

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Passage par la résonance pour un oscillateur unidimensionnel à fréquence lentement variable

Duquesne, Gilbert

*Award date:*  
1976

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

PASSAGE PAR LA RESONANCE  
POUR UN OSCILLATEUR UNIDIMENSIONNEL  
A FREQUENCE LENTEMENT VARIABLE

DUQUESNE Gilbert

FMB1/A76/4

## TABLE DES MATIERES

---

Introduction

Chapitre I : Présentation et correction de l'article de Kevorkian

§ 1 : Développement externe

§ 2 : Développement interne

§ 3 : Matchings

Chapitre II : Oscillateur avec frottement

§ 1 : Frottement d'ordre  $\varepsilon$

§ 2 : Frottement d'ordre  $\varepsilon^{1/2}$

§ 3 : Frottement d'ordre  $\varepsilon^{1/4}$

Chapitre III : Oscillateur non linéaire

Chapitre IV : Présentation de l'article de Gautesen

Chapitre V : Méthode de la phase stationnaire

§ 1 : Théorie

§ 2 : Application

Chapitre VI : Méthode du col

§ 1 : Théorie

§ 2 : Application

Chapitre VII : Comparaison des résultats

Bibliographie

## INTRODUCTION

---

Ce mémoire est issu de la confrontation de deux articles, l'un de Kevorkian (référence [1]), l'autre de Gautesen (référence [2]). Ils traitent tous deux de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2(\xi t)y = \alpha \cos(t + \beta) \quad 0 < \xi \ll 1$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

$\omega$  est une fonction lente du temps, telle qu'en un temps donné la fréquence propre du système soit égale à la fréquence de la force qui lui est appliquée.

Selon Kevorkian, l'amplitude augmente et diminue au passage par cette résonance instantanée. Gautesen nie ce résultat et propose une solution où l'amplitude augmente et ne diminue pas ensuite.

Dans le premier chapitre, une analyse de l'article de Kevorkian montre qu'il contient une erreur et que celle-ci corrigée, le mode de résolution mis en oeuvre par Kevorkian mène à une solution qualitativement égale à ce que Gautesen propose.

Le problème posé est intéressant au niveau de la diversité des techniques utilisées pour le résoudre. En changeant de variable  $t' = \xi t$  et  $y'(t') = y(t)$ , l'équation apparaît sous la forme

$$\xi^2 \frac{d^2 y'}{dt'^2} + \omega^2(t')y' = \alpha \cos\left(\frac{t'}{\xi} + \beta\right)$$

où l'on reconnaît un problème classique de perturbation singulière : le petit paramètre multiplie la dérivée de plus grand ordre. Kevorkian résoud en utilisant deux de ces méthodes : la méthode des développements composites et la méthode des deux variables.

Le chapitre II considère l'équation comme un problème de perturbation régulière et utilise la transformée de Lie.

Au moyen de cette méthode on peut résoudre un problème plus général en introduisant du frottement. Les méthodes de perturbation singulière deviennent impraticables dans ce cas à cause de leur complication. Plus précisément, on s'est demandé quel frottement il fallait introduire pour éviter que l'amplitude ne croisse au passage par la résonance instantanée.

L'équation différentielle étant

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + \omega^2(\varepsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta) ,$$

des frottements où  $c$  est d'ordre  $\varepsilon$  ou d'ordre  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  se révèlent insuffisants ; par contre un frottement d'ordre  $\varepsilon^{1/4}$  annihile l'effet de la résonance.

Le chapitre III traite l'équation avec frottement et une non linéarité. La méthode de la transformée de Lie et une intégration numérique par Runge-Kutta classique du quatrième ordre amènent le résultat suivant : pour un frottement nul, la non linéarité n'a pratiquement pas d'effet.

Gautesen signale dans son article qu'il applique la méthode de la phase stationnaire pour trouver un développement asymptotique de l'intégrale complexe à laquelle le type de résolution employé l'amène, en l'occurrence une intégrale de la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixf(t)} dt$$

où  $f$  et  $g$  sont analytiques et  $x$  un paramètre grand. Le chapitre V est consacré à l'exposé de cette méthode, pour laquelle les références sont rares et dont l'asymptoticité est délicate à démontrer.

Le chapitre VI expose une autre méthode qui permet de développer cette intégrale : la méthode du col, et la compare à la première méthode. Chacune des méthodes est appliquée à l'intégrale à développer.

Le dernier chapitre ramasse et compare les différents résultats, soit celui en suivant l'article de Kevorkian et confirmé en utilisant la transformée de Lie, le résultat fourni identiquement par la méthode du col et celle de la phase stationnaire, et le résultat trouvé par Gautesen.

Ils sont égaux à une phase et un facteur constant près, et qualitativement identiques .

## Chapitre 1

PRESENTATION ET CORRECTION  
DE L'ARTICLE DE KEVORKIAN

L'équation considérée est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta) \quad , \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes;

$\omega$  est une fonction lente du temps qui, au voisinage de  $t = \bar{t}_0/\varepsilon$ , a le comportement suivant :

$$\omega(\varepsilon t) = 1 + a_n(\varepsilon t - \bar{t}_0)^n + a_{n+1}(\varepsilon t - \bar{t}_0)^{n+1} + o(\varepsilon t - \bar{t}_0)^{n+1}$$

En  $t = \bar{t}_0/\varepsilon$  la force extérieure est de même fréquence que l'oscillateur.

La solution de l'équation est obtenue en construisant :

- Un développement asymptotique appelé "interne", autour de la résonance, c'est à dire valable pour des temps  $t$  proches de  $\bar{t}_0/\varepsilon$ .
- Un développement "externe", valable ailleurs sur l'axe des temps.

Le "matching" de ces deux développements est ensuite réalisé, de manière à obtenir une solution uniformément valable pour des temps d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ , la solution étant développée jusqu'à l'ordre 1.

Pour l'un et pour l'autre des développements, la solution est calculée par la méthode des deux variables.

### 1- Développement externe

Le temps lent est  $\bar{t} = \varepsilon t$

Le temps rapide est  $\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{t}} \omega(s) ds \quad (1)$

$t$  est exprimé en fonction de  $\tau$  à partir de (1)

$$t = f(\varepsilon\tau)/\varepsilon$$

On considère la solution  $y$  comme fonction du temps lent  $\bar{t}$  et du temps rapide  $\tau$ , développée en série par rapport à  $\varepsilon$  :

$$y = y_0(\tau, \tilde{t}) + \varepsilon y_1(\tau, \tilde{t}) + o(\varepsilon^2)$$

L'équation différentielle se transforme en équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} + y_0 = \frac{\alpha}{\omega^2} \cos \left[ \frac{f(\varepsilon \tau)}{\varepsilon} + \beta \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \tau^2} + y_1 = -\frac{2}{\omega} \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau \partial \tilde{t}} - \frac{\omega'}{\omega^2} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \quad (3)$$

On intègre l'équation (2) :

$$y_0 = \rho(\tilde{t}) \cos(\tau + \varphi(\tilde{t})) + \frac{\alpha}{\omega^2 - 1} \cos(\tau + \beta)$$

$\omega$  est différent de 1 puisqu'on est hors de la résonance (développement externe).

$y_0$  dépend encore de  $\tilde{t}$ .  $\rho$  et  $\varphi$  seront déterminés en annulant les termes résonants du second membre de (3). On évite ainsi d'avoir un développement non uniforme.

$$\rho = \rho_0 / \omega^{1/2}$$

$$\varphi = \varphi_0 = \text{constante.}$$

La solution pour  $y_1$  est alors :

$$y_1 = \rho_1(\tilde{t}) \cos(\tau + \varphi_1(\tilde{t})) + \frac{1 - 5\omega^2}{\omega(\omega^2 - 1)^3} \omega' \alpha \sin(\tau + \beta)$$

## 2- Développement interne

Le temps rapide est  $t$

Le temps lent est  $\bar{t} = (\tilde{t} - \tilde{t}_0) / \varepsilon^p$

On exprime la solution sous la forme :

$$y = \varepsilon^{-q} \bar{y}_0(t, \bar{t}) + \bar{y}_1(t, \bar{t}) + \varepsilon^q \bar{y}_2(t, \bar{t}) + o(\varepsilon^{2q})$$

$p$  et  $q$  sont des constantes qui seront fixées plus loin.



L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-q} \left( \frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t^2} + \bar{y}_0 \right) + \frac{\partial^2 \bar{y}_1}{\partial t^2} + \bar{y}_1 - \alpha \cos(t + \beta) \\ + 2 \varepsilon^{1-p-q} \frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t \partial \tau} + 2 a_n \varepsilon^{np-q} \frac{\partial^n \bar{y}_0}{\partial t^n} + \dots = 0 \end{aligned}$$

L'équation en  $y_1$  contiendra les termes

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 - \alpha \cos(t + \beta)$$

Si elle est réduite à ces termes, son intégration fera apparaître des termes non uniformes. Pour les annuler on choisit  $p$  et  $q$  de telle sorte que l'équation contienne d'autres termes. On ajoute les deux derniers termes de la série :  $p$  et  $q$  sont pris de manière à ce que ces termes soient de même ordre que

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_1}{\partial t^2} + \bar{y}_1 - \alpha \cos(t + \beta), \text{ c'est à dire en } \varepsilon^0$$

$$1-p-q = 0$$

$$np - q = 0$$

$p$  et  $q$  sont alors déterminés :

$$p = \frac{1}{1+n}$$

$$q = \frac{n}{1+n}$$

Cela indique que la région de résonance est d'ordre  $\varepsilon^{-1/n+1}$  en unités de temps et que l'amplitude est d'ordre  $\varepsilon^{-n/n+1}$ .

Dans la suite du calcul on considère seulement le cas particulier où  $n=1$ . Les autres cas se traitent de la même manière.

On prend aussi  $a_1 > 0$ .

En identifiant les puissances d' $\varepsilon$  on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t^2} + \bar{y}_0 = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_1}{\partial t^2} + \bar{y}_1 = \alpha \cos(t + \beta) - 2a_1 \bar{t} \bar{y}_0 - 2 \frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t \partial \bar{t}} \quad (4b)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_2}{\partial t^2} + \bar{y}_2 = -2a_1 \bar{t} \bar{y}_1 - (2a_2 + a_1^2) \bar{t}^2 \bar{y}_0 - 2 \frac{\partial^2 \bar{y}_1}{\partial t \partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial \bar{t}^2} \quad (4c)$$

L'équation (4a) admet pour solution

$$\bar{y}_0(t, \bar{t}) = \bar{A}(\bar{t}) \sin t + \bar{B}(\bar{t}) \cos t$$

$\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont pris de manière à annuler le second membre de (4b). On évite ainsi l'apparition de termes en  $t \sin t$  ou  $t \cos t$  dans la solution.  $p$  et  $q$  ont été choisis à cette fin.

$\bar{A}$  et  $\bar{B}$  doivent satisfaire

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\bar{t}} + a_1 \bar{t} \bar{B} &= \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ \frac{d\bar{B}}{d\bar{t}} - a_1 \bar{t} \bar{A} &= \frac{\alpha}{2} \sin \beta \end{aligned} \quad (5)$$

Le texte s'écarte ici de l'article de Kevorkian.

Le système homogène associé à ce système admet comme solution :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= a \sin \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} + b \cos \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} \\ \bar{B} &= -a \cos \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} + b \sin \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} \end{aligned}$$

Pour trouver la solution générale par la méthode de la variation de la constante, on est amené à résoudre des intégrales du genre

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} \cos \frac{a_1 s^2}{2} ds$$

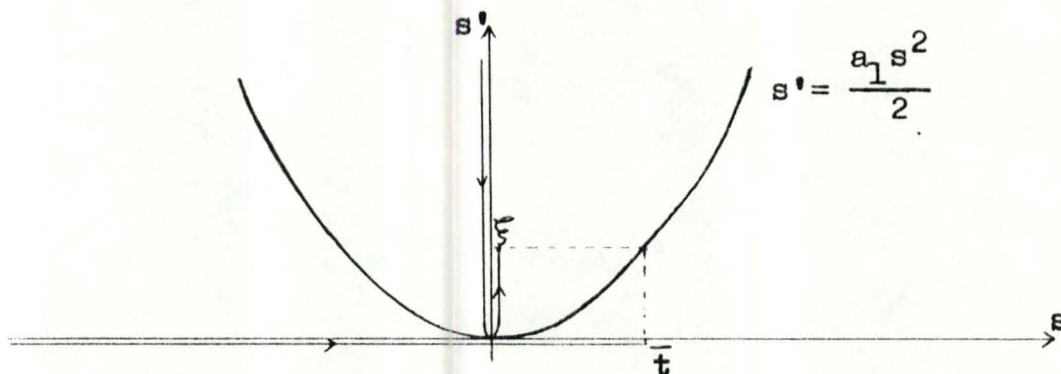
Comme il suffit d'avoir un développement asymptotique pour  $t$  tendant vers l'infini, on intègre par parties comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\bar{t}} \sin \frac{a_1 s^2}{2} ds &= -\frac{1}{a_1 \bar{t}} \cos \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\bar{t}} - \int_{-\infty}^{\bar{t}} \frac{1}{a_1 s^2} \cos \frac{a_1 s^2}{2} ds \\ &= -\frac{1}{a_1 \bar{t}} \cos \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} - \frac{1}{a_1 \bar{t}^3} \sin \frac{a_1 \bar{t}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Ce procédé est correct pour autant que l'on ait  $\bar{t} < 0$ , parce que la fonction  $\frac{1}{s^2}$  entre autres n'est pas intégrable sur un intervalle comprenant 0.

Pour intégrer aussi pour des temps positifs on effectue le changement de variable :

$$s \rightarrow s' = \frac{a_1 s^2}{2}$$



$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} \sin \frac{a_1 s^2}{2} ds = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{\xi} \frac{\sin s}{-\sqrt{s}} ds \quad \left| \text{avec } \bar{t} < 0 \right.$$

où  $\xi = \frac{a_1}{2} t^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} a_1} \left( \int_{+\infty}^0 \frac{\sin s}{-\sqrt{s}} ds + \int_0^{\xi} \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds \right) \quad \text{avec } \bar{t} > 0$$

Cette dernière intégrale se décompose en intégrale de 0 à  $\infty$  et de  $\infty$  à  $t$ , d'où :

$$\int_{-\infty}^t \sin \frac{a_1 s^2}{2} ds = \frac{1}{\sqrt{2} a_1} \left( 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds - \int_{-\infty}^{-t} \sin \frac{a_1 s^2}{2} ds \right)$$

Pour la seconde intégrale on est ramené au cas de  $\bar{t} < 0$ , pour lequel on connaît un développement asymptotique.

La première intégrale est à une constante près une intégrale de Fresnel.

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{2\pi t} dt$$

$$\text{Le cosinus amènera : } C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2\pi t} dt$$

Comme on sait que  $S(\infty) = \frac{1}{2}$  on a  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Note historique :

- Cauchy a publié en 1842 un résultat au sujet de l'intégrale de Fresnel. Il coïncide avec le résultat obtenu ici. Il est exprimé sous la forme :

$$\int_0^m \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) dz = \frac{1}{2} - N \cos \frac{\pi}{2} m^2 + M \sin \frac{\pi}{2} m^2$$

$$\int_0^m \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) dz = \frac{1}{2} - M \cos \frac{\pi}{2} m^2 - N \sin \frac{\pi}{2} m^2$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} M = \frac{1}{m\pi} - \frac{1.3}{m^5\pi^5} + \frac{1.3.5.7}{m^9\pi^9} - \dots \\ N = \frac{1}{m^3\pi^2} - \frac{1.3.5}{m^7\pi^4} \end{array} \right.$$

- cf. Référence [7], ch. 47, § 2, p. 1100

En appelant

$$A'(\xi) = \frac{\alpha}{\sqrt{8} a_1} \left( \cos \beta \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\cos(\xi-s)}{\sqrt{s}} ds + \sin \beta \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sin(\xi-s)}{\sqrt{s}} ds \right)$$

$$B'(\xi) = \frac{\alpha}{\sqrt{8} a_1} \left( -\cos \beta \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sin(\xi-s)}{\sqrt{s}} ds + \sin \beta \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\cos(\xi-s)}{\sqrt{s}} ds \right)$$

la solution  $\bar{y}_0$  s'écrit comme

$$\bar{y}_0 = A'(\xi) \sin t + B'(\xi) \cos t$$

pour  $\bar{t} \leq 0$  (avant la résonance)

$$\bar{y}_0 = -A'(\xi) \sin t - B'(\xi) \cos t - \alpha \sqrt{\frac{\pi}{4 a_1}} \cos(\xi + t + \beta)$$

pour  $\bar{t} \geq 0$  (après la résonance)

On a pris  $a=b=0$ . Considérant qu'il n'y a pas de termes d'ordre  $\xi^{-1/2}$  dans la solution externe, du moins en  $\bar{t} \leq 0$ , on effectue le premier matching avec  $a=b=0$

Au vu du développement asymptotique qu'il en fait (4.6 dans l'article) la solution considérée par Kevorkian est du genre :

$$\bar{y}_0 = E(\bar{\xi}) \sin t + F(\bar{\xi}) \cos t \quad \text{pour } \bar{t} \leq 0$$

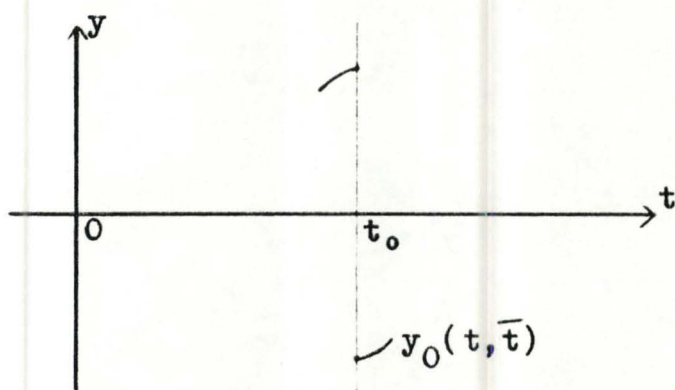
$$\bar{y}_0 = -E(\bar{\xi}) \sin t - F(\bar{\xi}) \cos t \quad \text{pour } \bar{t} \geq 0$$

En  $\bar{t} = 0$  ( $t = t_0$ ) on a

$$\bar{y}_0(t_0, 0_-) = E(0) \sin t_0 + F(0) \cos t_0$$

$$\bar{y}_0(t_0, 0_+) = -E(0) \sin t_0 - F(0) \cos t_0$$

Comme  $E(0)$  et  $F(0)$  ne sont pas nuls, c'est impossible, cette solution prenant deux valeurs différentes au même point.



De ce fait la conclusion que Kevorkian tire, grâce à l'absence de termes en  $\varepsilon^{-1/2}$  pour  $\bar{t} \geq 0$ , c'est à dire que l'amplitude de l'oscillateur ne croît pas, est fautive.

L'équation (4b) admet pour solution

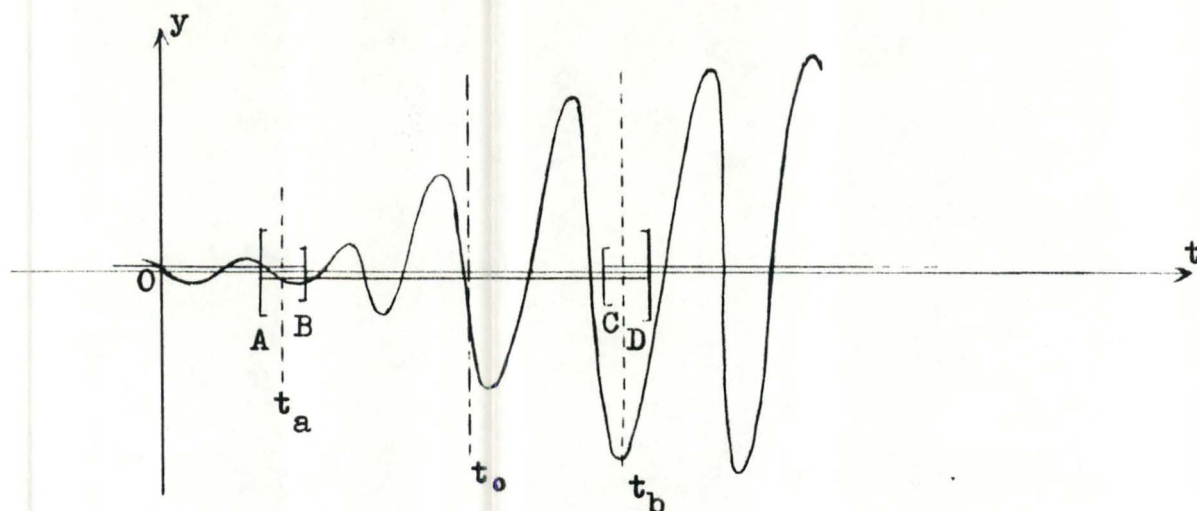
$$\bar{y}_1(t, \bar{t}) = \bar{C}(\bar{t}) \sin t + \bar{D}(\bar{t}) \cos t$$

$\bar{C}$  et  $\bar{D}$  sont déterminés de la même façon que  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ , en annulant les termes en  $t \sin t$  et  $t \cos t$  du second membre de (4c).

### 3- Matching

Il y a deux matchings à réaliser.

Un premier matching raccroche développement externe et développement interne avant la résonance; et c'est celui que Kevorkian a bien effectué. Un second matching raccroche les développements après la résonance.



En 0 , les conditions initiales fixent  $\rho_0$  et  $\varphi_0$

En  $t_a$  , le premier matching fixe  $\gamma$  et  $\delta$  (conditions initiales pour le développement interne avec a et b), a et b étant nuls.

En  $t_b$  , le second matching fixe  $\rho_1$  et  $\varphi_1$  , amplitude et phase de l'oscillateur après le passage par la résonance.

[A,D] est le domaine de validité du développement interne.

B est la borne supérieure du domaine de validité du développement externe avant la résonance.

C est la borne inférieure du domaine de validité du développement externe après la résonance.

Premier matching

+++++

On introduit la variable intermédiaire  $t_\mu$

$$t_\mu = (\bar{t} - \bar{t}_0) / \varepsilon^\mu \quad \mu_1 < \mu < \mu_2$$

Les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui définissent le domaine de recouvrement des deux développements où le matching s'effectuera seront déterminées plus loin.

Le matching jusqu'à l'ordre  $O(1)$  consistera à faire coïncider le développement externe et le développement interne, écrits en fonction de  $t_\mu$ , jusqu'à l'ordre  $O(1)$  pour  $\varepsilon$  tendant vers 0 et  $t_\mu$  fixé.

On exprime d'abord le développement externe en fonction de  $t_\mu$ .  
A partir de l'identité

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_0} \omega(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t-t_0} \omega(\tilde{t}_0 + s) ds ,$$

on développe  $\tau$  en série :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + o(\varepsilon^{3\mu-1})$$

$$\text{où } \tau_0 = \int_0^{t_0} \omega(s) ds$$

Le développement externe s'écrit :

$$\begin{aligned} y = & \rho_0 \cos \left( \frac{\tau_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \varphi \right) \\ & + \varepsilon^{-\mu} \frac{\alpha}{2a_1 t_\mu} \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\ & - \frac{2a_2 + a_1^2}{4a_1^2} \alpha \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\ & - \varepsilon^{1-3\mu} \frac{1}{2a_1^3 t_\mu^3} \alpha \sin \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\ & + o(\varepsilon^\mu) + o(\varepsilon^{1-2\mu}) + o(\varepsilon^{3\mu-1}) \end{aligned}$$

Les quatre termes du développement seront identifiés avec les termes du développement interne. On exige ainsi que

$\varepsilon^{1-2\mu}$  et  $\varepsilon^{3\mu-1}$  tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ , c'est-à-dire lors du matching. Cela fixe  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , donc le domaine du matching.

On prend donc :

$$\left. \begin{array}{l} 1-2\mu > 0 \implies \mu < \frac{1}{2} \\ 3\mu-1 > 0 \implies \mu > \frac{1}{3} \\ \mu > 0 \end{array} \right\} \implies \mu_2 = \frac{1}{2} \\ \implies \mu_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} < \mu < \frac{1}{2}$$

Le développement interne, en annulant les termes en  $\varepsilon^{-1/2}$ , s'écrit pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $t_\mu$  fixé :

$$\begin{aligned}
 y = & \varepsilon^{-\mu} \frac{\alpha}{2a_1 t_\mu} \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\
 & - \varepsilon^{1-3\mu} \frac{1}{2a_1^3 t_\mu^3} \alpha \sin \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\
 & - \frac{2a_2 + a_1^2}{4a_1^2} \alpha \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \beta \right) \\
 & - \gamma \cos \left( \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} \right) \\
 & + \delta \sin \left( \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} \right) + o(\varepsilon^{2-5\mu})
 \end{aligned}$$

On doit choisir  $2-5\mu > 0 \implies \mu < \frac{2}{5} \implies \mu_2 = \frac{2}{5}$

$$\frac{1}{3} < \mu < \frac{2}{5}$$

L'égalité des deux développements fixe les conditions initiales  $\gamma$  et  $\delta$  de la solution interne

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \varphi \right) \\
 = & - \gamma \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 \right) \\
 & + \delta \sin \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varepsilon^{\mu-1} t_\mu + \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{implique :} \quad \delta = & - \rho_0 \sin \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varphi - \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} \right) \\
 \gamma = & - \rho_0 \cos \left( \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} + \varphi - \frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

A partir d'ici, l'exposé s'écarte de celui de Kevorkian.



Second matching

+++++

En posant :  $A = \varepsilon^{-\mu} \frac{\alpha}{2a_1 t_\mu}$

$$a = \frac{t_0}{\varepsilon}$$

$$B = -\varepsilon^{1-3\mu} \frac{1}{2a_1^3 t_\mu^3}$$

$$b = \varepsilon^{\mu-1} t_\mu$$

$$C = -\frac{\alpha(2a_1 + a_1^2)}{4a_1^2}$$

$$c = \varepsilon^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2$$

$$\Psi_1 = \frac{t_0}{\varepsilon} + \varphi_1$$

le développement externe s'écrit :

$$y = A \cos(a+b+\beta) + B \sin(a+b+\beta) + C \cos(a+b+\beta) + \rho_1 \cos(b+c+\Psi_1) + o(\varepsilon^\mu) + o(\varepsilon^{1-2\mu}) + o(\varepsilon^{3\mu-1}) \quad (7)$$

Les indices 1 désignent les constantes qui doivent être fixées par les conditions initiales, soit ici par le matching.

Le développement interne s'écrit :

$$y = A \cos(a+b+\beta) + B \sin(a+b+\beta) + C \cos(a+b+\beta) - \gamma \cos(a+b+c) + \delta \sin(a+b+c) - \varepsilon^{-1/2} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \cos(a+b+c+\beta)$$

Ce développement diffère de celui utilisé lors du premier matching uniquement par les deux derniers termes.

L'égalité des deux développements impose que

$$\rho_1 \cos(b+c+\Psi_1) = -\gamma \cos(a+b+c) + \delta \sin(a+b+c) - \varepsilon^{-1/2} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \cos(a+b+c+\beta)$$

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \left( \cos(b+c) \cos \Psi_1 - \sin(b+c) \sin \Psi_1 \right) \\
&= -\delta \left( \cos a \cos(b+c) - \sin a \sin(b+c) \right) \\
&\quad + \delta \left( \sin a \cos(b+c) + \sin(b+c) \cos a \right) \\
&\quad - \varepsilon^{-1/2} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \left( \cos(a+\beta) \cos(b+c) - \sin(a+\beta) \sin(b+c) \right)
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de  $\cos(b+c)$  et  $\sin(b+c)$  on obtient

$$\begin{cases}
\rho_1 \cos \Psi_1 = -\delta \cos a + \delta \sin a - \varepsilon^{-1/2} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \cos(a+\beta) \\
-\rho_1 \sin \Psi_1 = \delta \sin a + \delta \cos a + \varepsilon^{-1/2} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \sin(a+\beta)
\end{cases} \quad (8)$$

En sommant les carrés de chaque membre on obtient

$$\rho_1^2 = \delta^2 + \delta^2 + \varepsilon^{-1} \frac{\alpha^2 \pi}{4a_1} + o(\varepsilon^{-1/2}) \quad (9)$$

$\delta$  et  $\delta$  ont été fixés lors du premier matching où ils ont été exprimés en fonction de l'amplitude et de la phase initiales.

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= \rho_0^2 \sin^2 \left( \frac{\tau_0}{\varepsilon} + \varphi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \right) + \rho_0^2 \cos^2 \left( \frac{\tau_0}{\varepsilon} + \varphi - \frac{\tau_0}{\varepsilon} \right) \\
&\quad + \varepsilon^{-1} \frac{\alpha^2 \pi}{4a_1} + o(\varepsilon^{-1/2}) \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\rho_1^2 = \rho_0^2 + \frac{\alpha^2 \pi}{4a_1 \varepsilon} + o(\varepsilon^{-1/2})$$

Comme  $a_1$  est positif,  $\rho_1^2 > \rho_0^2$ , l'amplitude croît.

**Bibliographie :** Nayfeh (référence [3]), Ch IV, § 1 pour la méthode du matching, Ch VI, § 1.2 pour la méthode des deux variables.

Pour le choix particulier des variables dans la méthode des deux variables : référence [4] de Kevorkian.

## 4- Errata de l'article de Kevorkian

<u>page</u>	<u>ligne</u>	<u>écrit</u>	<u>à lire</u>
367	6 <sup>e</sup> d'en bas	$\xi^{-n(n+1)}$	$\xi^{-1(n+1)}$
368	(3.5a)	$\frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t^2} = \bar{y}_0 = 0$	$\frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial t^2} + \bar{y}_0 = 0$
368	(3.5c)	$-(2a_2 + a_1^2) \bar{t}^2 \bar{y}_0^2$	$-(2a_2 + a_1^2) \bar{t}^2 \bar{y}_0$
369	(3.12b)	$\bar{D} = \dots -2k_3 \frac{\bar{A}(\bar{\xi})}{\bar{\xi}^{1/2}}$	$\bar{D} = \dots -2k_3 \frac{\bar{A}(\bar{\xi})}{\bar{\xi}^{1/2}} - \frac{\alpha \cos \beta}{4}$
371	(4.8)	$\left[ \begin{aligned} &\xi^{-\mu} \frac{1}{2a_1 t_\mu} \cos\left(\frac{\bar{t}_0}{\xi} + \xi^{\mu-1} t_\mu + \beta\right) \\ &- \gamma \cos\left(\xi^{\mu-1} t_\mu + \xi^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2\right) \\ &+ \delta \sin\left(\xi^{\mu-1} t_\mu + \xi^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2\right) \end{aligned} \right.$	$\left[ \begin{aligned} &\xi^{-\mu} \frac{\alpha}{2a_1 t_\mu} \cos\left(\frac{\bar{t}_0}{\xi} + \xi^{\mu-1} t_\mu + \beta\right) \\ &- \gamma \cos\left(\xi^{\mu-1} t_\mu + \xi^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \frac{\bar{t}_0}{\xi}\right) \\ &+ \delta \sin\left(\xi^{\mu-1} t_\mu + \xi^{2\mu-1} \frac{a_1}{2} t_\mu^2 + \frac{\bar{t}_0}{\xi}\right) \end{aligned} \right.$
371	(4.9a)	$\gamma = -\rho_0 \cos(\tau_0 / \xi + \varphi)$	$\gamma = -\rho_0 \cos(\tau_0 / \xi + \varphi - \bar{t}_0 / \xi)$
371	(4.9b)	$\delta = -\rho_0 \sin(\tau_0 / \xi + \varphi)$	$\delta = -\rho_0 \sin(\tau_0 / \xi + \varphi - \bar{t}_0 / \xi)$

## Chapitre II

## OSCILLATEUR AVEC FROTTEMENT

Ce chapitre répond à la question : Quel frottement doit-on appliquer au système pour que l'amplitude ne croisse pas au passage à la fréquence de résonance ?

On va considérer des frottements de la forme  $\epsilon^q c$  en prenant pour  $q$  les valeurs successives 1, 1/2, 1/4.

Les résultats montrent qu'un frottement d'ordre  $\epsilon^{1/4}$  sera suffisant pour annihiler l'effet de la résonance.

1- Frottement d'ordre  $\epsilon$ 

Avec un frottement d'ordre  $\epsilon$  l'oscillateur est soumis à l'équation :

$$\ddot{y} + \epsilon c \dot{y} + \omega^2(\epsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta) \quad , \quad c \geq 0$$

$\omega$  sera pris ici de la forme particulière :

$$\omega(\epsilon t) = 1 + \epsilon kt$$

La résonance a donc lieu en  $t = 0$

La méthode de perturbation utilisée précédemment, soit la méthode des deux variables, devient ici impraticable.

On emploiera la méthode de la transformée de Lie. Il est suffisant de considérer seulement un développement interne, qui décrit ce qui se passe autour de la résonance, là où a lieu éventuellement le saut de l'amplitude.

Pour appliquer la méthode de la transformée de Lie, on présente d'abord l'équation sous forme de système normal :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = -y - 2\epsilon kty - \epsilon^2 k^2 t^2 y + \alpha \cos(t + \beta) - \epsilon c \dot{y} \end{cases}$$

On pose  $\varepsilon^{1/2}kt = \mu$ , c'est à dire que l'on va considérer  $\varepsilon^{1/2}kt$  comme une quantité d'ordre zéro. La transformation s'effectue donc pour des temps d'ordre  $\varepsilon^{-1/2}$ , ce qui détermine le domaine de validité du développement interne.

On change de variable : on applique aux coordonnées  $(y, \dot{y})$  une rotation d'angle  $t$  (en première approximation, la fréquence propre du système est 1) et une homothétie de rapport  $\varepsilon^{1/2}$ .

$$\begin{cases} y = \varepsilon^{-1/2} \cos t x_1 + \varepsilon^{-1/2} \sin t x_2 \\ \dot{y} = -\varepsilon^{-1/2} \sin t x_1 + \varepsilon^{-1/2} \cos t x_2 \end{cases}$$

Le système transformé est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon^{1/2} \left[ 2\mu \sin t \cos t x_1 + 2\mu \sin^2 t x_2 - \alpha \cos(t+\beta) \sin t \right] \\ \quad + \varepsilon \left( -c \sin^2 t x_1 + c \cos t \sin t x_2 \right) \\ \quad + \varepsilon \mu^2 \left( \sin t \cos t x_1 + \sin^2 t x_2 \right) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon^{1/2} \left[ -2\mu \cos^2 t x_1 - 2\mu \sin t \cos t x_2 + \alpha \cos(t+\beta) \cos t \right] \\ \quad + \varepsilon \left( c \sin t \cos t x_1 - c \cos^2 t x_2 \right) \\ \quad - \varepsilon \mu^2 \left( \cos^2 t x_1 + \sin t \cos t x_2 \right) \end{cases}$$

Ecrivons le système sous la forme :

$$\dot{x} = P_0^0 + \varepsilon^{1/2} P_1^0 + \varepsilon P_2^0$$

La transformée de Lie de vecteur générateur  $W$  transforme ce système en :

$$\dot{x} = P_0^0 + \varepsilon^{1/2} P_0^1 + \varepsilon P_0^2 + o(\varepsilon^{3/2})$$

$$W = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/2} W_n$$

On construira une transformée de Lie qui éliminera des seconds membres les termes oscillant rapidement.

Le coefficient de frottement n'apparaît que dans  $P_2^0$ . Il n'apparaîtra donc pas au premier ordre dans  $\bar{x}$ . Qualitativement le système aura donc un comportement analogue au cas sans frottement. Il faudra choisir un frottement plus grand que  $\xi c$  pour éviter la croissance de l'amplitude.

Il est cependant intéressant d'effectuer le calcul jusqu'au premier ordre du moins, de manière à voir si la méthode de la transformée de Lie donne un résultat analogue à celui obtenu par la méthode que Kevorkian emploie pour le cas sans frottement.

Considérons le système transformé. Comme l'image du système sera calculée jusqu'au premier ordre, c'est à dire jusqu'à l'ordre de  $\xi^{1/2}$ , il est inutile de retenir le terme en  $\xi \mu^2$  qui donnera une contribution en  $\xi$ , ni celui en  $c$  qui fournira du  $\xi$ .

Ecrivons le système sous forme de somme de Fourier.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \xi^{1/2} \left[ \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} + (\mu x_1 - \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \sin 2t \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \cos 2t \right] + O(\xi) \\ \dot{x}_2 = \xi^{1/2} \left[ -\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \sin 2t \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \cos 2t \right] + O(\xi) \\ \dot{t} = 1 \end{array} \right.$$

La méthode de perturbation utilisée, méthode de la transformée de Lie, consiste à déterminer, ordre par ordre, une transformation qui simplifie le système différentiel.

La transformation envoyant un système différentiel en  $x$  sur un système différentiel en  $\bar{x}$  est décrite par un vecteur générateur  $W(x, \xi)$  tel que

$$\frac{dx}{d\xi} = W(x, \xi), \text{ avec } x(\xi = 0) = \bar{x}$$

(transformation proche de l'identité)

La construction ordre par ordre du vecteur  $W$  permet de choisir une forme particulière pour le nouveau système.

Pour plus de détail, consulter par exemple la référence [3], Ch V,

Calculons la transformée de Lie jusqu'au second ordre.

$$P_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_0^1 = P_1^0 + L_1 P_0^0 \quad \text{où } L_1 P_0^0 = \left( \frac{\partial P_0^0}{\partial x} \right) w_1 - \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) P_0^0$$

$$P_1^0 = P_0^1 - L_1 P_0^0$$

On choisit pour  $P_0^1$  les termes non oscillants de  $P_1^0$  ;  $w_1$  est choisi de manière à ce que les autres termes soient égaux à  $L_1 P_0^0$

$$P_0^1 = \begin{pmatrix} \mu \bar{x}_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} \\ -\mu \bar{x}_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système moyenné :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \varepsilon^{1/2} \left( \mu \bar{x}_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} \right) \\ \dot{\bar{x}}_2 = \varepsilon^{1/2} \left( -\mu \bar{x}_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} \right) \end{cases}$$

soit, en explicitant  $\mu$  :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \varepsilon k t \bar{x}_2 + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \sin \beta}{2} \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\varepsilon k t \bar{x}_1 + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \cos \beta}{2} \end{cases}$$

Ce système est le même que le système (5) du chapitre précédent.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{A}}{d\bar{t}} = -a_1 \bar{t} \bar{B} + \frac{\alpha \cos \beta}{2} \\ \frac{d\bar{B}}{d\bar{t}} = a_1 \bar{t} \bar{A} + \frac{\alpha \sin \beta}{2} \end{cases}$$

On a  $\bar{t} = \tilde{t} \varepsilon^{-1/2} = \varepsilon^{1/2} t$  (il s'agit du  $t$  de ce chapitre)

Le système s'écrit en fonction de  $t$  :

$$\begin{cases} \dot{\bar{A}} = -\varepsilon a_1 t \bar{B} + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \cos \beta}{2} \\ \dot{\bar{B}} = \varepsilon a_1 t \bar{A} + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \sin \beta}{2} \end{cases}$$

On a le même système puisque  $a_1$  correspond à  $k$  et  $\bar{A}$  joue le rôle de  $\bar{x}_2$  et  $\bar{B}$  celui de  $\bar{x}_1$ . En effet la solution est présentée comme

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon^{-1/2} (\bar{A} \sin t + \bar{B} \cos t) \quad \text{d'une part,} \\ y &= \varepsilon^{-1/2} (x_1 \cos t + x_2 \sin t) \quad \text{d'autre part.} \end{aligned}$$

Donc, au premier ordre, la méthode de la transformée de Lie fournit exactement le même résultat que la méthode des deux variables.

## 2- Frottement d'ordre $\varepsilon^{1/2}$

L'équation est alors

$$\ddot{y} + \varepsilon^{1/2} c \dot{y} + \omega^2(\varepsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta)$$

On en tire pareillement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon^{1/2} \left[ \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} + (\mu x_1 - \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \sin 2t + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \cos 2t \right] \\ \quad + \varepsilon^{1/2} \left( -\frac{c}{2} x_1 + \frac{c}{2} x_2 \sin 2t + \frac{c}{2} x_1 \cos 2t \right) \\ \quad + \varepsilon \mu^2 \left( \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \sin 2t - \frac{1}{2} x_2 \cos 2t \right) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon^{1/2} \left[ -\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \sin 2t + (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \cos 2t \right] \\ \quad + \varepsilon^{1/2} \left( -\frac{c}{2} x_2 + \frac{c}{2} x_1 \sin 2t - \frac{c}{2} x_2 \cos 2t \right) \\ \quad + \varepsilon \mu^2 \left( -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 \sin 2t - \frac{1}{2} x_1 \cos 2t \right) \end{cases}$$



$$P_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la même manière que plus haut, on choisit pour  $P_0^1$  les termes non oscillants de  $P_1^0$ .

$$P_0^1 = \begin{pmatrix} \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} - \frac{c}{2} x_1 \\ -x_1 + \frac{\cos \beta}{2} - \frac{c}{2} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En vue de calculer jusqu'au second ordre, il faut déterminer la composante  $W_1$  en  $\varepsilon^{1/2}$  du vecteur générateur.

$$P_0^1 = P_1^0 + L_1(P_0^0) \quad \text{où} \quad L_1 P_0^0 = \left( \frac{\partial P_0^0}{\partial x} \right) W_1 - \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) P_0^0$$

$$P_0^1 = P_1^0 - \frac{\partial}{\partial t} W_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \begin{pmatrix} (\mu x_1 - \frac{\alpha \cos \beta}{2} + \frac{c}{2} x_2) \sin 2t + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2} + \frac{c}{2} x_1) \cos 2t \\ (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2} + \frac{c}{2} x_1) \sin 2t + (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} - \frac{c}{2} x_2) \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} - \frac{c}{2} x_2) \frac{\cos 2t}{2} + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2} + \frac{c}{2} x_1) \frac{\sin 2t}{2} \\ (\mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} - \frac{c}{2} x_1) \frac{\cos 2t}{2} + (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} - \frac{c}{2} x_2) \frac{\sin 2t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0^2 = P_2^0 + L_1 P_1^0 + L_1 P_0^1 + L_2 P_0^0$$

$P_0^2$  sera la somme des termes indépendants du membre de droite, la partie trigonométrique sera rejetée dans  $L_2 P_0^0$ .

Les termes indépendants viennent de

$$P_2^0 : \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon \mu^2}{2} x_2 \\ -\frac{\varepsilon \mu^2}{2} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et de } L_1 P_1^0 : \begin{pmatrix} +\frac{c \alpha \cos \beta}{4} - \frac{c^2}{4} x_2 - \mu^2 x_2 - \frac{\mu \alpha \sin \beta}{2} \\ -\frac{c \alpha \sin \beta}{4} + \frac{c^2}{4} x_1 + \mu^2 x_1 - \frac{\mu \alpha \cos \beta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$\dot{\bar{x}} = P_0^0 + \varepsilon^{1/2} P_0^1 + \varepsilon P_0^2$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \left( \varepsilon^{1/2} \mu - \frac{\varepsilon \mu^2}{2} - \frac{\varepsilon c^2}{4} \right) \bar{x}_2 - \varepsilon^{1/2} \frac{c}{2} \bar{x}_1 + \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \sin \beta}{2} + \frac{\varepsilon c \alpha \cos \beta}{4} - \frac{\varepsilon \mu \alpha \sin \beta}{2} \\ \dot{\bar{x}}_2 = \left( -\varepsilon^{1/2} \mu + \frac{\varepsilon \mu^2}{2} + \frac{\varepsilon c^2}{4} \right) \bar{x}_1 - \varepsilon^{1/2} \frac{c}{2} \bar{x}_2 + \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \cos \beta}{2} - \frac{\varepsilon c \alpha \sin \beta}{4} - \frac{\varepsilon \mu \alpha \cos \beta}{2} \end{cases}$$

En explicitant  $\mu$ ,

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \left( \varepsilon k t - \varepsilon^2 k^2 t^2 + \frac{c^2}{4} \right) \bar{x}_2 - \varepsilon^{1/2} \frac{c}{2} \bar{x}_1 + \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \sin \beta}{2} \\ \quad + \frac{\varepsilon c \alpha \cos \beta}{4} - \varepsilon^{3/2} k t \frac{\alpha \sin \beta}{2} \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\left( \varepsilon k t - \varepsilon^2 k^2 t^2 + \frac{c^2}{4} \right) \bar{x}_1 - \varepsilon^{1/2} \frac{c}{2} \bar{x}_2 + \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \cos \beta}{2} \\ \quad - \frac{\varepsilon c \alpha \sin \beta}{4} - \varepsilon^{3/2} k t \frac{\alpha \cos \beta}{2} \end{cases}$$

Appelons  $\phi$  une matrice fondamentale de ce système

$$\phi(t) = e^{-\frac{\xi}{2} \frac{1}{2} ct} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\xi c^2}{4} t + \frac{\xi k}{2} t^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} t^3\right) & \cos\left(\frac{\xi c^2}{4} t + \frac{\xi k}{2} t^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} t^3\right) \\ \cos\left(\frac{\xi c^2}{4} t + \frac{\xi k}{2} t^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} t^3\right) & -\sin\left(\frac{\xi c^2}{4} t + \frac{\xi k}{2} t^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} t^3\right) \end{pmatrix}$$

La solution, pour une condition initiale en un temps  $t_0$ , s'écrit :

$$\bar{x}(t) = \phi(t) \left( \phi^{-1}(t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s) f(s) ds \right)$$

où  $f$  est la partie non homogène du système.

On est amené à calculer les intégrales

$$\int_{t_0}^t e^{+\frac{\xi}{2} \frac{1}{2} cs} \sin\left(\frac{\xi c^2}{4} s + \frac{\xi k}{2} s^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} s^3\right) ds$$

$$\int_{t_0}^t s e^{+\frac{\xi}{2} \frac{1}{2} cs} \sin\left(\frac{\xi c^2}{4} s + \frac{\xi k}{2} s^2 + \frac{\xi^2 k^2}{3} s^3\right) ds$$

et les mêmes en cosinus.

Il est pratiquement impossible d'exprimer ces intégrales sous forme algébrique. Les procédés utilisés au chapitre précédent ne sont plus applicables ici à cause de l'exponentielle.

On se limitera donc à estimer un ordre de grandeur de ces intégrales, ce qui est suffisant pour déterminer qualitativement la croissance de l'amplitude.

Etant donné une condition initiale à l'entrée du développement interne sur le domaine où la croissance a éventuellement lieu, quel est l'ordre de la solution à la sortie de ce domaine ?

On intégrera donc entre  $-T$  et  $+T$  avec  $T \sim O(\xi^{-1/2})$

$$\bar{x}(t) = \phi(t) \left( \phi^{-1}(-T) \bar{x}(-T) + \int_{-T}^T \phi^{-1}(s) f(s) ds \right)$$

où  $f$  est le terme indépendant du second membre du système.

Seul le second terme est significatif, la partie non homogène de l'équation étant responsable de la croissance de l'amplitude . (c'est là qu'intervient la force extérieure)

On peut retenir seulement  $\left( \begin{array}{c} \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \sin \beta}{2} \\ \frac{\varepsilon^{1/2} \alpha \cos \beta}{2} \end{array} \right)$

dans les termes indépendants du second membre, les autres termes indépendants étant d'ordre plus élevé.

Il reste donc à estimer la première des intégrales :

$$\begin{aligned} \bar{x}_*(T) &= \Phi(T) \int_{-T}^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds \\ &= \int_{-\varepsilon^{1/2}}^{\varepsilon^{1/2}} e^{\varepsilon^{1/2} \frac{cs}{2}} \sin\left(\frac{\varepsilon c^2}{4} s + \frac{\varepsilon k}{2} s^2 + \frac{\varepsilon^2 k^2}{3} s^3\right) ds \\ &= \varepsilon^{-1/2} \int_{-1}^1 e^{\frac{c\eta}{2}} \sin\left(\frac{c^2}{4} \varepsilon^{1/2} \eta + \frac{k}{2} \eta^2 + \varepsilon^{1/2} \frac{k^2}{3} \eta^3\right) d\eta \end{aligned} \quad s = \varepsilon^{-1/2} \eta$$

Le résultat est analogue pour l'intégrale en cosinus.

$f \sim O(\varepsilon^{1/2})$

$\Phi(t)$  est formée d'un facteur périodique d'ordre 1 et d'une exponentielle  $e^{-\varepsilon^{1/2} \frac{ct}{2}}$  qui, en  $t = \varepsilon^{-1/2}$  vaut  $e^{-\frac{c}{2}}$ .

L'ordre de  $\bar{x}_*(t)$  est donc celui de

$$\int_{-1}^1 e^{\frac{c}{2}(\eta-1)} \sin\left(\frac{c^2}{4} \varepsilon^{1/2} \eta + \frac{k}{2} \eta^2 + \varepsilon^{1/2} \frac{k^2}{3} \eta^3\right) d\eta$$

Cette intégrale est d'ordre 1 .

La solution  $\bar{y}$  est donc d'ordre  $\varepsilon^{-1/2}$  .

Et l'amplitude croît aussi avec un frottement d'ordre  $\varepsilon^{1/2}$  .

Pour l'interprétation qualitative des résultats, il est inutile de chercher la transformée inverse  $y$  de la solution  $\bar{y}$  . Les résultats seront les mêmes étant donné que la transformation de Lie est une transformation proche de l'identité .

### 3- Frottement d'ordre $\varepsilon^{1/4}$

L'équation est :

$$\ddot{y} + \varepsilon^{1/4} c \dot{y} + \omega^2(\varepsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta)$$

On en tire :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon^{1/4} \left( -\frac{c}{2} x_1 + \frac{c}{2} x_2 \sin 2t + \frac{c}{2} x_1 \cos 2t \right) \\ &+ \varepsilon^{1/2} \left[ \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} + (\mu x_1 - \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \sin 2t + (-\mu x_1 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \cos 2t \right] \\ &+ \varepsilon \left( \frac{\mu^2}{2} x_2 + \frac{\mu^2}{2} x_1 \sin 2t - \frac{\mu^2}{2} x_2 \cos 2t \right) \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon^{1/4} \left( -\frac{c}{2} x_2 + \frac{c}{2} x_1 \sin 2t - \frac{c}{2} x_2 \cos 2t \right) \\ &+ \varepsilon^{1/2} \left[ -\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} + (-\mu x_2 - \frac{\alpha \sin \beta}{2}) \sin 2t + (-\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2}) \cos 2t \right] \\ &+ \varepsilon \left( -\frac{\mu^2}{2} x_1 - \frac{\mu^2}{2} x_2 \sin 2t - \frac{\mu^2}{2} x_1 \cos 2t \right) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Soit } \dot{x} = P_0^0 + \varepsilon^{1/4} P_1^0 + \varepsilon^{1/2} P_2^0 + o(\varepsilon)$$

La transformée de Lie de vecteur générateur  $W$  transforme ce système en :

$$\dot{\bar{x}} = P_0^0 + \varepsilon^{1/4} P_0^1 + \varepsilon^{1/2} P_0^2 + o(\varepsilon^{3/4})$$

$$W = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/4} W_n$$

Le calcul est de même nature que celui exécuté pour le frottement d'ordre  $\varepsilon^{1/2}$ .

$$P_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0^1 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} x_1 \\ -\frac{c}{2} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0^1 = P_1^0 - \frac{\partial}{\partial t} W_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} x_2 \sin 2t + \frac{c}{2} x_1 \cos 2t \\ \frac{c}{2} x_1 \sin 2t - \frac{c}{2} x_2 \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{4} x_2 \cos 2t + \frac{c}{4} x_1 \sin 2t \\ -\frac{c}{4} x_1 \cos 2t - \frac{c}{4} x_2 \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0^2 = P_2^0 + L_1 P_1^0 + L_1 P_0^1 + L_2 P_0^0$$

$P_0^2$  sera la somme des termes indépendants du membre de droite, la partie trigonométrique sera rejetée dans  $L_2 P_0^0$

Les termes indépendants viennent de :

$$P_2^0 : \begin{pmatrix} \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} \\ -\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_1 P_1^0 : \begin{pmatrix} -\frac{c}{4} x_2 \\ \frac{c}{4} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P_0^2 = \begin{pmatrix} \mu x_2 + \frac{\alpha \sin \beta}{2} - \frac{c}{4} x_2 \\ -\mu x_1 + \frac{\alpha \cos \beta}{2} + \frac{c}{4} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système

$$\dot{\bar{x}} = P_0^0 + \varepsilon^{1/4} P_0^1 + \varepsilon^{1/2} P_0^2$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -\varepsilon^{1/4} \frac{c}{2} \bar{x}_1 + \varepsilon^{1/2} \bar{x}_2 - \varepsilon^{1/2} \frac{c}{4} \bar{x}_2 + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \sin \beta}{2} \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\varepsilon^{1/4} \frac{c}{2} \bar{x}_2 - \varepsilon^{1/2} \bar{x}_1 + \varepsilon^{1/2} \frac{c}{4} \bar{x}_1 + \varepsilon^{1/2} \frac{\alpha \cos \beta}{2} \end{cases}$$

Le frottement en  $\varepsilon^{1/4} c$  donne lieu à un terme en  $\varepsilon^{1/4}$  dans le système, les autres étant d'ordre supérieur.

La première approximation de la solution est une exponentielle décroissante.

En conséquence, le frottement  $c \varepsilon^{1/4}$  est suffisant pour que l'amplitude n'augmente plus au passage par la résonance.

Chapitre III  
OSCILLATEUR NON LINEAIRE

En s'inspirant du modèle du pendule simple, on peut considérer l'équation différentielle non linéaire

$$\ddot{y} + \varepsilon^{1/2} c \dot{y} + \omega^2(\varepsilon t)y = \alpha \cos(t + \beta) + \varepsilon^2 \gamma y^3$$

Le frottement est pris directement égal à  $\varepsilon^{1/2} c$  puisque l'on sait qu'un frottement en  $\varepsilon c$  n'a aucun effet, ce qui revient à prendre  $c=0$  ici, et qu'un frottement  $\varepsilon^{1/4} c$  est prédominant vis-à-vis de toute autre perturbation.

La non linéarité est choisie en  $\varepsilon^2$  : on traite de petites oscillations  $y_* = \varepsilon y$

L'équation différentielle du pendule

$$\ddot{y}_* + \sin y_* = 0 \quad \text{devient} \quad \ddot{y}_* + y_* - \frac{y_*^3}{3!} + \dots = 0$$

$$\text{et en divisant par } \varepsilon \quad \text{on a} \quad \ddot{y} + y - \frac{1}{3!} \varepsilon^2 y^3 + \dots = 0$$

Le système normal correspondant à l'équation est

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = -y - 2\varepsilon kty - \varepsilon^2 k^2 t^2 y + \alpha \cos(t + \beta) - \varepsilon c \dot{y} + \varepsilon^2 \gamma y^3 \end{cases}$$

La même transformation linéaire que plus haut

$$\begin{cases} y = \varepsilon^{-1/2} \cos t x_1 + \varepsilon^{-1/2} \sin t x_2 \\ \dot{y} = -\varepsilon^{-1/2} \sin t x_1 + \varepsilon^{-1/2} \cos t x_2 \end{cases}$$

transforme le système en

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 = \varepsilon^{1/2} & \left[ 2\mu \sin t \cos t x_1 + 2\mu \sin^2 t x_2 - \alpha \cos(t + \beta) \sin t \right. \\ & - c \sin^2 t x_1 + c \cos t \sin t x_2 \\ & + \gamma (\cos^3 t x_1^3 + 3 \cos^2 t \sin t x_1^2 x_2 + 3 \cos t \sin^2 t x_1 x_2^2 + \sin^3 t x_2^3) \sin t \\ & \left. + O(\varepsilon) \right] \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_2 = \varepsilon^{1/2} & \left[ -2\mu \cos^2 t x_1 - 2\mu \sin t \cos t x_2 + \alpha \cos(t + \beta) \cos t \right. \\ & + c \sin t \cos t x_1 - c \cos^2 t x_2 \\ & + \gamma (\cos^3 t x_1^3 + 3 \cos^2 t \sin t x_1^2 x_2 + 3 \cos t \sin^2 t x_1 x_2^2 + \sin^3 t x_2^3) \cos t \\ & \left. + O(\varepsilon) \right] \end{aligned} \right.$$

En utilisant la même transformée de Lie que ci-dessus, le premier terme du système simplifié, terme en  $\varepsilon^{1/2}$ , est formé avec les termes non oscillants du système original, soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \varepsilon^{1/2} \left[ \varepsilon^{1/2} k t \bar{x}_2 + \frac{\alpha}{2} \sin \beta - \frac{c}{2} \bar{x}_1 + \gamma \left( \frac{9}{8} \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + \frac{1}{8} \bar{x}_2^3 \right) \right] \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \varepsilon^{1/2} \left[ -\varepsilon^{1/2} k t \bar{x}_1 + \frac{\alpha}{2} \cos \beta - \frac{c}{2} \bar{x}_2 + \gamma \left( \frac{1}{8} \bar{x}_1^3 + \frac{9}{8} \bar{x}_1 \bar{x}_2^2 \right) \right] \end{aligned} \right.$$

### Méthode d'intégration

Ce système non linéaire a été intégré au moyen d'une méthode d'intégration numérique : la méthode de Runge-Kutta classique du quatrième ordre.

Il s'agit d'intégrer le système entre  $-\varepsilon^{-1/2}$  et  $\varepsilon^{-1/2}$ .

En effectuant la transformation sur le temps  $\tau = t \varepsilon^{1/2}$ , le système devient :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{x}_1}{d\tau} &= k \tau \bar{x}_2 + \frac{\alpha}{2} \sin \beta - \frac{c}{2} \bar{x}_1 + \gamma \left( \frac{9}{8} \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 + \frac{1}{8} \bar{x}_2^3 \right) \\ \frac{d\bar{x}_2}{d\tau} &= -k \tau \bar{x}_1 + \frac{\alpha}{2} \cos \beta - \frac{c}{2} \bar{x}_2 + \gamma \left( \frac{1}{8} \bar{x}_1^3 + \frac{9}{8} \bar{x}_1 \bar{x}_2^2 \right) \end{aligned} \right.$$

Ce système est à intégrer entre  $\tau = -1$  et  $\tau = +1$

Le tableau suivant présente des valeurs  $\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}$  au temps  $\tau = 1$ , pour des conditions initiales nulles :  $\bar{x}_1(-1) = 0$  et  $\bar{x}_2(-1) = 0$

Le calcul a été effectué pour diverses valeurs du coefficient de frottement  $c$  et du coefficient de non linéarité  $\gamma$ .

Le pas d'intégration est 0.01

c \ g	0	1	10	20
0	0.988926	0.814629	0.473731	0.401040
1	0.624965	0.568814	0.386459	0.324350
10	0.991984 $10^{-1}$	0.990922 $10^{-1}$	0.981658 $10^{-1}$	0.971960 $10^{-1}$
20	0.498379 $10^{-1}$	0.498314 $10^{-1}$	0.497732 $10^{-1}$	0.497091 $10^{-1}$
40	0.249746 $10^{-1}$	0.249742 $10^{-1}$	0.249707 $10^{-1}$	0.249668 $10^{-1}$

### Choix du pas d'intégration

On constate qu'en prenant un pas différent de 0.01 on obtient un résultat très proche, ce qui indique que l'erreur de troncature, bornée par une puissance cinquième du pas d'intégration, est faible.

(c,g) \ PAS	(0,0)	(1,1)	(10,10)	(20,20)
0.01	0.988926	0.568814	0.981658 $10^{-1}$	0.497091 $10^{-1}$
0.02	0.988930	0.568815	0.981662 $10^{-1}$	0.497091 $10^{-1}$

### Conditions initiales

La condition initiale influence peu le résultat, ce qui s'accorde avec le fait que ce sont les termes non homogènes du système différentiel (là est présente la force extérieure) qui sont responsables de la croissance brutale de la solution. Ils y interviennent indépendamment des conditions initiales.

C.I \ (c,g)	(0,0)	(1,1)	(10,10)	(20,20)
(0,0)	0.988926	0.568814	0.981658 $10^{-1}$	0.497091 $10^{-1}$
( $10^{-3}, 10^{-3}$ )	0.988959	0.568912	0.981659 $10^{-1}$	0.497091 $10^{-1}$

Prendre ( $10^{-3}, 10^{-3}$ ) pour condition initiale revient à prendre pour l'oscillateur une condition initiale ( $10^{-3} \varepsilon^{-1/2}, 10^{-3} \varepsilon^{-1/2}$ ).

Si l'on considère que cette condition initiale est de l'ordre de l'unité, on a que  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Le paramètre  $\xi$  disparaît lors du passage au système intégré numériquement; mais il intervient dans la condition initiale et dans la solution finale où l'amplitude est  $\xi^{-1/2}$  fois le résultat de l'intégration numérique puisque

$$\bar{y} = \xi^{-1/2} \bar{x}_1 \cos t + \xi^{-1/2} \bar{x}_2 \sin t$$

### Interprétation des résultats

Pour  $c=0$  et  $g=0$ , c'est-à-dire pour l'équation traitée par Kevorkian, on voit que le résultat de l'intégration numérique est proche de l'unité.

L'amplitude de la solution de l'équation est donc d'ordre  $\xi^{-1/2}$ , ce qui est bien en accord avec le résultat théorique obtenu au chapitre premier.

En lisant la colonne où  $g=0$ , on voit que le frottement amortit les oscillations. On sait en effet qu'avec un frottement suffisant (d'ordre  $\xi^{-1/4}$  en l'occurrence) on parvient à annihiler l'effet de la résonance.

La suffisance du frottement  $\xi^{1/4}c$  n'est cependant pas vérifiable directement ici, étant donné que la transformée de Lie est exécutée pour un frottement  $\xi^{1/2}c$ .

Le résultat nouveau est la façon dont intervient la non linéarité. Pour un frottement nul la non linéarité amortit les oscillations, mais beaucoup plus faiblement que le frottement.

Quand le frottement croît, l'amortissement dû à la non linéarité s'atténue.

Pour des frottements grands ( $c = 40$  par exemple) la non linéarité n'intervient pratiquement plus.

A partir d'une certaine valeur de  $g$ , qui se situe entre 20 et 40 pour  $c=0$  et qui croît avec le frottement, on obtient un overflow. Au cours de l'intégration numérique, les valeurs de  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  croissent plus rapidement à partir d'un certain point. Dès qu'elles ont dépassé l'unité, elles croissent brutalement jusqu'à l'overflow, les erreurs dues à l'algorithme d'intégration amplifiant le phénomène.

Chapitre IV  
PRESENTATION  
DE L'ARTICLE DE GAUTESSEN

Gautesen considère l'équation

$$k^{-2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2(t)y = -(ik)^{-1} g(t) e^{ikt}$$

Le premier membre peut être obtenu à partir de l'équation considérée par Kevorkian en posant  $k = \varepsilon^{-1}$

et en remplaçant  $t$  par  $\frac{t}{\varepsilon}$

Le second membre est plus général.

$g(t)$  et  $\omega(t)$  sont dérivables.

$\forall t \neq t_0 > 0$ ,  $\omega(t) \neq 0$  et  $\omega(t) \neq 1$ ,

$$\omega(t) = 1 + (t-t_0)^n \sum_{l=0}^{\infty} (n+l+1)c_l (t-t_0)^l, \quad c_0 \neq 0$$

n entier positif

La solution est posée égale à :

$$y = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t \exp [ ik ( \phi^j(t; \tau) + \tau ) ] f(\tau) d\tau$$

où  $\phi^j(\tau; \tau) = 0$

Cette solution satisfait des conditions initiales nulles.

En introduisant cette solution dans l'équation on obtient :

$$0 = -(ik)^{-1} \left[ \left( \phi_t^1(t; t) - \phi_t^2(t; t) \right) f(t) - g(t) \right] e^{ikt}$$

$$+ \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_0^t \exp [ ik ( \phi^j(t; \tau) + \tau ) ] \left\{ \left[ \phi_t^j(t; \tau) \right]^2 \right.$$

$$\left. + (ik)^{-1} \phi_{tt}^j(t; \tau) - \omega^2(t) \right\} f(\tau) d\tau$$

où  $\phi_t$  est une notation pour  $\frac{\partial \phi(t; \tau)}{\partial t}$

Remarque : l'exponentielle  $e^{ikt}$  est absente dans l'article.

Cette équation est satisfaite si

$$f(t) = g(t) \left[ \phi_t^1(t, t) - \phi_t^2(t, t) \right]^{-1}$$

$$\text{et } \left[ \phi_t^j(t, \tau) \right]^2 + (ik)^{-1} \phi_{tt}^j(t, \tau) = \omega^2(t) \quad j = 1, 2$$

Cette dernière équation est vérifiée par

$$\phi^j(t, \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell} \int_{-\tau}^t \psi_{\ell}^j(s) ds$$

$$\text{où } \left[ \psi_0^j(t) \right]^2 = \omega^2(t)$$

$$\psi_1^j = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \omega(t)$$

$$2\psi_0^j(t) \psi_{\ell}^j(t) = -\sum_{m=1}^{\ell-1} \psi_{\ell-m}^j(t) \psi_m^j(t) - \frac{d\psi_{\ell-1}^j(t)}{dt} \quad \ell = 2, 3, \dots$$

On fixe  $\psi_0^j(t) = (-1)^{j+1} \omega(t)$ . Les autres  $\psi_{\ell}^j$  sont alors déterminés de manière unique.

$$\text{On a } \phi_t^j(t, \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell} \psi_{\ell}^j(t)$$

$$\phi_t^j(t, \tau) = \psi_0^j(t) + o(k^{-1})$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(t) &= g(t) \left[ \phi_t^1(t, t) - \phi_t^2(t, t) \right]^{-1} \\ &= g(t) \left[ \psi_0^1(t, t) - \psi_0^2(t, t) \right]^{-1} + o(k^{-1}) \\ &= g(t) \left[ 2\omega(t) \right]^{-1} + o(k^{-1}) \end{aligned}$$

En fonction de ces résultats, la solution s'exprime comme

$$2y = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \exp \left[ ik \left( \int_{\tau}^t \psi_0^j(s) ds + \tau \right) \right] \left( g(\tau) \left[ \omega(\tau) \right]^{-1} + o(k^{-1}) \right) d\tau$$

Gautesen propose un résultat légèrement différent :

$$2 \omega^{1/2}(t) y(t) = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t \exp \left[ ik \left( \int_{\tau}^t \psi_0^j(s) ds + \tau \right) \right] \left( g(\tau) \omega^{-1/2}(\tau) + o(k^{-1}) \right) d\tau$$

Ce résultat semble faux; mais de toute façon la suite des calculs est identique en ce qui concerne la partie intéressante de la solution, c'est-à-dire la solution pour  $t > t_0$ , instant où la résonance a lieu.

En posant

$$\left| \begin{array}{l} y(\tau) = g(\tau) [\omega(\tau)]^{-1} \\ \phi_j(t, \tau) = (-1)^{j+1} \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau \end{array} \right.$$

il reste à intégrer

$$\sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t e^{ik \phi_j(t, \tau)} h(\tau) d\tau$$

L'intégration par parties va fournir une expression de la solution pour  $t < t_0$ .

A un terme d'ordre  $k^{-1}$  près,  $e^{ik \phi_j(t, \tau)}$  admet pour primitive :

$$\frac{e^{ik \phi_j(t, \tau)}}{ik \phi_{j\tau}(t, \tau)}$$

On peut donc intégrer par parties de la manière suivante :

$$\int_0^t e^{ik \phi_j(t, \tau)} h(\tau) d\tau = \frac{e^{ik \phi_j(t, \tau)}}{ik \phi_{j\tau}(t, \tau)} h(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{ik \phi_j(t, \tau)}}{ik \phi_{j\tau}(t, \tau)} \frac{dh}{d\tau} d\tau$$

D'après la définition de  $\phi_j$ ,  $\phi_{j\tau}(t, \tau) = (-1)^{j+1} (-\omega(\tau) + 1)$

En  $t_0$  :  $\omega(t_0) = 1$ , ce qui annule les dénominateurs. Cette méthode d'intégration n'est donc applicable que pour  $t < t_0$ .

$$\begin{aligned}
2y &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t e^{ik \Phi_j(t, \tau)} h(\tau) d\tau + o(k^{-1}) \\
&= \frac{e^{ikt} h(t)}{ik} \left( \frac{2}{1 - \omega^2(t)} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} e^{(ik(-1)^{j+1} \int_0^t \omega(s) ds)} \frac{g(0) \omega^{-1}(0)}{ik [1 + (-1)^{j+1} \omega(0)]} \\
&\quad + o(k^{-1})
\end{aligned}$$

Pour des temps postérieurs à la résonance, c'est-à-dire  $t > t_0$ , Gautesen calcule l'intégrale par la méthode de la phase stationnaire et donne directement une solution qui est :

$$y = (|c_0/k|)^{-1/2} e^{ik \Phi_1(t, t_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} g(t_0) + o(k^{-1})$$

en ayant pris  $n=1$

La méthode de la phase stationnaire et son application à l'intégrale ci-dessus seront exposées dans le chapitre suivant.

Une autre méthode, la méthode du col, permettra ensuite de calculer cette intégrale d'une autre manière .

Chapitre V  
METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE

Ce chapitre est fondé sur l'ouvrage d'Erdélyi, référence [5], § 2.9. La méthode de la phase stationnaire sert à exprimer sous forme de développement asymptotique une intégrale

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixh(t)} dt$$

où  $x$  est un paramètre grand et  $h(t)$  une fonction réelle de la variable  $t$ .

L'appellation de phase stationnaire provient du fait que l'intégrale sera essentiellement déterminée par la contribution des voisinages des points stationnaires de  $h$ , c'est-à-dire les points où la dérivée de  $h$  s'annule. On verra d'ailleurs cette phase stationnaire apparaître au cours du calcul.

Intuitivement, le facteur  $x$  grand a pour effet de transformer l'exponentielle imaginaire en une fonction oscillant rapidement là où  $h$  varie. Les contributions pour l'intégrale sont donc successivement positives et négatives et en gros s'annulent, sauf là où  $h$  ne varie plus, c'est-à-dire aux points stationnaires.

Il sera aussi question de la méthode de Laplace, pendant réel de la méthode de la phase stationnaire. Elle ne sera pas exposée en détail, étant donné qu'elle est clairement explicitée chez Lavrentier et Chabat (référence [6], Ch.V, § 3,77, p.480 à 484) ou chez Erdélyi (référence [5], § 2.4). Il est intéressant de considérer la méthode de Laplace, parce qu'elle est fort proche de la méthode de la phase stationnaire et qu'elle permettra de calculer d'une autre manière l'intégrale présentée par Gautesen (cf. chapitre VI).



La méthode de Laplace permet d'exprimer sous forme de développement asymptotique une intégrale

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{x h(t)} dt$$

où  $x$  est un paramètre grand et  $h(t)$  une fonction réelle de la variable  $t$ .

L'idée de Laplace est la suivante :  $h$  ayant un maximum sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ , plus la valeur de  $x$  est grande, plus ce maximum est exprimé. Pour  $x$  grand, le voisinage du point maximum influe essentiellement sur la valeur de l'intégrale. Le rôle joué par les points stationnaires dans la méthode de la phase stationnaire sera joué ici par les points maxima.

#### Note historique :

La méthode de Laplace date de 1820. Laplace a fourni une approximation de l'intégrale égale au premier terme du développement asymptotique.

En ce qui concerne la phase stationnaire, l'intuition première est due à Cauchy au sujet de travaux sur la propagation des ondes (1820). Stokes utilise la méthode pour évaluer l'intégrale d'airy (1856). La méthode a été formulée explicitement par Kelvin (1887). La première démonstration satisfaisante a été donnée par Watson (1918).

Pour les références précises, cf. référence [7], Ch.47, § 2, p. 1099.

#### 1- Théorie

Erdélyi présente la méthode sous forme de théorème. L'intégrand est un peu plus général que celui de l'introduction.

La notion de point stationnaire peut être précisée comme suit :

$\tau$  est un point stationnaire d'ordre  $\mu$  (éventuellement fractionnel) si au voisinage de ce point,  $h'(t)$  est de la forme  $(t-\tau)^\mu h_1(t)$  ou de la forme  $\text{sgn}(t-\tau) |t-\tau|^\mu h_1(t)$ , avec  $h_1(\tau) \neq 0$

On suppose que  $h(t)$  a au plus un nombre fini de points stationnaires dans l'intervalle considéré. On peut alors subdiviser l'intégrale en un nombre fini d'intégrales sur l'intervalle d'intégration desquelles  $h(t)$  est monotone, et l'on considérera ici le cas où  $h$  est croissante. Les extrémités de l'intervalle d'intégration sont stationnaires ou non (stationnaires d'ordre zéro).

### THEOREME

-Hypothèses :

$$0 < \lambda \leq 1, \quad 0 < \mu \leq 1$$

$g(t)$  est  $N$  fois continûment différentiable pour  $\alpha \leq t \leq \beta$

$h(t)$  est différentiable

$$h'(t) = (t-a)^{\rho-1} (\beta-t)^{\sigma-1} h_1(t)$$

$$\rho \geq 1, \quad \sigma \geq 1$$

$h_1(t)$  est strictement positive et  $N$  fois continûment différentiable pour  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

-Thèse :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixh(t)} (t-a)^{\lambda-1} (\beta-t)^{\mu-1} dt = B(x) - A(x)$$

où  $A(x) \sim A_N(x)$  et  $B(x) \sim B_N(x)$  pour  $x \rightarrow \infty$

$$A_N(x) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{k^{(n)}(0)}{n! \rho} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\rho}\right) e^{\frac{i\pi(n+\lambda)}{2\rho} x} x^{-\frac{(n+\lambda)}{\rho}} e^{ixh(\alpha)}$$

$$k(u) = g(t) (t-a)^{\lambda-1} (\beta-t)^{\mu-1} u^{1-\lambda} \frac{dt}{du}$$

$$\text{où } u^{\rho} = h(t) - h(\alpha)$$

$$B_N(x) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{l^{(n)}(0)}{n! \sigma} \Gamma\left(\frac{n+\mu}{\sigma}\right) e^{-\frac{i\pi(n+\mu)}{2\sigma} x} x^{-\frac{(n+\mu)}{\sigma}} e^{ixh(\beta)}$$

$$l(v) = g(t) (t-a)^{\lambda-1} (\beta-t)^{\mu-1} v^{1-\mu} \frac{dt}{dv}$$

$$\text{où } v^{\sigma} = h(\beta) - h(t)$$

-Démonstration :

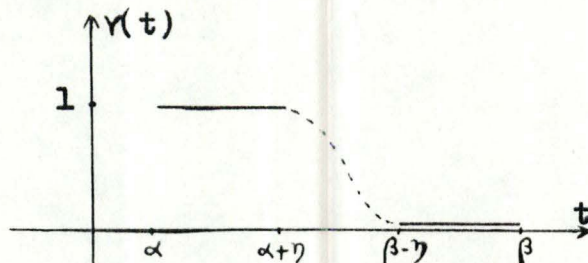
Le problème est d'abord séparé en deux. On introduit une fonction  $v(t)$  appelée neutraliseur.

Cette fonction  $\gamma(t)$  est infiniment différentiable pour  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Pour un certain  $\eta$ ,  $0 < \eta < (\beta - \alpha) / 2$ ,

$$\gamma(t) = 1 \quad \text{pour} \quad \alpha \leq t \leq \alpha + \eta$$

$$\gamma(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \beta - \eta \leq t \leq \beta.$$



Entre  $\alpha + \eta$  et  $\beta - \eta$  la fonction doit obéir à la seule condition de différentiabilité.

$$\text{En posant} \quad -A(x) = \int_{\alpha}^{\beta - \eta} \gamma(t) g_1(t) e^{ixh(t)} dt$$

$$\text{et} \quad B(x) = \int_{\alpha + \eta}^{\beta} [1 - \gamma(t)] g_1(t) e^{ixh(t)} dt$$

$$\text{où} \quad g_1(t) = g(t)(t - a)^{\lambda - 1} (\beta - t)^{\mu - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{on a bien :} \quad \int_{\alpha}^{\beta} g_1(t) e^{ixh(t)} dt &= \int_{\alpha}^{\beta - \eta} \gamma(t) g_1(t) e^{ixh(t)} dt \\ &+ \int_{\alpha + \eta}^{\beta} [1 - \gamma(t)] g_1(t) e^{ixh(t)} dt \\ &= B(x) - A(x) \end{aligned}$$

Un tel neutraliseur existe : cf. Erdélyi, p.50.

Le calcul de  $A(x)$  sera d'abord effectué.

Le processus de calcul qui va suivre peut s'expliquer en sachant que l'on essaie de se ramener à une quadrature donnant la fonction gamma.

On effectue d'abord un changement de variable

$$u^\rho = h(t) - h(\alpha)$$

et l'on notera  $u_1^\rho = h(\beta-\gamma) - h(\alpha)$  ,  $\gamma_1(u) = \gamma(t)$

Ce changement de variable consiste en une application biunivoque envoyant l'intervalle  $\alpha \leq t \leq (\beta-\gamma)$  sur l'intervalle  $0 \leq u \leq u_1$  ( $h$  est strictement croissante).

En ce qui concerne la soustraction de  $h(\alpha)$ , ce changement de variable aura tout d'abord pour effet d'amener zéro comme borne inférieure d'intégrale. On pourrait très bien ne pas soustraire ce terme, mais on serait alors amené à effectuer un changement de variable de ce genre au moment de passer à la fonction gamma. En le soustrayant immédiatement on met d'ores et déjà en évidence la phase stationnaire  $h(\alpha)$ .

L'élévation de  $u$  à la puissance  $\rho$  répond à un impératif de différentiabilité. Dans la méthode de Laplace, on pose simplement  $u = h(t) - h(\alpha)$ . Ici il est nécessaire de faire apparaître la puissance  $\rho$  parce que la méthode est essentiellement différente. Pour se ramener à la fonction gamma il faudra modifier l'argument de l'exponentielle de manière à le rendre réel. Cela sera réalisé en intégrant par parties. Le choix arbitraire d'un certain chemin d'intégration dans le plan complexe pour les primitives permettra de se ramener à une exponentielle réelle.

On fait d'une pierre deux coups parce que les intégrations successives par parties fourniront un développement asymptotique. Ces intégrations exigent la différentiabilité de certains facteurs de l'intégrand. On verra ci-dessous que cela nécessite d'effectuer un changement de variable avec la puissance  $\rho$  de  $u$ .

Il s'agit maintenant d'exprimer l'intégrand en fonction de  $u$ . Pour cela on pose

$$k(u) = g_1(t) u^{1-\lambda} \frac{dt}{du}$$

$$\text{d'où } A(x) = - e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \gamma_1(u) k(u) u^{\lambda-1} e^{ixu^\rho} du$$

$u^{1-\lambda}$  a été introduit de manière tout à fait artificielle.

Dans  $k$  il servira à assurer la différentiabilité mentionnée supra, notamment en neutralisant la puissance  $(t-a)^{\lambda-1}$  contenue dans  $g_1(t)$ .

Dans l'intégrale,  $u^{\lambda-1}$  servira à amener la forme de l'intégrant de la gamma.

Dans la définition de  $k$ , il faut s'assurer de l'existence de  $\frac{dt}{du}$ .

En différentiant  $u^\rho = h(t) - h(\alpha)$

$$\text{on obtient } \frac{dt}{du} = \frac{\rho u^{\rho-1}}{h'(t)}$$

D'autre part  $u^\rho = h(t) - h(\alpha)$

$$\begin{aligned} &= \int_{\alpha}^t h'(s) ds \\ &= (t-\alpha)^\rho \int_0^1 y^{\rho-1} [\beta-\alpha-(t-\alpha)y]^{\sigma-1} h_1[\alpha+(t-\alpha)y] dy \end{aligned}$$

poser  $s = \alpha + (t-\alpha)y$

Cette dernière intégrale sera notée  $I(t)$  par la suite.

Puisque  $g$  et  $h_1$  sont  $N$  fois continûment différentiables, cette intégrale est  $N+1$  fois continûment différentiable.

$$\frac{dt}{du} = \frac{\rho (t-\alpha)^{\rho-1} I^{\frac{\rho-1}{\rho}}}{h_1(t) (t-\alpha)^{\rho-1} (\beta-t)^{\sigma-1}} = \frac{\rho I^{\frac{\rho-1}{\rho}}}{h_1(t) (\beta-t)^{\sigma-1}}$$

$$h_1(t) \neq 0 \text{ et } \beta \neq t \text{ sur } \alpha \leq t \leq \beta-\eta \text{ donc } \frac{dt}{du} \text{ existe.}$$

Si on avait choisi  $u = h(t) - h(\alpha)$  on aurait  $\frac{dt}{du} = \frac{1}{h'(t)}$

Cette expression n'existe pas en  $t=\alpha$ . On voit aussi pourquoi l'exposant de  $(t-\alpha)$  dans l'expression de  $h'(t)$  a été écrit comme  $\rho-1$ .

Il reste à intégrer  $A(x)$  par partie

$$A(x) = -e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \gamma_1(u) k(u) u^{\lambda-1} e^{ixu^\rho} du$$

$$A(x) = -e^{ixh(\alpha)} \left[ \gamma_1(u)k(u) \phi_{-1}(u) \Big|_0^{u_1} - \int_0^{u_1} \phi_{-1}(u) \frac{d(\gamma_1 k)}{du} du \right]$$

$$\text{où } \phi_{-1}(u) = - \int_u^{\infty} z^{\lambda-1} e^{ixz} dz$$

$$A(x) = - e^{ixh(\alpha)} \left[ k(0) \phi_{-1}(0) + \int_0^{u_1} \phi_{-1}(u) \frac{d(\gamma_1 k)}{du} du \right]$$

Il faut encore montrer que  $\gamma_1 k$  est continûment différentiable, c'est-à-dire que  $k$  est continûment différentiable puisque  $\gamma_1$  est infiniment différentiable.

Par un calcul analogue à celui qui a permis de montrer l'existence de  $\frac{dt}{du}$ , on trouve

$$k(u) = \frac{\rho g(t) (\beta-t)^{\mu-\sigma} [I(t)]^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}}{h_1(t)}$$

Le facteur  $u^{1-\lambda} = (t-\alpha)^{1-\lambda} I^{\frac{1-\lambda}{\rho}}$  a assuré l'élimination du terme  $(t-a)^{\lambda-1}$  de  $g_1(t)$  susceptible de produire une singularité.

$k$  est  $N$  fois continûment différentiable :

$$\left| \begin{array}{l} g, I, h_1 \text{ sont } N \text{ fois continûment différentiables} \\ \beta \neq t \text{ et } h_1(t) \neq 0 \text{ sur } \alpha \leq t \leq \beta - \eta. \end{array} \right.$$

On peut donc répéter  $N$  fois l'intégration par parties :

$$A(x) = A_N(x) + R_N(x)$$

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n k^{(n)}(0) \phi_{-n-1}(0) e^{ixh(\alpha)}$$

$$R_N(x) = (-1)^{N+1} e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \phi_{-N}(u) \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du$$

$$\phi_{-n-1}(u) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_u^{\infty} (z-u)^n z^{\lambda-1} e^{ixz} dz$$

En intégrant sur la droite  $\arg(z-u) = \frac{\pi}{2\rho}$  de manière à rendre réel l'argument de l'exponentielle intégrée, on obtient, en posant

$$z = r e^{i\frac{\pi}{2\rho}}, \quad \phi_{-n-1}(0) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{\frac{i\pi(n+\lambda)}{2\rho}} \int_0^\infty r^{n+\lambda-1} e^{-xr^\rho} dr$$

En posant  $y = x r^\rho$  on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{-n-1}(0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{\frac{i\pi(n+\lambda)}{2\rho}} \frac{1}{\rho} x^{-\frac{n+\lambda}{\rho}} \int_0^\infty y^{\frac{n+\lambda}{\rho}-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n! \rho} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\rho}\right) e^{\frac{i\pi(n+\lambda)}{2\rho}} x^{-\frac{n+\lambda}{\rho}} \end{aligned}$$

On trouve alors  $A_N(x)$  sous la forme énoncée dans le théorème

$$A_N(x) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{k(n)(0)}{n! \rho} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\rho}\right) e^{\frac{i\pi(n+\lambda)}{2\rho}} x^{-\frac{n+\lambda}{\rho}} e^{ixh(\alpha)}$$

Il reste à voir que l'on a un développement asymptotique, c'est-à-dire que  $R_N$  tend vers zéro plus vite que  $A_N$  quand  $x$  tend vers l'infini.

En vue de majorer le reste  $R_N$  majorons d'abord  $\phi_{-n-1}(u)$

Pour  $u > 0$ ,  $|z| \geq u$ , donc  $|z|^{\lambda-1} \leq u^{\lambda-1}$ .

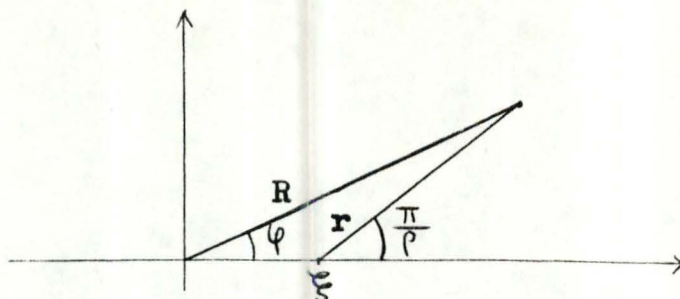
La majoration de l'exponentielle sera une conséquence de l'égalité

$$ixz^\rho + x|z-u|^\rho = i\rho x \int_0^u \left( \xi + |z-u| e^{\frac{i\pi}{2\rho}} \right)^{\rho-1} d\xi$$

La partie réelle du membre de droite est négative :

$$\operatorname{Im} \left[ \int_0^u \left( \xi + |z-u| e^{\frac{i\pi}{2\rho}} \right)^{\rho-1} d\xi \right] > 0$$

$$\xi + |z-u| e^{\frac{i\pi}{2\rho}} = \xi + r e^{\frac{i\pi}{\rho}} = R e^{i\varphi} \quad \text{avec } R \geq 0, \quad \varphi \leq \frac{\pi}{\rho}$$



$$\operatorname{Im}(R e^{i\varphi})^{\rho-1} = R^{\rho-1} \operatorname{Im} e^{i\varphi(\rho-1)}$$

$$\varphi(\rho-1) \leq \pi \frac{\rho-1}{\rho} < \pi \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im}(R e^{i\varphi}) > 0$$

$$\text{On en déduit} \quad R e^{ixz^\rho} \leq R e^{-x|z-u|^\rho}$$

$$|e^{ixz^\rho}| \leq e^{-x|z-u|^\rho}$$

Ces deux majorations permettent de majorer  $\Phi_{-n-1}(u)$

$$\begin{aligned} |\Phi_{-n-1}(u)| &\leq \frac{u^{\lambda-1}}{n!} \int_u^\infty |z-u|^n e^{-x|z-u|^\rho} d|z-u| \\ &\leq \frac{1}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{\rho}\right) u^{\lambda-1} x^{-\frac{n+1}{\rho}} \end{aligned}$$

Cela permet de majorer  $R_N$

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{(N-1)!} \Gamma\left(\frac{N}{\rho}\right) x^{-N/\rho} \int_0^{u_1} u^{\lambda-1} \left| \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} \right| du$$

$\gamma_1 k$  est  $N$  fois continûment différentiable sur  $0 \leq u \leq u_1$ ,  $\lambda > 0$ .

On peut donc borner l'intégrale.

$|R_N(x)|$  est donc borné par un terme d'ordre  $O(x^{-N/\rho})$

Le dernier terme de  $A_N$  est d'ordre  $O\left(x^{-\frac{N-1+\lambda}{\rho}}\right)$

Pour que le développement soit asymptotique il faut que le quotient de ces deux termes tende vers zéro avec  $x$  tendant vers l'infini.



Le quotient est d'ordre  $O(x^{\frac{-1+\lambda}{\rho}})$ . Il tend vers zéro quand l'exposant est négatif, c'est-à-dire quand  $\lambda < 1$ . Il reste donc à considérer le cas où  $\lambda = 1$  par une autre méthode, de manière à démontrer que le développement est toujours asymptotique.

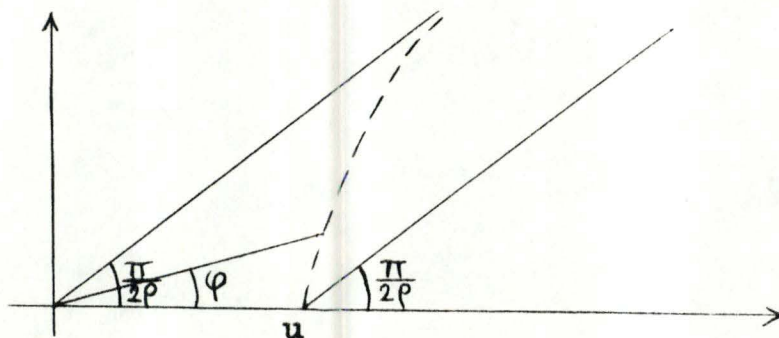
On repart de l'expression de  $\Phi_{-n-1}(u)$  et on l'estime au moyen de la méthode de la plus grande pente (méthode exposée au chapitre VI).

$$\Phi_{-n-1}(u) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_u^{\infty} (z-u)z^{\lambda-1} e^{ixz^{\rho}} dz$$

Le chemin d'intégration est  $\arg(z-u) = \frac{\pi}{2\rho}$ .

On détermine où l'argument de l'exponentielle a une partie imaginaire constante.

En notant  $z = r e^{i\varphi}$  cela devient :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z^{\rho}) = \text{constante} \\ r^{\rho} \cos \rho\varphi = \text{constante} \end{cases}$$


En  $\varphi = 0$ ,  $r = u$ , donc la constante est obligatoirement  $u^{\rho}$

$$r = \frac{u}{(\cos \rho\varphi)^{1/\rho}}$$

$$z = \frac{u}{(\cos \rho\varphi)^{1/\rho}} e^{i\varphi} \text{ le long de cette courbe.}$$

En se limitant au premier ordre, il suffit d'intégrer le long de ce nouveau chemin d'intégration.

$$\phi_{-n-1}(u) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n!} i u^{n+\lambda} e^{ixu^\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2\rho}} \left( \frac{e^{i\varphi}}{(\cos \rho\varphi)^{\frac{1}{\rho}}} - 1 \right)^n \left( \frac{e^{i\varphi}}{\cos \rho\varphi} \right)^\lambda e^{-xu^\rho \tan \rho\varphi} d\varphi$$

L'intégrale peut être développée par la méthode de Laplace.

La forme de l'intégrale étant  $\int_\alpha^\beta g(t) e^{xh(t)} dt$ , la méthode de Laplace donne comme résultat,

avec certaines conditions de régularité vérifiées (cf. références)  
 et  $\left. \begin{array}{l} h'(t) \sim -a(t-\alpha)^{\gamma-1} \text{ pour } t \rightarrow \alpha \\ g(t) \sim b(t-\alpha)^{\lambda-1} \text{ pour } t \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{avec } h \text{ réelle et stricte-} \\ \text{ment décroissante ;} \\ \text{avec } \lambda > 0, \gamma > 0, \end{array}$

$$\int_\alpha^\beta g(t) e^{xh(t)} dt \sim \frac{b}{\gamma} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma}{ax}\right)^{\frac{\lambda}{\gamma}} e^{xh(\alpha)} \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

$$\text{ici } \gamma = 1, \quad \alpha = \rho u^\rho$$

$$\lambda = n+1, \quad b = i^n$$

$$\phi_{-n-1}(u) \sim i^{n+1} u^{n+\lambda} e^{ixu^\rho} \Gamma(n+1) (\rho x u^\rho)^{-n-1}$$

$$\phi_{-n-1}(u) = u^{n+\lambda} o \left[ (x u^\rho)^{-n-1} \right]$$

$\phi_{-N}(u) = o(x^{-N})$  uniformément en  $u \neq 0$ . Cela impose de traiter l'origine à part.

$$\left| R_N(x) \right| \leq \left| \int_0^\delta \phi_{-N}(u) \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du \right| + \left| \int_\delta^{u_1} \phi_{-N}(u) \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du \right|$$

Pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire, choisissons  $\delta$  tel que

$$\frac{1}{(N+1)!} \Gamma\left(\frac{N}{\rho}\right) x^{-N/\rho} \int_0^\delta u^{\lambda-1} \left| \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} \right| du < \frac{1}{2} \varepsilon$$

En utilisant le calcul ayant amené la première majoration sur  $|R_N(x)|$  on a ainsi une borne pour le premier terme du second membre de l'égalité.

Puisque  $\Phi_{-N}(u) = O(x^{-N})$  en  $u \neq 0$ ,

$$\int_0^{u_1} \Phi_{-N}(u) \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du = O(x^{-N})$$

$$R_N = O(x^{-N})$$

$$A_N = O(x^{-\frac{N-1+\lambda}{\rho}})$$

Le quotient est du même ordre que  $x^{\frac{N(1-\rho)-1+\lambda}{\rho}}$

L'exposant est négatif et le développement est asymptotique sauf si  $\lambda = 1$  et  $\rho = 1$ .

Ce cas doit être examiné spécialement.

Il est à remarquer que  $\lambda$  n'a pas été fixé à 1 au cours de l'estimation. Celle-ci convient pour tout  $\lambda$ ; cependant il était utile d'effectuer la première majoration: elle a permis ici d'estimer en  $u = 0$ .

Dans le cas  $\lambda = 1$  et  $\rho = 1$ , on peut intégrer directement par parties  $A(x)$ .

$$\begin{aligned} A(x) &= -e^{ixh(\alpha)} \int_0^{u_1} \gamma_1(u) k(u) e^{ixu} du \\ &= \gamma_1(u) k(u) \frac{e^{ixu}}{ix} \Big|_0^{u_1} - \int_0^{u_1} \frac{d(\gamma_1 k)}{du} \frac{e^{ixu}}{ix} du \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{ix}\right)^i k^{(i)}(0) (-1)^{i+1} + (-ix)^{-N} \int_0^{u_1} e^{ixu} \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue on obtient que le reste est d'ordre  $o(x^{-N})$ ; donc le développement est asymptotique.

Le lemme de Riemann-Lebesgue s'énonce :

Si  $\int_a^b \psi(\theta) d\theta$  existe ,  
 alors  $\int_a^b \psi(\theta) \sin(\lambda \theta) d\theta$  est  $o(1)$  pour  $\lambda \rightarrow \infty$

Cela donne ici :

$$\int_0^{u_1} e^{ixu} \frac{d^N(\gamma_1 k)}{du^N} du \text{ est } o(1) \text{ pour } x \rightarrow \infty$$

$B(x)$  vérifie des résultats similaires.

Le changement de variable est  $v^\sigma = h(\beta) - h(t)$

$$l(v) = g_1(t) v^{1-\mu} \frac{dt}{dv}$$

Dans les intégrations répétées de  $v^{\mu-1} e^{-ixv^\sigma}$  on choisit le chemin d'intégration  $\arg(z-v) = -\frac{i\pi}{2\sigma}$ .

Les signes opposés par rapport à ce qui apparaît pour  $A(x)$  proviennent du fait que  $v^\sigma$  dépend de l'opposé de  $h(t)$  alors que  $u^\rho = h(t) - h(\alpha)$ .

A part cela le processus est identique .

## 2- Application

L'intégrale à calculer est

$$\int_0^t e^{ix \Phi_1(t, \tau)} h(\tau) d\tau \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau \\ h(\tau) = g(\tau) \omega^{-1}(\tau) \\ \omega(\tau) = 1 + (\tau - t_0)c, \quad c > 0 \end{array} \right.$$

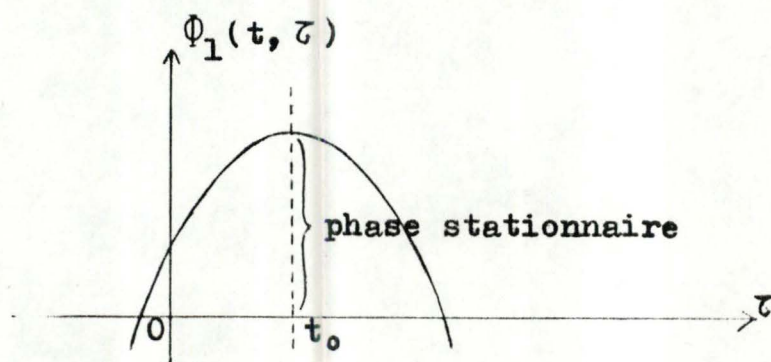
en particulierisant la fréquence à la forme utilisée dans les premiers chapitres .

$\Phi_1$  peut être explicitée :

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \tau) &= \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau \\ &= t - ct_0 t + \frac{ct^2}{2} + ct_0 \tau - \frac{c\tau^2}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = c(t_0 - \tau)$$

On voit que le seul point stationnaire sera  $t_0$ . Au premier ordre, on n'aura donc pas à s'occuper des contributions plus faibles des extrémités de l'intervalle d'intégration.



$$\text{On pose } v^2 = \Phi_1(t_0, t_0) - \Phi_1(t_0, \tau) = \frac{c}{2} (t_0 - \tau)^2$$

$$v = \sqrt{\frac{c}{2}} (t_0 - \tau) \quad dv = -\sqrt{\frac{c}{2}} d\tau$$

$$B = \int_0^{t_0} e^{ik \Phi_1(t, \tau)} h(\tau) d\tau = -e^{ix \Phi_1(t, t_0)} \int_a^0 H(v) e^{-ixv^2} \sqrt{\frac{2}{C}} dv$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} H(v) = h(\tau) \\ a = \sqrt{\frac{C}{2}} t_0 \end{array} \right.$$

$$B = -e^{ix \Phi_1(t, t_0)} \left\{ \left[ H(v) \sqrt{\frac{2}{C}} \Phi_1(v) \right]_a^0 - \int_a^0 \sqrt{\frac{2}{C}} \Phi_1(v) \frac{d}{dv} H(v) dv \right\}$$

$$B \sim -e^{ix \Phi_1(t, t_0)} H(0) \sqrt{\frac{2}{C}} \Phi_1(0) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

$$\text{où } \Phi_{-1}(v) = - \int_v^\infty e^{-ixz^2} dz$$

Le long du chemin d'intégration  $z = r e^{-i \frac{\pi}{4}}$

$$\Phi_1(0) = -e^{-i \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/2}}$$

$$B \sim x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2C}} h(t_0) e^{i(x \Phi_1(t, t_0) - \frac{\pi}{4})}$$

Il reste à calculer  $\int_{t_0}^t e^{ix \Phi_1(t, \tau)} h(\tau) d\tau$

Sur l'intervalle d'intégration le graphe de  $h$  est la seconde branche de la parabole, symétrique par rapport à la première. Cette intégrale sera égale à la première intégrale calculée. Au premier ordre, la borne  $t$  n'apparaît pas, comme la borne  $0$  n'intervenait pas dans la première intégrale.

Finalement ,

$$\int_0^t e^{ix \Phi_1(t, \tau)} h(\tau) d\tau \sim 2 \sqrt{\frac{\pi}{2C}} h(t_0) x^{-\frac{1}{2}} e^{i(x \Phi_1(t, t_0) - \frac{\pi}{4})}$$

pour  $x \rightarrow \infty$

Pour obtenir la solution de l'équation différentielle il faut encore calculer

$$\int_0^t e^{ix \Phi_2(t, \tau)} h(\tau) d\tau$$

$$\text{où } \Phi_2(t, \tau) = - \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau$$

$$= -t + Ct_0 t - C \frac{t^2}{2} - Ct_0 \tau + \frac{C\tau^2}{2} - 2\tau$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = C(\tau - t_0) - 2$$

Cette dérivée ne s'annule ni en  $\tau = 0$ , ni en  $\tau = t_0$ , ni en  $\tau$  quelconque pas trop éloigné de la résonance. On n'a donc pas de point stationnaire, et donc pas de contribution en  $x^{-1/2}$  de la part de cette intégrale dans la solution.

On a ainsi trouvé une expression de la solution proposée par Gautesen :

$$y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t e^{ix \Phi_j(t, \tau)} h(\tau) d\tau$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2C}} h(t_0) x^{-\frac{1}{2}} e^{i(x \Phi_1(t, t_0) - \frac{\pi}{4})}$$

Chapitre VI  
METHODE DU COL

La méthode du col ("steepest descent" ou méthode du point selle) s'applique à l'estimation des intégrales de contour de la forme

$$F(x) = \int_C g(t) e^{xf(t)} dt$$

où  $x$  est un paramètre grand,  $g$  et  $f$  sont des fonctions analytiques sur la courbe d'intégration  $C$ .

Pour les grandes valeurs du paramètre  $x$  la valeur de l'intégrale est pour l'essentiel déterminée par la partie du chemin d'intégration sur lequel  $|e^{xf(z)}| (= e^{x \operatorname{Re} f(z)})$ , c'est-à-dire  $\operatorname{Re} f(z)$ , est grand par rapport aux valeurs sur la partie restante de  $C$ . En outre, on estime d'autant plus facilement cette intégrale que cette partie est petite et que les valeurs de  $\operatorname{Re} f(z)$  décroissent plus rapidement.

On va donc déformer le chemin d'intégration  $C$  de manière à faciliter l'intégration. Les fonctions étant analytiques, le théorème de Cauchy assure que l'on ne change rien à la valeur de l'intégrale.

On sait que la variation la plus rapide de  $\operatorname{Re} f(z)$  a lieu le long d'une courbe où  $\operatorname{Im} f(z)$  est constante, puisque  $f$  est analytique. On voit que le long d'une telle courbe il restera à intégrer une fonction à variable réelle (en paramétrisant la courbe d'intégration) où l'argument de l'exponentielle est réel.

La méthode de Laplace permet précisément d'intégrer de telles fonctions. On pourrait d'ailleurs très bien considérer comme premier le fait que l'on veuille intégrer une fonction à exponentielle réelle au moyen de la méthode de Laplace, plutôt que dire que l'on intègre là où la variation de la partie réelle est la plus rapide. La méthode tire de là son nom de "steepest descent" ou méthode de la plus grande pente .



On veut faire passer le chemin d'intégration par le point où  $\operatorname{Re} f(z)$  atteint sa plus grande valeur. On peut démontrer que le point de la courbe  $\operatorname{Im} f(z) = \text{constante}$ , en lequel  $\operatorname{Re} f(z)$  atteint sa plus grande valeur, est un point col, ou point selle.

La méthode tire de là son autre dénomination.

Ces points selles sont faciles à trouver : comme la fonction  $\operatorname{Re} f(z)$  est harmonique, elle n'a ni minimum, ni maximum ; les points en lesquels  $f'(z) = 0$  sont les points selles .

Résumons :

Il s'agit d'intégrer le long des courbes  $\operatorname{Im} f(z) = \text{constante}$  et de passer par un point selle. Le choix du point selle, et de parties du chemin d'intégration le long de courbes quelconques, dépend de chaque cas particulier.

Pour les détails et les démonstrations, consulter les références. Le livre de Lavrentiev et Chabat (référence [6]) présente un excellent exposé théorique de cette méthode (Ch.V; § 3,77; p.485 à 487). Erdélyi donne des exemples variés et significatifs ( référence [5], § 2.6 et § 2.7).

La méthode du col s'applique en particulier aux intégrales développables par la méthode de la phase stationnaire. On voit que les points stationnaires, qui jouaient un rôle essentiel dans la méthode de la phase stationnaire vont être ici des points cols et finalement des maxima pour la méthode de Laplace.

On constatera d'autres analogies dans l'application.

Application

L'intégrale à calculer est

$$\int_0^t e^{ix} \Phi_1(t, \tau) h(\tau) d\tau \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau \\ h(\tau) = g(\tau) \omega^{-1}(\tau) \\ \omega(\tau) = 1 + (\tau - t_0)c, \quad c > 0 \end{array} \right.$$

en particulierisant la fréquence à la forme utilisée dans les premiers chapitres.

$\Phi_1$  peut être explicitée :

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \tau) &= \int_{\tau}^t \omega(s) ds + \tau \\ &= t - ct_0 t + \frac{ct^2}{2} + ct_0 \tau - \frac{c\tau^2}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} = c(t_0 - \tau)$$

Il y a donc un seul col situé en  $\tau = t_0$ .

Recherche de la plus grande pente .

$$\text{Soit } \tau = \xi + i\eta$$

$$\text{Notons } K = \frac{ct^2}{2} + t - ct_0 t \quad \text{et} \quad f(\tau) = \Phi_1(t, \tau)$$

$$f(\tau) = i \left[ K - c(-t_0(\xi + i\eta) + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} + i\xi\eta) \right]$$

$$\text{Im } f(\tau) = K - c(-t_0 \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2})$$

Les chemins de plus grande pente sont

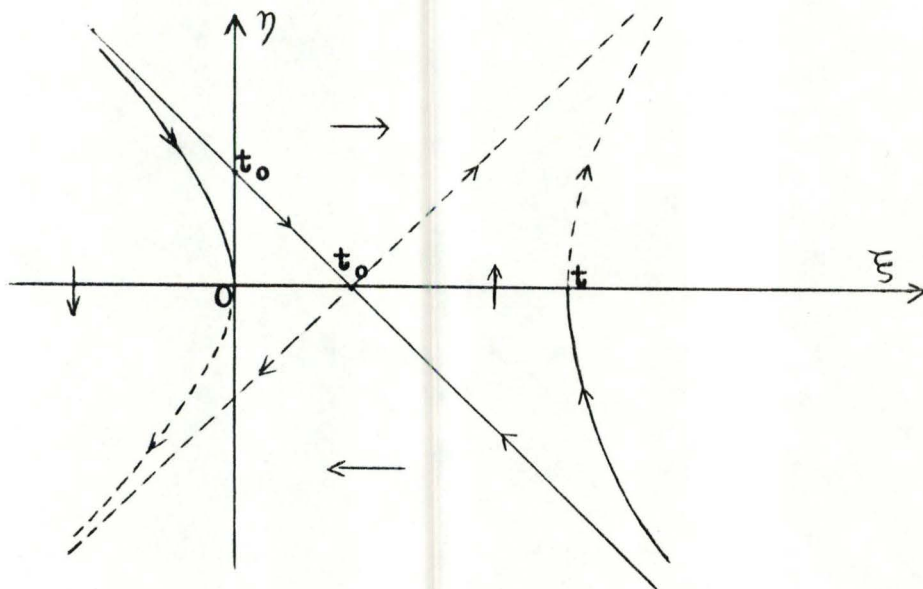
$$\frac{\xi^2}{2} - t_0 \xi - \frac{\eta^2}{2} = p, \quad p \text{ constante,}$$

c'est-à-dire une famille d'hyperboles.

L'hyperbole passant par le col, soit par  $(\xi, \eta) = (t_0, 0)$  est  $(\xi - t_0)^2 - \eta^2 = 0$ , c'est-à-dire l'hyperbole dégénérée formée par les asymptotes de la famille.

Pour intégrer de 0 à  $t$  le long de l'axe réel, on pourra intégrer de 0 à  $-\infty$  le long de la branche d'hyperbole passant par  $(0, 0)$ , de  $-\infty$  à  $+\infty$  le long de l'asymptote  $\eta = t_0 - \xi$ , de  $+\infty$  à  $t$  le long de la branche d'hyperbole passant par  $(t, 0)$ .

L'asymptote  $\eta = t_0 - \xi$  a été choisie parce que le col est un maximum dans sa direction, tandis qu'il est un minimum dans la direction de l'autre asymptote.



Les flèches indiquent le sens de la croissance de  $\text{Re } f(\tau)$

Intégration le long de la droite  $\eta = -\xi + t_0$ .

$$f(\tau) = i \text{Im } f(\tau) + C \eta (\xi - t_0) = i \text{Im } f(t) - C(\xi - t_0)^2$$

La droite est une branche de l'hyperbole

$$\frac{\xi^2}{2} - t_0 \xi - \frac{\eta^2}{2} = p \quad \text{où } p = \frac{t_0^2}{2}$$

$$\text{Im } f(\zeta) = K - \frac{C t_0^2}{2} = \phi_1(t, t_0)$$

Il faut déterminer  $y_D$ ,

$$y_D = e^{ix\phi_1(t, t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xC(\xi - t_0)^2} \frac{g(\xi + i(t_0 - \xi))}{1 + (\xi - t_0 + i(t_0 - \xi))C} (1-i) d\xi$$

On intègre par la méthode de Laplace. L'argument de l'exponentielle est une fonction parabolique ayant un maximum en  $t_0$ , comme dans la méthode de la phase stationnaire.

La dérivée de cet argument est  $-2C(\xi - t_0)$ , négative pour  $\xi \gg t_0$ .

Intégrons donc d'abord sur l'intervalle  $t_0 \leq \xi < \infty$  en appelant  $y_{D_1}$  la partie de  $y_D$  qui en résulte.

En utilisant les notations du chapitre V, on a

$$\begin{aligned} \nu &= 2, & a &= 2C \\ \lambda &= 1, & b &= g(t_0) \end{aligned}$$

$$y_{D_1} \sim (1-i) e^{ix\phi_1(t, t_0)} \frac{g(t_0)}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{Cx}\right)^{1/2}$$

L'intégrale sur  $-\infty \leq \xi \leq t_0$  est déduite d'un calcul tout à fait symétrique.

$$y_D = 2 y_{D_1} = (1-i) g(t_0) \sqrt{\frac{\pi}{C}} x^{-\frac{1}{2}} e^{ix\phi_1(t, t_0)}$$

En se limitant au premier ordre, il suffit d'intégrer le long de la droite  $\eta = -\xi + t_0$ .

Les intégrations le long des branches d'hyperbole donneront une contribution en  $x^{-2}$  seulement.

Comme dans la méthode de la phase stationnaire, c'est la forme parabolique de l'argument de l'exponentielle autour du col qui suscite un exposant  $-\frac{1}{2}$  pour  $x$ . L'intégration le long de la droite

$\eta = -\xi + t_0$  correspond dans la méthode de la phase stationnaire au choix du chemin d'intégration dans les intégrations par parties.

Intégration le long des hyperboles :

L'hyperbole passant par  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  a pour équation

$$\xi^2 - 2 t_0 \xi - \eta^2 = 0$$

La puissance de  $x$  dans l'estimation de l'intégrale le long de cette courbe va être déterminée par la forme de la partie réelle de l'exponentielle, plus précisément de sa dérivée, autour du point maximum, c'est-à-dire  $\xi = 0$

$$\operatorname{Re} f(\tau) = C \eta (\xi - t_0)$$

$$\frac{d \operatorname{Re} f(\tau)}{d \xi} = C (\xi - t_0) \frac{d \eta}{d \xi} + C \eta$$

$$\text{Pour l'hyperbole} \quad \frac{d \eta}{d \xi} = \frac{\xi - t_0}{\eta}$$

$$\frac{d \operatorname{Re} f(\tau)}{d \xi} = \frac{C (\xi - t_0)^2}{\eta} + C \eta$$

$$\text{Pour la branche d'hyperbole considérée} \quad \eta = \sqrt{\xi(\xi - 2t_0)}$$

$$\frac{d \operatorname{Re} f(\tau)}{d \xi} = C \frac{(\xi - t_0)^2}{\sqrt{\xi(\xi - 2t_0)}} + C \sqrt{\xi(\xi - 2t_0)}$$

Au voisinage de  $\xi = 0$ , cette dérivée a, à un facteur près, l'allure de  $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$

On en déduit :  $\nu = \frac{1}{2}$ , et l'intégrale est d'ordre  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-2}$

L'hyperbole passant par  $(\xi, \eta) = (t, 0)$  a pour équation

$$\xi^2 - 2 t_0 \xi - \eta^2 = t^2 - 2 t_0 t$$

Comme ci-dessus,

$$\frac{d \operatorname{Re} f(\tau)}{d \xi} = \frac{C (\xi - t_0)^2}{\eta} + C \eta$$

Pour la branche d'hyperbole considérée,

$$\eta = -\sqrt{(\xi - t)(\xi + t - 2t_0)}$$

$$\frac{d \operatorname{Re} f(\xi)}{d\xi} = -c \frac{(\xi - t_0)^2}{\sqrt{(\xi - t)(\xi + t - 2t_0)}} - c \sqrt{(\xi - t)(\xi + t - 2t_0)}$$

Au voisinage de  $\xi = t$ , cette dérivée a, à un facteur près, l'allure de  $\frac{1}{\sqrt{(\xi - t)}}$

On en déduit  $\gamma = \frac{1}{2}$  et l'intégrale est d'ordre  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-2}$

Finalement seul subsiste  $y_D$  au premier ordre

$$\int_0^t e^{ix \Phi_1(t, \tau)} h(\tau) d\tau \sim (1-i) g(t_0) \frac{\pi}{c} x^{-\frac{1}{2}} e^{ix \Phi_1(t, t_0)}$$

Pour exprimer la solution proposée par Gautesen, il reste encore à estimer

$$\int_0^t e^{ix \Phi_2(t, \tau)} h(\tau) d\tau$$

où  $\Phi_2(t, \tau) = -t + c t_0 t - c \frac{t^2}{2} - c t_0 \tau + c \frac{\tau^2}{2} - 2\tau$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = c(\tau - t_0) - 2$$

Pour des  $\tau$  pas trop grands (suffisamment proches de la résonance) cette dérivée ne s'annule pas. Il n'y a donc pas de point col. L'intégrale fournira donc des termes d'ordre plus grand que la première intégrale considérée.

On a ainsi trouvé une expression de la solution proposée par Gautesen

$$y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^t e^{ix \Phi_j(t, \tau)} h(\tau) d\tau - \frac{1}{2} e^{ix \Phi_1(t, t_0)}$$

$$\sim \frac{(1-i)}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c}} g(t) x^{-\frac{1}{2}} e^{ix \Phi_1(t, t_0)}$$

$$\text{Comme } 1-i = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \text{ et } h(t_0) = g(t_0)$$

$$y \sim \sqrt{\frac{\pi}{2c}} h(t_0) x^{-\frac{1}{2}} e^{i(x \Phi_1(t, t_0) - \frac{\pi}{4})}$$

C'est exactement le résultat trouvé par la méthode de la phase stationnaire.

Chapitre VII  
COMPARAISON DES RESULTATS

L'équation présentée par Kevorkian était

$$\ddot{y} + \omega^2(\xi t)y = \alpha \cos(t + \beta)$$

Celle présentée par Gautesen était

$$\xi^2 \frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + \omega^2(t_*)y_* = -\left(\frac{i}{\xi}\right)^{-1} g(t_*) e^{i \frac{t_*}{\xi}}$$

en notant avec des astérisques ce que Gautesen appelait  $y$  et  $t$ .

Les transformations suivantes permettent de ramener l'équation de Kevorkian à celle de Gautesen .

$$t_* = \xi t$$

$$y_* = \xi y$$

L'équation de Kevorkian devient

$$\xi^2 \frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + \omega^2(t_*)y_* = \xi \alpha \cos\left(\frac{t_*}{\xi} + \beta\right)$$

De manière à identifier la partie réelle de la solution de l'équation de Gautesen à celle de l'équation de Kevorkian, déterminons  $g$  de manière à ce que la partie réelle du second membre de l'équation de Gautesen soit égale à celle de l'équation de Kevorkian.

Pour vérifier  $\xi \alpha \cos\left(\frac{t_*}{\xi} + \beta\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{\xi}{i} g(t_*) e^{i \frac{t_*}{\xi}}\right),$

on doit avoir  $g = \alpha e^{i\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}$

La méthode du col et la méthode de la phase stationnaire avaient fourni comme résultat :

$$y_* = \xi^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2C}} g(t_{0*}) e^{i\left(\frac{1}{\xi} \phi_1(t_*, t_{0*}) - \frac{\pi}{4}\right)} + o(\xi)$$

Gautesen avait trouvé :

$$y_* = \xi^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{C}} g(t_{0*}) e^{i\left(\frac{1}{\xi} \phi_1(t_*, t_{0*}) + \frac{\pi}{4}\right)} + o(\xi)$$

En remplaçant  $g$  et  $\Phi_1$  par leurs valeurs et en revenant aux notations de Kevorkian on trouve ,

pour le col :

$$y = \xi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2C}} e^{i\left(t + \beta - \frac{3\pi}{4} - Ct_0(t-t_0) + o(\xi)t^2\right)} + o(1)$$

pour Gautesen :

$$y = \xi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\alpha}{C}} e^{i\left(t + \beta - \frac{\pi}{4} - Ct_0(t-t_0) + o(\xi)t^2\right)} + o(1)$$

Le terme principal de la solution de Kevorkian (Ch.1 , (7)) était

$$\rho_1 \cos(b+c + \psi_1)$$

En tirant  $\rho_1$  de (9) et  $\psi_1$  du système (8), la solution pour l'équation de Kevorkian se présente sous la forme

$$y = \xi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{4C}} \cos\left(t + \beta + o(\xi)t^2\right) + o(1)$$

que l'on a à comparer avec la partie réelle des solutions précitées soit, pour le col :

$$y = \xi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2C}} \cos\left(t + \beta - \frac{3\pi}{4} - Ct_0(t-t_0) + o(\xi)t^2\right) + o(1)$$

pour Gautesen :

$$y = \xi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\alpha^2}{C}} \cos\left(t + \beta - \frac{\pi}{4} - Ct_0(t-t_0) + o(\xi)t^2\right) + o(1)$$

Les résultats coïncident à une phase et un facteur constant près. L'essentiel, c'est-à-dire que la solution croît brutalement en  $\xi^{-1/2}$ , est un résultat fourni par toutes les méthodes .



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Kevorkian J.  
SIAM J. Appl. Math., 20 , 364 - 373 (1971)
- [2] Gautesen A.K.  
SIAM J. Appl. Math., 27 , 526 - 530 (1974)
- [3] Nayfeh A.H.  
Perturbation Methods , Wiley , New-York (1973)
- [4] Kevorkian J.  
Lectures in Applied Mathematics , 7 , 206 - 275 (1966)
- [5] Erdélyi A.  
Asymptotic Expansions , Dover , New-York (1956)
- [6] Lavrentiev M. et Chabat B.  
Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe,  
Editions de Moscou (1972)
- [7] Kline M.  
Mathematical Thought from Ancient to Modern Times ,  
Oxford University Press , New-York (1972).