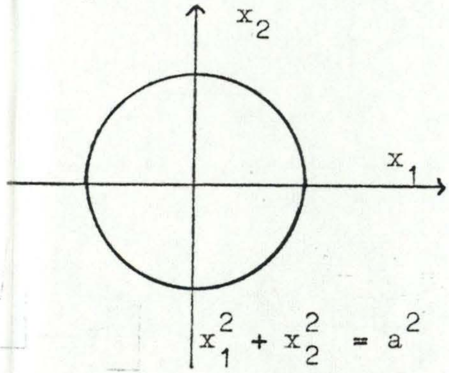
2. Théorème 2.

$\Psi(U_1, \ldots, U_p)$ est définie par rapport à $x_1, \ldots, x_n$

ssi

$\exists\, U_i\ (x_1, \ldots, x_n, t)\ (1 \leqslant i \leqslant p)$ pour laquelle

$\exists\, r_i\ (x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, $\rho_i\ (x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ définies telles que



$U_i^2\ (x_1, \ldots, x_n, t) > r_i$ si

* $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > o$

* $U_1^2 + \ldots + U_{i-1}^2 + U_{i+1}^2 + \ldots + U_p^2 < \rho_i\ (x_1^2 + \ldots + x_n^2)$

. Commentaire.

Les fonctions r_i et ρ_i sont indépendantes du temps; donc pour tout temps t, si $U_1^2 + \dots + U_{i-1}^2 + U_{i+1}^2 + \dots + U_p^2$ devient petit (même nul), U_i fera en sorte que $\sum_{j=1}^{p} U_j^2$ soit toujours positive.

. Si $U_1, \dots, U_p$ ne dépendent pas explicitement du temps, les fonctions nulles $\rho_i = o$ et $r_i = o$ satisfont toujours les conditions du théorème; nous pouvons donc énoncer le

corollaire :

> Si $U_1 \dots U_p$ ne dépendent pas explicitement du temps, alors $\Psi(U_1, \dots, U_p)$ est définie
>
> ssi
>
> $\exists\, U_i\ (x_1, \dots, x_n)$ telle que
>
> $U_i\ (x_1, \dots, x_n) > o$ sauf pour $x_1 = \dots = x_n = o$
>
> $U_1\ (x_1, \dots, x_n) = \dots = U_{i-1}\ (x_1, \dots, x_n) = U_{i+1}\ (x_1, \dots, x_n) = \dots = U_p\ (x_1, \dots, x_n) = o$
>
> $\forall\ (x_1, \dots, x_n)$

. A partir de ce corollaire, nous pouvons déduire une technique de calcul :

a) supposons qu'à partir du système d'équations

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ &\vdots \\ U_{i-1} &= 0 \\ U_{i+1} &= 0 \\ &\vdots \\ U_p &= 0 \end{aligned}$$

on puisse exprimer <u>p - 1 variables</u> (soient $x_{n-p+2}, \ldots, x_n$) en fonction des autres $(x_1, \ldots, x_{n-p+1})$ on a donc des relations du type

$$\begin{aligned} x_{n-p+2} &= f_1 \ (x_1, \ldots, x_{n-p+1}) \\ &\vdots \\ x_n &= f_{p-1}(x_1, \ldots, x_{n-p+1}) \end{aligned}$$

d'après le corollaire

$\Psi(U_1, \ldots, U_p)$ est définie ssi $U_i^2 \ (x_1, \ldots, x_{n-p+1}, f_1, \ldots, f_{p-1})$

est définie par rapport à $x_1, \ldots, x_{n-p+1}$

ou encore

ssi $V(x_1, \ldots, x_{n-p+1}) \equiv U_i \ (x_1, \ldots, x_{n-p+1}, f_1, \ldots, f_{p-1})$

est définie en les variables $x_1, \ldots, x_{n-p+1}$

b) on peut généraliser le corollaire au cas où p - k intégrales premières sont nulles pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$, les autres étant strictement positives sauf en $x_1 = \ldots = x_n = 0$

Supposons qu'à partir de ce système de $p - k$ intégrales, on puisse exprimer <u>$p - k$ variables</u> (soient $x_{n-p+k}, \ldots, x_n$) en fonction des autres $(x_1, \ldots, x_{n-p+k-1})$

Dans ce cas, par analogie avec a) on devra analyser le caractère défini ou non de

$$V_1(x_1, \ldots, x_{n-p+k}) = U_1^2 (x_1, \ldots, x_{n-p+k}, f_1, \ldots, f_{p-k}) + \ldots + U_k^2 (x_1, \ldots, x_{n-p+k}, f_1, \ldots, f_{p-k})$$

par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_{n-p+k}$.

§ 4.4 : Etude d'un cas particulier.

Hypothèses.

On suppose ici que $U_1, \ldots, U_p$

i) ne dépendent pas explicitement du temps

ii) sont des fonctions holomorphes en $x_1, \ldots, x_n$

iii) ont la forme :

$$U_k = \alpha_1^k x_1 + \ldots + \alpha_n^k x_n + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^k x_i x_j + X_k \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

$$(4 - 4 - 1)$$

où $\alpha_i^k, \alpha_{ij}^k$ sont des constantes

et X_k des fonctions qui contiennent les termes de degré strictement supérieur à 2 en $x_1, \ldots, x_n$.

Nous allons considérer la matrice des coefficients des termes linéaires; nous la notons (α_i^k).

1. <u>le rang de la matrice (α_i^k) est p.</u>

- d'après un théorème d'algèbre , puisque le rang est p, on déduit que les p combinaisons linéaires :

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1^1 x_1 + \ldots + \alpha_n^1 x_n \\ &\vdots \\ v_p &= \alpha_1^p x + \ldots + \alpha_n^p x_n \end{aligned}$$

sont linéairement indépendantes.

Donc, on peut considérer $v_1, \ldots, v_p$ comme nouvelles variables, au lieu de $x_1, \ldots, x_p$

Ecrivons 4 - 4 - 1 dans les variables $(v_1, \ldots, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$.

Ce système prend alors la forme :

$$U_k = v_k + \sum_{i,j=1}^{p} \beta^k_{ij} \; v_i \, v_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j=p+1}}^{\substack{n \\ p}} \beta^k_{ij} \; v_i \, x_j +$$

$$\sum_{i,j=p+1}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \, x_j + X'_k \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

$$(4 - 4 - 2)$$

où β^k_{ij} sont des constantes et X'_k des fonctions holomorphes en $v_1, \ldots, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ qui contiennent des termes d'ordre strictement supérieur à 2 en ces variables.

- nous résolvons les p-1 premières équations de 4 - 4 - 2 pour trouver $v_1, \ldots, v_{p-1}$ en fonction de $U_1, \ldots, U_{p-1}, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Les termes v_i sont remplacés par

$$U_i - \sum_{l,m=1}^{n} \alpha^i_{lm} \; x_l \, x_m - X_i \; ;$$ on fait de même pour v_j.

Nous obtenons :

$$v_k = U_k - \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta^k_{ij} \; U_i \, U_j \; - \sum_{j=1}^{n} \beta^k_{pj} \; v_p \, U_j \; -$$

$$\beta^k_{pp} \; v_p^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ j=p+1}}^{\substack{n \\ p-1}} \beta^k_{ij} \; U_i \, x_j \; - \sum_{j=p+1}^{n} \beta^k_{pj} \; v_p \, x_j \; -$$

$$\sum_{i,j=p+1}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \, x_j + Y_k$$

$$(k = 1, \ldots, p-1)$$

- nous appliquons le corollaire en annulant

$U_1 \dots U_{p-1}$; nous obtenons une relation entre $v_1, \dots, v_{p-1}$ et $v_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ du type :

$$v_k^o = f_k (v_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \qquad 1 \leqslant k \leqslant p-1$$

ou plus exactement :

$$v_k^o = - \sum_{j=p+1}^{n} \beta_{pj}^k \; v_p \, x_j - \sum_{i,j=p+1}^{n} \beta_{ij}^k \, x_i \, x_j - \beta_{pp}^k \, v_p^2 + Y_k^o \qquad (4 - 4 - 3)$$

nous remplaçons dans la dernière équation de 4 - 4 - 2 les termes v_k $(1 \leqslant k \leqslant p - 1)$ par leur expression 4 - 4 - 3.

Ceci nous donne des termes du 4ème degré que nous englobons dans un même terme Z^o, fonction de $v_p, x_{p+1}, \dots, x_n$.

Il reste finalement :

$$U_p^o = v_p + \beta_{pp}^p \, v_p^2 + \sum_{j=p+1}^{n} \beta_{pj}^p \, v_p \, x_j + \sum_{i,j=p+1}^{n} \beta_{ij}^p \, x_i \, x_j + Z^o$$

- Nous nous sommes ramenés à une expression contenant moins de variables.

Nous savons que :

$\Psi(U_1, \dots, U_p)$ est définie $\Longleftrightarrow U_p^o$ est définie par rapport à $v_p, x_{p+1}, \dots, x_n$

or ici, U_p^{σ} peut prendre des valeurs de différents signes suivant la valeur de v_p.

Conclusion

$\Psi(U_1, \ldots, U_p)$ n'est pas définie ici, donc à partir des intégrales premières $U_1, \ldots, U_p$, on ne peut construire une fonction de Liapounov.
Le mouvement non perturbé n'est donc pas nécessairement stable. On se gardera cependant de conclure qu'il est instable.

. Remarque :

si le rang vaut p-1, le terme v_p n'interviendra plus; nous avons alors une chance supplémentaire de trouver une combinaison définie.

2. le rang de la matrice (α_i^k) est p-1.

. Puisque le rang est p-1, parmi les formes $v_1, \ldots, v_p$, on peut en trouver p-1 qui sont linéairement indépendantes : soient $v_1, \ldots, v_{p-1}$. L'expression v_p peut se mettre sous la forme :

$$v_p = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_{p-1} v_{p-1}$$

Nous considérons $v_1, \ldots, v_{p-1}$ comme nouvelles variables au lieu de $x_1, \ldots, x_{p-1}$

Les équations 4 - 4 - 1 prennent la forme :

$$U_k = v_k + \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta^k_{ij} \; v_i \; v_j + \sum_{\substack{i\,=\,1\\ j\,=\,p}}^{\substack{n\\ p-1}} \beta^k_{ij} \; v_i \; x_j +$$

$$\sum_{i,j=p}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \; x_j + X'_k$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)$$

$$(4 - 4 - 4)$$

$$U_p = \gamma_1 \; v_1 + \ldots + \gamma_{p-1} \; v_{p-1} + \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta^p_{ij} \; v_i \; v_j +$$

$$\sum_{\substack{i\,=\,1\\ j\,=\,p}}^{\substack{n\\ p-1}} \beta^p_{ij} \; v_i \; x_j + \sum_{i,j=p}^{n} \beta^p_{ij} \; x_i \; x_j + X'_p$$

. Nous résolvons les $p-1$ premières équations de $4 - 4 - 4$ par rapport à $v_1, \ldots, v_{p-1}$. Les formes v_i sont remplacées par

$$U_i - \sum_{l,m=1}^{n} \alpha_{lm} \; x_l \; x_m - X_i \text{ ; de même pour } v_j.$$

Les termes d'ordre strictement supérieur à 2 sont rassemblés dans Y_k

d'où

$$v_k = U_k - \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta^k_{ij} \; U_i \; U_j - \sum_{\substack{i\,=\,1\\ j\,=p+1}}^{\substack{n\\ p-1}} \beta^k_{ij} \; U_i \; x_j -$$

$$\sum_{i,j=p}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \; x_j + Y_k$$

$$(k = 1,\ \ldots,\ p-1)$$

. Comme dans le cas précédent, nous annulons $U_1, \ldots, U_{p-1}$; nous obtenons ainsi des expressions pour v_k $(k = 1, \ldots, p-1)$ notées v_k^o :

$$v_k^o = - \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{k} \; x_i \, x_j + Y_k^o \; (k = 1, 2, \ldots, p-1)$$

En remplaçant dans l'expression de U_p les v_k par v_k^o et en regroupant les termes d'ordre strictement supérieur à 2 dans Z^o on a :

$$U_p^o = - \gamma_1 \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{1} \; x_i \, x_j - \ldots -$$

$$- \gamma_{p-1} \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{p-1} \; x_i \, x_j + \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{p} \, x_i \, x_j + Z^o$$

(4 - 4 - 5)

. par le corollaire :

Ψ est définie $\Longleftrightarrow U_p^o$ est définie par rapport à $x_p, \ldots, x_n$

<u>Conclusion</u>.

si l'expression 4 - 4 - 5 est définie, le mouvement non perturbé est stable. Sinon, on ne peut rien déduire quant à la stabilité ou l'instabilité de ce mouvement.

. <u>remarque</u> :

souvent on considère, au lieu de U_p^o, la formule quadratique

$$\boxed{R = \sum_{i,j=p}^{n} (- \gamma_1 \beta_{ij}^{1} - \dots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^{p})\, x_i\, x_j}$$

On élimine ainsi les termes d'ordre strictement supérieur à 2 car les x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des perturbations, donc "assez petites".

Si R est définie par rapport à $x_p, \dots, x_n$, alors U_p^o est définie par rapport aux mêmes variables.
La réciproque n'est cependant pas vérifiée.

. nous détaillons en 4. une méthode de construction de R.

3. <u>le rang de la matrice (α_i^k) est p-r.</u>

. D'après un théorème d'algèbre, parmi les formes $v_1, \dots, v_p$, on peut en trouver p-r qui sont linéairement indépendantes; soient $v_1, \dots, v_{p-r}$.

Les formes $v_{p-r+1}, \dots, v_p$ s'expriment en fonction de $v_1, \dots, v_{p-r}$:

$$v_{p-r+1} = \gamma_1^1 \; v_1 + \dots + \gamma_{p-r}^1 \; v_{p-r}$$

$$\vdots$$

$$v_l = \gamma_1^{l-p+r} v_1 + \dots + \gamma_{p-r}^{l-p+r} v_{p-r} \quad (p-r+1 < l < p)$$

$$\vdots$$

$$v_p = \gamma_1^r \; v_1 + \dots + \gamma_{p-r}^r \; v_{p-r}$$

nous considérons $v_1, \ldots, v_{p-r}$ comme nouvelles variables au lieu de $x_1, \ldots, x_{p-r}$.

Les équations 4 - 4 - 1 prennent la forme :

$$U_k = v_k + \sum_{i,j=1}^{p-r} \beta_{ij}^k v_i v_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j=p-r+1}}^{\substack{n \\ p-r}} \beta_{ij}^k v_i x_j +$$

$$\sum_{i,j=p-r+1}^{n} \beta_{ij}^k x_i x_j + X_k' \qquad (4 - 4 - 6)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p-r)$$

$$U_l = \gamma_1^{l+r-p} v_1 + \ldots + \gamma_{p-r}^{l+r-p} v_{p-r} + \sum_{i,j=1}^{p-r} \beta_{ij}^l v_i v_j +$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=p-r+1}}^{\substack{n \\ p-r}} \beta_{ij}^l v_i x_j + \sum_{i,j=p-r+1}^{n} \beta_{ij}^l x_i x_j + X_l'$$

$$(4 - 4 - 7)$$

$$(l = p-r+1, \ldots, p)$$

- nous résolvons les p-r premières équations par rapport à $v_1, \ldots, v_{p-r}$ en faisant les mêmes changements que lors des cas précédents.

Il vient que :

$$v_k = U_k - \sum_{i,j=1}^{p-r} \beta^k_{ij} \; U_i \; U_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j=p-r+1}}^{\substack{n \\ p-r}} \beta^k_{ij} \; U_i \; x_j -$$

$$\sum_{i,j=p-r+1}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \; x_j + Y_k$$

$$(k = 1, \ldots, p-r)$$

. nous annulons $U_1, \ldots, U_{p-r}$; nous obtenons ainsi des expressions pour v_k $(k = 1, \ldots, p-r)$ notées v^o_k

$$v^o_k = - \sum_{i,j=p-r+1}^{n} \beta^k_{ij} \; x_i \; x_j + Y^o_k$$

$$(k = 1, \ldots, p-r)$$

$$(4 - 4 - 8)$$

Remplaçons dans $(4 - 4 - 7)$ les v_k $(k = 1, \ldots, p-r)$ par v^o_k en regroupant les termes d'ordre strictement supérieur à 2 dans un même terme :

$$\overset{o}{U}_{p-r+k} = \sum_{i,j=p-r+1}^{n} \left(- \gamma^k_1 \beta^1_{ij} - \ldots - \gamma^k_{p-r} \beta^{p-r}_{ij}\right.$$

$$\left. + \beta^{p-r+k}_{ij}\right) x_i \; x_j + X^o_{p-r+k}$$

$$(k = 1, \ldots, r)$$

. par le corollaire.

Ψ est définie $\Longleftrightarrow (U^o_{p-r+1})^2 + \dots + (U^o_p)$ est définie

par rapport à $x_{p-r+1}, \dots, x_n$

Conclusion

Si cette expression est définie, le mouvement non perturbé est stable. Si elle est uniquement semi-définie, on ne peut rien déduire quant à la stabilité du mouvement.

. Remarque.

Parfois, on analyse seulement les termes du 4ème degré en x_i $(p-r+1 \leqslant i \leqslant n)$, on néglige les termes X^o_{p-r+k}

$(k = 1, \dots, r)$

On étudie alors le caractère de :

$$\boxed{S_{p-r} = \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{i,j=p-r+1}^{n} \left(-\gamma^k_1 \beta^1_{ij} - \dots - \gamma^k_{p-r} \beta^{p-r}_{ij} + \beta^{p-r+k}_{ij}\right) x_i x_j \right]^2}$$

Si S_{p-r} est définie par rapport à $x_{p-r+1}, \dots, x_n$, alors $(U^o_{p-r+1})^2 + \dots + (U^o_p)^2$ est définie en les mêmes variables et le mouvement perturbé est stable.

4. construction de la forme R.

On se place donc dans le cas où rang $(\alpha_i^k) = p-1$

Rappelons que

$$R = \sum_{i,j=p}^{n} (-\gamma_1 \beta_{ij}^1 - \dots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^p)\, x_i\, x_j$$

$$v_k = \alpha_1^k\, x_1 + \dots + \alpha_n^k\, x_n \qquad (k = 1, \dots, p)$$

(4 - 4 - 9)

Il faut donc chercher les γ_i et β_{ij}^k

- recherche des β_{ij}^k

Les β_{ij}^k sont les coefficients obtenus quand on a remplacé les variables $x_1, \dots, x_{p-1}$ par $v_1, \dots, v_{p-1}$.

Comparons l'expression de départ de U_k 4 - 4 - 1 avec 4 - 4 - 4.

Nous voyons que le terme $\sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^k\, x_i\, x_j$ est transformé en

$$\sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^k\, x_i\, x_j$$ si nous annulons $v_1, \dots, v_{p-1}$.

Cette annulation nous permet d'exprimer $x_1, \dots, x_{p-1}$ en fonction de $x_p, \dots, x_n$.

Notre procédure de recherche des β_{ij}^k est la suivante :

a) résoudre le système

$$\begin{aligned} v_1 &= o \\ &\vdots \\ v_{p-1} &= o \end{aligned}$$

ceci fournit des relations du type

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta_p^1 \quad x_p + \dots + \delta_n^1 \quad x_n \\ &\vdots \\ x_{p-1} &= \delta_p^{p-1} \quad x_p + \dots + \delta_n^{p-1} \quad x_n \end{aligned}$$

b) substituer dans les expressions $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^{k} \ x_i \ x_j$

les valeurs trouvées pour $x_1, \dots, x_{p-1}$, on obtient alors les expressions

$$\sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{k} \ x_i \ x_j$$

. recherche des γ_i.

on sait que $v_p = \gamma_1 \ v_1 + \dots + \gamma_{p-1} \quad v_{p-1}$

En remplaçant $v_1, \dots, v_{p-1}, v_p$ en fonction de $x_1, \dots x_n$ d'après 4 - 4 - 9, et en comparant les coefficients des x_i, on obtient le système

$$\alpha_i^1 \ \gamma_1 + \dots + \alpha_i^{p-1} \ \gamma_{p-1} = \alpha_i^p \ (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

ce qui permet de déterminer $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ puisque le rang est p-1.

Nous pouvons ainsi construire R.

. Remarque :

On pourrait déduire une méthode analogue pour la recherche de S_{p-r}.

§ 4 - 5 : Comparaison des méthodes de Chetaev et Pozharitskii.

Nous allons tout d'abord appliquer les deux méthodes à un même exemple. Ensuite, nous les analyserons afin de découvrir les éléments communs aux deux techniques.

1. Exemple : Etude de la stabilité du mouvement d'un solide tournant autour d'un point fixe (cas de Lagrange)

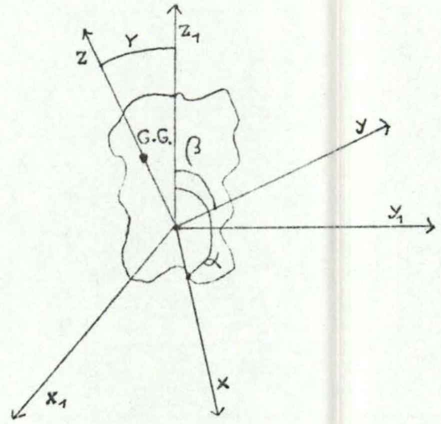
soit, o, x, y, z un repère mobile, lié au solide; les axes o x, o y, oz coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps trouvé pour le point fixe.

Les moments d'inertie par rapport aux axes o x, o y, o z sont notés A, B, C respectivement.

Le cas de Lagrange est obtenu lorsque $A = B$.

Nous supposons que les coordonnées du centre de gravité du solide sont données par :

$$x = o \qquad y = o \qquad z > o$$



Le repère o, x_1, y_1, z_1 est fixe.

Soient p, q, r les projections de la vitesse angulaire instantanée sur les axes o x, o y, o z et γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la verticale z_1 par rapport aux axes mobiles x, y, z.

c'est-à-dire $\gamma = \cos\alpha$, $\gamma' = \cos\beta$, $\gamma'' = \cos \Upsilon$

Nous savons qu'un tel système admet les intégrales premières [21]

$$A p^2 + A q^2 + Cr^2 + 2 mgz \gamma'' = h \text{ (intégrale d'énergie)}$$

$$A p\gamma + A q \gamma' + Cr \gamma'' = k \text{ (projection du moment angulaire sur l'axe } z_1)$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \text{ (relation entre les cosinus directeurs)}$$

$$r = r_o \text{ (par les équations d'Euler : } C\dot{r} = o \Longrightarrow r = r_o)$$

Nous allons nous intéresser au problème de la stabilité de la rotation verticale :

$$p = o \quad q = o \quad r = r_o \quad \gamma = o \quad \gamma' = o \quad \gamma'' = 1$$

et l'analyser par rapport aux variables p, q, r, γ , γ' , γ''.

a. Méthode de Chetaev.

Perturbons les variables de la manière suivante :

$$p = \xi \quad q = \eta \quad r = r_o + \rho \quad \gamma = \alpha \quad \gamma' = \beta \quad \gamma'' = 1 + \delta$$

où ξ , η , ρ , β , α , δ sont de petites perturbations.

Nous pouvons dès lors écrire les intégrales du mouvement perturbé :

$$V_1 = A(\xi^2+\eta^2) + C(\rho^2 + 2r_o\rho) + 2mgz\delta$$

$$V_2 = A(\xi\alpha+\eta\beta) + C(\delta\rho + r_o\delta + \rho)$$

$$V_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta$$

$$V_4 = \rho$$

(4 - 5 - 0)

Nous allons chercher une fonction de Liapounov sous la forme d'une combinaison des intégrales du mouvement.
Nous éliminerons de celle-ci les termes linéaires. Il nous restera une forme quadratique de laquelle nous déduirons les conditions de stabilité.

$$\text{Soit } V = V_1 + a_1 V_2 + a_2 V_3 + a_3 V_4 + \mu V_4^2$$

$$= A\xi^2 + A\eta^2 + C\rho^2 + 2Cr_o\rho + 2mgz\delta + a_1 A\xi\alpha$$

$$+ a_1 A\eta\beta + a_1 C\delta\rho + a_1 Cr_o\delta + a_1 C\rho$$

$$+ a_2\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_2\delta^2 + a_2 2\delta + a_3\rho + \mu\rho^2$$

Nous choisissons les coefficients a_1, a_2, a_3 tels que les termes linéaires se simplifient c'est-à-dire :

$$2Cr_o\rho + 2mgz\delta + a_1 Cr_o\delta + a_1 C\rho + 2a_2\delta + a_3\rho = o$$

ou, en regroupant les termes en ρ et δ :

$$2r_oC + a_1 C + a_3 = o$$

$$2mgz + a_1 Cr_o + 2a_2 = o$$

Ce système nous permet d'exprimer deux coefficients en fonction du troisième qui devient un paramètre. Soit $a_1 = 2\lambda$

Dans ce cas :

$$a_2 = -(m g z + \lambda C r_o)$$

$$a_3 = -2 (r_o C + \lambda C)$$

donc

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - (m g z + C r_o\lambda) V_3 + \mu V_4^2 - 2(C r_o + C\lambda) V_4$$

$$= A \xi^2 + 2\lambda A \xi \alpha - (m g z + C r_o \lambda) \alpha^2 \qquad (4-5-1)$$

$$+ A \eta^2 + 2\lambda A \eta \beta - (m g z + C r_o \lambda) \beta^2 \qquad (4-5-2)$$

$$+ (C+\mu) \rho^2 + 2\lambda C \delta \rho - (m g z + C r_o\lambda) \delta^2 \qquad (4-5-3)$$

Etudions à présent le signe de V

- les formes quadratiques (1) et (2) sont du même type. Par le critère de Sylvester [7] , elles seront définies positives si et seulement si les deux inégalités suivantes sont satisfaites :

$$A > 0$$

$$A \lambda^2 + C r_o \lambda + m g z < 0 \qquad (4-5-4)$$

La première est toujours vérifiée.
La relation (4) n'est possible que si le polynôme en λ admet deux racines réelles distinctes, ce qui peut être exprimé par la condition (5) :

$$C^2 r_o^2 - 4 A m g z > o \qquad (4-5-5)$$

. la forme quadratique (3) sera définie positive si et seulement si

$$C + \mu > o$$

$$\left(\frac{C^2}{C+\mu}\right) \lambda^2 + C r_o \lambda + m g z < o \qquad (4-5-6)$$

Nous remarquons une grande ressemblance entre les inégalités (6) et (4). Nous choisissons le paramètre μ tel que les conditions (6) et (4) coïncident, c'est-à-dire :

$$A = \frac{C^2}{C+\mu} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{C\,(C-A)}{A}$$

La condition $C + \mu > o$ est satisfaite si $C > A$.

. Conclusion :

si $C^2 r_o^2 - 4 A m g z > o$ et $C > A$

alors V sera définie positive.

V étant une combinaison d'intégrales premières, on a immédiatement que $\frac{dV}{dt} = o$.

Le théorème de Liapounov nous affirme alors la stabilité de la rotation de Lagrange.

b. Méthode de Pozharitskii.

Nous écrivons les intégrales du mouvement perturbé (o) sous la forme :

$$U_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta$$

$$U_2 = \rho \qquad (4-5-7)$$

$$U_3 = A\xi^2 + A\eta^2 + C\rho^2 + 2r_o C\rho + 2mgz\delta$$

$$U_4 = A\xi\alpha + A\eta\beta + C\delta\rho + r_o C\delta + C\rho$$

Nous nous trouvons bien dans les hypothèses du § 4 - 4.

Ici, $p = 4$ et $n = 6$

Nous pouvons écrire la matrice des coefficients des termes linéaires.

$$(\alpha_i^k) = \begin{pmatrix} o & o & 2 & o & o & o \\ o & o & o & o & o & 1 \\ o & o & 2mgz & o & o & 2r_oC \\ o & o & Cr_o & o & o & C \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans le cas où le rang de la matrice (α_i^k) est 2, c'est-à-dire p-r.

Comme $r < p$, nous pouvons continuer notre problème.
Nous suivons la théorie présentée dans le § 4 - 3.

Nous avons :

$$v_1 = 2\delta$$

$$v_2 = \rho$$

$$v_3 = 2r_o C\rho + 2mgz\delta$$

$$v_4 = r_o C\delta + \rho$$

Les formes v_1 et v_2 étant linéairement indépendantes, nous les prenons comme nouvelles variables.

A partir des intégrales (7), nous obtenons :

$$U_1 = 2\delta + \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2$$

$$U_2 = \rho$$

Nous déduisons immédiatement des équations (4 - 4 - 8) les valeurs de v_1^o et v_2^o, à savoir :

$$v_1^o = -\alpha^2 - \beta^2 + Y_1^o$$

$$v_2^o = Y_2^o \qquad (4 - 5 - 8)$$

où Y_1^o et Y_2^o sont des termes d'ordre supérieur ou égal à 3 en les variables.

En reportant (8) dans U_3 et U_4, nous obtenons U_3^o et U_4^o

$$U_3^o = A\xi^2 + A\eta^2 - mgz\alpha^2 - mgz\beta^2 + X_3^o$$

$$U_4^o = A\xi\alpha + A\eta\beta - r_o C\frac{\alpha^2}{2} - r_o C\frac{\beta^2}{2} + X_4^o$$

où X_3^o et X_4^o sont des termes d'ordre 3 au moins en les variables.

D'après la théorie, la fonction $\psi(U_1, U_2, U_3, U_4)$ est définie seulement si la fonction

$$(U_3^o)^2 + (U_4^o)^2 \qquad (4 - 5 - 9)$$

est définie par rapport à α, β, ξ, η.

Pour cela, <u>il suffit</u> que U_3^o <u>ou</u> U_4^o ne s'annule qu'en l'origine.

Considérons par exemple U_3^o

Pour que cette forme quadratique soit définie positive il suffit, par le critère de Sylvester, que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

$$A > 0$$
$$A^2 > 0$$
$$-A^2 m g z > 0$$
$$A^2 (-m g z)^2 > 0$$

Trois de ces relations sont évidentes.

La quatrième impose : (4 - 5 - 10)

$$m g z < 0$$

Conclusion :

L'inégalité (10) fournit une condition suffisante de stabilité pour la rotation de Lagrange.

2. Comparaison des deux méthodes.

- La méthode de Pozharitskii nous fournit la condition : $m g z < o$. Par celle de Chetaev nous trouvons : $C^2 r_o^2 - 4 A m g z > o$

  Ces deux conditions sont compatibles car la première implique la seconde.

- Si le rang de la matrice (α_i^k) est égal au nombre d'intégrales premières, c'est-à-dire p, la méthode de Pozharitskii nous affirme l'impossibilité de trouver une combinaison définie des intégrales premières. La méthode de Chetaev n'est donc pas applicable non plus.

. Si le rang est égal à p-1 (ou p-r), nous pouvons utiliser la méthode de Chetaev.

Après de longs calculs, nous trouvons des conditions suffisantes de stabilité (si la forme du deuxième degré obtenue peut être rendue définie positive). La méthode de Pozharitskii nous donne également des conditions suffisantes de stabilité, mais à partir d'une forme quadratique R (ou du quatrième degré S_{p-r}) qui sont en général plus simples à écrire.
Les deux méthodes sont donc équivalentes au point de vue des résultats. Celle de Pozharitskii est plus technique et donc plus facile à appliquer. Son principal avantage réside dans le fait qu'elle diminue le nombre de variables intervenant dans le problème.

Appliquons ces résultats à un deuxième exemple.

3. Exemple : Etude de la stabilité du mouvement d'un solide tournant autour d'un point fixe (cas général)

Nous nous plaçons donc dans les hypothèses : $A \neq B \neq C \neq A$.
Un tel système admet les intégrales premières [21]

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 + 2 m g z \gamma'' = h$$

$$A p \gamma + B q \gamma' + C r \gamma'' = k$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

Nous nous intéressons toujours au problème de la stabilité de la rotation verticale.

Nous perturbons les variables comme dans l'exemple précédent. Nous pouvons dès lors écrire les intégrales du mouvement perturbé :

$$U_1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C(\rho^2 + 2r_o\rho) + 2mgz\delta$$

$$U_2 = A\xi\alpha + B\eta\beta + C(\delta\rho + r_o\delta + \rho)$$

$$U_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta$$

$$(4 - 5 - 11)$$

Nous développons uniquement la méthode de Pozharitskii.

Ici, $p = 3$, $n = 6$.

Considérons la matrice des coefficients des termes linéaires

$$(\alpha_i^k) = \begin{pmatrix} o & o & 2Cr_o & o & o & 2mgz \\ o & o & C & o & o & Cr_o \\ o & o & o & o & o & 2 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans le cas où le rang de la matrice (α_i^k) est 2, c'est-à-dire p-1.

Notre problème se ramène donc à l'étude de la forme quadratique R. Nous la construisons d'après le schéma détaillé au paragraphe 5.

a) <u>recherche des</u> β_{ij}^k

nous devons résoudre le système

$$v_1 = 2Cr_o\rho + 2mgz\delta = o$$

$$v_2 = C\rho + Cr_o\delta = o$$

en reportant sa solution $\rho = \delta =$ o dans les expressions (11), nous obtenons les relations suivantes :

$$\sum_{i,j=2}^{6} \beta^1_{ij}\, x_i\, x_j = A\,\xi^2 + B\,\eta^2$$

$$\sum_{i,j=2}^{6} \beta^2_{ij}\, x_i\, x_j = A\,\xi\alpha + B\,\eta\beta$$

$$\sum_{i,j=2}^{6} \beta^3_{ij}\, x_i\, x_j = \alpha^2 + \beta^2$$

Nous en déduisons

$$\beta^1_{33} = A \qquad \beta^1_{44} = B$$

$$\beta^2_{35} = A \qquad \beta^2_{45} = B$$

$$\beta^3_{55} = 1 \qquad \beta^3_{66} = 1$$

Les autres valeurs β^k_{ij} sont nulles.

b) <u>recherche des γ_j</u>

Comme rang $(\alpha^k_i) = 2$, nous avons :

$$v_3 = \gamma_1\, v_1 + \gamma_2\, v_2$$

ou

$$2\,\delta = \gamma_1\,(2\,C\,r_o\rho + 2\,m\,g\,z\,\delta) + \gamma_2\,(C\rho + C\,r_o\,\delta)$$

Comparons les coefficients de ρ et de δ :

$$2 = 2\, m\, g\, z\, \gamma_1 + C\, r_o\, \gamma_2$$

$$o = 2\, C\, r_o\, \gamma_1 + C\, \gamma_2$$

d'où
$$\gamma_2 = -\, 2\, r_o\, \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{m\, g\, z - C\, r_o^2} \qquad (4 - 5 - 12)$$

$$\gamma_2 = -\, \frac{2 r_o}{m\, g\, z - C\, r_o^2}$$

La forme quadratique R s'écrit

$$R = -\, \gamma_1 A\, \xi^2 - \gamma_1\, B\, \eta^2 - \gamma_2 A\, \xi \alpha - \gamma_2 B\, \eta\, \beta +$$
$$+ \alpha^2 + \beta^2$$
$$= -\, \gamma_1 A\, \xi^2 - \gamma_1\, B\, \eta^2 + 2\, r_o\, \gamma_1 A \xi \alpha +$$
$$2\, r_o\, \gamma_1\, B \eta \beta + \alpha^2 + \beta^2$$

Si R est définie positive par rapport à ξ, η, α, β, le mouvement est stable.

Nous pouvons donc donner des conditions suffisantes de stabilité. Pour cela appliquons le critère de Sylvester à la matrice

$$\begin{pmatrix} -\gamma_1 A & o & r_o \gamma A & o \\ o & -\gamma_1 B & o & r_o \gamma_1 B \\ r_o \gamma_1 A & o & 1 & o \\ o & r_o \gamma_1 B & o & 1 \end{pmatrix}$$

Pour que R soit définie positive, les quatre conditions suivantes doivent être réalisées :

$$- \gamma_1 \; A > 0$$

$$\gamma_1^2 \; A \; B > 0$$

$$\gamma_1^2 \; A \; B + r_o^2 \gamma_1^3 \; A^2 \; B > 0$$

$$- r_o \; \gamma_1 \; B \; (r_o^3 \; \gamma_1^3 \; A^2 \; B + r_o \; \gamma_1^2 \; A \; B)$$

$$+ \gamma_1^2 \; A \; B + r_o^2 \; \gamma_1^2 \; A^2 \; B > 0$$

Si $m \, g \, z < C \, r_o^2$, les deux premières conditions sont vérifiées. Pour que les deux dernières le soient également, il suffit que $1 + r_o^2 \; \gamma_1 \; A > 0$.

En vertu de (4 - 5 -12), les conditions suffisantes de stabilité de notre problème s'écrivent :

$$m \, g \, z < C \; r_o^2$$

$$m \, g \, z + r_o^2 \; (A - C) < 0$$

ou finalement,

$$m \, g \, z + r_o^2 \; (A - C) < 0$$

C H A P I T R E   5

E T U D E   D U   G Y R O S C O P E   D A N S   L A   S U S P E N S I O N   D E   C A R D A N

CHAPITRE 5 : ETUDE DU GYROSCOPE (DANS LA SUSPENSION DE CARDAN).

Nous essayons d'appliquer les différents résultats obtenus à l'étude du mouvement du gyroscope dans la suspension de Cardan.

Après une description rapide, nous donnerons des exemples d'application de cet appareil [18]

Ensuite, nous analyserons 3 cas :

a) le gyroscope libre (les frottements sont négligés)

b) le gyroscope non libre (les frottements sont encore négligés)

c) nous ajoutons les forces de frottement dans les paliers. Ces forces existent toujours mais sont souvent négligeables.

§ 5 - 1 : Description sommaire de l'appareil.

1. Un gyroscope, en général, se compose d'abord d'une toupie symétrique (un disque S) qui est animée d'un mouvement circulaire uniforme, souvent rapide, autour d'un axe $S'N$

La suspension dans laquelle se trouve la toupie peut prendre de nombreuses formes : suspensions par champ électrique, suspensions hydrodynamiques, par anneaux de Cardan ... [18]

Nous utilisons cette dernière; la toupie se trouve dans un anneau K (l'anneau intérieur) qui tourne autour d'un axe LL_1. Enfin, le disque et l'anneau K sont suspendus dans un second anneau E (l'anneau extérieur) qui tourne autour d'un axe CC_1.

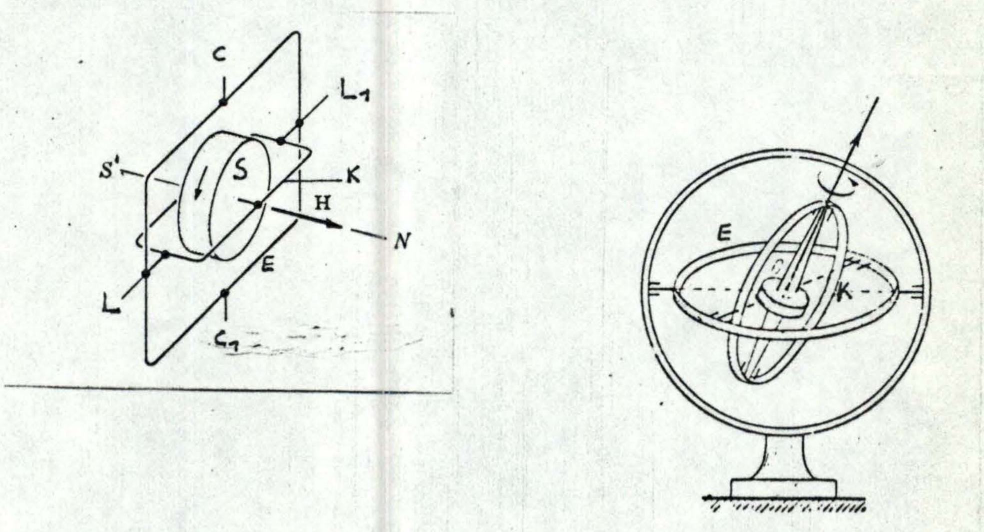


fig 5 - 1

De plus, l'appareil dispose :

- de capteurs permettant la mesure de l'orientation de $\underset{\sim}{SN}$ par rapport à l'anneau extérieur.

- d'un moteur effectuant le lancement et l'entretien du mouvement de la toupie.

§ 5 - 2 : Utilité du gyroscope.

Nous étudions plus loin des critères de stabilité de l'axe du disque. Si cet axe est stable, il garde une direction constante. Ceci nous fournit un moyen pour conserver une direction quelconque. C'est pourquoi on utilise le gyroscope comme instrument de navigation maritime et aérienne. La stabilisation angulaire d'un missile ou d'une toupille nécessite l'emploi de gyroscopes.

De même, un conservateur de cap est essentiellement constitué par un gyroscope dont :

- l'axe de l'anneau extérieur est relié à la structure de l'avion, de manière à rester sensiblement vertical en cas de vol horizontal ;

- l'axe de la toupie est maintenu sensiblement perpendiculaire à celui de l'anneau extérieur ;

- l'anneau extérieur porte une rose graduée en cap se déplaçant devant un index solidaire de l'anneau intérieur.

Pour une étude détaillée, on peut se référer à [18]

§ 5 - 3 : Introduction de repères.

Nous attachons à notre gyroscope deux systèmes d'axes: un système fixe $O\, x_1\, y_1\, z_1$ et un système mobile $o\, x\, y\, z$ lié à l'anneau intérieur.

Les axes $o\, z_1$, ox, oz sont respectivement les axes de l'anneau extérieur, de l'anneau intérieur, de la toupie.

Nous utilisons les angles d'Euler ; les angles ψ, θ , φ représentent respectivement les angles de rotation de l'anneau extérieur autour de $o\, z_1$, de l'anneau intérieur autour de o x, et de la toupie.

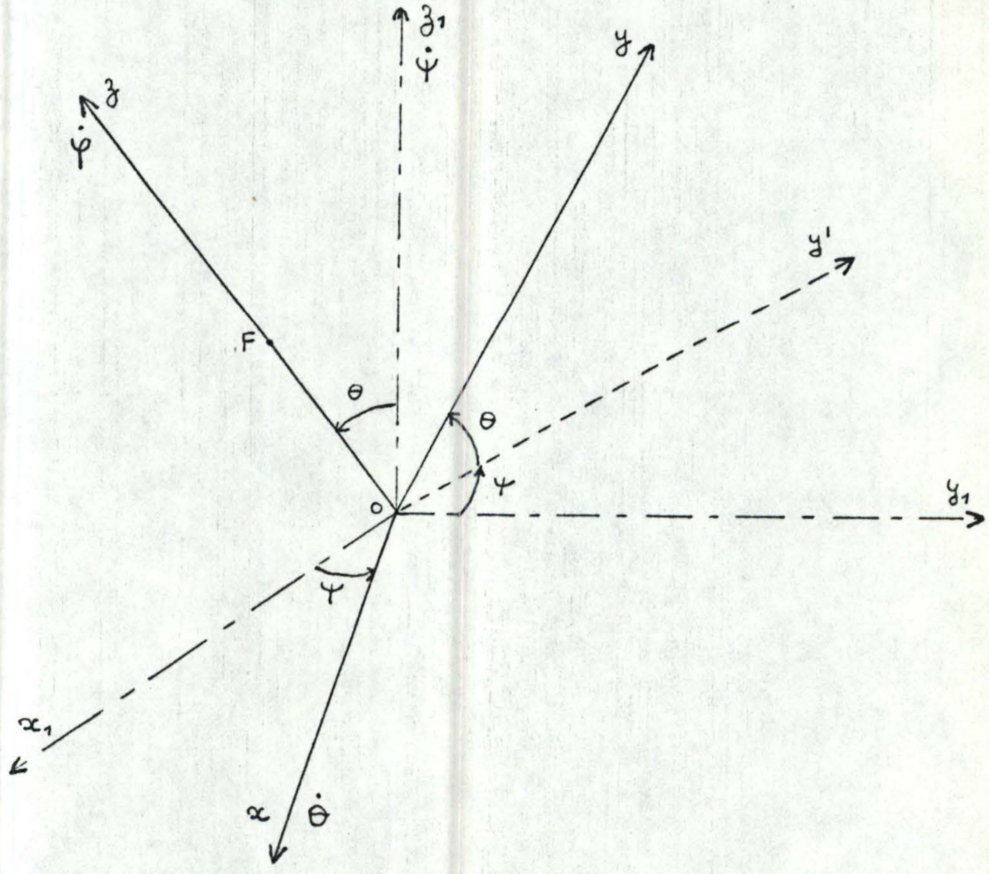


fig 5 - 2

Par la rotation de l'anneau extérieur autour de l'axe o z_1, on passe du système o x_1 y_1 z_1 au système o x y' z_1. Par la rotation de l'anneau intérieur autour de o x, on passe de o x y' z_1 à o x y z.

La rotation propre de la toupie a lieu autour de l'axe oz. Elle n'est pas représentée sur notre schéma car nous considérons le système d'axes mobiles attachés à l'anneau intérieur, donc indépendant de $\dot{\varphi}$

Nous notons F le centre de gravité du gyroscope et de l'anneau intérieur, et I le moment d'inertie de l'anneau extérieur par rapport à o z_1.

Soient A, A, C les moments d'inertie de la toupie et A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie de l'anneau intérieur.

Nous étudierons le mouvement de l'axe de la toupie par rapport aux axes mobiles.

§ 5 - 4 : Recherche de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques de l'anneau extérieur, de l'anneau intérieur, de la toupie.

Pour un système quelconque, si J représente le tenseur d'inertie et $\vec{w}$ la vitesse angulaire instantanée, l'énergie cinétique vaut

$$J \frac{w^2}{2}$$

Nous avons donc pour

a) l'énergie cinétique de l'anneau extérieur :

le moment d'inertie I est donné par rapport à $o\,z_1$; nous considérons alors les projections de la vitesse sur les axes $o\,x_1$, $o\,y_1$, $o\,z_1$

$$\vec{w}_1 = (o, o, \dot{\Psi})$$

$$\text{d'où } T_1 = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2$$

b) l'énergie cinétique de l'anneau intérieur :

les moments d'inertie A_1, B_1, C_1 sont donnés par rapport à ox, oy, oz respectivement.

$$\vec{w}_2 = (\dot{\theta}, \dot{\Psi} \sin\theta, \dot{\Psi} \cos\theta)$$

$$\text{et } T_2 = \frac{1}{2} (A_1 \dot{\theta}^2 + B_1 \dot{\Psi}^2 \sin^2\theta + C_1 \dot{\Psi}^2 \cos^2\theta)$$

c) <u>l'énergie cinétique de la toupie</u> :

$$\vec{w}_3 = (\dot{\theta}, \dot{\psi} \sin \theta, \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \left[A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right]$$

par conséquent, l'énergie cinétique totale est

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \left[\dot{\psi}^2 (I + (A + B_1) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta) + \dot{\theta}^2 (A + A_1) + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right]}$$

(5 - 1)

§ 5 - 5 : Etude du gyroscope libre.

1. On appelle gyroscope libre, un gyroscope sur lequel n'agit aucune résultante de forces extérieures au système. Pour un gyroscope placé dans un champ gravifique, ceci revient à exiger soit que le centre de gravité F coïncide avec le point fixe O, soit que le moteur de la toupie équilibre le couple pesanteur. Dans ce cas, la résultante (couple moteur + couple pesanteur) est donc nulle.

2. équations du mouvement

Les forces gyroscopiques et la constante H interviendront ici. Ceci permettra de mieux comprendre la théorie.

a) par la fonction de Routh.

- Nous remarquons que φ est une coordonnée cyclique car $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

  D'où $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ est une constante.

  C'est-à-dire

  $$C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta) = CH$$

  CH représente la constante d'intégration que l'on peut interpréter physiquement ; c'est la projection sur l'axe oz du moment cinétique de la toupie par rapport à cet axe. H est la troisième composante de la vitesse angulaire de la toupie.

. calculons T^*

$$2\,T^* = \dot{\Psi}^2\,(I + A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta\,) +$$

$$\dot{\theta}^2\,(A + A_1) + CH^2 = 2\,R_2 - 2\,R_o$$

$$\text{où } R_o = -\,\frac{1}{2}\,CH^2$$

Dans la théorie, nous avons noté R_2 par T_2 qui est une forme quadratique en les vitesses des coordonnées non cycliques. R_o est un terme constant; nous pourrons donc le négliger.

. nous appliquons les équations (1 - 2 -11)

$$R = T^* - CH\,(H - \dot{\Psi}\cos\theta\,)$$

$$= T_2 + \frac{1}{2}\,CH^2 - CH^2 + CH\,\dot{\Psi}\cos\theta$$

$$= T_2 + R_o + R_1$$

$$\text{où } R_1 = CH\,\dot{\Psi}\cos\theta$$

$$\Gamma_1 = -\,\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial R_1}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial R_1}{\partial\theta}\right) = -\,CH\,\dot{\Psi}\,\sin\theta$$

$$\Gamma_2 = -\,\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial R_1}{\partial\dot{\Psi}} - \frac{\partial R_1}{\partial\Psi}\right) = CH\,\dot{\theta}\,\sin\theta$$

Γ_1 et Γ_2 sont bien les composantes d'une force <u>gyroscopique</u> ;

$$G = \begin{pmatrix} o & -C\sin\theta \\ C\sin\theta & o \end{pmatrix}$$

Les équations (1 - 2- 11) s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T_2}{\partial\theta} = -CH\dot\Psi\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial\dot\Psi} - \frac{\partial T_2}{\partial\Psi} = CH\dot\theta\sin\theta$$

(5 - 1 - a)

. Nous avons donc :

l'équation pour θ

$$(A + A_1)\ddot\theta - (A + B_1 - C_1)\dot\Psi^2\sin\theta\cos\theta +$$

$$CH\dot\Psi\sin\theta = o \qquad (5 - 2)$$

l'équation pour Ψ

$$\frac{d}{dt}(I\dot\Psi + (A + B_1)\dot\Psi\sin^2\theta + C_1\dot\Psi\cos^2\theta) +$$

$$\frac{d}{dt}(CH\cos\theta) = o \qquad (5 - 3)$$

ou encore :

$$I\ddot\Psi + C_1\ddot\Psi + (A + B_1 - C_1)\sin^2\theta\ddot\Psi +$$

$$2(A + B_1 - C_1)\dot\Psi\sin\theta\cos\theta\dot\theta -$$

$$CH\sin\theta\dot\theta = o \qquad (5 - 4)$$

l'équation pour φ -

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = H \qquad (5 - 5)$$

b) par les équations de Lagrange

Les résultats obtenus coïncident avec les précédents.

3. étude de la stabilité d'une position d'équilibre quelconque

$$\theta = \theta_o$$

$$\psi = \psi_o$$

. Par le théorème 2 - 1 - 1, nous savons que cette position est toujours stable par rapport aux vitesses.

. Pour étudier la stabilité par rapport aux coordonnées, perturbons le mouvement :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_o + x \\ \psi &= \psi_o + y \end{aligned}\right\} \qquad (5 - 6)$$

où x et y sont des petites perturbations.
Nous supposons qu'en $t = o$, on a les conditions initiales :

$$x = o \qquad \dot{x} = \dot{\theta}_o$$

$$y = o \qquad \dot{y} = \dot{\psi}_o$$

. On obtient les <u>équations du mouvement perturbé</u> en remplaçant θ et Ψ dans (5 - 2) et (5 - 4) d'après (5 - 6) et en gardant les termes linéaires en x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$:

(5 - 2) devient :

$$\boxed{(A + A_1)\,\ddot{x} + CH\,\dot{y}\,\sin\theta_o = o} \qquad (5 - 7)$$

de même pour (5 - 4) :

$$\boxed{\begin{array}{l}(I + C_1)\,\ddot{y} + (A + B_1 - C_1)\sin^2\theta_o\,\ddot{y} - \\ CH\sin\theta_o\,\dot{x} = o\end{array}}$$

(5 - 8)

Pour le mouvement perturbé, nous avons :

$$G = \begin{pmatrix} o & -C\sin\theta_o \\ C\sin\theta_o & o \end{pmatrix}$$

d'où $|G| = C^2 \sin^2\theta_o$

Par le théorème (2 - 1 - 2) nous déduisons que pour tout angle θ_o (sauf $\theta_o = o$ ou π où l'axe de la toupie coïncide avec l'axe de rotation de l'anneau extérieur), le mouvement déterminé par les équations linéarisées (5 - 7) et (5-8) est stable par rapport à θ et Ψ

. Analysons les résultats à partir des <u>équations simplifiées</u>. On les déduit des équations (5 - 7) et (5 - 8) suivant les définitions du chapitre 3 :

$$C\,H\,y \sin \theta_o = 0$$

$$-\,C\,H\,x \sin \theta_o = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} o & -\,C \sin \theta_o \\ C \sin \theta_o & o \end{pmatrix}$$

D'après le théorème du § 3 - 4, les solutions de ces équations sont admissibles si $|G| \neq o$, c'est-à-dire si $\theta_o \neq o, \pi$. Dans ce cas, nous déduisons :

$$x = x_o$$

$$y = y_o$$

où x_o et y_o représentent des constantes.

Le mouvement est donc stable par rapport à θ et Ψ

Ce résultat coïncide bien avec celui obtenu précédemment.

. Cependant, les résultats obtenus à partir des équations de première approximation (5 - 7) et (5-8) diffèrent de ceux tirés du système complet (5 - 2) et (5-4).

Nous montrerons que :

a) le mouvement est toujours stable par rapport à θ
b) le mouvement n'est pas stable par rapport à ψ sauf pour $\theta_o = o$

* Le système possède 2 intégrales premières :

i) par (5-3) nous avons que

$$(a - b \sin^2 \theta)\dot{\psi} + C H \cos \theta = V_2 \qquad (5 - 9)$$

où $a = I + C_1$

$b = C_1 - A - B_1$

ii) l'intégrale d'énergie (cinétique) s'écrit :

$$\dot{\psi}^2 (a - b \sin^2 \theta) + c \dot{\theta}^2 = V_1 - C H^2 \equiv V_1 \qquad (5 -10)$$

où $c = A + A_1$

Les constantes d'intégration s'expriment en fonction des conditions initiales :

$$V_2 = (a - b \sin^2 \theta_o) \dot{\psi}_o + C H \cos \theta_o$$

$$V_1 = (a - b \sin \theta_o) \dot{\psi}_o^2 + c \dot{\theta}_o^2$$

Introduisons les constantes :

$$\mu = \frac{\sqrt{V_1}}{H} \quad , \quad e = \frac{a-b \sin^2 \theta_o \dot{\psi}_o}{\sqrt{V_1}}$$

* Nous déduisons de (5 - 9) et (5 - 10) des expressions pour $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{V_2 - C H \cos\theta}{a - b \sin^2\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{H C}{a-b \sin^2 \theta} (e \mu + \cos \theta_o - \cos \theta) \qquad (5-11) \\ \frac{c \dot{\theta}^2}{H^2} &= \frac{(a-b)\mu^2 - C^2(e\mu + \cos\theta_o)^2 + 2C^2(e\mu + \cos\theta_o)\cos\theta}{a - b \sin^2\theta} \\ &\quad - \frac{C^2(1-b\mu^2)\cos^2\theta}{a - b\sin^2\theta} \end{aligned}}$$

$$(5 - 12)$$

* Mais $a-b \sin^2\theta > o$ car $a-b \sin^2\theta \geqslant a-b = I+A+B_1 > o$

De plus, $\dfrac{c \dot{\theta}^2}{H^2} > o$

Donc le numérateur du second membre de (5 - 12), qui est une fonction de cos , ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles.

Nous choisissons des conditions initiales qui rendent le réalisant positif ou nul. Les 2 racines cos θ_1

et $\cos \theta_2$ qui annulent le numérateur sont dans ce cas réelles (distinctes ou confondues)

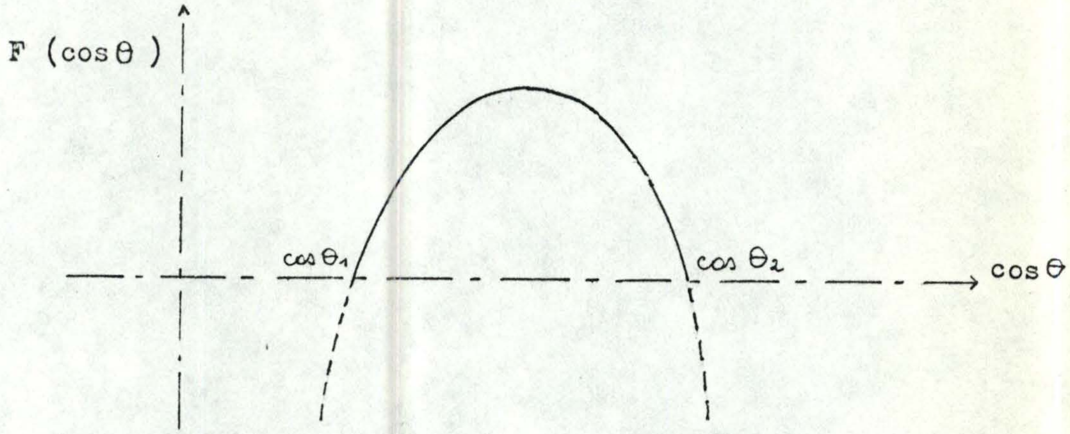


fig 5 - 3

Nous voyons donc que

$$\cos \theta_1 \leqslant \cos \theta \leqslant \cos \theta_2$$

Mais $\theta \in [0, \pi]$, d'où

$$\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 ,$$

et le mouvement de l'axe de la toupie est stable par rapport à θ car on peut choisir les conditions initiales qui rendent l'intervalle $[\theta_2, \theta_1]$ aussi petit que l'on veut. (appendice OO)

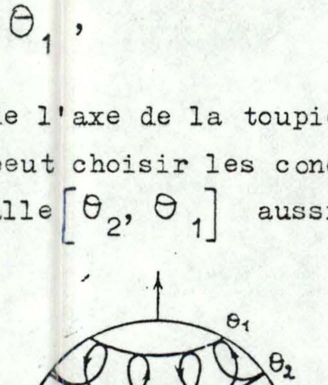


fig 5 - 4

* Nous reportons les valeurs de cos θ_1, cos θ_2 dans (5 - 11). Après remplacement, nous observons que sur la parallèle $\theta = \theta_2$, $\dot{\Psi} > o$ et Ψ croît, mais sur la parallèle $\theta = \theta_1$, $\dot{\Psi} < o$ et Ψ décroît.

Le sommet de l'axe de la toupie décrit donc des noeuds et est tangent aux 2 parallèles.

Notons T le temps nécessaire pour parcourir une boucle. Après ce temps T, le sommet de l'axe ne revient pas à sa position de départ, mais se déplace d'un angle $\Delta\Psi$. On peut calculer la vitesse moyenne $\dot{\Psi} = \frac{\Delta\Psi}{T}$: [9]

$$\dot{\Psi} = - \frac{(I + C_1)\cos\theta_o}{2 H \sin^2\theta_o} \cdot \frac{(a-b\cos^2\theta_o)\dot{\Psi}_o^2 + c\,\dot{\theta}_o^2}{a-b\cos^2\theta_o}$$

Nous déduisons alors l'instabilité du mouvement par rapport à Ψ.

4. Stabilisation de l'axe de la toupie par rapport à <u>l'angle de rotation de l'anneau extérieur.</u>

Nous appliquons le théorème 2 - 2 - 2.

Ajoutons des forces dissipatives (de frottement) de type élastique dans les paliers des axes des anneaux.

Nous supposons que les moments sont proportionnels aux vitesses :

$$M_{z1} = - k_1 \dot{\psi}$$
$$M_x = - k_2 \dot{\theta}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes strictement positives. La dissipation est bien complète car la fonction de Rayleigh correspondante

$$F = \frac{k_1 \dot{\psi}^2}{2} + \frac{k_2 \dot{\theta}^2}{2}$$

est une forme quadratique définie en $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$.
D'après le théorème, le mouvement est stabilisé.

§ 5 - 6 : Etude du gyroscope non libre.

Nous supposons que F est distinct de O et que le moteur n'équilibre pas la force pesanteur.

La force gyroscopique existe toujours.

Soient (o, o, z_o) les coordonnés du centre de gravité de la toupie et de l'anneau intérieur et soit P le poids de ces derniers. La force potentielle généralisée vaut $Pz_o \sin\theta$

1. Comment se transforment les intégrales des premières ?

- La force généralisée correspondant à φ est nulle, donc φ reste une coordonnée cyclique et

$$\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos\theta = H \qquad (5 - 13)$$

- L'intégrale d'énergie (5 - 10) devient :

$$\dot{\Psi}^2(I + (A + B_1)\sin^2\theta + C_1 \cos^2\theta) +$$
$$\dot{\theta}^2(A + A_1) + C H^2 + 2 P z_o \cos\theta = V_1 \qquad (5 - 14)$$

- La force potentielle est indépendante de Ψ également, l'équation 5 - 3 correspondante ne contiendra donc pas de terme Q_Ψ , où Q_Ψ représente une force généralisée.

En conséquence, l'intégrale première déduite de cette équation reste la même :

$$I \dot{\Psi} + (A + B_1)\dot{\Psi}\sin^2\theta + C_1 \dot{\Psi}\cos^2\theta + C H \cos\theta = V_2$$

$$(5 - 15)$$

2. Les équations du mouvement

Les équations pour Ψ et φ (5- 3 et 5 - 5) ne changent pas. Mais il faut ajouter le terme Q_θ à l'équation (5 - 2) qui devient :

$$(A + A_1)\ddot{\theta} = (A + B_1 - C_1)\dot{\Psi}^2 \sin\theta\cos\theta + C H \dot{\Psi}\sin\theta$$

$$- \; Pz_o \sin\theta = o \qquad (5 - 16)$$

3. Etude de la stabilité du mouvement

$$\theta = \theta_o, \; \dot{\theta} = o, \; \dot{\Psi} = \Omega, \; H = w \qquad (5 - 17)$$

Si θ_o est distinct de 0 ou π, ce mouvement représente le mouvement de précession régulière de la toupie.
Nous étudions la stabilité par rapport aux variables θ, $\dot{\theta}$, $\dot{\Psi}$ et H.

. Il faut d'abord s'assurer que 5 - 17 est bien une solution des équations du mouvement, les équations 5 - 3 et 5 - 5 sont toujours vérifiées.
Par contre 5 - 16 impose la condition :

$$\boxed{(-(A + B_1 - C_1)\Omega^2 \cos\theta_o + C\Omega w - Pz_o)\sin\theta_o = o}$$

$$(5 - 18)$$

. Pour étudier la stabilité, perturbons le mouvement :

$$\theta = \theta_o + \eta \qquad \dot{\varphi} = \Omega + \xi_2$$
$$\dot{\theta} = \dot{\eta} = \xi_1 \qquad H = w + \xi_3 \qquad (5 - 19)$$

où η, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des petites perturbations.

Nous pourrions chercher ici les équations du mouvement perturbé. Mais cela n'est pas nécessaire à ce stade. Par contre, nous transformons les intégrales 5 - 14 et 5 - 15 d'après 5 - 19 en ne gardant que les termes du premier et du second ordre.

* <u>transformation de 5 - 15</u>

$$I(\Omega + \xi_2) + (A + B_1)(\Omega + \xi_2)\sin^2(\theta_o + \eta) +$$
$$C_1(\Omega + \xi_2)\cos^2(\theta_o + \eta) + C(w + \xi_3)\cos(\theta_o + \eta)$$
$$= V_2$$

En remplaçant $\sin\eta$ par η et $\cos\eta$ par $1 - \frac{\eta^2}{2}$, il vient :

$$I(\Omega + \xi_2) + (A + B_1)(\Omega + \xi_2)(\sin\theta_o - \sin\theta_o \frac{\eta^2}{2} + \eta\cos\theta_o)^2$$
$$+ C_1(\Omega + \xi_2)(\cos\theta_o - \cos\theta_o \frac{\eta^2}{2} - \sin\theta_o\,\eta)^2$$
$$+ C(w + \xi_3)(\cos\theta_o - \cos\theta_o \frac{\eta^2}{2} - \sin\theta_o\,\eta) = V_2$$

en développant et en négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à deux, en sachant que (5 - 17) satisfait (5 - 15), on a :

$$\boxed{\begin{aligned} V_2 = {} & B_{44}\,\eta^2 + B_{24}\,\xi_2\,\eta + B_{34}\,\xi_3\,\eta + B_{o2}\,\xi_2 + \\ & B_{o3}\,\xi_3 + B_{o4}\,\eta + \ldots \end{aligned}}$$

où les B_{ij} sont définis plus loin.

$$A_{11} = A + A_1$$

$$A_{22} = (A + B_1)\sin^2\theta_o + C_1\cos^2\theta_o + I$$

$$A_{33} = C$$

$$A_{44} = (A + B_1 - C_1)\Omega^2(\cos^2\theta_o - \sin^2\theta_o) - Pz_o\cos\theta_o$$

$$A_{24} = 4\,(A + B_1 - C_1)\,\Omega\sin\theta_o\cos\theta_o$$

$$A_{o2} = 2\,\Omega\left[(A + B_1)\sin^2\theta_o + C_1\cos^2\theta_o + I\right]$$

$$A_{o3} = 2\,w\,C$$

$$A_{o4} = 2\left[(A + B_1 - C_1)\Omega^2\cos\theta_o - Pz_o\right]\sin\theta_o$$

$$B_{o2} = (A + B_1)\sin^2\theta_o + C_1\cos^2\theta_o + I$$

$$B_{o3} = C\cos\theta_o$$

$$B_{o4} = \left[2\,(A + B_1 - C_1)\Omega\cos\theta_o - Cw\right]\sin\theta_o$$

$$B_{24} = 2\,(A + B_1 - C_1)\sin\theta_o\cos\theta_o$$

$$B_{34} = -\,C\sin\theta_o$$

$$B_{44} = (A + B_1 - C_1)\,\Omega\,(\cos^2\theta_o - \sin^2\theta_o) - \frac{1}{2}\,cw\cos\theta_o$$

* <u>transformation de 5 - 14</u>

$$(\Omega + \xi_2)^2 \left[I + (A + B_1) \sin^2 (\theta_o + \eta) + C_1 \cos^2 (\theta_o + \eta) \right] + \xi_1^2 (A + A_1) + C (w + \xi_3)^2 + 2 Pz_o \cos (\theta_o + \eta) = V_1$$

après un calcul analogue au précédent, il vient :

$$\boxed{V_1 = A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 + A_{33} \xi_3^2 + A_{44} \eta^2 + A_{24} \xi_2 \eta + A_{o2} \xi_2 + A_{o3} \xi_3 + A_{o4} \eta + \dots}$$

* enfin,

$$\boxed{V_3 = \xi_3}$$

. Conditions suffisantes de stabilité de la précession

Nous voudrions construire une fonction de Liapounov (appendice oo) à partir des intégrales premières.

* <u>méthode de Pozharitskii</u> (paragraphe 4 - 4)

A partir des intégrales V_1, V_2, V_3, nous déduisons que la matrice (α_k^i) est ici :

$$\begin{pmatrix} o & A_{o2} & A_{o3} & A_{o4} \\ o & B_{o2} & B_{o3} & B_{o4} \\ o & o & 1 & o \end{pmatrix} \qquad p = 3$$

Le rang de cette matrice est 2 car

$$A_{o2}\ B_{o4} - B_{o2}\ A_{o4} = 2\,\Omega\ B_{o2}\ B_{o4} - A_{o4}\ B_{o2}$$

$$= B_{o2}\ (\ 2\,\Omega\ B_{o4} - A_{o4})$$

$$= 2\ B_{o2}\left[\ (A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 \cos\theta_o - C\ w\,\Omega + Pz_o\right] \sin\theta_o$$

$$= o \quad \text{par } (5 - 18)$$

Par contre,

$$A_{o2}\ B_{o3} - A_{o3}\ B_{o2} = B_{o2}\ (2\,\Omega\ B_{o3} - A_{o3})$$

$$= 2\ C\ B_{o2}\ (\ \Omega \cos\theta_o - w)$$

$$\neq o \text{ en général.}$$

Comme le rang de (α^i_k) est moindre que p, nous savons par la théorie, qu'il n'est pas impossible d'obtenir une fonction de Liapounov comme combinaison des intégrales V_1, V_2, V_3. Il faudrait construire la forme R et voir sous quelles conditions elle est définie positive.

* <u>méthode générale de Chetaev</u>

Nous cherchons une fonction de Liapounov V sous la forme

$$V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + a_4 V_1^2 + a_5 V_2^2 + \dots$$

de manière à éliminer les termes linéaires de cette combinaison. Ensuite, nous énonçons des conditions pour que la forme quadratique, avec laquelle commence V, soit définie positive.

Composons

$$J = V_1 - 2\Omega V_2 - 2C(w - \Omega \cos \Theta_o) V_3$$

$$= (A_{o2} - 2\Omega B_{o2}) \xi_2 + (A_{o4} - 2\Omega B_{o4}) \eta +$$

$$(A_{o3} - 2\Omega B_{o3} - 2C(w - \Omega \cos \Theta_o)) \xi_3 +$$

$$(A_{24} - 2 \ B_{24}) \ \xi_2 \eta + A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 +$$

$$A_{33} \xi_3^2 + A_{44} \eta^2 - 2\Omega B_{44} \eta^2 - 2\Omega B_{34} \xi_3 \eta$$

$$+ \dots$$

Mais $A_{o2} - 2\Omega B_{o2} = 0$

$A_{o4} - 2\Omega B_{o4} = 0$ par 5 - 18

$A_{o3} - 2\Omega B_{o3} - 2C(w - \Omega \cos \Theta_o) = 0$

$A_{24} - 2\Omega B_{24} = 0$

d'où

$$J = A_{11}\,\xi_1^2 + A_{22}\,\xi_2^2 + A_{33}\,\xi_3^2 + A_{44}\,\eta^2 -$$

$$2\,\Omega\, B_{44}\,\eta^2 - 2\,\Omega\, B_{34}\,\xi_3\,\eta + \dots$$

ne contient plus de termes linéaires.

Considérons $V = J_1 + \dfrac{C^2}{A + B_1 - C_1}\, V_3^2 = J_1 + \dfrac{C^2}{A + B_1 - C_1}\,\xi_3^2$

Appliquons le critère de Sylvester [7] à la matrice A associée à la forme V

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & o & o & o \\ o & A_{22} & o & o \\ o & o & A_{33} + \dfrac{C^2}{A + B_1 - C_1} & -\Omega\, B_{34} \\ o & o & -\Omega\, B_{34} & A_{44} - 2\Omega\, B_{44} \end{pmatrix}$$

A est définie positive si

a) $A_{11} > o$: toujours vérifié

b) $A_{11}\, A_{22} > o$: évident

c) $A_{11}\, A_{22}\, \left(C + \dfrac{C^2}{A + B_1 - C_1} \right) o$: nous dégageons

une première condition suffisante $\boxed{A + B_1 - C_1 > o}$

(5 - 20)

d) dét $A > o$: ceci donne une seconde condition suffisante :

$$\boxed{\begin{aligned}&(A + B_1 - C_1)(\cos^2\Theta_o - \sin^2\Theta_o)\Omega^2 - \\ &C\,w\,\Omega\cos\Theta_o + Pz_o\cos\Theta_o < o\end{aligned}}$$

(5 - 21)

On ajoute un terme à J pour l'associer à $-2\ B_{34}\ \xi_3\ \eta$

. <u>si $\Theta_o \neq o, \pi$</u>

alors $\sin\Theta_o \neq o$ et (5 - 18) devient :

$$(A + B_1 - C_1)\Omega^2\cos\Theta_o + C\Omega w - P_{zo} = o$$

(5 - 22)

De là, 5 - 21 est vérifiée si

$$-\ (A + B_1 - C_1)\sin^2\Theta_o < o$$

ou si

$$A + B_1 - C_1 > o$$

et il nous reste une seule condition.

<u>conclusion</u> :

Si $A + B_1 - C_1 > o$ et si 5 - 22 est vérifiée, la précession de l'axe est stable par rapport aux variables Θ, $\dot{\Theta}$, $\dot{\Psi}$, H.

. si $\theta_o = o$ (l'anneau intérieur n'est plus en rotation)

Dans ce cas, l'équation 5 - 18 est toujours satisfaite. Les conditions suffisantes 5 - 20 et 5 - 21 restent valables; nous remplaçons θ_o par o.

conclusion :

$$\text{Si } A + B_1 - C_1 > o \qquad (5 - 23)$$

et si $(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\Omega w + Pz_o < o$,

alors la précession de l'axe est stable.

remarque :

La seconde condition permet de préciser les valeurs possibles pour Ω. En effet, 5 - 23 est vérifiée si

$$C^2 \ w^2 - 4\ (A + B_1 - C_1)\ Pz_o > o$$

et

$$\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

où nous notons par Ω_1 et Ω_2 les racines de l'équation

$$(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\,w\Omega + Pz_o = o$$

5. Les équations simplifiées.

Nous montrons que le mouvement décrit par ces équations coïncide avec la précession de l'axe.

On trouve ces équations en linéarisant 5 - 3, 5 - 16, et en appliquant les définitions du chapitre 3 :

$$CH\,\zeta_2 \sin\theta_o - Pz_o \sin\theta_o = 0$$

$$-\;CH\,\zeta_1 \sin\theta_o = 0$$

Supposons $\theta_o \neq 0, \pi$. De la seconde équation, nous tirons : $\zeta_1 = 0$. D'où η reste constant et l'angle θ garde une valeur constante après perturbation. La première équation implique que

$$\zeta_2 = \frac{Pz_o}{CH}$$

L'angle ψ augmente donc linéairement avec le temps.
Ces solutions caractérisent bien un mouvement de précession.

§ 5 - 7 : Stabilisation de l'axe par des forces dissipatives.

Des forces dissipatives (ou de frottement) permettent de stabiliser l'axe si les conditions 5 - 20 et 5 - 21 ne sont pas vérifiées.

Considérons un frottement de type Coulomb dans les paliers entre les anneaux intérieur et extérieur.

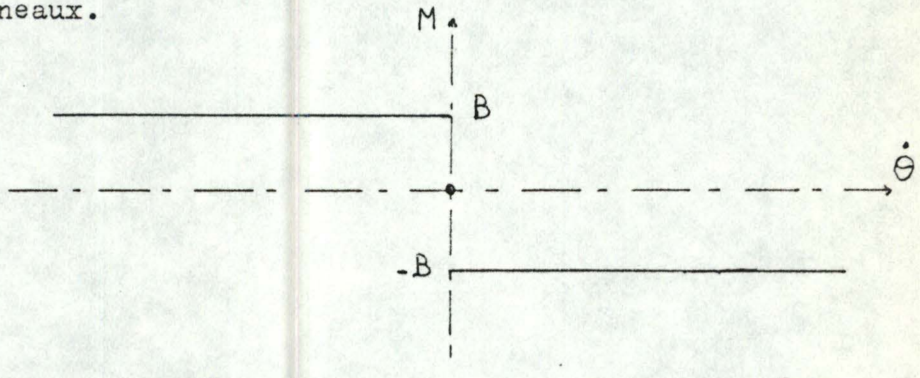
A. Premier cas.

Supposons que le moment de la force de frottement est du type :

$$M = - B \text{ signe } \dot{\theta} \quad \text{où } B > 0 \quad \text{si } \dot{\theta} \neq 0$$

$$= 0 \qquad \text{si } \dot{\theta} = 0 \qquad (5 - 24)$$

le frottement apparaît donc uniquement pendant la rotation des anneaux.



Nous reprenons systématiquement le plan d'étude du § 5 - 6 en indiquant les changements éventuels.

1. les intégrales premières.

- l'équation 5 - 13 reste valable.
- ce frottement n'introduit aucun terme Q_ψ, d'où 5 - 15 représente encore une intégrale première.
- par contre, nous devons ajouter à 5 - 14 le travail de la force de frottement; nous obtenons alors une intégrale première appelée "conditionnelle"

$$\dot{\psi}^2 \left(I + C_1 + (A + B_1 - C_1)\sin^2\theta \right) + \dot{\theta}^2 (A + A_1) + C H^2 + 2 P z_0 \cos\theta + 2 M \theta = V_1 \qquad (5 - 25)$$

2. les équations du mouvement.

Les équations en ψ et φ (5 - 3 et 5 - 5) ne changent pas. Mais nous ajoutons un terme $Q_\theta = M$ à 5 - 16 :

$$(A + A_1)\ddot{\theta} - (A + B_1 - C_1)\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta + CH\dot{\psi}\sin\theta - P z_0 \sin\theta = M \qquad (5 - 26)$$

3. étude de la stabilité du mouvement
$\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \Omega$, $H = w$

- condition de compatibilité de ce mouvement :

l'équation 5 - 26 impose que :

$$\boxed{\left(- (A + B_1 - C_1)\Omega^2 \cos\theta_0 + C\Omega w - P z_0\right)\sin\theta_0 = M\Big|_{\dot{\theta} = 0} = 0} \qquad (5 - 27)$$

. équations aux variations :

Nous verrons plus loin l'utilité de cette recherche.

Nous devons introduire le changement 5 - 19 dans les équations 5 - 3, 5 - 5 et 5 - 26 et négliger les termes d'ordre strictement supérieur à 2.

Nous donnons ici uniquement les résultats.

$$A_{11} \frac{d\xi_1}{dt} = M + B_{o4}\xi_2 + (2\Omega B_{44} - A_{44})\eta + \Omega B_{34}\xi_3 + 2B_{44}\xi_2\eta + \frac{1}{2}B_{24}\xi_2^2 + B_{34}\xi_2\xi_3 - \Omega B_{o3}\xi_3\eta - \frac{1}{2}\Omega^2 B_{24}\eta^2 \qquad (5-28)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{2B_{44}\eta + B_{24}\xi_2 + B_{34}\xi_3 + B_{o4}}{B_{24}\eta + B_{o2}}\xi_1 \qquad (5-29)$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = 0 \qquad (5-30)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi_1 \qquad (5-31)$$

. transformation des intégrales premières :

Nous devons effectuer les changements 5 - 19 dans 5 - 13, 5 - 15, 5 - 25.
Les calculs sont analogues à ceux du paragraphe précédent. Cependant l'équation 5 - 25 comprend un terme nouveau $2M\theta$ qui devient $2M\eta$

Afin de garder la même structure pour V_1, V_2, V_3, nous modifions la constante A_{o4} :

$$A_{o4} = 2\left(\left(A + B_1 - C_1\right)\Omega^2 \cos\theta_o - Pz_o\right)\sin\theta_o + 2M$$

. <u>recherche d'une fonction de Liapounov par la méthode de Pozharitskii.</u>

La matrice (α^i_k) ne change pas formellement. Néanmoins, le rang n'est plus 2 mais 3 car

$$A_{o2}\,B_{o4} - B_{o2}\,A_{o4} = -2\,M\,B_{o2}$$

Nous déduisons, par la théorie qu'il est impossible de construire une fonction de Liapounov comme combinaison des intégrales V_1, V_2, V_3.

. <u>autre méthode</u> :

Cherchons une fonction V de la forme

$$V = P_1\,\xi_1^2 + P_2\,\xi_2^2 + P_3\,\xi_3^2 + P_4\,\eta^2$$

où P_1, P_2, P_3, P_4 sont des constantes strictement positives.

$$\frac{dV}{dt} = 2\,P_1\,\xi_1\,\frac{d\xi_1}{dt} + 2\,P_2\,\xi_2\,\frac{d\xi_2}{dt} + 2\,P_3\,\xi_3 + \frac{d\xi_3}{dt} + 2\,P_4\,\eta\,\frac{d\eta}{dt}$$

en remplaçant les dérivées d'après 5 - 28, 5 - 29, 5 - 30, 5 - 31, et en gardant uniquement les termes linéaires, on a:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{2\,P_1\,\xi_1\,M}{A_{11}} + \dots}$$

. <u>si $\dot{\Theta}(t) \neq 0$ (sauf en $\Theta = \Theta_o$)</u>

alors V vérifie les propriétés d'une fonction de Liapounov car

V est définie positive

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{2 P_1 B \xi_1 \text{ signe } \xi_1}{A_{11}} + \dots$$

est négative [19]

<u>Conclusion</u> :

Si 5 - 27 est vérifiée, le mouvement considéré est stable pour une force dissipative de type 5 - 24.

. <u>si $\dot{\Theta}(t) = 0$ pour tout t</u> :

Dans ce cas, la trajectoire perturbée décrit une parallèle $\Theta =$ constante, et le mouvement est stable.

B. <u>Deuxième cas</u>.

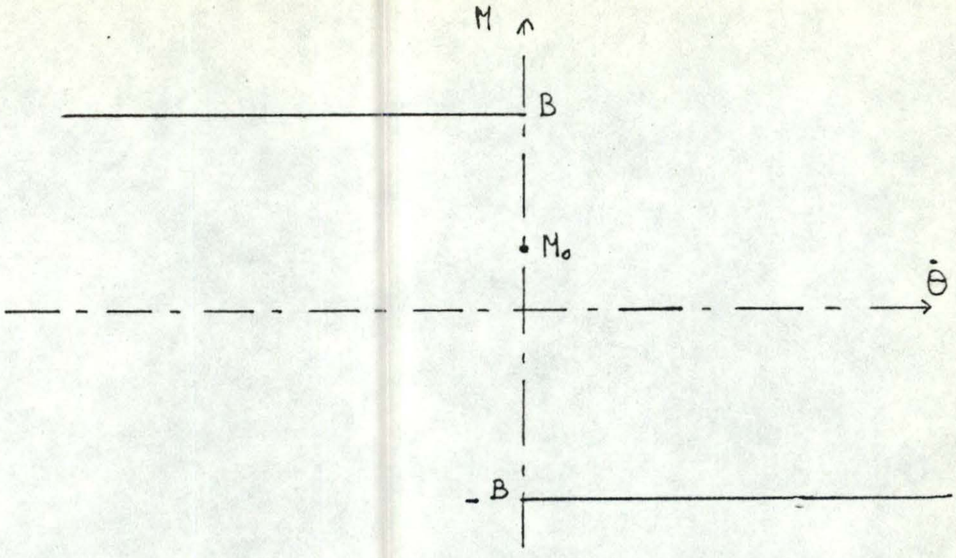
Examinons succinctement le cas où le moment de la force dissipative n'est pas nul en $\dot{\Theta} = 0$.
La fonction $M(\dot{\Theta})$ se décompose comme suit : (si $M_o > 0$)

$$M(\dot{\Theta}) = M\big|_{\dot{\Theta}=0} + M_1(\dot{\Theta})$$

$$= M_o + M_1(\dot{\Theta}) \qquad (5 - 32)$$

avec $|M_o| < B$

$$\text{et } M_1(\dot{\Theta}) = \begin{cases} B - M_o & \text{pour } \dot{\Theta} < 0 \\ 0 & \text{pour } \dot{\Theta} = 0 \\ -(B + M_o) & \text{pour } \dot{\Theta} > 0 \end{cases}$$



le frottement existe même en dehors de toute rotation.

Nous pourrions développer à nouveau le même schéma de résolution. Les résultats se ressemblent; signalons simplement que l'équation 5 - 27 aura un second membre égal à M_o
Or $|M_o| < B$

Conclusion :

Si $\left| (- (A + B_1 - C_1) \Omega^2 \cos \theta_o + C \Omega w - Pz_o) \sin \theta_o \right| < B$

alors le mouvement perturbé est stable pour une force dissipative du type 5 - 32.

A P P E N D I C E S

APPENDICE 00.

---

1. Rappelons d'abord quelques définitions [7]

Soient un intervalle $I = \left] \tau, \infty \right[$, où τ peut être égal à $-\infty$, et pour un ρ strictement positif ou infini, une boule ouverte $B_\rho \subset R^n$, centrée à l'origine. On considère une fonction

$$\vec{f} : I \times B_\rho \longrightarrow R^n : (t, \vec{x}) \rightsquigarrow \vec{f}(t, \vec{x})$$

continue et localement lipschitzienne. Soit aussi l'équation différentielle

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \qquad (0 - 1)$$

Soit $\vec{x}(t, t_o, \vec{x}_o)$ une solution de (0-1). Soit $J(t_o, \vec{x}_o)$ l'intervalle maximal sur lequel est définie la solution de conditions initiales $(t_o, \vec{x}_o)$

Supposons que $\vec{f}(t, \vec{o}) = \vec{o}$

. On dit que l'origine est stable si

$$(\forall \varepsilon : o < \varepsilon < \rho)(\forall t_o \in I)(\exists \eta(\varepsilon, t_o) > o)$$
$$(\forall \vec{x}_o : \|\vec{x}_o\| < \eta)(\forall t \geqslant t_o : t \in J(t_o, \vec{x}_o)) : \|\vec{x}(t; t_o, \vec{x}_o)\| < \varepsilon$$

. L'origine est attractive si

$$(\forall t_o \in I)(\exists \delta(t_o) > o)(\forall \vec{x}_o : \|\vec{x}_o\| < \delta)$$

$\vec{x}(t; t_o, \vec{x}_o)$ est définie pour tout $t \geqslant t_o$ et tend vers o si t tend vers l'infini.

. L'origine est asymptotiquement stable si elle est stable et attractive.

. On définit une fonction de Liapounov V par les 2 propriétés :

V est définie positive (négative)

$\dot{V}$ est semi-définie négative (positive)

2. Nous énonçons quelques théorèmes bien connus.

. théorèmes de stabilité de Liapounov

* soit l'équation $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ telle que $\vec{X}(\vec{o}) = \vec{o}$

a) s'il existe dans le voisinage de l'origine une fonction de Liapounov $V(\vec{x})$, alors l'origine est stable.

b) si de plus $-\dot{V}$ est définie positive (négative) dans ce voisinage, l'origine devient asymptotiquement stable.

* soit l'équation $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ telle que $\vec{X}(\vec{o}, t) = \vec{o}$

a) reste valable

b) il faut en plus que $V(\vec{x}, t)$ admette une limite supérieure infinitésimale petite. [12]

Si V ne dépend pas explicitement du temps, elle admet une limite supérieure infinitésimale petite.

* soit le système $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ où $\vec{x} \in R^n$ et A est une matrice constante d'ordre n

a) l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives

b) si l'une des valeurs propres est à partie réelle strictement positive, l'origine est instable

c) si

α) toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives

β) l'une au moins est à partie réelle nulle

γ) toute valeur propre à partie réelle nulle est telle que les diviseurs élémentaires associés sont simples par rapport à cette valeur propre

alors l'origine est stable, mais non asymptotiquement stable

d) si les hypothèses α) et β) du c) sont réalisées sans que γ) le soit, l'origine est instable.

• théorème d'instabilité

soit l'équation $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ telle que $\vec{f}(\vec{o}) = \vec{o}$

Si $\exists$ $W(\vec{x})$ telle que $\dot{W}$ le long des trajectoires soit définie positive et si $\exists$ $\vec{x}_o$ dans tout voisinage de l'origine tel que $W(\vec{x}_o) > o$, alors la solution $\vec{x}(t) \equiv \vec{o}$ est instable.

• théorème de stabilité d'après la première approximation.

soit l'équation $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t, \vec{x})$

où A est une matrice réelle constante d'ordre n, et où $\vec{f}$ est continue ainsi que ses dérivées. Supposons que $\vec{f}(t, \vec{o}) = \vec{o}$.

* Si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives et si

$$\frac{\|\vec{f}(t, \vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \longrightarrow o \text{ quand } \|\vec{x}\| \longrightarrow o \text{ uniformément}$$

pour t appartenant à son ensemble de définition I, l'origine est uniformément asymptotiquement stable.

* Si l'une au moins des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive et si

$$\frac{\|\vec{f}(t, \vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \longrightarrow o \text{ quand } \|\vec{x}\| \longrightarrow o \text{ uniformément pour}$$

$t \in I$, l'origine est instable.

APPENDICE 1 - 2.

Coordonnées cycliques et fonctions de Routh [17] [21]

1. Définition.

On appelle coordonnées cycliques des coordonnées qui n'entrent pas explicitement dans l'énergie cinétique et dont les forces généralisées correspondantes sont nulles.
Les autres sont appelées non cycliques ou déterminantes.

2. Analysons plus en détail l'influence des coordonnées cycliques dans un tel système.

. Les intégrales premières $\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} = c_k \quad (k = 1, \ldots, n)$

s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^{s} b_{kj} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \dot{p}_j = c_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

(A - 1 - 1)

$|C|$ étant différent de zéro, on trouve par la méthode de Cramer 2

$$\dot{p}_r = \frac{1}{|C|} \sum_{m=1}^{n} C_{mr} \left(c_m - \sum_{h=1}^{s} b_{mh} \dot{q}_h\right) \quad (r = 1, \ldots, n)$$

(A - 1 - 2)

où C_{mr} est le mineur de c_{mr}

. On obtient T^* en remplaçant dans l'expression (1 - 2 - 1) de l'énergie cinétique $\dot{p}_r$ par sa valeur.

$$T^{*}\ (q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, c_1, \ldots, c_n)$$

$$= T\ (q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, p_1, \ldots, p_n)$$

On a les relations suivantes :

$$\frac{\partial T^{*}}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{r=1}^{n} c_r \frac{\partial \dot{p}_r}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{r=1}^{n} c_r \frac{\partial \dot{p}_r}{\partial \dot{q}_j}$$

ou encore, en posant $R = T^{*} - \sum_{r=1}^{n} c_r \dot{p}_r$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{\partial R}{\partial q_j} \end{aligned}}$$

où $R = R\ (q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, c_1, \ldots, c_s)$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \ldots, s)}$$

Le grand avantage de ces équations réside dans le fait qu'elles ne dépendent pas des coordonnées cycliques.

Cela simplifie la recherche des "<u>mouvements explicites</u>" q_j

Les mouvements dans les coordonnées p sont appelés les "<u>mouvements cachés</u>".

On peut les obtenir par simple quadrature à partir de (A - 2 - 2). On trouve :

$$\boxed{p_r = p_{ro} - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial R}{\partial c_r}\, dt} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

La fonction R est appelée <u>fonction de Routh</u>.

APPENDICE 2 - 1

1. équation caractéristique

nous généralisons la théorie développée dans le cas d'une équation

soit le système $A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = \vec{o}$ (2 - 1 - 1)

où A, B, C sont des matrices

Cherchons une solution sous la forme $\vec{x} = \vec{y}e^{\lambda t}$

Dérivons et remplaçons; il vient

$(A\lambda^2 + B\lambda + C)\ \vec{y} = \vec{o}$

Nous obtenons une solution non triviale pour $\vec{y}$ si

$$\boxed{\text{dét}\ (A\lambda^2 + B\lambda + C) = o}$$

C'est le déterminant caractéristique associé à (2 - 1 - 1)

2. diviseurs élémentaires [8]

nous énonçons seulement le théorème utilisé.

* la matrice polynomiale $A(\lambda)$ est toujours équivalente à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} i_r(\lambda) & o & \cdots & o & \cdots & o \\ o & i_{r-1}(\lambda) & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & i_1(\lambda) & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ o & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & o \end{pmatrix}$$

où r est le rang de $A(\lambda)$ et $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ les polynomes invariants de $A(\lambda)$.

3. mouvement d'un électron dans un champ magnétique constant

. on sait [3] que l'équation du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique est du type :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} \quad \text{où}$$

e = charge de la particule
$\vec{p}$ = impulsion
$\vec{E}$ = champ électrique
$\vec{v}$ = vitesse de la particule
$\vec{H}$ = champ magnétique

Le membre de droite est appelé "force de Lorentz".
Pour des vitesses petites par rapport à la vitesse de la lumière c, l'impulsion est approximativement égale à son expression classique $m\vec{v}$

d'où $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

En absence de champ électrique, on a :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}}$$

. soient x, y, z les coordonnées de l'électron. On choisit des axes tels que $\vec{z} \parallel \vec{H}$

dans ce cas,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ o & o & H \end{vmatrix}$$

d'où
$$m \ddot{x} = \frac{e}{c} H \dot{y}$$
$$m \ddot{y} = \frac{e}{c} H \dot{x}$$
$$m \ddot{z} = o$$

APPENDICE 2 - 2

A. Théorèmes d'algèbre [8]

1. si les matrices carrées A et B d'ordre s sont symétriques, si A est de signe défini, alors

   a) dét $(A\lambda + B) = o$ a toutes les racines λ_i réelles

   b) il existe une matrice régulière orthogonale telle que

   $$\Lambda' A \Lambda = E, \quad \Lambda' B \Lambda = B_o$$

   où $B_o = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_s \end{pmatrix}$ et b_i sont les racines

   de l'équation dét $(A\lambda + B) = o$

   Ce théorème sert de base à l'introduction des coordonnées normales.

2. Si G est une matrice symétrique et Λ une matrice régulière, alors $\Lambda' G \Lambda$ est également symétrique

   Si G est antisymétrique, $\Lambda' G \Lambda$ restera antisymétrique

3. Soient G une matrice antisymétrique d'ordre s et B_o une matrice diagonale d'ordre s définie et μ une constante positive.

   Soit $\Delta(\mu)$ = dét $(B_o\,\mu + G)$

   Alors $\forall \mu, \forall G : \Delta(\mu) \neq o$.

B. Démonstration du théorème 2 - 2 - 1 : dissipation complète $\Longrightarrow b_k > o \quad k = 1, \ldots, s$

si $\vec{x} \neq \vec{o}$, alors $\Lambda \vec{x} \neq \vec{o}$

car $\Lambda' \Lambda = E$, d'où $\vec{x}' \Lambda' \Lambda \vec{x} = \vec{x}' . \vec{x} > o$

donc $(\Lambda \vec{x})^2 > o$

ou encore $\Lambda \vec{x} \neq \vec{o}$

$$(2 - 2 - 1)$$

Mais $B > o$, d'où par (2 - 2 - 1)

$$\vec{x}' \Lambda' B \Lambda \vec{x} > o$$

ou encore $\vec{x}' \; B_o \; \vec{x} > o \qquad \forall \vec{x} \neq \vec{o}$

de là, nous déduisons que tous les éléments diagonaux b_k $(k = 1, \ldots, s)$ sont strictement positifs.

APPENDICE 2 - 3

1. Démonstration du théorème 2 - 3 - 4.

Rappelons d'abord les équations utilisées :

$$A \ddot{\vec{q}} + H G \dot{\vec{q}} + C \vec{q} = 0 \qquad (2-3-1)$$

$$\Delta(\lambda) = |A \lambda^2 + H G \lambda + C| = 0 \qquad (2-3-2)$$

$$\Delta^{(n)}(\lambda) = |A\lambda + H G| = 0 \qquad (2-3-3)$$

$$\Delta^{(p)}(\lambda) = |H G \lambda + C| = 0 \qquad (2-3-4)$$

1er pas : précisons le sens de "stabilité"

l'ordre de (2 - 3 - 2) est 2 s où s est le nombre de coordonnées déterminantes.

Pour cette équation, on a que

$$\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$$

car A, C sont symétriques et G antisymétrique.

Ceci n'est possible que si (2 - 3 - 2) contient des λ de puissance paire.

Donc, si parmi les racines de (2 - 3 - 2), une au moins a une partie réelle non nulle, alors une racine λ au moins a une partie réelle positive et le mouvement est alors instable.

Dès lors nous déduisons une condition suffisante de stabilité :

> si toutes les racines de (2 - 3 - 2) sont des nombres imaginaires purs, simples par rapport aux diviseurs élémentaires, alors on déduit la stabilité de la position d'équilibre du système complet.

Nous analysons maintenant les rapports existant entre les racines de (2 - 3 - 3), (2 - 3 - 4) et les racines de (2 - 3 - 2).

<u>2ème pas</u> : étude de 2 - 3 - 4

- Introduisons le paramètre μ tel que

$$\lambda = \mu \chi = \frac{\chi}{H},$$

μ est donc assez petit.

Nous chercherons des valeurs de χ, à chacune de ces valeurs, correspond une valeur pour λ

- Transformons (2 - 3 - 2) en

$$\Delta(\chi, \mu) = |\mu^2 A \chi^2 + G \chi + C| = o \quad (2 - 3 - 5)$$

ou pour $\mu = o$

$$\Delta(\chi, o) = |G \chi + C| = o$$

qui coïncide avec 2 - 3 - 4 si on remplace $H \lambda$ par χ

- Comme les racines d'une équation dépendent continûment de ses coefficients, pour μ assez petit, nous déduisons que s racines de (2 - 3 - 2) se trouvent dans le voisinage des racines de (2 - 3 - 4)
- Mais le système de précession est stable, les racines de 2 - 3 - 4 prennent alors la forme (paragraphe 3 - 5)

$$\lambda_k^{(p)} = \frac{\chi_k i}{H}, \chi_{n+j} = -\chi_j \quad (k = 1, \ldots, 2n ; \; j = 1, \ldots, n)$$

<u>3ème pas</u> : étude de 2 - 3 - 3

- Introduisons le paramètre μ d'une autre manière. Soit $\lambda = H \gamma = \mu^{-1} \gamma$. A chaque valeur de γ correspond une valeur de λ.

. Transformons (2 - 3 - 2) en :

$$\Delta(\gamma, \mu) = \left| A\gamma^2 + G\gamma + \mu^2 C \right| = o \qquad (2 - 3 - 6)$$

ou pour $\mu = o$:

$$\Delta(\gamma, o) = \left| A\gamma + G \right| = o$$

qui coïncide avec (2 - 3 - 3) si on remplace λ par $H\gamma$

. Mais l'équation (2 - 3 - 3) admet les racines

$$\lambda_k^{(n)} = H\gamma_k\, i \; ; \; \gamma_{n+j} = -\gamma_j \quad (k = 1, \ldots, 2n; \; j = 1, \ldots, n)$$

La démonstration est analogue à celle du paragraphe 3 - 5 pour l'équation 2 - 3 - 4

. Par continuité, s racines de 2 - 3 - 2 se trouvent dans le voisinage de $\lambda_k^{(n)}$

4ème pas : déduction de la stabilité

En vertu du 1er pas, montrons que pour μ assez petit, la valeur exacte des racines de (2 - 3 - 2) ne quittent pas l'axe imaginaire et sont simples.

Pour des valeurs de μ assez petites, le graphe de $\Delta = \Delta(\lambda^2)$ coupe l'axe $\Delta = o$ en des points proches de

$$(\lambda_k^{(p)})^2 = -\frac{\chi_k^2}{H} \quad \text{et} \quad (\lambda_k^{(n)})^2 = -H^2\gamma_k^2$$

Ces points sont distincts car les équations (2 - 3 - 3) et (2 - 3 - 4) n'ont pas de racines multiples.

En conclusion, l'équation $\Delta(\lambda^2) = o$ a s racines réelles distinctes strictement négatives et donc 2 s racines imaginaires pures distinctes en λ.

Donc, pour μ assez petit, la position d'équilibre instable sera stabilisée.

Remarque :

Les valeurs exactes des racines de 2 - 3 - 2 dépendent évidemment de μ. Nous les notons :

$$\overline{\lambda}_k^{(p)} = \frac{\chi_k(\mu)}{H} i \ , \quad \chi_{n+j}(\mu) = -\chi_j(\mu)$$

$$\overline{\lambda}_k^{(n)} = H\, \gamma_k(\mu)\, i, \quad \gamma_{n+j}(\mu) = -\gamma_j(\mu)$$

Les équations (2 - 3 - 5) et (2 - 3 - 6) montrent que les erreurs commises dans la valeur des racines de 2 - 3 - 2 sont d'ordre $O(\mu^2)$

Nous avons donc :

$$\chi_k(\mu) = \chi_k(o) + O(\mu^2) = \chi_k + O(\mu^2)$$

$$\gamma_k(\mu) = \gamma_k(o) + O(\mu^2) = \gamma_k + O(\mu^2)$$

2. Théorème de Krasovski.

Si avec les équations différentielles du mouvement perturbé, on peut trouver une fonction V telle que

$\dot{V} = o$ dans K

$\dot{V} > o$ à l'extérieur de K

où K est l'ensemble des points ne contenant pas de trajectoires complètes pour $t > o$,

si on peut indiquer des points au voisinage de l'équilibre pour lesquels V est strictement positif,

alors le mouvement non perturbé est instable.

APPENDICE 3 - 5.

1. $\Delta(\mu) = | B_o \mu + G |$

$$\Delta(-\mu) = | B_o (-\mu) + G |$$
$$= | - B_o \mu - G' |$$
$$= (-1)^s | B_o \mu + G' |$$
$$= (-1)^s | (B_o \mu + G)' |$$
$$= (-1)^s \Delta(\mu)$$

par conséquent :

$$\Delta(u) = a_o \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \ldots + a_{s-2} \mu^2 + a_s \quad (s = 2n)$$

$$\Delta(\mu) = a_o \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \ldots + a_{s-2} \mu^3 + a_{s-1} \mu \quad (s = 2n + 1)$$

où a_o = det B_o a_s = det G

2. Par la multilinéarité de l'application "déterminant" on démontre [8] que les coefficients a_i sont donnés par la formule :

$$a_{s-k} = \sum b_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot b_{\alpha_{s-k}} \cdot \Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}}$$

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}\} \subset \{1, \ldots, s\} \quad (s \neq k)$$

où $\Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}}$ représente le déterminant de la matrice obtenue à partir de $B_o \mu + G$ en lui supprimant les lignes et les colonnes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}$ et en posant $\mu = o$

G étant antisymétrique, $\Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}} \geqslant 0$ [2]

Comme B_o est définie positive, on a les équivalences suivantes :

$a_{s-k} \neq 0 \Longleftrightarrow \Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}} > 0$

$a_{s-k} = 0 \Longleftrightarrow \Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}} = 0$

$\forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-k}\} \subset \{1, \ldots, s\}$

APPENDICE 3 - 6

$$\Delta^{(p)}(Y) = |G\,Y + C|$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(p)}(-Y) &= |-G\,Y + C| \\ &= |G'\,Y + C| \\ &= |(G\,Y + C)'| \\ &= \Delta^{(p)}(Y)\end{aligned}$$

CONCLUSION

Nous nous sommes assigné comme but du présent mémoire d'étudier une application pratique en rapport avec la stabilité. Nous avons retenu le gyroscope dans la suspension de Cardan : tel est l'objet de la seconde partie.

Ce sujet supposait une étude détaillée de questions relatives aux systèmes gyroscopiques : nous l'avons placée en première partie.

Nous nous sommes penchés ensemble sur toutes les questions posées par ce mémoire et nous nous sommes séparés pour la rédaction proprement dite; André HARDY a rédigé les chapitres 1 et 3, ainsique la partie pratique du chapitre 4; Jules SOLOT, les chapitres 2 et 5, ainsi que la partie théorique du chapitre 4.

BIBLIOGRAPHIE.

1. W. Thomson, P. Tait : Treatise on Natural Phylosophy - Part I, Cambridge University Press, 1879.

2. R. Godement : Cours d'Algèbre, Hermann, Paris, 1973.

3. E.T. Whittaker : A Treatise of the analytical Dynamics of Particles and rigid Bodies, Cambridge University Press, 1970.

4. L.D. Landau, E.M. Lifshitz : Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1960.

5. H. Hertz : Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, 1894.

6. V.V. Roumiantisev : On the Stability of Motion of a Gyroscope on Gimbals, Appl - Math. and Mec., N 3, Vol 22, 1958.

7. N. Rouche, J. Mawhin : Equations Différentielles Ordinaires, tome 2, Stabilité et Solutions Périodiques, Masson et Cie, Paris, 1974.

8. F.R. Gantmacher : Théorie des Matrices, tome 1, Dunod, Paris, 1966.

9. D. Merkine : Systèmes gyroscopiques, Moscou, 1974 (en russe).

10. L. Pontriaguine : Equations Différentielles Ordinaires, Mir, Moscou, 1969.

11. Muray R. Spiegel : Théorie et Applications de la Mécanique Générale, Série Schaum, Edi-Science, Paris, 1972, Mac Graw-Hill, New-York.

12. N.G. Chetaev : The Stability of Motion, New-York, 1961.

13. N.M. Krasovskii : Stability of Motion, Stanford University Press, Stanford (Cal.), 1963.

14. N.G. Chetaev : Sur la réciproque du théorème de Lagrange, Comptes Rendus, 1930.

15. W. Hahn : Theory and Applications of Liapunov's Direct Method, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

16. J.P. Lasalle, S. Lefschetz : Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, 1961.

17. P. Appell : Traité de Mécanique Rationnelle, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

18. J.C. Radix : Le Gyroscope, Presses Universitaires de France, Paris, 1969.

19. I. Malkine : Théorie de la Stabilité du Mouvement, Moscou, 1966 (en russe).

20. R. Couty, J. Ezra : Analyse, tome 2, Armand Colin, Paris, 1967.

21. A. Deprit, N. Rouche : Mécanique Rationnelle, tomes 1 et 2. Librairie Universitaire, Louvain , 1967.

22. G.K. Pozharitskii : On the construction of the Liapunov functions from the integrals of the equations for perturbed motion, Appl. Math. and Mec., N 2, Vol. 22, 1956.