THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Recherche de solutions périodiques de systèmes d'équations différentielles perturbées

Carpent, Véronique; Hubin, Jacques

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES ND DE LA PAIX

NAMUR

ANNEE ACADEMIQUE 1975- 1976

RECHERCHE DE SOLUTIONS PERIODIQUES DE SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES PERTURBEES

Mémoire présenté pour
l'obtention du grade
de licencié en sciences
mathématiques

PROMOTEUR

G. PLOTNIKOVA

CARPENT VERONIQUE

HUBIN JACQUES

Introduction :

La méthode de Poincaré permet de trouver des solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non linéaires contenant un petit paramètre ε. On suppose que pour ε nul, l'ordre du système ne change pas. La méthode proposée par Poincaré (1890-1892) lui permettait de résoudre les problèmes de la mécanique céleste. Dans la suite, la méthode se révéla bien adaptée aux applications de mécanique générale, d'électrotechnique et de physique. C'est une des principales méthodes utilisées dans l'étude des oscillations non linéaires.

L'idée fondamentale de la méthode consiste à envisager une solution périodique du système pris en $\varepsilon = 0$ comme solution génératrice et ensuite à chercher une solution du système complet au voisinage de celle-ci en perturbant les conditions initiales de cette solution génératrice. Le choix de ces conditions initiales est déterminé par les conditions de périodicité des solutions cherchées. Ces conditions forment un certain système d'équations qui doivent être satisfaites pour $\varepsilon = 0$. Cette condition permet de déterminer les conditions initiales de la solution génératrice. Pour assurer l'unicité de la solution du système complet, il faut supposer que ces conditions initiales sont racines simples de l'équation de bifurcation, ce qui est équivalent à la non nullité d'un certain déterminant fonctionnel.

Dans le chapitre I de ce travail, nous avons étudié justement le cas des racines multiples. Cette étude a été faite pour une équation quasi-linéaire autonome. En pratique, ce cas n'est pas tellement intéressant, mais au point de vue de la théorie de bifurcation, il présente un certain intérêt.

Dans le chapitre II, nous avons étudié le problème des solutions stables d'un système quasi-linéaire non autonome à l'aide du diagramme de Newton [11].

Par la suite, nous avons proposé une certaine simplification de la méthode de Poincaré en l'illustrant par l'étude d'un système linéaire perturbé (chapitre IV) et d'un système non linéaire perturbé (chapitre V).

TABLE DES MATIERES

0. La méthode du diagramme de Newton.

1. La méthode du diagramme de Newton.

Soit $F(\beta, \varepsilon)$ un pseudopolynôme en β :

$$F(\beta, \varepsilon) = \sum_{S=o}^{n} F_S(\varepsilon) \beta^S \tag{1.1}$$

où $F_S(\varepsilon) = (\sum_{r=o}^{\infty} F_{rS} \varepsilon^{r/q}) \varepsilon^{\rho_S}$.

Ici $F_{rS} \in \mathbb{C}$, β et ε sont des variables complexes $\rho_S \in \mathbb{Q}^+$, $q \in \mathbb{N}_o$, $F_n(\varepsilon) \neq 0$, $F_o(\varepsilon) \neq 0$. Si $F_S(\varepsilon) \neq 0$, on peut dire que $F_{oS} \neq 0$. Alors sans perdre de généralité, on a $F_{oo} \neq 0$ et $F_{on} \neq 0$. Dans l'équation

$$F(\beta, \varepsilon) \tag{1.2}$$

nous cherchons β sous la forme de série par rapport à ε :

$$\beta(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{\lambda_i} \varepsilon^{\lambda_i} \tag{1.3}$$

où $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ $A_{\lambda_1} \neq 0$, on a

$$\beta(\varepsilon) = A_{\lambda_1} \cdot \varepsilon^{\lambda_1} + V_1 \tag{1.4}$$

où $V_1 = o(\varepsilon^{\lambda_1})$ pour $\varepsilon \to 0$.

Pour trouver A_{λ_1} et λ_1, on met $\beta(\varepsilon)$ de (1.4) dans (1.2) et on annule les coefficients de même puissance de ε (en commençant par les plus petites puissances). Comme nous n'avons pas d'information sur λ_1, nous ne savons pas quels termes correspondent aux plus petites puissances de ε. On peut cependant affirmer que les termes des plus petites puissances de ε sont parmi les termes :

$$F_{oo} \varepsilon^{\rho_o}, F_{ok} A_{\lambda_1}^k \varepsilon^{\rho_k + k\lambda_1}, F_{on} A_{\lambda_1}^n \varepsilon^{\rho_n + n\lambda_1} \tag{1.5}$$

où k prend les valeurs 1, 2, ..., n-1 pour lesquelles $F_{ok}(\varepsilon) \neq 0$. Comme dans (1.5), tous les coefficients F_{oS} ne sont pas nuls, il faut (pour annuler les termes des plus petites puissances) qu'au moins deux nombres parmi :

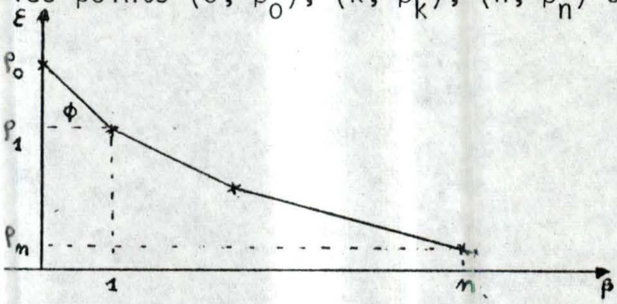
$$\rho_o, \rho_k + k\lambda_1, \rho_n + n\lambda_1 \tag{1.6}$$

coïncident et que les autres ne soient pas inférieurs à ceux-ci. De cette façon, nous pouvons trouver λ_1 et par la suite en annulant la somme des coefficients des termes (1.5) qui ait les mêmes puissances, on pourra trouver A_{λ_1}. Donc λ_1 doit être une racine des équations :

$$\rho_S + S\lambda_1 = \rho_i + i\lambda_1 \quad (S \neq i,\ F_S(\varepsilon) \neq 0,\ F_i(\varepsilon) \neq 0)$$

telle que les autres expressions (1.6) pour cette valeur de λ donnent les valeurs qui ne sont pas inférieures aux $\rho_S + S\lambda_1$.

Pour trouver les valeurs, on utilise le diagramme de Newton. Dans un plan on choisit un système de coordonnées cartésiennes (X, Y) et on porte les points (o, ρ_o), (k, ρ_k), (n, ρ_n) où k a les mêmes valeurs que dans (1.5).



Plaçons une demi-droite le long de l'axe OY avec l'origine au point (o, ρ_o) Tournons dans le sens anti-horlogique jusqu'au moment où la droite touche un point du diagramme, par exemple $(1, \rho_1)$

La tangente de l'angle que fait la droite L passant par (o, ρ_o) et $(1, \rho_1)$ avec la direction négative de l'axe OX donne une des valeurs possibles pour λ_1. En effet, on a

$$\rho_o - \rho_1 = 1 \,.\, \lambda_1 \text{ ou } \rho_o = \rho_1 + 1\,\lambda_1$$

et pour toute autre droite parallèle à L et passant par un autre point (k, ρ_k) qui n'est pas sur ce morceau de diagramme, le point d'intersection avec l'axe OY se trouve plus haut que le point (o, ρ_o), donc :

$$\rho_k + k\lambda_1 > \rho_1 + 1\,\lambda_1 = \rho_o$$

En continuant ce procédé, cette fois à partir du point $(1, \rho_1)$, nous trouverons toutes les valeurs possibles pour λ_1.

Quant aux valeurs possibles de A_{λ_1}, elles peuvent être trouvées comme suit : soient (i, ρ_i) et (j, ρ_j) les bouts d'un segment du diagramme.

Pour tous les points de ce segment on a $\rho_k + k\,\lambda_1 = \sigma$ = constante. En substituant (1.4) dans (1.2) et en annulant la somme des coefficients des termes ε^σ on a :

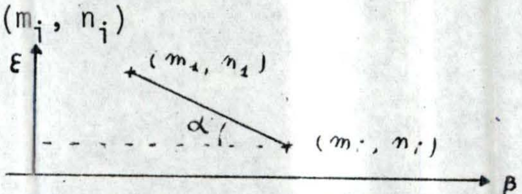
$$\sum_{k=i}^{j\,\star} F_{ok}\, A^k_{\lambda_1} = 0 \tag{1.7}$$

où ($\star$) veut dire qu'on prend les valeurs de k qui vérifient la condition $\rho_k + k\,\lambda_1 = \sigma$. Cette équation qui s'appelle *équation déterminante* donne j-i valeurs de $\beta(\varepsilon)$ (voir démonstration plus loin). On a autant de solutions que la projection de ce morceau de diagramme sur l'axe horizontal.

En utilisant cette méthode, on a toutes les n valeurs pour $\beta(\varepsilon)$. De même on trouve les autres approximations ($V_1 = A_{\lambda_2}\,\varepsilon^{\lambda_2} + V_2$).

- Quel est le nombre de solutions de l'équation déterminante associée à un segment du diagramme ?

Soit un morceau de diagramme L avec pour points extrêmes les points (m_1, n_1) et (m_i, n_i)



$$\text{tg}\,\alpha = \lambda \text{ donc } \beta = A_\lambda\,\varepsilon^\lambda + V$$

Nous écrivons alors $F(\beta, \varepsilon)$ sous la forme suivante :

$$L_{m_1 n_1}\,\beta^{m_1}\,\varepsilon^{n_1} + L_{m_2 n_2}\,\beta^{m_2}\,\varepsilon^{n_2} + \ldots + L_{m_i n_i}\,\beta^{m_i}\,\varepsilon^{n_i} + \sum_\nu \sum_\mu \beta^\mu\,\varepsilon^\nu\,L_{\mu\nu} = 0$$

où l'on a mis au début les termes qui correspondent aux points sur le segment considéré

$$\lambda = \frac{n_1 - n_i}{m_i - m_1}$$

Soit q le plus grand commun diviseur des nombres $n_1 - n_i$ et $m_i - m_1$; alors $\exists\, r_i, S_i$ tels que $m_i - m_1 = S_i\, q$

$$n_1 - n_i = r_i\, q$$

donc

$$\lambda = \frac{n_1 - n_i}{m_i - m_1} = \frac{r_i}{S_i}$$

Soit $(m_j, n_j) \in$ segment L, $1 < j \leqslant i \Rightarrow \dfrac{n_1 - n_j}{m_j - m_1} = \dfrac{r_j}{S_j} = \lambda$

Donc $\dfrac{r_2}{S_2} = \ldots = \dfrac{r_j}{S_j} = \ldots = \dfrac{r_i}{S_i}$ fractions non simplifiables (par définition de q).

$\Rightarrow r_i = r_j,\ S_i = S_j \quad j = 1, 2, \ldots i$. Sur le même segment L, l'indice i aux variables r_i et S_i n'a pas de raison d'être, on le négligera donc. On a alors

$$\frac{n_1 - n_j}{m_j - m_1} = \frac{r}{S} \qquad \forall\ j \in \{1, 2, \ldots, i\}$$

$\Rightarrow m_1\ r + n_1\ S = m_2\ r + n_2\ S = \ldots = m_i\ r + n_i\ S < \mu\ r + \nu\ S.$

Nous faisons le changement de variable suivant : $\beta = x^r\ \eta$

$\varepsilon = x^S$

L'équation $F(\beta, \varepsilon)$ devient :

$$L_{m_1n_1}\ \eta^{m_1}\ x^{rm_1}\ x^{Sn_1} + \ldots + L_{m_in_i}\ \eta^{m_i}\ x^{rm_i}\ x^{Sn_i} + \sum_\mu \sum_\nu L_{\mu\nu}\ x^{\mu r+\nu S}\ \eta^\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow (L_{m_1n_1}\ \eta^{m_1} + L_{m_2n_2}\ \eta^{m_2} + \ldots + L_{m_in_i}\ \eta^{m_i})x^{rm_i+n_iS} + \sum_\mu \sum_\nu L_{\mu\nu}\ x^{\mu r+\nu S}\ \eta^\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi(\eta, x) = (L_{m_1n_1}\ \eta^{m_1} + \ldots + L_{m_in_i}\ \eta^{m_i}) + \sum_\mu \sum_\nu L_{\mu\nu}\ x^p\ \eta^\mu = 0$$

avec $p = (\mu r + S\nu) - (m_1 r + n_1 S)$. On doit trouver $\eta = \eta(x)$ (donc $\beta(\varepsilon)$ sera connu). $\psi(\eta, o)$ donne alors l'*équation déterminante* associée au segment L

$$\psi(\eta, o) = L_{m_1n_1} + L_{m_2n_2}\ \eta^{m_2-m_1} + \ldots + L_{m_in_i}\ \eta^{m_i-m_1} = 0$$

<u>1er cas</u> : Supposons que l'équation déterminante a des racines simples. Soient ces racines $\eta_1, \ldots, \eta_{Sq}$ $\quad Sq = m_i - m_1$.

Sq = projection sur axe horizontal du segment de diagramme considéré

= degré du polynôme appelé équation déterminante.

$$\Rightarrow \psi(\eta, x) = L_{m_in_i}\ \eta^{m_1}\ (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \ldots (\eta - \eta_{Sq}) + \sum_\mu \sum_\nu L_{\mu\nu}\ \eta^\mu\ x^p = 0$$

Soit η_σ racine simple de l'équation déterminante $\psi(\eta, o) = o$, $\sigma \in \{1, 2, \ldots, Sq\}$

$$\psi(\eta_\sigma, o) = o$$
$$\psi'_\eta(\eta_\sigma, o) \neq o$$

Par le théorème des fonctions implicites, on obtient la solution $\eta(x)$

$$\eta = \eta_\sigma + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma_i} x^i$$

On revient alors aux variables de départ

$$\beta = x^r \eta_\sigma + \sum_i a_{\sigma_i} x^{i+r}$$

d'où

$$\beta(\varepsilon) = \eta_\sigma \varepsilon^{r/S} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma_i} \varepsilon^{\frac{i+r}{S}} \qquad \sigma = 1, \ldots, Sq \tag{1.8}$$

Donc le segment de diagramme de "pente" $\lambda = \frac{r}{S}$ permet d'exprimer $\beta(\varepsilon)$ comme suit $\beta(\varepsilon) = \eta_\sigma \varepsilon^\lambda + \ldots$ où η_σ est solution de l'équation déterminante.

Si toutes les équations déterminantes (1 pour chaque segment) ont toujours des racines simples, on aura alors m solutions $\beta(\varepsilon)$ pour l'ensemble du diagramme de Newton (où m est la plus petite puissance de β dans l'expression $F(\beta, o)$ (partie indépendante de ε pur) (m = projection du diagramme sur axe horizontal).

<u>2ème cas</u> : Supposons que l'équation déterminante admet des racines multiples. Soit η_σ racine de multiplicité k ($k > 1$) de l'équation déterminante $\psi(\eta, o) = o$ $\psi(\eta_\sigma, o) = o$ et $\psi'_\eta(\eta_\sigma, o) = o$ $\Rightarrow$ on ne peut plus appliquer le théorème des fonctions implicites. Faisons le changement de variable suivant :

$$\beta = x^r \eta \qquad \eta(x) = ?$$
$$\varepsilon = x^S$$

nous mettons $\eta = \eta_\sigma + \gamma$ dans l'équation $\psi(\eta, x) = 0$

$$\Rightarrow \psi(\eta_\sigma + \gamma, x) = L_{m_i n_i} (\eta_\sigma + \gamma - \eta_1) \ldots (\eta_\sigma + \gamma - \eta_\sigma)^k \ldots (\eta_\sigma + \gamma - \eta_{Sq}) +$$
$$+ \sum_\mu \sum_\nu L_{\mu\nu} (\eta_\sigma + \gamma)^\mu x^p = 0$$

équation en γ et x avec la plus petite puissance de $\gamma \equiv k$

$$\psi(\eta_\sigma + \gamma, x) = L_{m_i n_i} (A_o \gamma^k + A_1 \gamma^{k+1} + \ldots) + \sum_\mu \sum_\nu B_{\mu\nu} \gamma^\mu x^p = 0$$

Il faut utiliser le diagramme de Newton pour cette équation où γ est la fonction inconnue (seconde approximation de $\beta(\varepsilon)$ lorsque la première approximation $\eta_\sigma \varepsilon^{r/q}$ provient d'une racine multiple de l'équation déterminante).

Si la nouvelle équation déterminante a des racines simples, elle en aura k

$$\Rightarrow \gamma = V_1 \, x^{r_1/S_1} + P \qquad \frac{r_1}{S_1} \in \mathbb{Q}^+$$

$$\Rightarrow \eta = \eta_\sigma + V_1 \, x^{r_1/S_1} + P$$

$$\Rightarrow \beta = \eta_\sigma \, \varepsilon^{r/S} + V_1 \, \varepsilon^{\frac{r}{S} + \frac{r_1}{S S_1}} + P \, . \, x^r \qquad (1.9)$$

Il faut encore déterminer V_1 par la méthode des coefficients indéterminés.

Résumé : Dans le cas où l'équation déterminante admet des racines multiples, il faut passer à l'approximation suivante de $\beta(\varepsilon)$ pour avoir effectivement le nombre voulu de solutions $\beta(\varepsilon)$ (= m = projection du diagramme sur l'axe horizontal = plus petite puissance de β pur dans $F(\beta, \varepsilon)$).

Propriétés du développement $\beta(\varepsilon) = A_{\lambda_1} \, \varepsilon^{\lambda_1} + A_{\lambda_2} \, \varepsilon^{\lambda_2} + \ldots$ [3, 4, 5]

a) La suite des puissances rationnelles de ε est une suite croissante $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ car (1.8) et (1.9);

b) les nombres rationnels λ_1, λ_2 ... ont un même dénominateur commun fini (1.8);

c) les séries $\Sigma \, A_{\lambda_i} \, \varepsilon^{\lambda_i}$ sont convergentes au voisinage de $\varepsilon = 0$;

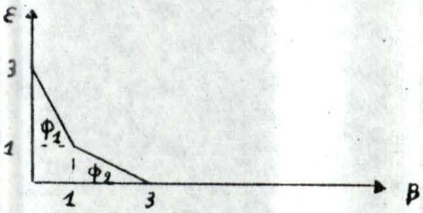
d) les petites solutions ($\beta \to 0$ si $\varepsilon \to 0$) sont données par les segments descendants du diagramme (puissance positive du petit paramètre ε).

Exemple :

$$F(\beta, \varepsilon) = \varepsilon^3 - 3 \, \varepsilon \, \beta + \beta^3 = 0$$

$$= F_0(\varepsilon) + F_1(\varepsilon)\beta + F_3(\varepsilon)\beta^3$$

ici $\rho_0 = 3$; $\rho_1 = 1$; $\rho_2 =$; $\rho_3 = 0$ $\Rightarrow$ les points du diagramme sont : (o, 3) (1, 1); (3, o).



$\mathrm{tg}\, \phi_1 = \lambda_1 = 2$ dans $\beta(\varepsilon) = A_2 \, \varepsilon^2 + V_2$ (⋆)

$\mathrm{tg}\, \phi_2 = \lambda_2 = 1/2$ dans $\beta(\varepsilon) = A_{1/2} \, \varepsilon^{1/2} + V_{1/2}$ (⋆⋆)

En mettant (⋆) dans l'équation $F(\beta, \varepsilon)$, on a :

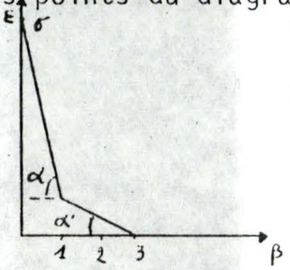
$$F(V,\ \varepsilon) = \varepsilon^3 - 3\ \varepsilon(A_2\ \varepsilon^2 + V_2) + (A_2\ \varepsilon^2 + V)^3 = 0$$

annuler le coefficient de la plus petite puissance de ε : $1 - 3\ A_2 = 0 \Rightarrow$
$A_2 = 1/3$ d'où $\beta(\varepsilon) = 1/3\ \varepsilon^2 + V_2$.
Pour déterminer V_2, on met $\beta(\varepsilon)$ dans l'équation $F(\beta,\ \varepsilon) = 0$ et on obtient :

$$F(V,\varepsilon) = \frac{1}{27}\varepsilon^6 + (-\ 3\ \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^4)V + \varepsilon^2\ V^2 + V^3 = 0 \quad (\star\star\star)$$

$$= F_o(\varepsilon) + F_1(\varepsilon)V + F_2(\varepsilon)V^2 + F_3(\varepsilon)V^3 = 0$$

Les points du diagramme sont (o, 6); (1, 1); (2, 2); (3, o)



$\lambda = \text{tg}\ \alpha = 5$

$\lambda' = \text{tg}\ \alpha' = 1/2$, rejeté car on développe β en série de puissance *croissante* de ε et la première approximation est $\frac{1}{3}\ \varepsilon^2$.

Donc $\beta(\varepsilon) = \frac{1}{3}\ \varepsilon^2 + A_5\ \varepsilon^5 + W$. Pour déterminer A_5 par la méthode des coefficients indéterminés, on met β dans $F(V,\ \varepsilon) = 0$ et on a

$$\frac{1}{27}\ \varepsilon^6 + (-3\ \varepsilon + \frac{1}{3}\ \varepsilon^4)A_5\ \varepsilon^5 + \varepsilon^2\ A_5^2\ \varepsilon^{10} + A_5^3\ \varepsilon^{15} = 0$$

On annule le coefficient de la plus petite puissance de ε

$$\Rightarrow -\ 3\ A_5 + \frac{1}{27} = 0 \ \Rightarrow\ A_5 = \frac{1}{81}$$

Donc $\beta(\varepsilon) = \frac{1}{3}\ \varepsilon^2 + \frac{1}{81}\ \varepsilon^5 + \ldots$ et ainsi de suite pour les ordres supérieurs.

La méthode de Poincaré [6, 7] de recherche des solutions périodiques des équations quasilinéaires dans les cas résonants se ramène à la recherche des n fonctions implicites déterminées par n équations de "bifurcation".

Il est important de remarquer que la méthode du diagramme de Newton appliquée à un pseudopolynôme peut encore être utilisée dans le cas des séries.

- Tout d'abord, envisageons une équation $\phi(\beta,\ \varepsilon) = 0$

$$\phi(\beta,\ \varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} L_{ko}\ \beta^k + \sum_{k=o}^{\infty} \beta^k \sum_{\gamma=1}^{\infty} L_{k\nu}\ \varepsilon^\nu = 0$$

$\phi(\beta, \varepsilon)$ fonction analytique en β et ε au voisinage de l'origine (o, o).
$\phi(o, o) = 0 \Leftrightarrow$ il n'existe pas de terme indépendant de ε et β. Il n'existe pas de terme du premier degré en β. Cette équation est appelée équation de bifurcation

$$\begin{aligned}\phi(\beta, \varepsilon) = {} & L_{20}\, \beta^2 + L_{30}\, \beta^3 + \dots + \\ & + (L_{01}\, \varepsilon + L_{02}\, \varepsilon^2 + L_{03}\, \varepsilon^3 + \dots) \\ & + (L_{11}\, \varepsilon + L_{12}\, \varepsilon^2 + L_{13}\, \varepsilon^3 + \dots)\beta \\ & + (L_{21}\, \varepsilon + L_{22}\, \varepsilon^2 + \dots)\beta^2 + (\dots)\beta^3 + \dots = 0\end{aligned}$$

On doit chercher les petites solutions $\beta(\varepsilon)$ de l'équation $\phi(\beta, \varepsilon) = 0$. On élimine le cas trivial où $L_{k\nu} = 0$, $\forall\, k, \nu$

$$\left.\begin{array}{l} - \text{ Si } \beta = 0 \Rightarrow \phi(0, \varepsilon) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} L_{o\nu}\, \varepsilon^{\nu} \\ \quad \text{Si } L_{on} \text{ est le premier coefficient} \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ nous définissons ord } \phi(o, \varepsilon) = n$$

$$\left.\begin{array}{l} - \text{ Si } \varepsilon = 0 \Rightarrow \phi(\beta, 0) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} L_{ko}\, \beta^{k} \\ \quad \text{Si } L_{mo} \text{ est le premier coefficient} \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ nous définissons ord } \phi(\beta, o) = m$$

Le théorème de préparation de Weierstrass assure que $\phi(\beta, \varepsilon)$ peut être décomposé au voisinage de $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ en un produit d'un pseudopolynôme et d'une fonction analytique en β

$\exists\; G(\beta, \varepsilon) = \beta^m + H_{m-1}\, \beta^{m-1} + \dots + H_1\, \beta + H_o(\varepsilon)$ (polynôme marqué)

$\exists\; Q(\beta, \varepsilon) =$ fonction analytique telle que $Q(o, o) \neq 0$

$H_i(\varepsilon)$ analytique au point $\varepsilon = 0$ tel que $H_i(o) = 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, m-1$

tel que $\phi(\beta, \varepsilon) = G(\beta, \varepsilon)\, Q(\beta, \varepsilon)$ et les petites solutions de $\phi(\beta, \varepsilon) = 0$ sont les petites solutions de $G(\beta, \varepsilon) = 0$.

Donc la méthode du diagramme de Newton est applicable à une équation de bifurcation.

Si on a un système d'équations de bifurcation

$$\phi_i(\beta_1, \dots, \beta_n, \varepsilon) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Alors il faut remplacer le système par un système plus simple (système régulier), puis utiliser le théorème de préparation de Weierstrass et ainsi se ramener à un système formé des polynômes marqués (systèmes équivalents au point de vue des petites solutions).

Il faut chercher alors les petites solutions d'un système de polynômes. Cela revient à trouver le plus grand polynôme commun diviseur des n polynômes du système et à chercher les racines. Nous ne détaillerons pas plus ce cas compliqué mais l'on peut trouver des renseignements sur cette méthode dans [3].

I. Application de la méthode du diagramme de Newton à la recherche de solutions périodiques d'une équation quasi-harmonique et étude de la stabilité de ces solutions.

1.

Considérons un oscillateur quasiharmonique dont l'équation du mouvement est :

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon) \tag{2.1}$$

où f est une fonction analytique d'un petit paramètre ε positif et des variables $x \in E$ et $\dot{x} = Dx$ dans un domaine G où se trouve une solution génératrice ($\varepsilon = 0$) de (2.1). On cherche une solution périodique de (2.1) à l'aide de la méthode de Poincaré [6].

Considérons d'abord l'équation :

$$\ddot{x}_o + k^2 x_o = 0$$

Elle admet la solution :

$$x_o = A_o \cos kt + B_o \sin kt$$

Comme le système (2.1) est autonome, on peut choisir une des conditions initiales pour les solutions périodiques cherchées comme suit :

$$\dot{x}(o) = 0$$

La solution génératrice est alors

$$x_o(t) = A_o \cos kt$$

Appliquons la méthode de variation des conditions initiales de Poincaré pour rechercher la solution périodique de (2.1)

$$x(o) = A_o + \beta \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(o) = 0$$

où β est une fonction de ε telle que $\beta = 0$ pour $\varepsilon = 0$. La solution $X(t, \beta, \varepsilon)$ de (2.1) est une fonction analytique [7] de β, ε pour leurs petites valeurs.

$$X(t) = X_o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} en'(t, A_o + \beta)\varepsilon^n + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t)\beta^i$$

X(t) doit vérifier l'équation (2.1). En annulant la somme des coefficients de même puissance de β et en imposant les conditions initiales, on obtient :

remarque: le symbole en est equivalent au symbole e_n

$$\ddot{A}_i + k^2 A_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

$$A_1(o) = 1 \qquad A_i(o) = 0 \qquad \forall i \geqslant 2$$

$$\dot{A}_1(o) = 0 \qquad \dot{A}_i(o) = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \cos kt$$

$$A_i = 0 \quad \forall i \geqslant 2$$

Dès lors, on a :

$$X(t) = (A_o + \beta)\cos kt + \sum_{n=1}^{\infty} en'(t_1\, A_o + \beta)\, \varepsilon^n$$

ou

$$X(t) = (A_o + \beta)\cos kt + \sum_{n=1}^{\infty} [\, en(t) + \frac{\partial en}{\partial(A_o+\beta)} \frac{\partial(A_o+\beta)}{\partial\beta} \beta +$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 en}{\partial(A_o+\beta)^2} (\frac{\partial(A_o+\beta)}{\partial\beta})^2 \beta^2 + \ldots]\, \varepsilon^n$$

Or A_o et β interviennent dans les conditions initiales de façon symétrique d'où on obtient l'égalité des opérateurs différentiels suivants :

$$\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial(A_o+\beta)} \frac{\partial(A_o+\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial(A_o+\beta)} \frac{\partial(A_o+\beta)}{\partial A_o} = \frac{\partial}{\partial A_o}$$

Nous avons finalement X(t) sous la forme :

$$X(t) = (A_o + \beta)\cos kt + \sum_{n=1}^{\infty} [\, en(t) + \frac{\partial en(t)}{\partial A_o} \beta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 en(t)}{\partial A_o^2} \beta^2 + \ldots]\, \varepsilon^n \quad (2.$$

Remarquons l'intérêt de la forme de X(t) : seuls les en(t) sont à déterminer e les autres $\frac{\partial en}{\partial A_o}$ ... sont obtenus par dérivation par rapport à A_o. Nos conditio (2.2) deviennent :

$$X(o) = A_o + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} [en(o) + \frac{\partial en(o)}{\partial A_o} \beta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 en(o)}{\partial A_o^2} \beta^2 + ..]\, \varepsilon^n = A_o + \beta$$

$$\dot{X}(o) = \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{e}n(o) + \frac{\partial \dot{e}n(o)}{\partial A_o} \beta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \dot{e}n(o)}{\partial A_o^2} \beta^2 + ..]\, \varepsilon^n = 0$$

En identifiant les coefficients de même puissance de β :

$$\begin{aligned} en(o) &= 0 \\ \dot{e}n(o) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

De même on place (2.3) dans l'équation générale (2.1) et en identifiant les coefficients de même puissance de ε :

$$\frac{d^2en(t)}{dt^2} + k^2\, en(t) = H_n(t) \tag{2.5}$$

où $H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}f}{d\varepsilon^{n-1}}\right)_{\beta=\varepsilon=0}$ est une dérivée totale de la fonction f par rapport à ε. Etant donné (2.4), (2.5),

$$en(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t - \tau)\, H_n(\tau)\, d\tau$$

Une telle procédure établit une récurrence pour calculer les en :

$$H_1(t) = f(X_0, \dot{X}_0, 0) \quad \rightarrow \text{on calcule } e_1$$

$$H_2(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 e_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{e}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 \quad \rightarrow \text{on calcule } e_2, \text{ etc...}$$

Nous avons obtenu une solution de (2.1).

La période T des solutions périodiques dépend de ε et peut être présentée sous la forme :

$$T = T_0 + \alpha(\varepsilon)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}$$

où $\alpha(\varepsilon)$ est une fonction de ε telle que $\alpha = 0$ pour $\varepsilon = 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes de périodicité de $X(t, \beta, \varepsilon)$ sont :

$$X(T_0 + \alpha, \beta, \varepsilon) = A_0 + \beta \tag{2.6}$$

$$\dot{X}(T_0 + \alpha, \beta, \varepsilon) = 0 \tag{2.6bis}$$

L'équation (2.6bis) peut être utilisée pour trouver la fonction $\alpha(\beta, \varepsilon)$ comme une fonction implicite de β et ε. Si $A_0 \neq 0$, $(\ddot{X}(T_0, o, o) = - k^2 A_0)$, le théorème des fonctions implicites nous assure l'existence d'une seule fonction analytique $\alpha(\beta, \varepsilon)$. Cette fonction $\alpha(\beta, \varepsilon)$ peut être présentée comme suit [9] :

$$\alpha(\beta, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} [N_n + \frac{dN_n}{dA_o}\beta + \frac{1}{2!}\frac{d^2N_n}{dA_o^2}\beta^2 + \ldots]\varepsilon^n$$

$$(2.6bis) \rightarrow \dot{x}(T_o + \alpha, \beta, \varepsilon) = \dot{x}(T_o, \beta, \varepsilon) + \ddot{x}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha + \dddot{x}(T_o, \beta, \varepsilon)\frac{\alpha^2}{2!} + \ldots = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{e}n(T_o) + \frac{\partial \dot{e}n(T_o)}{\partial A_o}\beta + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \dot{e}n(T_o)}{\partial A_o^2}\beta^2 + \ldots]\varepsilon^n + \alpha[-k^2(A_o + \beta) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{e}n(T_o) + \frac{\partial \ddot{e}n(T_o)}{\partial A_o}\beta + \ldots)\varepsilon^n] + \frac{\alpha^2}{2!}[\sum_{n=1}^{\infty}(\dddot{e}n + \frac{\partial \dddot{e}n(T_o)}{\partial A_o^2}\beta^2 +$$

$$+ \ldots)\varepsilon^n] + \ldots = 0$$

En comparant les termes de même puissance de ε, on pourra connaître les N_n :

$$\dot{e}_1(T_o) + N_1(-k^2 A_o) = 0 \qquad \rightarrow \quad N_1 = \frac{\dot{e}_1(T_o)}{k^2 A_o}$$

$$\dot{e}_2(T_o) + N_2(-k^2 A_o) + N_1\ddot{e}_1(T_o) = 0 \qquad \rightarrow \quad N_2 = \frac{1}{k^2 A_o}(\dot{e}_2(T_o) + N_1\ddot{e}_1(T_o))$$

$$\dot{e}_3(T_o) + N_3(-k^2 A_o) + N_1\ddot{e}_2(T_o) + N_2\ddot{e}_1(T_o) + \frac{N_1^2}{2}\dddot{e}_1(T_o) + \frac{N_1^3}{6}k^2 A_o = 0$$

$$\rightarrow N_3 = \frac{1}{k^2 A_o}[\dot{e}_3(T_o) + N_1\ddot{e}_2(T_o) + N_2\ddot{e}_1(T_o) + N_1^2(\frac{\dddot{e}_1}{2}(T_o) + \frac{N_1}{6}k^2 A_o)]$$

$$N_3 = \frac{1}{k^2 A_o}[\dot{e}_3(T_o) + N_2\ddot{e}_1(T_o) + N_1\ddot{e}_2(T_o) +$$

$$+ \frac{1}{2}N_1^2(\dddot{e}_1(T_o) + \frac{1}{3}k^2\dot{e}_1(T_o))]$$

etc...

Reprenons (2.6) et (2.6bis)

$$X(T_o + \alpha, \beta, \varepsilon) = X(T_o, \beta, \varepsilon) + \dot{X}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\ddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon) + \ldots = A_o + \beta$$

$$\dot{X}(T_o + \alpha, \beta, \varepsilon) = \dot{X}(T_o, \beta, \varepsilon) + \ddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha + \frac{\dddot{X}}{2!}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha^2 + \ldots = 0$$

$$(2.6) - \alpha(2.6bis) \Rightarrow X - \frac{1}{2}\ddot{X}\alpha^2 - \frac{1}{3}\dddot{X}\alpha^3 - \frac{1}{8}\alpha^4\ddddot{X} + \ldots = A_o + \beta$$

$$(A_o + \beta)\, 1 + \Sigma(en(T_o) + \frac{\partial en(T_o)}{\partial A_o}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 en(T_o)}{\partial A_o^2}\beta^2 + \dots)\varepsilon^n$$

$$- \frac{\alpha^2}{2}[- k^2(A_o + \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\ddot{e}n(T_o) + \frac{\partial \ddot{e}n}{\partial A_o}(T_o)\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ddot{e}n(T_o)}{\partial A_o^2}\beta^2 + \dots\}\ \varepsilon^n]$$

$$- \frac{1}{3}\alpha^3 [0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\dddot{e}n(T_o) + \frac{1}{2}\frac{\partial \dddot{e}n(T_o)}{\partial A_o}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \dddot{e}n(T_o)}{\partial A_o^2}\beta^2 + \dots\}]$$

$$- \frac{1}{8}\alpha^4 [k^4(A_o + \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\ddddot{e}n(T_o) + \dots\}\ \varepsilon^n]$$

$$+ \dots = A_o + \beta.$$

Nous arrivons à une équation $F(\beta, \varepsilon) = 0$. On identifie cette équation à la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_n + \frac{dM_n}{dA_o}\beta + \frac{d^2M_n}{dA_o^2}\beta^2 + \dots)\varepsilon^n = 0 \tag{2.8}$$

$$M_1 = e_1(T_o)$$

$$M_2 = e_2(T_o) - \frac{N_1^2}{2}(- k^2 A_o)$$

$$= e_2(T_o) + \frac{N_1}{2}\dot{e}_1(T_o)$$

$$M_3 = e_3(T_o) - \frac{N_1^2}{2}\ddot{e}_1(T_o) + k^2 N_1 N_2 A_o$$

$$= e_3(T_o) + N_2\dot{e}_1(T_o) - \frac{1}{2}N_1^2\ddot{e}_1(T_o)$$

$$M_4 = e_4(T_o) + N_3\dot{e}_1(T_o) + \frac{1}{2}A_o k^2 N_2^2 - \frac{1}{8}k^2 A_o N_1^4 -$$

$$- N_1 \{\frac{N_1}{2}\ddot{e}_2(T_o) + N_2\ddot{e}_1(T_o) + \frac{1}{3}N_1^2\dddot{e}_1(T_o)\}$$

etc...

L'équation (2.8) détermine une fonction implicite β de ε. Comme $\varepsilon \neq 0$, divisons (2.8) par ε et utilisons la condition que $\beta(o) = 0$, on a :

$$M_1(A_o) = e_1(T_o) = 0 \tag{2.9}$$

Si $e_1(T_o)$ ne s'annule pas identiquement, l'équation (2.9) détermine les amplitudes (A_o) de la solution génératrice; l'équation (2.9) s'appelle *l'équation des amplitudes principales* et l'équation (2.8) s'appelle *l'équation de bifurcation.* L'équation de bifurcation détermine la condition initiale inconnue $\beta(\varepsilon)$ comme une fonction implicite de ε.

Si $e_1(T_o)$ s'annule identiquement, toutes les dérivées par rapport à A_o de $e_1(T_o)$ sont aussi nulles et on prend comme équation déterminante $M_2(T_o) = 0$ (si elle ne s'annule pas identiquement), etc...

Si $\frac{dM_1}{dA_o} \neq 0$, on a les solutions simples de l'équation déterminante $M_1 = 0$ et on peut trouver [7, 9] une seule solution $\beta(\varepsilon)$ de (2.8) sous forme de série par rapport à ε.

Pour étudier le cas des solutions multiples ($\frac{dM_1}{dA_o} = 0$) de l'équation de bifurcation, utilisons la méthode du diagramme de Newton exposée dans la première partie. Ecrivons l'équation (2.8) sous la forme :

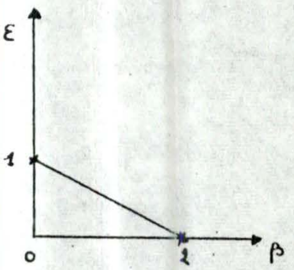
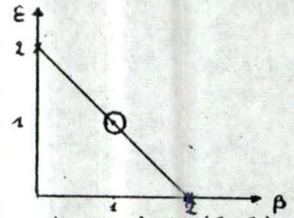
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}\beta^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\beta^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4M_1}{dA_o^4}\beta^4 + \dots \\
&+ M_2\,\varepsilon + M_3\,\varepsilon^2 + M_4\,\varepsilon^3 + \dots \\
&+ \left(\frac{dM_2}{dA_o}\varepsilon + \frac{dM_3}{dA_o}\varepsilon^2 + \dots\right)\beta + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\varepsilon + \frac{d^2M_3}{dA_o^2}\varepsilon^2 + \dots\right)\beta^2 + \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3M_2}{dA_o^3}\varepsilon + \frac{d^3M_3}{dA_o^3}\varepsilon^2 + \dots\right)\beta^3 + \dots = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

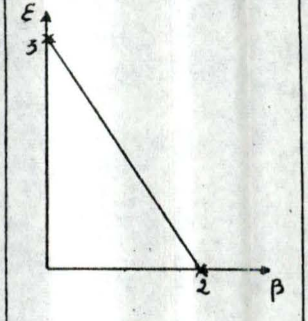
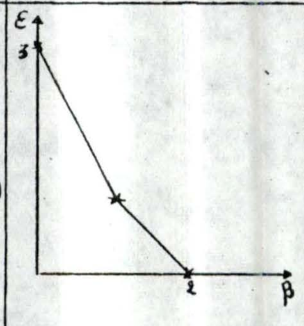
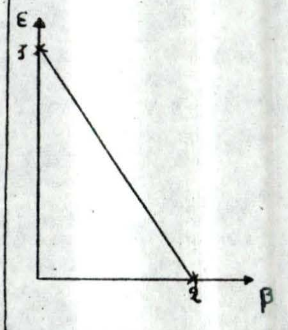
Supposons que l'équation (2.9) ait des racines doubles :

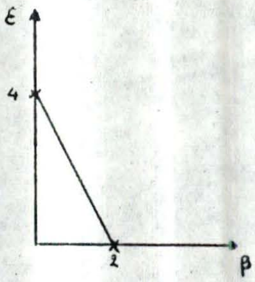
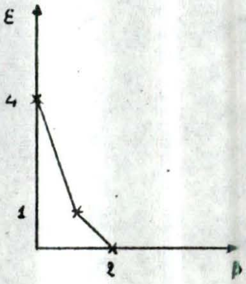
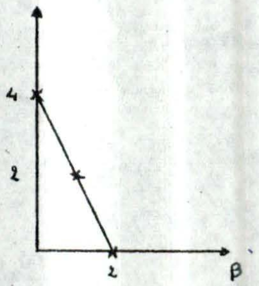
$$M_1(A_o) = 0 \qquad \frac{dM_1}{dA_o} = 0 \qquad \frac{d^2M_1}{dA_o^2} \neq 0$$

Tous les résultats obtenus à l'aide de la méthode du diagramme de Newton sont représentés dans le tableau 1 (cfr annexe 1).

TABLEAU 1.

N°	Supposition	Diagramme de Newton	Expression de $\beta(\varepsilon)$	L'équation déterminante pour les premiers coefficients dans le développement de $\beta(\varepsilon)$.
1	$M_2 \neq 0$		$\varepsilon = A_{1/2}\varepsilon^{1/2} + \ldots$	$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_{1/2}^2 + M_2 = 0$ Il y a deux solutions réelles si M_2 et $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}$ ont les signes opposés.
2	$M_2 = 0$ $M_3 \neq 0$	 Le point (1,1) ou ⊙ correspond au terme $\frac{dM_2}{dA_o}\varepsilon\beta$ dans (2.10). Ce point n'est pas sur le diagramme si $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$.	$\beta = A_1\varepsilon + \ldots$	$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1^2 + \frac{dM_2}{dA_o}A_1 + M_3 = 0 \ (\star)$ Il existe deux solutions réelles si : $\Delta = \left(\frac{dM_2}{dA_o}\right)^2 - 2\,M_3\,\frac{d^2M_1}{dA_o^2} \geqslant 0$ Si l'équation $(\star)$ a des racines doubles, c'est-à-dire : $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} = 0$. Alors nous ne pouvons pas distinguer deux solutions à l'aide de la première approximation.

				Il faut chercher l'approximation suivante : $\beta = A_1\ \varepsilon + V.$
2a	$M_2 = 0$ $M_3 \neq 0$ $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} = 0$ $P_3 \neq 0$		$V = A_{3/2}\varepsilon^{3/2} + ..$	$\frac{1}{2}\ \frac{d^2M_1}{dA_o^2}\ A_{3/2}^2 + P_3 = 0$ où $P_3 = M_4 + \frac{dM_3}{dA_o}\ A_1 + \frac{1}{2}\ \frac{d^2M_2}{dA_o^2}\ A_1^2 + \frac{1}{6}\ \frac{d^3M_1}{dA_o^3}\ A_1^3 \neq 0.$ Il y a deux solutions réelles si P_3 et $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}$ sont de signes opposés. Si $P_3 = 0$, on passe à l'approximation suivante.
3	$M_3=M_2=0$ $M_4 \neq 0$ a) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$ b) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$	 	$\beta = A_2\varepsilon^2 + ..$ $\beta = A_1\ \varepsilon + ..$ $\beta = A_{3/2}\varepsilon^{3/2} + ..$	$M_4 + \frac{dM_2}{dA_o}\ A_2 = 0$ $\frac{1}{2}\ A_1^2\ \frac{d^2M_1}{dA_o^2} + \frac{dM_2}{dA_o}\ A_1 = 0$ Il existe deux solutions réelles $\frac{1}{2}\ \frac{d^2M_1}{dA_o^2}\ A_{3/2}^2 + M_4 = 0$ Il y a deux solutions réelles à condition que M_4 et $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}$ aient des signes opposés.

4	$M_2=M_3=M_4=0$ $M_5 \neq 0$ a) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$		$\beta=A_2\varepsilon^2 + \dots$	$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_2^2 + M_5 = 0$ Il y a deux solutions réelles à condition que M_5 et $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}$ aient des signes opposés.
	b) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$		$\beta=A_3\varepsilon^3 + \dots$ $\beta=A_1\,\varepsilon + \dots$	$\frac{dM_2}{dA_o}A_3 + M_3 = 0$ $\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1^2 + \frac{dM_2}{dA_o}A_1 = 0$ Il y a deux solutions réelles.
	c) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$ $\frac{dM_3}{dA_o} \neq 0$		$\beta=A_2\varepsilon^2 + \dots$	$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_2^2 + \frac{dM_3}{dA_o}A_2 + M_5 = 0$ le cas semblable à 2, etc.

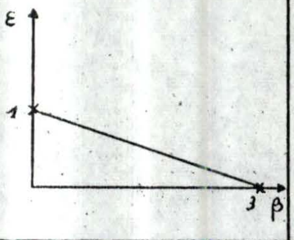
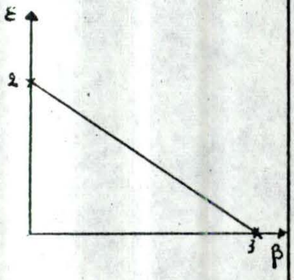
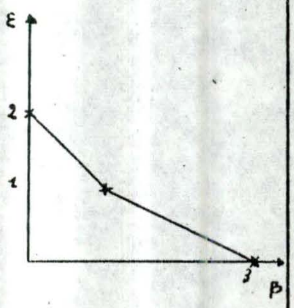
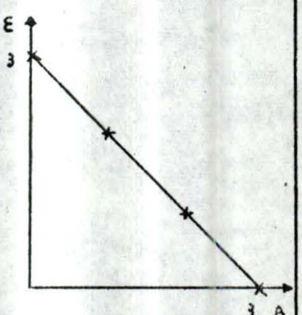
Donc, si les équations des amplitudes principales ont des solutions doubles, alors l'équation (2.10) détermine deux fonctions implicites de ε présentées en séries par rapport à ε ou $\varepsilon^{1/2}$. Il n'existe pas de solutions si certaines conditions ne sont pas vérifiées.

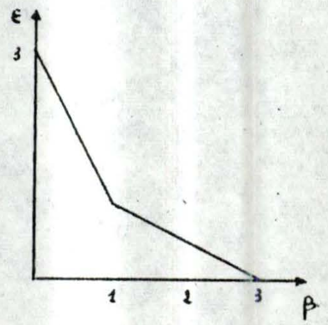
La solution périodique de l'équation (2.1) correspondant aux solutions doubles des équations de bifurcation est présentée aussi en série (2.4) par rapport à ε ou $\varepsilon^{1/2}$. Supposons que l'équation (2.3) ait des racines triples :

$$M_1(A_o) = 0,\ \frac{dM_1}{dA_o} = \frac{d^2M_1}{dA_o^2} = 0,\ \frac{d^3M_1}{dA_o^3} \neq 0.$$

Quelques résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.

TABLEAU 2.

<table>
<tr><th>N°</th><th>Supposition</th><th>Diagramme de Newton</th><th>Expression pour $\beta(\varepsilon)$</th><th>L'équation déterminante pour les premiers coefficients dans le développement de $\beta(\varepsilon)$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$M_2 \neq 0$</td><td></td><td>$\beta = A_{1/3}\varepsilon^{1/3} + ..$</td><td>$\frac{1}{2}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{1/3}^3 + M_2 = 0$
Il existe toujours une solution réelle.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a) $M_2 = 0$
$M_3 \neq 0$
$\frac{dM_2}{dA_o} = 0$</td><td></td><td>$\beta = A_{2/3}\varepsilon^{2/3} + ..$</td><td>$\frac{1}{3}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{2/3}^3 + M_3 = 0$
Il existe toujours une solution réelle.</td></tr>
<tr><td></td><td>b) $M_2 = 0$
$M_3 \neq 0$
$\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$</td><td></td><td>$\beta = A_1\,\varepsilon + \ldots$
$\beta = A_{1/2}\varepsilon^{1/2} + ..$</td><td>$M_3 + \frac{dM_2}{dA_o} = 0$
$\frac{1}{3}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{1/2}^2 + \frac{dM_2}{dA_o} = 0$
Il existe une solution réelle ou bien trois solutions si $\frac{dM_2}{dA_o}$ et $\frac{d^3M_1}{dA_o^3}$ sont de signes opposés.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$M_2 = 0$
$M_3 = 0$
$M_4 \neq 0$
a) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$</td><td></td><td>$\beta = A_1\,\varepsilon + \ldots$</td><td>$\frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_1^3 + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\,A_1^2 +$
$\frac{dM_3}{dA_o}\,A_1 + M_4 = 0$
Il existe une seule solution réelle ou bien trois solutions</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Le point (2,1) sur le diagramme correspond au terme $\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\varepsilon\beta^2$ dans (2.10). Le point (1,2) sur le diagramme correspond au terme $\frac{dM_3}{dA_o}\varepsilon^2\beta$ dans (2.10). Ces points ne sont pas sur le diagramme si les coefficients correspondants s'annulent.</td>
<td></td>
<td>Dans le cas des racines doubles ou triples de cette équation déterminante, il faut chercher l'approximation suivante $V(\varepsilon)$
$$\beta = A_1\,\varepsilon + V(\varepsilon)$$
comme c'était fait dans 2 du cas précédent.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>b) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$</td>
<td>
</td>
<td>$\beta=A_2\,\varepsilon^2+..$
$\beta=A_{\frac{1}{2}}\varepsilon^{1/2}+..$</td>
<td>$$M_4 + \frac{dM_2}{dA_o}A_2 = 0$$
$$\frac{1}{3!}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}A_{1/2}^3 + \frac{dM_2}{dA_o}A_1 = 0$$
Il existe une solution réelle ou bien trois solutions si $\frac{dM_2}{dA_o}$ et $\frac{d^3M_1}{dA_o^3}$ sont de signes opposés, etc...</td>
</tr>
</table>

Donc, si les équations des amplitudes principales ont des solutions triples, alors l'équation (2.10) détermine au moins une ou trois fonctions implicites de ε présentées en séries par rapport à $\varepsilon^{1/3}$ ou ε et $\varepsilon^{1/2}$.

Les solutions périodiques de (2.1) sont présentées aussi en séries de même type. Des formules similaires sont données dans [9]. Le diagramme de Newton donne des facilités de calcul et permet de faire des conclusions immédiates en vertu de (2.10) sur tel ou tel type de présentation en séries des solutions périodiques de (2.1). En modifiant des paramètres éventuels dans la fonction $f(x, \dot{x}, \varepsilon)$, on peut changer les coefficients dans (2.10) et obtenir les différentes solutions périodiques de (2.1).

Pour la recherche pratique de ces solutions périodiques, il faut faire une substitution de variable t dans (2.1) par une nouvelle variable τ à l'aide de $t = \tau(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots)$ où h_i sont des constantes indéterminées. Alors à chaque solution périodique de l'équation (2.1) avec une période

$$T = \frac{2\pi}{k}(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots) \tag{2.11}$$

correspond une solution périodique de l'équation :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)^2 = \frac{\varepsilon}{k^2} f(x_1\, k(1 + h_1\varepsilon + \dots)^{-1} \frac{dx}{d\tau}, \varepsilon).(1 + h_1\varepsilon + ..)^2 \tag{2.12}$$

avec une période $\frac{2\pi}{k}$ qui ne dépend pas de ε. Cette solution est aussi analytique par rapport à ε [6].

On cherche cette solution en série par rapport à ε, $\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon^{1/3}$, ... suivant le cas qui se présente avec les coefficients dépendant de τ et indéterminés. En substituant ces séries dans (2.12) et en égalant les coefficients de même puissance de ε, $\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon^{1/3}$, ... on obtient les équations différentielles pour les coefficients qui doivent être périodiques de période $\frac{2\pi}{k}$ avec les conditions initiales déterminées en vertu de (2.2).

Les conditions de périodicité de ces coefficients permettent de trouver h_i et A_0. On a les équations résolubles si les suppositions données dans les tableaux sont respectées et on cherche les solutions en série par rapport à $\varepsilon^{1/q}$ qui correspond au cas considéré.

2.

Etudions la stabilité des solutions périodiques trouvées dans le paragraphe 1 de l'équation $\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon)$ (2.1). Du point de vue de la stabilité des solutions, il est équivalent de s'intéresser au système complet ou aux équations aux variations au voisinage d'une solution.

Calculons l'équation aux variations correspondant à (2.1). Soit

$$z = x + y$$

où $x(t)$ = solution périodique de (2.1)

$y(t)$ = petite perturbation de la solution x telle que $z(t)$ soit encore solution du système (2.1). En ne gardant que les termes de premier ordre en y, $\dot{y}$ on obtient l'équation aux variations :

$$\ddot{y} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{dy}{dt} + (k^2 - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x})y = 0 \qquad (3.1)$$

Etant donné que l'équation aux variations est une équation aux coefficients périodiques, elle possède donc deux solutions particulières linéairement indépendantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ [6] déterminées par :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\partial x(t)}{\partial A_o} & y_1(o) &= 1 & \dot{y}_1(o) &= 0 \\ y_2(t) &= \dot{x}(t) & y_2(o) &= 0 & \dot{y}_2(o) &= \ddot{x}(o) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

L'équation caractéristique de (3.1) est

$$\text{dét}\ |\phi(T) - \rho\ I| = 0$$

ou encore $\rho^2 - 2\,A\,\rho + B = 0$ (3.3)

avec $2\,A = y_1(T) + \dfrac{\dot{y}_2(T)}{\dot{y}_2(o)}$, $B = \dfrac{1}{\dot{y}_2(o)} [\,y_1(T)\ \dot{y}_2(T) - y_2(T)\ \dot{y}_1(T)]$

Comme une des solutions de l'équation aux variations est périodique, une des valeurs de ρ est égale à 1.

$$\rho_1 = 2\,A - 1 = B$$

$$\rho_1 = y_1(T) + \frac{\dot{y}_2(T)}{\dot{y}_2(o)} - 1$$

$$\rho_1 = \frac{\partial x(T)}{\partial A_0} . \tag{3.4}$$

En vertu du théorème d'ANDRONOV-VITT [6], les solutions périodiques sont stables si le multiplicateur caractéristique est inférieur à

$$\rho_1 < 1 \tag{3.5}$$

Le fait que $T = T_0 + \alpha(\varepsilon)$ pose des problèmes de calcul pour (3.5) en vertu de (3.4) et des résultats du paragraphe 2.

Pour simplifier les calculs et pour présenter des solutions périodiques de (2.1) en série par rapport à ε, $\varepsilon^{1/2}$ ou $\varepsilon^{1/3}$ avec les coefficients de période $\frac{2\pi}{k}$ indépendants de ε, utilisons le changement de variable (2.11)

$$t = \tau(1 + h) \tag{3.6}$$

avec $h = h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots$ Le changement de variable modifie les dérivées

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot{x}(1 + h) = z'$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}(\dot{x}(1 + h)) = \ddot{x}(1 + h)^2 = z''$$

L'équation (2.1) devient :

$$\frac{z''}{(1 + h)^2} + k^2 z = \varepsilon f(z, \frac{z'}{1+h}, \varepsilon)$$

$$z'' + (1 + h)^2 k^2 z = (1 + h)^2 \varepsilon f(z, \frac{z'}{1+h}, \varepsilon)$$

$$z'' + k^2 z = (1 + h)^2 \varepsilon f(z, \frac{z'}{1+h}, \varepsilon) - 2 h k^2 z - h^2 k^2 z \tag{3.7}$$

$$= \varepsilon \phi(z, z', \varepsilon)$$

(on peut mettre ε en évidence car $h = \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots$)

L'équation (3.7) est une équation du même type que (2.1). En utilisant la même méthode que dans le paragraphe 1, on a :

$$z(\tau) = (A_0 + \beta)\cos k \tau + [en^\star(\tau) + \frac{\partial en^\star}{\partial A_0} \beta + \dots] \varepsilon^n \tag{3.8}$$

où $en^\star(t) = \frac{1}{k}\int_0^\tau \sin k(\tau - u)\, H_n^\star(u)\, du$

avec $H_n^\star(u) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}\phi}{d\varepsilon^{n-1}}\right)_{\beta=\varepsilon=0}$

Les conditions de périodicité de $z_n(\tau)$:

$$\left|\begin{array}{l} z(o) = A_o + \beta = A_o + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(en^\star(\frac{2\pi}{k}) + \frac{\partial en^\star}{\partial A_o}(\frac{2\pi}{k})\beta + ..\right)\varepsilon^n = z(\frac{2\pi}{k}) \\ \dot{z}(\frac{2\pi}{k}) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{en}^\star(\frac{2\pi}{k}) + \frac{\partial \dot{en}^\star}{\partial A_o}(\frac{2\pi}{k})\beta + \ldots\right)\varepsilon^n \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \left(en^\star(\frac{2\pi}{k}) + \frac{\partial en^\star}{\partial A_o}(\frac{2\pi}{k})\beta + \ldots\right)\varepsilon^n = 0 & (3.9) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{en}^\star(\frac{2\pi}{k}) + \frac{\partial \dot{en}^\star}{\partial A_o}(\frac{2\pi}{k})\beta + \ldots\right)\varepsilon^n = 0 & (3.10) \end{array}\right.$$

L'équation (3.9) est exactement notre équation de bifurcation :

$$e_n^\star(\frac{2\pi}{k}) = M_n \tag{3.11}$$

et (3.10) implique que $\dot{en}^\star(\frac{2\pi}{k}) = 0$. L'équation aux amplitudes principales est :

$$e_1^\star(\frac{2\pi}{k}, A_o) = 0.$$

En utilisant (3.7), (3.8), (3.11), les résultats du paragraphe 2, on peut écrire la condition (3.4) sous une forme de série par rapport à ε, $\varepsilon^{1/2}$ ou $\varepsilon^{1/3}$:

$$\left.\frac{\partial Z(t)}{\partial A_o}\right|_{T=T_o} = 1 + \left\{\frac{d^2M_1}{dA_o^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{n/2}\,\varepsilon^{n/2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{n/2}\,\varepsilon^{n/2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \ldots\right\}\varepsilon + \left\{\frac{dM_2}{dA_o} + \frac{d^2M_2}{dA_o^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{n/2}\,\varepsilon^{n/2} + \ldots\right\}\varepsilon^2 + \ldots$$

dans le cas de racines doubles des équations aux amplitudes principales ou bien dans le cas de racines triples :

$$\left.\frac{\partial Z(t)}{\partial A_o}\right|_{T=T_o} = 1 + \{\frac{1}{2}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}(\sum_{n=1}^{\infty} A_{n/3}\,\varepsilon^{n/3})^2 + \ldots\}\varepsilon +$$

$$+ \{\frac{dM_2}{dA_o} + \frac{d^2M_2}{dA_o^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{n/3}\,\varepsilon^{n/3} + \ldots\}\,\varepsilon^2 + \ldots \qquad (3.12)$$

Le premier terme dans ces séries est égal à l'unité et les autres termes sont les puissances de ε, $\varepsilon^{1/2}$ ou $\varepsilon^{1/3}$ avec des coefficients. Pour que la partie gauche de (3.12) soit inférieure à l'unité, il faut que les coefficients des termes contenant ε, $\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon^{1/3}$ en plus petites puissances soient négatifs (ε étant un petit paramètre supposé positif). La condition de stabilité (3.5) est présentée pour le cas des racines doubles des équations aux amplitudes principales dans le tableau suivant (cfr annexe 2) :

TABLEAU 3.

N°	Suppositions	Equation déterminante et l'expression de $\beta(\varepsilon)$	Condition de stabilité
1	$M_2 \neq 0$	$\beta = A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \ldots$ $\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_{1/2}^2 + M_2 = 0$	$\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_{1/2} < 0.$
2	a) $M_2 = 0$ $M_3 \neq 0$	$\beta = A_1\,\varepsilon + \ldots$ $\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1^2 + \frac{dM_2}{dA_o}A_1 + M_3 = 0$	$\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$
	b) $M_2 = 0$ $M_3 \neq 0$ $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} = 0$	$\beta = A_1 + A_{3/2}\,\varepsilon^{3/2} + \ldots$ $\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_{3/2}^2 + P_3 = 0$	$\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_{3/2} < 0$

3.	a) $M_2 = M_3 = 0$ $M_4 \neq 0$ $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$	$\beta = A_2\,\varepsilon^2 + \ldots$ $M_4 + \frac{dM_2}{dA_o} A_2 = 0$ $\beta = A_1\,\varepsilon + \ldots$ $\frac{1}{2} A_1^2 \frac{d^2M_1}{dA_o^2} + \frac{dM_2}{dA_o} A_1 = 0$	$\frac{dM_2}{dA_o} < 0$ $A_1 \frac{d^2M_1}{dA_o^2} + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$
	b) $M_2 = 0$ $M_3 = 0$ $M_4 \neq 0$ $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$	$\beta = A_{3/2}\,\varepsilon^{3/2} + \ldots$ $\frac{1}{2} \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{3/2}^2 + M_4 = 0$	$\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{3/2} < 0$
4.	$M_2 = M_3 = M_4 = 0$ $M_5 \neq 0$ a) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$	$\beta = A_2\,\varepsilon^2 + \ldots$ $\frac{1}{2} \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_2^2 + M_5 = 0$	$\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_2 < 0$
	b) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$	$\beta = A_3\,\varepsilon^3 + \ldots$ $\beta = A_1\,\varepsilon + \ldots$ $\frac{dM_2}{dA_o} A_3 + M_3 = 0$ $\frac{1}{2} \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_1^2 + \frac{dM_2}{dA_o} A_1 = 0$	$\frac{dM_2}{dA_o} < 0$ $\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$ etc ...

Dans le cas des racines triples des équations d'amplitudes principales, on a :

TABLEAU 4.

N°	Suppositions	Equation déterminante et l'expression de $\beta(\varepsilon)$	Condition de stabilité
1	$M_2 \neq 0$	$\beta = A_{1/3}\,\varepsilon^{1/3} + \dots$ $\frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{1/3}^3 + M_2 = 0$	$\frac{1}{2}\,A_{1/3}^2\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3} < 0$
2	$M_2 = 0$ $M_3 \neq 0$ a) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$ b) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$	$\beta = A_{2/3}\,\varepsilon^{2/3} + \dots$ $\frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{2/3}^3 + M_3 = 0$ $\beta = A_1\,\varepsilon + \dots$ $M_3 + \frac{dM_2}{dA_o}\,A_1 = 0$ $\beta = A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \dots$ $\frac{dM_2}{dA_o}\,A_{1/2} + \frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{1/2}^3 = 0$	$\frac{1}{2}\,A_{2/3}^2\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3} < 0$ $\frac{dM_2}{dA_o} < 0$ $\frac{1}{2}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_{1/2}^2 + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$
3	$M_2 = M_3 = 0$ $M_4 \neq 0$ a) $\frac{dM_2}{dA_o} = 0$ b) $\frac{dM_2}{dA_o} \neq 0$	$\beta = A_1\,\varepsilon + \dots$ $\frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_1^3 + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\,A_1^2 + \frac{dM_3}{dA_o}\,A_1 + M_4 = 0$ $\beta = A_2\,\varepsilon^2 + \dots$ $\beta = A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \dots$ $M_4 + \frac{dM_2}{dA_o}\,A_2 = 0$ $\frac{1}{3!}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A^3_{1/2} + \frac{dM_2}{dA_o}\,A_{1/2} = 0$	$\frac{1}{2}\,\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\,A_1^2 + \frac{d^2M_2}{dA_o^2}\,A_1 + \frac{dM_3}{dA_o} < 0.$ $\frac{1}{2}\,\frac{d^3M_3}{dA_o^3}\,A_{1/2}^2 + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$ etc...

Les solutions périodiques stables de (2.1) ne répondent qu'aux dérivées négatives de l'équation déterminante de chaque morceau de diagramme de Newton par rapport à $A_{i/2}$, A_i, $A_{i/3}$ correspondants.

Nous voyons qu'on peut avoir, par exemple (le cas 3b dans le tableau 4), deux solutions périodiques stables dans le cas des racines triples des équations des amplitudes principales qui bifurquent d'une seule solution périodique correspondant à une racine simple de l'équation aux amplitudes principales.

Conclusion :

Pour chercher les solutions périodiques d'un oscillateur quasi-harmonique dans le cas des racines multiples d'équation des amplitudes principales, il faut procéder de la façon suivante :

1) Trouver l'équation de bifurcation (2.10) déterminant la variation $\beta(\varepsilon)$ dans les conditions initiales comme une fonction implicite de ε.

2) En utilisant le diagramme de Newton correspondant à l'équation de bifurcation, trouver la tangente de l'angle d'inclinaison du premier morceau descendant de diagramme avec l'axe d'abscisse négatif. Cette valeur $\frac{p}{q}$ donne la plus petite puissance de ε dans le développement de la fonction $\beta(\varepsilon)$ en série par rapport à $\varepsilon^{p/q}$.

3) Ecrire l'équation déterminante correspondant à ce morceau de diagramme. Cette équation permet de trouver q coefficients possibles du premier terme du développement $\beta(\varepsilon)$ en série par rapport à $\varepsilon^{p/q}$. Pour isoler les solutions réelles, on vérifie quelques conditions.

4) La condition de stabilité des solutions périodiques correspondantes, est donnée par la négativité de la première dérivée de la partie gauche de l'équation déterminante par rapport au coefficient de premier terme dans le développement de $\beta(\varepsilon)$ en série par rapport à $\varepsilon^{p/q}$. Si cette équation a des solutions multiples et par conséquent si la dérivée en question s'annule, il faut chercher le second terme dans le développement de $\beta(\varepsilon)$ en utilisant le même procédé à partir du point 2. La condition de stabilité est

donnée par la négativité de la première dérivée de l'équation déterminante de deuxième approximation par rapport au coefficient correspondant. De cette façon, on peut trouver toutes les fonctions $\beta(\varepsilon)$, les solutions périodiques correspondantes et les conditions de stabilité de ces solutions périodiques.

II. Application du diagramme de Newton à la recherche des exposants caractéristiques d'un système quasi-harmonique dans le cas où l'équation fondamentale dét $(A - \lambda I) = 0$ admet des racines nulles et purement imaginaires de multiplicités différentes de l'unité avec des diviseurs élémentaires non simples.

Application du diagramme de Newton à la recherche des exposants caractéristiques d'un système quasi-harmonique dans le cas où l'équation fondamentale dét $(A - \lambda I) = 0$ admet des racines nulles et purement imaginaires de multiplicités différentes de l'unité avec diviseurs élémentaires non simples [11]

La recherche des exposants caractéristiques va nous permettre d'étudier la stabilité des solutions périodiques dans le cas où les diviseurs élémentaires ne sont pas simples. On sait par le théorème de Liapunov que le système $\dot{X} = Ax$ est :

- asymptotiquement stable à l'origine si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives;
- instable si l'une des valeurs propres est à partie réelle strictement positive;
- stable mais non asymptotiquement si
  a) toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives;
  b) l'une au moins est à partie réelle nulle;
  c) toute valeur propre à partie réelle nulle correspond à des blocs de Jordan en nombre égal à sa multiplicité (diviseurs élémentaires simples).

Dans le cas des diviseurs élémentaires non simples, le théorème ne nous permet pas d'affirmer s'il y a stabilité ou instabilité.

1. $$\dot{X} = AX + \mu\, FX \qquad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$; $F, A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $\mu \in \mathbb{R}$, μ petit paramètre

$F = F(t, \mu)$, ω périodique en t, analytique en μ.

$F(t, \mu) = F^{(o)} + \mu\, F^{(1)} + \mu^2\, F^{(2)} + \ldots$

<u>Système générateur</u> : $\dot{X} = AX$ (2)

A matrice constante; équation fondamentale : $|A - \lambda I| = 0$

Nous considérons donc le cas de résonance : $\exists$ racines $\lambda_o = 0$

$\exists$ racines $\lambda_u = \pm \frac{2\pi}{\omega} p_u\, i$,

$u = 1, \ldots, r$; $p_u \in \mathbb{N}$. Ces racines sont appelées critiques.

Notons : q_o = la plus petite puissance des diviseurs élémentaires associés à $\lambda_o = 0$;

$e_{o\gamma}$ = le nombre de diviseurs élémentaires λ^γ, $\gamma = 1, \ldots, q_o$; s'il n'existe pas de tels diviseurs élémentaires de puissance γ, alors $e_{o\gamma} = 0$;

k_o = la multiplicité de λ_o;

m_o = le nombre de groupes de solutions correspondant à λ_o.

On a immédiatement que

$$k_o = \sum_{\gamma=1}^{q_o} \gamma\, e_{o\gamma}$$

$$m_o = \sum_{\gamma=1}^{q_o} e_{o\gamma}$$

De même notons :

q_u = la plus grande puissance des diviseurs élémentaires associés à $\lambda_u = \pm \frac{2\pi}{\omega} p_u\, i$

$e_{u\gamma}$ = le nombre de diviseurs élémentaires $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$, $\gamma = 1, \ldots, q_u$; s'il n'existe pas de tels diviseurs élémentaires de puissance γ, alors $e_{u\gamma} = 0$;

k_u = la multiplicité de λ_u;

m_u = le nombre de groupes de solutions correspondant à λ_u.

On a immédiatement que

$$k_u = \sum_{\gamma=1}^{q_u} \gamma\, e_{u\gamma}$$

$$m_u = \sum_{\gamma=1}^{q_u} e_{u\gamma}$$

<u>Exemple</u> : Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -X_1 - 2X_2 \\ \dot{Y}_1 &= Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= -Y_1 - 2Y_2 + \mu(X_1+X_2) \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu & \mu & -1 & -2 \end{pmatrix} \approx \text{matrice de Jordan} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diviseurs élémentaires de $(A - \lambda I)$? Par des transformations élémentaires, $(A - \lambda I)$ peut être ramenée à la forme diagonale suivante [8] :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda+1 & \\ & & & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$$

Donc les diviseurs élémentaires sont $(\lambda + 1)$ et $(\lambda + 1)^3$

$$q_u = 3 \qquad \gamma \in \{1, 2, 3\}$$

$$k_u = 4 \qquad e_{u1} = 1,\ e_{u2} = 0,\ e_{u3} = 1$$

$$k_u = \sum_{\gamma=1}^{3} \gamma\, e_{u\gamma} = 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, 3 = 4$$

$$m_u = \sum_{\gamma=1}^{3} e_{u\gamma} = 1 + 1 = 2$$

Soit $\phi(t, \mu)$ le système fondamental principal du système $\dot{X} = AX + \mu\, FX$

$$\phi(o, \mu) = I$$

On peut présenter la solution en forme de série par rapport à μ :

$$\phi(t, \mu) = \phi^{(o)}(t) + \mu\, \phi^{(1)}(t) + \mu^2\, \phi^{(2)}(t) + \ldots$$

Les conditions initiales deviennent :

$$\phi^{(o)}(o) = I$$
$$\phi^{(l)}(o) = 0 \qquad l \in \mathbb{N}_o$$

En mettant le développement analytique de $F(t, \mu)$ et $\phi(t, \mu)$ dans l'équation (1), on obtient :

$$\sum_{j=o}^{\infty} \mu^j\, \dot{\phi}^{(j)} = \sum_{j=o}^{\infty} \mu^j\, A\, \phi^{(j)} + \mu\Big(\sum_{l=o}^{\infty} \mu^l\, \phi^{(l)}\Big)\Big(\sum_{k=o}^{\infty} \mu^k\, F^{(k)}\Big)$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} \mu^j\, A\, \phi^{(j)} + \mu\Big(\sum_{n=o}^{\infty} \mu^n \sum_{j=o}^{n} \phi^{(n-j)}\, F^{(j)}\Big)$$

Le terme de puissance m :

$$\mu^m\, \dot{\phi}^{(m)} = \mu^m\, A\, \phi^{(m)} + \mu\, \mu^{m-1} \sum_{j=o}^{m-1} \phi^{(m-1-i)}\, F^{(j)}, \; m > 0$$

$$\Rightarrow \phi^{(m)}(t) = \int_o^t \phi\,(t - \tau)\, \gamma^{(m-1)}(\tau)\, d\tau$$

avec $Y^{(m-1)} = \sum_{j=o}^{m-1} \phi^{(m-1-j)} F^{(j)}$ $\quad m > 0$

Pour m = 0, on a : $\dot{\phi}^{(o)}(t) = A\, \phi^{(o)}(t)$

La première approximation de l'équation caractéristique est :

$$D(\rho, \mu) = |\phi^{(o)}(\omega) + \mu\, \phi^{(1)}(\omega) - \rho\, I| = 0 \qquad (3)$$

soit ρ_o racine de $D(\rho, o) = |\phi^{(o)}(\omega) - \rho\, I| = 0$. Etant donné la relation bien connue $\rho_i = e^{\omega\lambda_i}$: à chaque racine λ_o, λ_u correspond une racine de l'équation $D(\rho, o) = 0$, égale à 1.

Donc la multiplicité de ρ_o est : $k = k_o + 2\, k_1 + \ldots + 2\, k_r$.

Par le théorème de WEIERSTRASS [E.Goursat - Cours d'analyse mathématique, tome II], l'équation (3) a k racines $\rho(\mu)$ telles que $\rho(o) = 1$ qui peuvent être développées en séries de puissance $\mu^{1/\nu}$ $\quad 1 \leqslant \nu \leqslant k$.

Soit q = la plus grande puissance des diviseurs élémentaires correspondant aux racines λ_o, λ_u, c'est-à-dire $q = \max(q_o, q_1, \ldots, q_r)$.

<u>Recherchons les conditions suffisantes pour que les k racines $\rho(\mu)$, ($\rho(o) = 1$) soient développables en séries de μ; $\mu^{1/2}, \ldots, \mu^{1/q}$.</u>

Remarque : à chaque diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ de la matrice $(A - \lambda I)$ correspond le diviseur élémentaire $(\rho_o - 1)^\gamma$ de la matrice $(\phi^{(o)}(\omega) - \rho_o\, I)$

$\Rightarrow$ nombre de diviseurs élémentaires $(\rho_o - 1)^\gamma$ égale e_γ avec $e_\gamma = e_{o\gamma} + 2\, e_{1\gamma} + \ldots 2\, e_{r\gamma}$ $\quad (\gamma = 1, \ldots, q)$.

Soient k = la multiplicité de la racine ρ_o;

m = le nombre de groupes de solutions correspondant à ρ_o;

$$\begin{aligned} k &= k_o + 2\, k_1 + \ldots + 2\, k_r \\ &= \sum_{\gamma=1}^{q_o} \gamma\, e_{o\gamma} + 2 \sum_{\gamma=1}^{q_1} \gamma\, e_{1\gamma} + \ldots + 2 \sum_{\gamma=1}^{q_r} \gamma\, e_{r\gamma} \\ &= \sum_{\gamma=1}^{q} \gamma\, [e_{o\gamma} + 2\, e_{1\gamma} + \ldots + 2\, e_{r\gamma}] = \sum_{\gamma=1}^{q} \gamma\, e_\gamma \end{aligned}$$

$$m = \sum_{\gamma=1}^{q} e_\gamma$$

Changement de variable : $\sigma = \rho - 1$;

L'équation caractéristique devient $D(\sigma, \mu) = |\phi^{(o)}(\omega) + \mu\,\phi^{(1)}(\omega) - (1 + \sigma)I| = 0$

$$D(\sigma, o) = (\phi^{(o)}(\omega) - (1 + \sigma)I) \tag{4}$$

peut être réduite par des transformations élémentaires à la matrice diagonale $\{c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n\}$ où

$$\begin{array}{ll}
c_i = E_i(\sigma) & \text{pour } i = 1, \ldots, n\text{-}m \\
c_i = \sigma\, E_i(\sigma) & \text{pour } i = n\text{-}m\text{+}1, \ldots, n\text{-}m\text{+}e_1 \\
\ldots & \\
c_i = \sigma^{\gamma}\, E_i(\sigma) & \text{pour } i = n\text{-}m\text{+}\kappa_\gamma\text{+}1, \ldots, n\text{-}m\text{+}\kappa_\gamma\text{+}e_\gamma \\
\ldots & \\
c_n = \sigma^{q}\, E_n(\sigma) &
\end{array}$$

$E_i(o) \neq 0$ $\quad E_i(\sigma)$ polynome en σ $\quad \kappa_\gamma = e_1 + e_2 + \ldots + e_{\gamma-1}$

$$\mathrm{diag}\{c_1,\ldots,c_n\} = \begin{pmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{n-m} & & & & & \\ & & & & \sigma E_{n-m+1} & & & & \\ & & & & & \sigma E_{n-m+2} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \sigma E_{n-m+e_1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \sigma^q E_n \end{pmatrix}$$

n-m diviseurs élémentaires qui ne contiennent pas la racine $\sigma = 0$.

e_1 diviseurs élémentaires qui contiennent la racine $\sigma = 0$ à la puissance 1

On représente $D(\sigma, \mu)$ sous forme de série

$$D(\sigma, \mu) = \sum_{\nu} \mu^{\nu}\, a_{\nu}(\sigma)$$

où $a_\nu(\sigma) = b_\nu\, \sigma^{\varepsilon_\nu} + b_{\nu_1}\, \sigma^{\varepsilon_{\gamma+1}} + \ldots$; b_{ν_i} constants; ε_ν = plus petit exposant de σ

Remarque : Si on écrit

$$D(\sigma, \mu) = |A_1 + \mu\, B_1 \quad A_2 + \mu\, B_2 \quad \ldots \quad A_n + \mu\, B_n|$$

avec A_i : $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $(\phi^{(o)}(\omega) - (1+\sigma)I)$

B_i : $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $(\phi^{(1)}(\omega))$.

Avec cette notation, on a

$$
\begin{aligned}
D(\sigma, \mu) = & |A_1\ A_2 \ldots A_n| \\
& + |A_1\ A_2 \ldots \mu\ B_n| + |A_1 \ldots \mu\ B_i \ldots A_n| + \ldots + \\
& \qquad + |\mu\ B_1\ A_2 \ldots A_n| \\
& + |A_1 \ldots \mu\ B_{n-1}\ \mu\ B_n| + |A_1 \ldots \mu\ B_i \ldots \mu\ B_j \ldots A_n| + \ldots \\
& + \ldots \\
& + |\mu B_1\ \mu\ B_2 \ldots \mu\ B_n|
\end{aligned}
$$

Donc pour trouver le terme $\mu^\nu\ a_\nu(\sigma)$, il suffit de faire la somme des déterminants de $n^{\text{ème}}$ ordre dans lesquels entrent chaque fois ν secondes colonnes $(\mu\ B_i)$ et $n-\nu$ premières colonnes (A_i).

Il reste maintenant à examiner la fonction implicite $\sigma(\mu)$ déterminée par l'équation $D(\sigma, \mu) = 0$ dans le voisinage du point critique $\mu = 0$, $\sigma = 0$ à l'aide de la méthode du diagramme de Newton :

1. La plus petite puissance ε_ν de σ dans le polynome $a_o(\sigma) = k$. En effet

$$
\begin{aligned}
a_o(\sigma) &= |A_1\ A_2 \ldots A_n| = \text{dét}\ (\phi^{(o)}(\omega) - (1+\sigma)I) \\
&= \text{dét}\ (\text{diag}\ (c_1 \ldots c_n).
\end{aligned}
$$

Car la valeur du déterminant est conservée pour des transformations élémentaires [13]. Donc

$$
\begin{aligned}
a_o(\sigma) &= E_1\ E_2 \ldots \sigma\ E_{n-m+1}\ \sigma\ E_{n-m+2} \ldots \sigma^q\ E_n = \\
&= \sigma^{1.e_1} . \sigma^{2.e_2} \ldots \sigma^{qe_q}\ E_1 \ldots E_n = \sigma^k\ E_1 \ldots E_n
\end{aligned}
$$

$E_i(o) \neq 0$, $i = 1 \ldots n$.

Donc k est le plus petit exposant de σ parmi les termes de la série $D(\sigma, \mu) = \sum_\nu \mu^\nu a_\nu(\sigma)$ qui ne contiennent pas μ (donc $\varepsilon_\nu = k$).

k ainsi défini est la projection du polygone de Newton sur l'axe σ et correspond au nombre de solutions $\sigma(\mu)$.

2. La plus petite puissance ν_1 de μ dans le membre de la série $\Sigma\ \mu^\nu\ a_\nu(\sigma)$ ne contenant pas σ est plus grande que m.

En effet, si $\nu_1 < m$, chaque déterminant d'ordre n intervenant dans le calcul de $\mu^{\nu_1} a_{\nu_1}(\sigma)$ contiendra un mineur de la matrice (4) d'ordre plus grand que n-m (remarque p.   ). Or, le P.G.C.D. des mineurs d'ordre r de la matrice (4) est égal au P.G.C.D. des mineurs d'ordre r de la matrice diag $\{c_1 \ldots c_n\}$[13]. Donc ici des mineurs d'ordre strictement plus grand que n-m vont contenir au moins un σ à la puissance au moins égale à l'unité. $\nu_1 \geqslant m$. On suppose que ν_1 prend la plus petite valeur possible m : il suffit alors d'examiner les plus petites puissances des polynomes $a_\nu(\sigma)$ pour $\nu = 1, \ldots, m-1$ ($\nu > m$ représente une coordonnée d'un point qui n'appartient pas au diagramme de Newton).

3. $\nu = m-1 \Rightarrow$ des mineurs de la matrice (4) d'ordre n-m+1 vont apparaître dans chaque déterminant intervenant dans le calcul de $\mu^\nu a_\nu(\sigma)$. La plus petite puissance de σ dans le polynome $a_{m-1}(\sigma)$ est $\varepsilon_{m-1} \geqslant 1$, car tout mineur d'ordre n-m+1 contient un terme avec σ en facteur parce qu'il y a au plus n-m termes diagonaux qui ne s'annulent pas pour $\sigma = 0$ ($E_1(\sigma), \ldots, E_{n-m}(\sigma)$). Pour la même raison, pour chaque polynome $a_{m-i}(\sigma)$ ($i \leqslant e_1$) la plus petite puissance de σ est $\varepsilon_{m-i} \geqslant i$.

4. Cas général : $\nu = m - \kappa_\gamma - h$
$h = 1, \ldots, e_\gamma$
$\gamma = 1, \ldots, q$

$\Rightarrow$ des mineurs de la matrice (4) d'ordre compris entre $n-m+\kappa_\gamma+1$ et $n-m+\kappa_\gamma+e_\gamma$ vont apparaître dans chaque déterminant intervenant dans le calcul de $\mu^\nu a_\nu(\sigma)$:

$$\begin{pmatrix}
\left.\begin{matrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_{n-m}\end{matrix}\right\}n-m & & & & & \\
& \left.\begin{matrix}\sigma E_{n-m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma E_{n-m+e_1}\end{matrix}\right\}e_1 & & & & \\
& & \ddots & & & \\
& & & \left.\begin{matrix}\sigma^\gamma E_{n-m+\kappa_\gamma+1} & & \\ & \sigma^\gamma E_{n-m+\kappa_\gamma+h} & \\ & & \sigma^\gamma E_{n-m+\kappa_\gamma+e_\gamma}\end{matrix}\right\}e_\gamma & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & \sigma^q E_n
\end{pmatrix}$$

Le mineur d'ordre $n-m+\kappa_\gamma+h$ qui contient le facteur σ à la plus petite puissance est le mineur principal du coin supérieur gauche. Le terme en σ de ce mineur est $\sigma^{1e_1}\sigma^{2e_2}\sigma^{3e_3}\ldots\sigma^{\gamma h}=\sigma^{e_1+2e_2+\ldots\gamma h}$

Le plus grand commun diviseur de tous ces mineurs d'ordre $n-m+\kappa_\gamma+h$ contient au moins le facteur

$$\sigma^{e_1+2e_2+\ldots+\gamma h}$$

d'où $\varepsilon_{m-\kappa_\gamma-h}$ (= la plus petite puissance de σ dans $a_{m-\kappa_\gamma-h}(\sigma)) \geqslant \theta(h,\gamma)$

avec $\theta(h,\gamma) = e_1 + 2\,e_2 + \ldots + (\gamma-1)e_{\gamma-1} + \gamma h$

$h = 1 \ldots e_\gamma$

$\gamma = 1 \ldots q$

Si les coefficients des termes de plus petite puissance de σ dans $a_\nu(\sigma)$ sont distincts de zéro, alors $D(\sigma, \mu)$ peut s'écrire :

$$D(\sigma,\mu) = \sigma^k + b_m\,\mu^m + \sum_h\sum_\gamma b_{m-\kappa_\gamma-h}\,\mu^{m-\kappa_\gamma-h}\,\sigma^{\theta(h,\gamma)} + H$$

avec H l'ensemble des termes n'intervenant pas dans la construction du diagramme de Newton.

5. Construction du diagramme de Newton :

La projection sur l'axe σ du diagramme est $k \Rightarrow$ le point extrême $N(k, o)$

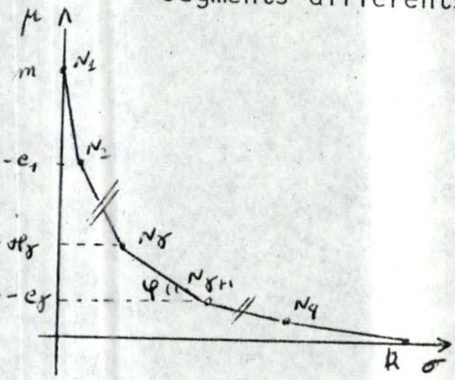
La projection sur l'axe μ du diagramme est $m \Rightarrow$ le point extrême $N(o, m)$

Les coordonnées des points intermédiaires sont données par l'exposant de μ en ordonnée et l'exposant de σ pour l'abscisse :

$$\begin{aligned} D(\sigma,\mu) = \sigma^k &+ b_m\,\mu^m + b_{m-1}\,\mu^{m-1}\,\sigma^1 + b_{m-2}\,\mu^{m-2}\,\sigma^2 + \ldots b_{m-e_1}\,\mu^{m-e_1}\,\sigma^{e_1} \\ &+ b_{m-e_1-1}\,\mu^{m-e_1-1}\,\sigma^{e_1+2} + b_{m-e_1-2}\,\mu^{m-e_1-2}\,\sigma^{e_1+4} + \ldots \\ &+ b_{m-e_1-e_2}\,\mu^{m-e_1-e_2}\,\sigma^{e_1+2e_2} \\ &+ \ldots \\ &+ H \end{aligned}$$

On remarque que les points $(1, m-1)$, $(2, m-2)$, ..., $(e_1, \ldots, m-e_1)$ sont en ligne droite. De même les points $(e_1+2, m-e_1-1)$, $(e_1+4, m-e_1-2)$, ... $(e_1+2e_2, m-e_1-e_2)$ sont en ligne droite.

De même pour γ fixé, $\gamma = p$. Tous les points pour $h = 1, \ldots, e_p$ sont en ligne droite. Il suffit donc de considérer les points $N_2(e_1, m-e_1)$, $N_3(e_1 + 2 e_2, m - e_1 - e_2) \ldots$ dans le diagramme. Comme $\gamma = 1, \ldots, q$, on a donc q segments différents :



$$N_\gamma = (e_1 + 2 e_2 + \ldots + (\gamma-1)e_{\gamma-1}, m - \kappa_\gamma)$$

$$N_{\gamma+1} = (e_1 + 2 e_2 + \ldots + \gamma e_\gamma, m - \kappa_\gamma - e_\gamma)$$

donc $\text{tg } \phi = \dfrac{e_\gamma}{\gamma e_\gamma} = \dfrac{1}{\gamma}$ pente du segment $N_\gamma N_{\gamma+1}$

$\Rightarrow \sigma(\mu)$ peut être développé dans le voisinage de $\sigma = \mu = 0$ en série de puissance de

μ^1 pour le segment $N_1 N_2$

$\mu^{1/2}$ pour le segment $N_2 N_3$

...

$\mu^{1/\gamma}$ pour le segment $N_\gamma N_{\gamma+1}$

$\mu^{1/q}$ pour le segment $N_q N$

A chaque segment du diagramme correspondent autant de solutions $\sigma(\mu)$ $(\sigma(o) = 0)$ que la différence des abscisses des extrémités de ce segment. Donc pour le segment $N_\gamma N_{\gamma+1}$, il correspond γe_γ développements de $\sigma(\mu)$ en puissance de $\mu^{1/\gamma}$. Le nombre de développements de $\sigma(\mu)$ dans le voisinage de zéro est égal à $k = \sum_\gamma \gamma e_\gamma$.

Dans la construction de notre diagramme, on a supposé $b_{m-\kappa_\gamma} \neq 0$, $\gamma = 1 \ldots q$ (le cas où un des $b_{m-\kappa_\gamma} = 0$ est traité dans la remarque 2).

En résumé :

Si le système quasi-harmonique $\dot{X} = Ax + \mu$ FX (1) est tel que :

1) l'équation fondamentale $|A - \lambda I| = 0$ admet des racines $\lambda_o = 0$ et $\lambda_u = \pm \frac{2\pi}{\omega} p_u i$, $p_u \in \mathbb{N}$, $u = 1 \ldots r$

ω est la période de $F(t, \mu)$

A matrice constante, k est la multiplicité des racines λ_o, λ_u.

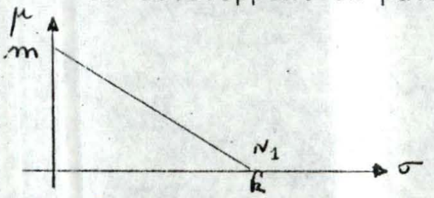
2) les diviseurs élémentaires de la matrice $(A - \lambda I)$ correspondant aux racines λ_o, λ_u ne sont pas tous simples et q est la plus haute puissance de ces diviseurs.

Alors pour que les k multiplicateurs caractéristiques $\rho(\mu)$ du système (1) pour lesquels $\rho(o) = 1$ soient développables en série de puissance μ, $\mu^{1/2}$, ..., $\mu^{1/q}$, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

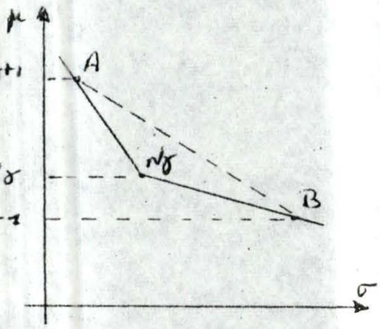
a) la première approximation du groupe de racines $\rho_i(\mu) = 1 + a_i\, \mu^{1/\gamma}$ ... développée en puissance de $\mu^{1/\gamma}$ est différente pour tout γ;

b) q satisfait les inégalités $b_{m-\kappa_\gamma} \neq 0$, $\gamma = 1 \ldots q$

Remarque 1 : Si les racines λ_o et λ_u ont seulement des diviseurs élementaires simples ($\gamma = 1$), alors le nombre de groupes de solutions est égal à la multiplicité (k = m) des racines λ_o, λ_u. Dans ce cas, toutes les racines $\rho(\mu)$ se développent en puissance de μ^1 :



Remarque 2 : Si un des coefficients b_i, $i = m - \kappa_\gamma$ est égal à zéro et que b_{i-1} et b_{i+1} sont distincts de zéro,



$$N_\gamma = (e_1 + 2\,e_2 + \ldots + (\gamma-1)e_{\gamma-1},\ m - \kappa_\gamma)$$
$$A = (e_1 + 2\,e_2 + \ldots + (\gamma-1)e_{\gamma-1} - 1\,\gamma,\ m - \kappa_\gamma - 1)$$
$$B = (e_1 + 2\,e_2 + \ldots + (\gamma-1)e_{\gamma-1} + \gamma + 1,\ m - \kappa_\gamma + 1)$$

La tangente de l'angle aigu entre le segment AB et l'axe σ est égale à $\frac{2}{2\gamma+1}$, d'où on a un développement de $\sigma(\mu)$ sous la forme $\mu^{2/2\gamma+1}$ sur le segment AB.

Dans le cas où les racines $\lambda = \pm\, i\,\beta$, $\lambda_u = \pm\, \frac{2\pi}{\omega}\, p_u\, i + i\,\beta$, $u = 1 \ldots r$, $\beta \in \mathbf{R}_o$, $\beta \neq s\,.\,\frac{2\pi}{\omega}$, $s \in \mathbb{Z}$.

On utilise la substitution suivante : $\sigma = \rho - e^{i\beta\omega}$. Les résultats obtenus sont encore valides dans le cas de non résonance.

2.

Pour le calcul pratique des exposants caractéristiques du système quasi-harmonique $\dot{X} = Ax + \mu\ FX$, ARTEMIEV a effectué la substitution sui-vante :

$$x = e^{\alpha t}\ y(t) \qquad (2.1)$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, α = l'exposant caractéristique recherché et $y(t)$ = vecteur ω-péri-dique.

SHUMANOV a considéré le cas général en supposant que parmi les racines de l'équation $|A - \lambda I| = 0$, il existait des racines multiples ou différentes l'une de l'autre de la quantité $\pm \frac{2\pi}{\omega} p_u\ i$, la multiplicité des racines étant égale au nombre de groupes de solutions du système $\dot{X} = AX$ correspondant à ces racines.

Nous essayons d'enlever cette dernière restriction en utilisant la substitution (2.1) et nous considérons le cas où les racines critiques de l'équation fondamentale $|A - \lambda I| = 0$ ont des diviseurs élémentaires qui ne sont pas tous nuls. La méthode de détermination de l'exposant caractéristi-que développée ci-dessous est basée sur le travail MALKIN [7]. De plus, nous supposons qu'à toutes les racines critiques de l'équation fondamentale pour lesquelles la somme des multiplicités = k, il correspond m groupes de solu-tions et en général, le nombre de diviseurs élémentaires λ^γ, $(\lambda - \lambda_u)^\gamma$ (u = 1, ..., r) avec la puissance $\gamma = e_\gamma (\gamma = 1, \ldots, q)$. Le système homogène de l'équation différentielle $\dot{X} = AX$ admet m et seulement m solutions ω-périodi-ques ϕ_i ($i = 1, \ldots, m$). Nous les supposons groupées comme suit :

$\phi_1, \ldots, \phi_{e_1}$ correspondant aux diviseurs élémentaires simples λ, $(\lambda-\lambda_u$

$\phi_{e_1+1}, \ldots, \phi_{e_1+e_2}$ correspondant aux diviseurs élémentaires simples λ^2, ~~$(\lambda-$~~ $(\lambda-\lambda_u)$

...

$\phi_{\kappa_\gamma+1}, \ldots, \phi_{\kappa_\gamma+1}$ correspondant aux diviseurs élémentaires simples λ^γ, ~~$(\lambda-$~~ $(\lambda-\lambda_u)^\gamma$

avec $\kappa_\gamma = e_1 + e_2 + \ldots + e_{\gamma-1}$

En dehors des m solutions périodiques ϕ_i, il correspond aux racines λ_o, λ_u, k-m solutions particulières indépendantes du système $\dot{X} = AX$ du type suivant [CHETAEV] :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}\,\phi_i + \dfrac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!}\,\phi_i^{(1)} + \ldots + \phi_i^{(\gamma-1)} \\ \ldots \\ \qquad t\,\phi_i + \phi_i^{(1)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \\ \gamma = 2, \ldots, q \end{array} \qquad (2.2)$$

où les fonctions $\phi_i^{(p)}$ sont ω-périodiques satisfaisant les relations de récurrences suivantes :

$$\dot{\phi}_i^{(p)} = A\,\phi_i^{(p)} - \phi_i^{(p-1)} \qquad \begin{array}{l} \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \\ p = 1, \ldots, \gamma-1 \end{array} \qquad (2.3)$$

(γ-1 équations pour γ-1 fonctions inconnues $\phi_i^{(p)}$).
De même on a m solutions ω-périodiques ϕ_i du système adjoint $\dot{X} = -A^T X$.
Comme précédemment on suppose que ψ_i, $\kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1}$ correspond à l'ensemble des diviseurs élémentaires λ^γ, $(\lambda + \lambda_u)^\gamma$ de la matrice $(-A^T - \lambda I)$. En dehors des m solutions périodiques ψ_i, il correspond aux racines λ_o, λ_u, k-m solutions particulières indépendantes du système $\dot{X} = -A^T X$ du type suivant :

$$\begin{array}{l} \dfrac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}\,\psi_i + \dfrac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!}\,\psi_i^{(1)} + \ldots + \psi_i^{(\gamma-1)} \\ \ldots \\ \qquad t\,\psi_i + \psi_i^{(1)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \\ \gamma = 2, \ldots, q \end{array} \qquad (2.4)$$

où les fonctions $\psi_i^{(p)}$ sont ω-périodiques satisfaisant les relations de récurrences suivantes :

$$\dot{\psi}_i^{(p)} + A^T\,\psi_i^{(p)} + \psi_i^{(p-1)} = 0 \qquad \begin{array}{l} \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \\ p = 1, \ldots, \gamma-1 \end{array} \qquad (2.5)$$

Rappel : les conditions d'existence des solutions périodiques du système non homogène

$$\dot{X} = AX + f(t) \qquad (2.6)$$

dans le cas de résonance et lorsque f(t) est ω-périodique sont :

$$\int_0^{\omega} \psi_j^T \, f \, dt = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2.7}$$

$X, f \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $\psi_j \in \mathbb{R}^n$.

De la relation (2.3), il ressort que les fonctions $\phi_i^{(p)}$ sont des solutions périodiques du système non homogène (2.6) où $F(t) = - \phi_i^{(p-1)}$. Les conditions d'orthogonalité sont pour ce système :

$$\kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \qquad A_{ji}^{(p-1)} = \int_0^{\omega} \psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} dt = 0 \qquad \begin{array}{l} p = 1, \ldots, \gamma-1 \\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Les conditions d'orthogonalité impliquent :

1) $p = 1$, $\psi_j^T \, \phi_i^{(o)} = c \qquad c \in \mathbb{R}$ (propriété des solutions du système adjoint)

$$\Rightarrow \int_0^{\omega} \psi_j^T \, \phi_i^{(o)} \, dt = \int_0^{\omega} c \, . \, dt = 0 \Rightarrow c = 0 = \psi_j^T \, \phi_i^{(o)}$$

2) si $\psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [\, \psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} \,] = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\, \psi_j^T \, \phi_i^{(p)} \,] &= \dot{\psi}_j^T \, \phi_i^{(p)} + \psi_j^T \, \dot{\phi}_i^{(p)} \\ &= - (A^T \, \psi_j)^T \, \phi_i^{(p)} + \psi_j^T (A \, \phi_i^{(p)} - \phi_i^{(p-1)}) \\ &= - \psi_j^T \, A \, \phi_i^{(p)} + \psi_j^T \, A \, \phi_i^{(p)} - \psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} = 0 \end{aligned}$$

3) si $\psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} = 0$

si $\int_0^{\omega} \psi_j^T \, \phi_i^{(p)} \, dt = 0$ $\Rightarrow \psi_j^T \, \phi_i^{(p)} = 0$

Par cette récurrence, on a :

$$A_{ji}^{(p-1)} = \int_0^{\omega} \psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} \, dt = \omega \, \psi_j^T \, \phi_i^{(p-1)} = 0 \qquad \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} \tag{2.8}$$

$p = 1, \ldots, \gamma-1$; $j = 1, \ldots, m$.

Pour $p = \gamma$, au moins une des intégrales est distincte de zéro

$$A_{ji}^{(\gamma-1)} = \int_0^\omega \psi_j^T \phi_i^{(\gamma-1)} dt \neq 0 \qquad \begin{array}{l} j = 1, \ldots, m \\ \gamma = 1, \ldots, q \end{array} \tag{2.9}$$

Sinon cela entraînerait l'existence d'une fonction $\phi^{(\gamma)} \Rightarrow \gamma+1$ solutions périodiques relatives aux diviseurs élémentaires de puissance γ. En particulier pour $i \leqslant e_1$, il existe des $A_{ji} \neq 0$:

$$A_{ji} = \psi_j^T \phi_i \neq 0 \tag{2.10}$$

puisque ϕ_i est une solution périodique du système homogène et que le produit scalaire avec les solutions du système adjoint égale une constante non nulle au moins pour une valeur de j ($j = 1, \ldots, m$). De façon similaire, des relations (2.5) et (2.7), on obtient que pour chaque j fixé dans l'intervalle $\kappa_\gamma < j \leqslant \kappa_{\gamma+1}$

$$\int_0^\omega \psi_j^{T(p-1)} \phi_i \, dt = \omega \, \psi_j^{T(p-1)} \phi_i = 0 \qquad \begin{array}{l} p = 1, \ldots, \gamma-1 \\ i = 1, \ldots, m \end{array} \tag{2.11}$$

et au moins un des produits scalaires suivants est différent de 0 :

$$\psi_j^{T(\gamma-1)} \phi_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m; \gamma = 1, \ldots, q)$$

On a que : $\psi_j^T \phi_i^{(p)} = (-1)^p \psi_j^{T(p)} \phi_i$. Montrons le par récurrence :

$$\frac{d}{dt} [\psi_j^T \phi_i^{(1)}] = - \frac{d}{dt} [\psi_j^{(1)T} \phi_i]$$

$$\int \frac{d}{dt} (\psi_j^T \phi_i^{(1)}) dt = - \int \frac{d}{dt} (\psi_j^{(1)T} \phi_i) dt$$

$$\int \frac{d}{dt} (\psi_j^T \phi_i^{(1)} + \psi_j^{(1)T} \phi_i) dt = 0$$

$$(\psi_j^T \phi_i^{(1)} + \psi_j^{(1)T} \phi_i)(t) + K = 0$$

On prend la constante K = 0. Donc $\psi_j^T \phi_i^{(1)} = (-1) \psi_j^{(1)T} \phi_i$, et par récurrence sur p on obtient

$$\psi_j^T \phi_i^{(p)} = (-1)^p \psi_j^{(p)T} \phi_i$$

Finalement, si on a (2.11) on trouve que pour $\kappa_\gamma < j \leqslant \kappa_{\gamma+1}$, les conditions d'orthogonalité sont satisfaites :

$$A_{ji}^{(p-1)} = \omega\, \psi_j^{(p-1)T}\, \phi_i = \omega\, \psi_j^T\, \phi_i^{(p-1)} = 0 \qquad \begin{array}{l} p = 1, \ldots, \gamma-1 \\ i = 1, \ldots, m \end{array} \qquad (2.12)$$

On remarque une symétrie entre les indices i et j. Exprimons les conditions (2.8) et (2.12) en détail :

$\gamma = 2$

$$\begin{array}{ll} e_1 < i \leqslant e_1 + e_2 & \\ j = 1, \ldots, m & (2.8) \\ p = 1 \quad A_{ji}^{(o)} = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} e_1 < j \leqslant e_1 + e_2 & \\ i = 1, \ldots, m & (2.12) \\ p = 1 \quad a_{ji}^{(o)} = 0 & \end{array}$$

$\gamma = 3$

$$\begin{array}{ll} e_1+e_2 < i \leqslant e_1+e_2+e_3 & \\ j = 1, \ldots, m & \\ p = 1 \quad A_{ji}^{(o)} = 0 & (2.8) \\ p = 2 \quad A_{ji}^{(1)} = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} e_1+e_2 < j \leqslant e_1+e_2+e_3 & \\ i = 1, \ldots, m & \\ p = 1 \quad A_{ji}^{(o)} = 0 & (2.12) \\ p = 2 \quad A_{ji}^{(1)} = 0 & \end{array}$$

$\gamma = \gamma$

$$\begin{array}{ll} \kappa_\gamma < i \leqslant \kappa_{\gamma+1} & \\ j = 1, \ldots, m & \\ p = 1 \quad A_{ji}^{(o)} = 0 & (2.8) \\ \ldots\ldots & \\ p = \gamma-1 \quad A_{ji}^{(\gamma-2)} = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \kappa_\gamma < j \leqslant \kappa_{\gamma+1} & \\ i = 1, \ldots, m & \\ p = 1 \quad A_{ji}^{(o)} = 0 & (2.12) \\ \ldots\ldots & \\ p = \gamma-1 \quad A_{ji}^{(\gamma-2)} = 0 & \end{array}$$

On a que

$A_{ji}^{(o)} = 0$ si au moins un des deux indices i ou $j > e_1$

$A_{ji}^{(1)} = 0$ si au moins un des deux indices i ou $j > e_1 + e_2$

....

$A_{ji}^{(\gamma-2)} = 0$ si au moins un des deux indices i ou $j > \kappa_\gamma$

Si i ou $j \leqslant \kappa_{\gamma-1} \Rightarrow \phi_i^{(\gamma-2)}$ et $\psi_i^{(\gamma-2)}$ sont identiquement nulles par construction des solutions suivant CHETAEV, donc

$$A_{ji}^{(\gamma-2)} \equiv 0 \quad \text{pour} \quad i, j \leqslant \kappa_{\gamma-1}$$

En conséquence, $A_{ji}^{(\gamma-2)}$ peut être différent de zéro si $\kappa_{\gamma-1} < i, j \leqslant \kappa_\gamma$.

Ayant établi les propriétés des quantités $A_{ji}^{(\gamma-2)}$, nous passons à la détermination des exposants caractéristiques du système quasi-harmonique $\dot{X} = AX + \mu FX$ (1.1).

En substituant $X = e^{\alpha t}\, y$ dans l'équation (1.1) nous avons le système suivant :

$$\dot{Y} = [A + \mu F^{(1)} + \mu^2 F^{(2)} + \ldots] Y - \alpha Y \tag{2.13}$$

On a vu que dans le cas non dégénéré les exposants caractéristiques α pouvaient être développés en puissances de $\mu^{1/\gamma}$ $(\gamma = 1, \ldots, q)$ et que $\forall\gamma$ le nombre de développements en $\mu^{1/\gamma}$ est égal à $\gamma\, e_\gamma$.

$$\alpha = a_1\, \mu^{1/\gamma} + a_2\, \mu^{2/\gamma} + \ldots$$

on cherche la solution y en série de même puissance de μ

$$y = y^{(o)} + \mu^{1/\gamma}\, y^{(1)} + \mu^{2/\gamma}\, y^{(2)} + \ldots \tag{2.14}$$

Nous commençons par la détermination des exposants caractéristiques qui peuvent être développés en puissance de μ :

$$\alpha = \mu^1\, a_1 + \mu^2\, a_2 + \ldots$$

$$y = y^{(o)} + \mu\, y^{(1)} + \mu^2\, y^{(2)} + \ldots \tag{2.15}$$

(2.15) dans (2.13) donne les systèmes suivants :

$$\dot{y}^{(o)} = A\, y^{(o)} \tag{2.16}$$

$$\dot{y}^{(1)} = A\, y^{(1)} + F^{(1)}\, y^{(o)} - a_1\, y^{(o)} \tag{2.17}$$

$$\dot{y}^{(2)} = A\, y^{(2)} + F^{(1)}\, y^{(1)} + F^{(2)}\, y^{(o)} - a_1\, y^{(1)} - a_2 y^{(o)} \tag{2.18}$$

$$\ldots$$

Le système (2.16) a une famille de solutions périodiques :

$$y^{(o)} = M_1^o\, \phi_1 + \ldots + M_m^o\, \phi_m \tag{2.19}$$

avec M_i^o des constantes arbitraires.

En imposant la condition de périodicité pour le système (2.17), on obtient

$$\int_0^\omega \psi_j^T\, (F^{(1)}\, y^{(o)} - a_1\, y^{(o)})dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\omega \psi_j^T\, (F^{(1)}(M_1^o\, \phi_1 + \ldots + M_m^o\, \phi_m) - a_1(M_1^o\, \phi_1 + \ldots + M_m^o\, \phi_m))dt = 0 \tag{2.20}$$

Posons $B_{ji} = \int_0^{\omega} \psi_j^T F^{(1)} \phi_i \, dt$

$$A_{ji}^{(o)} = \int_0^{\omega} \psi_j^T \phi_i \, dt$$

$$(2.19) \Rightarrow P_j = (B_{j1} - a_1 A_{ji}^{(o)})M_1^o + \ldots + (B_{jm} - a_1 A_{jm}^{(o)})M_m^o = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2.21}$$

Or, $A_{ij}^{(o)} = 0$ pour $i, j > e_1$. (2.21) peut s'écrire sous la forme

$$(B_{j1} - a_1 A_{ji}^{(o)})M_1^o + \ldots + (B_{je_1} - a_1 A_{je_1}^{(o)})M_{e_1}^o +$$

$$B_{je_1+1} M_{e_1+1}^o + \ldots + B_{jm} M_m^o = 0 \quad (j = 1, \ldots, e_1)$$

$$B_{ji} M_1^o + \ldots + B_{jm} M_m^o = 0 \quad (j = e_1 + 1, \ldots, m) \tag{2.22}$$

C'est un système linéaire homogène de m équations à m inconnues $M_1^o, \ldots, M_m^o$ qui admet une solution non triviale ssi le déterminant $\Delta_1 = 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_{11} - a_1 A_{i1} & \ldots & B_{1e_1} - a_1 A_{1e_1} & B_{1,e_1+1} & \ldots & B_{1m} \\ \ldots & & & & & \\ B_{e_11} - a_1 A_{e_11} & \ldots & B_{e_1e_1} - a_1 A_{e_1e_1} & B_{e_1,e_1+1} & \ldots & B_{e_1m} \\ B_{e_1+1,1} & & \ldots & & & B_{e_1+1,m} \\ \ldots & & & & & \\ B_{m1} & & \ldots & & & B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.23}$$

Le coefficient a_1 est une des racines de l'équation algébrique d'ordre e_1, $\Delta_1 = 0$. Pour déterminer a_1, il faut que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Donc, les $m-e_1$ dernières colonnes (lignes) qui ne contiennent pas a_1 doivent être linéairement indépendantes sinon $\Delta_1 = 0$ est identiquement vérifié, ce qui ne permet pas de déterminer a_1.

Dans le cas non dégénéré, on doit pouvoir trouver les e_1 racines a_1; donc les $m-e_1$ dernières lignes (colonnes) doivent être linéairement indépendantes. On obtient d'autres conditions d'existence des e_1 racines a_1 (1.20).

Comme les racines a_1 doivent être simples, il existe un mineur du système (2.22) d'ordre m-1 non nul. Supposons a_1 fixé tel que $\Delta_1 = 0$, les quantités M_i^o peuvent être déterminées à partir d'une, soit M_m^o, qui sera arbitraire. Donc $M_1^o, \ldots, m_m^o, a_1$ sont des solutions simples du système (2.22), et pour elles, on a :

$$\frac{\partial(P_1,\ldots,P_m)}{\partial(M_1^o,\ldots,M_{m-1}^o,a_1)} \neq 0 \qquad (2.24)$$

Pour le déterminant (2.24) non nul, on peut construire formellement les série (2.15) : la solution périodique $y^{(1)}$ est de la forme

$$y^{(1)} = M_1^{(1)}\,\phi_1 + \ldots + M_{m-1}^{(1)}\,\phi_{m-1} + M_m^o\,\phi_m + y^{(1)\star} \qquad (2.25)$$

où $M_1^{(1)} \ldots M_{m-1}^{(1)}$ sont des constantes arbitraires, et $y^{(1)\star}$ est une solution particulière du système périodique (2.17). On substitue (2.19) et (2.25) dans (2.18). La condition de périodicité de $y^{(2)}$ est :

$$\sum_{i=1}^{e_1} (B_{ji} - a_1\,A_{ji}^{(o)})M_i^{(1)} + \sum_{i=e_1+1}^{m-1} B_{ji}\,M_i^{(1)} - a_2 \sum_{i=1}^{e_1} A_{ji}^{(o)}\,M_i^o + e_j = 0$$

$$(j = 1, \ldots, e_1)$$

$$B_{j1}\,M_1^{(1)} + \ldots + B_{j,m-1}\,M_{m-1}^{(1)} + e_j = 0 \quad (j = e_1+1, \ldots, m) \qquad (2.26)$$

où e_j sont les termes ne contenant pas $M_1^{(1)} \ldots M_{m-1}^{(1)}, M_1^{(o)} \ldots M_m^{(o)}, a_2$. On obtient un sytème linéaire non homogène où les inconnues sont : $M_1^{(1)}, \ldots, M_{m-1}^{(1)}, a_2$. Le déterminant des inconnues est

$$\frac{\partial P_1 \ldots P_m}{\partial(M_1^o,\ldots,M_{m-1}^o,a_1)} \neq 0$$

donc $\exists$ une solution unique : $M_1^{(1)}, \ldots M_{m-1}^{(1)}, a_2$. De même, on détermine successivement $a_3, a_4 \ldots$ et $y^{(2)}, y^{(3)} \ldots$ En prenant pour a_1 les e_1 racines de $\Delta_1 = 0$, on détermine les e_1 solutions périodiques développées en puissance de μ^1.

Nous passons à la détermination des exposants caractéristiques qui sont développables en puissance de $\mu^{1/2}$. Le nombre de ces développements est égal à $2\,e_2$.

$$\alpha = \mu^{1/2} a_1 + \mu a_2 + \mu^{3/2} a_3 + \dots$$
$$y = y^{(o)} + \mu^{1/2} y^{(1)} + \mu y^{(2)} + \dots \qquad (2.27)$$

On met (2.27) dans (2.13) et l'on obtient :

$$\dot{y}^{(o)} = A\, y^{(o)}$$
$$\dot{y}^{(1)} = A\, y^{(1)} - a_1\, y^{(o)}$$
$$\dot{y}^{(2)} = A\, y^{(2)} + F^{(1)}\, y^{(o)} - a_1\, y^{(1)} - a_2\, y^{(o)} \qquad (2.28)$$
$$\dots$$

Supposons que le système fondamental a une famille de solutions périodiques

$$y^{(o)} = M_1^o\, \phi_1 + \dots + M_m^o\, \phi_m$$

Les conditions de périodicité de $y^{(1)}$ sont :

$$a_1(M_1^o\, A_{ji}^{(o)} + \dots + M_m^o\, A_{jm}^{(o)}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \qquad (2.29)$$

parce que $A_{ji}^{(o)} = 0$ pour i, j > e_1, les m-e_1 dernières conditions (2.29) sont identiquement satisfaites et les e_1 premières conditions pour $a_1 \neq 0$ ont la forme :

$$M_1^o\, A_{ji}^{(o)} + \dots + M_{e_1}^o\, A_{je_1}^{(o)} = 0 \quad (j = 1, \dots, e_1) \qquad (2.30)$$

Montrons que le déterminant $|A_{ji}^{(o)}|$ du système (2.30) est différent de zéro. En effet, si dét $(A_{ji}^{(o)}) = 0 \Rightarrow$ (2.30) admet au moins une solution non triviale $c_1, \dots, c_{e_1}$. Soit $\phi_p^\star = c_1\phi_1 + \dots + c_{e_1}\, \phi_{e_1}$ $\quad p \in \{1, \dots, e_1\}$

Soit le nouveau système fondamental

$$\phi_1, \dots, \phi_{p-1}, \phi_p^\star, \phi_{p+1}, \dots, \phi_m$$

Soit $A_{ji}^{(o)\star} = \int_0^\omega \sum_{i=1}^{e_1} c_i\, \psi_j^T\, \phi_i = \sum_{i=1}^{e_1} c_i\, A_{ji}^{(o)} = 0 \quad (j = 1, \dots, e_1)$

car $c_1, \dots, c_{e_1}$ sont solutions de (2.30).

De plus $A_{jp}^{(o)\star} = 0$ pour j > e_1, donc $A_{jp}^{(o)\star} = 0$, j = 1, ..., m,

ce qui est contraire à la condition (2.10); donc le déterminant $|A_{ji}^{(o)}| \neq 0$.

Donc l'équation (2.30) a seulement la condition triviale $M_1^o = \dots = M_{e_1}^o = 0$.

Donc

$$y^{(o)} = M^o_{e_1+1}\,\phi_{e_1+1} + \dots + M^o_m\,\phi_m \tag{2.31}$$

$$\dot{y}^{(1)} = A\,y^{(1)} - a_1 \sum_{i=e_1+1}^{m} M^o_i\,\phi_i \tag{2.32}$$

où $M^o_{e_1+1}, \dots, M^o_m$ restent indéterminés.

La famille de solutions périodiques du système (2.32) est :

$$y^{(1)} = M^{(1)}_1\,\phi_1 + \dots + M^{(1)}_m\,\phi_m + a_1(M^o_{e_1+1}\,\phi^{(1)}_{e_1+1} + \dots + M^o_m\,\phi^{(1)}_m)$$

(solution générale du système homogène + combinaison linéaire des solutions particulières (2.3) p = 1). $M^{(1)}_1 \dots M^{(1)}_m$ sont des nouvelles constantes arbitraires. On impose la condition de périodicité de $y^{(2)}$

$$\int_o^\omega \psi^T_j\,F^{(1)}\,[M^o_{e_1+1}\,\phi_{e_1+1} + \dots + M^o_m\,\phi_m]$$

$$- a_1 \int_o^\omega \psi^T_j\,[M^{(1)}_1\,\phi_1 + \dots + M^{(1)}_m\,\phi_m + a_1(M^o_{e_1+1}\,\phi^{(1)}_{e_1+1} + \dots + M^o_m\,\phi^{(1)}_m)]$$

$$- a_2 \int_o^\omega \psi^T_j\,[M^o_{e_1+1}\,\phi_{e_1+1} + \dots + M^o_m\,\phi_m] = 0$$

$$\sum_{i=e_1+1}^{m} M^o_i\,B_{ji} - a_1 \sum_{i=1}^{m} A^{(o)}_{ji}\,M^1_i - a_1^2 \sum_{i=e_1+1}^{m} A^{(1)}_{ji}\,M^o_i - a_2 \sum_{i=e_1+1}^{m} A^{(o)}_{ji}\,M^o_i = 0$$

Or on a vu que $A^{(o)}_{ji} = 0$ si i ou $j > e_1$

$$A^{(1)}_{ji} = 0 \text{ si i ou } j > e_1 + e_2$$

$$P_j = \sum_{i=e_1+1}^{\kappa_3} (B_{ji} - a_1^2\,A^{(1)}_{ji})M^o_i + \sum_{i=\kappa_3+1}^{m} B_{ji}\,M^o_i = 0, \quad j = e_1 + 1, \dots, \kappa_1$$

$$P_j = B_{je_1+1}\,M^o_{e_1+1} + \dots + B_{jm}\,M^o_m = 0 \quad (j = \kappa_3 + 1, \dots, m) \tag{2.34}$$

$$P_j = B_{je_1+1}\,M^o_{e_1+1} + \dots + B_{jm}\,M^o_m - a_1(A^{(o)}_{j1}\,M^{(1)}_1 + \dots + A^{(o)}_{je_1}\,M^{(1)}_{e_1}) = 0 \tag{2.35}$$

$$(j = 1, \dots, e_1)$$

On obtient un système linéaire homogène (2.34) avec pour inconnues $M^{o}_{e_1+1}$, ..., $M^{(o)}_m$ le déterminant du système doit être nul :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{e_1+1,e_1+1}-a_1^2A^{(1)}_{e_1+1,e_1+1} \ldots B_{e_1+1,\kappa_3}-a_1^2A^{(1)}_{e_1+1,\kappa_3} & B_{e_1+1,\kappa_3+1} \ldots B_{e_1+1,m} \\ \ldots & \\ B_{\kappa_3,e_1+1}-a_1^2A^{(1)}_{\kappa_3,e_1+1} \ldots B_{\kappa_3\kappa_3}-a_1^2A^{(1)}_{\kappa_3\kappa} & B_{\kappa_3\kappa_3+1} \ldots B_{\kappa_3 m} \\ B_{\kappa_3+1,e_1+1} \ldots & \ldots B_{\kappa_3+1,m} \\ B_{m,e_1+1} \ldots & B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.36)$$

Supposons $\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow M^o_{e_1+1} = \ldots = M^o_m = 0$. L'équation (2.35) devient

$a_1(A^{(o)}_{ji}\ M^{(1)}_1 + \ldots + A^{(o)}_{je_1}\ M^{(1)}_{e_1}) = 0.$

Pour $a_1 \neq 0$, comme dét $(A^{(o)}_{ji}) \neq 0 \Rightarrow M^{(1)}_1 = \ldots = M^{(1)}_{e_1} = 0$. Donc a_1 doit être choisi de façon que $\Delta_2 = 0$.

On pourra déterminer les 2 e_2 racines si les $m-\kappa_3$ dernières lignes (colonnes) de Δ_2 sont linéairement indépendantes.

Puisque toutes les racines doivent être simples, pour a_1 fixé, on trouve les quantités $M^o_{e_1+1}$, ..., M^o_m où M^o_m sera choisi arbitrairement

$$\frac{\partial(P_{e_1+1} \cdots P_m)}{\partial(M^o_{e_1+1} \cdots M^o_{m-1}, a_1)} \neq 0 \qquad (2.37)$$

Ces quantités $M^o_{e_1+1}$, ..., M^o_m sont obtenues du système (2.35) déterminant de façon unique $M^{(1)}_1 \ldots M^{(1)}_{e_1}$. Exactement comme dans le cas où $\gamma = 1$, on voit que pour un déterminant (2.37) non nul, les séries (2.27) peuvent être construites formellement jusqu'à un ordre quelconque. a_2 sera trouvé en imposant la condition de périodicité $y^{(3)}$ solution du système

$$\dot{y}^{(3)} = A\ y^{(3)} + F^{(1)}\ y^{(1)} - a_1\ y^{(2)} - a_2\ y^{(1)} - a_3\ y^{(o)}$$

Par un raisonnement similaire, on obtiendra un système où les coefficients des inconnues ne contiennent a_2 qu'à la première puissance.

3.

Les résultats obtenus peuvent servir à la recherche de la stabilité des solutions périodiques du système quasi-linéaire du type

$$\dot{z} = Az + f^{\star}(t) + \mu\, f(t, z) \tag{3.1}$$

$z \in \mathbb{R}^n$, f, $f^{\star} \in \mathbb{R}^n$ (ω périodique), $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, f analytique en les variables $z, \ldots, z_n$.

On suppose que la matrice $(A - \lambda I)$ a la même structure que la matrice du système quasi-harmonique (1.1). Nous nous limitons au cas de résonance, c'est-à-dire on suppose que parmi les racines de l'équation fondamentale (1.3), on a des racines $\lambda_o = 0$ et $\lambda_u = \pm \frac{2\pi i}{\omega} p_u$, $p_u \in z$, auxquelles il correspond des diviseurs élémentaires non simples. La partie réelle des autres racines est négative.

Soit $z = \phi(t, \mu)$ une solution périodique analytique en μ du système (3.1) et dont on étudie la stabilité. Les équations de variations sont :

$$\dot{X} = (A + \mu\, F)X \qquad F(\mu, t) = \frac{\partial f(t, z, \mu)}{\partial z}$$

qui sont le système quasi-harmonique considéré précédemment. Dans le cas non dégénéré, on a les propositions suivantes :

1) Si les racines λ_o, λ_u ont des diviseurs élémentaires simples, alors pour avoir la stabilité asymptotique de la solution périodique, il suffit que toutes les racines de l'équation (2.23) aient leurs parties réelles négatives. Dans ce cas, le problème de stabilité est résolu par le critère de ROUTH-HURWITZ.

2) Si les racines λ_o, λ_u ont des diviseurs élémentaires d'ordre 1 et 2, alors pour avoir la stabilité de la solution périodique $z = \phi(t, \mu)$, il est nécessaire d'avoir :

   Pour les racines auxquelles sont associés les diviseurs élémentaires de puissance 1, il faut que $Re(a_1) < 0$ (a_1 solution de 2.23).

   Si $Re(a_1) = 0$, il faut calculer l'approximation suivante de l'exposant caractéristique pour les racines auxquelles sont associés les diviseurs élémentaires de puissance 2; il faut que $Re(a_1^2) < 0$ (a_1^2 solution de 2.36);

(si $\mathrm{Re}(a_1^2) > 0 \Rightarrow \exists$ une des racines carrées à partie réelle positive, ce qui nous oblige à prendre une solution instable).

Si $\mathrm{Re}(a_1^2) = 0 \Rightarrow a_1$ purement imaginaire, donc il faut passer à l'approximation suivante.

3) Dans le cas où l'on a des diviseurs élémentaires de puissance 3, on peut développer les exposants caractéristiques et les solutions en série de $\mu^{1/3}$. Par un raisonnement similaire, on obtiendra le déterminant suivant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} B_{\kappa_3+1,\kappa_3+1} - a_1^3 A^{(2)}_{\kappa_3+1,\kappa_3+1} & B_{\kappa_3+1,\kappa_4} - a_1^3 A^{(2)}_{\kappa_3+1,\kappa_4} & B_{\kappa_3+1,\kappa_4+1} \cdots B_{\kappa_3+1,m} \\ \cdots & & \\ B_{\kappa_4,\kappa_3+1} - a_1^3 A^{(2)}_{\kappa_1,\kappa_3+1} & B_{\kappa_4,\kappa_4} - a_1^3 A^{(2)}_{\kappa_4,\kappa_4+1} \quad \cdots & B_{\kappa,m} \\ B_{\kappa_4+1,\kappa_3+1} \quad \cdots & & B_{\kappa_4+1,m} \\ B_{m,\kappa_3+1} \quad \cdots & & B_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

C'est une équation où l'inconnue est a_1^3, donc quelle que soit la valeur de a_1^3, on aura toujours une valeur de a_1 à partie réelle strictement positive; donc il y a toujours instabilité dans le cas des diviseurs élémentaires de puissance 3.

III. Conditions de périodicité des solutions d'une équation différentielle non linéaire perturbée.

Equation différentielle non linéaire perturbée (proche à une équation non-linéaire).

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + F(X, \dot{X}) = \varepsilon\, f(X, \dot{X}, \varepsilon) \tag{1}$$

où F, f sont des fonctions analytiques dans un domaine $D(X, \dot{X})$ pour ε petit. L'équation (1) est autonome. On recherche des solutions périodiques de l'équation (1) par la méthode de Poincaré. Pour $\varepsilon = 0$, on a l'équation

$$\ddot{X}_o + F(X_o, \dot{X}_o) = 0 \tag{2}$$

Soit $X_o(t, a)$ une solution périodique (période T_o) de (2) telle que

$$X_o(o, a) = a \qquad T_o = T_o(a)$$

$$\dot{X}_o(o, a) = 0$$

On va chercher $X(t, \beta, \varepsilon)$, solution du système (1), de période $T(\varepsilon)$ puisqu'on se trouve dans un système autonome, ayant les conditions initiales perturbées suivantes :

$$\begin{cases} X(o, \beta, \varepsilon) = a + \beta \\ \dot{X}(o, \beta, \varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où β est telle que $\beta(\varepsilon)_{|\varepsilon=o} = 0$.

Cette fois encore, on recherche la solution $X(t, \beta, \varepsilon)$ sous forme de série de β et de ε :

$$X(t, \beta, \varepsilon) = \sum_{n=o}^{\infty} \left(c_n + \frac{\partial c_n}{\partial a}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_n}{\partial a^2}\beta^2 + \ldots\right)\varepsilon^m \tag{4}$$

telle que $X(t, \beta{=}o, \varepsilon{=}o) = c_o = X_o(t, a)$

(4) doit être solution de (1) et satisfaire les conditions initiales (3). En identifiant les coefficients de même puissance de ε dans (1), on obtient les

- coefficients de ε^o

$$\ddot{c}_o + F(c_o, \dot{c}_o) = 0 \Rightarrow c_o = X_o(t, a)$$

$$c_o(o) = a, \ \dot{c}_o(o) = 0$$

- coefficients de ε^1 :

$$\ddot{c}_1 + \frac{dF}{d\varepsilon} = f(X_o, \dot{X}_o, o) = H_1$$

$$\ddot{c}_1 + \frac{\partial F}{\partial X}\Big|_o \frac{dX}{d\varepsilon}\Big|_o + \frac{F}{\dot{X}}\Big|_o \frac{d\dot{X}}{d\varepsilon}\Big|_o = f(X_o, \dot{X}_o, o)$$

$$\ddot{c}_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Big|_o \dot{c}_1 + \frac{\partial F}{\partial X}\Big|_o c_1 = f(X_o, \dot{X}_o, o) \qquad (5)$$

c_1 est donc solution de (5) avec comme conditions initiales :

$$c_1(o) = 0 \qquad \dot{c}_1(o) = 0$$

- coefficients de ε^2 :

$$\ddot{c}_2 + \frac{1}{2!}\frac{d^2F}{d\varepsilon^2}\Big|_o = \frac{df}{d\varepsilon}\Big|_o \qquad (6)$$

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\frac{d\dot{X}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\varepsilon}$$

$$\frac{d^2F}{d\varepsilon^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{X}^2}\left(\frac{d\dot{X}}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{X}\,\partial X}\frac{dX}{d\varepsilon}\frac{d\dot{X}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\frac{d^2\dot{X}}{d\varepsilon^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial \dot{X}}\frac{dX}{d\varepsilon}\frac{d\dot{X}}{d\varepsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\left(\frac{dX}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial X}\frac{d^2X}{d\varepsilon^2}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2F}{d\varepsilon^2}\Big|_o = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{X}^2}\Big|_o \dot{c}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\Big|_o c_1^2 + \frac{2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial \dot{X}} c_1\,\dot{c}_1$$
$$+ \frac{2}{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Big|_o \dot{c}_2 + \frac{2}{2}\frac{\partial F}{\partial X}\Big|_o c_2$$

En effet, $\frac{d^nX}{d\varepsilon^n} = n!\ c_n(t)$ et $\frac{d^n\dot{X}}{d\varepsilon^n} = n!\ \dot{c}_n(t)$

L'équation (6) devient alors :

$$\ddot{c}_2 + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Big|_o \dot{c}_2 + \frac{\partial F}{\partial X}\Big|_o c_2 = \frac{df}{d\varepsilon}\Big|_o - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{X}^2}\Big|_o \dot{c}_1^2 +$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\Big|_o c_1^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{X}\,\partial X}\Big|_o c_1\,\dot{c}_1$$

$$\ddot{c}_2 + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\Big|_o \dot{c}_2 + \frac{\partial F}{\partial X}\Big|_o c_2 = \frac{df}{d\varepsilon}\Big|_o - \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2F}{d\varepsilon^2} - \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\frac{d^2\dot{X}}{d\varepsilon^2} - \frac{\partial F}{\partial X}\frac{d^2X}{d\varepsilon^2}\right\}_o$$

$c_2(t)$ sera solution de cette équation avec les conditions initiales : $c_2(o) = \dot{c}_2(o) = 0$.

- pour les termes en ε^n :

$c_n(t)$ sera solution de :

$$\ddot{c}_n(t) + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_o \dot{c}_n + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_o c_n = H_m$$

$$c_n(o) = 0, \; \dot{c}_n(o) = 0$$

avec : $H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \left.\frac{d^{n-1}f}{d\varepsilon^{n-1}}\right|_{\substack{\varepsilon=o \\ \beta=o}} - \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n F}{d\varepsilon^n} - \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \frac{d^n \dot{X}}{d\varepsilon^n} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{d^n X}{d\varepsilon^n}\right)_{\substack{\varepsilon=o \\ \beta=o}}$

Recherche des $c_n(t)$:

$$\ddot{c}_n + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_o \dot{c}_n + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_o c_n = H_n \qquad c_n(o) = 0, \; \dot{c}_n(o) = 0 \qquad (7)$$

$$c_n(t) = c_n^{\star}(t) - c_n^p(t)$$

où $c_n^{\star}(t)$ est une solution générale du système homogène et $c_n^p(t)$ est une solution particulière du système non homogène. Soit y_1 et y_2, deux solutions linéairement indépendantes du système homogène :

$$c_n^p(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t) = c_n(t) \text{ car } c_n^{\star}(t) = 0$$

puisque les conditions initiales sont nulles.

Pour trouver la solution particulière de (7), utilisons la méthode de variation des constantes de Lagrange : $A = A(t)$ et $B = B(t)$

$$\dot{c}_n(t) = \dot{A}\, y_1 + \dot{B}\, y_2 + A\, \dot{y}_1 + B\, \dot{y}_2$$

$$\dot{A}\, y_1 + \dot{B}\, y_2 = 0 \qquad \text{(condition de Lagrange)}$$

$$\ddot{c}_n(t) = \dot{A}\, \dot{y}_1 + \dot{B}\, \dot{y}_2 + A\, \ddot{y}_1 + B\, \ddot{y}_2$$

Replaçons ces valeurs dans (7)

$$\dot{A}\, \dot{y}_1 + \dot{B}\, \dot{y}_2 + A\, \ddot{y}_1 + B\, \ddot{y}_2 + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_o \{A\, \dot{y}_1 + B\, \dot{y}_2\} + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_o \{A\, y_1 + B\, y_2\}$$
$$= H_n$$

d'où $\dot{A}\, y_1 + \dot{B}\, y_2 = 0$

$$\dot{A}\, \dot{y}_1 + \dot{B}\, \dot{y}_2 = H_n$$

On résout ce système par la méthode de CRAMER afin de déterminer les A et B.

$$\dot{A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ H_n & \dot{y}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}} = \frac{- y_2 H_n}{\Delta(t)}$$

$$\dot{B} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ \dot{y}_1 & H_n \end{vmatrix}}{\Delta(t)} = y_1 H_n \Delta^{-1}$$

$$A(t) = - \int_o^t y_2(t) H_n(t) \Delta^{-1}(t) dt$$

$$B(t) = \int_o^t y_1(t) H_n(t) \Delta^{-1}(t) dt$$

et donc :

$$c_n(t) = y_2(t) \int_o^t y_1(t) H_n(t) \Delta^{-1}(t) dt - y_1(t) \int_o^t y_2(t) H_n(t) \Delta^{-1}(t) dt$$

$$\text{où } \Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} = \Delta(o) \exp [- \int_o^t (\frac{\partial F}{\partial \dot{X}})_o dt]$$

$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_o$ = trace de la matrice du système (1) mis sous forme normale. Imposons les conditions de périodicité à la solution :

$$X(T, \beta, \varepsilon) = a + \beta \qquad (8)$$

$$\dot{X}(T, \beta, \varepsilon) = 0 \qquad (9)$$

$T = T(\varepsilon, \beta)$ telle que $T(o, o) = T_o(a)$

$$\Rightarrow T = T_o + \alpha(\varepsilon) \qquad \alpha(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (N_n + \frac{\partial N_n}{\partial \beta} \beta + \dots)\varepsilon^n$$

Développons l'équation (9) en série de Taylor au voisinage de T_o

$$\dot{X}(T_o, \beta, \varepsilon) + \ddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha + \frac{1}{2!} \dddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha^2 + \dots$$

On rassemble les coefficients des puissances ε^1. Remarquons

$$\left.\ddot{X}\right|_{T_o} = - F(X_o, \dot{X}_o) + 0 = - F(a, o) = - F_a$$

et donc : $\dot{c}_1(T_o) + N_1(- F_a) + 0 = 0.$

$$N_1 = \frac{\dot{c}_1(T_o)}{F_a}$$

En rassemblant les coefficients de puissance ε^2 :

$$\dot{c}_2 + N_1 \ddot{c}_1 + N_2 \ddot{c}_o + \dddot{c}_o \frac{N_1^2}{2} = 0$$

or $\ddot{c}_o = - F_a$

$$\ddot{c}_1 = H_1 - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{c}_1 - \frac{\partial F}{\partial x} c_1$$

$$\Rightarrow \dot{c}_2 + N_1 [H_1 - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{c}_1 - \frac{\partial F}{\partial x} c_1] - F_a N_2 + \dddot{c}_o \frac{N_1^2}{2} = 0$$

$$N_2 = \frac{1}{F_a} [\dot{c}_2 + N_1 [H_1 - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{c}_1 - \frac{\partial F}{\partial x} c_1] + \frac{\dddot{c}_o N_1^2}{2}]$$

D'où T sera connu ordre par ordre. On impose ensuite la condition de périodicité $X(T, \beta, \varepsilon) = a + \beta$ que l'on développe au voisinage de T_o

$$X(T_o, \beta, \varepsilon) + \dot{X}(T_o, \beta, \varepsilon)\alpha + \ddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon) \frac{\alpha^2}{2!} + \dddot{X}(T_o, \beta, \varepsilon) \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

$$= a + \beta \qquad (10)$$

$$X(T_o, 0, 0) = X_o(T_o, a) = c_o$$

L'équation (10) peut aussi s'écrire

$$(X_o(T_o, a) + \frac{dX_o}{da} (T_o, a)\beta + \frac{1}{2} \frac{dX_o}{da^2} \beta^2 + \dots)\varepsilon^o$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + \frac{dM_n}{da} \beta + \frac{1}{2} \frac{d^2M_n}{da^2} \beta^2 + \dots)\varepsilon^n = a + \beta$$

$$x_o(T_o, a) = a \qquad \frac{dx_o}{da}(T_o, a) = 1$$

et les dérivées d'ordre supérieur de $X_o(T_o, a)$ sont nulles. D'où l'équation (10) s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_n + \frac{dM_n}{da} \beta + \frac{1}{2!} \frac{d^2M_n}{da^2} \beta^2 + \dots)\varepsilon^n = 0$$

C'est l'équation de bifurcation qui permet de déterminer β en fonction de ε. Auparavant on détermine les M_n ordre par ordre :

$$M_1 = c_1(T_o)$$
$$M_2 = c_2(T_o) + N_1\, \dot{c}_1(T_o)$$
$$M_2 = c_2(T_o) + \frac{\dot{c}_1^2(T_o)}{F_a}$$
$$\ldots$$

Il est intéressant de voir que l'équation de bifurcation obtenue pour une équation non linéaire perturbée est du même type que l'équation de bifurcation pour une équation linéaire perturbée. Par conséquent, l'étude de cette équation peut être ramenée à l'étude faite pour la recherche de solutions périodiques d'une équation linéaire perturbée (premier chapitre).

IV. Recherche des solutions périodiques d'un système quasi-linéaire non autonome par la méthode de Poincaré.

IV. Recherche des solutions périodiques d'un système quasi-linéaire non autonome par la méthode de Poincaré.

Recherche de solutions d'un système quasi-linéaire non autonome par la méthode de Poincaré :

1. Nous considérons un système écrit sous une forme particulière fréquemment rencontrée dans les problèmes de mécanique lagrangienne :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + e_{ik} x_k) = \varepsilon F_i(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Si le petit paramètre ε est nul, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + e_{ik} x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

$a_{ik} = a_{ki}$; $e_{ik} = e_{ki}$.

Il est intéressant d'envisager un système matériel qui a pour énergie cinétique T et pour énergie potentielle V

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{x}_i \dot{x}_k \qquad \text{forme quadratique définie positive}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} e_{ik} x_i x_k \qquad \text{forme quadratique définie positive}$$

Soit L = T - V le lagrangien du système. Les équations de Lagrange sont alors données par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

et on trouve exactement le système (2).

Le système (1) qui nous intéresse a en second membre des fonctions $F_i(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon)$ que nous supposerons analytiques en ses arguments $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon)$ et 2π périodique en t. Nous connaissons la forme des solutions du système générateur (2)

$$x_{k_0}(t) = A_k \cos \omega t + \frac{B_k}{\omega} \sin \omega t \tag{3}$$

Nous mettons cette expression dans l'équation (2). Pour obtenir des conditions sur ω, on exprime que le résultat de cette substitution est une identité ω^2 doit être racine de $\Delta(\omega^2) = 0$

$$\Delta(\omega) = \text{dét}\ (e_{ik} - a_{ik}\ \omega^2) \tag{4}$$

Soit $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$ n racines réelles positives parce que les matrices (a_{ij}) et (e_{ij}) sont définies positives symétriques. Supposons les distinctes.
Soit ω_r une des racines simples. Alors pour cette racine il correspond des constantes A_{kr} et B_{kr} telles qu'il existe $p_k^{(r)}$

$$\left\{\begin{array}{l} p_k^{(r)} = \dfrac{A_{kr}}{A_{1r}} = \dfrac{B_{kr}}{B_{1r}} = \dfrac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ p_1^{(r)} = 1,\ \Delta_{ik}(\omega_r^2) = \text{mineur de l'élément } (e_{ik} - a_{ik}\ \omega^2) \end{array}\right. \tag{5}$$

Nous supposons que les n fonctions $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont liées par la relation $\omega_1\ q_1 + \omega_2\ q_2 + \ldots + \omega_n\ q_n = 0 \quad q_n \in \mathbb{Q}\ \forall n$.

Soit T_o la période correspondant à toutes les fréquences $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (il existe T_o car ω_i en relation linéaire à coefficients rationnels). Donc

$$\begin{aligned} x_{ko}^{(r)}(t) &= A_{kr} \cos \omega_r\ t + \frac{B_{kr}}{\omega_r} \sin \omega_r\ t \qquad (6) \\ &= A_{1r}\ p_k^{(r)} \cos \omega_r\ t + \frac{B_{1r}}{\omega_r}\ p_k^{(r)} \sin \omega_r\ t \end{aligned}$$

Indice o indique que x_{ko} est solution de l'équation (2) ($\varepsilon = 0$)
Indice k indique quelle fonction inconnue on envisage ($k = 1, \ldots, n$)
Indice r indique que nous avons la partie de solution qui correspond à la fréquence ω_r.
Si on veut $x_{ko}(t)$ solution générale de (2), il faut l'exprimer comme une combinaison linéaire des solutions des différentes fréquences ω_r

$$x_{ko} = x_{ko}^{(1)}(t) + x_{ko}^{(2)}(t) + \ldots + x_{ko}^{(n)}(t) \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1o} = x_{1o}^{(1)}(t) + \ldots + x_{1o}^{(n)}(t) \\ x_{ko} = p_k^{(1)}\ x_{1o}^{(1)}(t) + \ldots + p_k^{(n)}\ x_{1o}^{(n)}(t) \qquad k = 2, \ldots, n \end{array}\right. \tag{7}$$

Les conditions initiales sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{ko}(o) = \sum\limits_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\ A_{1r} \\ \dot{x}_{ko}(o) = \sum\limits_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\ B_{1r} \end{array}\right. \qquad k = 1, \ldots, n$$

Supposons qu'il existe une solution T_o périodique du système complet (1) telle que pour $\varepsilon = 0$, on trouve la solution (7). Nous allons chercher cette solution par la méthode de Poincaré et nous devons donc prendre des conditions initiales proches des conditions initiales de la solution génératrice.

Conditions initiales perturbées :

$$\left\{\begin{aligned} x_k(o) &= x_{ko}(o) + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\,\beta_j \\ \dot{x}_k(o) &= \dot{x}_{ko}(o) + \sum_{j=1}^{n} e_{kj}\,\gamma_j \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où b_{kj} et e_{kj} sont des coefficients à déterminer;

$\beta_j(\varepsilon)$ et $\gamma_j(\varepsilon)$ sont les variations telles que $\beta_j(o) = \gamma_j(o) = 0$

On exprime la solution cherchée sous une série en $\beta_j\ \gamma_j\ \varepsilon$ où l'on doit déterminer les coefficients de ce développement. Etant donné le second membre de (1) qui est $\varepsilon\, F_i(\ldots)$, il est évident que les coefficients des termes en β_j, γ_j sont tous nuls sauf les termes linéaires (les coefficients doivent être des solutions d'une équation $\sum_k a_{ik}\,\ddot{\theta}_k + e_{ik}\,\theta_k) = 0$ avec des conditions initiales nulles $\Rightarrow\ \theta(t) \equiv 0$). On a donc :

$$x_k(t, \beta_j, \gamma_j, \varepsilon) = x_{ko}(t) + \sum_{j=1}^{n} P_{kj}(t)\,\beta_j + \sum_{j=1}^{n} Q_{kj}(t)\,\gamma_j + \varepsilon[\ldots] \tag{$\star$}$$

où P_{kj} et Q_{kj} doivent être solutions des systèmes suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\,\ddot{P}_{kj} + e_{ik}\,P_{kj}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\,\ddot{Q}_{kj} + e_{ik}\,Q_{kj}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

avec pour conditions initiales

$$P_{kj}(o) = b_{kj} \ ; \quad Q_{kj}(o) = 0$$

$$\dot{P}_{kj}(o) = 0 \ ; \quad \dot{Q}_{kj}(o) = e_{kj}$$

Puisque Q_{kj} et P_{kj} sont solutions de (2), ils s'expriment donc sous cette forme :

$$P_{kj} = p_k^{(1)}\, U_j^{(1)} \cos \omega_1 t + \ldots + p_k^{(n)}\, u_j^{(n)} \cos \omega_n t$$

(uniquement une somme de cosinus car $\dot{P}_{kj}(o) = 0$)

$$Q_{kj} = p_k^{(1)} \frac{V_j^{(1)}}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \ldots + p_k^{(n)} \frac{V_j^{(n)}}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

(uniquement une somme de sinus car $Q_{kj}(o) = 0$).

$$P_{kj}(o) = b_{kj} \Rightarrow b_{kj} = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} U_j^{(r)}$$

$$\dot{Q}_{kj}(o) = e_{kj} \Rightarrow e_{kj} = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} V_j^{(r)}$$

Nous introduisons les nouvelles quantités γ_r^o, β_r^o

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_r^o &= \sum_{j=1}^{n} U_j^{(r)} \beta_j \\ \gamma_r^o &= \sum_{j=1}^{n} V_j^{(r)} \gamma_j \end{aligned} \right. \qquad r = 1, \ldots, n$$

La solution (⋆) s'exprime :

$$x_k(t, \beta_r, \gamma_r, \varepsilon) = x_{ko}(t) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \beta_k^o \cos \omega_r t + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\gamma_r^o}{\omega_r} \sin \omega_r t + \varepsilon [\ \ldots]$$

$$x_k(t, \beta_r, \gamma_r, \varepsilon) = x_k(t, \beta_i^o, \gamma_i^o, \varepsilon) = x_{ko}(t) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \beta_k^o \cos \omega_r t$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\dot{\gamma}_r^o}{\omega_r} \sin \omega_r t$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\, e_{km}(t) + \frac{\partial e_{km}}{\partial \beta_1^o} \beta_1^o + \ldots + \frac{\partial e_{km}}{\partial \gamma_1^o} \gamma_1^o + \ldots] \, \varepsilon^n$$

Les conditions initiales (8) s'expriment :

$$\left\{ \begin{aligned} x_k(o) &= x_{ko}(o) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \beta_r^o \\ \dot{x}_k(o) &= \dot{x}_{ko}(o) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \gamma_r^o \end{aligned} \right. \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (9)$$

On peut montrer que la dérivation par rapport à β_r^o et γ_r^o peut être remplacée par la dérivation par rapport à A_{1r} et B_{1r} (x_k est fonction des conditions initiales $x_k(o)$ et dans $x_k(o)$ les variables β_r^o, γ_r^o et A_{1r}, B_{1r} entrent de manière semblable). La solution cherchée s'exprime alors comme suit :

$$x_k(t,\ \beta_r^o,\ \gamma_r^o,\ \varepsilon) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}(A_{1r} + \beta_r^o)\cos\omega_r\ t + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\ \frac{B_{1r}+\gamma_r^o}{\omega_r}\sin\omega_r\ t$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}[\,e_{km}(t) + \frac{\partial e_{km}}{\partial A_{11}}\,\beta_1^o + \ldots + \frac{\partial e_{km}}{\partial B_{11}}\,\gamma_1^o + \ldots\,]\ \varepsilon^m$$

$$(k = 1,\ \ldots,\ n) \qquad (10)$$

Il reste à déterminer $e_{km}(t)$. On met l'expression (10) dans l'équation (1) et on identifie les 2 membres de la relation ainsi trouvée;pour le coefficient de ε^m, on obtient l'équation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ \ddot{e}_{km}(t) + e_{ik}\ e_{km}(t)) = H_{im}(t) \qquad i = 1,\ \ldots,\ m$$

où $e_{km}(o) = 0 \quad \dot{e}_{km}(o) = 0$

avec $H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\varepsilon^{m-1}}\right)_{\varepsilon=0}$

$$H_{i1}(t) = F_i(x_{1o},\ \ldots,\ x_{no},\ \dot{x}_{1o},\ \ldots,\ \dot{x}_{no},\ 0)$$

On cherche la solution de ce système par la méthode opérationnelle [1].
Soit l'équation différentielle

$$L(x) = a_o\ \frac{d^n x}{dt^n} + a_1\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\ \frac{dx}{dt} + a_n\ x = f(t)$$

avec les conditions initiales :

$$x(o) = x_o,\ \dot{x}(o) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(o) = x_{n-1}$$

Si $a_o \neq 0$, si $f(t)$ et $x(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$ admettent une transformée de Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-pt}\ dt$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)\ e^{-pt}\ dt$$

- $f(t)$ est continu avec ses dérivées d'ordres suffisamment élevés sur l'axe t, excepté en certains points en lesquels $f(t)$ ou ses dérivées ont des discontinuités de première espèce en nombre fini sur chaque intervalle fini.
- $f(t) = 0$ pour $t < 0$
- $f(t)$ ne croît pas plus rapidement que la fonction exponentielle $\exists\ M > 0$, $\exists\ \lambda_o \geqslant 0$ telles que $\forall t\ |f(t)| < M\ e^{\lambda_o t}$

L'équation $L(x) = f(t)$ avec ses conditions initiales devient l'équation opérationnelle

$$(a_o\, p^r + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) = F(p) + x_o(a_o\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1})$$
$$+ x_1(a_o\, p^{n-2} + a_1\, p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + x_{n-1}\, a_o$$

ou
$$A(p)\, X(p) = F(p) + B(p)$$

où $A(p)$ et $B(p)$ sont des polynomes connus. La solution est :

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}$$

On démontre que la solution de $L(x) = f(t)$ si elle existe est l'original de la fonction $X(p)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\, F(p)\, dp$$

avec $a > \lambda_o$.

Le système d'équation différentielle

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\, \ddot{e}_{km}(t) + e_{ik}\, e_{km}(t)) = H_{im}(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

devient l'équation opérationnelle

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\, p^2 + e_{ik})C_{km}(p) = K_{im}(p) \qquad i = 1, \ldots, n \quad (11)$$

$C_{km}(p)$ = transformée de Laplace de $e_{km}(t)$

$K_{km}(p)$ = transformée de Laplace de $H_{im}(t)$

La solution de (11) est

$$C_{km}(p) = \frac{1}{\Delta^{\star}(p^2)} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta^{\star}_{ik}(p^2)\, K_{im}(p) \right)$$

développement du numérateur par rapport à la colonne où les seconds membres apparaissent, où

$\Delta^{\star}(p^2) = \text{dét}\,(a_{ik}\, p^2 + e_{ik})$

$\Delta^{\star}_{ik}(p^2)$ est le mineur algébrique correspondant à l'élément $a_{ik}\, p^2 + e_{ik}$

$\Delta^{\star}(p^2) = \Delta(-\, p^2) = \text{dét}\,(e_{ik} - (-\, p^2)\, a_{ik})$

$$\Delta^{\star}(p^2) = \Delta_o \prod_{r=1}^{n} (p^2 + \omega_r^2) \qquad \Delta_o = \text{dét}\,(a_{ik})$$

car on connaît les racines de $\Delta(\omega^2) = 0$ qui sont ω_r, $r = 1, \ldots, n$ (racines distinctes)

$$\frac{\Delta_{ik}^{\star}(p^2)}{\Delta^{\star}(p^2)} = \frac{1}{\Delta_o} [\sum_{r=1}^{n} \frac{K_{ik}^{(r)}}{p^2+\omega_r^2}]$$

$$K_{ik}^{(r)} = \Delta_{ik}(\omega_r^2) \, (\prod_{s\neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2))^{-1}$$

Il faut revenir aux originaux et utiliser les formules

$$F(p)\, G(p) \doteqdot \int_o^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteqdot \sin \omega\, t$$

On obtient

$$e_{km}(t) = \frac{1}{\Delta_o} \sum_{r=1}^{n} [\omega_r \prod_{s\neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2]^{-1} \int_o^t R_{km}^{(r)}(\tau) . \sin \omega_r(t-\tau) d\tau \qquad (13)$$

où $R_{km}^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}(\omega_r^2)\, H_{im}(t)$

Nous introduisons la notation suivante :

$$e_m^{(r)}(t) = [\Delta_o\, \omega_r \prod_{\substack{s\neq r\\ s=1}}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)]^{-1} \int_o^t R_{1m}^{(r)}(\tau) \sin \omega_r(t-\tau) d\tau \qquad (14)$$

En utilisant (5) on obtient

$$e_{1m}(t) = \sum_{r=1}^{n} e_m^{(r)}(t)$$

$$e_{km}(t) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\, e_m^{(r)}(t) \qquad k = 2, \ldots, n \qquad (15)$$

La solution (10) peut alors s'écrire :

$$x_k(t, \beta_r^o, \gamma_r^o, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} (A_r + \beta_r^o) \cos \omega_r\, t + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{B_r+\gamma_r^o}{\omega_r} \sin \omega_r\, t$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\, e_m^{(r)}(t) + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\partial e_m^{(r)}(t)}{\partial A_1} \beta_1^o + \ldots$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\partial e_m^{(r)}(t)}{\partial B_1} \gamma_1^o + \ldots] \varepsilon^m \qquad k = 1, \ldots, n \tag{16}$$

On ne note plus le premier indice 1 des lettres A et B pour simplifier la notation. Cette solution peut être présentée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1(t, \beta_r^o, \gamma_r^o, \varepsilon) = x^{(1)}(t) + \ldots + x^{(n)}(t) & (\text{car } p_1^{(r)} = 1) \\ x_k(t, \beta_r^o, \gamma_r^o, \varepsilon) = p_k^{(1)} x^{(1)}(t) + \ldots + p_k^{(n)} x^n(t) & k = 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{17}$$

$$\text{où } x^{(r)}(t) = (A_r + \beta_r^o)\cos \omega_r t + \left(\frac{B_r + \gamma_r^o}{\omega_r}\right)\sin \omega_r t +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [e_m^{(r)}(t) + \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_1} \beta_1^o + \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_2} \beta_2^o + \ldots + \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_1} \gamma_1^o + \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_2} \gamma_2^o +$$

$$+ \ldots] \varepsilon^m \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Donc, si la solution génératrice d'un système quasi-linéaire non autonome à n fréquences différentes en relation linéaire à coefficients rationnels est de la forme (7), alors une solution du système complet qui pour $\varepsilon = 0$ donne la solution génératrice s'exprime sous une forme semblable (17).

Si l'on cherche une solution périodique de (1), on impose les conditions :

$$\begin{array}{ll} x_1(T_o) - x_1(o) = 0 & \\ x_k(T_o) - x_k(o) = 0 & k = 2, \ldots, n \\ \dot{x}_1(T_o) - \dot{x}_1(o) = 0 & \\ \dot{x}_k(T_o) - \dot{x}_k(o) = 0 & k = 2, \ldots, n \end{array} \tag{18}$$

Les conditions (18) après simplification donnent :

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} e_m^{(r)}(T_o) + \sum_{r=1}^{n} \{\frac{\partial e_m^{(r)}(T_o)}{\partial A_1} \beta_1^o + \ldots\} p_k^{(r)}$$

$$\ldots + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\partial e_m^{(r)}(T_o)}{\partial B_1} \gamma_1^o + \ldots] \varepsilon^m = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \dot{e}_m^{(r)}(T_o) + \sum_{r=1}^{n} \{\frac{\partial \dot{e}_m^{(r)}(T_o)}{\partial A_1} \beta_1^o + \ldots\} p_k^{(r)} \tag{19}$$

$$\ldots + \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \frac{\partial \dot{e}_m^{(r)}(T_o)}{\partial B_1} \gamma_1^o + \ldots] \varepsilon^m = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Ces équations doivent déterminer $\beta_1^o, \ldots, \beta_n^o, \gamma_1^o, \ldots, \gamma_n^o$ en fonction de ε. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites après avoir simplifié par ε les équations (19), on impose les conditions suivantes :

$$1)\begin{cases} \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} e_1^{(r)}(T_o) = 0 \text{ (noté } M_k) \\ \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \dot{e}_1^{(r)}(T_o) = 0 \text{ (noté } N_k) \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Ces équations détermineront les amplitudes principales $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$

2) Le jacobien $\dfrac{\partial(M_1 \ldots M_n, N_1 \ldots N_n)}{\partial(A_1 \ldots A_n, B_1 \ldots B_n)} \neq 0$

----

2. Nous considérons maintenant que parmi les n fréquences distinctes $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$, seul $l < n$ sont en relation linéaire à coefficient rationnel et donc c'est seulement les l fréquences qui donneront une partie périodique (soit la période T_o)

$\exists\, q_i \in \mathbb{Q}$ tel que $q_1\, \omega_1 + q_2\, \omega_2 + \ldots + q_l\, \omega_l = 0$.

Soit la solution génératrice de période T_o

$$x_{ko}(t) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}\left(A_r \cos \omega_r\, t + \frac{B_r}{\omega_r} \sin \omega_r\, t\right) \quad k = 1, \ldots, n$$

où $p_k^{(r)} = \dfrac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \quad p_1^{(r)} = 1 \quad A_{1r} = A_1 \quad B_{1r} = B_1 \quad \forall r.$

On pose le problème de la même manière. Pour le système (1), on prend les conditions initiales sous la forme suivante :

$$x_k(o) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}(A_r + \beta_r) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)}\, \phi_{r-l}(A_1+\beta_1, \ldots, A_l+\beta_l, B_1+\gamma_1, \ldots, \varepsilon)$$

$$\dot{x}_k(o) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}(B_r + \gamma_r) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)}\, \psi_{r-l}(A_1+\beta_1, \ldots, A_l+\beta_l, B_1+\gamma_1, \ldots, \varepsilon) \quad (2.1$$

Les fonctions ϕ_{r-l}, ψ_{r-l} sont analytiques en leurs arguments et

$$\phi_{r-1}(A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots, B_l, 0) = 0$$

$$\psi_{r-1}(A_1, \ldots, B_l, 0) = 0$$

La solution de (1) peut être présentée sous la forme (par raisonnement, analogie au cas 1)

$$x_k(t, \beta, \gamma, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} [(A_r + \beta_r)\cos \omega_r t + \frac{B_r+\gamma_r}{\omega_r} \sin \omega_r t]$$

$$+ \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} [\phi_{r-1}(\beta, \gamma, \varepsilon)\cos \omega_r t + \frac{\psi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)}{\omega_r} \sin \omega_r t]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [e_{km}(t) + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial e_{km}}{\partial A_r} \beta_r + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial e_{km}}{\partial B_r} \gamma_r + \ldots] \varepsilon^m \tag{2.2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

Les fonctions $e_{km}(t)$ peuvent être calculées comme avant :

$$e_{km}(t) = \frac{1}{\Delta_o} \sum_{r=1}^{n} [\omega_r \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq r}}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)]^{-1} \int_0^t R_{km}^{(r)}(\tau) \sin \omega_r(t-\tau)\, d\tau \tag{2.3}$$

$$r = 1, \ldots, n$$

où $R_{km}^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}(\omega_r^2)\, H_{im}(t)$

$$H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\varepsilon^{m-1}}\right)_{\varepsilon=\gamma=\beta=0} \tag{2.4}$$

Nous notons comme avant

$$e_m^{(r)}(t) = [\Delta_o\, \omega_r \prod_{s\neq r}^{n} (\omega_s^2 - \omega_r^2)]^{-1} \int_0^t R_{Im}^{(r)}(\tau) \sin \omega_r(t-\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

On a :

$$e_{km}(t) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\, e_m^{(r)}(t) \tag{2.6}$$

et on a finalement la solution exprimée comme suit :

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)}\, x^{(r)}(t) \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

avec $x^{(r)}(t) = (A_r + \beta_r)\cos\omega_r\, t + \dfrac{B_r + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r\, t$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [e_m^{(r)}(t) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_j}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m$$

$$r = 1, \ldots, l$$

ou

$$x^{(r)}(t) = \phi_{r-1}(\beta, \gamma, \varepsilon)\cos\omega_r\, t + \frac{\psi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)}{\omega_r}\sin\omega_r\, t$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [e_m^{(r)}(t) + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_j}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m$$

$$r = l+1, \ldots, n$$

Recherchons les solutions périodiques. Les conditions de périodicité sont :

$$x_k(T_o) - x_k(o) = 0 \tag{2.8}$$

$$\dot{x}_k(T_o) - \dot{x}_k(o) = 0 \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

$$\sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}\,\{(A_r + \beta_r)\cos\omega_r T_o + \frac{(B_r+\gamma_r)}{\omega_r}\sin\omega_r T_o + \sum_{m=1}^{\infty}[e_m^{(r)}(T_o) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_s}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m\}$$

$$+ \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)}\{\phi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)\cos\omega_r T_o + \frac{\psi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)}{\omega_r}\sin\omega_r T_o + \sum_{m=1}^{\infty}[e_m^{(r)}(T_o) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_s}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m\} -$$

$$\sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)}\,\{(A_r+\beta_r) + \sum_{m=1}^{\infty}[e_m^{(r)}(o) + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}(o)}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}(o)}{\partial B_s}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m\}$$

$$- \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)}\{\phi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon) + \sum_{m=1}^{\infty}[e_m^{(r)}(o) + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}(o)}{\partial A_s}\beta_s + \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial e_m^{(r)}(o)}{\partial B_s}\gamma_s + \ldots]\,\varepsilon^m\} = 0$$

$$k = 1, \ldots, n$$

De même pour (2.9),

$$\cos\omega_r T_o = 1 \qquad 1 \leqslant r \leqslant l$$

car T_o est la période commune aux fréquences $\omega_1, \ldots, \omega_l$ et

$$\sin \omega_r T_o = 0 \qquad 1 \leqslant r \leqslant l$$

$$e_m^{(r)}(o) = 0 \quad \forall r \qquad \dot{e}_m^{(r)}(o) = 0 \quad \forall r$$

Il reste

$$\sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} \left(\phi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)(\cos \omega_r T_o - 1) + \frac{\psi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)}{\omega_r} \sin \omega_r T_o\right)$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_m^{(r)}(T_o) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial A_s} \beta_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial e_m^{(r)}}{\partial B_s} \gamma_s + \ldots \right] \varepsilon^m = 0 \quad (2.10)$$

$$k = 1, \ldots, n$$

Pour l'équation (2.9) il reste

$$\sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} \left(- \omega_r \phi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon) \sin \omega_r T_o + \psi_{r-1}(\beta,\gamma,\varepsilon)(\cos \omega_r T_o - 1)\right) \quad (2.11)$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\dot{e}_m^{(r)}(T_o) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \dot{e}_m^{(r)}}{\partial A_s} \beta_s + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial \dot{e}_m^{(r)}}{\partial B_s} \gamma_s + \ldots \right] \varepsilon^m = 0$$

$$k = 1, \ldots, n$$

Pour $k = l+1, \ldots, n$ (2.10) et (2.11) donnent un système linéaire en ϕ_{r-1} et ψ_{r-1} que l'on peut résoudre et déterminer les ϕ_{r-1} et ψ_{r-1} en fonctions de β, γ et ε par le théorème des fonctions implicites parce que le déterminant D du système est non nul. En effet, si l'on cherche une solution particulière du système non perturbé sous la forme suivante :

$$y_k(t) = \sum_{r=1}^{n} \left(p_k^{(r)} D_{rk} \cos \omega_r t + p_k^{(r)} E_{rk} \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r}\right) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

où D_{rk} et E_{rk} sont des constantes à déterminer et si l'on impose les conditions de périodicité :

$$y_k(T_o) - y_k(o) = 0$$

$$\dot{y}_k(T_o) - \dot{y}_k(o) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

on obtient :

$$\sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} D_{rk}(\cos \omega_r T_o - 1) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} E_{rk} \frac{\sin \omega_r T_o}{\omega_r} = 0$$

$$\sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)}(- \omega_r) D_{rk} \sin \omega_r T_o + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} E_{rk}(\cos \omega_r T_o - 1) = 0$$

On a un système linéaire homogène en D_{rk} et E_{rk} qui ne peut pas avoir la solution autre que la solution triviale puisque les fréquences ω_r pour $r = l+1, \ldots, n$ sont les fréquences non résonantes. Donc le déterminant D est non nul [7].

On remplace ϕ_{r-l} et ψ_{r-l} par leur expression en série de β, γ et ε dans les l premières équations des systèmes (2.10) et (2.11) et on obtient 2 l équations en β, γ et ε qui doivent déterminer β et γ en fonction de ε par le théorème des fonctions implicites.

Après simplification des équations obtenues par ε, les deux conditions à imposer sont

- pour $\varepsilon = 0$, le système obtenu doit être nul et on choisira $A_1 \ldots A_l$, $B_1 \ldots B_l$ tels que ce soit vérifié. $A_1, \ldots, A_l$, $B_1, \ldots, B_l$ ainsi déterminés seront les amplitudes principales qui définissent le système générateur au voisinage duquel il est possible d'obtenir des solutions T_o périodiques.
- le jacobien du système doit être non nul.

Il est intéressant de remarquer que le fait d'introduire les perturbations des conditions initiales de manière linéaire avec les constantes qui interviennent dans la solution génératrice permet d'exprimer la solution générale sous une forme très simple.

V. Recherche de solutions périodiques pour un système non linéaire perturbé.

Introduisons quelques notations :

$$x = (x_1, \ldots, x_p)$$

$$h = (h_1, \ldots, h_r)$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$$

$$K = (k_1, \ldots, k_r)$$

$a \in \mathbb{R}$ $$\frac{\partial^m K}{\partial a^m} = \left(\frac{\partial^m k_1}{\partial a^m}, \ldots, \frac{\partial^m k_n}{\partial a^m}\right)$$

Nous définissons un opérateur linéaire en K qui s'écrit

$$R_m(K, h\ \beta) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^m K}{\partial h^m}\beta^m$$

et qui représente l'expression

$$\sum_{m_1+\ldots+m_r=m} \frac{\partial^m K}{\partial h_1^{m_1}\ldots\partial h_r^{m_r}} \beta_1^{m_1} \ldots \beta_r^{m_r}$$

<u>ex.</u> : si $\beta \in \mathbb{R}^2$, $R \in \mathbb{R}^2$

alors $$\frac{\partial^3 K}{\partial h^3}\beta^3 = \frac{\partial^3 K}{\partial h_1^3}\beta_1^3 + \frac{\partial^3 K}{\partial h_1^2\,\partial h_2}\beta_1^2\,\beta_2 + \frac{\partial^3 K}{\partial h_1\,\partial h_2^2}\beta_1\,\beta_2^2 + \frac{\partial^3 K}{\partial h_2^3}\beta_2^3$$

La linéarité en K est évidente

$$R_m(a\,k^1 + b\,K^2, h, \beta) = a\,R_m(K^1, h, \beta) + b\,R_m(K^2, h, \beta)$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $K^1, K^2 \in \mathbb{R}^n$

Dans le cas général où l'on a k vecteurs $\beta^{(1)} \ldots \beta^{(k)}$ de même dimension que h, on définit l'opérateur noté

$$R_m^{p_1\ldots p_k}(K, h, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(k)}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^m K}{\partial h^m}\beta^{(1)p_1} \ldots \beta^{(k)p_k}$$

où $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = m$.

Cette notation représente l'expression :

$$\sum_{m_1+\ldots+m_r=m} \frac{\partial^m K}{\partial h_1^{m_1}\ldots\partial h_r^{m_r}} \beta_1^{(1)\alpha_{11}} \ldots \beta_r^{(r)\alpha_{1r}} \ldots \beta_1^{(k)\alpha_{k1}} \ldots \beta_r^{(k)\alpha_{kr}}$$

où $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}$, $i = 1 \dots k$, $j = 1 \dots r$ tels que

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} = p_i$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} = m_j$$

Cet opérateur est linéaire en K.

$$\dot{x} = X(x, t) + \varepsilon\, f(t, x, \varepsilon) \qquad (1.1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$X \in \mathbb{R}^n$ X analytique en x sur domaine $G \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in \mathbb{R}^n$ f analytique en x sur domaine $G \subseteq \mathbb{R}^n$

X, f continu, ω- périodique en t

f analytique en ε ε petit paramètre.

Equation génératrice :

$$\dot{x}^{(o)} = X(x^{(o)}, t) \qquad (1.2)$$

Soit $x^{(o)} = \phi(t, h)$ une famille de solutions ω-périodiques dans G où $h = (h_1, \dots, h_k)$ $k \leqslant n$ (h_i = constantes arbitraires, k paramètres).

Nous utilisons la méthode de Poincaré pour rechercher les solutions ω-périodiques du système complet (1.1) qui pour $\varepsilon = 0$ correspondent aux solutions du système générateur (1.2).

Equations aux variations :

$$\dot{y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o y \qquad (1.3)$$

La notation $(\ )_o$ veut dire que l'on évalue l'expression entre parenthèse pour $x = \phi(t, h)$.

Soit $y^{(1)} \dots y^{(n)}$ un système principal des solutions des équations aux variations

$$y_j^{(i)}(o) = \delta_{ij}$$

Le système générateur admet une famille de solutions ω-périodiques à k paramètres, donc :

$$D = |y_j^{(i)}(\omega) - \delta_{ij}| = 0$$

et tous les mineurs d'ordre n-1, ..., n-k+1 sont nuls. Mais il existe un mineur d'ordre n-k qui est non nul, soit

$$D_k \neq 0 \tag{1.4}$$

Supposons que ce mineur corresponde au bloc inférieur droit de la matrice $(Y(\omega) - I)$

1. Recherchons la solution $x(t, \beta, \varepsilon)$ qui correspond aux conditions initiales perturbées suivantes :

$$x(o) = \phi(o, h + \beta) + \psi(\varepsilon, h + \beta) \tag{1.5}$$

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ vecteur de même dimension que le nombre de paramètres qui entrent dans la famille de solutions génératrices

$$x_1(o) = \phi_1(o, h + \beta) + 0 \qquad \psi = (o, \ldots, o, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n)$$

$$x_2(o) = \phi_2(o, h + \beta) + 0 \qquad \beta(\varepsilon) = ?\ \text{tel que } \beta(o) = 0$$

$$\ldots$$

$$x_k(o) = \phi_k(o, h + \beta) + 0$$

$$x_{k+1}(o) = \phi_{k+1}(o, h + \beta) + \psi_{k+1}(\varepsilon, h + \beta)$$

$$\ldots$$

$$x_n(o) = \phi_n(o, h + \beta) + \psi_n(\varepsilon, h + \beta)$$

- On introduit que k perturbations indépendantes $\beta_1 \ldots \beta_k$ et les autres perturbations $(\psi_{k+1} \ldots \psi_n)$ sont à déterminer en fonction de β_i, $i = 1 \ldots h$
- On introduit aussi les perturbations β_i de manière linéaire avec les paramètres h_i

$$\psi(\varepsilon, \beta + h) = B^{(1)}\, \varepsilon + B^{(2)}\, \varepsilon^2 + \ldots \tag{1.6}$$

avec $B^{(s)} = (0, \ldots, 0, B^{(s)}_{k+1}, \ldots, B^{(s)}_n) \qquad B^{(s)} = B^{(s)}(h + \beta)$

Nous cherchons alors $x(t, \beta, \varepsilon)$ sous la forme suivante

$$x(t, h+\beta, \varepsilon) = \sum_{s=o}^{\infty} \left(e^{(s)} + \frac{\partial e^{(s)}}{\partial h}\,\beta + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 e^{(s)}}{\partial h^2}\,\beta^2 + \ldots\right)\varepsilon^s \tag{1.7}$$

Les dérivées partielles par rapport à h et non par rapport à β sont justifiées par le fait que h et β entrent de manière "symétrique linéaire" dans les conditions initiales donc aussi dans la solution $x(t, h+\beta, \varepsilon)$.

On doit donc trouver $e^{(s)} = e^{(s)}(h, t)$. La première détermination ($s = 0$) est évidente car on veut que $x(t, h+\beta, \varepsilon)$ soit égal à la solution génératrice $x^o = \phi(t, h)$ pour $\varepsilon = 0$; donc $e^{(o)} = \phi(t, h) = x^{(o)}$.

Pour déterminer $e^{(s)}$, $s \geqslant 1$, on met la série (1.7) dans l'équation (1.1) et l'on identifie les coefficients de même puissance de ε. On obtient alors un système d'équations différentielles en $e^{(s)}$

$$\dot{e}^{(s)} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o e^{(s)} + H^{(s)} \qquad s \geqslant 1 \tag{1.8}$$

$$\text{où } H^{(s)} = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{d^{s-1}f}{d\varepsilon^{s-1}}\right)_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}} + \frac{1}{s!}\left[\frac{d^sX}{d\varepsilon^s} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o \frac{d^sx}{d\varepsilon}\right]_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}}$$

et l'on a pour conditions initiales :

$$e_i^{(s)}(o) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

$$e_{k+j}^{(s)}(o) = B_{k+j}^{(s)} \qquad j = 1, \ldots, n-k$$

$H^{(1)} = f(t, \phi, o)$ $\qquad$ $(1.1) \equiv \dot{x} = X(x, t) + \varepsilon\, f(t, x, \varepsilon)$

Mettre la série (1.7) dans (1.1) et identifier les coefficients de ε^1

$$\dot{e}^{(1)} = \left.\frac{dX}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=o} + f(t, x^o, 0)$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=o} + f(t, x^o, 0)$$

$$\dot{e}^{(1)} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o e^{(1)} + f(t, x^o, 0)$$

d'où $f(t, \phi(t,h), 0) = H^{(1)}$.

$H^{(2)} = ?$ On identifie le coefficient ε^2

$$\dot{e}^{(2)} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2X}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=o} + \left.\frac{df}{d\varepsilon}\right|_o = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{dx}{d\varepsilon}\right]_o + \left.\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right|_o + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_o \frac{dx}{d\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o \frac{d^2x}{d\varepsilon^2} + \left.\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right|_o + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_o \frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)\left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right)^2$$

$$\dot{e}^{(2)} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o e^{(2)} + H^{(2)}$$

avec $H^{(2)} = \left.\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right|_o + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_o e^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_o \left(e^{(1)}\right)^2$

ce qui correspond à $H^{(2)} = \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}} + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2 X}{d\varepsilon^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o \frac{d^2 X}{d\varepsilon^2}\right]_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}}$

et ainsi de suite pour $H^{(s)}$.

On remarque que pour s fixé, $H^{(s)}$ est exprimé à l'aide de $e^{(j)}$ pour $j < s$. Donc $e^{(s)}$ = solution générale de l'équation aux variations plus solution particulière de l'équation non homogène

$$\dot{e}^{(s)} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o e^{(s)} + H^{(s)}$$

Soit $A = (y_j^{(i)}(t))$ système fondamental de l'équation aux variations

$$\dot{Y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o Y \Rightarrow e^{(s)}(t) = A\, B^{(s)} + \Gamma^{(s)} \qquad s = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

avec $\Gamma^{(s)} = (\gamma_1^{(s)}, \ldots, \gamma_n^{(s)})$ une solution particulière de (1.8) de condition initiale nulle parce que $B^{(s)}$ doit représenter les conditions initiales de $e^{(s)}(t)$ et que $A(o) = (y_j^{(i)}(o)) = I$. On a donc l'expression de $e^{(s)}(t)$ en fonction de $B^{(s)}$ et $\Gamma^{(s)}$.

2. On doit maintenant imposer les conditions de périodicité. Le système est non autonome donc ω est la période de la solution

$$x(\omega, h+\beta, \varepsilon) = x(o, h+\beta, \varepsilon)$$

$$x(\omega, h+\beta, \varepsilon) = \phi(o, h+\beta) + \psi(\varepsilon, h+\beta) \tag{2.1}$$

$$\phi(\omega) + \frac{\partial \phi(\omega)}{\partial h}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}\beta^2 + \ldots + \sum_{s=1}^{\infty}\left[e^{(s)}(\omega) + \frac{\partial e^{(s)}(\omega)}{\partial h}\beta + \ldots\right]\varepsilon^s$$

$$\phi(o) + \frac{\partial \phi(o)}{\partial h}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi(o)}{\partial h^2}\beta^2 + \ldots + \sum_{s=1}^{\infty}\left[B^{(s)} + \frac{\partial B^{(s)}}{\partial h}\beta + \ldots\right]\varepsilon^s$$

Mais $\phi(t, h+\beta)$ est périodique (ω) en t, donc les équations se simplifient

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{\infty}\left[e^{(s)}(\omega) + \frac{\partial e^{(s)}(\omega)}{\partial h}\beta + \ldots\right]\varepsilon^s = \sum_{s=1}^{\infty}\left[B^{(s)} + \frac{\partial B^s}{\partial h}\beta + \ldots\right]\varepsilon^s \tag{2.2}$$

n équations

- Considérons les n-k dernières équations du système (2.2). En égalant les coefficients de même puissance de ε

$$e_{k+p}^{(s)}(\omega) = B_{k+p}^{(s)} \qquad p = 1, \ldots, n-k$$

Mais (1.9)

$$e_{k+p}^{(s)}(t) = \sum_{q=1}^{n-k} y_{k+q}^{(k+p)}(t)\, B_{k+q}^{(s)} + \gamma_{k+p}^{(s)}(t)$$

(n-k dernières composantes). Donc

$$\sum_{q=1}^{n-k} y_{k+q}^{(k+p)}(\omega)\, B_{k+q}^{(s)} + \gamma_{k+p}^{(s)}(\omega) = B_{k+p}^{(s)} \qquad p = 1, \ldots, n-k$$

Or $\gamma^{(s)}$ est indépendant de $B^{(s)}$; donc on obtient un système algébrique avec $B_{k+p}^{(s)}$ comme inconnues $p = 1, \ldots, n-k$

Le déterminant du système correspond justement au mineur $D_k \neq 0$ (bloc inférieur droit de la matrice $|y_j^{(i)}(\omega) - \delta_{ij}|$).

Donc les équations déterminent $B_{k+p}^{(s)}$ $p = 1, \ldots, n-k$ (les dernières composantes); $e^{(s)}(t)$ est connu pour les composantes $e_{k+1}^{(s)}, \ldots, e_n^{(s)}$.

Donc $x_{k+1}(t), \ldots, x_n(t)$ connu et périodique indépendamment de la valeur de $h+\beta$.

- Considérons maintenant les k premières composantes du système (2.2)

Rappel : $B_1^{(s)} = B_{k-1}^{(s)} = B_k^{(s)} \equiv 0 \quad \forall(s) \quad (\Rightarrow \frac{\partial^m B}{\partial h^m} = 0)$

Le système (2.2) devient alors

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\tilde{e}^{(s)}(\omega) + \frac{\partial \tilde{e}^{(s)}(\omega)}{\partial h}\beta + \ldots\right)\varepsilon^s = 0 \tag{2.3}$$

où $\tilde{e}^{(s)}$ = le vecteur à k composantes $e_1^{(s)} \ldots e_k^{(s)}$. (2.3) doit déterminer $\beta(\varepsilon)$. Divisons (2.3) par ε et groupons en puissance de β. On obtient alors

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tilde{e}^{(s)}(\omega)\,\varepsilon^{s-1} + \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{e}^{(s)}}{\partial h}\varepsilon^{s-1}\right)\beta + \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{e}^{(s)}}{\partial h^2}\varepsilon^{s-1}\right)\beta^2 + \ldots = 0 \tag{2.4}$$

quasipolynome qui doit déterminer β en fonction de ε tel que $\beta(o) = 0$. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut que l'expression (2.4) soit satisfaite pour $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$

Donc il faut

$$\tilde{e}^{(1)}(\omega) = 0 \tag{2.5}$$

Il faut donc choisir $h_1 \ldots h_k$ racines de ces équations (2.5). Soit $h^o = (h_1^o, \ldots, h_k^o)$ racine des équations (2.5) $\Rightarrow$ si $\beta(\varepsilon)$ peut être trouvé $\Rightarrow$ $x^o = \phi(t, h^o)$ est une solution génératrice au voisinage de laquelle il existe une solution ω-périodique $x(t, h+\beta(\varepsilon), \varepsilon)$ qui est solution de $\dot{x} = X(x, t) + \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ ($x^o = \phi(t, h^o)$ est la première approximation de $x(t, \beta(\varepsilon)+h^o, \varepsilon)$). Le nombre et la structure des branches de $\beta(\varepsilon)$ d'après (2.4) détermine le nombre et la structure des solutions $x(\varepsilon)$. Si h^o est racine simple de (2.5), c'est-à-dire

$$\Delta = \left|\frac{\partial \tilde{e}^{(1)}(\omega)}{\partial h}\right|_{h^o} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\varepsilon) = A^{(1)}\varepsilon + A^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots$ (3.2) (le théorème des fonctions implicites est applicable). Il existe une solution $\beta(\varepsilon)$ que l'on peut trouver sous forme de série de ε. On met cette expression dans (2.4) et l'on obtient en égalant les coefficients de même puissance de ε (ordre par ordre) des systèmes algébriques qui permettent de déterminer $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... car le déterminant des systèmes est

$$\left| \left.\frac{\partial \tilde{e}^{(1)}(\omega)}{\partial h}\right|_{h^o} \right| \neq 0$$

Si h^o est racine double de (2.5) c'est-à-dire que $\Delta = 0$, il existe un mineur d'ordre k-1 qui est non nul. Supposons qu'il est situé dans le coin supérieur gauche. Soit $\Delta_{kk} \neq 0$.

Soit dans le cas $\bar{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1})$

$$\bar{\beta} = \bar{a}^{(1)}\varepsilon + \bar{a}^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + (\bar{b}^{(o)} + \bar{b}^{(1)}\varepsilon + \ldots)\beta_k + (\bar{e}^{(o)} + \bar{e}^{(1)}\varepsilon + \ldots)\beta_k^2 + \ldots \tag{3.4}$$

$\bar{\beta}$ est calculable comme β dans le cas où Δ était non nul car $\Delta_{kk} \neq 0$. Il reste β_k qui doit être déterminé.

$\bar{\beta}$ étant déterminé en fonction de ε et β_k, on met son expression analytique (3.4) dans (2.4) et l'on obtient une équation du type suivant :

$$F(\varepsilon, \beta_k) = p_1\,\varepsilon + p_2\,\varepsilon^2 + \ldots + (q_o + q_1\,\varepsilon + \ldots)\beta_k + (r_o + r_1\,\varepsilon + \ldots)\beta_k^2 + \ldots = 0 \qquad (3.5)$$

r_j, q_j, p_j peuvent être déterminés, par exemple

$$p_1 = \tilde{e}^{(2)}$$

$$p_2 = \frac{\partial^2 \tilde{e}^{(1)}}{\partial h^2}\,(a^{(1)})^2 + \frac{\partial \tilde{e}^{(2)}}{\partial h}\,a^{(1)} + \tilde{e}^{(3)}$$

$$q_o = \frac{\partial \tilde{e}^{(1)}(\omega)}{\partial h} = 0$$

$$\ldots$$

avec $a^{(i)}$, $b^{(j)}$ ... vecteurs de dimension k;

les k-1 premières composantes sont $\bar{a}^{(i)}$, $\bar{b}^{(j)}$, ... de (3.4).

Les composantes k pour i = 1, 2, ... et j = 1, 2, ... sont nulles sauf $b^{(o)}$ qui a pour $k^{\text{ème}}$ composante la valeur 1.

Il faut résoudre (3.5). Condition $F(0, \beta_k) = 0 \Rightarrow r_o\,\beta_k^2 + s_o\,\beta_k^3 + \ldots = 0$

On doit utiliser maintenant le théorème de préparation de WEIERSTRASS pour trouver les polynomes marqués puis on doit chercher les petites solutions du système polynomial trouvé.

Application : $\dot{x} = X(x, t) + \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \ddot{x} + x + k z^n = \varepsilon [V_1 \cos t + V_2 \sin t + a(1 - x^2)\dot{x}] \\ \dot{z} + z = \varepsilon x \qquad\qquad n \geqslant 3 \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = - X_1 - k X_3^n + \varepsilon [V_1 \cos t + V_2 \sin t + a(1 - X_1^2)X_2] \\ \dot{X}_3 = - X_3 + \varepsilon X_1 \end{cases} \tag{1}$$

Nous avons alors le système générateur ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = - X_1 - k X_3^n \\ \dot{X}_3 = - X_3 \end{cases} \tag{2}$$

Ce système admet comme solution générale $x^{(o)} = \phi(t, h)$

$$\begin{cases} x_1^{(o)} = h_1 \cos t + h_2 \sin t \\ x_2^{(o)} = - h_1 \sin t + h_2 \cos t \\ x_3^{(o)} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

L'équation aux variations est : $\dot{Y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o Y$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -knX_3^{n-1} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_o \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$(\ )_o$ veut dire que l'on calcule l'expression entre parenthèses pour $x = x^{(o)}$.
Donc

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ce système aux variations admet comme système fondamental le système suivant

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \phi(o) = I$$

$$\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

$$D = |\phi(2\pi) - I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi}-1 \end{vmatrix} = 0$$

Il existe un mineur d'ordre 1 $\neq 0$ avec les notations de la théorie, on a $k = 2$.

Conditions initiales perturbées :

$$x(o) = \phi(o, h+\beta) + \psi(\varepsilon, h+\beta) \qquad \text{ici } \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1(o) = h_1 + \beta_1 + 0 & \text{avec } \phi(t, h+\beta) \text{ solution génératrice} \\ x_2(o) = h_2 + \beta_2 + 0 & \\ x_3(o) = \qquad\quad + \psi_3(\varepsilon, h+\beta) & \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\psi(\varepsilon, h+\beta) = B^{(1)}\,\varepsilon + B^{(2)}\,\varepsilon^2 + \ldots \text{ avec } B^{(s)} = (0, 0, B_3^{(s)})$$

Soit $x(t, h+\beta, \varepsilon) = \sum_{s=o}^{\infty} \left(e^{(s)} + \frac{\partial e^{(s)}}{\partial h}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e^{(s)}}{\partial h^2}\beta^2 + \ldots\right)\varepsilon^s$

$$e^{(o)} = \phi(t, h)$$

On a par les formules (1.8) de la théorie que $e^{(s)}$ est solution des équations suivantes :

$$\dot{e}^{(s)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e^{(s)}(t) + H^{(s)}(t)$$

$$H^{(s)}(t) = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{d^{s-1}f}{d\varepsilon^{s-1}}\right)_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}} + \frac{1}{s!}\left[\frac{d^s X}{d\varepsilon^s} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_o \frac{d^s x}{d\varepsilon^s}\right]_{\substack{\varepsilon=o\\ \beta=o}}$$

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1\cos t + V_2\sin t + a(1-(h_1\cos t+h_2\sin t)^2)(-h_1\sin t+h_2\cos t) \\ h_1\cos t + h_2\sin t \end{pmatrix}$$

$e_1^{(1)} = ?$ $\qquad e_2^{(1)} = ?$ $\qquad e_3^{(1)} = ?$

$$\begin{cases} \dot{e}_1^{(1)}(t) = e_2^{(1)}(t) \\ \dot{e}_2^{(1)}(t) = - e_1^{(1)}(t) + H_2^{(1)} \\ \dot{e}_3^{(1)}(t) = - e_3^{(1)} + H_3^{(1)} \qquad (\star) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_3^{(1)}(t) = A \cos t + B \sin t$$

$$(\star) \; - A \sin t + B \cos t = - A \cos t - B \sin t + h_1 \cos t + h_2 \sin t$$

$$\begin{matrix} - A = - B + h_2 \\ B = - A + h_1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A = \frac{1}{2} (h_1 - h_2) \\ B = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) \end{matrix}$$

donc

$$\Gamma_3^{(1)}(t) = \frac{1}{2} (h_1 + h_2)\sin t + \frac{1}{2} (h_1 - h_2)\cos t$$

Par (1.9) on a

$$e_3^{(1)}(t) = B_3^{(1)} e^{-t} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2)\sin t + \frac{1}{2} (h_1 - h_2)\cos t$$

Dans cet exemple $e_2^{(1)}$ et $e_1^{(1)}$ sont égaux à $\Gamma_2^{(1)}$ et $\Gamma_1^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)} \\ \Gamma_2^{(1)} \\ \Gamma_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

$B_3^{(1)} = ?$

$$e_3^{(1)}(2\pi) = B_3^{(1)}$$

Donc $\quad e^{-2\pi} B_3^{(1)} + \frac{1}{2} (h_1 - h_2) = B_3^{(1)} \Rightarrow B_3^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{(h_1 - h_2)}{1 - e^{-2\pi}}$

$$\begin{cases} \ddot{e}_2^{(1)} + e_2^{(1)} = \dot{H}_2^{(1)} \\ \ddot{e}_1^{(1)} + e_1^{(1)} = H_2^{(1)} = V_1 \cos t + V_2 \sin t + a(1-(h_1 \cos t + h_2 \sin t)^2) \\ \qquad (-h_1 \sin t + h_2 \cos t) \end{cases}$$

$$H_2^{(1)} = (V_1 + a\, h_2)\cos t + (V_2 - a\, h_1)\sin t + (a\, h_1^3 - 2\, h_1\, h_2^2\, a)\cos^2 t \sin t$$
$$+ (2\, h_1^2\, h_2\, a - a\, h_2^3)\cos t \sin^2 t + a\, h_1\, h_2^2 \sin^3 t + a\, h_2\, h_1^2 \cos^3 t$$

On peut voir aisément que la condition $\tilde{e}^1(2\pi) = 0$ peut s'exprimer ici par

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\ H_3^{(1)}(t)\ dt = 0 & e_1^{(1)}(2\pi) = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\ H_2^{(1)}(t)\ dt = 0 & e_2^{(1)}(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 - a\ h_1\ [1 - \frac{1}{4}\ (h_1^2 + h_2^2)] = 0 \\ V_1 + a\ h_2\ [1 - \frac{1}{4}\ (h_1^2 + h_2^2)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = - \frac{V_1}{V_2}$$

$\Rightarrow h_1$ et h_2 ? Soit $A = h_1$

$$h_2 = - \frac{V_1}{V_2} A$$

$$\Rightarrow V_2 - a\ A\ [1 - \frac{1}{4}\ (A^2 + \frac{V_1^2}{V_3^2} A^2)] = 0$$

$$4\ V_2^3 - a\ A\ [4\ V_2^2 - A^2(V_1^2 + V_2^2)] = 0$$

équation d'ordre 3 en $h_1 = A$

$$A^3(a(V_1^2 + V_2^2)) - A(a_4\ V_2^2) + 4\ V_2^3 = 0$$

Formule de Cardan

Discriminant = $p^3 + q^2$ avec l'équation sous la forme $y^3 + 3py + 2\ q = 0$

$$p = - \frac{4}{3} \frac{a\ V_2^2}{a(V_1^2 + V_2^2)} = - \frac{4}{3} \frac{V_2^2}{(V_1^2 + V_2^2)}$$

$$q = \frac{2\ V_2^3}{a(V_1^2 + V_2^2)}$$

$$D = p^3 + q^2 = - \frac{64}{27} \frac{V_2^6}{(V_1^2 + V_2^2)^3} + \frac{4\ V_2^6}{a^2(V_1^2 + V_2^2)^2}$$

$$D = \frac{64\ V_2^6}{27\ a^2(V_1^2 + V_2^2)^3}\ [- a^2 + \frac{27}{16}\ (V_1^2 + V_2^2)]$$

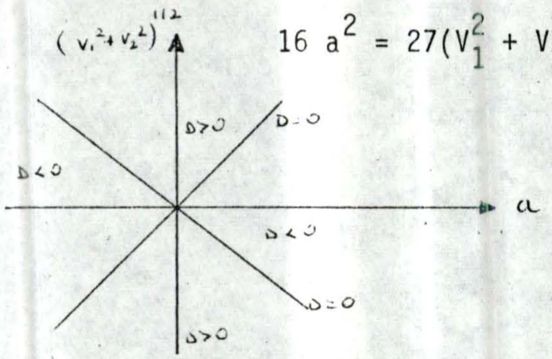
$D > 0 \Rightarrow$ l'équation admet une solution réelle (2 complexes)

$D < 0 \Rightarrow$ l'équation admet trois solutions réelles

$D = 0 \Rightarrow$ l'équation admet une solution triple (si $p = q = 0$)

une solution double (si $p^3 = - q^2 \neq 0$) et 1 simple.

Cas intéressant : D = 0



$$16\ a^2 = 27(V_1^2 + V_2^2) \qquad a = \pm \sqrt{\frac{27}{16}(V_1^2 + V_2^2)}$$

$$A = 2\sqrt[3]{-q} = -2\sqrt[3]{\frac{2\ V_2^3}{a(V_1^2 + V_2^2)}} = -2\sqrt[3]{\frac{V_2^3\ 27}{a\ a^2}} \quad \text{avec } 16\ a^2 = 27(V_1^2 + V_2^2)$$

$$= -\frac{2\ .\ 3}{2}\ \frac{V_2}{a} = -\frac{3\ V_2}{a}$$

$$h_1 = -\frac{3\ V_2}{a}$$

$$h_2 = -\frac{V_1}{V_2}\ .\ (-\ 3\ \frac{V_2}{a}) = 3\ \frac{V_1}{a}$$

Supposons $V_1 = -V_2 \Rightarrow h_2 = 3\ \frac{V_1}{a} = h_1$ (amplitudes qui déterminent la solution génératrice qui admet dans son voisinage une solution 2π-périodique du système complet.

Comme dans la théorie dans le cas des racines multiples, on exprime une partie de β en fonction des autres :

$$\overline{\beta} = \beta_1$$

$$\beta_1 = a^{(1)}\ \varepsilon + a^{(2)}\ \varepsilon^2 + \dots + (b^{(o)} + b^{(1)}\ \varepsilon + \dots)\ \beta_2 + (e^{(o)} + e^{(1)}\ \varepsilon + \dots)\beta_2^2 + \dots$$

Pour déterminer les coefficients on remplace cette série dans les conditions de périodicité (2.4).

On obtient une équation en β_1 et ε. On égale les coefficients de même puissance de ε et β_2 dans la première composante de l'équation (2.4). Ces coefficients s'obtiendraient après détermination de $\tilde{e}^{(2)}(\omega)$, ce qui demande des calculs semblables à ceux de la détermination de $\tilde{e}^{(1)}(\omega)$ mais plus fastidieux.

Il reste alors à déterminer β_1 en fonction de ε à l'aide de la deuxième composante de l'équation (2.4).

Annexe 1 : Exemples de calculs pour déterminer une équation déterminante.

ANNEXE 1 : Explication du tableau 1.

Soit l'équation de bifurcation :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}\beta^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}\beta^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4M_1}{dA_o^4}\beta^4 + \ldots$$

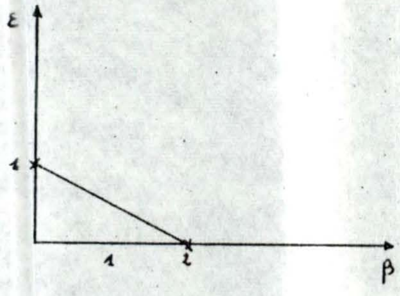
$$+ M_2\,\varepsilon + M_3\,\varepsilon^2 + M_4\,\varepsilon^3 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{dM_2}{dA_o}\varepsilon + \frac{dM_3}{dA_o}\varepsilon^2 + \ldots\right)\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\varepsilon + \frac{d^2M_3}{dA_o^2} + \ldots\right)\beta^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3M_2}{dA_o^3}\varepsilon + \frac{d^3M_3}{dA_o^3} + \ldots\right)\beta^3 + \ldots = 0$$

1. Si $M_2 \neq 0$, $\frac{d^2M_1}{dA_o^2} \neq 0$ (la plus petite puissance de ε pur est 1; donc, il y aura le point (0, 1) dans le diagramme de Newton et la plus petite puissance de β pur est 2; donc le point (2, 0) sera le point extrême du diagramme).

Le coefficient $\frac{dM_2}{dA_o}$ s'il est non nul, donne un point (1, 1) qui ne sera pas sur un segment du diagramme de Newton (par construction on ne prend que des segments descendants).



Donc $\beta(\varepsilon)$ peut s'exprimer en série de $\varepsilon^{1/2}$

$$\beta(\varepsilon) = A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \ldots \qquad (1)$$

On remplace l'expression de $\beta(\varepsilon)$ dans l'équation de bifurcation :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}(A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \ldots)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3M_1}{dA_o^3}(A_{1/2}\,\varepsilon^{1/2} + \ldots)^3 + \ldots$$

$$+ M_2\,\varepsilon + M_3\,\varepsilon^2 + M_4\,\varepsilon^3 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{dM_2}{dA_o}\varepsilon + \frac{dM_3}{dA_o}\varepsilon^2 + \ldots\right)(A_{1/2}\varepsilon^{1/2} + \ldots) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2M_2}{dA_o^2}\varepsilon + \ldots\right)(A_{1/2}\varepsilon^{1/2} + \ldots)^2 + \ldots = 0$$

En annulant le coefficient de la plus petite puissance de ε on obtient l'équation déterminante $\frac{1}{2} \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{1/2}^2 + M_2 = 0$, ce qui détermine $A_{1/2}$ (il existe deux solutions réelles si M_2 et $\frac{d^2M_1}{dA_o^2}$ sont de signes opposés).

Le principe de calcul des équations déterminantes et des coefficients du développement de $\beta(\varepsilon)$ en série de ε est le même pour tous les autres cas.

Annexe 2 : Etude de la stabilité des solutions d'une équation quasi-harmonique.

ANNEXE 2 :

Etude de la stabilité des solutions périodiques du système quasi-harmonique (explication du tableau 3).

1. $M_2 \neq 0; \dfrac{d^2M_1}{dA_o^2} \neq 0; \beta = A_{1/2}\, \varepsilon^{1/2} + \ldots$

Equation déterminante : $\frac{1}{2} \dfrac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{1/2}^2 + M_2 = 0$ (annexe 1).

$$\rho_1 = \left.\frac{\partial Z(t)}{\partial A_o}\right|_{T=T_o} = 1 + \{\frac{d^2M_1}{dA_o^2} (A_{1/2}\, \varepsilon^{1/2}) + \frac{1}{2} \frac{d^3M_1}{dA_o^3} (A_{1/2}^2\, \varepsilon) + \ldots\}\varepsilon$$

$$+ \{\frac{dM_2}{dA_o} + \frac{d^2M_2}{dA_o^2} (A_{1/2}\, \varepsilon^{1/2}) + \ldots\}\varepsilon^2 + \ldots$$

La condition de stabilité étant $\rho_1 < 1$, il faut donc que le coefficient du terme de plus petite puissance de ε soit négatif :

$$\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{1/2} < 0.$$

Le principe de calcul est le même pour tous les autres cas.

Etude de la stabilité des solutions périodiques du système quasi-harmonique dans le cas des racines multiples de l'équation déterminante.

2. $M_2 = 0; \dfrac{d^2M_1}{dA_o^2} \neq 0; \beta = A_1\, \varepsilon^1 + \ldots$

Equation déterminante : $\frac{1}{2} \dfrac{d^2M_1}{dA_o^2} A_1^2 + \dfrac{dM_2}{dA_o} A_1 + M_3 = 0$

a) A_1 <u>racine simple</u> : la condition de stabilité est :

$$\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_1 + \frac{dM_2}{dA_o} < 0$$

b) A_1 racine double dans $\dfrac{d^2M_1}{dA_o^2} A_1 + \dfrac{dM_2}{dA_o} = 0$

On cherche l'approximation suivante : $\beta = A_1 \varepsilon + V \qquad V(\varepsilon) = ?$

On porte cette expression de $\beta(\varepsilon)$ dans l'équation de bifurcation et on obtient :

$$\frac{1}{2}(A_1 \varepsilon + V)^2 \frac{d^2M_1}{dA_o^2} + \frac{1}{3!}(A_1 \varepsilon + V)^3 \frac{d^3M_1}{dA_o^3} + \dots$$

$$+ M_3 \varepsilon^2 + M_4 \varepsilon^3 + \dots$$

$$+ \frac{dM_2}{dA_o}(A_1 \varepsilon^2 + \varepsilon V) + \frac{dM_3}{dA_o}(A_1 \varepsilon^3 + \varepsilon^2 V) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{d^2M_2}{dA_o^2}(A_1 \varepsilon + V)^2 \varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2M_3}{dA_o^2}(A_1 \varepsilon + V)^2 \varepsilon^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{3!}\frac{d^3M_2}{dA_o^3}\varepsilon(\varepsilon A_1 + V)^3 + \frac{1}{3!}\frac{d^3M_2}{dA_o^3}\varepsilon^2(A_1 \varepsilon + V)^3 + \dots = 0$$

En groupant les termes de mêmes puissances de ε^2 ou $V\varepsilon$ on obtient :

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1^2 + \frac{dM_2}{dA_o}A_1 + M_3\right\}\varepsilon^2 + \left\{\frac{d^2M_1}{dA_o^2}A_1 + \frac{dM_2}{dA_o}\right\}\varepsilon V + \frac{1}{2}\frac{d^2M_1}{dA_o^2}V^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3M_1}{dA_o^3}A_1^3 \varepsilon^3 + 3\frac{d^3M_1}{dA_o^3}A_1^2 \varepsilon^2 V + 3\frac{d^3M_1}{dA_o^3}A_1 \varepsilon V^2 + \frac{d^3M_1}{dA_o^3}V^3\right) +$$

$$+ M_4 \varepsilon^3 + \dots$$

$$+ \frac{dM_3}{dA_o}A_1 \varepsilon^3 + \frac{dM_3}{dA_o}\varepsilon^2 V + \dots + \frac{1}{2}\frac{d^2M_2}{dA_o^2}(\varepsilon^3 A_1^2 + 2\varepsilon^2 A_1 V + \varepsilon V^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2M_3}{dA_o^2}(\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 A_1 V + \varepsilon^2 V^2) + \frac{1}{3!}\frac{d^3M_2}{dA_o^3}(\varepsilon^4 A_1^3 + 3A_1^3 \varepsilon^3 V + 3A_1 \varepsilon^2 V^2 + A_1 \varepsilon V^2)$$

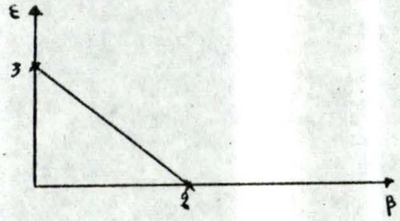
$$+ \dots = 0$$

Le coefficient de ε^2 est nul car A_1 est racine de l'équation déterminante. Le coefficient de εV est nul car A_1 est racine double de l'équation déterminante. Il faut donc appliquer la méthode du diagramme de Newton pour déterminer $V(\varepsilon)$.

Le point (2, 0) $\in$ diagramme de Newton car la plus petite puissance de V pur qui apparaît dans l'équation précédente est 2.
Le point (0, 3) $\in$ diagramme de Newton car la plus petite puissance de ε pur qui apparaît dans l'équation précédente est 3 si son coefficient est non nul

$$P_3(A_1) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{6} \frac{d^3M_1}{dA_o^3} A_1^3 + \frac{1}{2} \frac{d^2M_2}{dA_o^2} + \frac{dM_3}{dA_o} A_1 + M_4 \neq 0$$

Le point (1, 2) $\notin$ diagramme de Newton car il est au-dessus du segment du diagramme qui relie (0, 3) et (2, 0). Donc, on obtient le diagramme suivant :



Donc $V(\varepsilon) = A_{3/2}\ \varepsilon^{3/2}$

Pour déterminer $A_{3/2}$ on utilise la méthode des coefficients indéterminés.

On met $\beta(\varepsilon) = A_1\ \varepsilon^1 + A_{3/2}\ \varepsilon^{3/2}$ dans l'équation de bifurcation et on annule les coefficients de plus petites puissances de ε

$$\Rightarrow \text{ équation déterminante de } A_{3/2} = \frac{1}{2} \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{3/2}^2 + P_3 = 0 \qquad (2)$$

La condition de stabilité est toujours que $\rho_1 = \left.\frac{\partial z}{\partial A_o}\right|_{T_o} < 1$

$$\rho_1 = 1 + \frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{3/2}\ \varepsilon^{3/2}\ \varepsilon + \ldots < 1$$

(après simplification en tenant compte que A_1 est racine double de la première équation déterminante et que $A_{3/2}$ est racine de la seconde équation déterminante). Donc il faut

$$\frac{d^2M_1}{dA_o^2} A_{3/2} < 0$$

On remarque que le premier membre de la condition de stabilité est la dérivée de l'équation déterminante (2) par rapport à $A_{3/2}$.

Annexe 3 : Quelques notions sur les diviseurs élémentaires (GANTMACHER) et sur la recherche de solutions particulières d'un système $\dot{X} = AX$ par CHETAEV.

ANNEXE 3 : Quelques notions utiles sur les diviseurs élémentaires.

2 GANTMACHER - 8 CHETAEV

Une matrice polynomiale $A(\lambda)$ peut être ramenée par des transformations élémentaires à une forme diagonale appelée canonique.

- $A(\lambda)$ matrice polynomiale $\Leftrightarrow$ $A(\lambda)$ peut s'écrire comme un polynome en λ à coefficients matriciels $A(\lambda) = A_0\,\lambda^l + A_1\,\lambda^{l-1} + \ldots + A_{l-1}\,\lambda + A_l$
  A_i = matrice constante, $i = 1, \ldots, l$.
- Opérations élémentaires sur $A(\lambda)$ matrice quelconque rectangulaire
  1) multiplier 1 ligne (1 colonne) par une constante non nulle $c \in \mathbb{R}_0$;
  2) additionner à une ligne une autre ligne multipliée par un polynome arbitraire $b(\lambda)$;
  3) permuter 2 lignes (de même sur les colonnes).

$A(\lambda)$ matrice polynomiale rectangulaire mxn peut être ramenée à la forme canonique suivante

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda) & & & & & \\ & a_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_s(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $s \leqslant \min(m, n)$

$a_i(\lambda)$ polynome en λ non identiquement nul

$i < j \Rightarrow a_j(\lambda)$ divisible par $a_i(\lambda)$,

$1 \leqslant i, j \leqslant s$

Le coefficient de la plus haute puissance de λ dans $a_j(\lambda)$ est 1.

- Soit $A(\lambda)$ une matrice polynomiale de rang r.

Soit $D_j(\lambda) \triangleq$ le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre j de $A(\lambda)$; nous supposons que le coefficient de la plus haute puissance de λ dans $D_j(\lambda)$ est 1, $j = 1, \ldots, r$ $\Rightarrow$ dans la suite $D_r(\lambda)$; $D_{r-1}(\lambda)$; ... $D_1(\lambda)$; $D_0(\lambda) \equiv 1$, chaque polynome est divisible par le polynome précédent (décomposition de Bezout par rapport aux éléments d'une ligne d'un mineur arbitraire d'ordre j, chaque terme de la décomposition est divisible par $D_{j-1}(\lambda)$. Donc tout mineur d'ordre j et par suite, $D_j(\lambda)$ est alors divisible par $D_{j-1}(\lambda)$).

Les quotients correspondants seront désignés par $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)};\; i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)};\; \ldots;\; i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda)$$

Ces polynomes sont appelés les *polynomes invariants* de la matrice rectangulaire $A(\lambda)$. Le mot invariant est justifié car si on envisage deux matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ telles que $B(\lambda)$ soit obtenu à partir de $A(\lambda)$ par des transformations élémentaires, on démontre que $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ ont alors les mêmes polynomes invariants $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$; (les opérations élémentaires ne changent ni le rang de $A(\lambda)$ ni les polynomes $D_j(\lambda)$).
Or la matrice canonique est obtenue par des transformations élémentaires à partir de $A(\lambda)$, donc les polynomes invariants de la forme canonique sont ceux de la matrice $A(\lambda)$. Il est aisé de voir que ces polynomes invariants sont ceux qui sont sur la diagonale

$$D_1(\lambda) = a_1(\lambda);\ D_2(\lambda) = a_1(\lambda)\ a_2(\lambda);\ \ldots;\ D_r(\lambda) = a_1(\lambda)\ a_2(\lambda) \ldots a_r(\lambda)$$

donc $i_1(\lambda) = a_r(\lambda);\ i_2(\lambda) = a_{r-1}(\lambda);\ \ldots;\ i_r(\lambda) = a_i(\lambda)$.

Décomposons les polynomes invariants $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ en facteurs irréductibles

$$\begin{array}{ll}
i_1(\lambda) = [\phi_1(\lambda)]^{e_1}\ [\phi_2(\lambda)]^{e_2} \ldots [\phi_s(\lambda)]^{e_s} & \\
i_2(\lambda) = [\phi_1(\lambda)]^{d_1}\ [\phi_2(\lambda)]^{d_2} \ldots [\phi_s(\lambda)]^{d_s} & c_k \geqslant d_k \geqslant \ldots \geqslant l_k \geqslant 0 \\
\ldots & \\
i_r(\lambda) = [\phi_1(\lambda)]^{l_1}\ [\phi_2(\lambda)]^{l_2} \ldots [\phi_s(\lambda)]^{l_s} & k = 1, 2, \ldots, s
\end{array}$$

Ici $\phi_j(\lambda)$ sont des facteurs irréductibles distincts (le coefficient le plus élevé en λ est 1).
$[\phi_1(\lambda)]^{e_1}, \ldots, [\phi_s(\lambda)]^{l_s}$ sont appelés *diviseurs élémentaires de la matrice $A(\lambda)$.*

Si A est une matrice constante (carrée), les diviseurs élémentaires de la matrice polynomiale $(A - \lambda I)$ sont aussi appelés diviseurs élémentaires de la matrice A. Il est important également de voir le lien qui existe entre la matrice de Jordan associé à A et les diviseurs élémentaires de A.
On démontre que si A est équivalent à sa matrice de Jordan J et que J admet un bloc de dimension n associé à la valeur propre λ_i de A, alors A admet pour diviseur élémentaire $(A - \lambda_i)^n$ (et réciproquement).

Recherche de solutions particulières d'un système linéaire :

Soit le système $\dot{X} = AX$, A matrice carrée constante (n x n), $x \in \mathbb{R}^n$

CHETAEV [8] propose de chercher les solutions particulières sous la forme suivante :

$$X = (A_1 \frac{t^m}{m!} + A_2 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{m+1})e^{\lambda t}$$

avec A_k vecteur constant de dimension n

λ une constante à déterminer

m une puissance entière à déterminer pour chaque λ.

On trouve que λ doit être racine de $\text{dét}(A - \lambda I) = 0 = \Delta(\lambda)$ (valeur propre).

Cas 1 : Soit $\lambda = \lambda_o$ racine simple de $\Delta(\lambda) = 0$

$\Rightarrow m = 0 \Rightarrow X(t) = A_1\, e^{\lambda_o t}$ A_1 à déterminer par coefficients indéterminés.

Cas 2 : Soit $\lambda = \lambda_o$ racine de multiplicité μ de $\Delta(\lambda) = 0$ avec diviseurs élémentaires simples (puissance 1)

$$A \sim \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \lambda_o & & & \\ & \lambda_o & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_o \end{matrix}\right\}\mu & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow m = \mu - 1$ (multiplicité de λ_o moins 1)

$$\Rightarrow X(t) = (A_1 \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + A_2 \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} + \ldots + A_\mu)e^{\lambda_o t} = F(t)\, e^{\lambda_o t}$$

F vecteur $\in \mathbb{R}^n$.

On démontre également que si l'on dérive F(t) par rapport à t, on obtient encore des solutions particulières de $\dot{X} = AX$

$$X^{(k)} = \frac{d^k F(t)}{dt^k} \cdot e^{\lambda_o t} \qquad k = 1, \ldots, m$$

Donc pour la racine λ_o de multiplicité $\mu = m+1$, on obtient m+1 solutions particulières qui sont indépendantes (car la plus haute puissance de t est différente pour chaque solution).

Cas 3 : Soit $\lambda = \lambda_o$ racine de multiplicité μ de $\Delta(\lambda) = 0$. On suppose que tous les mineurs d'ordre n, n-1, ..., n-k+1 de la matrice $A - \lambda I$ sont tous nuls en λ_o et on suppose qu'il existe un mineur d'ordre n-k non nul pour $\lambda = \lambda_o$. Supposons

$$(A - \lambda I) \sim \text{forme canonique} \begin{pmatrix} E_1 & & & 0 \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_n \end{pmatrix}$$

Soit rang $(A - \lambda I) = n$

$E_i(\lambda)$ divise $E_j(\lambda)$ si $i < j$.

Si le facteur $(\lambda - \lambda_o)^\alpha$ est présent dans $E_j(\lambda)$ $\Rightarrow$ $(\lambda - \lambda_o)^\alpha$ est aussi présent en facteur dans $E_{j+1}, \ldots, E_n$. $\Delta(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \ldots E_n(\lambda)$

$D_r(\lambda)$ = le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $r = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda), \ldots, E_r(\lambda)$. Soit $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres de A

$$\Rightarrow E_i(\lambda) \text{ est de la forme } (\lambda - \lambda_o)^{e_i^o} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{e_i^s} \quad i = 1, \ldots, n$$

donc pour λ_j fixé, on a $e_i^j \geq e_{i-1}^j$ car E_{i-1} divise E_i.

μ_r = la plus grande puissance de $(\lambda - \lambda_o)$ dans $D_{n-r}(\lambda) = E_1 E_2 \ldots E_{n-r}$

$\mu_k = 0$; sinon il existe un facteur $(\lambda - \lambda_o)$ commun aux mineurs d'ordre n-k, donc tous les mineurs d'ordre n-k sont nuls pour $\lambda = \lambda_o$, ce qui est absurde par hypothèse.

$\mu_r = e_1^o + e_2^o + \ldots + e_{n-r}^o \qquad r = 1, \ldots, k$

$\mu_{r+1} = e_1^o + e_2^o + \ldots + e_{n-r-1}^o$

Donc quand l'indice de μ croît, on envisage des mineurs d'ordre de plus en plus petit; il est donc normal que $\mu_{r+1} \leq \mu_r$; on a

$$0 = \mu_k \leq \mu_{k-1} \leq \ldots \leq \mu_1 \leq \mu$$

CHETAEV montre que m (la puissance entière à déterminer pour chaque λ dans l'expression $(A_1 \frac{t^m}{m!} + A_2 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \ldots + A_{m+1})e^{\lambda t}$) vaut $\mu_{r-1} - \mu_r - 1 =$

$$= e_{n-r+1}^o - 1$$

Donc pour λ_o racine de multiplicité μ et de diviseurs élémentaires non simples, au diviseur $(\lambda - \lambda_o)^{e^o_{n-r+1}}$ on associe la solution particulière

$$X(t) = (A_1 \frac{t^m}{m!} + A_2 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + A_{m+1})e^{\lambda_o t}$$

où m est la puissance du diviseur élémentaire moins un.

$$X(t) = F(t)\, e^{\lambda_o t}$$

et si on dérive par rapport à t la fonction F(t), on obtient en tout un groupe de $(\mu_{r-1} - \mu_r)$ solutions indépendantes.

Donc au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_o)^p$ on associe p solutions particulières dont la première est de la forme :

$$X(t) = (A_1 \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + A_2 \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} + \dots + A_p)e^{\lambda_o t}$$

les autres étant obtenues par dérivation du polynome devant l'exponentielle

Donc pour λ_o de multiplicité μ avec l'ordre du plus grand mineur non nul en $\lambda = \lambda_o$ égale n-k, on trouve solutions linéairement indépendantes qui sont trouvées par groupes associés aux diviseurs élémentaires

$$\mu = \sum_{r=1}^{k} (\mu_{r-1} - \mu_r)$$

CHETAEV montre qu'il ne faut pas chercher les solutions particulières relatives à la racine λ sous forme d'un produit d'un polynome et d'une exponentielle où le degré du polynome serait égal à la multiplicité moins un de la racine λ, mais qu'il faut prendre le degré du polynome en fonction des puissances des diviseurs élémentaires.

Conclusion :

La méthode de Poincaré peut être interprétée comme une méthode de prolongement des solutions périodiques du système générateur ($\varepsilon = 0$) aux solutions périodiques du système complet. Les solutions du système générateur peuvent être isolées ou former une famille de solutions dépendant de quelques paramètres. Si le système générateur n'a pas d'intégrales premières et si les équations des amplitudes principales ont un nombre fini de solutions simples, alors ces solutions périodiques du système générateur peuvent être prolongées en solutions périodiques du système complet.

D'autre part, si les solutions des équations des amplitudes principales sont multiples, il y a des solutions périodiques du système générateur qui sont prolongées en plusieurs solutions périodiques du système complet. Cette question a été étudiée en détail dans le chapitre I pour un cas concret.

Dans les chapitres IV et V, certaines modifications ont été apportées à la méthode de Poincaré. Ces modifications consistent essentiellement en deux points :

1) introduire les perturbations des conditions initiales ($\beta(\varepsilon)$) de façon linéaire avec les k paramètres de la solution génératrice;
2) introduire une partie de ces perturbations en fonction des (n-k) précédentes.

Ces deux modifications de la méthode de Poincaré sont à notre connaissance une innovation. Il serait intéressant de rechercher des solutions périodiques des systèmes non linéaires autonomes perturbés avec l'esprit de telles modifications. La méthode de Poincaré trouve beaucoup d'applications en particulier dans les problèmes de synchronisation.

REFERENCES.

[1] Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe (M.LAVRENTIEV - B.CHABAT)

[2] Théorie des matrices I (FR.GANTMACHER)

[3] Teorya vetwleniya reshenii nelineinykh uravnenii 1969 ,Moscou. (M.VAINBERG - V.TRENOGIN)

[4] The method of fluxions and infinite series 1736 ,Library of Congress. (I.NEWTON)

[5] Recherches sur les fonctions algébriques J.de Math.pures et appliquées. 15 (1850) (V.PUISEUX)

[6] Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,I Gauthier-Villars ,Paris ,1892. (H.POINCARE)

[7] Some problems of non-linear oscillation theory. Gostekhizdat ,Moscou ,1956. (I.G.MALKIN)

[8] Stability of motion. Pergamon ,New-York ,1961 (N.G.CHETAEV)

[9] Periodic of quasi-linear autonomous one-degree-of-freedom systems expressed by power series in integer and fractional powers of the parameter.
Proceedings of international Congress of non-linear oscillations. 1963 ,Kiev.
Stability of periodic solutions of quasi-linear autonomous systems. PMM ,t.XXVII ,N3 ,1963.
(A.P.PROSKURYAKOV)

[11] On the quasi-harmonic systems,close to systems with constant coefficients,in which pure imaginary roots of the fundamental equation have non simple elementary divisors.PMM vol 22 N4 ,1958 ,pp.519-533 ,Moscou (KUSHUL)