MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sur le problème complémentaire en programmation mathématique

Dekelver, Claude

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

Sur le problème complémentaire

en programmation mathématique.

Etude théorique et
Algorithmique du problème linéaire
complémentaire.

Dekelver Claude.

Je remercie Monsieur Fichefet pour sa collaboration à la mise au point de ce mémoire.
Je remercie également tous les professeurs et assistants qui, au cours de mes études, m'ont apporté les connaissances nécessaires.

Claude Dekelver.

Introduction :

Le problème complémentaire est connu dans la littérature comme étant le problème permettant de chercher un vecteur x non-négatif de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par une fonction donnée F ($F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) est également non-négative et tel que les vecteurs x et $F(x)$ soient orthogonaux.
L'importance de ce problème réside dans le fait qu'il donne une formulation mathématique agréable pour un grand nombre de problèmes en programmation mathématique, théorie des jeux, économie, mécanique, etc.....
Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement au problème complémentaire en programmation mathématique.

Dans une première partie, nous envisagerons une étude théorique du problème formulé ci-dessus. Aprés avoir introduit le problème linéaire complémentaire via les conditions de Kuhn-Tucker et aprés avoir formalisé d'une façon générale le problème complémentaire (chapitre I), nous établirons, grâce à quelques définitions (Chapitre II) un certain nombre de théorèmes d'existence (chapitre III) et de théorèmes d'existence et d'unicité (chapitre IV). En ce qui concerne ces deux derniers chapitres, nous étudierons chaque fois trois cas :

. le cas non linéaire avec F non-nécessairement différentiable.
. le cas non linéaire avec F différentiable.
. le cas linéaire (qui sera considéré comme un cas particulier du cas non linéaire.)

Nous tiendrons compte alors de quelques définitions et théorèmes caractérisant les fonctions fortement convexes notamment en termes de leur gradient et hessien (chapitre V), ce qui nous permettra d'appliquer nos résultats précédents à deux problèmes spécifiques : le programme non linéaire dual symétrique et le problème de point de selle non-négatif (chapitre VI) ; au cours de ce chapitre, nous comparerons également les théorèmes que nous avons établis, avec les résultats de Cottle nécessaires à la démonstration de la "méthode du pivot principal".

Dans la seconde partie, nous nous intéresserons uniquement au problème linéaire complémentaire :

$$\begin{aligned} &Ax + y = b && \text{avec } A \text{ matrice } (n \times n) \text{ donnée} \\ &x, y \geq 0 && b \text{ vecteur constant donné} \\ &x^T y = 0 && x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

et plus spécialement à un algorithme qui permet de résoudre ce problème.

Après avoir donné un bref aperçu des différentes méthodes existant actuellement pour cette résolution, nous introduirons "la méthode paramétrique" et ses deux variantes : la variante complémentaire et la variante presque complémentaire ou méthode de Lemke (chapitre I)

Nous étudierons alors avec plus de détails la variante complémentaire en nous intéressant à 3 cas particuliers :

- le cas où les éléments principaux de la matrice A sont négatifs. (c'est-à-dire -A est une P-matrice) (chapitre II)
- le cas où la matrice A est semi-définie négative (chapitre III)
- le cas où -A est une P_0-matrice (chapitre IV)

Nous exposerons ensuite la méthode paramétrique dans le cas général (chapitre V) et nous lui adjoindrons un test pour

établir l'impossibilité d'une solution (chapitre VI)
Nous avons établi un code de programmation sur ordinateur pour la méthode paramétrique (variante complémentaire) :
L'organigramme et le listing seront exposés au chapitre VII et différents exemples prendront place au fur et à mesure des chapitres étudiés précédemment.
Nous terminerons cette partie, en montrant que la méthode paramétrique trouve une solution au problème linéaire complémentaire ou prouve l'impossibilité du problème dans le cas particulier où - A est une L-matrice.

Faute de temps, il nous a été impossible d'étudier d'autres algorithmes résolvant le problème linéaire complémentaire, et de là, de les comparer valablement.
Nous pouvions également envisager pour la résolution de notre problème complémentaire un algorithme basé sur le principe du "branch and bound" (T. Ibaraki, "complementary programming" opns. Res. 19 (1971)) ; et également remplacer la contrainte de complémentarité par une méthode de construction de plans de troncature, appelés ici plans complémentaires. (T. Ibaraki, "The use of cuts in complementary programming")

Il est à noter que certains auteurs se sont intéressés à des algorithmes résolvant le problème non-linéaire complémentaire ; notamment :

- R.W. Cottle : "Non linear programs with positively bounded jacobians" siam journal of applied Math., 14, n° 1. (1966)
- H. Scarf : "An algorithm for a class of non convex programming problems" Cowles foundations discussion paper, n° 211, yale university (July 1966)

- M.L. Fisher and F.J. Gould, "An algorithm for the non linear complementary problem„ rept n° 7311, Center for mathématical studies, university of Chicago, Chicago, III (1973)
- M. Kojima "Computational méthods for the non linear complementary problem„ Department of administration engineering, Keio university, Yokohama, Japan (1973)

Du point de vue pratique, les pages seront numérotées indépendamment des parties et des chapitres ; les numérotations des formules seront propres au chapitre en cours si elles sont en caractère "arabe„ et valables pour tout le mémoire si elles sont en caractère "romain„. Les annexes relatives aux différentes parties seront numérotées indépendamment et prendront place directement après la partie à laquelle elles se rapportent. Les références seront indiquées par une lettre entre crochet qui renvoie à la bibliographie.

En ce qui concerne les théorèmes et corollaires, ils porteront un premier numéro identique à celui du chapitre, un second identique à celui du paragraphe, et enfin un troisième indiquant leur place dans le paragraphe. Etant donné le petit nombre de théorèmes dans la seconde partie, et leur portée assez limitée, il ne sera pas nécessaire de les numéroter.

Première partie.

ETUDE THEORIQUE

DU

PROBLEME COMPLEMENTAIRE

Première partie :

Etude théorique du problème complémentaire :

Chapitre I :

Introduction du problème complémentaire.

Dans ce premier chapitre, nous verrons d'abord que les conditions de Kuhn et Tucker pour un programme quadratique convexe se présentent comme un cas particulier du problème linéaire complémentaire ; nous définirons ensuite le problème complémentaire sous sa forme générale, et nous finirons ce chapitre en montrant que ce problème complémentaire est un cas particulier du problème variationnel.

§1 :

Le problème linéaire complémentaire via les conditions de Kuhn et Tucker.

Rappelons qu'un "programme quadratique" est un programme mathématique qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min f(x) = p^T x + x^T C x \\ \text{sous contraintes} \quad \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ Ax \geq b \end{array}\right. \quad (I.1) \end{array}} \qquad (I)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

A est une matrice $(m \times n)$

et C est une matrice symétrique $(n \times n)$

Il consiste donc à chercher le minimum d'une fonction quadratique.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \, x_j + \sum_{j,k=1}^{n} x_j \, c_{j.k} \, x_k$$

sous contraintes linéaires $\left\{\begin{array}{ll} \cdot\ x_j \geq 0 & (j = 1, \dots, n) \\ \cdot\ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, x_j \geq b_i & (i = 1, \dots, m) \end{array}\right.$

Si $X \subset \mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des points satisfaisant aux contraintes (I.1), on dit que le programme quadratique est convexe si sa fonction objective f est convexe dans le sous-ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \text{ tel que } \alpha + \beta = 1 ; f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On sait que tel est le cas si la matrice C est semi-définie positive. (Annexe 1)
Dans la suite, tout $x \in X$ sera appelé "solution réalisable" du problème (I), tandis que le problème (I) sera appelé "réalisable" si l'ensemble des contraintes X est non vide, c'est-à-dire si il existe un x réalisable.
Si la fonction objective (ou économique) f a un infimum sur l'ensemble des contraintes X, cet infimum sera noté m.
Tout $x \in X$ tel que $f(x) = m$ sera appelé "solution du problème (I)".
Si une fonction possède un minimum local sur un ensemble convexe dans lequel elle est convexe, ce minimun local est global.
La fonction de Lagrange associée à (I) est :

$$F(x, u) = p^T x + x^T C x + u^T (b - Ax) \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{et } \frac{\partial F}{\partial x} = p^T + 2 x^T C - u^T A$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = (b - Ax)^T$$

Nous posons $\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ avec $\partial f(x) = p^T + 2 x^T C$

Les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p^T + 2x^T C - u^T A \geqslant 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = (b - Ax)^T \leqslant 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x = p^T x + 2x^T C x - u^T A x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} u = (b - Ax)^T u = 0$$

avec $x \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$

Le théorème de Kuhn et Tucker, qui occupe une place centrale dans toute la théorie des programmes convexes, permet de généraliser la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange lorsque les contraintes ne sont pas formées que d'égalités, mais également d'inégalités. Dans le cas d'un programme quadratique convexe, les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires et suffisantes pour assurer la minimalité d'un point en lequel elles sont vérifiées. [A]

Elles peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$p^T + 2x^T C - u^T A - v^T = 0 \qquad \text{avec } v \in \mathbb{R}^n$$

$$(b - Ax)^T + w^T = 0 \qquad \text{avec } w \in \mathbb{R}^m$$

$$p^T x + 2x^T C x - u^T A x = 0$$

$$(b - Ax)^T u = 0$$

avec $x \geqslant 0$ $\quad u \geqslant 0$ $\quad v \geqslant 0$ $\quad w \geqslant 0$

ou encore :

$$v^T = p^T + \ell x^T C - u^T A \Rightarrow p = v - \ell C x + A^T u$$
$$w^T = -(b - Ax)^T \Rightarrow -b = w - Ax$$
$$\left.\begin{array}{ll} v^T x = 0 & \Rightarrow x^T v = 0 \\ -w^T u = 0 & \Rightarrow u^T w = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^T v + u^T w = 0$$

si nous posons $b^* = \begin{pmatrix} p \\ -b \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} -\ell C & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$;

$$x^* = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \text{ et } y^* = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

alors les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} b^* = A^* x^* + y^* \\ x^{*T} y^* = 0 \\ x^*, y^* \geq 0 \end{cases}$$

et se présentent comme un cas particulier du problème linéaire complémentaire ;

en posant $b' = b^*$; $A' = -A^*$

$x' = x^*$ et $y' = y^*$

on a $\begin{cases} y' = A' x' + b' \\ x'^T y' = 0 \\ x' ; y' \geq 0 \end{cases}$

Remarquons que pour le problème linéaire complémentaire, nous n'avons pas de fonction objective ; il n'y a aucune distinction entre problème primal et problème dual et nous n'imposons pas obligatoirement de structure spéciale pour la matrice A'.

§2 : Forme générale du problème complémentaire.

Le problème linéaire complémentaire s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} y = Ax + b \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \\ x^T y = 0 \end{array}} \qquad (II)$$

A noter que si A est une matrice $(n \times n)$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, le problème complémentaire est un système de $n+1$ équations à $2n$ inconnues, avec des conditions de non-négativité sur les variables.

Sous sa forme générale, le problème complémentaire s'énonce de la façon suivante :

soit une fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Trouver la solution du problème

$$\boxed{\begin{array}{l} y = F(x) = [F_1(x), \dots, F_n(x)]^T \\ x^T y = 0 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{array}} \quad (III)$$

où les $F_i(x)$ sont des fonctions scalaires.

On peut également poser ce problème comme suit :

Trouver un vecteur x dans $\mathbb{R}^n_+$ (c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}^n$ et $x \geq 0$) dont l'image y par F est un vecteur dans $\mathbb{R}^n_+$, de telle façon que les deux vecteurs soient orthogonaux.

§ 3 :

Inégalité variationnelle.

Soient V un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$
(par exemple un Hilbert ou un Banach)
V^* le dual de V
et C un sous ensemble fermé, convexe, non vide de V.
Soient encore $F : C \longrightarrow V^*$
et $< .,. >$ une forme bilinéaire définie sur $V \times V^*$

Le problème variationnel est le suivant :

trouver $\bar{x} \in C$ tel que $< x - \bar{x}, F(\bar{x}) > \geq 0 \quad \forall x \in C$

Notre problème complémentaire (III) est un cas particulier du problème variationnel :
si l'on pose $V = V^* = \mathbb{R}^n$; $C = \mathbb{R}^n_+$ et $< ; >$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$;
il s'agit de trouver

$$\boxed{\bar{x} \geq 0 \quad \text{tel que } (x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \qquad \forall x \geq 0} \quad \text{(IV)}$$

En effet, dès qu'un $\bar{x}$ vérifie (III), alors il vérifie (IV) :
si $\bar{x}$ vérifie (III), alors il existe un y tel que :

$$\left.\begin{array}{l} y = F(\bar{x}) \\ \bar{x} \geq 0 ; y \geq 0 \end{array}\right\} \text{on a donc } \forall x \geq 0 \quad x^T F(\bar{x}) \geq 0$$

$$\bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$$

d'où $\bar{x} \geq 0$ tel que $(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0. \quad \forall x \geq 0$ c'est-à-dire (IV)

Et dès qu'un $\bar{x}$ vérifie (IV), alors il vérifie (III) :
si $\bar{x}$ vérifie (IV), alors $\bar{x} \geq 0$ tel que $(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

prenons $x = \bar{x} + e_i$ où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unité dans $\mathbb{R}^n$

nous avons alors $\bar{x} \geq 0$ tel que $e_i^T F(\bar{x}) \geq 0$

où $\bar{x} \geq 0$ tel que $F_i(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ (1)

on a donc $\bar{x}^T F(\bar{x}) \geq 0$ (2)

prenons $x = 0$ alors (IV) implique en particulier que $-\bar{x}^T F(\bar{x}) \geq 0$

on a donc $\bar{x}^T F(\bar{x}) \leq 0$ (3)

d'où grâce à (1) $\bar{x} \geq 0$; $F(\bar{x}) \geq 0$

Tandis que (2) et (3) nous permettent de conclure que $\bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$

c'est-à-dire le problème complémentaire (III)

Avant d'étudier le problème complémentaire du point de vue théorique, démontrons encore un théorème et un corollaire qui nous serviront par la suite.

Théorème I.3.1. :

Soient C un sous-ensemble compact, convexe, non vide de $\mathbb{R}^n$ et une fonction continue $F : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Alors $\exists \bar{x} \in C$ tel que $(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C$

ou encore $\exists \bar{x} \in C$ tel que $x^T F(\bar{x}) \geq \bar{x}^T F(\bar{x}) \quad \forall x \in C$

Démonstration :

Considérons l'application multivoque, $\mathcal{S} : C \longrightarrow \mathcal{P}(C)$ définie par $\mathcal{S}(x) = \{ u$ tel que $u \in C,\ u^T F(x) = \min\limits_{v \in C} v^T F(x) \}$

$\bar{x} \in C$ satisfait la thèse du théorème si et seulement si $\bar{x}$ est un point fixe de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire $\bar{x} \in \mathcal{S}(\bar{x})$

On peut montrer que $\forall x \in C$, l'ensemble $\mathcal{S}(x)$ est un sous-ensemble convexe non vide de C (Annexe 2.) et que la fonction $\mathcal{S}$ est semi-continue supérieurement sur C (Annexe 3)

Maintenant, grâce au théorème du point fixe de Katukani, on conclut qu'il existe un $\bar{x} \in \mathcal{G}(\bar{x})$.

Rappelons ici la définition de semi-continuité supérieure et l'énoncé du théorème de Katukani, (pour plus de détails voir annexe 4.) d'après G. OWEN [B] et T. Parthasarathy [C]

Nous dirons qu'une fonction $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ où X et Y sont des espaces topologiques

$$x \longrightarrow f(x)$$

est semi-continue <u>supérieurement en un point x_0</u> si pour toute suite $\{x_1, x_2, \dots\}$ convergeant vers x_0, et toute suite $\{y_1, y_2, \dots\}$ (où $y_i \in f(x_i)$) convergeant vers y_0, la limite de la suite $\{y_n\}$ c'est-à-dire y_0 est dans $f(x_0)$

La fonction f est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en chaque point de X

Quant au <u>théorème de Katukani,</u> il s'énonce de la façon suivante :

Soient C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction semi-continue supérieurement qui envoie tout $x \in C$ sur un sous-ensemble convexe fermé de C. Alors il existe un $\bar{x} \in C$ tel que $\bar{x} \in f(\bar{x})$

<u>Corollaire I.3.1. :</u>

Soient $S = \{x \text{ tel que } x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.\}$ et $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue

Alors $\exists\, \bar{x} \in S$ tel que i) $(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in S$

ii) $\bar{x}_k > 0 \Rightarrow F_k(\bar{x}) = \min_i F_i(\bar{x}) \overset{D}{=} \mathcal{M}_0$

iii) $\bar{x}_k = 0 \Rightarrow F_k(\bar{x}) \geq \mathcal{M}_0$

Démonstration :

. Puisque S est non vide, compact, et convexe, $i)$ résulte du théorème précédent.

. $i) \Longrightarrow \bar{x}^T F(\bar{x}) \leq x^T F(\bar{x}) \qquad \forall x \in S$

donc $\bar{x}^T F(\bar{x}) = \min\limits_{x \in S} x^T F(\bar{x})$ puisque $\bar{x} \in S$

or $\min\limits_{x \in S} x^T F(\bar{x})$ est un programme linéaire et l'on sait donc qu'il atteint son minimum en un point extrémal de S.

Comme les points extrémaux de S sont les vecteurs - unités e_i de $\mathbb{R}^n$, on a donc :

$$\bar{x}^T F(\bar{x}) = \min_{x \in S} x^T F(\bar{x}) = \min_{i \in \{1,\dots n\}} e_i^T F(\bar{x}) = \min_i F_i(\bar{x}) \stackrel{D}{=} M_0$$

De plus, si pour l'une des composantes non-négatives de $\bar{x}$, soit $\bar{x}_k > 0$, on avait $F_k(\bar{x}) > M_0$, alors on pourrait écrire, en posant $J = \{ j$ tel que $j \neq k$ et $\bar{x}_j > 0 \}$, que

$$M_0 \stackrel{D}{=} \min_i F_i(\bar{x}) = \bar{x}^T F(\bar{x}) = \bar{x}_k F_k(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \bar{x}_j F_j(\bar{x})$$

$$> M_0 \bar{x}_k + \sum_{j \in J} \bar{x}_j F_j(\bar{x})$$

$$> M_0 \bar{x}_k + \sum_{j \in J} \bar{x}_j \underbrace{\min_i F_i(\bar{x})}_{= M_0}$$

$$> M_0 \bar{x}_k + M_0 \sum_{j \in J} \bar{x}_j > M_0$$

puisque $\bar{x} \in S$, donc que $\sum\limits_{j \in J \cup \{k\}} \bar{x}_j = 1$

On arriverait donc à une absurdité et par conséquent :

$$\bar{x}_k > 0 \Longrightarrow F_k(\bar{x}) = \min_i F_i(\bar{x}) = M_0$$

. $ii) \Longrightarrow iii)$

Chapitre II.

Quelques définitions.

Nous allons, dans ce chapitre, donner quelques propriétés de plusieurs classes de matrices en relation avec notre problème complémentaire et nous étendrons cela au cas de fonctions non linéaires $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tellesque $G(0) = 0$

Soient A une matrice carrée $(n \times n)$ dont les éléments sont des constantes réelles,
et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$; nous dirons que :

(D.P.) La matrice A est <u>définie positive</u> si $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

(S.D.P.) La matrice A est <u>semi-définie positive</u> si $x^T A x \geq 0 \quad \forall x$

(C.P.) La matrice A est <u>copositive</u> si $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

(S.C.P.) La matrice A est <u>strictement copositive</u> si $x^T A x > 0$
$\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$

(P.C.P.) La matrice A est <u>plus-copositive</u> si elle est (C.P.)
et, si $x^T A x = 0$ pour $x \geq 0$
alors $(A + A^T) x = 0$

(P_0) La matrice A est une <u>P_0 matrice</u> si tous ses mineurs principaux sont non-négatifs. (voir annexe 5)

(P.) La matrice A est une <u>P matrice</u> si tous ses mineurs principaux sont positifs.

(A.) La matrice A est <u>adéquate</u> si c'est une P_0 matrice
et, si le déterminant d'une sous-matrice principale B est 0,
Alors l'ensemble des lignes de A

contenant B sont linéairement dépen-
-dants et l'ensemble des colonnes de A
contenant B sont linéairement dependants

(S.M.) La matrice A est <u>semi-monotone</u> si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$

$\exists k$ tel que $x_k > 0$ et $A_k x \geq 0$

où A_k désigne la $k^{ième}$ ligne de la matrice A :

(S.S.M.) La matrice A est <u>strictement semi-monotone</u> si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$

$\exists k$ tel que $x_k > 0$ et $A_k x > 0$

(L.). La matrice A est une <u>L matrice</u> si elle est (S.M.)

et, si pour les $x \geq 0$ et $x \neq 0$ tels que $Ax \geq 0$ et $x^T A x = 0$
alors il existe des matrices diagonales $\Lambda \geq 0$, $\Omega \geq 0$
tel que $\Omega x \neq 0$ et $(\Lambda A + A^T \Omega) x = 0$

(B.G.) La matrice A est une <u>matrice de jeux bimatriciels</u>. si
elle est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $C > 0$, $B > 0$

Les relations d'inclusion parmi ces différentes classes de matrices sont résumées dans l'article de S. Karamardian "The complementarity Problem" [D] par le tableau de la page suivante.

Nous dirons encore que :

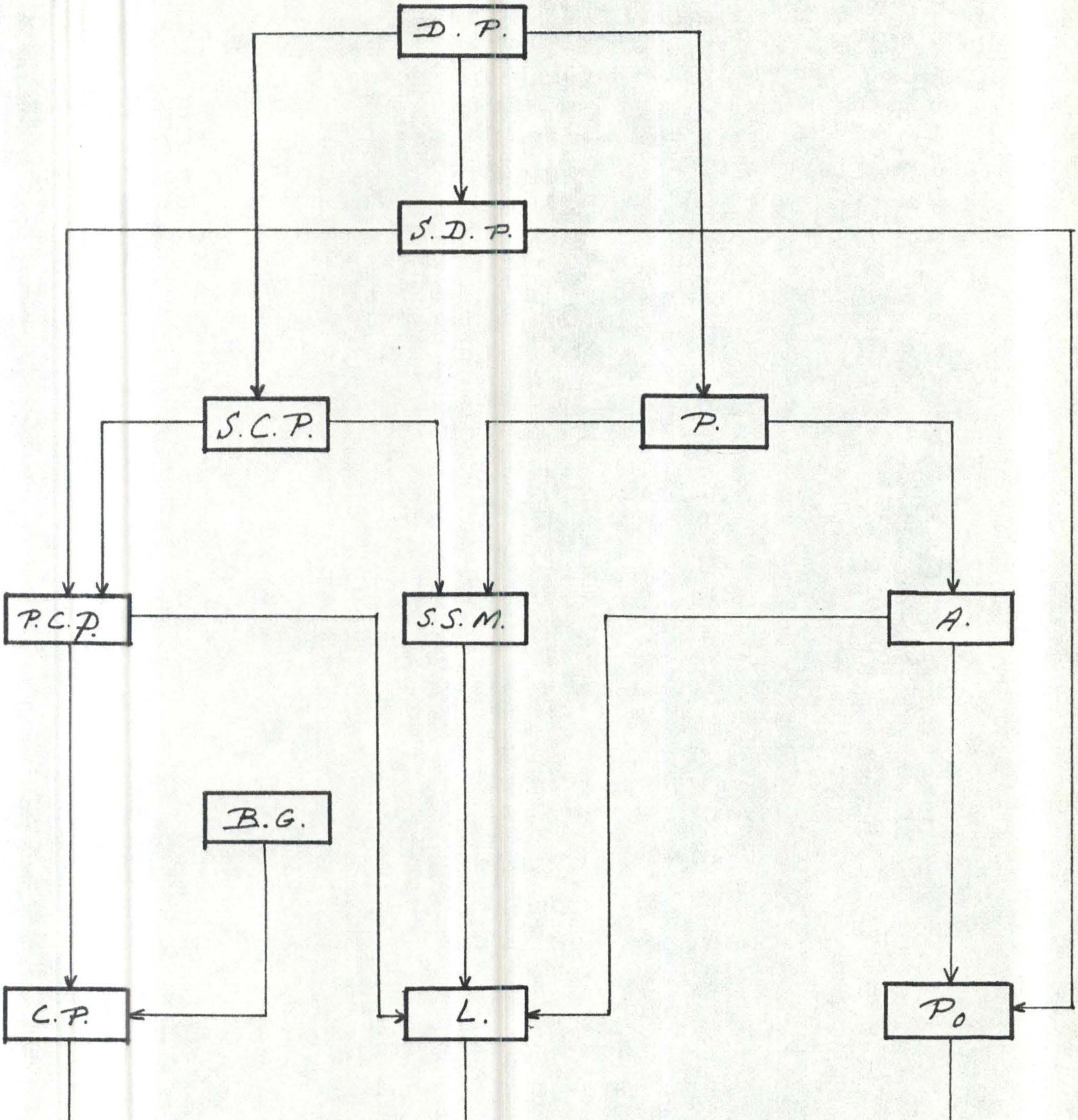
(R.) La matrice A est <u>régulière</u> si le système

$$\begin{cases} A_i x + t = 0 & \forall i \in I_+(x) \\ A_i x + t \geq 0 & \forall i \in I_0(x) \\ x \geq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

est incompatible

Avec $\forall x \geq 0$ soit $I_+(x) = \{i \text{ tel que } x_i > 0\}$

$I_0(x) = \{i \text{ tel que } x_i = 0\}$


D.P.
S.D.P.
S.C.P.
P.
P.C.P.
S.S.M.
A.
B.G.
C.P.
L.
P_0
S.M.

Considérons maintenant $A(x)$ une matrice carrée $(n \times n)$ dont les éléments $a_{ij}(x)$; $i, j = 1, \dots, n$ sont des fonctions définies sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ et y un vecteur de $\mathbb{R}^n$, nous dirons que :

(S.D.P.) la matrice $A(x)$ est <u>semi-définie positive</u> sur D si, $\forall x \in D$.
on a $y^T A(x) y \geq 0 \quad \forall y$

(D.P.) la matrice $A(x)$ est <u>définie positive</u> sur D si, $\forall x \in D$.
on a $y^T A(x) y > 0 \quad \forall y \neq 0$

(F.D.P.) la matrice $A(x)$ est <u>fortement définie positive</u> sur D si,
$\exists k > 0$ tel que $\forall x \in D$, on a
$$y^T A(x) y \geq k |y|^2 \quad \forall y$$

(C.P.) la matrice $A(x)$ <u>est copositive</u> sur D si, $\forall x \in D$
on a $y^T A(x) y \geq 0 \quad \forall y \geq 0$

(S.C.P.) la matrice $A(x)$ <u>est strictement copositive</u> sur D si, $\forall x \in D$
on a $y^T A(x) y > 0 \quad \forall y \geq 0$ et $y \neq 0$

(F.C.P.) la matrice $A(x)$ est <u>fortement copositive</u> sur D si,
$\exists k > 0$ tel que $\forall x \in D$, on a
$$y^T A(x) y \geq k |y|^2 \quad \forall y \geq 0$$

D'autres classes de matrices peuvent encore être définies parallélement au cas où les éléments de la matrice sont des constantes réelles

<u>Remarque II. 1. 1.</u>

Soit $\alpha(x)$ la plus petite valeur propre (qui est nécessairement réelle) de la partie symétrique de $A(x)$, c'est-à-dire
$$\frac{1}{2}\left[A(x) + A^T(x)\right]$$

Alors i) $A(x)$ est (S.D.P) sur D si et seulement si, $\alpha(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$

ii) $A(x)$ est (D.P.) sur D si et seulement si, $\alpha(x) > 0 \quad \forall x \in D$

iii) $A(x)$ est (F.D.P.) sur D si et seulement si, $\alpha(x) \geq k > 0 \quad \forall x \in D$

Soit maintenant une fonction $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tellque $G(0) = 0$

Nous dirons que :

(S.D.P.) G est <u>semi-définie positive</u> si $x^T G(x) \geq 0 \quad \forall x$

(D.P.) G est <u>définie positive</u> si $x^T G(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

(F.D.P.) G est <u>fortement définie positive</u> (ou coercive)

si $\exists \alpha > 0$ tel que $x^T G(x) \geq \alpha |x|^2 \ \forall x$

(C.P.) G est <u>copositive</u> si $x^T G(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

(S.C.P.) G est <u>strictement copositive</u> si $x^T G(x) > 0 \ \forall x \geq 0$ et $x \neq 0$

(F.C.P.) G est <u>fortement copositive</u> si $\exists \alpha > 0$ telque $x^T G(x) \geq \alpha |x|^2 \forall x \geq 0$

(S.M.) G est <u>semi-monotone</u> si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$ $\exists k$ telque $x_k > 0$

et $G_k(x) \geq 0$

(S.S.M.) G est <u>strictement semi-monotone</u> si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$

$\exists k$ tel que $x_k > 0$ et $G_k(x) > 0$

Remarquons, que si G est linéaire alors (F.D.P.) $\Leftrightarrow$ (D.P.)

(F.C.P.) $\Leftrightarrow$ (S.C.P.)

(R.) G est <u>régulière</u> si le système $\begin{cases} G_i(x) + t = 0 & \text{pour } i \in I_+(x) \\ G_i(x) + t \geq 0 & \text{pour } i \in I_0(x) \\ x \geq 0 & \text{et } x \neq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$

est incompatible

avec $\forall x \geq 0$ soit $I_+(x) = \{ i \text{ telque } x_i > 0 \}$

$I_0(x) = \{ i \text{ telque } x_i = 0 \}$

Remarquons encore que $(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{y} = F(\bar{x})$ est une solution du problème (III) si et seulement si

$$F_i(\bar{x}) = 0 \qquad \text{pour } i \in I_+(\bar{x})$$

$$F_i(\bar{x}) \geq 0 \qquad \text{pour } i \in I_0(\bar{x})$$

Avant de terminer ce chapitre, définissons encore différents types de monotonicité pour la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ où $D \subset \mathbb{R}^n$

la fonction f est dite <u>monotone</u> sur D. si

$$\forall x, y \in D \quad \text{on a} \quad (x-y)^T [f(x) - f(y)] \geq 0$$

la fonction f est dite <u>strictement monotone</u> sur D si

$$\forall x, y \in D \text{ avec } x \neq y \quad \text{on a} \quad (x-y)^T [f(x) - f(y)] > 0$$

la fonction f est dite <u>fortement monotone</u> sur D si

$$\exists k > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in D \quad \text{on a}$$

$$(x-y)^T (f(x) - f(y)) \geq k \, |x-y|^2$$

où $| \, |$ est la norme euclidienne usuelle.

Chapitre III :

Théorèmes d'existence.

Nous considérerons d'abord dans ce chapitre quelques théorèmes d'existence pour le problème non linéaire complémentaire (III) en tenant compte de deux cas : F n'étant pas nécessairement différentiable et F étant différentiable. Nous terminerons en envisageant le problème linéaire complémentaire (II) comme cas particulier du problème (III)

§ 1 : Cas non linéaire avec F n'étant pas nécessairement différentiable

Théorème III.1.1.

Le système (III) a une solution si :
la fonction $G(x) = F(x) - F(0)$ est. continue et régulière.
. positivement homogène de degré d.
c'est-à-dire $G(\lambda x) = \lambda^d G(x) \quad \forall \lambda \geq 0$

Démonstration :

Considérons la fonction $\hat{F} : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{F}_i(x, x_{n+1}) = F_i(x) - F_i(0) + x_{n+1}(F_i(0) + 1) & \forall i = 1, \dots, n \\ \hat{F}_{n+1}(x, x_{n+1}) = x_{n+1} \end{cases}$$

ou sous forme vectorielle $\hat{F}(x, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} G(x) + x_{n+1} F(0) + x_{n+1} e \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$

où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur sommation de $\mathbb{R}^n$

et l'ensemble $\hat{S} = \{(x, x_{n+1})$ tel que $x \geq 0, x_{n+1} \geq 0 ; \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Il est évident que $\hat{F}$ et $\hat{S}$ satisfont aux conditions du corollaire I.3.1.

donc $\begin{cases} \text{. il existe } (\bar{x}, \bar{x}_{n+1}) \text{ satisfaisant à } \bar{x} \geq 0, \bar{x}_{n+1} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i + \bar{x}_{n+1} = 1 \\ .\bar{x}_k > 0 \Longrightarrow \hat{F}_k(\bar{x}, \bar{x}_{n+1}) = \min_i \hat{F}_i(\bar{x}, \bar{x}_{n+1}) \overset{D}{=} t \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n, n+1\} \\ .\bar{x}_k = 0 \Rightarrow \hat{F}_k(\bar{x}, \bar{x}_{n+1}) \geq t \quad \text{pour } k \in \{1, \ldots, n, n+1\} \end{cases}$

Montrons maintenant que $\bar{x}_{n+1} > 0$

A cet effet, supposons au contraire que $\bar{x}_{n+1} = 0$. Dans ce cas,

$\hat{F}_{n+1}(\bar{x}, \bar{x}_{n+1}) = \bar{x}_{n+1} = 0 \geq t \overset{D}{=} \min_i \hat{F}_i(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$.

Nous pouvons poser $\hat{t} = -t \geq 0$

Nous avons alors qu'il existe $\bar{x} \geq 0$; $\bar{x} \neq 0$ et $\hat{t} \geq 0$, telque

$$G_i(\bar{x}) + \hat{t} = 0 \qquad \text{pour } i \in I_+(\bar{x})$$
$$G_i(\bar{x}) + \hat{t} \geq 0 \qquad \text{pour } i \in I_0(\bar{x})$$

ce qui contredit la régularité de $G(x)$

Comme nous venons de voir que $\bar{x}_{n+1} > 0$, on peut en déduire que $\bar{x}_{n+1} = t$

et on a également que $G_i(\bar{x}) + \bar{x}_{n+1}(F_i(0) + 1) = \bar{x}_{n+1}$ pour $i \in I_+(\bar{x})$

c'est-à-dire $G_i(\bar{x}) + \bar{x}_{n+1} F_i(0) = 0$

et $G_i(\bar{x}) + \bar{x}_{n+1}(F_i(0) + 1) \geq \bar{x}_{n+1}$ pour $i \in I_0(\bar{x})$

c'est-à-dire $G_i(\bar{x}) + \bar{x}_{n+1} F_i(0) \geq 0$

Soit $x^* = (\bar{x}_{n+1})^{-1/d} \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_{n+1})^{1/d} x^*$

Puisque G est positivement homogène, on a que

$$\bar{x}_{n+1}[G_i(x^*) + F_i(0)] = 0 \quad \text{pour } i \in I_+(x^*) = I_+(\bar{x})$$
$$\bar{x}_{n+1}(G_i(x^*) + F_i(0)) \geq 0 \quad \text{pour } i \in I_0(x^*) = I_0(\bar{x})$$

ou encore que $F_i(x^*) = 0$ pour $i \in I_+(x^*)$

$F_i(x^*) \geq 0$ pour $i \in I_0(x^*)$ car $\bar{x}_{n+1} > 0$

et (x^*, y^*) résout le problème (III) avec $y^* = F(x^*)$

Corollaire III.1.1.:

Le système (III) a une solution si :

la fonction $G(x) = F(x) - F(0)$ est continue et positivement homogène de degré d.

. dans une des classes suivantes (S.S.M.), (S.C.P.), (F.C.P.), (D.P.), (F.D.P.)

Démonstration :

Comme le théorème est vrai pour $G(x)$ régulière, il sera vrai pour $G(x)$ (S.S.M.) et a fortiori (S.C.P.), (F.C.P.) (D.P.), (F.D.P.)

(Annexe 6)

Théorème III.1.2.:

Le système (III) a une solution si :

. F est continue dans $\mathbb{R}^n_+$

. Il existe un sous ensemble compact non vide C dans $\mathbb{R}^n_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n_+ - C \quad \exists y \in C$ tel que $(x-y)^T F(x) > 0$

Démonstration :

Pour chaque $u \in \mathbb{R}^n_+$, soit $D_u = \{x$ tel que $x \in C, (u-x)^T F(x) \geq 0\}$

On a que D_u est fermé

Nous allons avoir que pour $u^1, \dots, u^m \in \mathbb{R}^n_+$, $\bigcap_{i=1}^{m} D_{u^i} \neq \phi$ où m fini

En effet, soit D la fermeture convexe de $C \cup \{u^1, \dots, u^m\}$

On a que D est un sous-ensemble convexe, compact et non vide de $\mathbb{R}^n_+$. Par le théorème I.3.1., nous avons, qu'il existe $\bar{x} \in D$ tel que

$(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in D$ (1) et en particulier

$(u^i - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

Supposons que $\bar{x} \notin C$; alors par hypothèse $\exists y \in C$ tel que $(y - \bar{x})^T F(\bar{x}) < 0$

ce qui contredit (1) et donc $\bar{x} \in C$ et $\bigcap_{i=1}^{m} D_{u^i} \neq \phi \quad \forall m$ fini

Maintenant, grâce à la propriété d'intersections finies d'ensembles compacts, on a : $\bigcap_{u \in \mathbb{R}^n_+} D_u \neq \emptyset$. Soit $x^* \in \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n_+} D_u$

$\Rightarrow \exists\, x^* \in C$ tel que $(x - x^*)^T F(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$ c'est-à-dire (IV) et (x^*, y^*) avec $y^* = F(x^*)$ résout le problème (III) car le problème complémentaire (III) est un cas particulier du problème variationnel (IV) (voir page 6)

Corollaire III.1.2. :

Le système (III) a une solution si :

$G(x) = F(x) - F(0)$ est continue et (F.C.P)

Démonstration :

Puisque G est (F.C.P) alors $\exists\, \alpha > 0$ tel que $x^T F(x) \geq x^T F(0) + \alpha \|x\|^2$ $\forall x \geq 0$

$$\text{Soit } C = \left\{ x \text{ tel que } x \in \mathbb{R}^n_+ ,\ |x| \leq \frac{|F(0)|}{\alpha} \right\}$$

$$= \left\{ x \text{ tel que } x \in \mathbb{R}^n_+ ,\ \alpha |x| \leq |F(0)| \right\}$$

C est un sous ensemble convexe, compact de $\mathbb{R}^n_+$ contenant l'origine.

$\forall x \in \mathbb{R}^n_+ - C$ on a $\alpha |x|^2 > |x| |F(0)|$

Grace à l'inégalité de Schwartz, on a

$$\alpha |x|^2 > |x| |F(0)| \geq - x^T F(0) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n_+ - C$$

c'est-à-dire $\alpha |x|^2 + x^T F(0) > 0$

De par la définition de (F.C.P) de $G(x)$ on a

$$x^T F(x) > 0 \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n_+ - C$$

Donc les conditions du théorème III.1.2. sont satisfaites avec $y = 0$

Théorème III. 1. 3. :

Le système (III) a une solution si

. F est continue sur $C = \{x \text{ tel que } x \in \mathbb{R}^n_+, |x| \leq R, R > 0\}$

. $x^T F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \delta C = \{x \text{ tel que } x \in \mathbb{R}^n_+, |x| = R, R > 0\}$

où δC est la frontière de C.

Démonstration:

Il résulte du théorème I. 3. 1. qu'il existe $\bar{x} \in C$ tel que

$$(x - \bar{x})^T F(\bar{x}) \geq 0 \qquad \forall x \in C \qquad (2)$$

Puisque C contient l'origine, on a : $\bar{x}^T F(\bar{x}) \leq 0 \quad (1)$

De plus, $\exists \alpha > 0 \quad : x = \alpha e_i \in C$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

d'où $\alpha e_i^T F(\bar{x}) \geq \bar{x}^T F(\bar{x})$ ou encore $F_i(\bar{x}) \geq \frac{1}{\alpha} [\bar{x}^T F(\bar{x})]$

Distinguons deux cas :

i) $\bar{x} \in \delta C \Rightarrow \bar{x}^T F(\bar{x}) \geq 0$ (par hypothèse)

et comme $\bar{x}^T F(\bar{x}) \leq 0$ [par (1)] alors on a $\bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$

et $(\bar{x}, \bar{y})$ résout le problème (III) avec $\bar{y} = F(\bar{x})$

ii) $\bar{x} \notin \delta C$; pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $\exists\, t > 0$ tel que

$$x = \bar{x} + t e_i \in C$$

$(2) \Rightarrow t e_i^T F(\bar{x}) \geq 0$ alors on a $F_i(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \bar{x}^T F(\bar{x}) \geq 0$ et $(1) \Rightarrow \bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$ et $(\bar{x}, \bar{y})$ résout le problème (III) avec $\bar{y} = F(\bar{x})$

§2 : Cas non linéaire avec F. différentiable.

Démontrons d'abord quelques lemmes préparatoires :

Lemme III.2.1. :

Soit M une matrice réelle $(n \times n)$

i) si M est (S.M.) alors $\exists\, \bar{x}$ tel que $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ $M\bar{x} \geq 0$

ii) si M est (S.S.M.) alors $\exists\, \bar{x}$ tel que $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ $M\bar{x} > 0$

Démonstration :

i) Si nous appliquons le corollaire I.3.1. en prenant $F : x \rightsquigarrow Mx$, nous savons qu'il $\exists\, \bar{x}$ tel que $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ et tel que

$$\bar{x}_k > 0 \Longrightarrow M_k\, \bar{x} = \min_i M_i\, \bar{x} = \mathcal{M}_0$$
$$\bar{x}_k = 0 \Longrightarrow M_k\, \bar{x} \geq \mathcal{M}_0$$

Maintenant par la définition de (S.M.), nous avons que $\forall \bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ $\exists\, k$ tel que $\bar{x}_k > 0$ et $M_k \bar{x} \geq 0$ c'est-à-dire que $\mathcal{M}_0$ est non-négatif.

Nous avons donc que pour les k. tels que $\bar{x}_k > 0$ $M_k \bar{x} \geq 0$
et pour les k tels que $\bar{x}_k = 0$ $M_k \bar{x} \geq 0$

Nous pouvons maintenant conclure qu'il $\exists\, \bar{x}$ tel que
$\bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ avec $M\bar{x} \geq 0$

ii) la démonstration est analogue pour la (S.S.M.)

Lemme III.2.2. :

Si M est une matrice (S.S.M.)
Alors $\exists\, \lambda > 0$ tel que $\forall x \geq 0$ avec $|x| = 1$, quelques-unes des composantes de Mx sont plus grandes que λ
(c'est-à-dire $\max_k M_k\, x > \lambda$)

Démonstration :

$$\text{Posons } \alpha(x) = \max_{k} \; M_k \, x$$

1°) La fonction $\alpha(x)$ est continue (Annexe 7)

2°) La fonction $\alpha(x)$, définie sur l'ensemble compact S avec $S = \{ x \text{ tel que } x \geq 0 \text{ et } |x| = 1 \}$, y atteint son minimum $\lambda = \min_{x \in S} \left(\max_{k} M_k \, x \right)$

Mais, par définition de matrices (S.S.M.), λ doit être positif. en effet M est (S.S.M) si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$ $\exists k$ tel que $x_k > 0$ et $M_k x > 0$ donc $\max_{k} M_k \, x$ est positif et λ l'est également.

Lemme III.2.3. :

Une matrice $M (n \times n)$ est (S.M.) si et seulement si

$$M + \mathcal{E} I \text{ est (S.S.M.)} \quad \forall \mathcal{E} > 0$$

où I est la matrice unité $(n \times n)$

Démonstration :

. Si M est (S.M.), il est évident que $M + \mathcal{E} I$ est (S.S.M.), $\forall \mathcal{E} > 0$

. Si $M + \mathcal{E} I$ est (S.S.M.) $\forall \mathcal{E} > 0$, il faut démontrer que M est (S.M.).

A cet effet, supposons que

M ne soit pas (S.M.). Alors $\exists \bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ tel que $M_k \bar{x} < 0$ $\forall k \in I_+(\bar{x})$

Posons $-\bar{\mathcal{E}} = \max_{k \in I_+(\bar{x})} \dfrac{M_k \bar{x}}{\bar{x}_k} < 0$; on peut donc conclure

qu'il $\exists \bar{x} \geq 0$ et $\bar{x} \neq 0$ tel que $M_k \bar{x} + \bar{x}_k \bar{\mathcal{E}} \leq 0$ $\forall k \in I_+(\bar{x})$

et que la matrice $M + \bar{\mathcal{E}} I$ avec $\bar{\mathcal{E}} > 0$ n'est pas (S.S.M.)

Soient $C = \{ x \text{ tel que } 0 \leq x \leq \alpha \}$ une région rectangulaire dans $\mathbb{R}^n_+$ et $G : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $G(0) = 0$ différentiable sur C et soit $J(x)$ la matrice jacobienne de G évaluée en $x \in C$.

Théorème III.2.1. :

Soient C et G définis comme ci-dessus,

Alors i) G est (S.S.M.) dans C si $J(x)$ est (S.S.M.) dans tout C

ii) G est (S.M.) dans C si $J(x)$ est (S.M.) dans tout C

Démonstration :

i) Montrons d'abord que $x \geq 0$; $G(x) \leq 0 \Rightarrow x = 0$

Le résultat est vrai pour $n = 1$. On va procéder par induction sur n.

Il faut remarquer que 0 est un point isolé de l'ensemble X où $X = \{ x \text{ tel que } x \in C,\ G(x) \leq 0 \}$

En effet, de par la différentiabilité de G, on a, $\forall x \in C$,

$$G_i(x) = \underbrace{G_i(0)}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i(0)}{\partial x_j} x_j + \theta(|x|) \quad \text{où } i = 1,\dots,n$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\theta(|x|)}{|x|} = 0$

ou encore $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{G(x)}{|x|} - J(0) \frac{x}{|x|} \right) = 0$

ou encore $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $-\varepsilon e < \frac{G(x)}{|x|} - J(0) \frac{x}{|x|} < \varepsilon e \quad \forall |x| < \delta$

où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur sommation de $\mathbb{R}^n$.

d'où $J(0) \frac{x}{|x|} < \frac{G(x)}{|x|} + \varepsilon e \qquad \forall |x| < \delta$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} \lambda > 0$ où λ est un scalaire satisfaisant aux propriétés du lemme III.2.2. pour la matrice $J(0)$

Si 0 n'est pas un point isolé de X, alors $\exists\, x \neq 0 \in X$ avec $|x| < \delta$,

$$\text{d'où } J(0)\,\frac{x}{|x|} < \frac{1}{2}\,\lambda\, e \quad \text{car } \frac{G(x)}{|x|} \leq 0\ ,$$

ce qui est en contradiction avec le lemme III.2.2.

L'ensemble $\hat{X} = X - \{0\}$ est fermé et donc compact.

Montrons maintenant que $\hat{X}$ est vide. Si $\hat{X}$ n'est pas vide, il doit contenir un point minimal $\hat{x}$ avec la propriété suivante :

si $x \in \hat{X}$ et $x \leq \hat{x}$ alors $x = \hat{x}$

1er cas : soit $\hat{x} > 0$. Puisque $J(\hat{x})$ est (S.S.M.), nous savons, par le lemme III.2.1., qu'il existe un vecteur u tel que $u < 0$, $J(\hat{x})\, u < 0$

Il existe donc un scalaire $\eta_0 > 0$ tel que $x(\eta) = \hat{x} + \eta u > 0$ $\forall\, 0 < \eta < \eta_0$

d'où $x(\eta) \in C$ $\quad \forall\, 0 < \eta < \eta_0$

Grâce à la différentiabilité de G, on a

$$G(x(\eta)) = G(\hat{x}) + \eta\, J(\hat{x})\, u + \theta(\eta\,|u|)$$

$$\text{ou encore } \frac{G(x(\eta)) - G(\hat{x})}{\eta\,|u|} - J(\hat{x})\,\frac{u}{|u|} = \frac{\theta(\eta\,|u|)}{\eta\,|u|}$$

$$\text{où } J(\hat{x})\,\frac{u}{|u|} < 0$$

donc $G(x(\hat{\eta})) < G(\hat{x}) \leq 0$ pour les $0 < \hat{\eta} < \eta_0$

d'où $x(\hat{\eta}) \in \hat{X}$ mais $x(\hat{\eta}) < \hat{x}$ car $\hat{\eta}\, u < 0$

ce qui contredit la minimalité de $\hat{x}$.

2e cas : certaines composantes de $\hat{x}$ sont égales à 0.

Sans nuire à la généralité, on peut choisir $\hat{x}_1 = 0$ par exemple

Soit $\tilde{G} : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la fonction définie par

$\tilde{G}_i(x_2, \dots, x_n) = G_i(0, x_2, \dots, x_n)$ où $i = 2, \dots, n$

et avec $\tilde{C} = \{(x_2, \dots, x_n)$ telque $0 \leq x_i \leq u_i$ où $i = 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^{n-1}_+$

la matrice jacobienne de $\tilde{G}$ est (S.S.M.) dans tout $\tilde{C}$

et $\tilde{G}_i(\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \leq 0$ où $i = 2, \dots, n$

Par l'hypothèse d'induction, $\hat{x}_i = 0$ avec $i = 2, \dots, n$

et donc $\hat{x} = 0$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du 2e cas.

Nous avons seulement démontré que si $J(x)$ est (S.S.M.) dans C alors $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$, $\exists k$ tel que $G_k(x) > 0$.

Pour pouvoir montrer que G est (S.S.M.) dans C, il faut montrer que il existe $k \in I_+(x)$ tel que $G_k(x) > 0$

Supposons qu'il existe $\bar{x} \in C$ tel que $\bar{x}_k = 0$ $\forall k \in K = \{k$ telque $G_k(\bar{x}) > 0\}$

Si $K = \{1, 2, \dots, n\}$, il n'y a rien à prouver.

Donc, supposons que K est un sous-ensemble propre de $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire que, par exemple, sans rien perdre de la généralité, $K = \{1, 2, \dots, m\}$; $m < n$

Soit $G^* : C^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ la fonction définie par

$G_i^*(x_{m+1}, \dots, x_n) = G_i(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$ où $i = m+1, \dots, n$

et avec $C^* = \{(x_{m+1}, \dots, x_n)$ tel que $0 \leq x_i \leq \alpha_i$ où $i = m+1, \dots, n\}$

La matrice jacobienne de G^* est (S.S.M.) dans tout C^*

Soit $x^* = (\bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) \neq 0 \in C^*$

Puisque $\bar{x}_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$, on a :

$G_i^*(x^*) = G_i(0, \dots, 0, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) = 0$ où $i = m+1, \dots, n$

$\exists x^* \neq 0 \in C^*$ tel que $G^*(x^*) = 0$, ce qui est en contradiction avec ce que nous avons démontré précédemment.

ii) Supposons $J(x)$ matrice (S.M.) dans tout C et $\exists x^\circ \in C$ tel que
$G_k(x^\circ) < 0 \qquad \forall k \in I_+(x^\circ)$

soient $-\delta = \max\limits_{k \in I_+(x^\circ)} \dfrac{G_k(x^\circ)}{x^\circ_k} < 0$

et $H : C \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $H(x) = G(x) + \delta x$
soit $J_H(x) = J_G(x) + \delta I$ la matrice jacobienne de H.
On sait, par le lemme III.2.3., que $J_H(x)$ est (S.S.M.) dans tout C
et que H est (S.S.M.) dans C par la première partie du théorème.
Mais $H_k(x^\circ) = G_k(x^\circ) + \delta x^\circ_k \geq G_k(x^\circ) - G_k(x^\circ) = 0$
pour $k \in I_+(x^\circ)$
ce qui contredit le fait que H est (S.S.M.)

Théorème III.2.2. :

Le système (III) a une solution si
. F est différentiable dans $\mathbb{R}^n_+$
. $G(x) = F(x) - F(0)$ est positivement homogène de degré d
. la matrice jacobienne $J_F(x)$ est (S.S.M.) dans $\mathbb{R}^n_+$

Démonstration :

C'est le corollaire III.1.1, rencontré dans le cas non différentiable, et qui tient compte du théorème précédent.

Théorème III.2.3. :

Le système (III) a une solution si
. F est différentiable dans $\mathbb{R}^n_+$
. sa matrice jacobienne est (F.C.P.) dans $\mathbb{R}^n_+$

Démonstration :

Pour x fixé, soit φ une fonction scalaire définie sur $[0,1]$
et donnée par $\varphi(t) = x^T F(tx)$
d'où $\varphi'(t) = x^T J_F(tx)\, x$

Puisque $J_F(x)$ est (F.C.P.) pour $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$, on a

$$x^T F(x) - x^T F(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt \geq \int_0^1 \alpha\,|x|^2 dt$$

d'où $x^T \left[F(x) - F(0) \right] \geq \alpha\,|x|^2$

c'est-à-dire $G(x) = F(x) - F(0)$ est (F.C.P.)

Et grâce au corollaire III.1.2, rencontré dans le cas non différentiable, on a la solution.

§3 : Cas linéaire

: Etant donné que le problème linéaire complémentaire (II) est un cas particulier du problème non linéaire complémentaire, le théorème suivant découle du théorème III.1.1

Théorème III.3.1.

Si la matrice A est régulière, alors le système (II) a une solution pour chaque vecteur b.

Démonstration : Le théorème III.1.1. disait que le système (III) a une solution si $G(x) = F(x) - F(0)$ est
. continue et régulière
. positivement homogène de degré d.

$$\left[\text{c'est-à-dire } G(\lambda x) = \lambda^d G(x) \quad \forall \lambda \geq 0 \right]$$

Posons, pour le cas linéaire, $F(x) = Ax + b$, d'où $F(0) = b$ et

$$G(x) = F(x) - F(0) = Ax$$

Cela nous permet de conclure que le système (II) a une solution puisque $G(x)$ est
. continue (évident)
. régulière (par l'hypothèse de régularité de la matrice A)
. positivement homogène de degré 1 (évident)

Chapitre IV :

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Alors que dans le chapitre III, nous donnions quelques théorèmes d'existence, nous allons ici nous intéresser à quelques théorèmes d'existence et d'unicité.

Nous envisagerons d'abord le problème non linéaire complémentaire en tenant compte de deux cas : F n'étant pas nécessairement différentiable et F étant différentiable, et nous terminerons ce chapitre en particularisant au problème linéaire complémentaire. Nous suivons donc la même disposition qu'au chapitre précédent.

§ 1. Cas non linéaire avec F non nécessairement différentiable.

Théorème IV.1.1.

Le système (III) a une solution unique si :

la fonction $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ est continue et fortement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$

Démonstration :

Puisque la fonction F est continue et fortement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$, on peut dire que la fonction $G(x) \overset{D}{=} F(x) - F(0)$ est continue et fortement copositive sur $\mathbb{R}^n_+$ (Annexe 8)

Nous pouvons alors conclure par le corollaire III.1.2. que le système (III) a une solution.

Supposons que cette solution ne soit pas unique, c'est-à-dire qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\bar{x} \neq \bar{y}$

$$\text{tels que} \quad \bar{x} \geq 0 \quad F(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{et } \bar{x}^T F(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{y} \geq 0 \quad F(\bar{y}) \geq 0 \quad \text{et } \bar{y}^T F(\bar{y}) = 0$$

Puisque F est fortement monotone, on a que F est strictement monotone.

d'où $0 < (\bar{x}-\bar{y})^T \left(F(\bar{x}) - F(\bar{y})\right) = \bar{x}^T F(\bar{x}) - \bar{x}^T F(\bar{y}) - \bar{y}^T F(\bar{x}) + \bar{y}^T F(\bar{y})$

$= -\left[\bar{x}^T F(\bar{y}) + \bar{y}^T F(\bar{x})\right] \leq 0$

une contradiction.

Donc la solution du système (III) est unique.

Remarque IV.1.1.

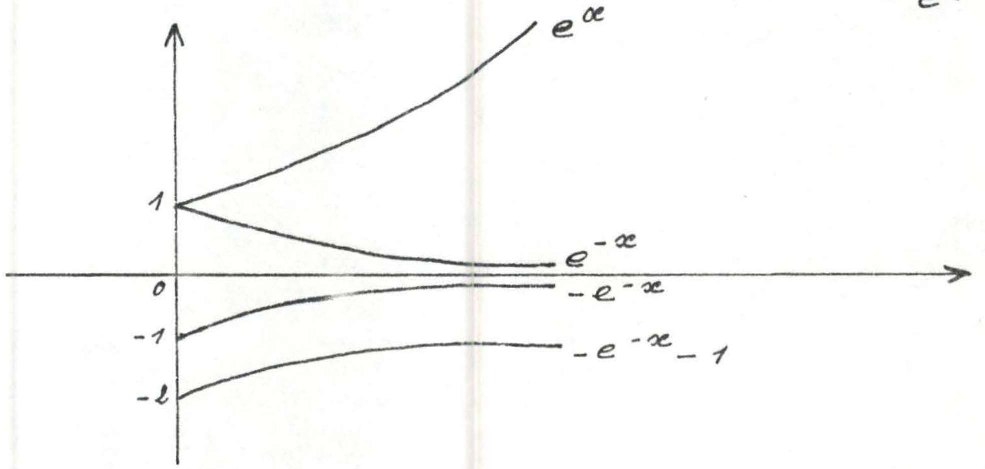
Si la fonction $F : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$, cela n'implique pas nécessairement l'existence d'une solution pour le système (III), mais si le système (III) possède une solution, alors cette solution est unique.

1°) si la solution existe, alors elle est unique (Voir démonstration ci-dessus)

2°) Si $F : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$, il n'existe pas nécessairement une solution pour le système (III)

En effet, soit $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -e^{-x} - 1 = -\frac{1}{e^x} - 1$



Il est évident que $F(x)$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ mais il n'existe pas de $x \geq 0$ tel que $F(x) \geq 0$.

§2 : Cas non linéaire avec F différentiable

Soit la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuement différentiable.
Nous allons établir des conditions suffisantes sur la matrice jacobienne $J_F(x)$ pour assurer différents types de monotonicité de F.

Théorème IV.2.1

Si $F : D \to \mathbb{R}^n$ continuement différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$
et si $J_F(x)$ la matrice jacobienne de F au point $x \in D$

Alors i) F est monotone sur D si $J_F(x)$ est (S.D.P.) sur D.

ii) F est strictement monotone sur D si $J_F(x)$ est (D.P.) sur D.

iii) F est fortement monotone sur D si $J_F(x)$ est (F.D.P.) sur D.

Démonstration :

Soient x et y deux vecteurs arbitraires dans D.

Soit $\varphi(\lambda) = (x-y)^T\left(F(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$

Comme D est convexe $\lambda x + (1-\lambda) y \in D \qquad \forall 0 \leq \lambda \leq 1, \forall x, y \in D$

Nous avons $\varphi(1) - \varphi(0) = (x-y)^T\left(F(x) - F(y)\right)$

et de par la différentiabilité de F : $\varphi'(\lambda) = (x-y)^T J_F(x^1)(x-y)$

où $x^1 = \lambda x + (1-\lambda) y \in D$

En appliquant le théorème des accroissements finis à φ, il vient $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda^*)$ avec $0 < \lambda^* < 1$

ou encore $(x-y)^T\left[F(x) - F(y)\right] = (x-y)^T J_F(x^{1*})(x-y)$

où $x^{1*} = \lambda^* x + (1-\lambda^*) y$

Grâce à cette dernière égalité, les thèses du théorème sont immédiates.

Théorème IV.2.2.

Le système (III) a une solution unique si :

. $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continuement différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et $D \supset \mathbb{R}^n_+$

. toutes les valeurs propres de la partie symétrique de sa matrice jacobienne $J_F(x)$ sont bornées inférieurement par un scalaire positif $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$

Démonstration :

Soit $\alpha(x)$ la plus petite valeur propre (qui est nécessai-rement réelle) de la partie symétrique de $J_F(x)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}[J_F(x) + J_F^T(x)]$

Puisque toutes les valeurs propres de la partie symétrique de $J_F(x)$ sont bornées inférieurement par un scalaire positif (soit $k > 0$) $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$

on a que $\alpha(x) \geq k > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$

Grâce à la remarque II.1.1. on a que $J_F(x)$ est (F.D.P.) sur $\mathbb{R}^n_+$ et de par le théorème IV. 2. 1. que F est fortement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$.

Nous nous trouvons maintenant sous les hypothèses du théorème IV. 1. 1. et nous pouvons conclure que le système (III) a une solution unique.

§ 3 : Cas linéaire

Comme le problème linéaire complémentaire est un cas particulier du problème non linéaire complémentaire, il suit immédiatement du théorème IV. 2. 1. et du théorème IV. 1.1.

Théorème IV . 3. 1.

Etant donné que $F(x) = Ax + b$, où A est une matrice $(n \times n)$ de réels constants et b un vecteur constant de $\mathbb{R}^n$

i) F est monotone si et seulement si A est (S.D.P.)

ii) F est fortement monotone si et seulement si A est (D.P.)

Rappelons que dans le cas linéaire, fortement monotone $\Longleftrightarrow$ strictement monotone

Théorème IV .3. 2.

Le système (II) a une solution unique si : A est (D.P.) pour chaque vecteur $b \in \mathbb{R}^n$

(immédiat)

Chapitre V :

Fonctions fortement convexes.

Ce chapitre est un chapitre de transition, il nous permettra d'établir quelques résultats qui nous serviront dans le chapitre VI, c'est-à-dire dans l'application des théorèmes d'existence et d'unicité du problème complémentaire à deux problèmes spécifiques. Après avoir donné quelques définitions sur la monotonicité et la convexité des fonctions, nous caractériserons les fonctions fortement convexes en termes de leur gradient et hessien; et pour terminer nous introduirons les fonctions scalaires de deux vecteurs-arguments.

§ 1 : Quelques définitions

Soit une fonction scalaire $\theta : C \longrightarrow \mathbb{R}$ où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe

. elle est dite convexe sur C, si $\forall x, y \in C$ et $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\, \theta(x) + (1-\lambda)\, \theta(y)$$

. elle est dite strictement convexe sur C, si $\forall x, y \in C$ et $\forall\, 0 < \lambda < 1$, on a

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda\, \theta(x) + (1-\lambda)\, \theta(y)$$

Notons que les propriétés de convexité d'une fonction scalaire différentiable peuvent être caractérisées par certaines propriétés de leur gradient ou de leur matrice hessienne.

En particulier, les deux théorèmes suivants sont bien connus.

Théorème V. 1. 1. :

Soit $\theta : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $C \subset \mathbb{R}^n$

Alors i) θ est convexe sur C, si et seulement si, son gradient $\nabla\theta$ est monotone sur C

ii) θ est strictement convexe sur C, si et seulement si, son gradient $\nabla\theta$ est strictement monotone sur C

Théorème V. 1.2. :

Soit $\theta : C \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $C \subset \mathbb{R}^n$

Alors i) θ est convexe sur C, si et seulement si, sa matrice Hessienne $H(x)$ est semi-définie positive sur C

ii) θ est strictement convexe sur C, si et seulement si, sa matrice Hessienne $H(x)$ est définie positive sur C

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont analogues aux démonstrations que nous rencontrerons dans la suite.

Considérons maintenant une classe de fonctions contenant la classe des fonctions strictement convexes : les fonctions fortement convexes

Soit toujours une fonction scalaire $\theta : C \to \mathbb{R}$ où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe ; cette fonction est dite fortement convexe sur C si

$\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in C$ et $\forall\, 0 < \lambda < 1$, on a

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \theta(x) + (1-\lambda)\, \theta(y) - \alpha \lambda (1-\lambda) |x-y|^2$$

§ 2 : Théorèmes caractérisant les fonctions fortement convexes en termes de leur gradient et Hessien.

Théorème V. 2.1. :

Soit $\theta : C \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $C \subset \mathbb{R}^n$

Alors, θ est fortement convexe sur C, si et seulement si,

$\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in C$, on a

$$\theta(x) - \theta(y) \geq (x-y)^T \nabla \theta(y) + \alpha |x-y|^2$$

avec $\nabla \theta(y) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial y_n}\right)^T$

Démonstration :

. Si θ est fortement convexe sur C, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in C$ et $\forall\, 0 < \lambda < 1$, on a :

$$\theta(x)-\theta(y) \geq \frac{1}{\lambda}\left[\theta(y+\lambda(x-y))-\theta(y)\right]+\alpha(1-\lambda)|x-y|^2 \quad (*)$$

mais par la différentiabilité de θ sur C, on a que :

$$\theta(y+\lambda(x-y))-\theta(y)=\lambda(x-y)^T\nabla\theta(y)+\beta(y,\lambda(x-y))\lambda|x-y|$$

$$\text{avec } \lim_{\lambda\to 0}\beta(y,\lambda(x-y))=0$$

d'où en introduisant cette dernière égalité dans $(*)$, on a :

$$\theta(x)-\theta(y)\geq(x-y)^T\nabla\theta(y)+\alpha(1-\lambda)|x-y|^2+\beta(y,\lambda(x-y))|x-y|$$

Prenons la limite des deux membres pour $\lambda\to 0$, on a donc bien

$$\theta(x)-\theta(y)\geq(x-y)^T\nabla\theta(y)+\alpha|x-y|^2$$

. si $\exists\alpha>0$ telque $\forall x,y\in C$ on a $\theta(x)-\theta(y)\geq(x-y)^T\nabla\theta(y)+\alpha|x-y|^2$ alors on a que $\forall x,y\in C$ et $\forall\, 0<\lambda<1$

$$\theta(x)-\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq(1-\lambda)(x-y)^T\nabla\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)+\alpha(1-\lambda)^2|x-y|^2$$

$$\theta(y)-\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda(x-y)^T\nabla\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)+\alpha\lambda^2|x-y|^2$$

nous avons remplacé successivement x par x et y par $\lambda x+(1-\lambda)y$ dans l'hypothèse et ensuite x par y tandis que y était remplacé par $\lambda x+(1-\lambda)y$;
ces remplacements étaient permis du fait que C est convexe et que l'hypothèse est valable $\forall x,y\in C$.

Maintenant en multipliant la première inégalité par λ, et la deuxième inégalité par $(1-\lambda)$, on a :

$$\lambda\theta(x) - \lambda\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda(1-\lambda)(x-y)^T \nabla\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + \alpha\lambda(1-\lambda)^2|x-y|^2$$

$$\theta(y) - \lambda\theta(y) - \theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + \lambda\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq$$

$$(1-\lambda)\,\lambda(x-y)^T \nabla\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + \alpha(1-\lambda)\,\lambda^2\,|x-y|^2$$

Additionnons les deux inégalités membre à membre, nous aurons :

$$\lambda\theta(x) - \lambda\theta(y) + \theta(y) - \theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \alpha\,\lambda(1-\lambda)\,|x-y|^2 \underbrace{[(1-\lambda)+\lambda]}_{=1}$$

ou encore

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\theta(x) + (1-\lambda)\,\theta(y) - \alpha\,\lambda(1-\lambda)\,|x-y|^2$$

qui établit la convexité forte de θ.

Théorème V.2.2. :

Soit $\theta : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $C \subset \mathbb{R}^n$

Alors, θ est fortement convexe sur C, si et seulement si, son gradient $\nabla\theta$ est fortement monotone sur C.

Démonstration :

.. Si θ est fortement convexe sur C, alors, grâce au théorème précédent, on sait que : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in C$ on a:

$$\theta(x) - \theta(y) \geq (x-y)^T\,\nabla\theta(y) + \alpha\,|x-y|^2$$

$$\theta(y) - \theta(x) \geq (y-x)^T\,\nabla\theta(x) + \alpha\,|x-y|^2$$

En additionnant ces deux inégalités, on a:

$$0 \geq (x-y)^T(\nabla\theta(y) - \nabla\theta(x)) + 2\alpha\,|x-y|^2$$

ou encore $(x-y)^T(\nabla\theta(x) - \nabla\theta(y)) \geq 2\alpha\,|x-y|^2$

qui établit la monotonicité forte de $\nabla\theta$.

• Si $\nabla\theta$ est fortement monotone sur C, alors, $\exists k > 0$ tel que, $\forall x, y \in C$ on a $(x-y)^T\left(\nabla\theta(x) - \nabla\theta(y)\right) \geq k\,|x-y|^2$ $\quad (*)$

Définissons la fonction scalaire $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\varphi(\lambda) = \theta(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

on a $\varphi(1) - \varphi(0) = \theta(x) - \theta(y)$

et de par la différentiabilité de θ, on a :

$$\varphi'(\lambda) = (x-y)^T\,\nabla\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) \qquad (**)$$

Mais de par la monotonicité forte de $\nabla\theta$, on a :

$$\left(\lambda x + (1-\lambda)y - y\right)^T\left[\nabla\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) - \nabla\theta(y)\right] \geq k\,\lambda^2\,|x-y|^2$$

on a remplacé x par $\lambda x + (1-\lambda)y$ dans l'hypothèse $(*)$

ou encore $(x-y)^T\left[\nabla\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) - \nabla\theta(y)\right] \geq k\,\lambda\,|x-y|^2 \quad \forall\, 0 < \lambda \leq 1$

on a donc en tenant compte de $(**)$

$$\varphi'(\lambda) \geq (x-y)^T\,\nabla\theta(y) + k\,\lambda\,|x-y|^2$$

et, de là,

$$\int_0^1 \varphi'(\lambda)\,d\lambda \geq (x-y)^T\,\nabla\theta(y)\int_0^1 d\lambda + k\,|x-y|^2\int_0^1 \lambda\,d\lambda,$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq (x-y)^T\,\nabla\theta(y) + \frac{1}{2}\,k\,|x-y|^2$$

comme $\varphi(1) - \varphi(0) = \theta(x) - \theta(y)$

on a $\theta(x) - \theta(y) \geq (x-y)^T\,\nabla\theta(y) + \frac{1}{2}\,k\,|x-y|^2$

et du théorème précédent, on déduit que θ est fortement convexe sur C.

Théorème V.2.3. :

Soit $\theta : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur l'ensemble convexe ouvert $C \subset \mathbb{R}^n$

Alors, θ est fortement convexe sur C, si et seulement si, sa matrice hessienne $H(x)$ est fortement définie positive sur C

Démonstration :

• Supposons que θ est fortement convexe sur C,
Soient $\bar{x} \in C$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$
Puisque C est ouvert et convexe, $\exists \mu_0 > 0$ tel que $\bar{x} + \mu \bar{y} \in C$
$\forall\, 0 < \mu < \mu_0$

En raison de la bidifférentiabilité de θ sur C, on a:

$$\theta(\bar{x} + \mu\bar{y}) - \theta(\bar{x}) = \mu \bar{y}^T \nabla\theta(\bar{x}) + \frac{1}{2}\mu^2 \bar{y}^T H(\bar{x})\bar{y} + \mu^2 \beta(\bar{x}, \mu\bar{y})|\bar{y}|^2$$

$$\text{où } \lim_{\mu \to 0} \beta(\bar{x}, \mu\bar{y}) = 0$$

De plus, par la convexité forte de θ, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\theta(\bar{x} + \mu\bar{y}) - \theta(\bar{x}) \geq \mu \bar{y}^T \nabla\theta(\bar{x}) + \alpha\mu^2 |\bar{y}|^2$$

on a donc $\frac{1}{2}\bar{y}^T H(\bar{x})\bar{y} + \beta(\bar{x}, \mu\bar{y})|\bar{y}|^2 \geq \alpha|\bar{y}|^2 \quad \forall\, 0 < \mu < \mu_0$

En passant à la limite dans les deux membres quand $\mu \to 0$,
on obtient $\quad \bar{y}^T H(\bar{x})\bar{y} \geq 2\alpha|\bar{y}|^2$
ce qui prouve que $H(\bar{x})$ est fortement définie positive sur C

• Supposons que $H(x)$ est fortement définie positive sur C,
c'est-à-dire qu'il existe
$\delta > 0$ tel que $\forall \bar{x} \in C$ et $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, on a $\bar{y}^T H(\bar{x})\bar{y} \geq \delta|\bar{y}|^2 \quad (*)$
Soient x, y deux points arbitraires dans C
Il résulte du théorème de Taylor (du second ordre) que

$$\theta(x) - \theta(y) = (x-y)^T \nabla\theta(y) + \frac{1}{2}(x-y)^T H(x^*)(x-y)$$

$$\text{où } x^* = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

En prenant $\bar{y} = x - y$ et $x^* = \bar{x}$ dans $(*)$, il vient :

$$\theta(x) - \theta(y) \geq (x-y)^T \nabla\theta(y) + \frac{1}{2}\delta|x-y|^2$$

La convexité forte de θ sur C résulte alors du théorème V. 2.1.

§3 : Fonctions scalaires de deux vecteurs arguments $K(x,y)$

Soit $K(x,y)$ une fonction scalaire définie sur $C \times D$
où $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ et C et D sont convexes

Une telle fonction est dite fortement convexe - fortement concave si elle est fortement convexe sur C pour tout y fixé dans D et si elle est fortement concave sur D pour tout x fixé dans C.

Spécifions qu'une fonction scalaire θ définie sur un ensemble convexe est dite fortement concave si $-\theta$ est fortement convexe.

D'autres combinaisons de convexité - concavité sont définies similairement.

Les trois théorèmes qui vont suivre sont des généralisations immédiates des théorèmes V.1.1., V.1.2., V.2.1., V.2.2., V.2.3.

Théorème V.3.1. :

Soit $K : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $C \times D$, où C et D sont des ensembles convexes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Alors i) K est convexe - concave sur $C \times D$, si et seulement si,

$\forall x_1, x_2 \in C$ et $\forall y_1, y_2 \in D$, on a

$$K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2) \geq (x_1 - x_2)^T \nabla_x K(x_2, y_2) + (y_1 - y_2)^T \nabla_y K(x_1, y_1)$$

ii) K est strictement convexe - strictement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $\forall x_1, x_2 \in C$ et $\forall y_1, y_2 \in D$, on a

$$K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2) > (x_1 - x_2)^T \nabla_x K(x_2, y_2) + (y_1 - y_2)^T \nabla_y K(x_1, y_1)$$

iii) K est fortement convexe - fortement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in C$ et $\forall y_1, y_2 \in D$,

on a $K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2) \geq (x_1 - x_2)^T \nabla_x K(x_2, y_2) + (y_1 - y_2)^T \nabla_y K(x_1, y_1)$
$+ \alpha_1 |x_1 - x_2|^2 + \alpha_2 |y_1 - y_2|^2$

Théorème V.3.2. :

Soit $K : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $C \times D$, où C et D sont des ensembles convexes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.
Soient $G = C \times D \subset \mathbb{R}^N$ où $N = n + m$.

$z = (x, y) \in \mathbb{R}^N$ et $f(z) = [f_1(z), -f_2(z)] \in \mathbb{R}^N$

$$\text{où } f_1(z) = \nabla_x K(x,y) \text{ et } f_2(z) = \nabla_y K(x,y)$$

Alors, i) K est convexe-concave sur $C \times D$, si et seulement si, $f(z)$ est monotone sur G.

ii) K est strictement convexe - strictement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $f(z)$ est strictement monotone sur G.

iii) K est fortement convexe - fortement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $f(z)$ est fortement monotone sur G.

Théorème V.3.3. :

Soit $K : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur $C \times D$, où C et D sont des ensembles convexes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Alors, i) K est convexe-concave sur $C \times D$, si et seulement si, $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ sont semi-définies positives sur $C \times D$.

ii) K est strictement convexe - strictement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ sont définies positives sur $C \times D$.

iii) K est fortement convexe - fortement concave sur $C \times D$, si et seulement si, $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ sont fortement définies positives sur $C \times D$.

Précisons maintenant quelques notations emploiées :

Le symbole $\nabla_x K(x,y)$ dénote le gradient de K par rapport à x, c'est-à-dire que $\nabla_x K(x,y) = \left(\frac{\partial K}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial x_n}\right)^T$

Similairement $\nabla_y K(x,y)$ dénote le gradient de K par rapport à y

Quant au symbole $\nabla_{xx} K(x,y)$, il dénote la matrice $(n \times n)$ des dérivées secondes partielles par rapport à x_i, x_j ; c'est-à-dire :

$$\nabla_{x.x} K(x,y) = \left[\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x_i \, \partial x_j}\right] \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$\nabla_{xy} K(x,y)$, $\nabla_{yx} K(x,y)$ et $\nabla_{y.y} K(x,y)$ sont définies de façon analogue.

La matrice hessienne $H(x,y)$ de $K(x,y)$ est donnée par

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx} K(x,y) & \nabla_{xy} K(x,y) \\ \nabla_{xy} K(x,y) & \nabla_{yy} K(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \nabla_{xy} K(x,y) = \left[\nabla_{yx} K(x,y)\right]^T.$$

Chapitre VI :

Applications des résultats précédents à deux problèmes spécifiques

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les théorèmes d'existence et d'unicité vus précédemment à deux problèmes spécifiques : le programme non linéaire dual symétrique de Dantzig, Eisenberg et Cottle et le problème de point de selle d'une fonction scalaire différentiable sur un ensemble produit non borné $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

§ 1 : Programme non linéaire dual symétrique

Dantzig, Eisenberg et Cottle énonce le programme non linéaire dual symétrique comme suit : [G]

Soit le problème primal : minimiser $F(x,y) = K(x,y) - y^T \nabla_y K(x,y)$

sous contraintes $\nabla_y K(x,y) \leq 0$

$(x,y) \geq 0$

et soit le problème dual : maximiser $G(x,y) = K(x,y) - x^T \nabla_x K(x,y)$

sous contraintes $\nabla_x K(x,y) \geq 0$

$(x,y) \geq 0$

où $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire continuement différentiable

Cottle énonce le théorème de dualité faible et le théorème de dualité comme suit : [H]

Théorème VI . 1.1. :

(Théorème de dualité faible)

Soit $K : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe - concave et différentiable.

Alors $\displaystyle\sup_{D} G(x,y) \leq \inf_{P} F(x,y)$

où P et D sont les ensembles de contraintes, respectivement, du problème primal et du problème dual, c'est-à-dire,

$$P = \{(x,y) \text{ telque } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, (x,y) \geq 0, \nabla_y K(x,y) \leq 0\}$$

$$D = \{(x,y) \text{ telque } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, (x,y) \geq 0, \nabla_x K(x,y) \geq 0\}$$

<u>Théorème VI.1.2.:</u>

(Théorème de dualité)

Soit $K : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continuement différentiable

Si $(\bar{x},\bar{y})$ est une solution optimale du problème primal

et si $-\nabla_{yy} K(\bar{x},\bar{y})$ est définie positive,

alors $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ et $F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y})$

Si, de plus, K est convexe-concave, alors $(\bar{x},\bar{y})$ résout le problème dual

De la même façon,

si $(\hat{x},\hat{y})$ est une solution optimale du problème dual

et si $\nabla_{x.x} K(\hat{x},\hat{y})$ est définie positive,

alors $(\hat{x},\hat{y}) \in P$ et $G(\hat{x},\hat{y}) = F(\hat{x},\hat{y})$

Si, de plus, K est convexe-concave, alors $(\hat{x},\hat{y})$ résout le problème primal.

• Supposons, maintenant, que K est convexe-concave; il résulte du théorème de dualité faible que chaque $(\bar{x},\bar{y}) \in P \cap D$ est une solution optimale du problème primal, et du problème dual, si $F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y})$.

Il est donc naturel de tenter de formuler un programme où les solutions optimales sont des points situés dans $P \cap D$, et qui donnent des valeurs égales à F et G.

Cottle appelle ce programme, un "programme composé":

En posant $z = (x,y) \in \mathbb{R}^N$ où $N = n + m$

$$f(z) = [\nabla_x K(x,y), -\nabla_y K(x,y)]$$

On peut écrire : $P \cap D = \{ z \text{ tel que } z \in \mathbb{R}^N, z \geq 0, f(z) \geq 0 \}$

$$\text{et } F(x,y) - G(x,y) = x^T \nabla_x K(x,y) - y^T \nabla_y K(x,y)$$
$$= z^T f(z)$$

Le programme composé s'écrit sous la forme suivante :
Trouver $z \in \mathbb{R}^N$ tel que $z \geq 0$, $f(z) \geq 0$, $z^T f(z) = 0$

On constate aisément que si K est convexe-concave, alors chaque $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ résolvant le programme composé, résout aussi le problème primal et le problème dual.
Inversément, si il existe un $(\bar{x}, \bar{y})$ qui résout le problème primal et le problème dual et qui donne une valeur égale à F et G, alors $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ résout le programme composé.
Cottle a ensuite établi le théorème d'existence pour les programmes composés : [H]

Théorème VI. 1.3. :

Supposons que la fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie ci-dessus, satisfasse aux conditions suivantes :

i) f est continuement différentiable dans $\mathbb{R}^N$.

ii) il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que la valeur de chaque mineur principal de la matrice jacobienne $J_f(z)$ de f est situé entre δ et δ^{-1} $\quad \forall z \in \mathbb{R}^N$.

iii) Toute solution $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_N, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N)$ du système $w = f(z)$ de N équations à $2N$ inconnues, a au plus, N zéros.

Alors, il existe $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\bar{z} \geq 0$, $f(\bar{z}) \geq 0$ et $\bar{z}^T f(\bar{z}) = 0$

Cottle appelle la condition ii), la condition de la matrice jacobienne bornée positivement

iii), la condition de non-dégénérescence.

En termes de la fonction K, les conditions deviennent :

i) K est deux fois continuement différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

ii) chaque mineur principal de $Jf(z) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx} K(x,y) & \nabla_{xy} K(x,y) \\ -\nabla_{yx} K(x,y) & -\nabla_{yy} K(x,y) \end{pmatrix}$

est situé entre δ et δ^{-1} (avec $\delta > 0$) $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

iii) le système $\begin{cases} u = \nabla_x K(x,y) ; u \in \mathbb{R}^n \\ v = -\nabla_y K(x,y) ; v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ doit-être non dégénéré.

Appliquons maintenant les résultats du chapitre IV au programme composé et au programme primal-dual.

<u>Théorème VI .1.4. :</u>

Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuement différentiable.

Si K est fortement convexe - fortement concave sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$, il existe une solution unique $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui résout à la fois le primal et le dual. De plus, $F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y})$

<u>Démonstration :</u>

D'après le théorème V.3.2., on sait que :

$f(z) = (\nabla_x K(x,y), -\nabla_y K(x,y))$ est fortement monotone sur $\mathbb{R}^N_+$ (où $N = n+m$), et grâce aux hypothèses de ce théorème, on a que f est continue.

On peut donc conclure, par le théorème IV.1.1., qu'il existe un $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ unique, tel que $\bar{z} \geq 0$, $f(\bar{z}) \geq 0$ et $\bar{z}^T f(\bar{z}) = 0$

Puisque une fonction fortement convexe - fortement concave est convexe-concave, il résulte de ce qui précède, qu'il existe un $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ unique résolvant le problème primal et le problème dual et tel que $F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y})$.

Dans le cas, où $K(x,y)$ est deux fois différentiable, on a le corollaire suivant :

Corollaire VI. 1. 4.

Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable

Si $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ sont fortement définies positives sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ (ou de façon équivalente, si leurs valeurs propres, nécessairement réelles, sont bornées inférieurement par une constante positive), il existe une solution unique $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ résolvant à la fois le problème primal et le problème dual.

De plus, $F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y})$

Démonstration :

Il résulte du théorème V.3.3., que K est fortement convexe-fortement concave sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$. On est donc dans les hypothèses du théorème précédent.

Nous allons, pour terminer ce paragraphe, comparer le théorème VI.1.4. et le corollaire VI.1.4., ainsi que les théorèmes d'existence et d'unicité établis au chapitre IV avec les résultats de Cottle pour le programme composé (c'est-à-dire le théorème VI. 1. 3.)

- La différence essentielle est que le théorème VI.1.4. établit l'existence et l'unicité d'une solution, tandis que le théorème de Cottle n'établit que l'existence de la solution.
- Le théorème IV. 1.1. établit l'existence et l'unicité d'une solution sans avoir recours au fait que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit différentiable. Cottle demande que cette fonction soit continuement différentiable.
- Dans le théorème IV.2.2., il était exigé que les valeurs propres de la partie symétrique de la matrice jacobienne soient

bornées inférieurement par un scalaire positif. Cottle exige que les mineurs principaux de la matrice jacobienne soient bornés inférieurement par un scalaire positif, mais aussi qu'ils soient bornés supérieurement.

- Il faut noter que la condition de la matrice jacobienne bornée positivement et la condition de non-dégénérescence sont essentielles dans la preuve de la méthode de Cottle.
- Le corollaire VI.1.4. nécessite que les valeurs propres des matrices symétriques $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ soient bornées inférieurement sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ par une constante positive, tandis qu'en plus de la condition de dégénérescence, le théorème de Cottle exige que tous les mineurs principaux

$$\text{de} \begin{pmatrix} \nabla_{xx} K(x,y) & \nabla_{xy} K(x,y) \\ -\nabla_{yx} K(x,y) & -\nabla_{yy} K(x,y) \end{pmatrix}$$

soient bornés inférieurement et supérieurement par des constantes positives sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

§2 : Points de selle non-négatifs

Soit $K : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ et $D \subset \mathbb{R}^m$

On dit que $(\bar{x},\bar{y}) \in C\times D$ est <u>un point de selle</u> de K sur $C\times D$, si

$$K(\bar{x},y) \leq K(\bar{x},\bar{y}) \leq K(x,\bar{y}), \quad \forall x \in C \text{ et } \forall y \in D.$$

En particulier, si C et D sont les orthants non-négatifs $\mathbb{R}^n_+$ et $\mathbb{R}^m_+$, un point de selle de la fonction $K : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé <u>point de selle non-négatif</u> de K.

Théorème VI 2.1. :

Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuement différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et fortement convexe-fortement concave sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$

Alors, K possède un point de selle non-négatif unique.

Démonstration : D'après le théorème V.3.2., on sait que :

$$f(z) = \left(\nabla_x K(x,y), - \nabla_y K(x,y)\right) \text{ avec } z = (x,y)$$

est fortement monotone sur $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ où $N = n+m$

Le théorème IV.1.1. assure l'existence d'un $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ unique

tel que $\bar{z} \geq 0 \quad f(\bar{z}) \geq 0 \quad \bar{z}^T f(\bar{z}) = 0$

ou, d'une façon équivalente $\bar{x} \geq 0$, $\bar{y} \geq 0$ $\nabla_x K(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$, $\nabla_y K(\bar{x},\bar{y}) \leq 0$

$$\bar{x}^T \nabla_x K(\bar{x},\bar{y}) = 0 \; ; \; \bar{y}^T \nabla_y K(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

On obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes du théorème de Kuhn-Tucker pour que $(\bar{x},\bar{y})$ soit un point de selle quand K est convexe-concave sur $C \times D$.

Une fonction fortement convexe-fortement concave étant convexe-concave, $(\bar{x},\bar{y})$ est donc un point de selle non-négatif unique de K sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$.

Corollaire VI.2.1. :

Soit $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable

Si $\nabla_{xx} K(x,y)$ et $-\nabla_{yy} K(x,y)$ sont fortement définis positifs sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ (ou, d'une façon équivalente, si leurs valeurs propres, nécessairement réelles, sont bornées inférieurement par une constante positive sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$)

Alors K a un point de selle unique sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$.

Démonstration :

Il résulte du théorème V.3.3., que K est fortement convexe-fortement concave.

On est donc dans les hypothèses du théorème VI.2.1.

Annexes relatives au chapitre I.

Annexe 1 :

Soit $f(x) = p^T x + x^T C x$ où C est une matrice symétrique

Théorème : La fonction f est convexe dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si C est une matrice semi-définie positive, c'est-à-dire $x^T C x \geq 0 \quad \forall x$

Démonstration :

1°) f est une fonction convexe si $\forall \alpha \in [0,1] \quad \forall x, y$

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

c'est-à-dire :

$$p^T(\alpha x + (1-\alpha)y) + (\alpha x + (1-\alpha) y)^T C (\alpha x + (1-\alpha) y)$$
$$\leq \alpha p^T x + \alpha x^T C x + (1-\alpha) p^T y + (1-\alpha) y^T C y$$

$$\alpha p^T x + (1-\alpha) p^T y + \alpha^2 x^T C x + (1-\alpha)^2 y^T C y + 2\alpha(1-\alpha) x^T C y$$
$$\leq \alpha p^T x + \alpha x^T C x + (1-\alpha) p^T y + (1-\alpha) y^T C y$$

$$\alpha x^T C x (1-\alpha) + (1-\alpha) y^T C y (1-(1-\alpha)) - 2\alpha(1-\alpha) x^T C y \geq 0$$

Si α est égal à 0 ou à 1, alors l'inégalité est triviale, sinon

On peut diviser par $\alpha(1-\alpha)$ sans changer l'inégalité puisque $\alpha(1-\alpha) \geq 0$

$$x^T C x + y^T C y - 2 x^T C y \geq 0 \qquad \forall x, y$$
$$x^T C x - x^T C y + y^T C y - x^T C y \geq 0 \qquad \forall x, y$$
$$x^T C (x - y) + (y^T - x^T) C y \geq 0 \qquad \forall x, y$$
$$x^T C (x - y) - (x - y)^T C y \geq 0 \qquad \forall x, y$$

$(x-y)^T C (x-y) \geq 0$. c'est-à-dire si C est semi-définie positive

2°) Inversement, si C est semi-définie positive alors $x^T C x \geq 0 \;\; \forall x$ et en particulier $(x-y)^T C (x-y) \geq 0 \quad \forall x, y$

Il en résulte que la fonction f est convexe.

Annexe 2 :

$$\forall x \in C, \mathcal{I}(x) = \{ u \text{ tel que } u \in C, u^T F(x) = \min_{v \in C} v^T F(x) \}$$

est un sous-ensemble convexe non vide de C (où C est un sous-ensemble compact, convexe, non vide de $\mathbb{R}^n$)

En effet :

. $\mathcal{I}(x)$ est non vide : cela résulte de ce que C est non vide

. $\mathcal{I}(x)$ est convexe, c'est-à-dire $\forall \lambda \in [0,1]$ $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{I}(x)$

$$\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in \mathcal{I}(x)$$

En effet : on a $u_1 \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow u_1 \in C, u^T_1 F(x) = \min_{v \in C} v^T F(x)$

$$u_2 \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow u_2 \in C, u^T{}_2 F(x) = \min_{v \in C} v^T F(x)$$

et comme C est convexe, on a $\forall \lambda \in [0,1]$

$\forall u_1, u_2 \in C$ (car $\in \mathcal{I}(x)$)

$$\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in C \qquad (1)$$

$$\text{et } [\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2]^T F(x) = \lambda \min_{v \in C} v^T F(x) + (1-\lambda) \min_{v \in C} v^T F(x)$$

$$= \min_{v \in C} v^T F(x) \qquad (2)$$

d'où grâce à (1) et (2), on a :

$$\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in \mathcal{I}(x) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{I}(x)$$

Annexe 3 :

La fonction $\vartheta : C \to \mathcal{P}(C)$ définie par $\vartheta(x) = \{ u$ tel que $u \in C$, $u^T F(x) = \min_{v \in C} v^T F(x) \}$ est semi-continue supérieurement sur C

En effet, soient la suite $\{x_i\} \to x_0$ où $x_i \in C$
et la suite $\{u_i\} \to u_0$ où $u_i \in \vartheta(x_i)$

Comme $u_i \in \vartheta(x_i)$, on a que $u_i \in C$ et $u_i^T F(x_i) = \min_{v \in C} v^T F(x_i) \leq w^T F(x_i)$ $\forall w \in C$

On a que. la limite de $\{u_i\}$ appartient à C car C est compact;
c'est-à-dire $u_0 \in C$ (1)

$$u_i^T F(x_i) \leq w^T F(x_i) \quad , \quad \forall w \in C$$

d'où, puisque F est continue sur C, et que le produit scalaire l'est aussi ; on a en passant à la limite sur i

$$u_0^T F(x_0) \leq w^T F(x_0), \ \forall w \in C$$

$$\Longrightarrow u_0^T F(x_0) = \min_{w \in C} v^T F(x_0) \qquad (2)$$

Grâce à (1) et (2), on peut dire que $u_0 \in \vartheta(x_0)$

et que ϑ est semi-continue supérieurement.

<u>Annexe 4</u> : Dans cette annexe, nous donnerons une idée de la terminologie à peu près admise actuellement.

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ et φ une application (multivoque)

$$\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \; : \; x \longrightarrow \varphi(x)$$

1°) L'application φ est dite <u>semi-continue supérieurement</u> (s.c.s.) en un point $\bar{x} \in X$, si et seulement si :

$$\forall O \text{ ouvert} : \varphi(\bar{x}) \subset O, \; \exists \text{ un voisinage } V(\bar{x}) : x \in V(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(x) \subset O$$

Elle est dite semi-continue supérieurement dans X si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X. (*)

2°) L'application φ est dite <u>fermée</u>, ou encore <u>sup. continue</u>, en un point $\bar{x} \in X$, si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} x^k \longrightarrow \bar{x} \\ y^k \longrightarrow \bar{y} \\ \forall k : y^k \in \varphi(x^k) \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{y} \in \varphi(\bar{x})$$

Elle est dite fermée, ou sup-continue, dans X, si elle est fermée en tout point de X.

3°) On montre que :

a) φ s.c.s. en x et $\varphi(x)$ fermé $\Longrightarrow \varphi$ sup. continue en x

b) φ sup. continue en x et Y compact $\Longrightarrow \varphi$ s.c.s. en x

(*) C'est la définition adoptée par P. Huard par exemple, mais C. Berge impose en plus que $\varphi(x)$ soit compact en $\forall x \in X$. Ainsi Berge avec sa définition de s.c.s. énonce <u>le théorème de Kakutani</u> sous la forme : Si C est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$, si φ est une application s.c.s. de C dans C, et si pour tout x, l'ensemble $\varphi(x)$ est convexe non vide, il existe dans C un point $\bar{x}$ tel que $\bar{x} \in \varphi(\bar{x})$.
[I], [J]

Annexes relatives au chapitre II

Annexe 5.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Nous appellerons <u>sous-matrice principale de A,</u> toute matrice de la forme $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$

où $i = 1, \ldots, n$ A noter que $A_n = A$

Nous appellerons également <u>mineurs principaux de A,</u> les déterminants des sous-matrices principales de A, c'est-à-dire dét A_i où $i = 1, \ldots, n$.

<u>Remarques</u>

Certains auteurs définissent les sous-matrices principales de A comme étant les matrices carrées contenant les termes diagonaux de A et les mineurs principaux de A comme étant les déterminants

$$\text{dét} \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

et appellent <u>"leading principal minors"</u> les mineurs principaux au sens de notre définition.

En algèbre on montre que si A est symétrique, alors

a) A est définie positive $\Leftrightarrow$ tous ses mineurs principaux sont > 0

b) A est définie positive $\Leftrightarrow$ tous ses "leading principal minors" sont > 0

Annexes relatives au chapitre III

Annexe 6:

(F.D.P.) $\Rightarrow$ (D.P.) : immédiat
(F.C.P.) $\Rightarrow$ (S.C.P.) : immédiat
(F.D.P.) $\Rightarrow$ (F.C.P.) : immédiat
(S.C.P.) $\Rightarrow$ (S.S.M.) : immédiat
(D.P.) $\Rightarrow$ (S.S.M.) : immédiat
(S.S.M.) $\Rightarrow$ (R.) c'est à dire si $\forall x \geq 0$ et $x \neq 0$ $\exists k$ tel que

$$x_k > 0 \text{ et } G_k(x) > 0$$

alors le système

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad \text{et } x \neq 0 \\ t \geq 0 \\ G_i(x) + t = 0 \quad \text{avec } i \in I_+(x) \quad (1) \\ G_i(x) + t \geq 0 \quad \text{avec } i \in I_0(x) \end{cases}$$

est incompatible

En effet, en raison de la (S.S.M.), on sait qu'il existe un $k \in I_+(x)$ tel que $G_k(x) > 0$
et $G_k(x) + t > 0$ avec $t \geq 0$ ce qui est en opposition avec (1)
donc (S.S.M.) $\Rightarrow$ que le système ci-dessus est incompatible.

Annexe 7 :

Démontrons que la fonction $\alpha(x) \stackrel{D}{=} \underset{k}{Max}\ M_k x$ est continue.

Rappelons qu'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ avec $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ est continue en un point x_0 de X, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } \forall x \in X,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Soit les fonctions $g_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow M_k x$$

ces fonctions sont continues en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_k > 0 \ \text{tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - x_0\| < \delta_k \Rightarrow |M_k x - M_k x_0| < \varepsilon$$

pour $k = 1, \dots, m$

Posons $\delta = \underset{k}{Min}\ \delta_k$, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |M_k x - M_k x_0| < \varepsilon \quad \forall k$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow -\varepsilon + M_k x_0 < M_k x < M_k x_0 + \varepsilon \quad \forall k$$

$$-\varepsilon + \underset{k}{Max}\ M_k x_0 < \underset{k}{Max}\ M_k x < \underset{k}{Max}\ M_k x_0 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \underset{k}{Max}\ M_k x - \underset{k}{Max}\ M_k x_0 < \varepsilon$$

$$\left| \underset{k}{Max}\ M_k x - \underset{k}{Max}\ M_k x_0 \right| < \varepsilon$$

C'est-à-dire que la fonction $\alpha(x)$ est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Annexe relative au chapitre IV

Annexe 8 :

Si F est fortement monotone sur $\mathbb{R}^n_+$, G est fortement copositive sur $\mathbb{R}^n_+$

F fortement monotone sur $\mathbb{R}^n_+ \Longrightarrow \exists k > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+$ on a

$$(x-y)^T\left(F(x)-F(y)\right) \geq k\,|x-y|^2$$

$\Longrightarrow \exists k > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+$ on a

$$(x-y)^T\left[\left(F(x)-F(0)\right)-\left(F(y)-F(0)\right)\right] \geq k\,|x-y|^2$$

ou $$(x-y)^T\left[G(x)-G(y)\right] \geq k\,|x-y|^2$$

et en particulier si $y=0$, on a, puisque $G(0)=0$

$$x^T G(x) \geq k\,|x|^2$$

c'est-à-dire, G est fortement copositive sur $\mathbb{R}^n_+$

Deuxième partie.

ALGORITHMIQUE

DU

PROBLEME LINEAIRE COMPLEMENTAIRE.

Deuxième partie :

Algorithmique du problème linéaire complémentaire

Chapitre I.

Introduction de la méthode paramétrique

Dans ce chapitre, nous présenterons les deux algorithmes les plus connus pour la résolution du probléme linéaire complémentaire, et nous introduirons l'algorithme exposé par C. Van de Panne [N], et qui est une généralisation de la méthode paramétrique self-duale de Dantzig pour les programmes linéaires.

§1 :

Présentation des algorithmes de Dantzig-Cottle et Lemke-Howson.

Jusqu'à présent, aucun algorithme résolvant le système linéaire complémentaire (II) pour une matrice A arbitraire et un vecteur b. quelconque, n'a été développé. Cependant, deux algorithmes de base, résolvent le système (II) pour certaines classes de matrices A, tandis que le vecteur b. reste quelconque. Le premier algorithme est dû à Dantzig et Cottle et est appelé la "méthode du pivot principal"; le second, dû à Lemke et Howson, est appelé "algorithme du pivot complémentaire", et a été développé à l'origine, pour trouver les points d'équilibre de Nash pour les jeux bimatriciels, et par la suite étendu au cas du problème linéaire complémentaire par Lemke. Dantzig et Cottle ont montré que la méthode du pivot principal résout le système (II) si A est une (P) matrice et si b. est un vecteur arbitraire.

Quant à l'algorithme du pivot complémentaire de Lemke, il résout le système (II) si A est une matrice (P.C.P) et si b. est arbitraire.

Récemment, Dantzig et Cottle ont étendu leurs résultats, et ont montré que l'algorithme du pivot complémentaire résout (II) si A est une matrice (S.S.M.), tandis que Eaves a montré l'existence d'une solution par cet algorithme, si la matrice A du système (II) est une L. matrice.

§ 2 :

La méthode paramétrique

La méthode que nous allons exposer dans cette seconde partie est une généralisation de la méthode paramétrique self-duale de Dantzig pour les programmes linéaires, et sera appelée "la méthode paramétrique".

Pour cette méthode, nous distinguerons deux variantes équivalentes : "la variante complémentaire" et "la presque variante complémentaire" qui sera appelée "la méthode de Lemke".

Notons que la méthode paramétrique, nous aidera à trouver une solution du problème linéaire complémentaire, mais ne nous permettra pas de les trouver toutes.

Pour cette méthode, l'impossibilité du cyclage est basée sur la variation monotone de certaines variables ; une telle variation n'est possible que si certains tableaux - éléments sont non-positifs, ce qui est assuré si la matrice A est dans certaines classes de matrices.

Nous étudierons au fur et à mesure de cette partie, les cas suivants :

le cas où les éléments principaux sont négatifs.

le cas où la matrice A est semi-définie négative.

le cas où la matrice -A a des mineurs principaux non-négatifs.

et le cas tout à fait général.

Nous établirons ensuite un test pour prouver l'impossibilité d'une solution et nous montrerons que l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations pour des matrices (P.C.P) et pour des L. matrices.

Soit le système (II)
$$\begin{cases} Ax + y = b \\ x^T y = 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Nous appellerons :

<u>solution</u> : un couple (x, y) tel que $Ax + y = b$

<u>solution réalisable</u> : une solution (x, y) satisfaisant aux contraintes de complémentarité $x^T y = 0$, et de non-négativité $x, y \geq 0$

<u>solution de base</u> : une solution (x, y) dont n composantes parmi les $2n$ composantes sont nulles.

<u>solution de base réalisable</u> : une solution de base qui est réalisable.

Si le vecteur b du système (II) est non-négatif, ce système admet la solution triviale $y = b$ et $x = 0$.

Si b contient une ou plusieurs composantes négatives, nous pouvons créer <u>"le problème étendu"</u> comme suit :
$$\begin{cases} Ax + y = b + a\lambda \\ x^T y = 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre scalaire

et où a est un vecteur ayant des composantes positives (habituellement 1) là où b a des composantes négatives, les autres composantes de a sont non-négatives (habituellement 0)

A noter que pour certaines valeurs positives de λ, le problème étendu a une solution ; et pour une assez grande valeur de λ, la solution de base $y = b + a\lambda$ est réalisable.
La méthode paramétrique consiste à faire varier λ vers 0, tout en gardant dans les itérations successives, la complémentarité et la non-négativité des solutions de base.
Pour la variante complémentaire, le problème étendu est généralement présenté comme suit, sous forme de tableau :

	Valeurs des variables de base			
Variables basiques	terme cst	terme en λ	$x_1 \; x_2 \cdots x_n$	$y_1 \; y_2 \cdots y_n$
y_1	b_1	a_1	$a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n}$	$1 \; 0 \cdots 0$
y_2	b_2	a_2	$a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n}$	$0 \; 1 \cdots 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \;\; \ddots \;\; \vdots$	$\vdots \;\; \ddots \;\; \vdots$
y_n	b_n	a_n	$a_{n1} \; a_{n2} \cdots a_{nn}$	$0 \; 0 \cdots 1$

En ce qui concerne la presque variante complémentaire, ou méthode de Lemke, le problème étendu est généralement présenté comme suit, sous forme de tableau :

Variables basiques	Valeurs des variables de base	$\lambda \; x_1 \; x_2 \cdots x_n$	$y_1 \; y_2 \cdots y_n$
y_1	b_1	$-a_1 \; a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n}$	$1 \; 0 \cdots 0$
y_2	b_2	$-a_2 \; a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n}$	$0 \; 1 \cdots 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \;\; \vdots \;\; \ddots \;\; \vdots$	$\vdots \;\; \ddots \;\; \vdots$
y_n	b_n	$-a_n \; a_{n1} \; a_{n2} \cdots a_{nn}$	$0 \; 0 \cdots 1$

Dans la méthode de Lemke, le paramètre λ est considéré comme variable hors-base, et peut devenir basique. On fait rentrer ce paramètre λ directement en base et à l'itération suivante, la variable complémentaire non-basique correspondant à celle qui vient de sortir de la base, rentre en base.
A noter que la variable quittant la base est déterminée de la même façon que dans la méthode du simplexe pour les programmes linéaires. On continue ainsi, jusqu'au moment où le paramètre λ sort de la base, où jusqu'au moment où on ne peut plus trouver de variable basique qui puisse sortir de la base.
Au contraire, dans la variante complémentaire le paramètre λ ne peut rentrer en base ; de plus, λ et certaines autres variables non-basiques vont varier comme paramètres ; λ ne sera donc plus considéré comme une variable hors-base, mais comme un paramètre. Les variables hors-base vont donc être $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et vont rentrer en base en place de leurs variables complémentaires correspondantes, grâce à un pivotage sur un élément principal, ou sur un bloc pivot.
Si nous effectuons un pivotage sur l'élément principal a_{ii}, la variable hors base x_i va entrer en base en lieu et place de sa variable complémentaire y_i.
Si nous effectuons une transformation sur un bloc pivot $\begin{bmatrix} a_{rr} & a_{rs} \\ a_{sr} & a_{ss} \end{bmatrix}$ où $a_{rr} = 0$

cela revient à effectuer un double pivotage sur a_{sr} et sur a_{rs}.
Il en suivra que la variable hors-base x_s va entrer en base à la place de y_r, et que x_r va entrer en base à la place de y_s, donc nous n'aurons jamais simultanément deux variables complémentaires en base ou hors-base.

Rappelons qu'effectuer une transformation sur un élément pivot donné, revient à :

- diviser les éléments de la ligne du pivot par le pivot.
- soustraire des éléments des autres lignes, le produit de l'élément correspondant dans la colonne du pivot par l'élément correspondant de la ligne transformée du pivot.

D'un point de vue pratique, on peut se passer de stocker la matrice-unité ; par la suite, nous n'en tiendrons donc plus compte dans les tableaux.
En ce qui concerne les exemples présentés dans les chapitres suivants, nous adopterons directement le tableau utilisé pour la résolution algorithmique du problème général, c'est-à-dire :

```
*************************************************************************************
* VARIABLES DE BASE *     VALEURS DES      * X(1)=4 X(2)=5 X(3)=6 X(4)=7 *
*                   * VARIABLES DE BASE *                                *
*************************************************************************************
*                   *                      * XET(1) XET(2) XET(3) XET(4) *
*************************************************************************************
*       Y(1)=1      *    B(1)    BET(1)    * A(1,1) A(1,2) A(1,3) A(1,4) *
*       Y(2)=2      *    B(2)    BET(2)    * A(2,1) A(2,2) A(2,3) A(2,4) *
*       Y(3)=3      *    B(3)    BET(3)    * A(3,1) A(3,2) A(3,3) A(3,4) *
*************************************************************************************
```

où $Y(I) = y_i$; $B(I) = b_i$; $A(I,1) = -a_i$

$X(1) = \lambda$; $XET(1) = \underline{\lambda}$

$BET(I) = b_i + a_i \underline{\lambda}$

$X(I+1) = x_i$; $XET(I+1) = \bar{x}_i$

$A(I, J+1) = a_{ij}$ avec $I, i = 1, 2, 3$

$J, j = 1, 2, 3$

Chapitre II.

Cas des pivots principaux négatifs.

Dans ce chapitre, nous examinons le cas où tous les éléments principaux de la matrice A sont négatifs.

Rappelons l'énoncé du problème étendu : $Ax + y = b + a\lambda$

ou encore $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i + a_i \lambda \quad \forall i = 1, \ldots, n$

avec $x^T y = 0$ et $x, y \geq 0$.

Posons $\underline{\lambda} = \max\limits_{a_i > 0} \left(- \frac{b_i}{a_i}\right)$; ce $\underline{\lambda}$ est positif car, par construction $a_i > 0$ si $b_i < 0$

Supposons maintenant que ce maximum se produise à la ligne k, c'est-à-dire que $\underline{\lambda} = \max\limits_{a_i > 0} \left(- \frac{b_i}{a_i}\right) = - \frac{b_k}{a_k}$ (*)

Cette ligne k, sera appelée "<u>la ligne critique</u>".

Si l'on désire que les y_i soient des variables de base, $\underline{\lambda}$ est une borne inférieure de λ. En effet, pour des $\lambda < \underline{\lambda}$, la solution $y = b + a\lambda$ a au moins une composante négative et n'est donc pas réalisable ; mais pour $\lambda \geq \underline{\lambda}$, la solution de base du problème étendu $y = b + a\lambda$ est réalisable.

Pour $\lambda = \underline{\lambda}$, on a donc également que $y = b + a\underline{\lambda} \geq 0$

car $y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} > b_i + a_i \left(- \frac{b_i}{a_i}\right) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$ et $i \neq k$

et $y_k = b_k + a_k \underline{\lambda} = b_k + a_k \left(- \frac{b_k}{a_k}\right) = 0$

on dira alors que y_k bloque la décroissance de λ.

Nous allons faire un pivotage sur l'élément principal a_{kk} de la matrice A (par hypothèse ; $a_{kk} < 0$) ; ce pivotage permettra de débloquer λ.

Montrons qu'après pivotage, $\underline{\lambda}$ devient une borne supérieure pour λ.

En effet, avant le pivotage, la valeur de y_k était égale à :

$$b_k + a_k \lambda = b_k + a_k \underline{\lambda} + a_k (\lambda - \underline{\lambda}) = a_k (\lambda - \underline{\lambda}) \text{ car } b_k + a_k \underline{\lambda} = 0$$

cette valeur de y_k est non-négative si et seulement si $\underline{\lambda} \leq \lambda$.

Après le pivotage sur a_{kk} (qui est négatif), la valeur de x_k (car après pivotage, c'est x_k qui est devenu variable de base, tandis que y_k est hors-base et sa valeur est nulle) est la suivante :

$$\frac{b_k}{a_{kk}} + \frac{a_k}{a_{kk}} \lambda = \frac{b_k + a_k \lambda}{a_{kk}} = \frac{a_k}{a_{kk}} (\lambda - \underline{\lambda})$$

cette valeur de x_k est non-négative si et seulement si $\lambda \leq \underline{\lambda}$.

On recherche alors une nouvelle borne inférieure pour λ de la même façon qu'en (*), et on continue le procédé jusqu'au moment où $\lambda = 0$, nous aurons alors que la solution de base $y = b + a\lambda$ (où y est le vecteur ayant comme composantes les variables de base et où b et a ont été transformés) est réalisable et est solution du problème complémentaire original ; à noter que lorsque $\lambda = 0$, tous les b_i transformés (après les pivotages) sont ≥ 0.

<u>Méthode :</u>

déterminer $\max\limits_{a_i > 0} \left(- \frac{b_i}{a_i} \right) = - \frac{b_k}{a_k}$

transformer avec a_{kk} comme pivot

arrêter si $b_i \geq 0 \quad \forall i$, sinon continuer

Si tous les éléments principaux sont négatifs, on est assuré que la méthode fournira une solution car la valeur de λ va décroître d'une façon monotone vers 0. En effet, soit la solution de base $y = b + a\lambda$ avec $\lambda \neq 0$, cela signifie qu'il existera un $b_i < 0$ et un $a_i > 0$. Etant donné qu'il existe un $a_i > 0$, par la formule (*), on pourra trouver une ligne critique et de là un pivot principal négatif qui fera décroître λ ; on pourra tenir ce raisonnement jusqu'au moment où $\lambda = 0$.

On peut représenter chaque élément principal, dans chaque tableau, sous forme de rapport de deux mineurs successifs de A. (Annexe 9)

$a^*_{ii} = \dfrac{|A_i|}{|A_{i-1}|}$. Si la matrice $-A$ a des mineurs principaux positifs, c'est-à-dire si $-A$ est une P. matrice, on a

$-a^*_{ii} = \dfrac{|-A_i|}{|-A_{i-1}|} > 0$, ce qui implique que a^*_{ii} doit être négatif.

On peut alors conclure que, si $-A$ est une P. matrice, les éléments principaux dans les différents tableaux complémentaires sont négatifs, et puisque la valeur de λ va décroître d'une façon monotone en un nombre fini d'étapes vers 0, la méthode va converger après un nombre fini d'itérations en une solution. De plus, nous pouvons dire qu'à chaque tableau est associé une borne inférieure et une borne supérieure de λ.
Nous savons qu'aprés pivotage la borne inférieure va devenir une borne supérieure, et on pourra chercher une nouvelle borne inférieure.
La valeur de λ décroît donc d'une façon monotone et il est impossible de retrouver une borne inférieure et un tableau déjà trouvé.

De ce fait aucun cyclage ne peut se présenter.
On peut également prouver que la solution est unique si $-A$ est une P. matrice et si la solution est non-dégénérée.
Nous démontrerons cela plus loin, dans un cas plus général.

<u>Exemple de la méthode paramétrique avec des pivots principaux négatifs.</u>

Considérons le probléme linéaire complémentaire:

$$\begin{aligned} 7 &= -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + y_1 \\ -2 &= 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + y_2 \\ -4 &= -3x_1 - x_2 - x_3 + y_3 \end{aligned}$$

ou encore: $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$

et $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

La solution de ce probléme sera comme nous le verrons :

$x_1 = \frac{1}{9}$ $\qquad y_1 = 0$

$x_2 = 1\frac{1}{9}$ $\qquad y_2 = 0$

$x_3 = 2\frac{5}{9}$ $\qquad y_3 = 0$

```
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          5          6          7      *
******************************************************************************************
*                ***                              ***   4.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*       3        ***      -4.00000      0.00000   ***  -1.00000   -3.00000   -1.00000   -1.00000 *
*       1        ***       7.00000      7.00000   ***   0.00000   -3.00000    2.00000    2.00000 *
*       2        ***      -2.00000      2.00000   ***  -1.00000    2.00000   -2.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:   -1.00000
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          5          6          3      *
******************************************************************************************
*                ***                              ***   4.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*       7        ***       4.00000      0.00000   ***   1.00000    3.00000    1.00000   -1.00000 *
*       1        ***      -1.00000      7.00000   ***  -2.00000   -9.00000    0.00000    2.00000 *
*       2        ***      -2.00000      2.00000   ***  -1.00000    2.00000   -2.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          3          5          6      *
******************************************************************************************
*                ***                              ***   2.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*       2        ***      -2.00000      0.00000   ***  -1.00000    0.00000    2.00000   -2.00000 *
*       7        ***       4.00000      2.00000   ***   1.00000   -1.00000    3.00000    1.00000 *
*       1        ***      -1.00000      3.00000   ***  -2.00000    2.00000   -9.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:   -2.00000
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          3          5          2      *
******************************************************************************************
*                ***                              ***   2.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*       6        ***       1.00000      0.00000   ***   0.50000    0.00000   -1.00000   -0.50000 *
*       7        ***       3.00000      2.00000   ***   0.50000   -1.00000    4.00000    0.50000 *
*       1        ***      -1.00000      3.00000   ***  -2.00000    2.00000   -9.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
```

```
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          2          3          5     *
******************************************************************************************
*                   ***                              ***  0.50000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*        1          ***    -1.00000       0.00000    *** -2.00000    0.00000    2.00000   -9.00000 *
*        6          ***     1.00000       0.75000    ***  0.50000   -0.50000    0.00000   -1.00000 *
*        7          ***     3.00000       2.75000    ***  0.50000    0.50000   -1.00000    4.00000 *
******************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:   -9.00000
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          2          3          1     *
******************************************************************************************
*                   ***                              ***  0.50000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*        5          ***     0.11111       0.00000    ***  0.22222    0.00000   -0.22222   -0.11111 *
*        6          ***     1.11111       0.75000    ***  0.72222   -0.50000   -0.22222   -0.11111 *
*        7          ***     2.55556       2.75000    *** -0.38889    0.50000   -0.11111    0.44444 *
******************************************************************************************
******************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4          1          2          3     *
******************************************************************************************
*                   ***                              ***  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
******************************************************************************************
*        5          ***     0.11111       0.11111    ***  0.22222   -0.11111    0.00000   -0.22222 *
*        6          ***     1.11111       1.11111    ***  0.72222   -0.11111   -0.50000   -0.22222 *
*        7          ***     2.55556       2.55556    *** -0.38889    0.44444    0.50000   -0.11111 *
******************************************************************************************
UNE SOLUTION DU PROBLEME COMPLEMENTAIRE EST TROUVEE
```

Chapitre III.

Cas où la matrice A est semi-définie négative.

Notons d'abord que :

Théorème : Si la matrice A est semi-définie négative, alors on a :

$a_{ii} \leq 0 \quad \forall i$ et en plus, si $a_{ii} = 0$ alors $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall j$

Démonstration :

La matrice A étant semi-définie négative, nous pouvons écrire que :

$$\forall x : \; x^T A x \leq 0.$$

et en prenant pour x, le $i^{\text{ème}}$ vecteur unité e_i,

$$e_i^T A e_i = a_{ii} \leq 0$$

Exprimons maintenant A en termes d'une matrice symétrique C et d'une matrice anti-symétrique D où $C = \frac{1}{2}(A+A^T)$ et $D = \frac{1}{2}(A-A^T)$

Nous avons donc $A = C + D$, et les éléments diagonaux de D sont nuls.

On a donc $x^T A x = x^T C x + x^T D x$

Puisque $x^T D x = \frac{1}{2} x^T (A - A^T) x = \frac{1}{2} x^T A x - \frac{1}{2} x^T A^T x = 0$,

on a $x^T A x = x^T C x$

Donc, si A est semi-définie négative, alors C l'est aussi.

Si un élément diagonal de C est nul, les éléments de la même ligne et de la même colonne doivent être nuls (Annexe 10)

Donc, si $a_{ii} = c_{ii} + d_{ii} = c_{ii} = 0$

alors $a_{ij} = c_{ij} + d_{ij} = d_{ij} \quad \forall j$

et $a_{ji} = c_{ji} + d_{ji} = d_{ji} \quad \forall j$

Puisque $d_{ji} = -d_{ij}$, on a $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall j$

Voyons maintenant ce que donne une itération de notre algorithme dans ce cas.

Déterminons, tout comme au chapitre II, une borne inférieure pour λ :

Soit $\underline{\lambda} = \max\limits_{a_i > 0} \left(- \frac{b_i}{a_i} \right)$; ce $\underline{\lambda}$ est positif car par construction $a_i > 0$ si $b_i < 0$

supposons que ce maximum se produise à la $k^{\text{ième}}$ ligne, c'est-à-dire

$$\underline{\lambda} = \max_{a_i > 0} \left(- \frac{b_i}{a_i} \right) = - \frac{b_k}{a_k} \quad (*)$$

Rappelons que k est la ligne critique et qu'une solution de base réalisable pour le problème étendu est $y_i = b_i + a_i \underline{\lambda}$ avec $\underline{\lambda} = - \frac{b_k}{a_k}$
Notons encore que y_k bloque λ car $y_k = b_k + a_k \left(- \frac{b_k}{a_k} \right) = 0$
et y_k serait < 0, si λ prenait des valeurs inférieures à $\underline{\lambda}$.

En raison du théorème précédent, nous n'avons que deux possibilités à traiter :

- Si $a_{kk} < 0$, nous sommes dans le cas étudié au chapitre II.
- Si $a_{kk} = 0$, on détermine le $\min\limits_{a_{ik} > 0} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda}}{a_{ik}} \right)$

. si $a_{ik} \leq 0 \quad \forall i$, alors il n'y a pas moyen de continuer cette méthode ; dans ce cas, nous dirons que "l'algorithme se termine sans succès".

. sinon, supposons que ce minimum se produise à la ligne r, c'est-à-dire, $\min\limits_{a_{ik} > 0} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda}}{a_{ik}} \right) = \frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}}$

Laissons croître x_k jusqu'à $\frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}}$

On a alors les valeurs suivantes : $y_k = b_k + a_k \underline{\lambda} = 0$

$$y_r = b_r + a_r \underline{\lambda} - a_{rk} \left(\frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}} \right) = 0$$

$$y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \left(\frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}} \right) > 0$$

On procède maintenant à un pivotage double sur a_{rk} (qui est positif) et sur $a_{kr} = -a_{rk}$ (qui est donc négatif), ce qui ne change pas la valeur des variables de base pour $\lambda = -\frac{b_k}{a_k}$ et $x_k = \left(\frac{b_r + a_r \lambda}{a_{rk}}\right)$

Puisque $a_{kk} = 0$, la transformation avec a_{rk} comme pivot n'a pas d'impact sur la $k^{\text{ième}}$ ligne ; la transformation avec a_{kr} comme pivot amène une division de la $k^{\text{ième}}$ ligne par un nombre négatif, qui change la borne inférieure de λ en borne supérieure.
On recherche alors une borne inférieure pour λ grâce à la formule (*) et on continue les transformations jusqu'au moment où $\lambda = 0$.
Nous avons également vu que si $a_{kk} = 0$ et si $a_{ik} \leq 0 \ \forall i$ (ou encore $a_{ki} \geq 0 \ \forall i$), alors il n'y avait pas de solution par cette méthode, mais il n'y a pas non plus de solution au problème linéaire complémentaire ; en effet si $a_{kk} = 0$ et $a_{ki} \geq 0 \ \forall i$, alors puisque b_k est négatif, on a pour $\lambda = 0$ que la solution de base $y_k = b_k + a_k \lambda - \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i$ avec $x_i \geq 0$ n'est pas réalisable.
Pour pouvoir continuer à appliquer ces principes de pivotages jusqu'à l'obtention (éventuelle) d'une solution, il convient encore de s'assurer que les matrices A transformées des tableaux successifs restent semi-définies négatives :

<u>Théorème</u> : Chaque transformation principale d'une matrice semi-définie négative fournit une nouvelle matrice semi-définie négative.

<u>Démonstration</u> : considérons le système d'équations $y = Ax$
comme A est semi-définie négative, $x^T y = x^T A x \leq 0$
Soit maintenant, la transformée principale $y^* = A^* x^*$ de $y = Ax$. Cela signifie que certaines variables y ont été remplacées par les variables x correspondantes et vice-versa ; donc aussi que $x^{*T} y^* = x^T y$. En effet, si les rôles de x_i et y_i ont été permutés, leur produit $x_i y_i$ reste le même.
On a donc $x^{*T} y^* = x^T y \leq 0$ et puisque $x^{*T} y^* = x^{*T} A^* x^*$, on conclut que $x^{*T} A^* x^* \leq 0$, c'est-à-dire que A^* est semi-définie négative.

Chapitre IV :

Cas où la matrice $-A$ est une P_0-matrice

Rappelons qu'une matrice carrée est une P-matrice si tous ses mineurs principaux sont positifs ; qu'elle est une P_0-matrice si tous ses mineurs principaux sont non-négatifs.
Notons encore que si $-A$ est une P-matrice, tous les mineurs de A d'ordre i ont le signe $(-1)^i$ et si $-A$ est une P_0-matrice, ils ont le signe $(-1)^i$ ou sont nuls.
Puisque chaque élément principal peut s'exprimer sous forme d'un rapport de deux déterminants principaux successifs ; ceux-ci sont négatifs si $-A$ est une P-matrice (on est alors dans le cas du chapitre II) ou non-positifs si $-A$ est une P_0-matrice (c'est-à-dire le cas envisagé dans ce chapitre)
Déterminons, comme dans les chapitres précédents, une borne inférieure pour λ, soit $\underline{\lambda} = \underset{a_i > 0}{\mathrm{Max}} \left(-\frac{b_i}{a_i}\right)$ (*) ; supposons que ce

maximum se produise à la ligne k, donc $\underline{\lambda} = -\frac{b_k}{a_k}$.
La nouvelle solution est alors $\underline{\lambda} = -\frac{b_k}{a_k}$

$$y_i = b_i + a_i \underline{\lambda}$$

Notons que y_k bloque la décroissance de λ, c'est-à-dire que $y_k = 0$
. Si $a_{kk} < 0$, c'est le cas étudié au chapitre II.
. Si $a_{kk} = 0$, x_k, la variable correspondante à y_k qui bloque λ, croît paramétriquement, et une borne supérieure de λ est déterminée par $\bar{x}_k = \underset{a_{ik} > 0}{\mathrm{Min}} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda}}{a_{ik}}\right)$ (**)

Si $a_{ik} \leq 0 \quad \forall i$, alors la méthode se termine sans succès.

Sinon, supposons que le minimum se produise à la ligne r

La nouvelle solution est: $\underline{\lambda} = -\frac{b_k}{a_k}$

$$\bar{x}_k = \left(\frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}}\right)$$

$$y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \bar{x}_k$$

Notons que y_r bloque la croissance de x_k, c'est-à-dire $y_r = 0$ et puisque x_k est bloquée dans la ligne r, x_r peut croître.

Notons qu'aucune transformation de tableau n'est intervenue, mais les valeurs des variables de base ont changé grâce aux variations paramétriques de λ et x_k, qui rendent y_k et y_r nuls.

Nous regardons alors, si une des l variables bloquées λ et x_k peut être débloquée.

Puisque $-A$ est une P_0-matrice, le mineur principal $\begin{vmatrix} a_{kk} = 0 & a_{kr} \\ a_{rk} > 0 & a_{rr} \end{vmatrix}$ a le signe

$(-1)^l = 1$ ou est nul, d'où $-a_{rk}\, a_{kr} \geq 0$ et encore $a_{kr} \leq 0$, puisque $a_{rk} > 0$.

- Si $a_{kr} < 0$, λ peut-être débloqué par pivotage sur a_{kr} et a_{rk} et la borne inférieure de λ devient une borne supérieure. On cherche alors une nouvelle borne inférieure par (*).
- Si $a_{kr} = 0$, λ ne peut-être débloqué ; on s'intéresse alors à l'élément principal a_{rr}.
  - Si $a_{rr} < 0$, alors x_k peut être débloqué par pivotage sur a_{rr} et une nouvelle borne supérieure pour x_k pourra être trouvée par (**).
  - Si $a_{rr} = 0$, x_r croît paramétriquement et on détermine une borne supérieure pour x_r.

$$\bar{x}_r = \underset{a_{ir}>0}{\mathrm{Min}} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik}\,\bar{x}_k}{a_{ir}} \right) \qquad (***)$$

si $a_{ir} \leq 0 \quad \forall i$, la méthode se termine sans succés.

La nouvelle solution est, si le minimum se produit à la ligne s,

$$\underline{\lambda} = - \frac{b_k}{a_k}$$

$$\bar{x}_k = \left(\frac{b_r + a_r \underline{\lambda}}{a_{rk}} \right)$$

$$\bar{x}_r = \left(\frac{b_s + a_s \underline{\lambda} - a_{sk}\,\bar{x}_k}{a_{sr}} \right)$$

$$y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik}\,\bar{x}_k - a_{ir}\,\bar{x}_r$$

Notons que y_s bloque la croissance de x_r, c'est-à-dire $y_s = 0$.
Nous regardons alors si une des 3 variables λ, x_k et x_r peut être débloquée.

Puisque $-A$ est une P_0-matrice, le mineur principal $\begin{vmatrix} a_{kk}^{=0} & a_{kr}^{=0} & a_{ks} \\ a_{rk}^{>0} & a_{rr}^{=0} & a_{rs} \\ a_{sk} & a_{sr}^{>0} & a_{ss} \end{vmatrix}$ a le signe $(-1)^3 = -1$ ou est nul, d'où $a_{rk}\, a_{sr}\, a_{ks} \leq 0$ et $a_{ks} \leq 0$, puisque a_{rk} et $a_{sr} > 0$. On pourra déduire par un raisonnement analogue que $a_{rs} \leq 0$.

- Si $a_{ks} < 0$, λ peut être débloqué par pivotage sur a_{ks}, a_{rk}, a_{sr} et la borne inferieure de λ devient une borne supérieure; et une nouvelle borne inférieure pour λ sera obtenue par $(*)$.
- Si $a_{ks} = 0$, λ ne peut être débloqué, on s'intéresse alors à la variable x_k bloquée.
  - si $a_{rs} < 0$, x_k peut être débloqué par un pivotage sur a_{rs} et sur a_{sr} et une nouvelle borne supérieure pour x_k pourra être trouvée par $(**)$.

. si $a_{rs} = 0$, x_k ne peut être débloqué; on s'intéresse alors à la variable x_r bloquée.

. si $a_{ss} < 0$, x_r peut être débloqué par pivotage sur a_{ss} et une nouvelle borne supérieure pour x_r pourra être trouvée par (* * *).

. si $a_{ss} = 0$, on détermine

$$\bar{x}_s = \underset{a_{is} > 0}{\text{Min}} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \bar{x}_k - a_{ir} \bar{x}_r}{a_{is}} \right)$$

et ainsi de suite.

Appelons "<u>la colonne d'entrée</u>" la colonne de la nouvelle variable basique. Si les éléments dans la colonne d'entrée et dans les lignes bloquées sont non-positifs, et si, quand ces éléments sont nuls, il y a toujours au moins un élément positif dans cette colonne (et dans d'autres lignes), alors, dans chaque solution successive, ou bien λ décroît monotoniquement ou bien λ reste inchangé; mais alors, la variable bloquée suivante, soit croît monotoniquement, soit reste inchangée; et ainsi de suite.

En général, on peut conclure que les éléments dans la colonne d'entrée et dans les lignes bloquées sont non-positifs si $-A$ est une P_0-matrice. Cela assure une variation monotone de λ et des autres variables non-basiques pour les solutions successives.

Si les éléments dans la colonne d'entrée et dans les lignes bloquées sont nuls et ceux des autres lignes sont non-positifs, alors l'algorithme se termine sans succès.

Dans le chapitre III, le fait qu'il n'y ait pas de solution par l'algorithme indique qu'il n'y a pas de solution au problème. Ce n'est pas nécessairement vrai, si $-A$ est une P_0-matrice.

Considérons un mineur d'ordre 2 $\begin{vmatrix} a_{kk} = 0 & a_{ki} \\ a_{ik} \leq 0 & a_{ii} \end{vmatrix}$

où k est la colonne d'entrée. Si $-A$ est une P_0-matrice, on a $-a_{ki}\, a_{ik} \geq 0$. Si $a_{ik} < 0$, on a $a_{ki} \geq 0$ tandis que si $a_{ik} = 0$, on ne peut rien dire sur le signe de a_{ki}.

Si $a_{ik} < 0 \ \forall i$, seulement la $k^{ième}$ ligne peut être bloquée; alors seul λ doit être bloquée, et on a $a_{ki} \geq 0 \ \forall i$ et aussi $a_i > 0$ et $b_i < 0$.
On est donc dans le cas du chapitre III.
Cela établit l'impossibilité du problème dans ce cas.
Donc, dans le cas où $-A$ est une P_0-matrice et où tous les éléments de la colonne d'entrée sont négatifs, sauf l'élément principal qui est zéro, l'impossibilité de trouver une solution par l'algorithme correspond à la non-existence de solution.
Il en est de même, si $a_{ik} = 0 \ \forall i$ et si a_{ki} sont non-négatifs.
Notons que l'hypothèse "$-A$ est une P_0-matrice" est beaucoup plus générale que l'hypothèse "$-A$ est semi-définie positive"; en effet la méthode paramétrique est plus compliquée dans le cas P_0 que dans le cas semi-défini positif surtout par deux aspects :

1°. A part λ, d'autres variables non-basiques peuvent être bloquées.

2°. L'aboutissement de l'algorithme sur un échec n'implique pas nécessairement l'impossibilité du problème.

Intéressons nous maintenant à l'unicité de la solution dans le cas "$-A$ est une P_0- matrice". Le cas étudié au chapitre II, c'est-à-dire "$-A$ est une P- matrice", est un cas particulier de celui-ci, en effet une P- matrice est une P_0- matrice.

Théorème:

Si $-A$ a des mineurs principaux non-négatifs (c'est-à-dire si $-A$ est une P_0- matrice) et si l'on peut trouver une solution étant non-dégénérée, alors elle est unique.

Démonstration:

Soit, après avoir rebâptisé les variables, le problème $b^* = A^* x + y$ où b^* et A^* sont les b et A du problème original qui ont été transformés.

Soit la solution du problème $y = b^* > 0$.

Puisque la matrice $-A$ du problème original a des mineurs principaux non-négatifs, $-A^*$ a également des mineurs principaux non-négatifs.

Supposons qu'il existe une autre solution où un certain nombre de variables de type x sont en base en place de leur variable correspondante de type y.

Le problème peut-être partitionné comme suit :

$$\begin{bmatrix} b^{1*} \\ b^{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{12} \\ A^*_{21} & A^*_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}$$

où le vecteur x^1 contient les variables basiques de type x dans la deuxième solution.

où encore

$$b^{1*} = A^*_{11} x^1 + A^*_{12} x^2 + y^1$$
$$b^{2*} = A^*_{21} x^1 + A^*_{22} x^2 + y^2$$

Puisque dans les deux solutions $x^2 = 0$

on a $b^{1*} = A^*_{11} x^1 + y^1 \qquad (1)$

Soit $\bar{x}^1$ la valeur de x^1 dans la seconde solution $(\bar{x}^1 > 0)$
Alors il existe une matrice diagonale D avec des éléments principaux positifs
tel que $b^{1*} = D\,\bar{x}^1$.
De ce fait, les deux solutions satisfont l'équation
$$b^{1*} = D\,x^1 + y^1 \qquad (2)$$
d'où $(-A^*_{11} + D)\,x^1 = 0$ par (1) et (2)
c'est-à-dire que la matrice $-A^*_{11} + D$ doit donc être singulière
ce qui implique que $|-A^*_{11} + D| = 0$ (3)
Puisque $-A^*_{11}$ a des mineurs principaux non-négatifs,
$-A^*_{11} + D$ doit avoir des mineurs principaux positifs, ce qui contredit (3).
Donc une solution non-dégénérée du problème, est unique si $-A$ est une P_0-matrice.

Exemple de la méthode paramétrique avec λ décroissant

Considérons le problème linéaire complémentaire :

$$\begin{aligned} -3 &= \qquad\qquad -3x_3 + y_1 \\ -2 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 + y_2 \\ -1 &= -3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + y_3 \end{aligned}$$

ou encore : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0$ et $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			3.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-3.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-3.00000
2	-2.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-2.00000	2.00000
3	-1.00000	2.00000	-1.00000	-3.00000	7.00000	-8.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			3.00000	1.00000	0.00000	0.00000
1	-3.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-3.00000
2	-2.00000	0.00000	-1.00000	1.00000	-2.00000	2.00000
3	-1.00000	5.00000	-1.00000	-3.00000	7.00000	-8.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -2.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			3.00000	1.00000	0.00000	0.00000
1	-3.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-3.00000
6	1.00000	0.00000	0.50000	-0.50000	-0.50000	-1.00000
3	-8.00000	5.00000	-4.50000	0.50000	3.50000	-1.00000

```
***********************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4          5          2          7      *
***********************************************************************************************************
*                ***                                ***    3.00000   11.00000    0.00000    0.00000 *
***********************************************************************************************************
*       1        ***      -3.00000      0.00000     ***   -1.00000    0.00000    0.00000   -3.00000 *
*       3        ***      -8.00000      0.00000     ***   -4.50000    0.50000    3.50000   -1.00000 *
*       6        ***       1.00000      5.00000     ***    0.50000   -0.50000   -0.50000   -1.00000 *
***********************************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:   -3.00000
***********************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4          5          2          1      *
***********************************************************************************************************
*                ***                                ***    3.00000   11.00000    0.00000    0.00000 *
***********************************************************************************************************
*       7        ***       1.00000      0.00000     ***    0.33333    0.00000    0.00000   -0.33333 *
*       3        ***      -7.00000      0.00000     ***   -4.16667    0.50000    3.50000   -0.33333 *
*       6        ***       2.00000      5.00000     ***    0.83333   -0.50000   -0.50000   -0.33333 *
***********************************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:    0.50000
***********************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4          3          2          1      *
***********************************************************************************************************
*                ***                                ***    3.00000    0.00000    0.00000    0.00000 *
***********************************************************************************************************
*       7        ***       1.00000      0.00000     ***    0.33333    0.00000    0.00000   -0.33333 *
*       5        ***     -14.00000     11.00000     ***   -8.33333    2.00000    7.00000   -0.66667 *
*       6        ***      -5.00000      5.00000     ***   -3.33333    1.00000    3.00000   -0.66667 *
***********************************************************************************************************
```

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	1	2
			1.68000	0.00000	0.00000	0.00000
5	-14.00000	0.00000	-8.33333	2.00000	-0.66667	7.00000
7	1.00000	0.44000	0.33333	0.00000	-0.33333	0.00000
6	-5.00000	0.60000	-3.33333	1.00000	-0.66667	3.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -0.66667

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	5	2
			1.68000	0.00000	0.00000	0.00000
1	21.00000	0.00000	12.50000	-3.00000	-1.50000	-10.50000
7	8.00000	0.44000	4.50000	-1.00000	-0.50000	-3.50000
6	9.00000	0.60000	5.00000	-1.00000	-1.00000	-4.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	3	2
			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	21.00000	21.00000	12.50000	-1.50000	-3.00000	-10.50000
7	8.00000	8.00000	4.50000	-0.50000	-1.00000	-3.50000
6	9.00000	9.00000	5.00000	-1.00000	-1.00000	-4.00000

UNE SOLUTION DU PROBLEME COMPLEMENTAIRE EST TROUVEE

La solution de ce problème est donc :

$y_1 = 21 \qquad x_1 = 0$

$y_2 = 0 \qquad x_2 = 9$

$y_3 = 0 \qquad x_3 = 8$

Chapitre V :

Discussion générale de la variante complémentaire

Dans les chapitres précédents, les éléments dans la colonne d'entrée et dans les lignes critiques étaient non-positifs.
A chaque solution successive, il y avait donc une décroissance de λ ou une croissance d'une des variables non-basiques bloquées. On pouvait donc en conclure qu'il était impossible d'avoir un cyclage.
Lorsqu'un élément situé dans la colonne d'entrée et dans une ligne bloquée est positif, alors on emploie l'algorithme général dont une itération est décrite ci-dessous :
On cherche d'abord une borne inférieure pour λ ; pour cela on détermine $\underline{\lambda} = \max\limits_{a_i > 0} \left(-\frac{b_i}{a_i}\right)$; supposons que ce maximum se produise à la $k^{\text{ième}}$ ligne ;
c'est-à-dire $\underline{\lambda} = \max\limits_{a_i > 0} \left(-\frac{b_i}{a_i}\right) = -\frac{b_k}{a_k}$ (*)

La solution de base $y = b + a\lambda$ est réalisable pour les $\lambda \geq \underline{\lambda}$.
Les valeurs des variables de base sont alors : $y_i = b_i + a_i \underline{\lambda}$.
Comme $y_k < 0$, lorsque $\lambda < \underline{\lambda}$, y_k bloque la décroissance de λ, et la ligne k est une ligne critique (ou bloquée) ; la colonne de x_k devient alors la colonne d'entrée.
On s'intéresse alors aux éléments dans cette colonne et dans les lignes critiques ; comme pour l'instant, il n'y a qu'une seule ligne critique, on considère seulement a_{kk}.

- Si $a_{kk} < 0$, on fait un pivotage sur cet élément, et la borne inférieure de λ devient une borne supérieure ; on cherche alors une nouvelle borne inférieure pour λ par $(*)$.

• Si $a_{kk} > 0$, on fait également un pivotage sur cet élément, mais λ ne pourra pas être débloquée ; en effet, après pivotage, $\underline{\lambda}$ sera toujours une borne inférieure pour λ. On va alors cher-cher une borne supérieure $\underline{\underline{\lambda}}$ et on observera que la solution $y = b + a\lambda$ sera réalisable pour $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \underline{\underline{\lambda}}$;

on dit alors qu'après le pivotage sur un élément positif, λ est <u>dévié</u>.

Supposons que cette borne supérieure de λ, c'est-à-dire $\underline{\underline{\lambda}}$, soit obtenue à partir de la ligne r ; y_r bloque alors la croissance de λ. Cette croissance de λ peut-être débloquée par un élément principal < 0, ou déviée par un élément principal > 0, employé comme pivot.

Si l'élément principal est positif, après pivotage sur cet élément, $\underline{\underline{\lambda}}$ est toujours une borne supérieure. On va donc chercher une borne inférieure $\underline{\underline{\lambda}}$ pour λ, et λ est encore dévié.

A noter que si la méthode converge, il y a un nombre pair de pivots principaux positifs.

• Si $a_{kk} = 0$, on détermine $\bar{x}_k = \min\limits_{a_{ik} > 0} \left(\dfrac{b_i + a_i \underline{\lambda}}{a_{ik}} \right)$ $(**)$

supposons que le minimum se produise à la ligne s, c'est-à-dire

$$\bar{x}_k = \min_{a_{ik} > 0} \left(\frac{b_i + a_i \underline{\lambda}}{a_{ik}} \right) = \frac{b_s + a_s \underline{\lambda}}{a_{sk}}$$

Les valeurs des variables de base sont alors : $y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \bar{x}_k \geq 0$

Comme $y_s < 0$, pour $x_k > \bar{x}_k$, y_s bloque la croissance de $\bar{x}_k$ et la ligne s est une ligne critique ; tandis que la colonne de x_s devient alors la colonne d'entrée.

On s'intéresse alors aux éléments dans cette colonne et dans les lignes critiques, c'est-à-dire k et s,

. Si $a_{ks} < 0$, λ est débloqué par pivotage sur a_{ks} et a_{sk}. alors on cherche une nouvelle borne inférieure de λ par (*).

. Si $a_{ks} > 0$, on effectue le même pivotage pour dévier λ; et ensuite on cherche une borne supérieure de λ.

. Si $a_{ks} = 0$, on s'intéresse à a_{ss} (l'élément dans la colonne d'entrée et dans la seconde ligne critique)

. Si $a_{ss} < 0$, x_k est débloqué par pivotage sur a_{ss}, et pourra de nouveau croître.

. Si $a_{ss} > 0$, x_k est dévié par pivotage sur a_{ss}, et va alors décroître.

. Si $a_{ss} = 0$. on détermine $\bar{x}_s = \min\limits_{a_{is}>0} \left(\dfrac{b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \bar{x}_k}{a_{is}} \right)$ (***)

Supposons que le minimum se produise à la ligne t. Les valeurs des variables de base sont alors $y_i = b_i + a_i \underline{\lambda} - a_{ik} \bar{x}_k - a_{is} \bar{x}_s$

Comme $y_t = 0$, on a que y_t bloque la croissance de $\bar{x}_s$; et la ligne t est une ligne critique ; et la colonne de x_t devient alors la colonne d'entrée.

. Si $a_{kt} \neq 0$. on fait un pivotage sur a_{kt}, a_{ts}, a_{sk} qui débloque λ si $a_{kt} < 0$ et qui dévie λ si $a_{kt} > 0$.

. Si $a_{kt} = 0$, on s'occupe de a_{st}

- si $a_{st} \neq 0$, on fait un pivotage sur a_{st} et a_{ts} qui débloque x_k si $a_{st} < 0$ et qui dévie x_k si $a_{st} > 0$.

- si $a_{st} = 0$, on s'occupe de a_{tt}

si $a_{tt} \neq 0$, on fait un pivotage sur a_{tt} qui débloque x_s si $a_{tt} < 0$ et qui dévie x_s si $a_{tt} > 0$.

si $a_{tt} = 0$, on détermine un nouveau minimum et on continue.

Il faut noter que si il n'y a pas de dénominateur positif dans les rapports (*), (**), (***),

la méthode se termine sans succès .

Donc, si un élément dans la colonne d'entrée et dans une ligne critique est positif et est employé comme pivot, alors si $\underline{\lambda}$ est une borne inférieure de λ dans cette ligne avant le pivotage, il le reste après le pivotage.

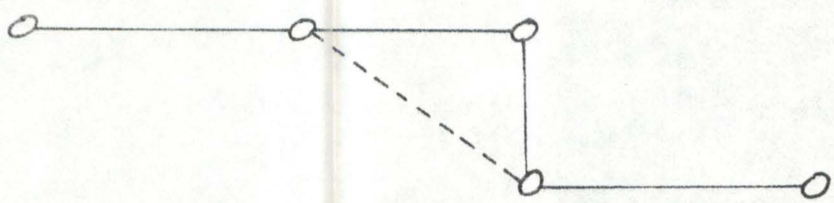
Cela signifie que la décroissance monotone de λ ne peut servir à montrer que la méthode ne cycle pas.

Lemke montre cependant qu'il ne peut pas y avoir de cyclage en se basant sur la structure graphique des solutions successives.

Soit un graphe non-orienté simplement connexe, (c'est-à-dire que pour tout couple de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant), et qui a la propriété que chaque sommet a un degré au maximal égal à 2 et au minimal égal à 1.

Dans un tel graphe, il ne peut y avoir de cycle.

En effet, supposons qu'il y ait un cycle; il est alors évident que certains sommets doivent avoir plus de deux arêtes (comme ci-dessous)



Donc, dans chaque graphe qui a au plus deux arêtes à chaque sommet et qui a au moins un sommet avec une arête, il ne peut y avoir de cycle.

Si dans un tel graphe, on part du sommet avec une arête, et que l'on rejoint le sommet suivant par cette arête; que l'on quitte de nouveau ce sommet par l'autre arête et ainsi de suite, il ne peut y avoir de cyclage.

Si de plus, le nombre de sommets est fini, alors on doit arriver, en un nombre fini d'étapes à un sommet de degré 1.
Pour la variante complémentaire, on entre dans une solution (considérée comme un sommet) via sa borne inférieure et on la quitte par sa borne supérieure ou vice-versa ;
donc chaque sommet est au maximum de degré 2,
et le tableau de départ est considéré comme un sommet de degré 1.

<u>Exemple de la méthode paramétrique avec des éléments principaux non-nuls :</u>

Considérons le problème linéaire complémentaire :

$$\begin{aligned} -6 &= x_1 - x_2 - x_3 + y_1 \\ -5 &= 2x_1 - x_2 \qquad\quad + y_2 \\ -3 &= \qquad\qquad\quad - x_3 + y_3 \end{aligned}$$

ou encore $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0$

et $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

La solution de ce problème sera, comme nous le verrons :

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 & \qquad x_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 & \qquad x_2 &= 5 \\ y_3 &= 0 & \qquad x_3 &= 3 \end{aligned}$$

```
*******************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4            5            6            7        *
*******************************************************************************************************
*                 ***                                ***   6.00000      0.00000      0.00000      0.00000 *
*******************************************************************************************************
*        1        ***      -6.00000       0.00000    ***  -1.00000      1.00000     -1.00000     -1.00000 *
*        2        ***      -5.00000       1.00000    ***  -1.00000      2.00000     -1.00000      0.00000 *
*        3        ***      -3.00000       3.00000    ***  -1.00000      0.00000      0.00000     -1.00000 *
*******************************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:     1.00000
*******************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4            1            6            7        *
*******************************************************************************************************
*                 ***                                ***   6.00000      0.00000      0.00000      0.00000 *
*******************************************************************************************************
*        5        ***      -6.00000       0.00000    ***  -1.00000      1.00000     -1.00000     -1.00000 *
*        2        ***       7.00000       1.00000    ***   1.00000     -2.00000      1.00000      2.00000 *
*        3        ***      -3.00000       3.00000    ***  -1.00000      0.00000      0.00000     -1.00000 *
*******************************************************************************************************
*******************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4            1            6            7        *
*******************************************************************************************************
*                 ***                                ***   7.00000      0.00000      0.00000      0.00000 *
*******************************************************************************************************
*        2        ***       7.00000       0.00000    ***   1.00000     -2.00000      1.00000      2.00000 *
*        5        ***      -6.00000       1.00000    ***  -1.00000      1.00000     -1.00000     -1.00000 *
*        3        ***      -3.00000       4.00000    ***  -1.00000      0.00000      0.00000     -1.00000 *
*******************************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:     1.00000
*******************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***    4            1            2            7        *
*******************************************************************************************************
*                 ***                                ***   7.00000      0.00000      0.00000      0.00000 *
*******************************************************************************************************
*        6        ***       7.00000       0.00000    ***   1.00000     -2.00000      1.00000      2.00000 *
*        5        ***       1.00000       1.00000    ***   0.00000     -1.00000      1.00000      1.00000 *
*        3        ***      -3.00000       4.00000    ***  -1.00000      0.00000      0.00000     -1.00000 *
*******************************************************************************************************
```

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	2	1	7
			3.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	-3.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-1.00000
6	7.00000	4.00000	1.00000	1.00000	-2.00000	2.00000
5	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	-1.00000	1.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -1.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	2	1	3
			3.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	3.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	-1.00000
6	1.00000	4.00000	-1.00000	1.00000	-2.00000	2.00000
5	-2.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	2	1
			2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	-2.00000	0.00000	-1.00000	1.00000	1.00000	-1.00000
7	3.00000	1.00000	1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
6	1.00000	3.00000	-1.00000	2.00000	1.00000	-2.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -1.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	2	5
			2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	2.00000	0.00000	1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000
7	3.00000	1.00000	1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
6	5.00000	3.00000	1.00000	0.00000	-1.00000	-2.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	3	2
			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	2.00000	2.00000	1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000
7	3.00000	3.00000	1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
6	5.00000	5.00000	1.00000	-2.00000	0.00000	-1.00000

UNE SOLUTION DU PROBLEME COMPLEMENTAIRE EST TROUVEE

Exemples de la méthode paramétrique dans le cas général :

Considérons le problème linéaire complémentaire :

$$
\begin{aligned}
-5 &= -2x_3 + y_1 \\
-3 &= 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_2 \\
-2 &= x_1 + 6x_2 + 4x_3 + y_3
\end{aligned}
$$

ou encore $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0$

et $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
2	-3.00000	2.00000	-1.00000	9.00000	3.00000	2.00000
3	-2.00000	3.00000	-1.00000	1.00000	6.00000	4.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			5.00000	0.22222	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
2	-3.00000	0.00000	-1.00000	9.00000	3.00000	2.00000
3	-2.00000	2.77778	-1.00000	1.00000	6.00000	4.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: 3.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			5.00000	0.22222	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
6	-1.00000	0.00000	-0.33333	3.00000	0.33333	0.66667
3	4.00000	2.77778	1.00000	-17.00000	-2.00000	0.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			5.00000	0.05882	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
3	4.00000	0.00000	1.00000	-17.00000	-2.00000	0.00000
6	-1.00000	0.49020	-0.33333	3.00000	0.33333	0.66667

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -2.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	1
			5.00000	0.05882	0.00000	0.00000
7	2.50000	0.00000	0.50000	0.00000	0.00000	-0.50000
3	4.00000	0.00000	1.00000	-17.00000	-2.00000	0.00000
6	-2.66667	0.49020	-0.66667	3.00000	0.33333	0.33333

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -17.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	2	1
			5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	2.50000	0.00000	0.50000	0.00000	0.00000	-0.50000
5	-0.23529	0.05882	-0.05882	-0.05882	0.11765	-0.00000
6	-1.96078	0.49020	-0.49020	0.17647	-0.01961	0.33333

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	1	2
			4.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	-1.96078	-0.00000	-0.49020	0.17647	0.33333	-0.01961
5	-0.23529	0.00000	-0.05882	-0.05882	-0.00000	0.11765
7	2.50000	0.50000	0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -0.01961

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	3	1	6
			4.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
2	100.00060	0.00000	25.00015	-9.00005	-17.00009	-51.00031
5	-12.00007	0.00000	-3.00002	1.00001	2.00001	6.00004
7	2.50000	0.50000	0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	6	1	3
			4.00000	-0.00000	0.00000	0.00000
5	-12.00007	0.00000	-3.00002	6.00004	2.00001	1.00001
2	100.00060	0.00000	25.00015	-51.00031	-17.00009	-9.00005
7	2.50000	0.50000	0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: 2.00001

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	6	5	3
			4.00000	-0.00000	0.00000	0.00000
1	-6.00000	0.00000	-1.50000	3.00000	0.50000	0.50000
2	-2.00003	0.00000	-0.49997	-0.00002	8.50000	-0.50000
7	-0.50000	0.50000	-0.25000	1.50000	0.25000	0.25000

LA METHODE SE TERMINE SANS SUCCES

Considérons le problème linéaire complémentaire précédent, où la dernière équation a été remplacée par :

$$-\frac{1}{2} = 15x_1 + 6x_2 + 4x_3 + y_3$$

on a donc
$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 9 & 3 & 2\\ 15 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -3\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
avec $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \geq 0$ et $(x_1\, x_2\, x_3)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=0$

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
2	-3.00000	2.00000	-1.00000	9.00000	3.00000	2.00000
3	-0.50000	4.50000	-1.00000	15.00000	6.00000	4.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	6	7
			5.00000	0.22222	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
2	-3.00000	0.00000	-1.00000	9.00000	3.00000	2.00000
3	-0.50000	1.16667	-1.00000	15.00000	6.00000	4.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: 3.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			5.00000	0.22222	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
6	-1.00000	0.00000	-0.33333	3.00000	0.33333	0.66667
3	5.50000	1.16667	1.00000	-3.00000	-2.00000	0.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-5.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
6	-1.00000	0.66667	-0.33333	3.00000	0.33333	0.66667
3	5.50000	0.50000	1.00000	-3.00000	-2.00000	0.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	5	2	7
			5.50000	0.00000	0.00000	0.00000
3	5.50000	0.00000	1.00000	-3.00000	-2.00000	0.00000
1	-5.00000	0.50000	-1.00000	0.00000	0.00000	-2.00000
6	-1.00000	0.83333	-0.33333	3.00000	0.33333	0.66667

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	7	5	2
			5.50000	1.25000	0.00000	0.00000
3	5.50000	-0.00000	1.00000	0.00000	-3.00000	-2.00000
6	-1.00000	0.00000	-0.33333	0.66667	3.00000	0.33333
1	-5.00000	3.00000	-1.00000	-2.00000	0.00000	0.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: -2.00000

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	7	5	3
			5.50000	1.25000	0.00000	-0.00000
2	-2.75000	0.00000	-0.50000	-0.00000	1.50000	-0.50000
6	-0.08333	0.00000	-0.16667	0.66667	2.50000	0.16667
1	-5.00000	3.00000	-1.00000	-2.00000	0.00000	0.00000

ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR: 0.66667

VARIABLES DE BASE	VALEURS DES VARIABLES DE BASE		4	6	5	3
			5.50000	0.00000	0.00000	-0.00000
2	-2.75000	0.00000	-0.50000	0.00000	1.50000	-0.50000
7	-0.12500	1.25000	-0.25000	1.50000	3.75000	0.25000
1	-5.25000	3.00000	-1.50000	3.00000	7.50000	0.50000

LA METHODE SE TERMINE SANS SUCCES

Chapitre VI :

Test pour l'impossibilité d'une solution.

Lorsque, pour le problème complémentaire linéaire, la méthode paramétrique se termine sans succès, il est important de savoir si cela signifie que le problème n'a pas de solution ou que la méthode est incapable de trouver une solution.

Nous verrons plus tard, que pour certaines classes de matrices (L-matrice notamment), le fait que l'algorithme se termine sans succès implique qu'il n'y a pas de solution au problème ; nous avons déjà vu que cela est vrai pour une matrice A semi-définie négative.

Si dans la variante complémentaire, l'algorithme se termine sans succès, la colonne d'entrée doit avoir des éléments qui sont 0 dans les lignes critiques, et doit avoir des éléments non-positifs dans les autres lignes.

Si la colonne d'entrée est la $k^{\text{ième}}$ colonne, alors après un réarrangement de lignes et de colonnes qui consiste à amener les lignes critiques et les colonnes d'entrée en premier, on a le schéma suivant :

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & a_{1k}=0 & & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
b_k & a_k & a_{k1} \;\cdots\; a_{kk-1} & & a_{kk}=0 & & a_{kk+1} \;\cdots\; a_{kn} & \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\text{lignes}\\ \text{critiques}\\ \text{(ou bloquées)}\end{array} \\
 & & & & a_{k+1\,k} \leq 0 & & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & a_{nk} \leq 0 & & &
\end{array}
$$

$$\underbrace{\hspace{4cm}}_{\text{colonnes d'entrée (ou fixées)}}$$

Si A est semi-définie négative (dans ce cas $a_{kk} = 0$ implique $a_{kj} = -a_{jk} \quad \forall j$)
(voir théorème page 61)

$a_{kk} = 0$ et $a_{jk} \leq 0 \quad \forall j$ entraînent que $a_{kj} \geq 0 \quad \forall j$

L'équation correspondant à la $k^{ième}$ ligne peut donc s'écrire sous la forme : $b_k + a_k \lambda - a_{k1} x_1 - \dots - a_{kn} x_n = y_k$

Pour $\lambda = 0$ et $x_1, \dots, x_n \geq 0$, y_k est négatif puisque b_k est négatif, donc aucune solution réalisable n'existe.

Dans le cas général, on va donc appliquer le test d'impossibilité suivant à chaque ligne de chaque tableau complémentaire :
pour un $b_i < 0$ si $a_{ij} \geq 0 \quad \forall j$, le problème n'a pas de solution réalisable ; en effet, l'identité pour les valeurs de la solution
$b_i + a_i \lambda = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n + y_i$ nous montre que si $b_i < 0$ et $a_{ij} \geq 0 \quad \forall j$, la solution ne sera pas réalisable ; pour le voir, il suffit de prendre $\lambda = 0$ et $x_j \geq 0 \quad \forall j$; cela nous donne alors $y_i < 0$.

En ce qui concerne les deux derniers exemples, nous pourrions appliquer directement ce test d'impossibilité au tableau initial et de là, éviter beaucoup de calculs inutiles.
En effet, il sera impossible de trouver un vecteur x et un vecteur y ayant leurs composantes non-négatives et tel que :

$$-3 = 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_2$$

Du point de vue algorithmique, ce test ne sera pas appliqué directement après le tableau initial, mais plutôt après chaque tableau suivant un pivotage ; étant donné que les b_i et a_{ij} changent leur valeur uniquement grâce à un pivotage.

. Le dernier exemple étudié au chapitre précédent se résout par la méthode paramétrique (variante complémentaire) augmentée du test d'impossibilité comme ci-dessous :

```
***************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4           5           6           7      *
***************************************************************************************************
*                   ***                              ***   5.00000     0.00000     0.00000     0.00000 *
***************************************************************************************************
*        1          ***      -5.00000     0.00000    ***  -1.00000     0.00000     0.00000    -2.00000 *
*        2          ***      -3.00000     2.00000    ***  -1.00000     9.00000     3.00000     2.00000 *
*        3          ***      -0.50000     4.50000    ***  -1.00000    15.00000     6.00000     4.00000 *
***************************************************************************************************
***************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4           5           6           7      *
***************************************************************************************************
*                   ***                              ***   5.00000     0.22222     0.00000     0.00000 *
***************************************************************************************************
*        1          ***      -5.00000     0.00000    ***  -1.00000     0.00000     0.00000    -2.00000 *
*        2          ***      -3.00000     0.00000    ***  -1.00000     9.00000     3.00000     2.00000 *
*        3          ***      -0.50000     1.16667    ***  -1.00000    15.00000     6.00000     4.00000 *
***************************************************************************************************
ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:    3.00000
***************************************************************************************************
*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***     4           5           2           7      *
***************************************************************************************************
*                   ***                              ***   5.00000     0.22222     0.00000     0.00000 *
***************************************************************************************************
*        1          ***      -5.00000     0.00000    ***  -1.00000     0.00000     0.00000    -2.00000 *
*        6          ***      -1.00000     0.00000    ***  -0.33333     3.00000     0.33333     0.66667 *
*        3          ***       5.50000     1.16667    ***   1.00000    -3.00000    -2.00000     0.00000 *
***************************************************************************************************
LE PROBLEME COMPLEMENTAIRE N A PAS DE SOLUTION
```

Chapitre VII :

L'algorithme de la variante complémentaire.

Après avoir donné quelques dispositions pratiques pour l'utilisation de cet algorithme et avoir exposé l'organigramme, nous donnerons le listing de la variante complémentaire.
On se servira du tableau, légèrement transformé, exposé dans l'introduction.

Variables de base	Valeurs des variables de base		$\lambda = x_0$	x_1	x_2	x_3
			$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
y_1	b_1	b_1^*	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_2	b_2	b_2^*	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y_3	b_3	b_3^*	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Les termes en λ (c'est-à-dire les a_i) ont été transportés de l'autre côté du signe d'égalité (c'est-à-dire sont représentés ici par a_{i0})
Dans chaque tableau, les lignes et les colonnes sont arrangées de telle façon que les lignes bloquées et les variables non-basiques fixées viennent en premier lieu.
Les valeurs des variables fixées sont indiquées par les $\bar{x}_i$ qui sont initialisés à 0.

Les b_i^* indiquent les valeurs des variables basiques après que les variables non-basiques fixées aient pris leur valeur.
A noter que les b_i^* sont nuls pour les lignes critiques et sont non-négatifs pour les autres lignes. Les b_i^* sont également initialisées à zéro et, après le pas 0, deviennent toutes non-négatives.
Si, après une transformation, une ligne qui était critique devient libre, alors le b_i^* correspondant prend la valeur fixée de la variable fixée qui devient basique.
Les b_i sont les valeurs des variables de base pour des variables non-basiques fixées égales à zéro, et servent uniquement pour le test d'impossibilité.
La direction dans laquelle la variable non-basique de la colonne d'entrée varie est positive si cette colonne était non fixée avant, et est du signe opposé au signe de $a_{k+1,k}$.
Cette direction est indiquée par $S = 1$ ou -1

Pas 0 : déterminer $\min_i b_i = b_r$

prendre $b_i^* = b_i + (b_r \times a_{i0})$

$\bar{x}_0 = -b_r$

$k = r$

réarranger lignes et colonnes

Pas 1 : déterminer le premier $a_{ik} \neq 0$ avec $i = 1, \ldots, k$, soit a_{rk}.

si $a_{ik} = 0$ avec $i = 1, \ldots, k$ aller au pas 3

transformer le tableau en pivotant sur $a_{rk}, a_{r+1,r}, a_{r+2,r+1} \ldots a_{k,k-1}$.

prendre $S = \text{signe}(-a_{r,r-1})$ et $k = r-1$

réarranger lignes et colonnes

Pas 2 : (Test d'impossibilité) Pour tout i, tel que $b_i < 0$, déterminer le

$\min_{j \in J} a_{ij} = \bar{a}_i$ avec $J = \{1, \ldots, 3\}$

Si un $\bar{a}_i \geq 0$, on arrête car il n'y a pas de solution au problème

sinon, si $S = 1$, aller au pas 3 ; si $S = -1$, aller au pas 4

Pas 3 : déterminer $\min\limits_{a_{ik}>0} \left(\frac{b_i^*}{a_{ik}}\right) = \frac{b_r^*}{a_{rk}}$

si $a_{ik} \leq 0, \forall i$, on arrête : la méthode se termine sans succès.

sinon, prendre $\bar{x}_k = \frac{b_r^*}{a_{rk}} + \bar{x}_k$; $b_i^* = b_i^* - a_{ik} \frac{b_r^*}{a_{rk}}$

$k = r$

réarranger lignes et colonnes et aller au pas 1

Pas 4 : déterminer $\min\limits_{a_{ik}<0} \left(\frac{b_i^*}{-a_{ik}}\right) = \frac{b_r^*}{-a_{rk}}$

si $\bar{x}_k < \frac{b_r^*}{-a_{rk}}$; prendre $b_i^* = b_i^* + a_{ik}\ \bar{x}_k$

si $k=0$ on arrête : on a une solution du problème.

sinon, poser $k = k-1$ et si $a_{k+1,k} > 0$, aller au pas 4

sinon, aller au pas 3.

si $\frac{b_r^*}{-a_{rk}} < \bar{x}_k$; prendre $\bar{x}_k = \bar{x}_k + \frac{b_r^*}{a_{rk}}$

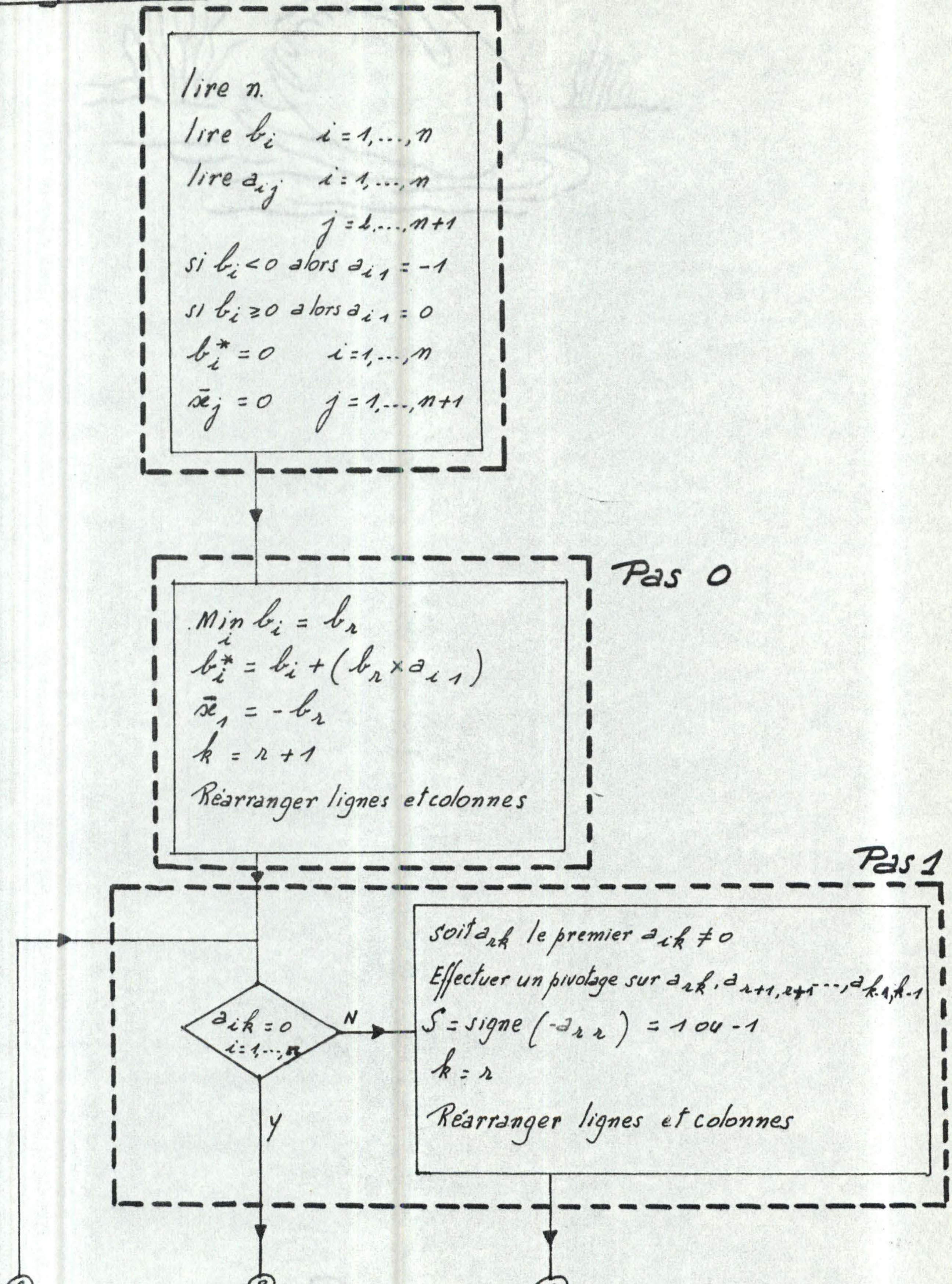
$b_i^* = b_i^* - a_{ik}\left(\frac{b_r^*}{a_{rk}}\right)$

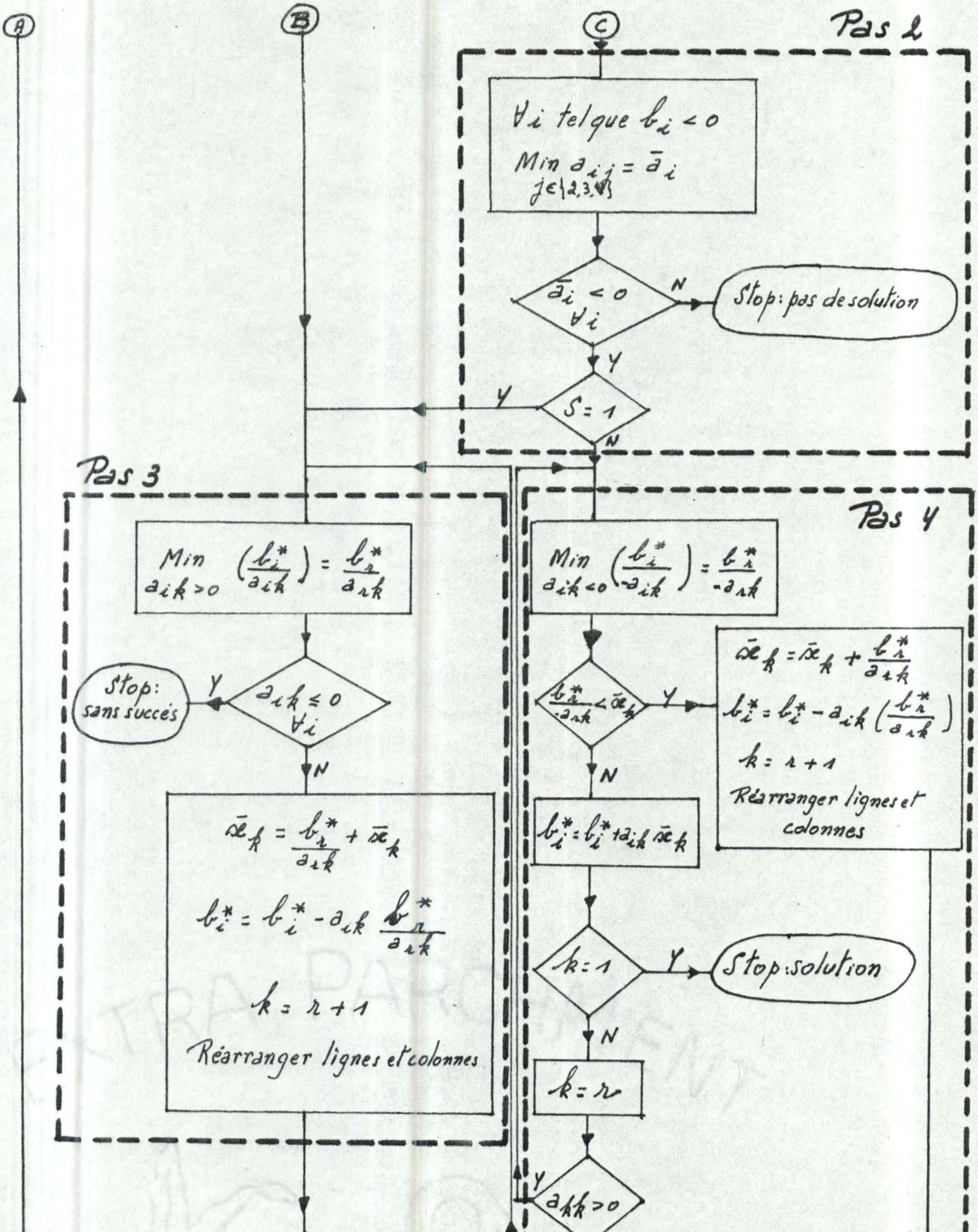
$k = r$

réarranger lignes et colonnes et aller au pas 1.

Etant donné qu'en FORTRAN, l'index de comptage d'un DO ne peut prendre la valeur 0, les indices 0, 1, 2, 3, des colonnes de la matrice deviendront respectivement 1, 2, 3, 4.

Organigramme




A
B
C
Pas 2
∀i tel que $b_i < 0$
$\min_{j \in \{2,3,4\}} a_{ij} = \bar{a}_i$
$\bar{a}_i < 0 \; \forall i$
N
Stop: pas de solution
Y
$S = 1$
Y
N
Pas 3
$\min_{a_{ik} > 0} \left(\frac{b_i^*}{a_{ik}}\right) = \frac{b_r^*}{a_{rk}}$
$a_{ik} \leq 0 \; \forall i$
Y
Stop: sans succès
N
$\bar{x}_k = \frac{b_r^*}{a_{ik}} + \bar{x}_k$
$b_i^* = b_i^* - a_{ik} \frac{b_r^*}{a_{rk}}$
$k = r + 1$
Réarranger lignes et colonnes
Pas 4
$\min_{a_{ik} < 0} \left(\frac{b_i^*}{-a_{ik}}\right) = \frac{b_r^*}{-a_{rk}}$
$\frac{b_r^*}{-a_{rk}} < \bar{x}_k$
Y
$\bar{x}_k = \bar{x}_k + \frac{b_r^*}{a_{rk}}$
$b_i^* = b_i^* - a_{ik} \left(\frac{b_r^*}{a_{rk}}\right)$
$k = r + 1$
Réarranger lignes et colonnes
N
$b_i^* = b_i^* + a_{ik} \bar{x}_k$
$k = 1$
Y
Stop: solution
N
$k = r$
$a_{kk} > 0$
Y
N

Listing

```
      PROGRAM PANNE
C     ***********************************************************
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *           LE PROBLEME LINEAIRE COMPLEMENTAIRE           *
C     *           ***********************************           *
C     *                                                         *
C     *                ALGORITHME DE LA METHODE PARAMETRIQUE    *
C     *                (VARIANTE COMPLEMENTAIRE)                *
C     *                -------------------------------------    *
C     *                                                         *
C     *                QUI EST UNE GENERALISATION DE LA         *
C     *                METHODE PARAMETRIQUE SELF DUALE DE DANTZIG *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                   REFERENCE:                            *
C     *                                                         *
C     *                   "A COMPLEMENTARY VARIANT OF LEMKE'S METHOD*
C     *                   FOR THE LINEAR COMPLEMENTARY PROBLEM" *
C     *                   C.VAN DE PANNE                        *
C     *                                                         *
C     *                   IN MATHEMATICAL PROGRAMMING 7   1974  *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     *       PROGRAMME POUR LE MEMOIRE PRESENTE PAR DEKELVER CLAUDE *
C     *       SUR LE PROBLEME COMPLEMENTAIRE                    *
C     *                                                         *
C     *                                                         *
C     ***********************************************************
```

Sous-routines

Min.

```
      SUBROUTINE MIN (W,N,WL)
C     ***************
C     SOUS-ROUTINE QUI RECHERCHE LE MINIMUM WL DES N COMPOSANTES
C     D'UN VECTEUR W
C
      DIMENSION W(N)
      I=1
      WL=W(I)
      IF (N.EQ.1) RETURN
      DO 1 I=2,N
      IF (WL.LT.W(I)) GOTO 1
      WL=W(I)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

MINPLA.

```
      SUBROUTINE MINPLA (W,N,WL,PLV,IN,EPSIL)
C     ******************
C     SOUS-ROUTINE QUI RECHERCHE LE MINIMUM WL DES N COMPOSANTES
C     D'UN VECTEUR W TOUT EN RETENANT LE NOMBRE IN ET LA PLACE PLV
C     DES COMPOSANTES QUI SONT EGALES A EPSIL PRES AU MINIMUM
C
      DIMENSION W(N)
      INTEGER PLV(N)
      I=1
      IN=1
      PLV(IN)=I
      WL=W(I)
      IF (N.EQ.1) RETURN
      DO 1 I=2,N
      IF (ABS(WL-W(I)).LT.EPSIL) GOTO 2
      IF (WL.LT.W(I)) GOTO 1
      IN=1
      PLV(IN)=I
      WL=W(I)
      GOTO 1
    2 IN=IN+1
      PLV(IN)=I
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

PRINTA.

```
      SUBROUTINE PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)
C     *****************
C     SOUS-ROUTINE POUR L'IMPRESSION DU TABLEAU COMPLEMENTAIRE
C     SOUS LA FORME SUIVANTE:
C**************************************************************************
C* VARIABLES DE BASE *     VALEURS DES      * X(1)=4 X(2)=5 X(3)=6 X(4)=7 *
C*                   * VARIABLES DE BASE *                                 *
C**************************************************************************
C*                   *                      * XET(1) XET(2) XET(3) XET(4) *
C**************************************************************************
C*      Y(1)=1       *    B(1)    BET(1)    * A(1,1) A(1,2) A(1,3) A(1,4) *
C*      Y(2)=2       *    B(2)    BET(2)    * A(2,1) A(2,2) A(2,3) A(2,4) *
C*      Y(3)=3       *    B(3)    BET(3)    * A(3,1) A(3,2) A(3,3) A(3,4) *
C**************************************************************************
C
      INTEGER Y(N),X(M)
      DIMENSION B(N),BET(N),A(3,4),XET(M)
      PRINT 9900
      PRINT 9800,(X(I),I=1,M)
      PRINT 9900
      PRINT 9700,(XET(I),I=1,M)
      PRINT 9900
      DO 51 I=1,N
   51 PRINT 9600,Y(I),B(I),BET(I),(A(I,J),J=1,M)
      PRINT 9900
 9900 FORMAT (1X,98(1H*))
 9800 FORMAT(1X,'*VARIABLES DE BASE***VALEURS DES VARIABLES DE BASE***',
     14('  ',I2,'          '),'*')
 9700 FORMAT(1X,'*                        ***                           ***',
     14(F10.5,1X),'*')
 9600 FORMAT(1X,'*        ',I2,'         ***   ',F10.5,'    ',F10.5,'  ***
     1',4(F10.5,1X),'*')
      RETURN
      END
```

REABEF.

```
      SUBROUTINE REABEF (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,R,L)
C     ****************
C     SOUS-ROUTINE QUI REARRANGE LE TABLEAU COMPLEMENTAIRE
C     AVANT LE PIVOTAGE DE TELLE SORTE QUE LES LIGNES CRITIQUES ET
C     LES COLONNES FIXEES VIENNENT EN PREMIER LIEU
C
      INTEGER Y(N),X(M)
      DIMENSION B(N),BET(N),A(3,4),XET(M)
      DIMENSION V(4)
      INTEGER P,Q,R,T
C
C     V:VECTEUR QUI RETIENT UNE CERTAINE LIGNE OU COLONNE DE LA MATRICE A
C     P:RETIENT LA VALEUR D'UNE CERTAINE COMPOSANTE DE Y
C     Q:RETIENT LA VALEUR D'UNE CERTAINE COMPOSANTE DE X
C     R:COMPTE LE NOMBRE DE COLONNES FIXEES
C     T:COMPTE LE NOMBRE DE LIGNES OU BET(I)=0.
C
C     AMENONS D'ABORD LA DERNIERE LIGNE CRITIQUE TROUVEE L EN PREMIERE PLACE
C
      LL=L
   13 IF (LL.EQ.1) GOTO 9
      Z=BET(LL-1)
      BET(LL-1)=BET(LL)
      BET(LL)=Z
      W=B(LL-1)
      B(LL-1)=B(LL)
      B(LL)=W
      P=Y(LL-1)
      Y(LL-1)=Y(LL)
      Y(LL)=P
      DO 8 J=1,M
      V(J)=A(LL-1,J)
      A(LL-1,J)=A(LL,J)
    8 A(LL,J)=V(J)
      LL=LL-1
      GOTO 13
C
C     AMENONS ENSUITE LES LIGNES OU BET(I)=0. EN PREMIERE PLACE
C
    9 T=0
      DO 1 I=1,N
      IF (ABS(BET(I)).GT.EPSIL) GOTO 1
      T=T+1
      II=I
    3 IF (II.EQ.1) GOTO 1
      IF (ABS(BET(II-1)).LT.EPSIL) GOTO 1
      Z=BET(II)
      BET(II)=BET(II-1)
      BET(II-1)=Z
      W=B(II)
      B(II)=B(II-1)
      B(II-1)=W
      P=Y(II)
      Y(II)=Y(II-1)
      Y(II-1)=P
```

```
      DO 2 J=1,M
      V(J)=A(II,J)
      A(II,J)=A(II-1,J)
    2 A(II-1,J)=V(J)
      II=II-1
      GOTO 3
    1 CONTINUE
C
C     AMENONS MAINTENANT LES COLONNES FIXEES EN PREMIERE PLACE
C
      R=1
      DO 4 J=2,M
      IF (ABS(XET(J)).LT.EPSIL) GOTO 4
      R=R+1
      JJ=J
    6 IF (JJ.EQ.2) GOTO 4
      IF (ABS(XET(JJ-1)).GT.EPSIL) GOTO 4
      Z=XET(JJ)
      XET(JJ)=XET(JJ-1)
      XET(JJ-1)=Z
      Q=X(JJ)
      X(JJ)=X(JJ-1)
      X(JJ-1)=Q
      DO 5 I=1,N
      V(I)=A(I,JJ)
      A(I,JJ)=A(I,JJ-1)
    5 A(I,JJ-1)=V(I)
      JJ=JJ-1
      GOTO 6
    4 CONTINUE
C
C     FAISONS ALORS CORRESPONDRE CHAQUE COLONNE FIXEE AVEC SA LIGNE CRITIQUE
C
      IF (R.EQ.1) RETURN
      DO 10 J=2,R
      DO 11 I=1,T
      IF (ABS(Y(I)-X(J)).EQ.M) GOTO 12
   11 CONTINUE
   12 IF (I.EQ.(J-1)) GOTO 10
      Z=BET(J-1)
      BET(J-1)=BET(I)
      BET(I)=Z
      W=B(J-1)
      B(J-1)=B(I)
      B(I)=W
      P=Y(J-1)
      Y(J-1)=Y(I)
      Y(I)=P
      DO 7 IJ=1,M
      V(IJ)=A(J-1,IJ)
      A(J-1,IJ)=A(I,IJ)
    7 A(I,IJ)=V(IJ)
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

REAAFT.

```
      SUBROUTINE REAAFT (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL)
C     ****************
C     SOUS-ROUTINE QUI REARRANGE LE TABLEAU COMPLEMENTAIRE
C     APRES LE PIVOTAGE DE TELLE SORTE QUE CHAQUE VARIABLE HORS BASE
C     CORRESPONDE A SA VARIABLE COMPLEMENTAIRE EN BASE
C
      INTEGER Y(N),X(M)
      DIMENSION B(N),BET(N),A(3,4),XET(M)
      DIMENSION V(3)
      INTEGER Q
C
C     V:VECTEUR QUI RETIENT UNE CERTAINE COLONNE DE LA MATRICE A
C     Q:RETIENT LA VALEUR D'UNE CERTAINE COMPOSANTE DE X
C
      DO 1 I=1,N
      I1=I+1
      DO 2 J=I1,M
      IF (ABS(Y(I)-X(J)).EQ.M) GOTO 3
    2 CONTINUE
    3 IF (J.EQ.I1) GOTO 1
      Z=XET(I+1)
      XET(I+1)=XET(J)
      XET(J)=Z
      Q=X(I+1)
      X(I+1)=X(J)
      X(J)=Q
      DO 5 IJ=1,N
      V(IJ)=A(IJ,I+1)
      A(IJ,I+1)=A(IJ,J)
    5 A(IJ,J)=V(IJ)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Lexico.

```
      SUBROUTINE LEXICO (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,PL,PLV,IN,LW)
C     *****************
C     SOUS-ROUTINE QUI CHOISIT LA MEILLEURE LIGNE CRITIQUE LW
C     LORSQU'UN MINIMUM SE PRODUIT DANS IN LIGNES
C     ON PRENDRA COMME LIGNE CRITIQUE LA LIGNE QUI PERMETTRA D'EFFECTUER
C     UN PIVOTAGE SUR LE PLUS GRAND ELEMENT EN VALEUR ABSOLUE
C
      INTEGER Y(N),X(M)
      DIMENSION B(N),BET(N),A(3,4),XET(M)
      INTEGER PL(3),PLV(3)
C
C     PLV:VECTEUR QUI RETIENT LA PLACE DE CHAQUE MINIMUM DANS LE SOUS-VECTEUR
C     OU IL FALLAIT CHERCHER LA VALEUR MINIMALE DES COMPOSANTES
C     PL:VECTEUR QUI RETIENT LA PLACE DE CHAQUE COMPOSANTE DU SOUS-VECTEUR
C     DANS LE VECTEUR INITIAL
C
      I=1
      L=PLV(I)
      L=PL(L)
      DO 1 J=1,L
      IF (ABS(BET(J)).LT.EPSIL) GOTO 3
    1 CONTINUE
    3 W=A(J,L+1)
      LW=L
      DO 2 I=2,IN
      L=PLV(I)
      L=PL(L)
      IF (J.EQ.LW) GOTO 5
      IF (ABS(W).GT.ABS(A(J,L+1))) GOTO 2
      W=A(J,L+1)
      LW=L
      GOTO 2
    5 IF (ABS(W).GT.ABS(A(L,L+1))) GOTO 2
      W=A(L,L+1)
      LW=L
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Programme principal

```
      PRINT 41
   41 FORMAT (1H1)
      INTEGER Y(3),X(4)
      DIMENSION B(3),BET(3),A(3,4),XET(4)
C*********************************************************************
C* VARIABLES DE BASE *     VALEURS DES     * X(1)=4 X(2)=5 X(3)=6 X(4)=7 *
C*                   * VARIABLES DE BASE *                            *
C*********************************************************************
C*                   *                     * XET(1) XET(2) XET(3) XET(4) *
C*********************************************************************
C*      Y(1)=1       *   B(1)    BET(1)    * A(1,1) A(1,2) A(1,3) A(1,4) *
C*      Y(2)=2       *   B(2)    BET(2)    * A(2,1) A(2,2) A(2,3) A(2,4) *
C*      Y(3)=3       *   B(3)    BET(3)    * A(3,1) A(3,2) A(3,3) A(3,4) *
C*********************************************************************
      INTEGER Q,R,S,T
      INTEGER PL(3),PLV(3)
      DIMENSION D(3),C(4)
C
C     Q:RETIENT LA VALEUR D'UNE CERTAINE COMPOSANTE DE X
C     R:COMPTE LE NOMBRE DE COLONNES FIXEES
C     S:PEUT PRENDRE LES VALEURS 1 ET -1 ET REPRESENTE LA DIRECTION
C     DANS LAQUELLE VARIE LA VARIABLE NON BASIQUE DE LA COLONNE FIXEE
C     T:RETIENT LE NOMBRE DE COMPOSANTES DU SOUS-VECTEUR D
C     C:VECTEUR QUI RETIENT LES LIGNES DE LA MATRICE A
C     QUI ONT LEUR B CORRESPONDANT NEGATIF
C     D:SOUS-VECTEUR QUI RETIENT CERTAINES COMPOSANTES D'UN VECTEUR INITIAL
C     PLV:VECTEUR QUI RETIENT LA PLACE DE CHAQUE MINIMUM DANS LE SOUS-VECTEUR
C     OU IL FALLAIT CHERCHER LA VALEUR MINIMALE DES COMPOSANTES
C     PL:VECTEUR QUI RETIENT LA PLACE DE CHAQUE COMPOSANTE DU SOUS-VECTEUR
C     DANS LE VECTFUR INITIAL
C
C     LECTURE DES DONNEES
C     -------------------
C     LES DONNEES SERONT LUES DE LA FACON SUIVANTE:
C     SUR LA PREMIERE CARTE:LA DIMENSION N DU VECTEUR Y (EN I2)
C     SUR LA DEUXIEME CARTE:LES N COMPOSANTES DU VECTEUR B (EN F10.5)
C     SUR LA (2+I)EME CARTE:LES N COMPOSANTES DE LA IEME LIGNE DE
C                           LA MATRICE A (EN F10.5) AVEC I=1,...,N
C     SUR LA (3+N)EME CARTE:LA PRECISION VOULUE SUR LES CALCULS (EN F10.5)
C
      READ 100,N
      M=N+1
      READ 200,(B(I),I=1,N)
      DO 51 I=1,N
   51 READ 300,(A(I,J),J=2,M)
      READ 400,EPSIL
      EEPSIL=-EPSIL
```

```
C
C     INITIALISATION ET COMPLETION DU TABLEAU INITIAL
C     -----------------------------------------------
      DO 1 I=1,N
      PL(I)=I
      Y(I)=I
    1 BET(I)=0.
      DO 2 J=1,M
      X(J)=N+J
    2 XET(J)=0.
      DO 3 I=1,N
      IF (B(I).LT.EEPSIL) GOTO 4
      A(I,1)=0.
      GOTO 3
    4 A(I,1)=-1.
    3 CONTINUE
C
C     PAS 0
C     -----
      CALL MINPLA (B,N,BL,PLV,IN,EPSIL)
      DO 5 I=1,N
    5 BET(I)=B(I)+BL*A(I,1)
      XET(1)=-BL
      IF (IN.EQ.1) GOTO 61
      CALL LEXICO (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,PL,PLV,IN,L)
      GOTO 71
   61 L=PLV(IN)
   71 K=L+1
      CALL REABEF (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,R,L)
      CALL PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)
```

```
C
C      PAS 1
C      -----
   31 DO 6 I=1,L
      IF (I.GT.R) GOTO 6
      IF (ABS(BET(I)).GT.EPSIL) GOTO 6
      IF (ABS(A(1,K)).GT.EPSIL) GOTO 7
    6 CONTINUE
      GOTO 33
    7 KK=K
      L=I
      LL=L
   26 PIV=A(L,K)
C
C      ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR L'ELEMENT A(L,K)
C
      Q=X(K)
      X(K)=Y(L)
      Y(L)=Q
      PRINT 4000,PIV
      B(L)=B(L)/PIV
      A(L,K)=1./PIV
      DO 8 J=1,M
      IF (J.EQ.K) GOTO 8
      A(L,J)=A(L,J)/PIV
    8 CONTINUE
      DO 9 I=1,N
      IF (I.EQ.L) GOTO 9
      B(I)=B(I)-B(L)*A(I,K)
      A(I,K)=-A(I,K)/PIV
      DO 9 J=1,M
      IF (J.EQ.K) GOTO 9
      A(I,J)=A(I,J)+A(L,J)*A(I,K)*PIV
    9 CONTINUE
      W=XET(K)
      XET(K)=BET(L)
      BET(L)=W
C
      CALL PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)
      IF (L+1.EQ.KK) GOTO 27
      IF (L+1.GT.R) GOTO 27
      K=L+1
      L=L+1
      IF (ABS(BET(L)).LT.EPSIL) GOTO 26
   27 IF (A(LL,LL).GT.EPSIL) GOTO 10
      S=1
      GOTO 11
   10 S=-1
   11 K=LL
      CALL REAAFT (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL)
```

```
C
C     PAS 2
C     -----
   32 DO 12 I=1,N
      IF (B(I).LT.EEPSIL) GOTO 16
      GOTO 12
   16 DO 17 J=1,N
   17 C(J)=A(I,J+1)
      CALL MIN (C,N,CL)
      IF (CL.LT.EPSIL) GOTO 12
      PRINT 1000
      STOP
   12 CONTINUE
      IF (S.EQ.1) GOTO 33
      GOTO 34
C
C     PAS 3
C     -----
   33 T=0
      DO 13 I=1,N
      IF (A(I,K).GT.EPSIL) GOTO 14
      GOTO 13
   14 T=T+1
      PL(T)=I
      D(T)=BET(I)/A(I,K)
   13 CONTINUE
      IF (T.EQ.0) GOTO 25
      CALL MINPLA (D,T,DL,PLV,IN,EPSIL)
      XET(K)=XET(K)+DL
      DO 15 I=1,N
   15 BET(I)=BET(I)-A(I,K)*DL
      IF (IN.EQ.1) GOTO 62
      CALL LEXICO (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,PL,PLV,IN,L)
      GOTO 72
   62 L=PLV(IN)
      L=PL(L)
   72 K=L+1
      CALL REABEF (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,R,L)
      CALL PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)
      GOTO 31
   25 PRINT 2000
      STOP
```

```
C
C     PAS 4
C     -----
   34 T=0
      DO 19 I=1,N
      IF (A(I,K).LT.EEPSIL) GOTO 20
      GOTO 19
   20 T=T+1
      PL(T)=I
      D(T)=-BET(I)/A(I,K)
   19 CONTINUE
      IF (T.EQ.0) GOTO 21
      LL=L
      CALL MINPLA (D,T,DL,PLV,IN,EPSIL)
      IF (DL.GT.XET(K)) GOTO 21
      XET(K)=XET(K)-DL
      DO 22 I=1,N
   22 BET(I)=BET(I)+A(I,K)*DL
      IF (IN.EQ.1) GOTO 63
      CALL LEXICO (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,PL,PLV,IN,L)
      GOTO 73
   63 L=PLV(IN)
      L=PL(L)
   73 K=L+1
      CALL REABEF (Y,B,BET,A,XET,X,N,M,EPSIL,R,L)
      CALL PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)
      GOTO 31
   21 DO 23 I=1,N
   23 BET(I)=BET(I)+A(I,K)*XET(K)
      XET(K)=XET(K)-XET(K)
      CALL PRINTA (Y,B,BET,A,XET,X,N,M)

      IF (K.EQ.1) GOTO 24
      K=LL-1
      IF (A(K,K).GT.EPSIL) GOTO 34
      GOTO 33
   24 PRINT 3000
      STOP
  100 FORMAT (I2)
  200 FORMAT (3F10.5)
  300 FORMAT (4F10.5)
  400 FORMAT (F10.5)
 1000 FORMAT (1X,'LE PROBLEME COMPLEMENTAIRE N A PAS DE SOLUTION')
 2000 FORMAT (1X,'LA METHODE SE TERMINE SANS SUCCES')
 3000 FORMAT (1X,'UNE SOLUTION DU PROBLEME COMPLEMENTAIRE EST TROUVEE')
 4000 FORMAT (1X,'ON EFFECTUE UN PIVOTAGE SUR:',F10.5)
      END
```

Chapitre VIII :

Applications de l'algorithme aux matrices plus-copositives et aux L.matrices.

L'algorithme de la variante complémentaire peut se terminer de trois façons :

1er) la solution est réalisable pour $\lambda = 0$, cela veut dire qu'on a trouvé une solution du problème complémentaire.

2e) On ne peut déterminer aucune borne supérieure de λ en cours d'algorithme.

3e) On ne peut déterminer aucune borne supérieure pour les variables non-basiques fixées.

Dans les cas où $-A$ est une L_matrice ou est une matrice plus-copositive, on va voir que, la variante complémentaire complétée par le test d'impossibilité, permet soit de trouver une solution, soit de montrer qu'aucune solution n'existe.

Ci-après, le paragraphe 1, va analyser le cas où la variante complémentaire se termine sans pouvoir trouver une borne supérieure à λ ; le second paragraphe va traiter du cas où il est impossible de trouver une borne supérieure pour les variables non-basiques fixées.

§1 : Arrêt dans la colonne de λ

Ajoutons d'abord au système d'équations, l'équation $y_0 = a^T x$ $(a \geq 0)$ Puisque $a \geq 0$ et $x \geq 0$, y_0 va être non-négatif pour toute solution réalisable. Supposons un tableau général de départ dans lequel les colonnes correspondant aux x-variables, qui vont être en base dans la solution suivante, sont placées en premier lieu.

Variables de base	Valeurs des variables de base			
	terme C^{st}	terme en λ	x^1	x^2
y_0	0	0	$-a^{1T}$	$-a^{2T}$
y^1	b^1	a^1	$\underline{A_{11}}$	A_{12}
y^2	b^2	a^2	A_{21}	A_{22}
			y^1	x^2
y_0	$a^{1T}A_{11}^{-1}b^1$	$a^{1T}A_{11}^{-1}a^1$	$a^{1T}A_{11}^{-1}$	$-a^{2T}+a^{1T}A_{11}^{-1}A_{12}$
x^1	$A_{11}^{-1}b^1$	$A_{11}^{-1}a^1$	A_{11}^{-1}	$A_{11}^{-1}A_{12}$
y^2	$b^2-A_{21}A_{11}^{-1}b^1$	$a^2-A_{21}A_{11}^{-1}a^1$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

Effectuons alors un pivotage sur le bloc pivot A_{11}. Et supposons que dans le nouveau tableau, ainsi obtenu, nous ne parvenons pas à déterminer une borne supérieure de λ.

Dans ce cas, $A_{11}^{-1}\, a^1 \geq 0 \quad (\text{et} \neq 0)$

$$a^2 - A_{21}\, A_{11}^{-1}\, a^1 \geq 0 \quad (\text{et} \neq 0)$$

De plus, puisque la solution est réalisable pour $\lambda \geq \underline{\lambda}$, nous pouvons dire que, pour chaque élément nul de $A_{11}^{-1}\, a^1$, l'élément correspondant de $A_{11}^{-1}\, b^1$ est non-négatif (*)

. Considérons le terme en λ de y_0

Puisque $a^1 \geq 0$ et $A_{11}^{-1} a^1 \geq 0\ (\neq 0)$ on a $a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 \geq 0$ (1)

D'autre part, $a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 = (A_{11}^{-1} a^1)^T A_{11}^T (A_{11}^{-1} a^1)$

$$= (A_{11}^{-1} a^1)^T A_{11} (A_{11}^{-1} a^1)$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} a^{*1} \\ 0 \end{bmatrix}^T (-A) \begin{bmatrix} a^{*1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

en posant $a^{*1} = A_{11}^{-1} a^1$

Si $-A$ est plus-copositive, on conclut que $a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 \leq 0$ (2)

Donc (1) et (2) entraînent que $a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 = 0$

De plus, quand $-A$ est plus-copositive, on a : $(A + A^T) x = 0$ dès que $x^T A x = 0$ pour $x > 0$; donc :

$$\begin{bmatrix} -A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et par conséquent $\quad -(A_{11}^T)^{-1} a^1 = A_{11}^{-1} a^1 \quad$ (3)

$$-A_{12}^T A_{11}^{-1} a^1 = A_{21} A_{11}^{-1} a^1$$

ou encore $A_{12}^T (A_{11}^T)^{-1} a^1 = A_{21} A_{11}^{-1} a^1$

Posons encore $a^{1*} = (A_{11}^T)^{-1} a^1$, (3) s'écrit donc $-a^{1*} = a^{*1}$

Arrangeons encore le vecteur a^1 de telle façon que les éléments positifs de a^1 viennent en premier. Soient les vecteurs a^1, b^1, a^{*1} et a^{1*} partitionnés comme suit : $a^1 = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{bmatrix}$; $b^1 = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{bmatrix}$; $a^{*1} = \begin{bmatrix} a_1^{*1} \\ a_2^{*1} \end{bmatrix}$; $a^{1*} = \begin{bmatrix} a_1^{1*} \\ a_2^{1*} \end{bmatrix}$,

avec $a_1^1 > 0$ et $a_2^1 = 0$; tandis que comme $a^{*1} \geqslant 0$ (et $\neq 0$)
on a $a_1^{*1} \geqq 0$ et $a_2^{*1} \geqq 0$

On a que $a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 = a^{1T} (A_{11}^T)^{-1} a^1$
ou encore $a^{1T} (A_{11}^{-1} a^1 - (A_{11}^T)^{-1} a^1) = 0$

ou encore grâce à (3) $2 a^{1T} A_{11}^{-1} a^1 = 2 a^{1T} a^{*1} = 0$
ou encore $a_1^{1T} a_1^{*1} + a_2^{1T} a_2^{*1} = 0$

Ce qui nous donne, $a_1^{1T} a_1^{*1} = 0$ puisque $a_2^1 = 0$
Donc, puisque $a_1^{*1} \geqq 0$ et $a_1^1 > 0$, on trouve que $a_1^{*1} = 0$ et également $a_1^{1*} = 0$
De plus, $a_2^{*1} \neq 0$ et $a_2^{1*} \neq 0$, car autrement $A_{11}^{-1} a^1 = 0$ et $A_{11}^{T-1} a^1 = 0$
Donc a_2^{*1} doit contenir des éléments positifs et a_2^{1*} des éléments négatifs
-Considérons maintenant le terme constant de y_0

$$a^{1T} A_{11}^{-1} b^1 = (a_1^{1*})^T b_1^1 + (a_2^{1*})^T b_2^1$$

Puisque $a_1^{1*} = 0$, $a_2^{1*} \leqslant 0$ (et $\neq 0$) et $b_2^1 > 0$ (on considère que le problème n'est pas dégénéré)

$$a^{1T} A_{11}^{-1} b^1 < 0 \qquad (4)$$

D'autre part, $a^{1T} A_{11}^{-1} b^1 = a^{1T} b^{*1} = a_1^{1T} b_1^{*1} + a_2^{1T} b_2^{*1}$
où on pose $A_{11}^{-1} b^1 = b^{*1} = \begin{bmatrix} b_1^{*1} \\ b_2^{*1} \end{bmatrix}$

Puisque $a_2^1 = 0$ et $b_1^{*1} \geqslant 0$ (car $a_1^{*1} = 0$) (voir (*))
on a $a^{1T} A_{11}^{-1} b^1 > 0$ ce qui contredit (4)

Cela signifie que, si $-A$ est plus-copositive, l'arrêt de l'algorithme, sur la conclusion qu'on ne peut trouver une borne supérieure à λ est impossible.

On aboutit à la même conclusion lorsque $-A$ étant une L-matrice, Si a est positif

Considérons le vecteur $y = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $A_{11}^{-1} a^1 \geqslant 0$ (et $\neq 0$)

Si $-A$ est une L-matrice, il existe un élément positif dans y, dont l'élément correspondant de My est non-négatif (**) (avec $M = -A$)

Mais, on a également $My = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} a^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^1 \\ -A_{21} A_{11}^{-1} a^1 \end{bmatrix}$

Puisque $-a^1 < 0$, on a une contradiction avec (**)

Cela signifie que, si $-A$ est une L-matrice, l'arrêt de l'algorithme, sur la conclusion qu'on ne peut trouver une borne supérieure à λ est impossible.

§ 2 : Arrêt dans la colonne d'une variable non basique.

Nous travaillons toujours avec le tableau donné dans le premier paragraphe. Soit y_i l'une des variables y hors-base dont on essaie d'augmenter la valeur. Supposons que y_i corresponde à la i^e colonne

Si la méthode s'arrête, cela signifie que :

i) tous les éléments de la $i^{ème}$ colonne, qui sont également dans une ligne critique sont nuls.

ii) tous les autres éléments de la $i^{ème}$ colonne sont non-positifs.

L'élément principal dans la $i^{ème}$ colonne appartient également à une ligne critique et doit donc être nul, c'est-à-dire $e_i^T A_{11}^{-1} e_i = 0$

$$\text{Or } e_i^T A_{11}^{-1} e_i = e_i^T (A_{11}^T)^{-1} A_{11}^T A_{11}^{-1} e_i = e_i^T (A_{11}^T)^{-1} A_{11} A_{11}^{-1} e_i = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou encore } -e_i^T A_{11}^{-1} e_i = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Soit $y = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix}$; on a $y^T M y = 0$

De plus, $y \geqq 0$, puisque $-A_{11}^{-1} e_i \geqq 0$ (comme aucun élément positif n'a été trouvé dans $A_{11}^{-1} e_i$); et $y \neq 0$ car autrement $A_{11}^{-1} e_i = 0$

Finalement,

$$My = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i \\ A_{21} A_{11}^{-1} e_i \end{bmatrix} \geqq 0$$

puisqu'on n'a pu trouver aucun élément positif dans la $i^{\text{ème}}$ colon-ne et de là, $-A_{21} A_{11}^{-1} e_i \leqslant 0$

Donc, si $-A$ est une L-matrice, on peut dire qu'il $\exists$ des matrices diagonales $\Lambda, \Omega \geqq 0$ telles que $\Omega y \neq 0$ et $M^T \Omega y = -\Lambda M y$

ou encore $$\begin{bmatrix} -A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} e_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ce qui nous donne : $+ A_{11}^T \Omega_1 A_{11}^{-1} e_i = -\Lambda_1 e_i$

ou encore $(A_{11}^T)^{-1} \Lambda_1 e_i = -\Omega_1 A_{11}^{-1} e_i \quad (5)$

Puisque $\Omega y \neq 0$, on a $-\Omega_1 A_{11}^{-1} e_i \neq 0$, donc $(A_{11}^T)^{-1} \Lambda_1 e_i \neq 0$ ainsi que $\lambda_i > 0$

(5) devient alors $(A_{11}^T)^{-1} e_i = -\lambda_i^{-1} \Omega_1 A_{11}^{-1} e_i \quad (10)$

On peut donc conclure que, si $A_{11}^{-1} e_i$ (qui est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A_{11}^{-1}) ne contient aucun élément positif, alors $(A_{11}^T)^{-1} e_i$ (qui est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A_{11}^{-1}) ne contient aucun élément négatif.

Mais (6) $\Rightarrow A_{12}^T \Omega_1 A_{11}^{-1} e_i = -\Lambda_2 A_{21} A_{11}^{-1} e_i$ et grâce à (5)

$$A_{12}^T (A_{11}^T)^{-1} e_i = \lambda_i^{-1} \Lambda_2 A_{21} A_{11}^{-1} e_i$$

Cela signifie que si l'on ne peut trouver aucun élément positif dans la $i^{\text{ème}}$ colonne de $-A_{21} A_{11}^{-1}$, alors on ne peut trouver aucun élément négatif dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de $A_{11}^{-1} A_{12}$

Supposons maintenant que l'algorithme se termine dans la colonne d'une x-variable non-basique, soit la $i^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

$$e_i^T \left(A_{22} - A_{21} \, A_{11}^{-1} \, A_{12} \right) e_i = 0$$

$$\left(A_{22} - A_{21} \, A_{11}^{-1} \, A_{12} \right) e_i \leq 0 \ (\text{et} \neq 0)$$

$$A_{11}^{-1} \, A_{12} \, e_i \leq 0 \qquad (\text{et} \neq 0)$$

ou encore $\quad 0 = e_i^T \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix} e_i$

Choisissons le vecteur y tel que $\quad y = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix} e_i$

On a : $y \geq 0$ et $y \neq 0$ avec $y^T M y = 0$

et $\quad My = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix} e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22} + A_{21} A_{11}^{-1} \, A_{12} \end{bmatrix} e_i \geq 0$

Dans ces conditions, puisque $-A$ est une L-matrice, $\exists$ des matrices diagonales Λ, $\Omega \geq 0$ telles que $\Omega y \neq 0$ et

$$\begin{bmatrix} -A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix} e_i \qquad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1} \, A_{12} \\ I \end{bmatrix} e_i \text{ ; on peut en}$$

conclure que $\left(A_{11}^T \right)^{-1} A_{21}^T \, \Omega_2 \, e_i = \Omega_1 \, A_{11}^{-1} \, A_{12} \, e_i \qquad (8)$

Maintenant si $\Omega_2 \, e_i = w_i = 0$ alors $-\Omega_1 \, A_{11}^{-1} \, A_{12} \, e_i = 0$ et donc $\Omega y = 0$ ce qui est impossible si $-A$ est une L-matrice. On conclut donc que $w_i > 0$ et on peut écrire (8) sous la forme

$$\left(A_{11}^T \right)^{-1} A_{21}^T \, e_i = w_i^{-1} \, \Omega_1 \, A_{11}^{-1} \, A_{12} \, e_i \qquad (9)$$

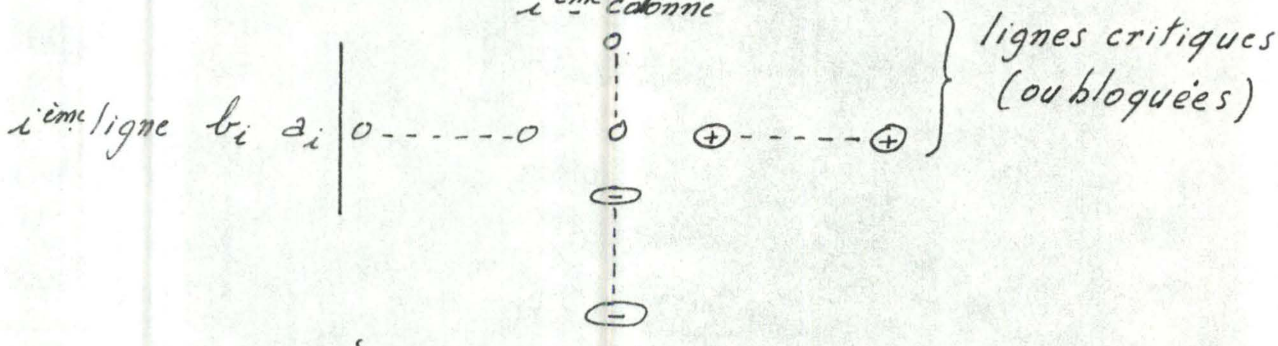
Mais (7) entraîne également

$$A_{12}^T \Lambda_1 A_{11}^{-1} A_{12} e_i - A_{22}^T \Lambda_2 e_i = \Lambda_2 (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) e_i$$

ou encore $(A_{22}^T - A_{12}^T (A_{11}^T)^{-1} A_{21}^T) e_i = - w_i^{-1} \Lambda_2 (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) e_i$
(grâce à (9))

Il résulte de ce qui précède que, si une certaine colonne contient des éléments non-positifs, alors la ligne correspondante a des éléments non-négatifs là où les éléments sont négatifs dans la colonne, et a des éléments nuls là où les éléments sont nuls dans la colonne.

Puisque les éléments dans les lignes bloquées et dans les colonnes fixées sont nuls, on a le schéma suivant:



⊕ et ⊖ indiquent les éléments non-négatifs et non-positifs respectivement.

Puisque les éléments situés dans la $i^{\text{ème}}$ colonne et dans les lignes bloquées sont nuls, les éléments dans la $i^{\text{ème}}$ ligne pour les variables non-basiques fixées doivent être nuls.

Mais ces dernières doivent avoir au moins un élément non nul car comme la variable correspondant à la $i^{\text{ème}}$ colonne était croissante, on avait découvert une borne pour une variable non-basique dans la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Il en résulte qu'aucune variable non-basique n'est fixée. Donc la $i^{\text{ème}}$ ligne doit être la ligne critique pour une variation de λ

Deux possibilités se présentent alors : $a_i > 0$ et $a_i < 0$ ($a_i = 0$ est impossible car $\lambda^* = -\frac{b_i}{a_i}$)

Si la $i^{ème}$ ligne correspond à une variable de base du type y, on peut écrire que :

$a_i = e_i^T A_{11}^{-1} a^1 = a^{1T} (A_{11}^T)^{-1} e_i$. Puisque $(A_{11}^T)^{-1} e_i \geq 0$ (et $\neq 0$), (grâce à (10)) on conclut que $a_i > 0$

Si la $i^{ème}$ ligne correspond à une variable de base du type x, on peut écrire que :

$$a_i = e_i^T (a_2 - A_{21} A_{11}^{-1} a^1) = e_i^T a^2 - a^{1T} (A_{11}^T)^{-1} A_{21}^T e_i$$

Puisque $a^1 \geq 0$, $a^2 \geq 0$, et $(A_{11}^T)^{-1} A_{21}^T e_i \leq 0$ (grâce à (9)), on conclut que $a_i > 0$

De plus, puisque $\lambda^* = -\frac{b_i}{a_i} > 0$ et $a_i > 0$, on peut dire que $b_i < 0$.

Alors, on peut dire qu'il n'y a pas de solution au problème pour $\lambda = 0$ (voir test d'impossibilité)

Cela veut dire que, si $-A$ est une L-matrice, un arrêt dans une colonne peut seulement se produire si λ est une borne inférieure et si aucune variable non-basique n'a de valeur fixée.

Annexe relative au chapitre II

Annexe 9 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Faire un pivotage sur a_{11}, revient à prémultiplier la matrice A par la matrice E_1

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}\, a_{11}^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}\, a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat de ce pivotage est donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{*} & \cdots & a_{1n}^{*} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{*} & \cdots & a_{nn}^{*} \end{pmatrix}$

De même, faire un pivotage sur a_{22}^{*} revient à prémultiplier cette matrice par la matrice

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}^{*} \cdot a_{22}^{*-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{*-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{32}^{*} \cdot a_{22}^{*-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2}^{*} \cdot a_{22}^{*-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors,

$$E_2\, E_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{22} & 0 \\ B & I \end{pmatrix}^{-1}$$

où $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}$

on a donc $E_2 \; E_1 = \begin{pmatrix} A_{22}^{-1} & 0 \\ -B A_{22}^{-1} & I \end{pmatrix}$

et encore $\det(E_2 E_1) = \det E_2 . \det E_1 = \det A_{22}^{-1}$

$$a_{22}^{*-1} . a_{11}^{-1} = \det A_{22}^{-1}$$

$$\Rightarrow a_{22}^{*} = \frac{\det A_{22}}{a_{11}}$$

donc un élément principal est le rapport de deux mineurs principaux successifs de A.
D'une façon générale, on peut le montrer pour le pivot de la $k^{\text{ième}}$ transformation
Après la $(k-1)^{\text{ième}}$ transformation, la matrice A a été prémultipliée par

$$E_{k-1} \; --- \; E_2 \; E_1 = \begin{pmatrix} A_{k-1,k-1}^{-1} & 0 \\ -B A_{k-1,k-1}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

où $A_{k-1,k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} \end{pmatrix}$

Après la $k^{\text{ième}}$ transformation, la matrice A a été prémultipliée par

$$E_k \; E_{k-1} \; ---- \; E_2 \; E_1 = \begin{pmatrix} A_{kk}^{-1} & 0 \\ -B^{*} A_{kk}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

où $A_{kk} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ et $B^* = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k} \end{pmatrix}$

A noter que $E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -d_{1k}\,d_{kk}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -d_{2k}\,d_{kk}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{kk}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_{nk}\,d_{kk}^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; c'est à dire après la $(k-1)^{\text{ième}}$ transformation, on pivote sur l'élément principal d_{kk}

les éléments d_{ij} sont les éléments de la matrice A de départ, (c'est à dire les a_{ij}) ayant subis les $(k-1)$ transformations.

On a donc $\det(E_k\,E_{k-1} \cdots E_2\,E_1) = \det E_k . \det E_{k-1} \cdots E_2\,E_1 = \det A^{-1}_{k,k}$

$$= d^{-1}_{kk} . \det A^{-1}_{k-1,k-1} = \det A^{-1}_{k,k}$$

$$\Rightarrow d_{kk} = \frac{\det A_{k,k}}{\det A_{k-1,k-1}}$$

Cette formule nous donne le pivot de la $k^{\text{ième}}$ transformation comme rapport de deux mineurs principaux successifs de la matrice A.

Annexe relative au chapitre III

Annexe 10 :

Si un élément diagonal d'une matrice C, symétrique et semi-définie négative est nul, alors les éléments de la même ligne et de la même colonne doivent être nuls.

Puisque C est semi-définie négative, il faut que $x^T C x \leq 0 \quad \forall x$, et de là, il faut que tous les éléments principaux (c'est-à-dire diagonaux) soient non positifs.

Supposons que c_{kk} est nul (par hypothèse) et posons $I = \{i \text{ tel que } c_{ii} < 0\}$ et $J = \{j \text{ tel que } c_{jj} = 0\}$

1er cas.

Montrons que $\forall i \in I$, $c_{ik} = c_{ki} = 0$. A cet effet, supposons $c_{ik} \neq 0$ et prenons pour x le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est 1 et la $k^{\text{ième}}$ composante est $-\frac{c_{ii}}{c_{ik}}$, et 0 partout ailleurs. Nous avons alors que :

$$\Big(0 \cdots 0 \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\text{ composante}} 0 \cdots 0 \underbrace{-\frac{c_{ii}}{c_{ik}}}_{k^{\text{ième}}\text{ composante}} 0 \cdots 0\Big)
\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
c_{i1} & & c_{ii} & \cdots & c_{ik} & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
c_{k1} & & c_{ki} & \cdots & c_{kk} = 0 & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{c_{ii}}{c_{ik}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cdots \underbrace{0}_{i^{\text{ème}}\text{ composante}} \cdots\cdots \underbrace{c_{ik}}_{k^{\text{ième}}\text{ composante}} \cdots\Big)
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{c_{ii}}{c_{ik}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -c_{ii} > 0$$

; donc pour un tel x, nous avons $x^T C x > 0$, ce qui est absurde.

Il faut donc que $\forall i \in I$ $\quad c_{ik} = 0$ et aussi que $c_{ki} = 0$ puisque C est symétrique.

<u>2e cas :</u>

Montrons que $\forall j \in J$, $c_{jk} = c_{kj} = 0$. A cet effet, supposons $c_{jk} \neq 0$ et prenons pour x le vecteur dont la $j^{\text{ème}}$ composante est 1 et la $k^{\text{ième}}$ composante est $\frac{1}{c_{jk}}$, et 0 partout ailleurs.

nous avons alors que:

$$\Big(0 \cdots 0\ \underbrace{1}_{j^{\text{ième}}\text{ composante}}\ 0 \cdots 0\ \underbrace{\frac{1}{c_{jk}}}_{k^{\text{ième}}\text{ composante}}\ 0 \cdots 0\Big) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ c_{j1} & & c_{jj} & \cdots & c_{jk} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & & c_{kj} & \cdots & c_{kk}=0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{c_{jk}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cdots\ \underbrace{1}_{j^{\text{ième}}\text{ composante}}\ \cdots\ \underbrace{c_{jk}}_{k^{\text{ième}}\text{ composante}}\ \cdots\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{c_{jk}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$ qui est > 0 ; donc pour un tel x,

nous avons $x^T C x > 0$, ce qui est absurde.

Il faut donc $c_{jk} = 0 = c_{kj}$, $\quad \forall j \in J$.

Conclusion

Comme nous l'avons vu au chapitre I de la deuxième partie, aucun algorithme ne résout encore le problème linéaire complémentaire pour une matrice A arbitraire et un vecteur b quelconque.
L'algorithme exposé dans ce mémoire converge, si A est une L-matrice. Pour cette classe de matrices, on est sûr de trouver une solution au problème, ou de montrer que le problème est impossible.
Il serait intéressant d'adapter certains algorithmes ou d'en trouver de nouveaux qui permettraient de résoudre le problème linéaire complémentaire pour certaines classes de matrices beaucoup plus vastes; et de démontrer la convergence de ces algorithmes.
Etant donné que le problème linéaire complémentaire a une solution si la matrice A est régulière (au sens du chapitre II, première partie) et si le vecteur b est quelconque (chapitre III. 1re partie) on pourrait essayer de développer un algorithme qui convergerait dans ce cas.

Il serait également intéressant d'étudier les différents problèmes qui peuvent se présenter comme cas particuliers du problème complémentaire; de s'intéresser à certains algorithmes qui les résolvent et de comparer ces algorithmes avec la résolution du problème via le problème complémentaire. Par exemple, étant donné qu'un programme quadratique se présente, via les conditions de Kuhn et Tucker, comme un cas particulier du problème linéaire complémentaire. (voir première partie. chapitre I), il serait intéressant de comparer l'algorithme de Frank et Wolfe*, avec notre algorithme de la méthode paramétrique.

Une étude plus large du problème complémentaire, notamment son application dans d'autres domaines que la programmation mathematique

serait à envisager, en particulier en théorie des jeux.
Pour les problèmes de jeux bimatriciels, voir Lemke et Howson
"Equilibrium points of bimatrix games" C.E. Lemke and J.T. Howson Jr.
Journal of the SIAM. Vol. 12 (1964).
+Pour les programmes quadratiques, voir FRANK et Wolfe.
"An Algorithm for quadratic programming" Marguerite Frank
and Philip Wolfe, Naval research logistics quartely 3 (1956)

Bibliographie.

[A] "La programmation non linéaire" H.P. Künzi et W. Krelle
Paris Gauthier-Villars Editeur (1969)

[B] "Game Theory" Guillermo Owen
Philadelphia W.B. Saunders Company (1968)

[C] "Some Topics in two-person games" T. Parthasarathy
New-york American Elsevier. Publishing Company (1971)

[D] "The complementarity problem" S. Karamardian
Mathematical Programming 2 (1972)

[E] "The non linear complementarity problem with applications"
Part I S. Karamardian
Jota 4 ; 2 (1969)

[F] "The non linear complementarity problem with applications"
Part II S. Karamardian
Jota 4 ; 3 (1969)

[G] "Symmetric Dual Non linear Programs"
Dantzig G.B., Eisenberg E., Cottle R.W.
University of California at Berkeley. Operations Research Center, Report No 30 IER (1962)

[H] "Non linear Programs with positively Bounded Jacobians"
Cottle R.W.
SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 14, n° 1 (1966)

[I] "Espaces topologiques, fonctions multivoques" C. Berge
DUNOD PARIS (1966)

[J] "Optimisation dans $\mathbb{R}^n$" (programmation mathématique)
P. Huard
Publication du laboratoire de calcul de l'université des Sciences et Techniques de Lille (Janvier 1972)

[K] "The linear complementarity problem" B. Curtis Eaves
Management Science 17 (1971)

[L] "Monotone solutions of the parametric linear complementarity problem" Richard W. Cottle
Mathematical Programming 3 (1972)

[M] "A Complementary variant of Lemke's method for the linear complementary problem" C. Van de Panne.
Mathematical Programming 7 (1974)

[N] "Methods for linear and quadratic programming" Cornelis van de Panne.
North-Holland American Elsevier (1975)

[O] "Theory of linear and non-linear programming" S. Vajda
London Longman Group limited (1974)

[P] "Complementary Pivot theory of mathematical programming" R.W. Cottle and G.B. Dantzig
Linear Algebra and its applications, 1 (1968)

[Q] "Generalization of the linear complementarity problem" R.W. Cottle and G. B. Dantzig
Journal of Combinatorial Theory (1969)

[R] "On complementary Pivot Theory" C. E. Lemke
Math. of the Decision Sciences, American Mathematical Society. Eds G. B Dantzig and A.F. Veinott Jr (1968)

[S] "Non linear programming" Olvi L. MANGASARIAN
Tata Mac Graw-Hill
Publishing company Ltd. Bombay New-Delhi