MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Étude de la stabilité des systèmes de contrôle automatique par la technique de fréquence

Dubrulle, Eliane

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

Facultés Notre-Dame de la Paix
NAMUR

Année Académique 1975-76

Etude de la Stabilité des Systèmes de Contrôle Automatique par la Technique de Fréquence.

Directeur du Mémoire:

Meur WEXLER

Eliane DUBRULLE

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Wexler, mon Directeur de mémoire, pour l'aide obligeante et efficace qu'il m'a apportée tout au long de cette année pour l'élaboration de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I.- Contrôle dans les équations intégrales à noyau intégrable

§ 1.-Equation intégrale à noyau intégrable 1.1

1.1-Existence d'une solution de l'équation intégrale dans l'espace $C(R^+;R)$ 1.1

1.2-Existence d'une solution de l'équation intégrale dans l'espace $C_o(R^+;R)$ 1.5

§ 2.-Cas des systèmes d'équations différentielles 1.11

Application particulière:Contrôle direct à matrice diagonale 1.24

§ 3.-Système de contrôle avec retardement 1.25

CHAPITRE II.- Contrôle dans les équations intégrales à noyau non intégrable

§ 1.-Equation intégrale à noyau non intégrable 2.1

§ 2.-Cas des systèmes d'équations différentielles 2.14

Interprétation géométrique de la condition de fréquence 2.25

Application particulière:Contrôle indirect à matrice diagonale. 2.26

§ 3.-Cas particulier d'un système de contrôle direct à noyau non intégrable 2.29

§ 4.-Cas des équations différentielles associées à un contrôle direct particulier:Cas critique. 2.39

§ 5.-Système de contrôle direct avec une racine caractéristique nulle. 2.56

ANNEXE A.-Un problème de pilotage automatique d'un avion A.1

ANNEXE B.-Un problème de réacteurs nucléaires B.1

ANNEXE C.-Lemme de BARBALAT C.1

ANNEXE D.-Existence d'une solution pour un système de contrôle automatique avec retardement D.1

INTRODUCTION

Depuis l'essor de notre société industrielle, mais plus encore au cours de ces dernières années, les servomécanismes et les systèmes de contrôle de tout type ont acquis une importance énorme. Aussi, plusieurs mathématiciens se sont attachés à l'étude de la stabilité au niveau de tels systèmes, parmi lesquels: MINORSKY (U.S.A.-Recherche de contrôle de dérivation de navires effectuée pour la U.S.Navy), AIZERMAN, LURYE (U.R.S.S.) etc...

Le première démarche fut d'adapter la théorie générale de la stabilité introduite par LIAPOUNOV, à ces systèmes particuliers. Nous savons, pour nous y être attardés, que <u>la stabilité vue par LIAPOUNOV est décrite comme suit:</u>

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

où: - $f: [\tau, +\infty[\times B \longrightarrow R$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport au deuxième argument. (Ceci assure l'existence locale des solutions.)

- B est une boule ouverte de R^n et τ appartient à R.

De plus, nous supposons $f(t,o) = o; \forall t \geqslant \tau$. C'est-à-dire que le système (1) admet la solution triviale. Nous désignons par $x(\cdot, t^o, x^o)$ la solution du système (1) de conditions initiales t^o et x^o.

- Nous dirons que la solution triviale de (1) est stable, si $\forall \varepsilon > o; \exists \delta(\varepsilon, t^o) > o$ tel que si $\|x^o\| < \delta$ alors $\|x(t,t^o,x^o)\| < \varepsilon; \; \forall t \geqslant t^o$

- La stabilité est dite uniforme si δ peut être choisi indépendamment de t^o.

- Nous dirons que la solution triviale de(1) est asymptotiquement stable
  - si elle est stable et
  - si pour tout $t^o \geqslant o$, il existe $\delta(t^o) > o$ tel que si $\|x^o\| < \delta(t^o)$ alors: $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t,t^o,x^o) = o$

- La solution triviale de (1) sera dite uniformément asymptotiquement stable si $\exists \delta_o > o$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t,t^o,x^o) = o$ uniformément par rapport à t^o et x^o ($t^o > \tau$ et $\|x^o\| < \delta_o$)

- La stabilité asymptotique uniforme est dite globale si $\delta_o >$ o peut être pris arbitraire.

On sait que si le système est stationnaire, la stabilité simple et la stabilité asymptotique sont uniformes.

Les deux théorèmes suivants nous permettaient d'établir un critère de stabilité pour l'origine du système.

THEOREME I

Si il existe une fonction $V(t,x)$:
- définie pour tout $t \geqslant \tau$ et $\|x\| < \delta_o$
- continue
- satisfaisant les propriétés suivantes:
  a) $b(|x|) \leq V(t,x) \leq a(|x|)$ où - $a(r),b(r)$ sont continues
     - $a(r),b(r)$ sont monotones décroissantes
     - $a(o)=o=b(o)$

  b) $$\lim_{h \to o_+} \sup. \frac{V[t+h,x(t+h;t^\circ,x^\circ)] - V[t,x(t,t^\circ,x^\circ)]}{h} \leqslant -c(|x(t,t^\circ,x^\circ)|)$$

  où - $c(r)$ est continue
  - $c(r)$ est monotone décroissante
  - $c(o) = o$

Alors, la solution $x = o$ est asymptotiquement uniformément stable.

THEOREME II

Si la solution triviale d'un système est uniformément asymptotiquement stable,
Alors, il existe une fonction $V(t,x)$ qui a toutes les propriétés a,b du théorème I

EN CONCLUSION: La solution d'un système est asymptotiquement stable
ssi
il existe une fonction de LIAPOUNOV $V(t,x)$ satisfaisant les propriétés a,b,c précitées.

Cette théorie est appréciable vu sa généralité. Mais, aucun théorème n'exprime clairement une méthode effective permettant d'établir la fonction de LIAPOUNOV adéquate à chaque situation. Quelques modèles sont cependant élaborés, mais, ceux-ci ne permettent pas toujours d'éboutir, et dans ce cas, le problème reste en suspens. C'est pourquoi, beaucoup d'efforts ont été consacrés, depuis une vingtaine d'années, à généraliser les conditions suffisantes de stabilité et stabilité asymptotique des théorèmes originaux de LIAPOUNOV.

Récemment, un Roumain, Ingénieur et Mathématicien appliqué, V.M.POPOV, inspiré peut-être par les méthodes classiques de transformation de LAPLACE de l'analyse linéaire, les a utilisées sur les transformées de FOURIER en vue de résoudre des problèmes physiques de classes bien définies, tels les systèmes de contrôle. Cette nouvelle méthode est appelée TECHNIQUE DE FREQUENCE. (La première publication de V.M.POPOV dans laquelle il applique la technique de fréquence en vue d'établir la stabilité des systèmes feed-back non linéaires parut en 1959).

V.M. POPOV s'est tout d'abord attaché à traiter des problèmes importants dans l'étude des classes de différents systèmes physiques telles que la détermination de conditions sous lesquelles le système est stable d'un point de vue global. C'est à dire, pour un système particulier, déterminer des conditions suffisantes pour que la solution x(t) du système considéré soit asymptotiquement globalement stable.

En particulier, POPOV s'est intéressé à l'étude de la stabilité des systèmes de contrôle automatique à partir des systèmes d'équations différentielles ordinaires qui les déterminent. Plus tard, cette étude changea de cadre pour se ramener à l'étude de la stabilité de tels systèmes à partir d'une équation intégrale de convolution non linéaire de noyau intégrable ou non, appelée également équation de VOLTERRA (VOLTERRA qui, vers 1896, construisit une théorie des équations intégrales en vue de réduire la recherche de la solution à un problème d'évaluation d'inverses de certains opérateurs intégraux). C'est-à-dire, dans le domaine de la stabilité, traiter des équations intégrales de convolution non linéaires. C'est cette étude qui est reprise par le mathématicien Roumain, C.CORDUNEANU, dans son livre: "Frequency Techniques and Stability".

Comme les opérateurs VOLTERRA sont adéquats pour décrire les systèmes dynamiques, les équations du type VOLTERRA ont provoqué lors de ces vingt dernières années, des recherches plus passionnées. En particulier, celles de V.M. POPOV qui, dans ce cadre, ont abouti à des résultats d'application directe dans dans diverses classes de systèmes physiques. Par exemple, le problème de la stabilité de la solution de systèmes de contrôle automatique direct ou indirect, de systèmes entachés d'un retard ou encore de résultats relatifs à la théorie du dynamisme des réacteurs nucléaires.

Dans le cadre de cette étude, la technique mise au point par V.M.POPOV comprend en fait deux grands avantages, car non seulement, elle généralise tout résultat obtenu par l'existence des fonctions de LIAPOUNOV. En effet, HALANAY prouve dans son livre: "Differential Equations: Stability, Oscillations, Time lags" que:

Si il existe une fonction V de LIAPOUNOV de la forme particulière associée aux systèmes de contrôle soit: $$V = (Hx,x) - 2\beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma \quad \text{où} \quad H<0;\ \beta>0$$ assurant la stabilité absolue du système de contrôle, alors, la condition de fréquence du théorème introduit par POPOV en technique de fréquence est vérifiée.

Mais, de plus, cette technique nous donne une condition de stabilité absolue assez simple qui se ramène à un problème de minimisation d'une fonction rationnelle réelle en une seule variable. Ceci est bien plus aisé à interpréter que la condition obtenue à partir des fonctions de LIAPOUNOV qui nécessite la détermination d'une matrice entière.

Cette nouvelle théorie contentera le mathématicien puriste qui pourra réaliser comment les concepts et résultats tels les espaces de BANACH, de FRECHET et les théorèmes du point fixe peuvent être utilisés pour atteindre des résultats pratiques autant que l'ingénieur qui y trouvera, dans le cadre de ses recherches, les outils qui le conduiront aisément à des solutions pratiques.

A présent, nous allons expliciter ce que nous entendons par système de contrôle. Un système de contrôle consiste en un objet à contrôler par l'intermédiaire d'un appareillage bien spécifique. Le but de cet appareillage est de maintenir l'objet contrôlable dans une trajectoire déterminée. Le processus de contrôle consiste à corriger la trajectoire réellement suivie par l'objet à partir de l'écart enregistré vis-à-vis de la trajectoire déterminée initialement, appelée trajectoire idéale.

Le mouvement du système de contrôle considéré en tant que tel est décrit par un système d'équations différentielles ordinaires: $\frac{dx}{dt} = X(t,x)$. En fait, il se peut que des équations aux dérivées partielles, ou des équations intégro-différentielles ou encore avec retardement apparaissent. Nous allons considérer des systèmes dont le mouvement est décrit par des équations différentielles ordinaires: les systèmes de contrôle direct ou indirect. Le système de contrôle direct est associé à un système d'équations différentielles du type suivant:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) \end{cases}$$

tandis que celui du contrôle indirect, se présente comme suit:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Ax + b\xi \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases}$$

où - A est une matrice constante de dimension $n \times n$
- b, c sont des vecteurs constants de R^n
- x est une fonction vectorielle: $R^+ \longrightarrow R^n$, $t \rightsquigarrow x(t)$
- ρ est un scalaire

Le paramètre σ est introduit comme une étape intermédiaire. La fonction scalaire $\varphi(\sigma)$ est la caractéristique du mécanisme. C'est une fonction non linéaire qui appartient à une classe déterminée par les conditions:

$$\varphi(o) = o$$

$$\sigma\varphi(\sigma) > o \quad \forall \sigma \neq o$$

Nous remarquons que la non-linéarité est introduite dans ces équations uniquement par la présence de la fonction $\varphi(\sigma)$ souvent déterminée expérimentalement.

Récemment, le besoin d'élargir la classe des systèmes considérés, de même que l'introduction de nouveaux appareillages de contrôle se sont sans cesse accrus. Ceci a permis la détermination de plusieurs fonctions $\varphi_j(\sigma_j)$ prenant en considération les non-linéarités réelles dans les équations de l'objet à contrôler, du système de contrôle ou dans l'expression des fonctions σ_j

qui caractérisent les interactions entre l'appareillage de contrôle et l'objet à contrôler. Tous les résultats obtenus en ce sens sont trés couteux et difficiles à caractériser. Ils ne transparaissent qu'au travers de propriétés bien spécifiques des $\varphi_j(\sigma_j)$ qui sont d'une part la condition de secteur et d'autre part, leur caractère nul en $\sigma_j = o$.

Soit $x(t) = x°(t)$ le mouvement idéal que nous voulons imposer à l'objet. Les déviations du système par rapport à ce mouvement peuvent être provoquées par de brusques perturbations qui sont exprimées par des modifications des conditions initiales ou par l'apparition de perturbations permanentes. Pratiquement, il est impossible de faire suivre exactement à l'objet sa trajectoire idéale, tout au plus, le mouvement réel du système sera maintenu à proximité de ce mouvement idéal.

Donc, nous voyons que le problème consiste à assurer la stabilité du mouvement $x(t) = x°(t)$ en respect avec n'importe quelles déviations des conditions initiales et perturbations permanentes. C'est-à-dire, une solution de ce système sera dite stable pour des perturbations permanentes si sa perturbation peut être rendue arbitrairement petite à condition que la perturbation permanente et celle des conditions initiales soient, elles aussi rendues suffisamment petites. Cette notion de stabilité est atteinte si la solution vérifie la stabilité absolue. Elle va nous permettre de reconnaître les circonstances dans lesquelles de petites variations des conditions initiales n'introduiront que de petites variations dans la suite du phénomène considéré. Il est à remarquer qu'un simple changement de variable permet de ramener l'étude de la stabilité de la solution $x°(t)$ à l'étude de la stabilité de la solution nulle du système. Ceci permet de simplifier l'étude mathématique.

Dés lors, pour les systèmes de contrôle, le problème de stabilité est formulé comme suit: "Nous devons formuler des conditions relatives aux coefficients qui apparaissent dans le système de telle façon que la solution triviale du système soit asymptotiquement globalement stable pour une fonction φ arbitraire d'une classe particulière $(\sigma\varphi(\sigma) > o \quad \forall \sigma \neq o;\ \varphi(o) = o)$. Si la solution triviale de ce système est asymptotiquement globalement stable pour n'importe quelle fonction φ de la classe considérée, nous disons que le système est absolument stable".

Nous supposerons que l'objet à contrôler est déterminé par n coordonnées généralisées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'appareillage de contrôle par une seule coordonnée ξ où $\xi = \varphi(\sigma)$ dans le cadre du contrôle direct et $\dot{\xi} = \varphi(\sigma)$ dans celui du contôle indirect. Donc, la différence entre le contrôle direct et indirect réside dans le fait que l'opérateur de feed-back, $\varphi(\sigma)$, est direct dans le premier cas et indirect - au travers d'une dérivée - dans le second cas.

Il est à remarquer que: si $\varphi(\sigma)$ est identiquement nulle, nous obtenons pour l'objet à contrôler un mouvement libre ne subissant aucune intervention de la part du centre de contrôle.

Remarque: En stabilité, nous avons étudié dans le cadre des systèmes linéaires le théorème de LIAPOUNOV suivant:

"La solution triviale du système $\dot{X} = AX$ est:
1°-asymptotiquement stable si toutes les racines du système sont à partie réelle strictement négative.
2°-instable si une seule des racines caractéristiques au moins est à partie réelle strictement positive.
3°-si les parties réelles de certaines racines caractéristiques sont nulles,nous avons suivant les cas,soit la stabilité simple de l'origine ou son instabilité."

Dés lors,l'adjonction d'une fonction non linéaire à ce système va introduire des conditions similaires pour ce théorème,mais,à caractère local.Dans les premier et second points,la stabilité ou l'instabilité sera localement vraie c'est-à-dire vérifiée au voisinage de la solution triviale.Quant au troisième point,c'est la fonction non linéaire qui sera déterminante.En effet,dans ce cas,la stabilité ou l'instabilité du système dépendra des termes non linéaires.

Nous étudions la technique de fréquence dans le cadre des équations intégrales de convolution non linéaires aussi,serait-il intéressant de voir comment les équations du système de contrôle direct ou indirect se réduisent à des équations intégrales de convolution non linéaires à noyau intégrable ou non.(Cette étude nous suggèrera les conditions à imposer pour obtenir de bons résultats pour les applications.)

Tout d'abord,considérons une équation intégrale non linéaire de convolution:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\ \varphi(\sigma(s))\ ds \qquad t \in R^+$$

où σ, h, k, φ sont des fonctions scalaires.

Nous pouvons l'interpreter comme une expression qui décrit un système de feedback contenant une partie linéaire dont l'équation entrée-sortie est:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)u(s)ds \qquad t \in R^+$$

et un élément non linéaire dont l'équation entrée-sortie est :

$$u(t) = \varphi(\sigma(t)) \qquad t \in R^+$$

Ce système constitue donc une boucle fermée dont une interprétation possible serait:

- $\sigma(t)$: le signal de départ
- $h(t)$: le signal à l'arrivée dépendant évidemment de façon directe des conditions initiales du système.
- $k(t)$: la vibration due à la partie linéaire.
- $\varphi(\sigma(t))$: la partie non linéaire du système qui caractérise principalement les conditions d'émission du signal et de sa propagation.

I.-Le système d'équations correspondant à un problème de contrôle direct est:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) \end{cases}$$

où- A est une matrice constante de dimension n x n
- b,c sont des vecteurs constants de R^n
- φ représente le contrôle,c'est une fonction scalaire continue. $\sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad \forall\sigma \neq 0$; $\varphi(0) = 0$
- x est une fonction vectorielle de R^+ dans R^n

Or,pour un système d'équations différentielles: $\mathring{x} = f(t,x)$ nous avons:
Théorème d'existence (PEANO)

> Si f est continue dans un domaine D(ouvert de R^{n+1} tel que un élément de D s'écrive comme (t,x)) alors,pour tout $(t°,x°) \in D$,il existe au moins une solution de $\mathring{x}(t) = f(t,x(t))$ passant par(t°,x°)

Dés lors,la continuité de φ assure l'existence des solutions (au moins localement au voisinage de chaque point).Si nous voulons avoir également l'unicité,il nous suffit de demander que φ soit localement lipschitzienne.Mais nous n'allons pas demander cette condition puisque la technique fréquentielle permet d'obtenir la stabilité sans faire appel à la propriété d'unicité.

Déterminons la forme de la solution de ce système d'équations.

1°) Solution du système homogène: $\mathring{x} = Ax$

La matrice $X(t) = e^{A(t-t°)}$ est une matrice fondamentale et principale du système,c'est-à-dire $X(t°) = I$.
Nous prenons t° à l'origine du temps t.La solution s'écit:

$$\boxed{x(t) = x°e^{At}}$$

2°) Solution du système complet non homogène: $\mathring{x} = Ax + b\varphi(\sigma)$

Elle est obtenue par la méthode de variation des constantes ou par l'application de la formulé de LAGRANGE puisque A est une matrice constante.

$$\boxed{x(t) = e^{At}x° + \int_0^t e^{A(t-s)}b\,\varphi(\sigma(s))\,ds}$$

Or, $\sigma = (c,x)$

$$\sigma(t) = (c,e^{At}x° + \int_0^t e^{A(t-s)}b\,\varphi(\sigma(s))ds)$$

$$\sigma(t) = (c,e^{At}x°) + (c,\int_0^t e^{A(t-s)}b\,\varphi(\sigma(s))\,ds)$$

$$\sigma(t) = (c,e^{At}x°) + \int_0^t (c,e^{A(t-s)}b)\,\varphi(\sigma(s))\,ds \qquad \forall t \in R^+$$

Ceci est bien la représentation sous forme d'équation intégrale de convolution non linéaire du système de contrôle direct:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds \qquad \forall\, t \in R^+$$

où $- h(t) = (c, e^{At}x°)$

$- k(t) = (c, e^{At}b)$

L'équation intégrale est donc une conséquence du système d'équations différentielles. Si x est solution du système, alors, $\sigma = (c,x)$ est solution de l'équation intégrale. Mais, nous verrons que du point de vue de la stabilité, il y a équivalence. Se ramener à l'étude de la stabilité à partir de l'équation intégrale comporte un intérêt particulier: 1) certains problèmes apparaissent directement sous cette forme du point de vue mathématique et les systèmes différentiels s'y ramènent assez facilement 2) les équations intégrales sont en général, " moins méchantes que les systèmes différentiels" 3) ceci nous permet de remplacer un système d'équations par une seule équation.

Remarque:
Si A est une matrice stable, les fonctions h et k décroissent de façon exponentielle à l'infini.
En effet, si A est stable, celà implique : $\|e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_\circ t}$ où $k_\circ > o$

$$-\|h(t)\| \leq \|c\|\ \|e^{At}\|\ \|x°\|$$

$$\leq \|c\|\ k_1\ \|x°\|\ e^{-k_\circ t} \qquad \text{où} \qquad \|c\|\ k_1 \|x°\| = \mathcal{C}$$

$$-\|k(t)\| \leq \|c\|\ \|e^{At}\|\ \|b\|$$

$$\leq \|c\|\ k_1\ \|b\|\ e^{-k_\circ t} \qquad \text{où} \qquad \|c\|\ k_1 \|b\| = \mathcal{C}$$

II.-Un système de contrôle indirect est décrit par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\,\xi & (1) \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) & (2) \\ \sigma = (c,x) - \rho\,\xi & (3) \end{cases}$$

où $-\rho$ est un scalaire

- A,b,c,x, ont même fonction que dans le contrôle direct

Recherchons la solution de ce système et l'équation intégrale de convolution non linéaire qui lui correspond:

1°) Solution du système homogène (1) et (2)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax & \Rightarrow & x = x°e^{At} \\ \dot{\xi} = o & \Rightarrow & \xi = \xi° \end{cases}$$

2°) Appliquons la formule de LAGRANGE pour transformer le système différentiel en une équation intégrale.

$$x(t) = x^\circ e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} b\,\xi(s)\,ds$$

$$\xi(t) = \xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds$$

Or, $\sigma = (c,x) - \rho\,\xi$, ceci implique:

$$\sigma(t) = (c, e^{At}x^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} b\,\xi(s)\,ds) - \rho(\xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds)$$

Tâchons d'éliminer la fonction inconnue ξ en intégrant l'intégrale suivante par parties:

$$\int_0^t e^{A(t-s)} b\,\xi(s)\,ds = e^{At}\int_0^t e^{-As} b\,\xi(s)\,ds$$

$$= e^{At}\left\{\left[-A^{-1}e^{-As} b\,\xi(s)\right]_{s=o}^{s=t} + \int_0^t A^{-1}e^{-As} b\,\dot{\xi}(s)\,ds\right\}$$

$$= -A^{-1}b\,\xi(t) + A^{-1}e^{At}b\,\xi^\circ + \int_0^t A^{-1}e^{A(t-s)} b\,\varphi(\sigma(s))\,ds$$

puisque $\dot{\xi}^\circ = \varphi(\sigma(s))$; $\xi(o) = \xi^\circ$

L'expression $\sigma(t)$ devient:

$$\sigma(t) = (c, e^{At}x^\circ + (\int_0^t A^{-1}e^{A(t-s)} b\,\varphi(\sigma(s))\,ds + A^{-1}e^{At}b\,\xi^\circ - A^{-1}b\,\xi(t)))$$
$$-\rho\,\xi^\circ - \rho\int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds$$

Or, $\xi(t) = \xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds$

$$= (c, e^{At}x^\circ) - (c, A^{-1}b\,\xi^\circ) - (c, A^{-1}b\int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds) + (c, A^{-1}e^{At}b\,\xi^\circ)$$
$$+(c, \int_0^t A^{-1}e^{A(t-s)} b\,\varphi(\sigma(s))\,ds) - \rho\,\xi^\circ - \rho\int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds$$

Nous obtenons: $\sigma(t) = h(t, x^\circ, \xi^\circ) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds$

où $h(t,x^\circ,\xi^\circ) = (c, e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\,\xi^\circ)) - (c, A^{-1}b\,\xi^\circ) - \rho\,\xi^\circ$
$= (c, e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\,\xi^\circ)) - \rho_1\,\xi^\circ$ où $\rho_1 = (c, A^{-1}b) + \rho$

Il nous reste à mettre le noyau k en évidence:

$$\int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))\,ds = -(c, A^{-1}b\int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds) + (c, \int_0^t A^{-1}e^{A(t-s)} b\,\varphi(\sigma(s))\,ds)$$
$$-\rho\int_0^t \varphi(\sigma(s))\,ds$$

$$= -\int_0^t (\rho + (c, A^{-1}(I - e^{A(t-s)})b))\,\varphi(\sigma(s))\,ds$$

Donc, $k(t) = (c, A^{-1}e^{At}b) - \rho_1$ puisque $\rho_1 = \rho + (c, A^{-1}b)$.

Remarque:
Si A est une matrice stable,nous remarquons que h et k sont deux fonctions qui peuvent s'écrire comme somme d'une constante et d'une fonction qui décroit exponentiellement à l'infini.C'est justement cette condition sur le noyau k que nous allons utiliser dans l'étude de l'équation intégrale (§1 Chapitre II)pour le cas du contrôle indirect.

Dans le cadre de ce travail,nous étudierons les conditions suffisantes de stabilité pour les équations inégrales à noyau intégrable ou non et le résultat sera chaque fois interprété dans le cadre des systèmes d'équations différentielles.C'est-à-dire plus précisément,la stabilité de la solution de l'équation intégrale entraîne la stabilité asymptotique de la solution du système d'équations différentielles.

Nous étudierons des cas critiques de ces systèmes de contrôle automatique.Par exemple,le système de contrôle direct particulier où la matrice A admet un zéro comme racine caractéristique,les autres racines caractéristiques ayant chacune leur partie réelle strictement négative.Nous verrons comment se ramener,par un judicieux changement de variables à un système de contrôle indirect équivalent caractérisé par une matrice stable.Ceci est la raison pour laquelle ce cas ne sera pas approfondi plus avant puisque l'étude de la stabilité de son origine se ramène à l'étude d'un système de contrôle indirect qui sera,elle,détaillée.De même,le système de contrôle direct où la matrice A admet une paire de racines purement imaginaires conjuguées sera aussi envisagé. Nous verrons que,dans ce cas particulier, h et k peuvent être représentées comme la somme d'une fonction qui s'annule de façon exponentielle à l'infini et d'un polynôme trigonométrique de la forme a $\cos\omega t$ + b $\sin\omega t$.

Nous aurions pu également envisager le cas du contrôle direct pour lequel la matrice A admet deux racines caractéristiques nulles,les autres demeurant à partie réelle strictement négative.Mais,ce système peut être transformé en un système équivalent de contrôle indirect de la forme:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Bx + b\varphi(\sigma) & (1) \\ \mathring{\eta} = \xi & (2) \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) & (3) \\ \sigma = (c,x) - d\xi - e\eta \end{cases}$$

où B est une matrice stable

Nous pouvons réduire ce système à une équation intégrale non linéaire de convolution en établissant les solutions x, η et ξ de ce système.

1°)Déterminons les solutions des équations homogènes dans le système (1) (2) et (3).

$$\mathring{x} = Bx \Rightarrow x(t) = e^{Bt}x^\circ \qquad \text{où } x^\circ = x(t=o)$$

$$\mathring{\eta} = o \Rightarrow \eta(t) = \eta^\circ \qquad \eta^\circ = \eta(t=o)$$

$$\mathring{\xi} = o \Rightarrow \xi = \xi^\circ \qquad \xi^\circ = \xi(t=o)$$

2°) Les solutions générales des équations (1) (2) et (3) sont obtenues par la méthode de variation des constantes.

$$\begin{cases} x(t) = e^{Bt}x^\circ + \int_0^t e^{B(t-s)}\, b\,\varphi(\sigma(s))\, ds \\ \eta(t) = \eta^\circ + \int_0^t \xi(s)\, ds \\ \xi(t) = \xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s))\, ds \end{cases}$$

or, $\sigma = (c,x) - d\xi - e\eta$

ceci implique:

$$\sigma(t) = (c, e^{Bt}x^\circ + \int_0^t e^{B(t-s)}\, b\,\varphi(\sigma(s))\, ds) - d(\xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s))\, ds)$$

$$- e(\eta^\circ + \int_0^t \xi(s)\, ds)$$

transformons $\int_0^t \xi(s)\, ds$:

$$\int_0^t \xi(s)ds = \int_0^t (\xi^\circ + \int_0^s \varphi(\sigma(u))du)\, ds$$

$$= \int_0^t \xi^\circ\, ds + \int_0^t (\int_0^s \varphi(\sigma(u))du)\, ds$$

$$= \xi^\circ(t-o) + \int_0^t (\int_0^s \varphi(\sigma(u))\, du)\, ds$$

changeons l'ordre d'intégration:

$$= \xi^\circ t + \int_0^t \varphi(\sigma(u))\, du \left[(\int_u^t ds)\right]$$

$$= \xi^\circ t + t\int_0^t \varphi(\sigma(s))\, ds - \int_0^t s\,\varphi(\sigma(s))\, ds$$

introduisons cette valeur dans $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = (c, e^{Bt}x^\circ + \int_0^t e^{B(t-s)}\, b\,\varphi(\sigma(s))\, ds) - d\,\xi^\circ - d\int_0^t \varphi(\sigma(s))\, ds$$

$$-e\eta^\circ - e(\xi^\circ t + t\int_0^t \varphi(\sigma(s))\, ds - \int_0^t s\,\varphi(\sigma(s))\, ds)$$

nous obtenons une équation intégrale non linéaire de convolution:

$$\sigma(t) = h(t,x^\circ,\xi^\circ) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\, ds$$

où $\boxed{h(t,x^\circ, \circ) = (c,e^{Bt}x^\circ) - d\xi^\circ - e\eta^\circ - e\xi^\circ\, t}$

déterminons le noyau k :

$$\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))\,ds = \int_o^t \left[(c,e^{B(t-s)}b) - d\right]\varphi(\sigma(s))\,ds$$
$$-e\int_o^t (t-s)\varphi(\sigma(s))\,ds$$
$$= \int_o^t \left[(c,e^{B(t-s)}b) - d - e(t-s)\right]\varphi(\sigma(s))\,ds$$

dés lors, $\boxed{k(t) = (c,e^{Bt}b) - d - et}$

les fonctions h et k peuvent donc être représentées par une somme d'un terme qui décroit exponentiellement à l'infini (B est stable) et un polynôme linéaire en t.

Notre problème consiste à trouver des conditions valables sur le noyau k de l'équation intégrale pour que $\sigma(t)$ soit définie dans $C_o(R^+;R)$ quel que soit le terme libre h et la fonction scalaire φ élément quelconque d'une certaine classe de fonctions.

$$C_o(R^+;R) = \left\{ \sigma \text{ tq } \sigma : R^+ \to R \text{ continue et tq } \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = o \right\}$$

Cette étude conduit à des conditions sur la tra nsformée de FOURIER du noyau et dans certains cas sur la transformée de FOURIER d'une somme et du noyau. Elle s'appelle toujours la technique de fréquence, mais dans un cadre plus général que celui des systèmes d'équations différentielles, celui des équations intégrales. Elle constitue une amélioration vis-à-vis des premiers résultats originaux de POPOV.

Un autre problème remarquable est celui de l'existence de solutions qui peuvent avoir un comportement intéressant si on utilise la technique de fréquence. C'est ainsi que nous essayerons d'en déduire la stabilité absolue pour la solution triviale des systèmes d'équations différentielles associées à l'équation intégrale traitée.

Nous aurions pu également envisager la stabilité dans L^2 de la solution d'une équation intégrale. L'intérêt de cette notion étant lié à certaines interprétations d'énergie. La notion de L^2-stabilité (et plus généralement la L^p-stabilité) a été développée intensivement en utilisant diverses techniques parmi lesquelles celle des fréquences, voir par exemple: DESOER and VYDYASAGAR "Feedback Systems: Input-Output properties".

Nous verrons également dans quelle mesure la technique de fréquence ne se borne pas à l'étude des systèmes de contrôle décrits par des équations différentielles ordinaires. En effet, celle-ci peut s'appliquer dans d'autres domaines tels, les systèmes d'équations avec retardement, les équations intégro-différentielles ... Nous aborderons ce point de vue quant aux systèmes avec retardement.

Enfin, nous étudierons deux applications concrètes:

-la première directement liée aux systèmes de contrôle automatique indirect, soit: "Un problème de pilotage automatique d'un avion."

Ce système est régi par les équations suivantes:

$$\begin{cases} T^2\ddot{\psi} + U\mathring{\psi} + k\psi + \mu = o \\ \mathring{\mu} = f^*(\sigma) \\ \sigma = a\psi + E\mathring{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\mu \end{cases}$$

Celui-ci,par un judicieux changement de variables,se ramène à la forme standard d'un système de contrôle indirect:

$$\begin{cases} \mathring{\eta}_1 = \eta_2 \\ \mathring{\eta}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + n_2\xi \\ \mathring{\xi} = f(\sigma) \\ \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi \end{cases}$$

où l'avion à contrôler est caractérisé par (η_1, η_2) et l'appareillage de contrôle par ξ.

-La seconde ne se situe plus dans le cadre des systèmes de contrôle,mais elle se réduit à un système de forme équivalente au contrôle indirect.Cet exemple est tiré de la théorie des réacteurs nucléaires (KENNETH MEYER)

Nous partons du système : $\begin{cases} \mathring{y} = Ay - b\eta \\ \dot{\eta} = k\eta \\ k = k_o + (c,y) - \varrho\eta \end{cases}$

qui après transformation devient:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Ax + b_o\xi \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c_o,x) - \varrho\xi \end{cases} \qquad \text{où} \quad \begin{aligned} &- A = A \\ &- b_o = -Ab \\ &- c_o = cA^{-1} \\ &- \varrho = (cA^{-1},b) + \gamma \end{aligned}$$

où η représente la densité moyenne d'un neutron d'un réacteur nucléaire

k,la réactivité,fonction de l'état du réacteur.

l'équation $\mathring{y} = Ay - b\eta$ représente la loi de réfrigération de NEWTON.
Ce problème consiste à maintenir une température plus ou moins stable.Il peut de par sa forme être assimilé à un système de contrôle indirect où $\varphi(\sigma)$ à la forme particulière $\eta_2(e^{\sigma}-1)$ et la technique de fréquence peut lui être directement appliquée.

CHAPITRE I

CONTROLE DANS LES EQUATIONS INTEGRALES A NOYAU INTEGRABLE

§.1.-EQUATION INTEGRALE A NOYAU INTEGRABLE.

Nous allons étudier le comportement de la solution d'une équation intégrale à noyau intégrable.
Celà revient à discuter:

$$\begin{cases} \sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds & t \in R^+ \\ k \in L^1(R^+;R) \end{cases}$$

soit: $C_c(R^+;R) = \{\sigma \mid \sigma : R^+ \to R \text{ et } \sigma \text{ continue}\}$

$C_o(R^+;R) = \{\sigma \mid \sigma \in C(R^+;R) \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = o\}$

1.1.- Existence d'une solution de l'équation intégrale dans l'espace $C(R^+;R)$

THEOREME 1

> Considérons l'équation intégrale $\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$ avec t arbitraire dans R^+.
>
> Supposons: 1.- $h \in C(R^+;R)$
>
> 2.- $k \in L^1(R^+;\ R)$
>
> 3.- $\varphi : R \to R$ est une application continue et bornée
>
> $\iff \varphi \in C(R\ ;R)$
>
> alors, il existe au moins une solution σ de l'équation intégrale définie dans $C(R^+;R)$.

Démonstration:

1°) Considérons l'opérateur T défini par:

$$(T\sigma)(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds \qquad t \in R^+$$

où σ est considérée comme une fonction de l'espace $C_c(R^+;R)$

-Cet opérateur T est défini sur l'espace $C_c(R^+;R)$ et prend ses valeurs dans le même espace:

$$T : C_c(R^+;R) \longrightarrow C_c(R^+;R)$$

$$\sigma \rightsquigarrow T\sigma \triangleq h(.) + \int_0^{.} k\,(.-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds$$

- $T\sigma$ est un opérateur continu dans la topologie de l'espace $C_c(R^+;R)$ c'est-à-dire:

$\forall \varepsilon > o$; $\exists \eta(\varepsilon)$ tq. $\forall t,t' \in R^+$, $|t-t'| < \eta$ nous avons:

$$|T\sigma(t) - T\sigma(t')| < \varepsilon$$

$$|T\sigma(t)-T\sigma(t')| \leq |h(t)-h(t')| + |\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds - \int_o^{t'} k(t'-s)\varphi(\sigma(s))ds|$$

puisque h est une fonction continue, nous pouvons lui appliquer la définition ci-dessus en prenant $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$

de plus, posons: $t' = t + u$

$$|T\sigma(t)-T\sigma(t')| < \frac{\varepsilon}{2} + |\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds - \int_o^{t+u} k(t+u-s)\varphi(\sigma(s))\, ds|$$

posons $s' = s - u$

$$|T\sigma(t)-T\sigma(t')| < \frac{\varepsilon}{2} + |\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds - \int_{-u}^t k(t-s')\ \varphi(\sigma(s'))\ ds'|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_o^u |k(t-s)|\ |\varphi(\sigma(s))|\ ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + |t-t'|\ \phi \|k\|_{L^1} \quad \text{puisque } u = t'-t$$

il nous suffit de considérer $\eta \leq \dfrac{\varepsilon}{2\|k\|_{L^1}\phi}$ nous obtenons:

$|T\sigma(t)-T\sigma(t')| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > o$ arbitraire.

2°) φ est une fonction bornée sur R. Dés lors, il existe $\phi > o$ tel que:

$$|\varphi(\sigma)| \leq \phi \qquad \forall \sigma \in R$$

nous pouvons établir la majoration suivante pour $|T\sigma(t)|$:

$$|(T\sigma)(t)| \leq |h(t)| + |\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))\ ds|$$

$$\leq |h|_c + \int_o^t |k(t-s)|\,|\varphi(\sigma(s))|\ ds$$

donc pour tout σ défini dans l'espace $C_c(R^+;R)$ nous aurons:

$$|(T\sigma)(t)| \leq |h|_c + |k|_{L^1}\phi$$

3°) Considérons l'ensemble Σ suivant qui est une boule fermée:

$$\Sigma = \{\sigma(t) : \sigma \in C_c(R^+;R) \text{ et } |\sigma|_c \leq r\} \quad \text{où } r = |h|_c + \phi|k|_{L^1}$$

nous savons (cfr.2°) que pour tout $\sigma(t)$ pris dans Σ, sa transformation par l'opérateur continu T reste définie dans Σ. Nous concluons:

$$T\Sigma \subsetneq \Sigma$$

-Notre but est de prouver qu'il existe au moins un $\sigma(t)$ tel que:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))\,ds$$

et

$$\sigma \in C(R^+;R)$$

ce qui équivaut à montrer qu'il existe au moins un $\sigma(t)$ tel que:

$$\sigma(t) = T\sigma(t)$$

c'est-à-dire que l'opérateur T admet au moins un point fixe.

-Pour prouver l'existence d'un tel point, nous allons utiliser le théorème du point fixe de SCHAUDER-TYCHONOFF dans les espaces localement convexes.

> "Supposons que E soit un espace Hausdorff localement convexe.
> Soit f une application continue d'une partie convexe K de E dans E telle que:
>
> $$f(K) \subsetneq A \subsetneq K \quad \text{où A est compacte}$$
>
> alors, f admet au moins un point fixe."

(cfr.SMART$)

4°) <u>Vérifions si ces hypothèses sont bien réalisées:</u>

- $C_c(R^+;R)$ est un espace Hausdorff localement convexe.(cfr.SCHAEFER)

Cet espace est engendré par une famille de semi-normes $\{|x|_n : n = 1,2,\dots\}$

où $|x|_n = \sup.\{\, |x(t)| : 0 \leq t \leq n \,\}$ -n est un entier arbitraire supérieur à un.
-x est une application quelconque de R^+ dans R.

- T est un opérateur continu de $C_c(R^+;R)$ dans $C_c(R^+;R)$ tel que:

$$T\Sigma \subsetneq \Sigma$$

- Σ est une partie convexe et compacte de R puisque Σ se réduit à un intervalle fermé de R.

Pour avoir un point fixe, il nous suffit de montrer que $T\Sigma$ est relativement compacte dans la topologie de l'espace $C_c(R^+;R)$.
Ceci découle directement du critère de compacité pour une famille de fonctions continues sur un intervalle compact, ce critère est aussi appelé théorème de ARZELA-ASCOLI. Il s'énonce comme suit:

"Soit (X,d) un espace métrique compact.
Nous avons: une partie $K \subseteq C(X)$ est relativement compacte

ssi

l'ensemble des fonctions K est uniformément borné c'est-à-dire:

$\exists M > 0$ tq. $|f(x)| < M \quad \forall f \in K; \forall x \in X$

et l'ensemble des fonctions est équicontinu. c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists \delta > 0 \text{ tq. } d(x,x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x,x' \in X \; ; \forall f \in K$$

Ces deux conditions sont bien réalisées pour $T\Sigma$
En effet, nous avons $X \equiv C_c(R^+;R)$.

- $\forall T\sigma(t) \in T\Sigma$: $|h|_c + \varphi|k|_{L^1}$ constitue un majorant pour $|T\sigma(t)|$ $\forall \sigma \in C_c(R^+;R) \quad ; \forall t \in R^+$
- $\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists \delta > 0$ tel que $d(\sigma(t),\sigma'(t)) < \delta$ nous avons:

$$|(T\sigma)(t) - (T\sigma')(t)| < \varepsilon \qquad \forall \sigma,\sigma' \in C_c(R^+;R)$$

En effet:

$$|(T\sigma)(t) - (T\sigma')(t)| \leq \int_0^t |k(t-s)||\varphi(\sigma(s)) - \varphi(\sigma'(s))| \, ds$$

puisque φ est une fonction continue de R dans R, elle est donc uniformément continue sur le compact $[0,t]$.
Nous pouvons donc appliquer la définition de continuité uniforme à la fonction φ en prenant $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|k|_{L^1}}$. C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \delta > 0 \text{ tq. } |s-s'| \leq \delta \text{ nous avons: } |\varphi(s) - \varphi(s')| < \varepsilon \quad \forall s,s' \in R$$

Nous obtenons:

$$|(T\sigma)(t) - (T\sigma')(t)| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ arbitraire.}$$

<u>CONCLUSION:</u> Il existe un point fixe pour l'opérateur T, c'est-à-dire:

il existe σ définie dans $C_c(R^+;R)$ tq.:

$$(T\sigma)(t) = \sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds \quad \forall t \in R^+$$

<u>Remarques:</u>

1) Nous pouvions appliquer le même schéma de démonstration pour une équation intégrale plus générale du type:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds; \text{ si } k(t) \in L^1(R^+;R)$$

2) Cette démonstration reste pleinement valable dans le cas vectoriel.

3) Nous pouvons réduire la majoration de $|\Psi(\sigma)|$ c'est-à-dire remplacer cette supposition par une condition plus faible tout en gardant le même principe de démonstration.
Ceci en supposant:
$\forall M > o \; ; \exists \phi(M) > o$ tq. $\left[|\sigma| \leq M + |k|_{L^1} \phi(M) \right] \Rightarrow \left[|\Psi(\sigma)| \leq \phi(M) \right]$
Dans ce cas, Σ est une boule fermée transformée en elle-même par l'opérateur T si nous prenons comme rayon $r = M + |k|_{L^1} \phi(M)$; M choisi tel que $|h(t)| \leq M \; ; \forall t \in R^+$. C'est-à-dire, de nouveau $T\Sigma \subset \Sigma$.

Nous avons maintenant établi quelles sont les conditions pour que l'équation intégrale admette au moins une solution continue.
Nous sommes maintenant à même de prouver:

1.2.- Existence d'une solution de l'équation intégrale dans l'espace $C_o(R^+;R)$

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour qu'il existe une solution de l'équation intégrale:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s) \Psi(\sigma(s)) \, ds$$

dans l'espace $C_o(R^+;R)$

THEOREME 2

Considérons l'équation intégrale $\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\Psi(\sigma(s)) \, ds$
Supposons: 1.- h et $h' \in L^1(R^+;R)$

2.- k et $k' \in L^1(R^+;R)$

3.- la fonction $\Psi(\sigma)$ définie de R dans R est continue et bornée.
De plus, $\sigma\Psi(\sigma) > o$ pour $\sigma \neq 0$

4.- il existe un réel $q \geq o$ tel que:

$$\mathrm{Re}\left\{(1-isq)\,\tilde{k}(s)\right\} \leq o \quad \forall s \in R$$

alors, il existe au moins une solution σ de l'équation intégrale définie dans $C_o(R^+;R)$.
De plus, si il existe une solution σ de l'équation intégrale telle que σ soit définie dans $C_c(R^+;R)$ alors σ est définie dans l'espace $C_o(R^+;R)$

Démonstration:

ETAPE 1: Il existe au moins une solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale $\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\Psi(\sigma(s)) \, ds$ bornée et continue sur R^+

-tout d'abord, nous remarquons que les conditions de ce théorème 2 impliquent celles du théorème 1.

1) h et h' sont des fonctions intégrables sur R^+.
   Ceci implique le fait que h est une fonction continue et bornée sur R^+. C'est-à-dire h est définie dans l'espace $C(R^+;R)$.

2) les hypothèses 2 et 3 du théorème 1 apparaissent comme telles dans les hypothèses 2 et 3 du théorème 2.

Nous avons donc, l'assurance du fait qu'il existe au moins une solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale qui, de plus, est continue par application directe du théorème 1.
C'est-à-dire: $\exists\,\sigma$ tq. $\sigma \in C_c(R^+;R)$

-La solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale est-elle bornée sur R^+ ?

Elle est nécessairement bornée sur R^+ puisque le membre de droite de l'équation intégrale est toujours borné par $|h|_c + |k|_{L^1}\phi$ avec ϕ telle que $|\varphi(\sigma)| \leq \phi$; $\forall \sigma \in R$.

C'est-à-dire:

$$|\sigma(t)| \leq |h(t)| + \int_0^t |k(t-s)|\,|\varphi(\sigma(s))|\,ds$$

$$|\sigma(t)| \leq |h|_c + \phi\,|k|_{L^1}$$

<u>ETAPE 2</u>: Prouvons maintenant que chaque solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale, continue sur R^+ approche zéro lorsque t tend vers l'infini. C'est-à-dire: $\sigma \in C_o(R^+;R)$

Soit $\sigma(t)$ une solution continue sur R^+ de l'équation intégrale, c'est-à-dire $\sigma \in C_c(R^+;R)$

Pour tout t positif nous définissons la fonction $\varphi_t(\tau)$ par:

$$\varphi_t(\tau) = \begin{cases} \varphi(\sigma(t)) & o \leq \tau \leq t \\ o & \tau > t \end{cases}$$

et la fonction auxiliaire suivante:

$$\partial_t(\tau) = \int_o^\tau [k(\tau-u) + qk'(\tau-u)]\,\varphi_t(u)\,du + qk(o)\,\varphi_t(\tau) \quad ; \forall \tau \in R^+$$

1°) <u>Nous allons différentier l'équation intégrale $\sigma(t)=h(t)+\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$</u>

$$\sigma'(t) = h'(t) + \frac{d}{dt}\left[\int_o^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds\right]$$

$$\boxed{\sigma'(t) = h'(t) + k(o)\,\varphi(\sigma(t)) + \int_o^t k'(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds \;;\forall t \in R^+}$$

puisque $\frac{d}{dt}\left[\int_o^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))\,ds\right] = \int_o^t \frac{d}{dt}[k(t-s)\,\varphi(\sigma(s))]\,ds$

donc: $\frac{d}{dt}\left[\int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds\right] = \int_o^t k'(t-s)\varphi(\sigma(s))ds + \int_o^t k(t-s)\frac{d\varphi(\sigma(s))}{dt}\,ds$

$$= \int_o^t k'(t-s)\varphi(\sigma(s))ds + k(o)\,\varphi(\sigma(t))$$

2°) Transformons la fonction auxiliaire $\lambda_t(\tau)$ en utilisant sa définition et l'équation intégrale pour obtenir:

$$\lambda_t(\tau) = \begin{cases} \sigma(\tau) + q\sigma'(\tau) - [h(\tau) + qh'(\tau)] & o \leq \tau \leq t \\ \int_o^t [k(\tau-u) + qk'(\tau-u)]\,\varphi(\sigma(u))\,du & \tau > t \end{cases}$$

$$\lambda_t(\tau) = \int_o^\tau k(\tau-u)\,\varphi_t(u)du + q\int_o^\tau k'(\tau-u)\,\varphi_t(u)du + qk(o)\varphi_t(\tau)$$

Reprenons la définition de la fonction $\varphi_t(t)$ nous obtenons :

si τ tq. $o \leq \tau \leq t$

$$\lambda_t(\tau) = \int_o^\tau k(\tau-u)\varphi(\sigma(u))du + q\int_o^\tau k'(\tau-u)\,\varphi(\sigma(s))ds + qk(o)\,\varphi(\sigma(\tau))$$

$$= \sigma(\tau) - h(\tau) + q[\sigma'(\tau) - h'(\tau)]$$

ceci établit la valeur de λ_t sur l'intervalle $[o,t]$

si τ tq. $\tau > t$

$$\lambda_t(\tau) = \int_o^t [k(t-u) + qk'(t-u)]\,\varphi(\sigma(u))\,du$$

3°) λ_t appartient à $L^1 \cap L^2$ sur R^+

puisque: $\int_o^\tau k(\tau-u)\,\varphi(\sigma(u))\,du = \sigma(\tau) - h(\tau)$

et $\int_o^\tau k'(\tau-u)\varphi(\sigma(u))\,du = \sigma'(\tau) - h'(\tau) - k(o)\,\varphi(\sigma(\tau))$

dés lors,la fonction λ_t est une somme de fonctions définies dans $L^1 \cap L^2$ sur R^+.Elle est donc,elle-même,définie dans $L^1 \cap L^2$ sur R^+.

4°) Si nous désignons $\tilde{\varphi}_t(s)$ et $\tilde{\lambda}_t(s)$ comme les transformées de FOURIER respectivement de $\varphi_t(\tau)$ et $\lambda_t(\tau)$ nous avons :

$$\boxed{\tilde{\lambda}_t(s) = (1-isq)\,\tilde{k}(s)\,\tilde{\varphi}_t(s)}$$

Explicitement,nous avons:

$$\tilde{\lambda}_t(s) = \int_o^\infty \left[\int_o^\tau [k(\tau-u) + qk'(\tau-u)]\,\varphi_t(u)du + qk(o)\,\varphi_t(\tau)\right] e^{is\tau}d\tau$$

$$\tilde{\lambda}_t(s) = \int_0^\infty [\int_0^\tau k(\tau-u)\varphi_t(u)du]\, e^{is\tau}d\tau + q\int_0^\infty [\int_0^\tau k'(\tau-u)\varphi_t(u)du]e^{is\tau}d\tau + qk(o)\tilde{\varphi}_t(s)$$

Calculons séparément les deux premières intégrales du membre de droite de l'égalité.

$$\int_0^\infty [\int_0^\tau k(\tau-u)\varphi_t(u)du]\, e^{is\tau}d\tau = \int_0^\infty [\int_u^\infty k(\tau-u)\varphi_t(u)e^{is\tau}d\tau]du$$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)[\int_u^\infty k(\tau-u)\, e^{is\tau}d\tau]du$$

$$= \tilde{k}(s)\tilde{\varphi}_t(s) \qquad \text{en posant } \tau-u = v$$

$$\int_0^\infty [\int_0^\tau k'(\tau-u)\varphi_t(u)du]\, e^{is\tau}d\tau = \int_0^\infty du\, [\int_u^\infty k'(\tau-u)\varphi_t(u)\; e^{is\tau}d\tau]$$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)\; du [\int_0^\infty k'(v)\; e^{is(v+u)}dv]$$

en posant $\tau-u = v$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)\; e^{isu}\; du [\int_0^\infty k'(v)e^{isv}dv]$$

intégrons par parties

$$= \tilde{\varphi}_t(s)\,[-k(o) - is\tilde{k}(s)]$$

puisque nous avons: $\lim_{t\to+\infty} k(t) = o$. Conséquence directe du fait que k et k' sont toutes deux définies dans l'espace $L^1(R^+;R)$.

De tout ceci, nous retirons la valeur de la fonction $\tilde{\lambda}_t$:

$$\tilde{\lambda}_t(s) = \tilde{k}(s)\,\tilde{\varphi}_t(s) + q[\tilde{\varphi}_t(s)\,[-k(o) - is\tilde{k}(s)]] + qk(o)\,\tilde{\varphi}_t(s)$$

$$\tilde{\lambda}_t(s) = (1 - isq)\;\tilde{k}(s)\;\tilde{\varphi}_t(s)$$

5°) <u>Nous définissons une nouvelle fonction auxiliaire $\rho(t)$ comme suit:</u>

$$\boxed{\rho(t) = \int_0^t \lambda_t(\tau)\,\varphi(\sigma(\tau))\; d\tau = \int_0^\infty \lambda_t(\tau)\varphi_t(\tau)\; d\tau}$$

Nous pouvons appliquer l'égalité de PARCEVAL à cette fonction pour obtenir:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \tilde{\lambda}_t(s)\;\overline{\tilde{\varphi}_t(s)}\; ds$$

Or, nous connaissons $\tilde{\lambda}_t(s)$ explicitement par le 4°

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_R (1-isq)\;\tilde{k}(s)\;\tilde{\varphi}_t(s)\;\;\overline{\tilde{\varphi}_t(s)}\; ds$$

Par définition, la fonction $\rho(t)$ est une fonction à valeur réelle. Nous avons donc:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left\{(1-isq)\ \tilde{k}(s)\right\}\left|\tilde{\varphi}_t(s)\right|^2 ds$$

Nous allons utiliser la condition de fréquence introduite dans l'hypothèse 4, soit:

$$\mathrm{Re}\left\{(1-isq)\ \hat{\tilde{k}}(s)\right\} \leq 0 \qquad \forall\, s \in R$$

En conséquence: $\rho(t) \leq 0 \qquad \forall t \in R^+$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho(t) = \int_0^t \lambda_t(\tau)\,\varphi(\sigma(\tau))\, d\tau \leq 0 \qquad \forall t \in R^+$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall t \in R^+$$

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau + q\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\ \sigma'(\tau)d\tau - \int_0^t \left[h(\tau) + qh'(\tau)\right]\varphi(\sigma(\tau))d\tau \leq 0$$

$$\forall t \in R^+$$

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau + q\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \varphi(\sigma(\tau))d\sigma(\tau) \leq \int_0^t \left[|h(\tau)| + q|h'(\tau)|\right]|\varphi(\sigma(\tau))|\, d\tau$$

Or la fonction φ est bornée par hypothèse. Il existe donc une constante ϕ telle que $|\varphi(\sigma)|$ soit inférieure à ϕ pour tout σ appartenant à R.

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau + q\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \varphi(\sigma(\tau))d\sigma(\tau) \leq \phi\int_0^{\infty} \left[|h(\tau)| + q|h'(\tau)|\right]\, d\tau$$

Par l'hypothèse 3 nous savons que pour tout $\sigma \neq 0 \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0$. Dés lors,

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \varphi(\sigma(\tau))\ d\sigma(\tau) > 0$$

Finalement nous obtenons:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)\ d\tau \leq A \qquad \forall t \in R^+$$

où A est une constante positive associée à l'équation intégrale de départ, qui vaut:

$$A = \phi\left(\,|h|_{L^1} + q\,|h'|_{L^1}\right)$$

6°) <u>Nous pouvons remarquer que l'intégrant $\varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)$ est positif et uniformément continu sur R^+.</u>

- Par l'hypothèse 3, la fonction φ vérifie la condition de secteur. Elle est donc strictement positive si σ est définie dans R_0. Elle ne s'annule que si σ vaut zéro.

- Vérifions que: $\varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)$ est uniformément continue sur R^+. Nous pouvons montrer que $\sigma'(t)$ est dominée en valeur absolue par la somme d'une constante et d'une fonction intégrable sur R^+

$$|\sigma'(t)| \leq |h'(t)| + k(o)|\varphi(\sigma(t))| + \int_0^t |k'(t-s)||\varphi(\sigma(s))| \, ds$$

$$\leq |h'|_{L1} + k(o)\,\phi + \phi\,|k'|_{L1}$$

Nous sommes donc assurés du fait que $\sigma(t)$ est uniformément continue. Or, φ est une fonction continue. Dés lors, elle est uniformément continue sur tout compact de R^+ et $\varphi(\sigma(t))$ est donc uniformément continue. D'autre part, le produit de deux fonctions uniformément continues sur R^+ demeure une fonction uniformément continue sur R^+.
Nous pouvons donc affirmer que $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ est uniformément continue sur R^+.

7°) <u>Nous pouvons appliquer à la fonction $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ le lemme de BARBǍLAT</u> qui s'énonce comme suit:

> soit $f(t) \geqslant o$, une fonction intégrable sur R^+ et uniformément continue sur R^+
> alors, $f(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

(voir démonstration Annexe C)

Prenons pour fonction $f(t)$ la fonction $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$. Par le 6°, cette fonction **intégrable vérifie les deux conditions requises par le lemme** de BARBǍLAT. Nous pouvons donc affirmer que:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(\sigma(t))\sigma(t) = o$$

De plus, nous savons par l'hypothèse 3 que pour tout σ distinct de zéro la fonction $\varphi(\sigma)$ est strictement positive.

Nous pouvons conclure:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(\sigma(t))\sigma(t) = o \qquad \text{ssi} \qquad \lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$$

Par l'étape 2, nous concluons que toute solution σ de l'équation intégrale, définie dans $C_c(R^+;R)$ est définie dans $C_o(R^+;R)$.

* * * * * * * *

§.2.-CAS DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Appliquons le résultat obtenu par le théorème 2 relatif à la stabilité de la solution d'une équation intégrale à noyau intégrable à l'équation intégrale:

$$\sigma(t) = (c,e^{At}x^\circ) + \int_0^t (c,e^{A(t-s)}b\,\varphi(\sigma(s)))\,ds$$

c'est-à-dire, appliquons ce résultat au système d'équations différentielles régissant le système de contrôle direct:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) \end{cases} \qquad (I)$$

Nous savons que: - A est une matrice stable de dimension n x n

- φ est continue et bornée, définie de R dans R
- φ vérifie la condition de secteur: $\sigma\varphi(\sigma) > o \quad \forall \sigma \neq o$ et $\varphi(o) = o$

<u>Montrons tout d'abord que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées:</u>

<u>CONDITION 1:</u> $h,h' \in L^1(\mathbb{R}^+;R)$

a) <u>$h(t) \to o$ exponentiellement lorsque $t \to \infty$</u>

$$h(t) = (c,e^{At}x^\circ)$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} (c,e^{At}x^\circ)$$

$$= (c,\lim_{t\to\infty} e^{At}x^\circ)$$ puisque le produit scalaire est une fonction continue.

or, par hypothèse, A est une matrice stable.

Dés lors, $\lim_{t\to\infty} e^{At}x^\circ = o, \forall\, x^\circ \in R^n$ et nous avons une décroissance exponentielle de h avec t.

b) <u>de même, $h'(t) \to o$ exponentiellement quand $t \to \infty$</u>

$$h'(t) = [(c,e^{At}x^\circ)]'$$

$$= (c,\frac{d}{dt}(e^{At}x^\circ))$$

$$= (c,Ae^{At}x^\circ)$$

$$\lim_{t\to\infty} h'(t) = \lim_{t\to\infty} (c,Ae^{At}x^\circ)$$

$$= (c,A\lim_{t\to\infty} e^{At}x^\circ)$$

or, seule la fonction e^{At} est dépendante du temps t. De plus, A est stable. En conséquence, la limite calculée ci-dessus s'annule et nous obtenons:

$\lim_{t\to\infty} h'(t) = o$, et h' , tout comme h, est une fonction qui décroit exponentiellement vers o quand t tend vers l'∞.

L'hypothèse (1) du théorème 2 est satisfaite comme application directe du critère d'intégrabilité ci-dessous. (Cfr. a) & b)). Puisque ces deux propriétés impliquent que h et h' sont majorées par une fonction intégrable sur R^+. De plus, elles sont continues sur R^+, dés lors, h et h' appartiennent à $L^1(R^+;R)$.

Critère d'intégrabilité:

> Si f est mesurable de R^+ dans R
> Si $|f(x)| \leq g(x)$ presque partout, avec g située dans $L^1(R^+;R)$
> Alors, f est elle-même située dans $L^1(R^+;R)$.

- $\|h(t)\| \leq \|c\| \, \|e^{At}\| \, \|x°\| \qquad \forall t \in R^+$

or, A est une matrice stable, donc, il existe deux nombres $k_o, k_1 > o$

tels que $\|e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_o t}$

$\leq \|c\| \, k_1 \|x°\| \, e^{-k_o t}$

Posons $g(t) = \|c\| \, k_1 \|x°\| \, e^{-k_o t}$ et montrons que cette fonction est intégrable sur R^+. Dés lors, h sera définie dans $L^1(R^+;R)$

$$\int_o^{\infty} \|c\| \, k_1 \|x°\| \, e^{-k_o t} \, dt = \frac{\|c\| \, k_1 \|x°\|}{k_o} < +\infty$$

- $\|h'(t)\| \leq \|c\| \, \|A\| \, \|e^{At}\| \, \|x°\|$

$\leq \|c\| k_1 \|A\| \, \|x°\| \, e^{-k_o t} = \|A\| \, g(x) \qquad \forall t \in R^+$

puisque A est une matrice stable et en reprenant la fonction g définie ci-dessus.
De plus A est constante, donc $\|A\| \, g(x)$ est une fonction intégrable sur R^+. Dés lors, h' appartient à l'espace $L^1(R^+;R)$

CONDITION 2: k et $k' \in L^1(R^+;R)$

a) $k(t) \rightarrow o$ exponentiellement lorsque $t \rightarrow \infty$

$$k(t) = (c, e^{At} b)$$

$$\lim_{t \to \infty} k(t) = \lim_{t \to \infty} (c, e^{At} b)$$

$$= (c, \lim_{t \to \infty} e^{At} b)$$

Puisque A est stable, la limite qui apparait dans le produit scalaire est nulle et la fonction k(t) décroit donc exponentiellement vers o, lorsque t tend vers l'∞.

b) $k'(t) \to o$ exponentiellement lorsque $t \to \infty$

$$k'(t) = \left[(c, e^{At} b)\right]'$$
$$= (c, \frac{d}{dt} e^{At} b)$$
$$= (c, A\, e^{At} b)$$
$$\lim_{t \to \infty} k'(t) = \lim_{t\to\infty} (c, e^{At} Ab)$$
$$= (c, \lim_{t\to\infty} e^{At} Ab)$$

de nouveau en utilisant le caractère stable de A cette limite est identiquement nulle. Donc, k' décroit exponentiellement vers o lorsque t tend vers l'∞.

Nous pouvons tirer les mêmes conclusions que pour les fonctions h et h' pour ces deux fonctions k et k'. En effet, ces fonctions k et k' sont continues et majorées par une fonction intégrable sur R^+ et donc, par un critère d'intégrabilité sont toutes deux situées dans $L^1(R^+;R)$.

CONDITION 3: La fonction φ vérifie la condition de secteur.

Cette condition coïncide avec une hypothèse de notre problème.

CONDITION 4: ou CONDITION DE FREQUENCE c'est-à-dire:

$$\exists\, q \geq o \text{ tq. } \quad \mathrm{Re}\left\{(1 - isq)\, \check{k}(s)\right\} \leq o \quad \forall s \in R$$

Etablissons la valeur de $\check{k}(s)$ pour le cas du contrôle direct:

$$k(t) = (c, e^{At} b)$$
$$\check{k}(s) = \int_o^\infty (c, e^{At} b) e^{ist} dt \qquad s \in R$$
$$= (c, \int_o^\infty e^{(A+isI)t}\, dt\; b)$$

Or, nous pouvons établir:

$$A \int_o^\infty e^{At} e^{ist}\, dt = \int_o^\infty e^{ist}\, d(e^{At})$$
$$= e^{ist}\, e^{At}\Big]_o^\infty - is \int_o^\infty e^{At}\, e^{ist}\, dt$$
$$= -I - is \int_o^\infty e^{At}\, e^{ist}\, dt \quad \text{puisque A est stable.}$$
$$\left[\int_o^\infty e^{At}\, e^{ist}\, dt\right] \left[A + isI\right] = -I$$
$$\boxed{\int_o^\infty e^{At}\, e^{ist}\, dt = -(A + isI)^{-1} \qquad s \in R}$$

Dés lors, $\tilde{k}(s)$ peut s'écrire:

$$\tilde{k}(s) = (c, \int_0^{\infty} e^{At} e^{ist}\, dt\; b)$$

$$k(s) = -(c, (isI + A)^{-1}\, b)$$

La condition de fréquence liée au contrôle direct s'écrit:

$$\boxed{\exists\, q \geqslant 0 \text{ tq.} \quad \mathrm{Re}\left\{ (isq - 1)\,(c, (isI + A)^{-1}\, b) \right\} \leqslant 0 \qquad s \in R}$$

Toutes les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, donc:

Toute solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale associée au système d'équations différentielles du contrôle direct est telle que :
$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$

1°)-Montrons que n'importe quelle solution $x(t)$ du système (I) tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini pour toute condition initiale x° définie dans R^n si nous avons les quatre conditions ci-dessus.
C'est-à-dire:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = (c, x(t)) \end{cases} \quad \text{vérifié.}$$

Nous savons qu'il existe au moins une solution $\sigma(t)$ à ce problème puisque les hypothèses du théorème 2 sont plus fortes que celles du théorème 1 qui, lui, assure l'existence d'au moins une solution.

$$\sigma(t) = (c, x(t)) \text{ avec } x(t) = e^{At}\, x^{\circ} + \int_0^t e^{A(t-s)}\, b\, \varphi(\sigma(s))\, ds$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \text{ pour tout } x^{\circ} \text{ défini dans } R^n$$

En effet,

$$\| x(t) \| = \| e^{At} x^{\circ} + \int_0^t e^{A(t-s)}\, b\, \varphi(\sigma(s))\, ds \|, \quad \forall t \in R^+$$

$$\| x(t, x^{\circ}) \| \leqslant \| e^{At} \|\, \| x^{\circ} \| + \int_0^t \| e^{A(t-s)} \|\, \| b \|\, | \varphi(\sigma(s)) |\, ds$$

utilisons la stabilité de A.

$$\leqslant k_1 e^{-k_0 t}\, \| x^{\circ} \| + \int_0^t k_1\, e^{-k_0 (t-s)}\, \| b \|\, | \varphi(\sigma(s)) |\, ds$$

Regardons ce qui **résulte**, si nous passons à la **limite lorsque** t tend vers l'infini.

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, x^{\circ}) \| \leqslant \lim_{t \to \infty} e^{-k_0 t}\, k_1\, \| x^{\circ} \| + \lim_{t \to \infty} \int_0^t k_1\, e^{-k_0 (t-s)}\, \| b \|\, | \varphi(\sigma(s)) |\, ds$$

La première limite du membre de droite de l'inégalité est nulle comme conséquence directe de la stabilité de A. La seconde limite s'annule par simple application de la règle de l'HOSPITAL;

puisque . $k_o > o$

. $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = o$ par application du théorème 2

. φ continue implique: $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = o$

posons $g(t) = \int_o^t e^{-k_o(t-s)} k_1 \|b\| |\varphi(\sigma(s))| ds$

$g(t) \to o$ lorsque $t \to \infty$

par la règle de l'HOSPITAL: $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = o$

Nous obtenons donc le résultat annoncé, soit: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = o$ pour tout $x°$ de R^n

(Ce résultat était annoncé par C.CORDUNEANU dans son livre: "Integral Equations and Stability of Feedback Systems", mais celui-ci ne signale rien à propos de la stabilité simple de la solution du système d'équations différentielles associés au problème de contrôle direct.

2°)-Nous allons établir le fait que $x(t)$, solution du système d'équations différentielles (I), vérifie la stabilité simple.
C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \ ; \quad \exists \eta > o \text{ tq. } \forall x° \in R^n \quad \|x°\| < \eta \quad \forall t \geq o \quad \|x(t,x°)\| < \varepsilon$$

ETAPE 1.- x tend vers o_{R^n} quand $x°$ tend vers o_{R^n} uniformément par rapport à t défini dans R^+.

$\Longleftrightarrow$

$$\forall r > o \qquad \sup_{\substack{t \geq o \\ \|x°\| \leq r}} \|x(t,x°)\| = B(r) < +\infty$$

Le problème se présente sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{avec } x(t,x°) \text{ tq. } x(o) = x° \\ \text{et} \quad \sigma(t,x°) = (c,x(t,x°)) \end{array}$$

$$x(t,x°) = e^{At} x° + \int_o^t e^{A(t-s)} b\varphi(\sigma(s,x°)) ds$$

$$\sigma(t,x°) = h(t,x°) + \int_o^t k(t-s) \varphi(\sigma(s,x°)) ds$$

où $- h(t,x°) = (c, e^{At} x°)$

$- k(t) = (c, e^{At} b)$

Comment majorer $\|x(t,x°)\|$ pour tout t positif?

$$\|x(t,x°)\| \leq \|e^{At}\| \|x°\| + \int_o^t \|e^{A(t-s)}\| \|b\| |\varphi(\sigma(s,x°))| ds$$

puisque la norme d'une somme est inférieure ou égale à la somme des normes et puisque la norme d'une intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la norme.

utilisons le caractère stable de la matrice A.

$$\|x(t,x^\circ)\| \leq k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + k_1 \int_0^t e^{k_o(t-s)} \|b\| |\varphi(\sigma(s,x^\circ))| ds$$

or, par hypothèse φ est une fonction continue et bornée de R dans R.
Donc φ vérifie: $\exists \phi > o$ tq. $|\varphi(\sigma)| \leq \phi \quad \forall \sigma \in R$
Le résultat devient:

$$\|x(t,x^\circ)\| \leq k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + k_1 \phi \|b\| \int_o^t e^{-k_o(t-s)} ds \qquad \forall t \geq o$$

$$\leq k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + \frac{k_1 \phi \ b}{k_o} \left[1 - e^{-k_o t}\right]$$

pour tout t positif, nous avons: $e^{-k_o t} \leq 1$

$$\leq k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + \frac{k_1 \phi \ b}{k_o}$$

posons $B'(r) = k_1 r + \dfrac{k_1 \phi \|b\|}{k_o}$ nous obtenons:

$$\|x(t,x^\circ)\| \leq B'(r) \qquad \forall t \geq o \quad ; \forall x^\circ \text{ tq. } \|x^\circ\| \leq r$$

en particulier : $\sup\limits_{\substack{t \geq o \\ \|x^\circ\| \leq r}} \|x(t,x^\circ)\| = B(r) < +\infty$

ETAPE 2.- $\boxed{\forall r > o \qquad \sup\limits_{\substack{t \geq o \\ \|x^\circ\| \leq r}} \left\|\frac{d}{dt} x(t,x^\circ)\right\| = C(r) < +\infty}$

$$\frac{dx(t,x^\circ)}{dt} = Ax(t,x^\circ) + b\varphi(\sigma(t,x^\circ))$$

or, par hypothèse: - A est une matrice constante

- φ est une fonction bornée et continue de R dans R, c'est-à-dire: $\exists \phi > o$ tq. $|\varphi(\sigma)| \leq \phi \ ; \forall \sigma \in R$

d'autre part, lors de l'étape I, nous avons montré que $\|x(t,x^\circ)\|$ était bornée par B(r). Dès lors,

$$\left\|\frac{dx(t,x^\circ)}{dt}\right\| \leq \|A\| \ \|x(t,x^\circ)\| + \|b\| \ |\varphi(\sigma(t,x^\circ))|$$

utilisons les résultats détaillés ci-dessus, nous obtenons:

$$\left\|\frac{dx(t,x^\circ)}{dt}\right\| \leq \|A\| B + \|b\| \phi \qquad \begin{array}{l}\forall t \geq o \\ \forall x^\circ \text{ tq. } \|x^\circ\| \leq r\end{array}$$

si nous posons $C = \|A\| B + \|b\| \phi$, le résultat devient:

$$\left\|\frac{dx(t,x^\circ)}{dt}\right\| \leq C(r) \qquad \forall t \geq o \ ; \forall x^\circ \text{ tq. } \|x^\circ\| \leq r$$

donc $\forall r > o \qquad \sup_{\substack{t \geq o \\ \|x^\circ\| \leq r}} \left\|\frac{dx(t,x^\circ)}{dt}\right\| < +\infty$

ETAPE 3.- $\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > o \ ; \forall r > o ; \ \exists \eta(\varepsilon, r) > o \text{ tq.} \\ \left.\begin{array}{l}\forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ\| \leq r \\ \forall t,t' \in R^+ \text{ tq. } |t-t'| < \eta\end{array}\right\} \Rightarrow \|x(t,x^\circ)-x(t',x^\circ)\| < \varepsilon\end{array}}$

nous pouvons utiliser le théorème de la moyenne, alors, pour tout t,t' appartenant à R^+, tels que $|t-t'| < \eta$ et pour tout x° dans R^n tel que $\|x^\circ\| \leq r$, afin d'obtenir :

$$\|x(t,x^\circ)-x(t',x^\circ)\| \leq |t-t'| \sup_{\substack{\tau \in R^+ \\ \|x^\circ\| \leq r}} \left\|\frac{dx(\tau,x^\circ)}{d\tau}\right\|$$

$$\leq \eta\, C(r)$$

il suffit donc de choisir $\eta > o$ tq. $\eta < \dfrac{\varepsilon}{C(r)}$; où $\dfrac{\varepsilon}{C(r)}$ est entièrement déterminé dés que ε et r sont donnés.

Nous avons donc:

$$\forall \varepsilon > o \ ; \forall r > o \ ; \exists \eta(\varepsilon, r) \text{ tq. } o < \eta(\varepsilon,r) < \frac{\varepsilon}{C(r)} \text{ tq. } \begin{array}{l}\forall x^\circ \in R^n \ \|x^\circ\| < r \\ \forall t,t' \in R^+ \ |t-t'| < \eta\end{array}$$

$$\Rightarrow \|x(t,x^\circ) - x(t',x^\circ)\| < \varepsilon$$

ETAPE 4.- Démontrons que $\varphi(\sigma(t,x^\circ))$ est une fonction uniformément continue. C'est-à-dire:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > o \ ; \forall r > o \ ; \ \exists \eta > o \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \ \|x^\circ\| \leq r \\ \qquad\qquad \forall t,t' \in R^+ \text{ tq. } |t-t'| < \eta \\ \Rightarrow |\varphi(\sigma(t,x^\circ)) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))| < \varepsilon\end{array}}$$

- φ est continue en tout point s_o par hypothèse. C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \ ; \exists \delta > o \text{ tq. } |s_o - s| < \delta \Rightarrow |\varphi(s_o) - \varphi(s)| < \varepsilon$$

- la fonction: $(t,x^\circ) \rightsquigarrow (t,x^\circ)$ est bornée.

$$|\sigma(t,x^\circ)| = |(c,x(t,x^\circ))| \text{ et } \sup_{\substack{t \geq o \\ \|x^\circ\| \leq r}} \|x(t,x^\circ)\| = B(r) \text{ (étape 1)}$$

fixons $r > o$ et $\varepsilon > o$, nous obtenons:

$$\sup_{\substack{t \geqslant o \\ \|x^\circ\| \leqslant r}} |\sigma(t,x^\circ)| \leqslant \|c\| \sup_{\substack{t \geqslant o \\ \|x^\circ\| \leqslant r}} \|x(t,x^\circ)\| \leqslant \|c\| B(r)$$

- posons $T = \|c\| \sup \|x(t,x^\circ)\|$. La fonction φ étant continue sur R, elle est uniformément continue sur $[-T,T]$. Donc, $\forall \varepsilon > o$;

$$\exists \delta > o \; ; \forall s,s' \in [-T,T] \text{ c-à-d. } |s-s'| < \delta \leqslant 2T \Rightarrow |\varphi(s) - \varphi(s')| < \varepsilon$$

- d'autre part, pour tout t,t' appartenant à R^+ et pour tout x° de R^n

$$\begin{aligned} |\sigma(t,x^\circ) - \sigma(t',x^\circ)| &= |(c,x(t,x^\circ)) - (c,x(t'x^\circ))| \\ &= |(c,x(t,x^\circ)-x(t',x^\circ))| \\ &\leqslant \|c\| \; \|x(t,x^\circ) - x(t',x^\circ)\| \end{aligned}$$

or, d'après l'étape 3, il existe $\eta > o$ tq.

$$\forall \varepsilon = \frac{\delta}{\|c\|} > o \; ; \forall \; t,t' \in R^+ \text{ tq. } |t-t'| < \eta \text{ et } \forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ\| \leqslant r$$

$$\|x(t,x^\circ) - x(t',x^\circ)\| < \frac{\delta}{\|c\|} \Rightarrow |\sigma(t,x^\circ) - \sigma(t',x^\circ)| < \delta$$

Alors, $\forall \; t,t' \in R^+$ tq. $|t-t'| < \eta$ et $\forall x^\circ \in R^n$ tq. $\|x^\circ\| \leqslant r$

$\Rightarrow \sigma(t,x^\circ)$ et $\sigma(t',x^\circ) \in [-T,T]$, $|\sigma(t,x^\circ) - \sigma(t',x^\circ)| < \delta$

donc $|\varphi(\sigma(t,x^\circ)) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))| < \varepsilon$

puisque nous nous retrouvons dans le cadre de la continuité uniforme de φ sur le compact $[-T,T]$.

<u>ETAPE 5.-</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \varepsilon > o \; ; \forall r > o \; ; \quad \exists \eta > o \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ\| \leqslant r \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t,t' \in R^+ \text{ tq. } |t-t'| < \eta \\ &\qquad \Rightarrow |\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))\sigma(t',x^\circ)| < \varepsilon \end{aligned}}$$

Fixons $\varepsilon > o$ et $r > o$. Pour tout $x^\circ \in R^n$ tq. $\|x^\circ\| \leqslant r$ et pour tout $t,t' \in R^+$ nous avons :

$$\begin{aligned} &|\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))\sigma(t',x^\circ)| \\ &\quad = |\varphi(\sigma(t,x^\circ)\sigma(t,x^\circ) - \varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t',x^\circ) + \varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t',x^\circ) \\ &\qquad\qquad - \varphi(\sigma(t',x^\circ))\sigma(t',x^\circ)| \\ &\quad \leqslant |\varphi(\sigma(t,x^\circ))| \, |\sigma(t,x^\circ) - \sigma(t',x^\circ)| + |\varphi(\sigma(t,x^\circ)) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))| \, |\sigma(t',x^\circ)| \\ &\quad \leqslant \sup_{s \in R} |\varphi(s)| \; |\sigma(t,x^\circ) - \sigma(t',x^\circ)| + |\varphi(\sigma(t,x^\circ)) - \varphi(\sigma(t',x^\circ))| \\ &\qquad\qquad \cdot \sup_{\substack{t \geqslant o \\ \|x^\circ\| \leqslant r}} |\sigma(t,x^\circ)| \end{aligned}$$

Or, par l'étape 4 nous savons:

$$-\sup_{\substack{t \geqslant o \\ \|x^\circ\| \leqslant r}} |\sigma(t,x^\circ)| \leqslant \|c\| \; B(r)$$

$-\sup_{t\in R}|\varphi(\sigma(t,x^\circ))|\leq\phi$

$-\forall\varepsilon'>0\ ;\ \exists\eta>0$ tq. $\forall x^\circ\in R^n$ $\|x^\circ\|\leq r$
et $\forall t,t'\in R^+$ $|t-t'|\leq\eta$

$$\Rightarrow|\sigma(t,x^\circ)-\sigma(t',x^\circ)|<\varepsilon'$$

$-\forall\varepsilon''>0\ ;\ \forall r>0\ ;\ \exists\eta>0$ tq. $\forall x^\circ\in R^n$ tq. $\|x^\circ\|\leq r$
et $\forall t,t'\in R^+$ $|t-t'|\leq\eta$

$$\Rightarrow|\varphi(\sigma(t,x^\circ))-\varphi(\sigma(t',x^\circ))|<\varepsilon''$$

Nous obtenons:

$$|\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ)-\varphi(\sigma(t',x^\circ))\sigma(t',x^\circ)|\leq\phi\varepsilon'+\|x\|\ B(r)\varepsilon''$$

Il nous suffit de prendre:

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2\phi}\qquad\text{et}\qquad\varepsilon''=\frac{\varepsilon}{2\ \|x\|\ B(r)}$$

Ceci nous permet d'écrire:

$\forall\varepsilon>0\ ;\forall r>0\ ;\exists\eta(\varepsilon,r)>0$ tq. $\forall x^\circ\in R^n$ $\|x^\circ\|\leq r$
et $\forall t,t'\in R^+$ $|t-t'|\leq\eta$

$$\Rightarrow|\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ)-\varphi(\sigma(t',x^\circ))\sigma(t',x^\circ)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

puisque ε et r sont fixés arbitrairement, ce résultat est vrai en toute généralité.

ETAPE 6.-

La fonction: $R^+\times R^n\longrightarrow R^+$ tend vers o
$(t,x^\circ)\rightsquigarrow\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ)$

lorsque x° tend vers o_{R^n} uniformément par rapport à t pris dans R^+. C'est-à-dire:

$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists\eta>0$ tq. $\forall x^\circ\in R^n$ $\|x^\circ\|<\eta$
$\forall t\in R^+$

nous avons : $\varphi(\sigma(t,x^\circ))\sigma(t,x^\circ)<\varepsilon$

A.-Nous avons pu remarquer au cours de la démonstration du théorème 2, la majoration suivante pour tout t positif:

$$\int_0^t\varphi(\sigma(s,x^\circ))\,\dot\sigma(s,x^\circ)ds+q\int_{\sigma(0,x^\circ)}^{\sigma(t,x^\circ)}\varphi(\sigma(s,x^\circ))d\sigma(s,x^\circ)\leq\phi\int_0^\infty\left[|h(s,x^\circ)|+q|h'(s,x^\circ)|\right]ds$$

avec $\phi>0$ tq. $|\varphi(\sigma(s,x^\circ))|\leq\phi$ $\forall\sigma\in R$

Or, nous savons que par hypothèse $\sigma\varphi(\sigma) > 0$. Ceci implique:

$$q\int_{\sigma(0,x^\circ)}^{\sigma(t,x^\circ)} \varphi(\sigma(s,x^\circ))\, d\sigma(s,x^\circ) \quad \text{est positive.}$$

De la majoration ci-dessus nous pouvons tirer: $\forall t \in R^+$

$$\int_0^t \varphi(\sigma(s,x^\circ))\sigma(s,x^\circ)\, ds \leqslant \phi\int_0^\infty \left[|h(s,x^\circ)| + q\,|h'(s,x^\circ)|\right] ds \qquad (1)$$

Comme ceci est vérifié pour tout t positif, nous gardons cette inégalité en intégrant non plus de o à t, mais de o à l'∞. C'est-à-dire:

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma(s,x^\circ))\sigma(s,x^\circ)\, ds \leqslant \phi\int_0^\infty \left[|h(s,x^\circ)| + q|h'(s,x^\circ)|\right] ds$$

Montrons que nous pouvons ramener cette majoration à la forme:

$$\boxed{\int_0^t \varphi(\sigma(s,x^\circ))\sigma(s,x^\circ)\, ds \leqslant N\,\|x^\circ\| \quad \forall t \geqslant 0} \qquad (2)$$

Déterminons N :

Observons le second membre de l'inégalité (1)

$$- \ |h(s,x^\circ)| = |(c, e^{As}x^\circ)|$$
$$\leqslant \|c\|\ k_1\ e^{-k_o s}\,\|x^\circ\| \quad \text{en utilisant la stabilité de A}$$
$$- \ |h'(s,x^\circ)| = |(c, Ae^{As}x^\circ)|$$
$$\leqslant \|c\|\ \|A\|\ k_1 e^{-k_o s}\|x^\circ\|$$

Dés lors, le second membre de (1) est lui-même majoré comme suit:

$$\int_0^\infty \left[|h(s,x^\circ)| + q|h'(s,x^\circ)|\right] ds \leqslant \int_0^\infty \left[\|c\|\ k_1 e^{-k_o s}\|x^\circ\| + q\,\|c\|\,\|A\|\ k_1 e^{-k_o s}\|x^\circ\|\right] ds = F$$

$$F = \|c\|\ k_1\,\|x^\circ\| \int_0^\infty e^{-k_o s}\left[1 + q\,\|A\|\right] ds$$
$$= \|c\|\ k_1\,\|x^\circ\|\ \left[1 + q\,\|A\|\right]\frac{1}{k_o}$$

posons $N = \dfrac{\|c\|\ k_1\left[1 + q\,\|A\|\right]}{k_o}$ et tenons compte de l'inégalité (1) et de la majoration de son second membre. Ceci nous donne:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(s,x^\circ))\,\sigma(s,x^\circ)\, ds \leqslant N\,\|x^\circ\| \qquad \forall t \in R^+,\ \forall x^\circ \in R^n$$

B.- Aidons-nous de cette majoration pour montrer que nous avons bien le résultat annoncé par l'étape 6.

Nous procédons par l'absurde:

Supposons $\exists \varepsilon > 0$ tq. $\forall \eta > 0$; $\exists$ $x^\circ_\eta \in R^n$ tq. $\|x^\circ_\eta\| \leq \eta$

et $\exists t_\eta > 0$ tq. $\varphi(\sigma(t_\eta, x^\circ_\eta))\sigma(t_\eta, x^\circ_\eta) \geq \varepsilon$

Posons $\eta = \frac{1}{n}$; $n \in N_o$

Considérons la suite (x°_n) avec $x^\circ_n \in R^n$ et $\|x^\circ_n\| \leq \frac{1}{n}$

et la suite (t_n) avec $t_n \in R^+$

Elles sont telles que: $\varphi(\sigma(t_n, x^\circ_n))\,\sigma(t_n, x^\circ_n) \geq \varepsilon$

Nous avons donc: $\|x^\circ_n\| \leq 1$ et $\varphi(\sigma(t_n, x^\circ_n))\,\sigma(t_n, x^\circ_n) \geq \varepsilon$

Utilisons le résultat de l'étape 5 pour une valeur de r égale à 1, il nous assure que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in N_o$ et tout $t \in R^+$:

$$|t - t_n| \leq \eta \Rightarrow \varphi(\sigma(t, x^\circ_n)\,\sigma(t, x^\circ_n) \geq \varepsilon'$$

Par suite, pour tout $n \in N_o$:

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma(s, x^\circ_n))\sigma(s, x^\circ_n)\,ds \geq \int_{t_n - \eta}^{t_n + \eta} \varphi(\sigma(s, x^\circ_n))\sigma(s, x^\circ_n)\,ds \geq 2\varepsilon'\eta = \varepsilon\eta > 0$$

en posant: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$

Mais, d'autre part, en tenant compte du résultat (2) de A

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma(s, x^\circ_n))\sigma(s, x^\circ_n)\,ds \leq N\,\|x^\circ_n\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty$$

puisque $\|x^\circ_n\| \to 0$ si $n \to \infty$

Nous aboutissons ainsi à une contradiction, puisque l'hypothèse de l'absurde implique que l'intégrale:

$\int_0^\infty \varphi(\sigma(s, x^\circ_n))\sigma(s, x^\circ_n)\,ds$ reste stictement positive pour tout $x^\circ_n \in R^n$

car celle-ci reste constamment supérieure à un nombre $\varepsilon\eta$ strictement positif. Ce qui est en contradiction avec le résultat (2)

L'hypothèse de l'absurde est donc fausse et nous avons bien le résultat annoncé.

<u>ETAPE 7.-</u> Montrons que la fonction: $\begin{array}{l} R^+ \times R^n \to R \\ (t,x^\circ) \mapsto \sigma(t,x^\circ) \end{array}$ tend vers o quand x° tend vers o_{R^n} uniformément par rapport à t pris dans R^+.C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \;;\; \exists \eta > o \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ_\eta\| \leq \eta \;,\; \forall t \in R^+ \quad |\sigma(t,x^\circ)| < \varepsilon$$

Procédons de nouveau par l'absurde.Nous supposons donc:

$$\exists \varepsilon > o \text{ tq. } \forall \eta > o \; \exists x^\circ_\eta \text{ tq. } \|x^\circ_\eta\| \leq \eta$$
$$\exists t_\eta > o \text{ avec } |\sigma(t_\eta, x^\circ_\eta)| \geq \varepsilon$$

Prenons $\eta = \frac{1}{n}$; $n \in N_o$

Nous pouvons voir qu'il existe une suite (t_n) de réels positifs et une suite (x°_n) de points de R^n telles que pour tout $n \in N_o$: $\|x^\circ_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $|\sigma(t_n,x^\circ_n)| \geq \varepsilon$

Par l'étape **1**,nous avons pour tout $n \in N_o$:

$$|\sigma(t_n,x^\circ_n)| \leq \|c\| \; \|x(t_n,x^\circ_n)\| \leq \|c\| \; B(1) < +\infty$$

$$\text{donc, } \varepsilon \leq |\sigma(t_n,x^\circ_n)| \leq \|c\| \; B(1) \qquad \forall n \in N_o$$

Posons: $\inf_{\varepsilon \leq |\xi| \leq \|c\| B(1)} |\varphi(\xi)| = m$

Puisque $|\varphi|$ est continue,elle atteint ses bornes sur tout compact.Il existe donc un point $\hat{\xi}$ tel que :

$$\varepsilon \leq |\hat{\xi}| \leq \|c\| \; B(1) \quad \text{et} \quad m = |\varphi(\hat{\xi})|$$ (où $m > o$,car φ ne s'annule qu'en zéro).

De plus,nous avons la condition de secteur pour φ

$$\Rightarrow \quad \varphi(\sigma(t_n,x^\circ_n))\sigma(t_n,x^\circ_n) = |\varphi(\sigma(t_n,x^\circ_n))| \, |\sigma(t_n,x^\circ_n)| \geq m\,\varepsilon$$

D'où la suite de réels:

$\left\{\varphi(\sigma(t_n,x^\circ_n))\sigma(t_n,x^\circ_n)\right\}_{n \in N_o}$ ne tend pas vers zéro,puisque chaque terme reste supérieur à un nombre strictement positif.Mais d'autre part, l'étape 6 assure que cette suite tend vers zéro puisque $x^\circ_n \to O_{R^n}$. Nous aboutissons donc à une contradiction,l'hypothèse de l'absurde est donc fausse et $\sigma(t,x^\circ)$ tend vers o lorsque x° tend vers o_{R^n} uniformément par rapport à t défini dans R^+.

ETAPE 8.- Vérifions la stabilité:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \eta > 0 \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ\| \leq \eta \quad \forall t \geq R^+ \quad \text{nous avons: } \|x(t,x^\circ)\| < \varepsilon$$

Nous connaissons la forme de la solution $x(t,x^\circ)$ de manière explicite nous pouvons la majorer en norme comme suit:

$$\|x(t,x^\circ)\| \leq \|e^{At}\| \, \|x^\circ\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \, \|b\| \, |\varphi(\sigma(s,x^\circ))| \, ds$$

$$\leq k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + \left[k_1 \int_0^t e^{-k_o(t-s)} ds \right] \|b\| \sup_{s \in [0,t]} |\varphi(\sigma(s,x^\circ)|$$

puisque A est une matrice stable.

$$= k_1 e^{-k_o t} \|x^\circ\| + k_1 \frac{1}{k_o} (1 - e^{-k_o t}) \, \|b\| \sup_{s \in [0,t]} |\varphi(\sigma(s,x^\circ))|$$

Par suite, pour tout $t \in R^+$ et pour tout $x^\circ \in R^n$:

$$\|x(t,x^\circ)\| \leq k_1 \|x^\circ\| + \frac{k_1}{k_o} \|b\| \sup_{s \in R^+} |\varphi(\sigma(s,x^\circ))|$$

Fixons $\varepsilon' > 0$ arbitrairement.
Puisque φ est continue en 0 et $\varphi(0) = 0$; il existe $\delta > 0$ tq.

$$|\xi| < \delta \Rightarrow |\varphi(\xi)| < \varepsilon' \qquad \text{prenons } \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{k_o}{k_1} \|b\|$$

Puisque l'application: $(t,x^\circ) \rightsquigarrow \varphi(\sigma(t,x^\circ))$ tend vers 0 quand x° tend vers 0_{R^n} uniformément par rapport à **t défini** dans R^+, il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout x° appartenant à R^n de norme inférieure à η' et pour tout t de R^+: $|\sigma(t,x^\circ)| < \delta$

Alors, $\|x^\circ\| \leq \eta'$; $\sup_{s \in R^+} |\varphi(s,x^\circ)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{k_o}{k_1 \|b\|}$

Posons $\eta = \inf.(\eta', \frac{\varepsilon}{2k_1})$. Dés lors, pour tout t appartenant à R^+ et pour tout x° de norme inférieure à η défini dans R^n nous avons:

$$\|x(t,x^\circ)\| < k_1 \eta + \frac{k_1}{k_o} \|b\| \frac{\varepsilon}{2} \frac{k_o}{k_1 \|b\|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

CONCLUSION: Comme $x(t)$ est une solution qui vérifie:

-la stabilité simple, c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \eta > 0 \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \; \|x^\circ\| < \eta \text{ et } \forall t \in R^+ \Rightarrow \|x(t,x^\circ)\| < \varepsilon$$

$$-\lim_{t \to +\infty} x(t,x^\circ) = 0 \qquad \forall x^\circ \in R^n$$

la solution $x(t)$ vérifie LA STABILITE ASYMPTOTIQUE GLOBALE.
Cette notion de stabilité est réalisée pour une classe de fonctions φ continues de R dans R telles que $\varphi(0) = 0$ et $\sigma\varphi(\sigma) > 0$; $\forall \sigma \neq 0$, nous avons donc pour $x(t)$ une notion de stabilité absolue.

APPLICATION PARTICULIERE: Contrôle direct à matrice diagonale.

Nous allons mettre en évidence la condition de fréquence établie par V.M.POPOV pour illustrer sa simplicité de forme.
Soit le contrôle direct:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(\sigma)b \\ \sigma = (c,x) \end{cases} \qquad \text{où A est diagonale.}$$

Nous allons l'écrire à partir des composantes sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -k_i x_i - b_i\varphi(\sigma) \qquad i = 1,2,\ldots,n \\ \sigma = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \end{cases}$$

La condition de fréquence s'écrit alors:

$$\exists q \geq o \quad \text{tq.} \quad \mathrm{Re}\left\{(1- isq)\ \tilde{k}(s)\right\} \leq o \qquad \forall s \neq o$$

Or, $k(t) = (c,e^{At}b)$ implique $\tilde{k}(s) = -\ (c,(isI + A)^{-1}b)$

Explicitement : $\tilde{k}(s) = -(c_1, c_2, \ldots\ c_n)\begin{pmatrix} is+\mu_1 & & & \\ & is+\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & is+\mu_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j\ b_j}{is+\mu_j}$$

Nous obtenons une condition telle que:

$$\exists q \geq o \quad \text{tel que:} \quad \mathrm{Re}\left\{(1-isq)\ \left(-\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\ b_j}{is+\mu_j}\right)\right\} \leq o \qquad \forall s \neq o$$

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j b_j (isq-1)(\mu_j - is)}{(is+\mu_j)(\mu_j - is)}\right\} \leq o \qquad \forall s \neq o$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j b_j}{\mu_j^2 + s^2}(s^2 q - \mu_j) \qquad \forall s \neq o$$

Il nous suffit donc de déterminer un réel **q** positif tq. $\sum_{j=1}^{m} c_j b_j (s^2 q - \mu_j) \leq o.$
Si $\sum_{j=1}^{m} c_j b_j \neq o$,il existe un moyen assez simple pour déterminer si un tel réel q existe. Il suffit de minimiser la fonction rationnelle en s : $\dfrac{\sum_{j=1}^{m} c_j b_j \mu_j}{s^2 \sum_{j=1}^{m} c_j b_j}$

Si le minimum est positif ou nul,nous aurons stabilité puisque nous pouvons déterminer un réel q $\leq$ à cette fonction $\forall s \neq o$. Si le minimum est strictement négatif,la condition de fréquence ne sera pas réalisée.

§.3.- SYSTEME DE CONTRÔLE AVEC RETARDEMENT

Comme vu précédemment, les résultats obtenus par les équations intégrales peuvent être facilement appliqués au problème de stabilité des systèmes différentiels correspondant à un système de contrôle direct ou indirect.

Notre but présent est d'illustrer une application intéressante des équations intégrales distincte des applications précédentes. Comme HALANAY l'a fait remarquer, le problème de stabilité des systèmes de contrôle automatique avec retardement peut être réduit à l'étude d'une équation intégrale.

Pourquoi envisager ce genre de système? Dans beaucoup de cas, la durée de la transmission de l'action ne peut être négligée. C'est la raison pour laquelle les forces intervenant dans le système dépendent à chaque instant de l'état du système, non seulement au temps considéré, mais aussi aux temps antérieurs.

La forme générale d'un système de contrôle avec retardement est:

$$\mathring{x}(t) = f(t,x(t),x(t-h)) \qquad (1)$$

$$\text{avec } x(o) = \varphi(t) \text{ sur } [-h,o]$$

Nous remarquons que contrairement aux autres systèmes rencontrés jusqu'ici, la condition initiale n'est plus donnée en un seul point particulier mais sur un intervalle. Cet intervalle est d'ailleurs bien précis, il correspond à la période de retard accumulée par le système.

Considérons un tel système avec retardement sous forme matricielle:

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + c\,\varphi(\sigma) \\ \sigma = (d,x) \end{cases}$$

où - x est une fonction vectorielle de R^+ dans R^n

- A et B sont deux matrices carrées constantes de dimension $n \times n$
- $\varphi(\sigma)$ est une fonction scalaire
- c,d sont deux vecteurs constants de R^n

Posons plusieurs hypothèses en vue de l'étude de ce problème:

1) Nous supposons que toutes les quantités intervenant dans ce problème sont réelles.
2) h est évidemment choisi positif puisqu'il représente le retard dont le système est entaché.
3) Si de plus, nous supposons que $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue pour tout σ définie dans R, alors nous satisfaisons toutes les hypothèses du théorème d'existence d'une solution locale pour le système (1) C'est-à-dire plus précisément:

$\forall\, t° \in R$ et $x°(t) \in C([t°-h, t°]; R^n)$, il existe au moins une solution $x = x(t)$ du système (1) définie sur $[t°-h, T]: T > t°$, tel que la condition initiale $x(t) = x°(t), t \in [t°-h, t°]$ soit vérifiée.
(voir démonstration Annexe D)

3.1.- Détermination de la solution du système de contrôle avec retardement

Soit le système: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(t)$ (2)

Pour tout système de ce type, nous pouvons appliquer la méthode de variation des constantes, en vue d'en obtenir la solution.
Nous l'appliquons pour obtenir:

$$x(t) = X(t-t°)x(t°) + \int_{t°-h}^{t°} X(t-u-h)Bx(u)du + \int_{t°}^{t} X(t-u)f(u)du$$

où $X(t)$ est déterminée par:
$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-h) \\ X(o) = I \\ X(t) = o \quad \forall t < o \end{cases}$$

Etudions la validité de ce résultat établi par HALANAY:

-Considérons le système homogène associé au système (2) soit:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) \qquad (3)$$

-Considérons également le système adjoint du système (3), soit:

$$\dot{y}(t) = -y(t)A - y(t+h)B \qquad (4)$$

où y est un vecteur ligne.

-Soient $x(t)$ et $y(t)$ les solutions arbitraires respectives de (3) et (4).

1°-Notons (y,x) la fonction suivante:

$$(y,x) = y(t)x(t) + \int_{0}^{h} y(t+u)Bx(t+u-h)du$$

Posons $v = t + u$

$$(y,x) = y(t)x(t) + \int_{t}^{t+h} y(v)Bx(v-h)dv$$

Calculons la dérivée temporelle de cette fonction:

$$\frac{d}{dt}(y,x) = \dot{y}(t)x(t) + y(t)\dot{x}(t) + y(t+h)Bx(t) - y(t)Bx(t-h)$$

$$= \Big[y(t)x(t)\Big] + y(u)Bx(u-h)\Big]_{u=t}^{u=t+h}$$

en tenant compte des systèmes (2) et (3) nous obtenons:

$$\frac{d}{dt}(y,x) = o \quad \Longrightarrow \quad (y,x) \text{ est constante.}$$

2°-Retournons au système non homogène (2).

Soit $Y(u,t)$ une matrice qui vérifie le système (4) pour $u < t$ et telle que:

$Y(t,t) = I$

$Y(u,t) = o$ pour $u > t$

Cette matrice est facilement construite par une méthode progressive.

Au premier pas:

pour $t-h < u < t$ nous avons: $\frac{\partial}{\partial u} Y(u,t) = - Y(u,t)A$

$Y(t,t) = I$

puisque pour u tel que $u > t-h$ nous avons $u+h > t$ et $Y(u+h,t) = o$

donc, dans l'intervalle $[t - h,t]$ la matrice $Y(u,t)$ est déterminée par un système d'équations ordinaires.

Au deuxième pas:

pour $t-2h < u < t-h$ nous avons: $\frac{\partial}{\partial u}Y(u,t) = - Y(u,t)A - U(u+h)B$

où - $Y(t-h,t) = U(t-h)$

- Nous avons appelé $U(u)$ la matrice construite au pas précédent.

Le processus continue de façon identique et conduit à la matrice $Y(u,t)$ désirée.

3°-Multiplions le système non homogène par la matrice $Y(u,t)$ construite ci-dessus et intégrons par rapport à u depuis σ jusque t. Nous obtenons:

$$\int_\sigma^t Y(u,t)\dot{x}(u)du = \int_\sigma^t Y(u,t)\left[Ax(u) + Bx(u-h) + f(u)\right] du$$

$$Y(t,t)x(t) - Y(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t \frac{\partial}{\partial u} Y(u,t)x(u)du = \int_\sigma^t Y(u,t)Ax(u)du$$

$$+ \int_\sigma^t Y(u,t)Bx(u-h)du + \int_\sigma^t Y(u,t)f(u)du$$

-Intégrons par parties et posons: $v = Y(u,t)$ $\qquad dv = \frac{\partial}{\partial u} Y(u,t)du$

$du = \dot{x}(u)du \qquad u = x(u)$

-Tenons compte du fait $Y(u,t)$ vérifie l'équation (4) c'est-à-dire:

$$\frac{\delta}{\delta u} Y(u,t) = - Y(u,t)A - Y(u+h,t)B$$

-De plus, $Y(t,t) = I$, ceci nous permet d'isoler $x(t)$ dans le mebre de gauche de l'égalité pour obtenir:

$$\begin{aligned}
x(t) &= Y(\sigma,t)x(\sigma) - \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)Ax(u)du - \int_{\sigma}^{t} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)Ax(u)du \\
&\quad + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)Bx(u-h)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)f(u)du \\
&= Y(\sigma,t)x(\sigma) - \int_{\sigma}^{t} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)f(u)du \\
&\quad + \int_{\sigma-h}^{t-h} Y(u+h,t)Bx(u)du \\
&= Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-h}^{\sigma} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t-h} Y(u+h,t)Bx(u)du \\
&\quad - \int_{\sigma}^{t} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)f(u)du \\
&= Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-h}^{\sigma} Y(u+h,t)Bx(u)du - \int_{t-h}^{t} Y(u+h,t)Bx(u)du \\
&\quad - \int_{t}^{\sigma} Y(u+h,t)Bx(u)du - \int_{\sigma}^{t} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)f(u)du
\end{aligned}$$

-Or, $Y(u+h,t) = o$ pour $t-h < u \leq t$

Nous obtenons finalement:

$$\boxed{x(t) = Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-h}^{\sigma} Y(u+h,t)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} Y(u,t)f(u)du}$$

à partir de cette expression, il est évident que si $X(t,\sigma)$ est une solution du système (3) qui vérifie les conditions:

$$X(\sigma,\sigma) = I \; ; \quad X(t,\sigma) = o \qquad \forall t > \sigma$$

alors $X(t,\sigma) = Y(\sigma,t)$

nous obtenons alors:

$$x(t) = X(t,\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma-h}^{\sigma} X(t,u+h)Bx(u)du + \int_{\sigma}^{t} X(t,u)f(u)du$$

Si en particulier, nous prenons $\sigma = t^\circ$ où t° est la condition initiale, nous obtenons bien le résultat espéré soit:

$$\boxed{x(t) = X(t,t^\circ)x(t^\circ) + \int_{t^\circ-h}^{t^\circ} X(t,u+h)Bx(u)du + \int_{t^\circ}^{t} X(t,u)f(u)du}$$

3.2.-Recherche de l'équation intégrale associée au système de contrôle avec retardement.

Nous considérons le système (1) soit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + c\varphi(\sigma) \\ \sigma = (d,x) \end{cases}$$

Nous allons reprendre la solution explicite $x(t)$ pour la condition initiale $t^\circ = o$.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (d,x(t)) \\ &= (d,X(t)x^\circ) + (d,\int_{-h}^{o} X(t-u-h)Bx(u)du) + (d,\int_{o}^{t} X(t-u)c\varphi(\sigma(u))du) \end{aligned}$$

c'est-à-dire: $\sigma(t)$ satisfait une équation intégrale de la forme:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_{o}^{t} k(t-u)\varphi(\sigma(u))du$$

$$\text{où} \quad h(t) = (d,X(t)x^\circ + \int_{-h}^{o} X(t-u-h)Bx(u)du)$$

$$k(t) = (d,X(t)c)$$

Remarque: L'équation caractéristique associée au système homogène:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h)$$

est: $\text{dét.}(A + Be^{-\lambda h} - \lambda I) = o$

Nous pouvons reprendre un résultat établi par HALES. Il a démontré le fait que si chaque racine de l'équation caractéristique est telle que $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha$ alors, il existe une constante $K > o$ telle que:
$\alpha > o$

$$\|X(t)\| \leqslant Ke^{-\alpha t} \qquad t \geqslant o$$

c'est-à-dire:

$X(t)$ a une décroissance exponentielle à l'infini si toutes les racines caractéristiques se trouvent dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha < o$.

En conséquence, si nous supposons qu'il existe un réel $\alpha > o$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\alpha$ pour toute racine caractéristique, alors les fonctions h et k associées à l'équation intégrale ont une décroissance exponentielle à l'infini.

3.3.-Conditions suffisantes de stabilité de la solution d'un système de contrôle avec retardement.

Tout d'abord cherchons la transformée de FOURIER de la matrice fondamentale X(t)

$$\tilde{X}(s) = \int_o^{\infty} X(t)e^{ist}dt$$

Nous avons l'équation: $\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-h)$. Dés lors,

$$\int_o^{\infty} \dot{X}(t)e^{ist}dt = \int_o^{\infty} AX(t)e^{ist}dt + \int_o^{\infty} BX(t-h)e^{ist}dt$$

Intégrons par parties le membre de gauche et posons $u = t - h$ dans le second terme du membre de droite. Nous obtenons:

$$\lim_{t \to +\infty}(X(t)e^{ist}) - X(o)e^{iso} - is\tilde{X}(s) = A\tilde{X}(s) + B\tilde{X}(s)e^{ish}$$

Ceci implique:

$$\tilde{X}(s) = -\left[isI + A + Be^{ish}\right]^{-1}$$

L'inverse de la matrice $\left[isI + A + Be^{ish}\right]$ existe pour tout réel s. En effet, $\lambda = -is$ ne peut être une racine de l'équation caractéristique car cela voudrait dire qu'il existe des racines caractéristiques purement imaginaires. Dés lors, nous n'aurions plus $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\alpha < o$ et ceci doit être réalisé pour tout λ, puisque c'est une des conditions requises pour avoir la stabilité de la solution du système.

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes de stabilité pour la solution de ce système.

THEOREME 3

Supposons que les conditions suivantes soient réalisées pour le système:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + c\varphi(\sigma) \\ \sigma(t) = (d,x(t)) \end{cases}$$

1.-Il existe un $\alpha > o$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\alpha (< o)$ pour toute racine λ de l'équation caractéristique $|A + Be^{-\lambda h} - \lambda I| = o$

2.-La fonction $\varphi(\sigma)$ est continue et bornée de R dans R et telle que: $\sigma\varphi(\sigma) > o$; $\forall \sigma \neq o$.

3.–Il existe un réel $q \geqslant o$ tel que la condition de fréquence suivante soit réalisée pour tout $s \in R$:

$$\mathrm{Re}\left\{(isq-1)(d,(A+e^{ish}B+isI)^{-1}c)\right\} \leqslant o$$

Alors, n'importe quelle solution $x(t)$ du système est telle que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = o$$

Démonstration:

Nous avons vu que $\sigma = \sigma(t)$ satisfait l'équation intégrale suivante:

$$(t) = h(t) + \int_o^t k(t-u)\varphi(\sigma(u))du$$

avec $$h(t) = (d, X(t)x^{\circ} + \int_{-h}^{o} X(t-u-h)Bx(u)du)$$

$$k(t) = (d, X(t)c)$$

Cette équation satisfait toutes les hypothèses du théorème 2 (cfr.§1)

1°) h et h' $\in L^1(R^+;R)$

$$- |h(t)| = |(d, X(t)x^{\circ} + \int_{-h}^{o} X(t-u-h)Bx(u)du)|$$

$$\leqslant \|d\| \left[\|X(t)\| \ \|x^{\circ}\| + \int_{-h}^{o} \|X(t-u-h)\| \ \|B\| \ \|x(u)\| \ du\right]$$

Nous utilisons le résultat établi par HALES: $\|X(t)\| \leqslant Ke^{-\alpha t}$ avec $K, \alpha > o$

$$\leqslant \|d\| \ K\left[e^{-\alpha t} \ \|x^{\circ}\| + e^{-\alpha(t-h)} \ \|B\| \int_{-h}^{o} e^{\alpha u} \ \|x(u)\| \ du\right]$$

puisque d'une part $\alpha > o$ et d'autre part u est défini dans une région négative, la fonction mesurable h est bornée par une fonction intégrable. Et par application directe d'un critère d'intégrabilité, on conclut: h est elle-même intégrable.

$$- |h'(t)| = |(d, \dot{X}(t)x^{\circ} + X(t-h)Bx^{\circ} + \int_{-h}^{o} \dot{X}(t-u-h)Bx(u)du)|$$

$$= |(d, [AX(t) + BX(t-h) + c\varphi(\sigma(t))]x^{\circ} + X(t-h)Bx^{\circ}$$

$$+ \int_{-h}^{o} [AX(t-u-h) + BX(t-u-2h) + c\varphi(\sigma(t-u-h))]Bx(u)du)|$$

La fonction h' peut donc elle-aussi être majorée par une fonction intégrable sur R^+. Elle est donc, elle-même, intégrable sur R^+.

2°) k et k' $\in L^1(R^+;R)$

- $k(t) = (d, X(t)c)$

$|k(t)| \leq \|d\| \, \|c\| \, Ke^{-\alpha t}$

Ceci, si nous appliquons le résultat établi par HALES.
Puisque $\alpha > 0$, la fonction k est une fonction majorée par une fonction intégrable sur R^+.
De nouveau, par un critère général d'intégrabilité , la fonction mesurable k est, elle-même, intégrable sur R^+.

- $k'(t) = (d\dot{X}(t)c)$

$$= (d, [AX(t) + BX(t-h) + c\varphi(\sigma(t))] \, c)$$

De nouveau, par le résultat de HALES et puisque, par hypothèse, la fonction φ est bornée, k' peut être majorée par une fonction intégrable sur R^+. Elle est donc également intégrable sur R^+.

3°) La fonction $\varphi(\sigma)$ est continue et bornée de R dans R et $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$

Cette hypothèse est reprise en tant que telle dans l'hypothèse 2 de ce théorème.

4°) Il existe un réel $q \geq 0$ tel que $Re\{(1-isq)\tilde{k}(s)\} \leq 0$ pour tout $s \in R$.

Calculons $\tilde{k}(s)$ avec $k(t) = (d, X(t)c)$

$$\tilde{k}(s) = (d, \tilde{X}(s)c)$$

$$= -(d, [isI + A + Be^{ish}]^{-1}c)$$

Dés lors cette condition s'écrit:

un réel $q \geq 0$ tel que $Re\{(isq-1)(d, [isI + A + Be^{ish}]^{-1}c)\} \leq 0$
pour tout réel s.

Soit exactement l'hypothèse 3 de ce théorème.

Dés lors, nous pouvons appliquer le théorème 2 du §1. Nous savons donc que chaque solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale est située dans l'espace $C_0(R^+;R)$ ou encore $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$.

De plus, en accord avec la forme explicite de la solution x(t) du système (1):

$$x(t) = X(t)x^\circ + \int_{-h}^{0} X(t-u-h)Bx(u)du + \int_{0}^{t} X(t-u)c\,\varphi(\sigma(u))du$$

nous avons un résultat supplémentaire: $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Ceci sans restreindre en aucune manière le domaine où l'on choisit la fonction initiale $x^\circ(t)$ avec t pris dans $[-h,0]$.

Justification:

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|x^\circ\| + Ke^{-\alpha(t-h)}\|B\| \int_{-h}^{0} \|x\|\, du + Ke^{-\alpha t}\int_0^t e^{u} c\varphi(\sigma(u))du$$

$$\leq e^{-\alpha t}\left[K\|x^\circ\| + Ke^{\alpha h}\|B\|\, h\, \|x\| + K\tilde{\varphi}(\sigma(\alpha))\right]$$

- $\tilde{\varphi}(\sigma(\alpha))$ est bornée puisque $\varphi(\sigma)$ est une fonction bornée par hypothèse.

- **la variable t intervient** uniquement dans un terme qui est une exponentielle décroissante. Ceci découlant du résultat de HALES dans lequel α est supposée strictement positive.

Si t tend vers l'infini, x(t) tend ve**rs zéro** puisque tous les termes intervenant dans la majoration de $\|x(t)\|$ sont constants sauf $e^{-\alpha t}$ qui lui, tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

CONCLUSION:

La stabilité absolue du système de contrôle avec retardement est assurée par:

- la condition:

  Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $Re\,\lambda \leq -\alpha$ pour toute racine λ de l'équation caractéristique associée au système

- la condition de fréquence:

  Il existe un réel $q \geq 0$ tel que

$$Re\{(isq - 1)(d, [A + e^{ish}B + isI]^{-1}c)\} \leq 0 \text{ pour tout réel } s.$$

* * * * * * * *

CHAPITRE II
CONTROLE DANS LES EQUATIONS INTEGRALES A NOYAU NON INTEGRABLE

§.1.-EQUATION INTEGRALE A NOYAU NON INTEGRABLE.

Nous allons étudier le comportement de la solution d'une équation intégrale à noyau non intégrable.
Ceci revient à discuter la solution de:

$$\begin{cases} \sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds & \forall t \in R^+ \\ k(t) = k_o(t) - \rho & \rho > o \\ k_o \in L^1(R^+;R) & \end{cases}$$

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes de stabilité pour la solution de cette équation intégrale.

THEOREME 4

Considérons l'équation intégrale $\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s)ds$

avec t dans R^+

avec $k(t) = k_o(t) - \rho \qquad \rho > o$

et $k_o \in L^1(R^+;R)$

sous les hypothèses suivantes:

1.- $h', h'' \in L^1(R^+;R)$

2.- k est de la forme ci-dessous avec $\rho > o$ et $k_o, k'_o \in L^1(R^+;R)$

3.- $\varphi(\sigma) : R \longrightarrow R$ est continue et telle que $\sigma\varphi(\sigma) > o$ pour $\sigma \neq o$

4.- $\exists\, q \geqslant o$ tq. $Re\{(1-isq)G(s)\} \leq o$ pour $s \neq 0$

où $G(s) = \tilde{k}_o(s) + \rho(is)^{-1}$ pour $s \neq o$

Alors il existe au moins une solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale à noyau non intégrable située dans $C_o(R^+;R)$.
De plus, chaque solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale située dans $C_c(R^+;R)$ est située dans $C_o(R^+;R)$.

ETAPE 1. Prouvons que les hypothèses 1 et 4 entraînent que toute solution $\sigma(t)$ continue sur R^+, de l'équation intégrale se situe dans l'espace $C_o(R^+;R)$.
C'est-à-dire: $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = o$

1°-Considérons les fonctions auxiliaires définies comme suit:

$$\varphi_t(\tau) = \begin{cases} \varphi(\sigma(\tau)) & o \leq \tau \leq t \\ o & \tau > t \end{cases}$$

et

$$\lambda_t(\tau) = \int_o^{\tau} [k_o(\tau - u) + qk_o'(\tau - u)\varphi_t(u)du + qk(o)]\varphi_t(\tau)$$

chacune définie sur R^+ ; $\forall t > o$.

2°-Considérons l'équation obtenue par différentiation de l'équation intégrale (presque partout sur R+) et utilisons la définition de $\lambda_t(\tau)$

$$\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s)ds \qquad \forall t > o$$

$$\sigma'(t) = h'(t) + k(o)\varphi(\sigma(t) + \int_o^t k'(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$$

a) si $o \leq \tau \leq t$

$$-. \int_o^{\tau} k_o(\tau - u)\ \varphi_t(u)du = \int_o^{\tau} k_o(\tau - u)\varphi(\sigma(u))du$$

$$= \sigma(\tau) - h(\tau) + \rho\int_o^{\tau}\varphi(\sigma(u))du$$

puisque $k(t) = k_o(t) - \rho$

et $k'(t) = k_o'(t)$

$$-. \int_o^{\tau} k'(\tau - u)\varphi(\sigma(u))du = \int_o^{\tau} k_o'(\tau - u)\varphi(\sigma(u))du$$

$$= \sigma'(\tau) - h'(\tau) - k(o)\varphi(\sigma(\tau))$$

$$\lambda_t(\tau) = \sigma(\tau) - h(\tau) + \rho\int_o^{\tau}\varphi(\sigma(u))du + q[\sigma'(\tau) - h'(\tau) - k(o)\varphi(\sigma(\tau))] + qk(o)\varphi_t(\tau)$$

Dés lors, $\boxed{\lambda_t(\tau) = \sigma(\tau) + q\sigma'(\tau) - [h(\tau) + qh'(\tau)] + \rho\int_o^{\tau}\varphi(\sigma(u))du}$

b) si $t < \tau$

Dans ce cas, $\varphi_t(\tau)$ est identiquement nulle.

$$\boxed{\lambda_t(\tau) = \int_0^t [\, k_o(\tau - u) + qk_o'(\tau - u)]\, \varphi(\sigma(u))du}$$

3°- $\lambda_t(\tau) \in L^1 \cap L^2$ sur R^+

La fonction λ_t est située dans l'espace $L^1(R^+;R)$ puisque par définition, elle s'exprime comme la somme de fonctions intégrables.
De plus, elle est située dans $L^2(R^+;R)$ puisque φ_t est située dans cet espace tandis que k_o et k_o' sont situées dans $L^1(R^+;R)$. Ceci parce que le produit de convolution d'une fonction de L^1 par une fonction de L^p, $p \geqslant 1$, est situé dans L^p.

4°- Notons $\tilde{\varphi}_t(s)$ et $\tilde{\lambda}_t(s)$ les transformées de FOURIER de $\varphi_t(\tau)$ et $\lambda_t(\tau)$.

$$\tilde{\lambda}_t(s) = \int_0^\infty \lambda_t(\tau)\, e^{is\tau}\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \Big[\int_0^\tau [\, k_o(\tau - u) + qk_o'(\tau - u)]\varphi_t(u)du + qk(o)\varphi_t(\tau)\Big]\, e^{is\tau} d\tau$$

$$= \int_0^\infty \Big[\int_0^\tau k_o(\tau - u)\varphi_t(u)du\Big]\, e^{is\tau} d\tau + q\int_0^\infty \Big[\int_0^\tau k_o'(\tau - u)\varphi_t(u)du\Big]\, e^{is\tau} d\tau$$

$$+\; qk(o)\int_0^\infty \varphi_t(\tau)e^{is\tau}d\tau$$

Calculons explicitement les deux premières intégrales du membre de droite de cette équation.

$$\int_0^\infty \Big[\int_0^\tau k_o(\tau - u)\varphi_t(u)du\Big]\, e^{is\tau} d\tau = \int_0^\infty \Big[\int_u^\infty k_o(\tau - u)\varphi_t(u)e^{is\tau} d\tau\Big] du$$

posons $\tau - u = v$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u) \Big[\int_0^\infty k_o(v)e^{is(v+u)} dv\Big]\, du$$

$$= \tilde{\varphi}_t(s)\tilde{k}_o(s)$$

$$\therefore \int_0^\infty \left[\int_0^\tau k_0'(\tau-u)\varphi_t(u)du\right] e^{is\tau}d\tau = \int_0^\infty du \left[\int_u^\infty k_0'(\tau-u)\varphi_t(u)e^{is\tau}d\tau\right]$$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)du \left[\int_u^\infty k_0'(\tau-u)e^{is\tau}d\tau\right]$$

posons $\tau - u = v$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)e^{isu}du \left[\int_0^\infty k_0'(v)e^{isv}dv\right]$$

$$= \tilde{\varphi}_t(s)\left[-k_o(o) - is\tilde{k}_o(s)\right]$$

Nous obtenons:

$$\tilde{\lambda}_t(s) = \tilde{\varphi}_t(s)\tilde{k}_o(s) + q\tilde{\varphi}_t(s)\left[-k_o(o) - is\tilde{k}_o(s)\right] + qk(o)\tilde{\varphi}_t(s)$$

et $k(o) = k_o(o) - \varrho$ puisque $k(t) = k_o(t) - \varrho$

$$= \tilde{\varphi}_t(s)\tilde{k}_o(s) + q\tilde{\varphi}_t(s)\left[-k_o(o) - is\tilde{k}_o(s)\right] + q(k_o(o)-\varrho)\tilde{\varphi}_t(s)$$

$$\boxed{\tilde{\lambda}_t(s) = \left[(1 - isq)\tilde{k}_o(s) - q\varrho\right]\tilde{\varphi}_t(s)}$$

5°- <u>Introduisons une rouvelle fonction $\varrho(t)$ judicieusement choisie comme suit:</u>

$$\varrho(t) = \int_0^t \lambda_t(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau = \int_0^\infty \lambda_t(\tau)\varphi_t(\tau)d\tau$$

Nous pouvons appliquer la formule de PARCEVAL

$$\varrho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\lambda}_t(s)\,\overline{\tilde{\varphi}_t(s)}ds$$

Nous pouvons transformer ce résultat en tenant compte:

- du fait que $\varrho(t)$ est une fonction à valeur réelle
- de l'expression explicite de $\tilde{\lambda}_t(s)$ en fonction de $\tilde{k}_o(s)$ et $\tilde{\varphi}_t(s)$

Nous obtenons:

$$\varrho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[(1-isq)\tilde{k}_o(s) - q\varrho\right]\tilde{\varphi}_t(s)\overline{\tilde{\varphi}_t(s)}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[(1-isq)\tilde{k}_o(s) - q\varrho\right]\left|\tilde{\varphi}_t(s)\right|^2 ds$$

Or, $\mathrm{Re}\left[(1-isq)\tilde{k}_o(s) - q\varrho\right] = \mathrm{Re}\left[(1 - isq)G(s)\right]$
puisque $(1-isq)G(s) = \tilde{k}_o(s)(1-isq) + \frac{\varrho}{is} - \varrho q$

Ceci implique:

$$\boxed{\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[(1-isq)G(s)\right]\left|\tilde{\varphi}_t(s)\right|^2 ds}$$

De plus,par l'hypothèse 4 nous savons: Re $[(1 - isq)\ G(s)] \leq o$

Dés lors, $\rho(t) \leq o\ ;\ \forall t > o$

Considérons: $\begin{cases} \rho(t) \leq o & \forall t > o \\ \rho(t) = \int_0^\infty \lambda_t(\tau)\varphi_t(\tau)d\tau \end{cases}$

$$\rho(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau + q\int_0^t \sigma'(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau - \int_0^t [h(\tau)+qh'(\tau)]\varphi(\sigma(\tau))d\tau$$
$$+\rho\int_0^t \left\{\int_0^\tau \varphi(\sigma(u))du\right\}\varphi(\sigma(\tau))d\tau \leq o \qquad t \in R^+$$

Notons: $\phi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma(\tau))d\tau$

et

$$F(\sigma) = \int_0^\sigma \varphi(u)du \qquad \sigma \in R$$

Transformons l'inégalité ci-dessus:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma'(\tau)d\tau = F(\sigma(t)) - F(\sigma(o))$$

$$\int_0^t\left\{\int_0^\tau \varphi(\sigma(u))du\right\}\varphi(\sigma(\tau))d\tau = \int_0^t \phi(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau$$
$$= \int_0^t \phi(\tau)d(\phi(\tau))$$
$$= \frac{1}{2}\phi^2(t)$$

$$\boxed{\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau + qF(\sigma(t)) + \frac{1}{2}\rho\phi^2(t) - \int_0^t [h(\tau)+qh'(\tau)]\varphi(\sigma(\tau))d\tau - qF(\sigma(s)) \leq o}$$

En intégrant par parties,nous obtenons:

$$\int_0^t [h(\tau)+qh'(\tau)]\varphi(\sigma(\tau))d\tau = [h(t)+qh'(t)]\phi(t) - \int_0^t [h'(\tau)+qh''(\tau)]\phi(\tau)d\tau$$

Si K est un nombre positif tel que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{|h(t)| + q|h'(t)|\right\} + \int_0^\infty \left\{|h'(\tau)| + q|h''(\tau)|\right\}d\tau \leq K$$

Ce nombre K existe puisque les valeurs majorées sont intégrables par hypothèse.

$$\left|\int_0^t [h(\tau)+qh'(\tau)]\varphi(\sigma(\tau))d\tau\right| \leq K \sup_{\tau\in[0,t]} |\phi(\tau)|$$

Dés lors,

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau + qF(\sigma(t)) - qF(\sigma(0)) + \frac{1}{2}\rho\phi^2(t) - K \sup_{\tau\in[0,t]} |\phi(\tau)| \leq 0$$

mais, -. $\sigma(0) = h(0)$

-. $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$ $\Rightarrow \int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau > 0$

$\Rightarrow qF(\sigma(t)) > 0$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \frac{1}{2}\rho\phi^2(t) - qF(h(0)) - K \sup_{\tau\in[0,t]} |\phi(\tau)| \leq 0$$

6°-Etablissons une majoration de $\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau$:

-.Soit T(t) le plus grand nombre réel tel que

$$0 \leq T(t) \leq t \qquad |\phi(T(t))| = \sup_{\tau\in[0,t]} |\phi(\tau)|$$

Nous pouvons remplacer t par T(t) dans la dernière inégalité du 5° et nous obtenons:

$$\phi^2(T(t)) - 2K\rho^{-1}\phi(T(t)) - 2q\rho^{-1}F(h(0)) \leq 0$$

Cherchons les racines associées à cette inégalité:

$$\phi(T(t)) = K\rho^{-1} \pm [K^2\rho^{-2} + 2q\rho^{-1}F(h(0))]^{1/2}$$

Nous pouvons donc écrire:

$$\boxed{\phi(t) \leq \alpha(F(h(0)));\ t \in R^+}$$

en posant $\alpha(u) = K\rho^{-1} + [K^2\rho^{-2} + 2q\rho^{-1}u]^{1/2}$

et pour que $\phi(T(t)) \geq \phi(t)$ pour $0 \leq T(t) \leq t$

Dés lors $\phi(t)$ est bornée sur R.

-.Nous déduisons de ceci une majoration de $\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau$

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau \leq qF(h(0)) + K \sup_{\tau\in[0,t]} |\phi(\tau)| \leq 0$$

puisque $\phi(t) \leq \alpha(F(h(o)))$; $\forall t \in R^+$; ceci est vérifié

pour $\sup_{\tau \in [o,t]} |\phi(\tau)|$

$$\boxed{\int_o^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau \leq qF(h(o)) + K\alpha(F(h(o)))}$$

7°- <u>Nous allons appliquer le lemme de BARBǍLAT à la fonction $\varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)$</u>

<u>Lemme de BARBǍLAT</u>:

> Soit une fonction $f \geqslant o$.
> intégrable sur R^+
> et uniformément continue
> alors $f(t) \longrightarrow o$ quand t tend vers $l'\infty$

Considérons $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ comme fonction $f(t)$

a.- $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ est intégrable sur R^+ car $\int_o^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma(\tau)d\tau$ est bornée $\forall t \in R^+$

b.- $\varphi(\sigma(t))\sigma(t) \geqslant o$ par hypothèse 3

c.- $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ est uniformément continue.

-. <u>σ est bornée sur R^+</u>

$$\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$$

En intégrant par parties

$$\sigma(t) = h(t) + k(o)\phi(t) - k(t)\phi(o) + \int_o k_\delta(t-s)\phi(s)ds$$

Soit $t \geqslant o$

$$|\sigma(t)| \leq M + \left[|k(o)| + \int_o^\infty |k_o'(t)|\, dt\right] d(F(h(o))) = \beta(F(h(o)))$$

puisque $|\phi(t)| < \alpha(F(h(o)))$ $\forall t \geqslant o$

et $M > o$ tq. $|h(t)| \leq M$ sur R^+

Dés lors, $\sigma(t)$ est bornée sur R^+

-. <u>σ' est bornée sur R^+</u>

$$\sigma'(t) = h'(t) + k(o)\varphi(\sigma(t)) + \int_o^t k_o'(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$$

Or $\sigma(t)$ est bornée pour tout t de R^+.
Ceci implique que $\varphi(\sigma(t)$ est bornée puisque φ est continue. Dés lors, σ' est bornée sur R^+.

Puisque σ et σ' sont bornées sur R^+, σ est une fonction uniformément continue sur R^+.

Nous obtenons la même conclusion pour la fonction $\varphi(\sigma)\sigma$ puisque σ est bornée sur R^+ et que φ est continue.
En appliquant le lemme de BARBALAT à la fonction $\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ qui satisfait ses hypothèses nous obtenons:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(\sigma(t))\sigma(t) = 0$$

Or par l'hypothèse 3 nous savons que
$$\varphi(\sigma)\sigma \begin{cases} > 0 & \forall \sigma \neq 0 \\ = 0 & \text{si } \sigma = 0 \end{cases}$$

Dés lors, nous avons bien le résultat annoncé $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$

ETAPE 2.

> Si h et k sont deux fonctions continues sur R^+ et si $\varphi(\sigma)$ satisfait la condition de LIPSCHITZ:
>
> $$|\varphi(\sigma) - \varphi(\xi)| \leq L|\sigma - \xi| \qquad \sigma, \xi \in R \; ; \quad L \geq 0$$
>
> Alors, l'équation intégrale de convolution non linéaire à noyau non intégrable:
>
> $$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$$
>
> admet une solution continue unique sur R^+

Nous allons construire la solution unique $\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$ pas à pas par analogie avec le théorème d'existence d'une solution locale pour un système d'équations différentielles ordinaires (cfr.HALES ou ROUCHE et MAWHIN)

Nous considérons un opérateur continu A défini de l'espace $C_c(R^+;R)$ dans lui-même. A est défini comme suit: $Af(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(f(s))ds$

Nous allons le construire pas à pas et montrer que cette application est une application strictement contractante d'un espace métrique complet non vide dans lui-même. Par le théorème de BANACH, elle admet donc un point fixe.

Théorème de BANACH:

> Toute application contractante d'un espace métrique complet non vide M dans M admet un point fixe unique dans M.

(cfr. SMART)

Nous définissons tout d'abord l'opérateur A de l'espace $C_c([0,T];R)$ dans lui-même. T choisi de façon judicieuse donne lieu à une contraction stricte pour A. Nous pouvons alors prolonger la solution sur $[T,2T]$; $[2T,3T]$ etc...

De proche en proche, nous pouvons ainsi définir l'opérateur continu A de $C_c(R^+;R)$ dans lui-même qui soit une contraction stricte et qui donc, par le théorème de BANACH, admet un seul point fixe défini sur R^+. C'est-à-dire tel que:

$$A\sigma(t) = \sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s)ds \quad ; \quad \forall t \in R^+$$

ETAPE 3. Soit $\varphi(\sigma)$ une application continue de R dans R telle que $\sigma\varphi(\sigma) > o$; $\forall \sigma \neq o$.
Si nous fixons $T > o$, il existe une suite $\{\varphi_n(\sigma)\}_n$ constituée de fonctions de mêmes propriétés que $\varphi(\sigma)$ telle que: $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ uniformément sur $[-T,T]$ et de plus, $\varphi_n(t)$ satisfait la condition de LIPSCHITZ sur R.

Nous allons tout d'abord construire une suite de fonctions $\varphi_n(\sigma)$.
Ensuite, nous vérifierons si elle satisfait les propriétés requises.

CONSTRUCTION:

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Divisons l'intervalle $[-T,T]$ en 2n sous-intervalles égaux, par les points $\sigma_k = kTn^{-1}$

où $|k| = 0,1,2,\ldots,n$.

$n = o \qquad \sigma_o = o$

$n = 1 \qquad \sigma_{-1} = -T \;;\; \sigma_o = o \;;\; \sigma_1 = T$

$n = 2 \qquad \sigma_{-2} = -T \;;\; \sigma_{-1} = -\frac{T}{2} \;;\; \sigma_o = o \;;\; \sigma_1 = \frac{T}{2} \;;\; \sigma_2 = T$

ainsi de suite...

$\varphi_n(\sigma)$ est une fonction continue dont le graphe sur $[-T,T]$ est une ligne brisée dont les différents sauts sont situés en $(\sigma k, \varphi(\sigma k))$ et telle que:

$$\varphi_n(\sigma) = \varphi(-T) \quad \forall \sigma < -T \;;\quad \varphi_n(\sigma) = \varphi(T) \quad \forall \sigma > T$$

Nous avons donc: $\varphi : [-T,T] \rightarrow R$

et $\varphi_n : [-T,T] \longrightarrow R$
$\sigma k \rightsquigarrow \varphi_n(\sigma k)$ où $k = \frac{kT}{n}$ avec $k = 0,1,2,\ldots,n$.
est une fonction continue linéaire par morceaux.

La suite $\{\varphi_n(\sigma)\}_n$ vérifie-t-elle les hypothèses requises ?

1°- Montrons que $\varphi_n \xrightarrow{c.u} \varphi$ sur $[-T,T]$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Par hypothèse, φ est continue de R dans R, elle est donc uniformément continue sur $[-T,T]$ donc:

$$\forall \varepsilon > o \;;\; \exists \eta > o \quad \text{tq.} \forall \sigma,\sigma' \in [-T,T] \quad \text{tq.} \; |\sigma - \sigma'| < \eta \Rightarrow |\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma')| < \varepsilon$$

Prenons $\sigma \in [\sigma k, \sigma k + 1]$ avec $\sigma_{k+1} - \sigma k = \frac{T}{n}$

Nous obtenons:

$$\varphi_n(\sigma) = \Theta\varphi(\sigma k) + (1-\Theta)\varphi(\sigma_{k+1}) \qquad \text{où} \quad o \leq \Theta \leq 1$$

$$|\varphi(\sigma) - \varphi_n(\sigma)| = |\Theta[\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma k)] + (1-\Theta)[\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma_{k+1})]|$$

$$\leq \Theta|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma k)| + (1-\Theta)|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma_{k+1})|$$

$1-\theta$, θ sont inférieurs à 1

$$|\varphi(\sigma)-\varphi_n(\sigma)| \leq |\varphi(\sigma)-\varphi(\sigma_k)| + |\varphi(\sigma)-\varphi(\sigma_{k+1})|$$

Or, pour n assez grand, nous pouvons obtenir $\frac{T}{n} < \eta$, il nous reste alors à utiliser la continuité uniforme de φ sur $[-T,+T]$ pour obtenir:

$$|\varphi(\sigma)-\varphi_n(\sigma)| < \varepsilon$$

2°- Montrons que les fonctions φ_n sont des fonctions lipschitziennes.

Définition:

Une fonction $\varphi_n : [a,b] \longrightarrow R$ est lipschitzienne
ssi
$\exists L \geq 0$ tel que $|\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma')| \leq L|\sigma-\sigma'|; \forall \sigma,\sigma' \in [a,b]$

-Prenons σ et σ' tels que $\sigma \in [\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ et $\sigma' \in [\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}]$

Montrons que $|\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma')| \leq L|\sigma-\sigma'|$ où $L \geq 0$

$$|\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma')| \leq |\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma_{k+1})| + |\varphi_n(\sigma_{k+1})-\varphi_n(\sigma')|$$

$$\leq L_k|\sigma-\sigma_{k+1}| + L_{k+1}|\sigma_{k+1}-\sigma'|$$

(parce que, par construction, φ et φ_n coïncident aux extrémités des intervalles)

$$\leq L|\sigma'-\sigma|$$

où $L = \sup.\{L_k, L_{k-1}\}$

φ_n est donc lipschitzienne sur deux intervalles consécutifs.

-En général, prenons σ dans $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ et σ' dans $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$

Nous obtenons:

$$|\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma')| = |\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma_{i+1})+\varphi_n(\sigma_{i+1})-\varphi_n(\sigma_{i+2})+\dots + \varphi_n(\sigma_k)-\varphi_n(\sigma')|$$

$$\leq |\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma_{i+1})| + |\varphi_n(\sigma_{i+1})-\varphi_n(\sigma_{i+2})| + \dots + |\varphi_n(\sigma_k)-\varphi_n(\sigma')|$$

Or, le premier résultat obtenu, nous permet de dire que:

$$|\varphi_n(\sigma)-\varphi_n(\sigma_{i+1})| \leq L|\sigma-\sigma_{i+1}|$$

si σ et σ_{i+1} se situent dans des intervalles adjacents,ceci implique:

$$|\varphi_n(\sigma) - \varphi_n(\sigma')| \leqslant L\left[|\sigma - \sigma_{i+1}| + |\sigma_{i+1} - \sigma_{i+2}| + \dots + |\sigma_k - \sigma'|\right]$$

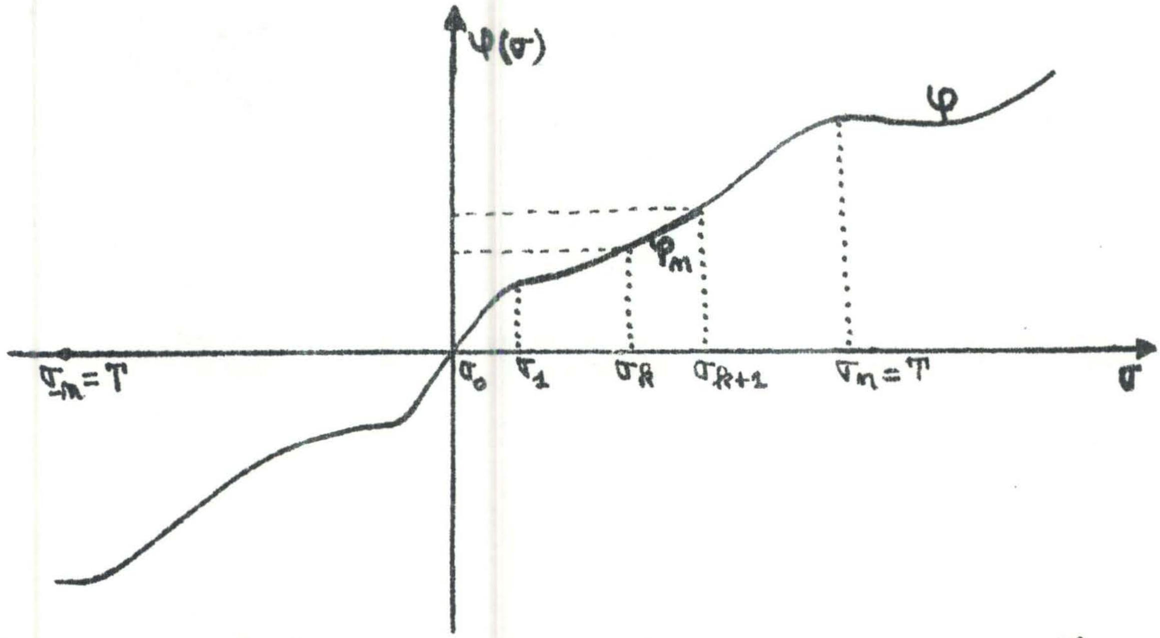
$$\leqslant L\ |\sigma' - \sigma|$$

3°-Chaque fonction φ_n satisfait la condition de secteur.

C'est-à-dire:

$$\sigma\varphi_n(\sigma) > o \quad \text{pour } \sigma \neq o$$

-Représentons φ et φ_n sur un graphe.Nous obtenons un schéma de la forme suivante:



où les fonctions φ_n convergent uniformément vers la fonction φ

-si $t\in[\sigma_k,\sigma_{k+1}]$; $\exists\,\Theta$ tq. $\sigma = \Theta\sigma_k + (1-\Theta)\sigma_{k+1}$ où $0 \leq \Theta \leq 1$

$$\varphi_n(\sigma) = \Theta\varphi(\sigma_k) + (1-\Theta)\varphi(\sigma_{k+1})$$

puisque entre σ_k et σ_{k+1}, la fonction φ_n a le profil d'une droite passant par ces deux points.

-Observons la valeur de $\sigma\,\varphi_n(\sigma)$:

$$\sigma\varphi_n(\sigma) = [\Theta\sigma_k + (1-\Theta)\sigma_{k+1}][\Theta\varphi(\sigma_k) + (1-\Theta)\varphi(\sigma_{k+1})$$

$$= \Theta^2\sigma_k\varphi(\sigma_k) + \Theta(1-\Theta)[\sigma_k\varphi(\sigma_{k+1}) + \sigma_{k+1}\varphi(\sigma_k)] + (1-\Theta)^2\sigma_{k+1}\varphi(\sigma_{k+1})$$

Considérons 2 cas:

$$\boxed{\sigma_k \geq 0 \Rightarrow \sigma_{k+1} > 0}$$

dés lors, $\left.\begin{array}{l}\sigma_k \varphi(\sigma_k) \geq 0 \\ \sigma_{k+1}\varphi(\sigma_{k+1}) > 0\end{array}\right\}$ puisque φ vérifie la condition de secteur

$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma_{k+1}) > 0 \\ \varphi(\sigma_k) \geq 0\end{array}\right\}$ puisque φ est continue et ne s'annule qu'en o

nous obtenons donc: $\sigma \varphi_n(\sigma) \geq 0$

$$\boxed{\sigma_{k+1} \leq 0 \Rightarrow \sigma_k < 0}$$

dés lors, $\left.\begin{array}{l}\sigma_k \varphi(\sigma_k) > 0 \\ \sigma_{k+1}\varphi(\sigma_{k+1}) \geq 0\end{array}\right\}$ puisque φ vérifie la condition de secteur et ne n'annule qu'en o

$\left.\begin{array}{l}\varphi(\sigma_{k+1}) \leq 0 \\ \varphi(\sigma_k) < 0\end{array}\right\}$ puisque φ est une fonction continue

nous obtenons donc : $\sigma \varphi_n(\sigma) \geq 0$

ETAPE 4.

Puisque h' et $h'' \in L^1(R^+;R)$ et puisque:

$$\exists\, q \geq 0 \quad \text{tel que } \operatorname{Re}\left\{(1-isq)G(s)\right\} \leq 0 \quad \text{pour tout } s \neq 0$$

$$\text{où } G(s) = \tilde{k}_0(s) + \rho(is)^{-1}$$

Alors, il existe au moins une solution continue sur R^+ de l'équation intégrale.

- Soit $T > (F(h(0)))$

$$\text{où } \rho(\alpha) = M + \left[|k(0)| + \int_0^\infty |k_0'(t)|\, dt\right]\alpha(\alpha)$$

Considérons une suite $\{\varphi_n(\sigma)\}_n$ du même type que celle construite lors de l'étape précédente où T^n est fixé comme ci-dessus.

- Notons $F_n(\sigma) = \int_0^\sigma \varphi_n(u)\,du$

-nous aurons $T > \beta(F_n(h(o)))$ pour n suffisamment grand puisque $\varphi_n(u)$ tend vers $\varphi(u)$.
Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que:

$$T > \beta(F_n(h(o))) \text{ pour n plus grand que 1}$$

-l'équation intégrale:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi_n(\sigma(s))ds$$

admet une seule solution $\sigma_n(t)$ continue sur R^+. (Ceci est acquis par l'étape 1)

$$|\sigma_n(t)| \leq \beta(F_n(h(o))) < T$$

Nous pouvons différentier les deux membres de l'équation intégrale ci-dessus. Nous obtenons:

$$|\sigma_n'(t)| \leq |h'(t)| + |k(o)\varphi_n(\sigma(t))| + \int_0^t |k_o'(t-s)\varphi_n(\sigma(s))| \, ds$$

$$|\sigma_n'(t)| \leq T_1 \quad \text{où } T_1 \text{ est indépendant de n}$$

Ceci est possible puisque $\varphi_n(\sigma)$ est bornée ainsi que les fonctions h' et k_o'.

Nous pouvons affirmer que $\{\sigma_n(t)\}_n$ est uniformément bornée et équicontinue sur R^+.
Il existe donc une sous-suite extraite de $\{\sigma_n(t)\}_n$ qui converge uniformément sur n'importe quel compact de R^+. Supposons que la suite $\{\sigma_n(t)\}_n$, elle-même, soit uniformément convergente sur n'importe quel intervalle compact de R^+.
Dans ce cas, faisons tendre n vers l'infini dans l'expression suivante:

$$\sigma_n(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi_n(\sigma_n(s))ds$$

Nous obtenons:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi_n(\sigma_n(s))ds \right]$$

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds \quad \text{puisque } \sigma_n(t) \longrightarrow \sigma(t)$$

$$\varphi_n(\sigma) \longrightarrow \varphi(\sigma)$$

et puisque φ est continue

L'équation intégrale est donc satisfaite pour $\sigma(t) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n(t)$

Comme σ est limite uniforme de fonctions continues, elle est aussi continue. Nous avons ainsi atteint le but du théorème 4 .

* * * * * * * *

§.2.-CAS DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Nous pouvons appliquer le résultat obtenu par le théorème 4 relatif à une équation intégrale non linéaire de convolution à noyau non intégrable au problème de stabilité associé au système de contrôle indirect automatique, c'est-à-dire, au système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases}$$

avec - $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et ξ deux fonctions inconnues respectivement vectorielle et scalaire.

- A est une matrice stable et de dimension n x n.
- $\varphi(\sigma)$ est continue de R dans R et telle que $\sigma\varphi(\sigma) > 0 ;\ \forall \sigma \neq 0$

Nous pouvons mettre ce système différentiel sous la forme d'une équation intégrale non linéaire de convolution à noyau non intégrable. Nous obtenons l'équation suivante: (cfr. Introduction.)

$$\sigma(t) = (c, e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\xi^\circ)) - \rho_1\xi^\circ + \int_0^t [(c, A^{-1}e^{A(t-s)}b) - \rho_1]\, \varphi(\sigma(s))\, ds$$

$$\text{avec } \rho_1 = \rho + (c, A^{-1}b)$$

<u>Nous allons tout d'abord vérifier que toutes les hypothèses du théorème 4 sont réalisées.</u>

<u>CONDITION 1:</u> $h', h'' \in L^1(R^+; R)$

a) $h' \in L^1(R^+; R)$

$$h(t) = (c, e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\xi^\circ)) - \rho_1\xi^\circ \qquad \text{avec } \rho_1 = \rho + (c, A^{-1}b)$$

$$h'(t) = (c, \frac{d}{dt}[e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\,\xi^\circ)])$$

$$h'(t) = (c, Ae^{At}(x^\circ + A^{-1}b\,\xi^\circ))$$

Etablissons une majoration pour $|h'(t)|$

$$|h'(t)| \leq \|c\|\ \|A\|\ \|e^{At}\|\ \|x^\circ + A^{-1}b\,\xi^\circ\|$$

Or, par hypothèse, A est une matrice stable, donc il existe deux nombres réels $k_1, k_0 > 0$ tels que :

$$\|e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_0 t}$$

Ceci implique:

$$|h'(t)| \leq \|c\|\ \|A\|\ k_1 e^{-k_0 t}\ (\|x^\circ\| + \|A^{-1}\|\ \|b\|\ |\xi^\circ|\ );\ \forall t \in R^+$$

Si nous posons $M = \|c\| \, \|A\| \, k_1(\|x^\circ\| + \|A^{-1}\| \, \|b\| \, |\xi^\circ|)$ .Nous obtenons:

$$|h'(t)| \leq M \, e^{-k_o t} \qquad \forall t \in R^+$$

Puisque h' est une fonction continue,elle est mesurable.De plus,elle est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable dans R^+. Dés lors,par un critère d'intégrabilité,nous pouvons affirmer qu'elle est intégrable sur R^+.

b) $h'' \in L^1(R^+;R)$

$$h''(t) = (c, \frac{d}{dt} \left[Ae^{At}(x^\circ + A^{-1}b \, \xi^\circ) \right])$$

$$h''(t) = (c, A^2 e^{At}(x^\circ + A^{-1}b \, \xi^\circ))$$

Etablissons une majoration pour $|h''(t)|$ en vue d'appliquer le théorème de la convergence dominée.

$$|h''(t)| \leq \|c\| \, \|A^2\| \, \|e^{At}\| \, \|x^\circ + A^{-1}b \, \xi^\circ\|$$

Puisque A est une matrice stable nous pouvons de nouveau modifier cette majoration comme suit:

$$|h''(t)| \leq \|c\| \, \|A\|^2 (\|x^\circ\| + \|A^{-1}\| \, \|b\| \, |\xi^\circ|) \, k_1 e^{-k_o t}$$

$$|h''(t)| \leq \|A\| \, M \, e^{-k_o t} \qquad \text{où M est définie en a)}$$

De nouveau, h'' est une fonction mesurable sur R^+ puisqu'elle est continue sur cet espace.De plus,elle est majorée par une fonction intégrable sur R^+.Elle est donc elle-même située dans l'espace: $L^1(R^+;R)$

CONDITION 2: $k(t) = k_o(t) - \varsigma$ avec $k_o, k_o' \in L^1(R^+;R)$

Nous avons : $k(t) = (c, A^{-1}e^{At}b) - \varsigma_1$ avec $\varsigma_1 = \varsigma + (c, A^{-1}b)$

Nous posons: $\begin{cases} k_o(t) = (c, A^{-1}e^{At}b) \\ \varsigma = \varsigma_1 \end{cases}$

a) $k_o \in L^1(R^+;R)$

$$|k_o(t)| = |(c, A^{-1}e^{At}b)|$$

$$|k_o(t)| \leq \|c\| \, \|A^{-1}\| \, \|e^{At}\| \, \|b\|$$

Nous utilisons de nouveau le caractère stable de la matrice A,nous obtenons:

$$|k_o(t)| \leq N \, e^{-k_o t} \qquad \text{où } k_o > 0$$

où nous avons posé $N = \|c\| \, \|A^{-1}\| \, \|b\| \, k_1$

k_o est une fonction continue, donc mesurable, elle est intégrable sur R^+ puisque majorée par Ne^{-kot} qui est une fonction intégrable sur R^+.

b) $k_o' \in L^1(R^+;R)$

$$|k_o'(t)| = \left|\left(c, \frac{d}{dt}(A^{-1}e^{At}b)\right)\right| = \|(c, e^{At}b)\| \leq \|c\| \, \|e^{At}\| \, \|b\| \leq \frac{N}{\|A^{-1}\|} e^{-kot}$$

La dernière majoration est obtenue comme conséquence de la stabilité de la matrice A. Elle permet de majorer la fonction mesurable k_o' par une fonction intégrable sur R^+ et ainsi de mettre en évidence le caractère propre d'intégralité de k_o'.

<u>CONDITION 3:</u> $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue de R dans R et satisfait:

$$\sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad ; \forall \sigma \neq 0$$
$$\varphi(0) = 0$$

Ceci est vérifié dans les hypothèses mêmes du problème.

<u>CONDITION 4:</u> $\exists\, q \geq 0$ tel que $\mathrm{Re}\{(1 - isq)G(s)\} \leq 0 \quad ; \forall s \neq 0$

$$\text{où } G(s) = \tilde{k}_o(s) + \rho(is)^{-1}; \quad s \neq 0$$

Calculons $G(s)$

$$G(s) = \tilde{k}_o(s) + \rho(is)^{-1}$$

$$\tilde{k}_o(s) = \int_0^\infty [(c, A^{-1}e^{At}b)] e^{ist} dt = \left(c, \int_0^\infty A^{-1}e^{At}be^{ist}dt\right)$$

Or,

$$A\int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt = \int_0^\infty e^{ist}de^{At} = e^{ist}e^{At}\Big]_0^\infty - is\int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt$$

$$\Rightarrow A\int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt = -I - is\int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt$$

$$(A + isI)\int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt = -I \Rightarrow \int_0^\infty e^{At}e^{ist}dt = -(A + isI)^{-1}$$

Donc $\tilde{k}_o(s) = -(c, A^{-1}(A + isI)^{-1}b)$

Dés lors, le critère de fréquence de stabilité absolue peut s'écrire:

$$\exists q \geq 0 \text{ tq. } \mathrm{Re}\{(isq-1)[(c, A^{-1}(isI-A)^{-1}b) - \rho(is)^{-1}]\} \leq 0 \ ; \forall s \neq 0$$

$$\text{puisque } G(s) = \tilde{k}_o(s) + (is)^{-1}\rho$$

Les hypothèses du théorème 4 sont ainsi vérifiées. Nous pouvons donc conclure que toute solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale associée au système d'équations différentielles du système de contrôle indirect est telle que:

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$$

Or, le système d'équations différentielles admet au moins une solution (puisque φ est continue) à laquelle nous associons $\sigma(t)$ de la façon suivante:

$$\sigma(t) = (c, x(t))$$

1°)-Montrons que indépendemment des conditions initiales x° et ξ° nous avons: toute solution $x(t)$ du système (I) tend vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini. C'est-à-dire: $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

De plus, nous avons: $\lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0$.

Nous allons écrire le système de contrôle indirect (I) sous une forme équivalente qui simplifie quelque peu son étude. Nous faisons pour cela, le changement de variable suivant: $\dot{x} = y$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases} \qquad (I)$$

Nous dérivons la première équation de ce système:

$$\ddot{x} = A\dot{x} + b\dot{\xi} \qquad \dot{y} = Ay + b\dot{\xi}$$

De plus, $x = A^{-1}y - A^{-1}b\xi$

Nous obtenons un système (II) équivalent au système (I) soit:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b\varphi(\sigma) \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \qquad (II) \\ \sigma = (c, A^{-1}y) - [(c, A^{-1}b) + \rho]\xi \end{cases} \quad \text{en posant } (c, A^{-1}b) + \rho = \gamma$$

Ils sont équivalents quant à la stabilité absolue si la transformation est régulière.

ETAPE 1.- Montrons que $\lim_{t \to +\infty} y(t, y^\circ) = 0 \qquad \forall y^\circ \in R^n$

$$y(t) = e^{At}y^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} k_1 e^{-k_o t} y^\circ + \lim_{t \to +\infty} k_1 \int_0^t e^{-k_o(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds$$

puisque A est une matrice stable $\|e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_o t}$

avec $k_1, k_o > 0$

Dés lors, le premier terme du membre de droite de la dernière équation est nul. Quant au second terme:

$$\lim_{t\to+\infty} k_1 \int_0^t e^{-k_o(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds = \lim_{t\to+\infty} k_1 \frac{\int_0^t e^{k_o s} b\varphi(\sigma(s))ds}{e^{k_o t}}$$

Nous appliquons la règle de l'HOSPITAL:

$$\lim_{t\to+\infty} k_1 \int_0^t e^{-k_o(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds = \lim_{t\to\infty} \frac{k_1}{k_o}\left[\frac{e^{k_o t} b\varphi(\sigma(t)) - e^{k_o o} b\varphi(\sigma(o))}{e^{k_o t}}\right]$$

Nous savons par l'application du théorème: $\lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = o$ et de plus, par hypothèse, que φ est une fonction continue. Nous obtenons:

$$\lim_{t\to+\infty} k_1 \int_0^t e^{-k_o(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds = \frac{k_1}{k_o}\left[b\varphi(\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)) - b\varphi(\sigma(o))\lim_{t\to+\infty} e^{-k_o t}\right] = o$$

puisque $\varphi(o) = o$

Dés lors, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = o$

ETAPE 2 :

Montrons qu'il en est de même pour la fonction scalaire $\xi(t)$:

$$\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = o \qquad \forall\, \xi^o \in R$$

Nous considérons le système (II)

$$\sigma(t) = (c, A^{-1}y(t)) - \gamma\,\xi(t)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{\gamma}(c, A^{-1}y(t)) - \frac{1}{\gamma}\sigma(t)$$

Nous avons établi les résultats suivants:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = o$$

$$\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = \frac{1}{\gamma}(c, A^{-1}\lim_{t\to+\infty} y(t)) - \frac{1}{\gamma}\lim_{t\to+\infty}\sigma(t) = o$$

ETAPE 3 :

Nous allons maintenant nous servir de ces résultats pour mettre en évidence le caractère asymptotiquement nul de la solution x(t) du système (I):

c. à. d. :

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0 \qquad \forall\, x^\circ, \xi^\circ$ définis respectivement dans R^n et R

Nous avons: $\quad x(t) = A^{-1}\dot{x}(t) - A^{-1}b\,\xi(t)$

$$x(t) = A^{-1}y(t) - A^{-1}b\,\xi(t)$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = A^{-1}\lim_{t \to +\infty} y(t) - A^{-1}b \lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0$$

2°)- Maintenant, nous allons établir le fait que la solution nulle du système (I) associé au problème de contrôle indirect est stable. C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \exists \eta > 0 \quad \text{tq.} \; \forall x^\circ \in R^n \quad \text{tq.} \; \|x^\circ\| < \eta$$
$$\forall \xi^\circ \in R \quad \text{tq.} \; |\xi^\circ| < \eta$$
$$\forall t \geq 0 \implies \|x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| < \varepsilon$$

En fait, nous allons montrer que x tend vers 0_{R^n} quand x° tend vers 0_{R^n} uniformément par rapport à $t \in R^+$ si de plus, ξ° tend vers 0_R uniformément par rapport à $t \in R^+$.

Nous avons
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\[2mm] \dfrac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma) \\[2mm] \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases}$$

avec: $x(t,x^\circ,\xi^\circ)$ tq. $x(0) = x^\circ$

et $\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ) = (c,x(t,x^\circ,\xi^\circ)) - \rho\,\xi(t,x^\circ,\xi^\circ)$

$\xi(t,x^\circ,\xi^\circ)$ tq. $\xi(0) = \xi^\circ$

Nous pouvons mettre ce système sous forme d'une seule équation intégrale en utilisant la forme explicite de la solution $x(t)$:

$$x(t,x^\circ,\xi^\circ) = e^{At}x^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)}b\,\xi(t,x^\circ,\xi^\circ)\,ds$$

$$\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ) = h(t,x^\circ,\xi^\circ) + \int_0^t k(t-s)\,\varphi(\sigma(s,x^\circ,\xi^\circ))\,ds$$

où $h(t,x^\circ\xi^\circ) = (c,e^{At}(x^\circ + A^{-1}b\xi^\circ)) - \rho_1\xi^\circ$

$k(t) = (c,A^{-1}e^{At}b) - \rho_1$

avec $\rho_1 = \rho + (c,A^{-1}b)$

<u>Nous cherchons une majoration de x pour tout $t \geqslant 0$</u>

$$\| x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| \leq \| e^{At}x^\circ\| + \| \int_0^t e^{A(t-s)} b\, \xi(s,x^\circ,\xi^\circ)ds\|$$

Nous utilisons le caractère stable de la matrice A:

$$\exists\, k_0,\ k_1 > 0 \text{ tq. } \| e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_0 t}$$

$$\|x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| \leq \|x^\circ\|\ k_1 e^{-k_0 t} + k_1 \int_0^t e^{-k_0(t-s)}\ \|b\|\ |\xi(s,x^\circ,\xi^\circ)|ds$$

Il nous suffit donc pour aboutir au résultat espéré de montrer que:

$$\forall t \geqslant 0 \ ;\ \forall\ x^\circ \in R^n \ ;\ \forall \xi^\circ \in R :$$

1°) $|\xi(t,x^\circ,\xi^\circ)| \leq f(x^\circ,\xi^\circ)$ où $\lim\limits_{\substack{\xi^\circ \to 0 \\ x^\circ \to 0_{R^n}}} f(x^\circ,\xi^\circ) = 0$

2°) $|x(t,x^\circ,\xi^\circ)| \leq g(x^\circ,\xi^\circ)$ où $\lim\limits_{\substack{\xi^\circ \to 0 \\ x^\circ \to 0_{R^n}}} g(x^\circ,\xi^\circ) = 0$

Nous pouvons en déduire immédiatement la stabilité simple.

<u>Cherchons une majoration de $|\xi(t,x^\circ,\xi^\circ)|$</u>

Nous avons:

$$\xi(t,x^\circ,\xi^\circ) = \xi^\circ + \int_0^t \varphi(\sigma(s,x^\circ,\xi^\circ))ds$$

De plus, lors de la démonstration nous avons défini la fonction $\phi(t,x^\circ,\xi^\circ)$ et nous avons vu qu'elle était bornée:

$$\phi(t,x^\circ,\xi^\circ) = \int_0^t \varphi(\sigma(u,x^\circ,\xi^\circ))du$$

et $\phi(t,x^\circ,\xi^\circ) \leq \alpha(F(h(0,x^\circ,\xi^\circ)))$; $\forall\, t \in R^+$

majorons $\alpha(F(h(0,x^\circ,\xi^\circ)))$:

$$\alpha(u) = K\rho^{-1} + \left[K^2 \rho^{-2} + 2q\rho^{-1}u\right]^{1/2}$$

$$\text{où } K = \sup_{t \in R^+} \left\{ |h(t,x^\circ,\xi^\circ)| + q|h'(t,x^\circ,\xi^\circ)| \right\} + \int_0^\infty \left[|h'(\tau,x^\circ,\xi^\circ)| + q|h''(\tau,x^\circ,\xi^\circ)| \right] d\tau$$

Faisons apparaître les conditions initiales du système dans cette majoration, tout d'abord celle de K.

– $\left\{ |h(t,x^\circ,\xi^\circ)| + q|h'(t,x^\circ,\xi^\circ)| \right\} = \left\{ |(c,e^{At}(x^\circ+A^{-1}b\xi^\circ)) - \rho_1\xi^\circ| + q\,|(c,Ae^{At}(x^\circ+A^{-1}b\xi^\circ))| \right\}$

Utilisons toujours le caractère stable de A:

$$\exists\, k_o,\ k_1 > 0 \quad \text{tq.} \quad \| e^{At} \| \leq k_1 e^{-k_o t}$$

$$\left\{ |h(t,x^\circ,\xi^\circ)| + q|h'(t,x^\circ,\xi^\circ)| \right\} \leq \|c\|\, k_1 \left[\|x^\circ\| + \|A^{-1}\|\ \|b\|\ \xi^\circ \right] \left[1 + q\|A\|\right] e^{-k_o t} + \rho_1 |\xi^\circ|$$

Prenons le SUPREMUM de chaque nombre pour tout $t \in R^+$.

$$\text{or,} \quad \sup_{t \in R^+} e^{-k_o t} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sup \left\{ |h(t,x^\circ,\xi^\circ)| + q|h'(t,x^\circ,\xi^\circ)| \right\} \leq \|c\|\, k_1 \left[\|x^\circ\| + \|A^{-1}\|\|b\|\,|\xi^\circ| \right] \left[1+q\|A\|\right] + \rho_1 |\xi^\circ|$$

– $\displaystyle\int_0^\infty \left\{ |h'(\tau,x^\circ,\xi^\circ)| + q\,|h''(\tau,x^\circ,\xi^\circ)| \right\} d\tau =$

$$= \int_0^\infty \left\{ |(c,Ae^{A\tau}(x^\circ+A^{-1}b\xi^\circ))| + q\,|(c,A^2e^{A\tau}(x^\circ+A^{-1}b\xi^\circ))| \right\} d\tau$$

Or A est stable:

$$\leq \|c\|\ \|A\| \left[\|x^\circ\| + \|A^{-1}\|\ \|b\|\ |\xi^\circ| \right] k_1 \int_0^\infty e^{-k_o\tau} \left[1+q\|A\|\right] d\tau$$

$$= \frac{\|c\|\ \|A\|}{k_o}\, k_1 \left[1+q\|A\|\right] \left[\|x^\circ\| + \|A^{-1}\|\ \|b\|\,|\xi^\circ| \right]$$

puisque $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-k_o \tau} d\tau = \frac{1}{k_o}$

Nous obtenons:

$$K \leq k_1 \|c\| \left[\|x^\circ\| + \|A^{-1}\| \, \|b\| \, |\xi^\circ|\right] \left[1+q\|A\|\right]\left[1+\frac{\|A\|}{k_o}\right] + \rho_1 |\xi^\circ|$$

$$\boxed{K \leq B\|x^\circ\| + C|\xi^\circ|}$$

en posant $B = k_1 \|c\|\left[1 + q\|A\|\right]\left[1 + \frac{\|A\|}{k_o}\right]$

$C = B\|A^{-1}\| \, \|b\| + \rho_1$

Déterminons $F(h(o,x^\circ,\xi^\circ))$

$h(o,x^\circ,\xi^\circ) = (c, x^\circ + A^{-1}b\xi^\circ) - \rho_1\xi^\circ \leq C'_1 \|x^\circ\| + C'_2 |\xi^\circ|$

avec $C'_1 = \|c\|$

$C'_2 = \|c\|\left[\|A^{-1}\| \, \|b\| + \rho_1\right]$

$$F(h(o,x^\circ,\xi^\circ)) = \int_0^{h(o,x^\circ,\xi^\circ)} \varphi(u)du$$

puisque φ est une fonction continue sur R, elle est bornée sur le compact $[o,h(o,x^\circ,\xi^\circ)]$ puisque toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes.
Nous concluons:

$\sup. |\varphi(u)| = m$ avec $u \in [o,h(o,x^\circ,\xi^\circ)]$

$F(h(o,x^\circ,\xi^\circ)) \leq mh(o,x^\circ,\xi^\circ)$

$F(h(o,x^\circ,\xi^\circ)) \leq m\left[C'_1 \|x^\circ\| + C'_2 |\xi^\circ|\right]$

$\boxed{F(h(o,x^\circ,\xi^\circ)) \leq C_1 \|x^\circ\| + C_2 |\xi^\circ|}$ en posant $C_1 = mC'_1$

$C_2 = mC'_2$

Déterminons une majoration pour $\alpha(F(h(o)))$

$$\alpha(F(h(o))) \triangleq K\rho^{-1} + [K^2\rho^{-2} + 2q\rho^{-1}F(h(o))]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha(F(h(o))) \leq [B\|x°\| + C|\xi°|]\rho^{-1} + [[B\|x°\| + C|\xi°|]^2\rho^{-2}$$
$$+ 2q\rho^{-1}[C_1\|x°\| + C_2|\xi°|]]^{\frac{1}{2}}$$

$$(F(h(o))) \leq 2[B\|x°\| + C|\xi°|]\rho^{-1} + [2q\rho^{-1}[C_1\|x°\| + C_2|\xi°|]]^{\frac{1}{2}}$$

dés lors $|\xi(t,x°,\xi°)| \leq |\xi°| + |\alpha(F(h(o,x°,\xi°)))|$ est telle que:

$$\boxed{\begin{array}{l} |\xi(t,x°,\xi°)| \leq f(x°,\xi°) \; ; \forall t \in R^+ \; ; \forall x° \in R^n \; ; \forall \xi° \in R \\ \quad\quad \text{avec } \lim_{\substack{x° \to o_{R^n} \\ \xi° \to o}} f(x°,\xi°) = o \end{array}}$$

ici $f(x°,\xi°)$ vaut explicitement:

$$f(x°,\xi°) = |\xi°| + 2[B\|x°\| + C|\xi°|]\rho^{-1} + \{2q\rho^{-1}[C_1\|x°\| + C_2|\xi°|\}^{\frac{1}{2}}$$

cette fonction est indépendante de t et s'annule bien avec les conditions initiales.

<u>Pour la norme de la fonction x nous obtenons la majoration suivante:</u>

$$\|x(t,x°,\xi°)\| \leq k_1\|x°\| + \frac{k_1}{k_\theta}\|b\| f(x°,\xi°)$$

donc $\exists\, g(x°,\xi°)$ tq. $\|x(t,x°,\xi°)\| \leq g(x°,\xi°)$

où la fonction g satisfait la même condition que la fonction f, c'est-à-dire:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{\substack{x° \to o_{Rn} \\ \xi° \to o}} g(x°,\xi°) = o \quad ; \quad \forall t \in R^+ \end{array}}$$

posons $g(x°,\xi°) = k_1\|x°\| + \frac{k_1}{k_2}\|b\| f(x°,\xi°)$

Elle est indépendante de t et s'annule avec les conditions initiales.

Nous avons ainsi prouvé que la solution nulle de (I) est stable puisque:

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \exists \eta > 0 \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \text{ tq. } \|x^\circ\| < \eta$$
$$\forall \xi^\circ \in R \text{ tq. } |\xi^\circ| < \eta$$
$$\forall t \geq 0 \Rightarrow \|x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| < \varepsilon$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Puisque: $\lim\limits_{\substack{x^\circ \to 0_{R^n} \\ \xi^\circ \to 0}} f(x^\circ,\xi^\circ) = \lim\limits_{\substack{x^\circ \to 0_{R^n} \\ \xi^\circ \to 0}} g(x^\circ,\xi^\circ) = 0$

Il existe $\eta > 0$ tq. $\left.\begin{matrix} \|x^\circ\| < \eta \\ |\xi^\circ| \leq \eta \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x^\circ,\xi^\circ)$ et $g(x^\circ,\xi^\circ) < \varepsilon$

d'où pour tout $t \geq 0$ $\|f(t,x^\circ,\xi^\circ)| < \varepsilon$ et $\|x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| < \varepsilon$

CONCLUSION: Nous avons vu que la solution nulle du système de contrôle indirect (I) est telle que:

- elle vérifie la stabilité simple, c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \;;\; \exists \eta > 0 \text{ tq. } \forall x^\circ \in R^n \;;\; \|x^\circ\| < \eta$$
$$\forall \xi^\circ \in R \;;\; |\xi^\circ| < \eta$$
$$\forall t \in R^+ \Rightarrow \|x(t,x^\circ,\xi^\circ)\| < \varepsilon$$

- de plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t,x^\circ,\xi^\circ) = 0 \quad \forall x^\circ \in R^n, \; \forall \xi^\circ \in R$

Nous pouvons affirmer que la solution vérifie LA STABILITE ASYMPTOTIQUE GLOBALE.

* * * * * * * *

INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA CONDITION DE FREQUENCE ETABLIE PAR POPOV

Nous avons ramené la condition de stabilité absolue du système de contrôle (I) à l'existence d'un nombre q non négatif tel que pour tout réel w nous ayons:

$$\mathrm{Re}\left\{(1-iwq)G(iw)\right\} = \mathrm{Re}\left\{(1-iwq)\left[-(c,iwI-A)^{-1}b)+\rho(iw)^{-1}\right]\right\} \leqslant o \quad ; \forall w \neq o$$

$$\mathrm{Re}\left\{(1-iwq)\left[(c,(iwI-A)^{-1}b)-\rho(iw)^{-1}\right]\right\} \geqslant o \quad ; \quad \forall w \in R_o$$

Ecrivons: $(c,(iwI-A)^{-1}b) - \rho(iw)^{-1} = S_1(w) - iS_2(w)$

où S_1 et S_2 sont des fonctions rationnelles réelles de w continues pour tout w de R_o.

Ceci implique:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[S_1(w) - iS_2(w)\right](1-iwq)\right\} \geqslant o \quad ; \quad \forall w \in R_o$$

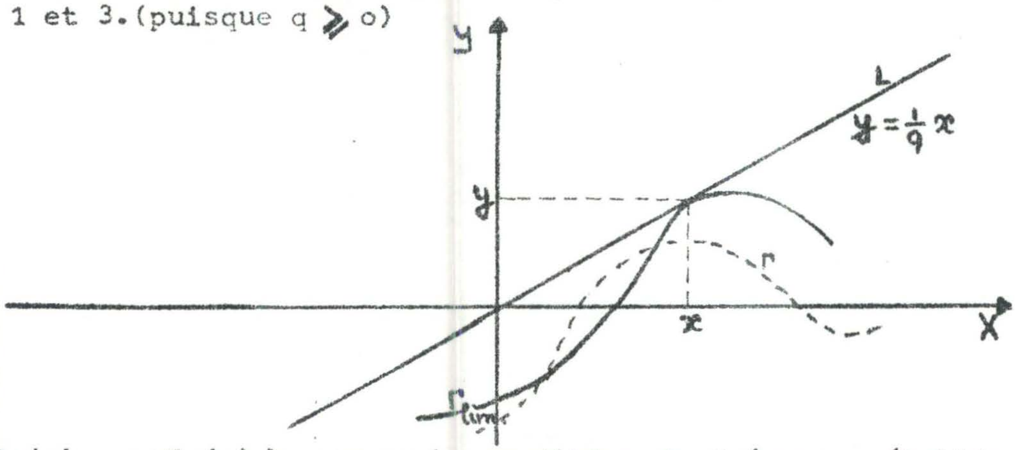
$$\Longleftrightarrow$$

$$S_1(w) - wqS_2(w) \geqslant o \quad ; \quad \forall w \in R_o$$

Plaçons-nous dans le plan (X,Y).

Considérons la droite $L: x-qy = o$ et la courbe $\Gamma: \begin{cases} x = S_1(w) \\ y = wS_2(w) \end{cases}$

La courbe Γ admet une tangente passant par l'origine et située dans les cadrans 1 et 3.(puisque $q \geqslant o$)



Puisque $S_1(w) - wqS_2(w) \geqslant o$ par la condition de fréquence établie par POPOV, la courbe est constamment située sous la tangente.A la limite,elle peut atteindre cette tangente.

<u>APPLICATION PARTICULIERE:</u>Contrôle indirect à matrice diagonale.

Nous allons mettre en évidence la condition de fréquence établie par V.M.POPOV pour illustrer sa simplicité de forme.
Soit le contrôle indirect:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases} \qquad \text{où A est diagonale.}$$

Nous allons l'écrire à partir des composantes sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -k_i x_i - \xi b_i \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \rho\xi \end{cases} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

où $\varphi(\sigma)$ est une fonction caractéristique admissible, c'est-à-dire: $\sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad ; \forall \sigma \neq 0$

$\varphi(0) = 0$

L'origine: $\begin{cases} x_i = 0 \\ \xi = 0 \end{cases}$; $i = 1,2,3,\ldots,n$ sera le seul point critique pour autant que le déterminant du système soit non nul.
C'est-à-dire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & -k_2 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & -b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$$

Supposons que la matrice A soit non singulière $\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n} k_i \neq 0$

$$\Delta = \rho + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{k_i} \neq 0$$

Voyons ce que devient dans ce cas la condition de fréquence du théorème 4.
Nous avons:

$$G(is) = \tilde{k}_0(s) + \rho(is)^{-1} \quad ; \forall s \neq 0$$

$$k_0(t) = (c, A^{-1}e^{At}b)$$

$$\tilde{k}_o(s) = -(c, A^{-1}(A + isI)^{-1}b)$$

Donc $\quad G(is) = -(c, A^{-1}(A + isI)^{-1}b) + \frac{\rho}{is} \qquad ; \forall s \in R_o$

Si nous détaillons cette condition, nous obtenons:

$$(c, A^{-1}(A + isI)^{-1}b) = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & & & \\ & \frac{1}{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{k_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1+is & & & \\ & k_2+is & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n+is \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} \frac{b_1}{k_1(k_1+is)} \\ \frac{b_2}{k_2(k_2+is)} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{k_n(k_n+is)} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j(k_j+is)}$$

Nous obtenons:

$$G(is) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j(k_j+is)} + \rho\,(is)^{-1} \quad ; \forall s \in R_o$$

La condition de fréquence s'énonce:

$$\exists\, q \geq o \quad tq. \quad Re\,\{(1-isq)G(is)\} \leq o \qquad ; \forall s \neq o$$

<u>Calculons $Re\,\{(1 - isq)\; G(is)\}$</u>

$$Re\,\{(1-isq)G(is)\} = Re\,\{(isq-1)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j(k_j+is)} - \frac{\rho}{is}\Big)\}$$

$$Re\,\{(1-isq)G(is)\} = Re\,\{(isq-1) \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j (k_j - is)}{k_j(k_j^2 + s^2)} - \rho q\}$$

$$Re\,\{(1-isq)G(is)\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j s^2 q}{k_j(k_j^2+s^2)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j k_j}{k_j(k_j+s^2)} - \rho q$$

$$\mathrm{Re}\left\{(1-isq)G(is)\right\} = q\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j^2+s^2}\left(\frac{s^2}{k_j} - \frac{1}{q}\right) - \rho\right\}$$

Il nous faut donc, pour étudier la stabilité, trouver un réel $q \geqslant o$, tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j^2+s^2}\left[\frac{s^2}{k_j} - \frac{1}{q}\right] - \rho \leq o \quad ; \forall s \in R_o$$

$$\text{Un réel } q \text{ tq. } o \leq q \leq \frac{k_j \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j^2+s^2}}{s^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{k_j^2+s^2} - \rho k_j} \quad ; \forall s \in R_o$$

Un moyen de mettre en évidence la stabilité de ce système serait donc, de voir si la fonction rationnelle admet un minimum positif ou négatif. Si celui-ci est positif ou nul, nous aurons la stabilité, sinon, la condition de fréquence n'est plus réalisée.

* * * * * * * *

§.3.-CAS PARTICULIER D'UN SYSTEME DE CONTROLE DIRECT DE NOYAU NON INTEGRABLE

Nous allons pour ce faire, étudier l'équation intégrale suivante:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds \quad ; \quad t \in R^+$$

mais, la condition de base est que le noyau soit de la forme:

$$k(t) = k_o(t) + \alpha \cos w_o t + \beta \sin w_o t$$

$$\text{avec } k_o \in L^1(R^+;R)$$

Un tel noyau est associé à l'équation intégrale obtenue pour $\sigma(t)$ dans le cas d'un système de contrôle direct particulier:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) \end{cases}$$

pour lequel la matrice A a une paire de racines purement imaginaires conjuguées et les autres à partie réelle strictement négative.
C'est un cas critique de stabilité.

Nous pouvons établir un résultat intéressant quant à la stabilité de tels systèmes:

THEOREME 5

Considérons l'équation intégrale:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds \quad ; \quad t \in R^+$$

sous les conditions:

1.- $h(t)$ peut être représenté sous la forme:

$$h(t) = h_o(t) + \lambda \cos w_o t + \mu \sin w_o t \quad ; \quad w_o \neq o$$

avec $h_o, h_o' \in L^1(R^+;R)$

2.- $k(t)$ est de la forme: $k(t) = k_o(t) + \alpha \cos w_o t + \beta \sin w_o t$

avec $w_o \neq o$; $\alpha < o$; $\beta \leq o$

$k_o, k_o' \in L^1(R^+;R)$

3.- $\varphi(\sigma)$ est une application continue et bornée de R dans R, telle que:

$$o < \sigma\varphi(\sigma) < \gamma\sigma^2 \qquad \sigma \neq o$$

$$\text{avec } o < \gamma \leq +\infty$$

4.- la condition de fréquence s'énonce:

$$-\gamma^{-1} + \frac{\beta}{w} + \mathrm{Re}\left\{\left[1-(is\beta/w\alpha)\right]\tilde{k}_o(s)\right\} \leq 0 \quad ; \forall s \in R$$

Alors,

$\sigma(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'∞.

Démonstration:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s))ds \quad ; \quad t \in R^+$$

⊠ - Nous pouvons transformer cette équation intégrale:

$$h(t) = h_o(t) + \mu \sin w_o t + \lambda \cos w_o t$$

$$k(t) = k_o(t) + \alpha \cos w_o t + \beta \sin w_o t$$

$$\sigma(t) = h_o(t) + \int_o^t k_o(t-s)\varphi(\sigma(s))ds + \mu \sin w_o t + \lambda \cos w_o t$$
$$+ \int_o^t \left[\alpha \cos w_o(t-s) + \beta \sin w_o(t-s)\right]\varphi(\sigma(s))ds$$

$$\sigma(t) = h_o(t) + \int_o^t k_o(t-s)\varphi(\sigma(s))ds + u(t)$$

en posant $u(t) = \lambda \cos w_o t + \mu \sin w_o t + \int_o^t \theta(t-s)\varphi(\sigma(s))ds$

où $\theta(t) = \alpha \cos(w_o t) + \beta \sin(w_o t)$

⊠ - Soit ν un nombre fixé arbitrairement:

Nous allons prouver que u(t) peut être représentée sous la forme:

$$u(t) = \eta \cos \nu + \xi \sin \nu$$

où $\eta(t)$ et $\xi(t)$ sont déterminés uniquement par:

$$\overset{\circ}{\eta} = w\,\xi + \alpha_1 \varphi(\sigma) \qquad \eta(o) = \eta^\circ$$
$$\dot{\xi} = -w\,\eta + \alpha_2 \varphi(\sigma) \qquad \xi(o) = \xi^\circ$$

Cherchons l'expression de η (t) et ξ (t)

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\eta} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & w_o \\ -w_o & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \varphi(\sigma)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -w_o \\ w_o & \lambda \end{vmatrix} = o \iff \lambda^2 + w_o^2 = o$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm iw_o$$

$$X(t) = \int_o^t X(t-\tau)F(\tau)d\tau + X(t)\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\eta} \\ \overset{\circ}{\xi} \end{pmatrix}$$

la matrice fondamentale X(t) est $\begin{pmatrix} \cos w_o t & \sin w_o t \\ -\sin w_o t & \cos w_o t \end{pmatrix}$

de plus elle est principale car $X(o) = I$

$$\begin{pmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = \int_o^t \begin{pmatrix} \cos w_o(t-\tau) & \sin w_o(t-\tau) \\ -\sin w_o(t-\tau) & \cos w_o(t-\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\varphi(\sigma)\,d\tau + \begin{pmatrix} \cos w_o t & \sin w_o t \\ -\sin w_o t & \cos w_o t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta^\circ \\ \xi^\circ \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta(t) &= \int_o^t [\alpha_1 \cos w_o(t-\tau) + \alpha_2 \sin w_o(t-\tau)]\varphi(\sigma)d\tau + \eta^\circ \cos w_o t + \xi^\circ \sin w_o t \\ \xi(t) &= \int_o^t [\alpha_2 \cos w_o(t-\tau) - \alpha_1 \sin w_o(t-\tau)\varphi(\sigma)]d\tau - \eta^\circ \sin w_o t + \xi^\circ \cos w_o t \end{aligned}}$$

comparons les deux résultats obtenus pour u(t):

$$u(t) = \eta(t)\cos\nu + \xi(t)\sin\nu$$

$$= \lambda\cos w_o t + \mu \sin w_o t + \int_o^t [\alpha \cos w_o(t-s) + \beta \sin w_o(t-s)]\varphi(\sigma(s))ds$$

$$\begin{cases} \lambda = \eta^\circ \cos\nu + \xi^\circ \sin\nu & (1) \\ \mu = \xi^\circ \cos\nu - \eta^\circ \sin\nu & (2) \\ \alpha = \alpha_1 \cos\nu + \alpha_2 \sin\nu & (3) \\ \beta = \alpha_2 \cos\nu - \alpha_1 \sin\nu & (4) \end{cases}$$

((1) x $\sin\nu$ + (2) x $\cos\nu$
(1) x $\cos\nu$ − (2) x $\sin\nu$
(3) x $\sin\nu$ + (4) x $\cos\nu$
(3) x $\cos\nu$ − (4) x $\sin\nu$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi^\circ = \lambda\sin\nu + \mu\cos\nu \\ \eta^\circ = \lambda\cos\nu - \mu\sin\nu \\ \alpha_2 = \alpha\sin\nu + \beta\cos\nu \\ \alpha_1 = \alpha\cos\nu - \beta\sin\nu \end{cases} \quad (a)$$

☒ - Considérons une fonction auxiliaire $\varsigma(t)$

$$\varsigma(t) = \int_0^{\infty} [\sigma(\tau)\varphi_t(\tau) - \gamma^{-1}\varphi_t^2(\tau)]\, d\tau$$

où $\varphi_t(\tau) = \begin{cases} \varphi(\sigma(\tau)) & 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \tau \geq t \end{cases}$

notons $\sigma_1(\tau) = \displaystyle\int_0^{\tau} k_0(\tau - u)\varphi_t(u)\,du$

nous pouvons, dés lors, de nouveau transformer l'équation intégrale de départ:

$$\forall \tau \; ; \; 0 \leq \tau \leq t \; ; \; \sigma(\tau) = h_0(\tau) + \sigma_1(\tau) + u(\tau)$$

Nous pouvons transformer $\varsigma(t)$ en fonction de l'expression de $\sigma(\tau)$

$$\boxed{\varsigma(t) = \int_0^{\infty} h_0(\tau)\varphi_t(\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty}[\sigma_1(\tau)\varphi_t(\tau) - \gamma^{-1}\varphi_t^2(\tau)]\,d\tau + \int_0^{\infty} u(\tau)\varphi_t(\tau)\,d\tau}$$

- à partir des relations (a)

  et du fait que $u(t) = \eta \cos\nu + \xi \sin\nu$

  $u\varphi_t = (\eta\cos\nu + \xi\sin\nu)\varphi_t$

  $= \alpha^{-1}(\alpha_1\eta + \alpha_2\xi)\varphi_t - \beta\alpha^{-1}(\cos\nu\,\xi - \sin\nu\,\eta)\varphi_t$

  car $\sin\nu = (\alpha_2 - \beta\cos\nu)\alpha^{-1}$

  $\cos\nu = (\alpha_1 + \beta\sin\nu)\alpha^{-1}$

- si $0 \leq \tau \leq t$

  nous aurons: $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\tau}(\eta^2 + \xi^2) = \eta\eta' + \xi\xi'$ où $\eta' = \dfrac{d\eta}{d\tau}$

  $= \eta[w\xi + \alpha_1\varphi_t(\tau)] + \xi[-w\eta + \alpha_2\varphi_t(\tau)]$

  $= \varphi_t(\tau)(\alpha_1\eta + \alpha_2\xi)$

- nous pouvons différentier $\sigma(\tau)$

  $\sigma'(\tau) = h_0'(\tau) + \sigma_1'(\tau) + (\eta'\cos\nu + \xi'\cos\nu)$

  reprenons les expressions de η' et ξ'

  $\sigma'(\tau) = h_0'(\tau) + \sigma_1'(\tau) + (w\xi + \alpha_1\varphi(\sigma))\cos\nu + (-w\eta + \alpha_2\varphi(\sigma))\sin\nu$

$$\sigma'(\tau) = h_o'(\tau) + \sigma_1'(\tau) + w(\xi \cos\nu - \eta \sin\nu) + (\alpha_1 \cos\nu + \alpha_2 \sin\nu)\varphi(\sigma)$$

$$\text{or, } \alpha_1 \cos\nu + \alpha_2 \sin\nu = \alpha$$

$$= h_o'(\tau) + \sigma_1'(\tau) + w(\xi \cos\nu - \eta \sin\nu) + \alpha\varphi(\sigma(\tau))$$

$\forall\, 0 \le \tau \le t$, nous pouvons transformer $\rho(t)$

$$\rho(t) = \int_0^t h_o(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma_1(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau - \int_0^t \gamma^{-1}\varphi_t^2(\tau)d\tau + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \frac{d}{d\tau}(\eta^2 + \xi^2)d\tau$$

$$- \int_0^t \frac{\beta}{\alpha}(\cos\nu\,\xi - \sin\nu\,\eta)\varphi(\sigma(\tau))d\tau$$

$$\text{or, } w_o(\xi\cos\nu - \eta\sin\nu) = \sigma'(\tau) - h_o'(\tau) - \sigma_1'(\tau) - \alpha\varphi(\sigma(\tau))$$

$$-\frac{\beta}{2}(\cos\nu\,\xi - \sin\nu\,\eta) = \frac{\beta}{\alpha w_o}\left[h_o'(\tau) + \sigma_1'(\tau)\right] + \frac{\beta}{\alpha w_o}\varphi(\sigma(\tau)) \frac{\beta}{\alpha w_o}\sigma'(\tau)$$

Nous obtenons:

$$\rho(t) = \int_0^t h_o(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma_1(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau - \gamma^{-1}\int_0^\infty \varphi_t^2(\tau)d\tau + \alpha^{-1}(\eta^2+\xi^2)\Big]_0^t$$

$$+ \frac{\beta}{\alpha w_o}\int_0^t h_o'(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau + \frac{\beta}{w_o\alpha}\int_0^t \sigma_1'(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau + \frac{\beta}{w_o}\int_0^\infty \varphi_t^2(\tau)d\tau -$$

$$- \frac{\beta}{\alpha w_o}\int_0^t \sigma'(\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau$$

$$\rho(t) = \int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{\alpha w_o}h_o'(\tau)\right]\varphi(\sigma(\tau))d\tau + (2\alpha)^{-1}(\eta^2+\xi^2)\Big]_0^t$$

$$- \frac{\beta}{\alpha w_o}\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\sigma'(\tau)d\tau + I$$

$$\text{où } I = \int_0^\infty \left[\sigma_1(\tau) + \frac{\beta}{\alpha w_o}\sigma_1'(\tau)\right]\varphi_t(\tau)d\tau + \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{w_o} - \gamma^{-1}\right)\varphi_t^2(\tau)d\tau$$

Nous allons appliquer l'égalité de PARCEVAL pour l'expression I puis la transformer pour l'obtenir sous la forme:

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left\{-\gamma^{-1} + \frac{\beta}{w_o} + \mathrm{Re}\left[\left(1 - \frac{is\beta}{w_o\alpha}\right)\tilde{k}_o(s)\right]\right\}\left|\tilde{\varphi}_t(s)\right|^2 ds}$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\beta}{w_o} - \gamma^{-1}\right)|\check{\varphi}_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left\{\check{\sigma}_1(s) + \frac{\beta}{\alpha w_o}\check{\sigma}'_1(s)\right\}\overline{|\check{\varphi}_t(s)|}\, ds$$

Calculons $\check{\sigma}_1(s)$ et $\check{\sigma}'_1(s)$

$$-\cdot\ \check{\sigma}_1(s) = \int_0^\infty \sigma_1(\tau)e^{is\tau}d\tau = \int_0^\infty\left[\int_0^\tau k_o(\tau-u)\varphi(\sigma(u))du\right]e^{is\tau}d\tau$$

$$= \int_0^\infty\left[\int_u^\infty k_o(\tau-u)\,\varphi_t(u)e^{is\tau}d\tau\right]du$$

posons $\tau - u = v$

$$= \int_0^\infty \varphi_t(u)\left[\int_0^\infty k_o(v)e^{is(v+u)}dv\right]du$$

Ceci implique: $\check{\sigma}_1(s) = \check{k}_o(s)\check{\varphi}_t(s)$

$$-\cdot\ \check{\sigma}'_1(s) = \int_0^\infty \sigma'_1(\tau)e^{is\tau}d\tau = \int_0^\infty\left[k_o(o)\varphi(\sigma(\tau)) + \int_0^\tau k'_o(\tau-u)\varphi(\sigma(u))du\right]e^{is\tau}d\tau$$

$$= k_o(o)\check{\varphi}(\sigma(s)) + \int_0^\infty du\left[\int_u^\infty k'_o(\tau-u)\varphi_t(u)e^{is\tau}d\tau\right]$$

posons $\tau - u = v$

$$= k_o(o)\check{\varphi}(\sigma(s)) + \int_0^\infty \varphi_t(u)du\left[\int_0^\infty k'_o(v)e^{is(v+u)}dv\right]$$

Intégrons par parties:

$$= k_o(o)\check{\varphi}(\sigma(s)) + \int_0^\infty \varphi_t(u)e^{isu}du\left[k_o(v)e^{isv}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty k_o(v)ise^{isv}dv\right]$$

$$= k_o(o)\check{\varphi}(\sigma(s)) + \check{\varphi}_t(s)\left\{-k_o(o)e^{iso} - is\check{k}_o(s)\right\}$$

$\check{\sigma}'_1(s) = -\check{\varphi}_t(s)\check{k}_o(s)is$

Remplaçons ces expressions dans I. Nous avons:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\beta}{w_o} - \gamma^{-1}\right)|\check{\varphi}_t(s)|^2ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left[\check{k}_o(s)\check{\varphi}_t(s) + \frac{\beta}{\alpha w_o}(is\check{\varphi}_t(s)\check{k}_o(s)\right]\overline{|\check{\varphi}_t(s)|}\,ds$$

C'est-à-dire, nous obtenons:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left\{\gamma^{-1} + \frac{\beta}{w_o} + \mathrm{Re}\left[\left(1-\frac{is\beta}{w_o}\right)\check{k}_o(s)\right]\right\}|\check{\varphi}_t(s)|^2ds$$

■ **σ_1 et σ_1' sont des fonctions définies dans $L^1 \cap L^2$ sur R^+**

σ_1 et σ_1' sont des fonctions définies à partir de fonctions intégrables. Elles sont toutes deux intégrables. De plus, comme la convolution d'une fonction de L^1 par une fonction de L^p est située dans L^p pour $p \geq 1$. Ces fonctions σ_1 et σ_1' sont situées dans L^2. (puisque Ψ_t est située dans L^2).

■ Par la condition de secteur, nous savons que $I \leq o$
Dés lors,

$$\varsigma(t) \leq \int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{w_o\alpha} h_o'(\tau)\right] \varphi(\sigma(\tau))\, d\tau + (2\alpha)^{-1} \left[(\eta^2 + \xi^2)\right]_o^t - (w_o\alpha)^{-1}\beta \int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\, \sigma'(\tau)\, d\tau$$

$$\varsigma(t) - (2\alpha)^{-1}\left[\eta^2(t) + \xi^2(t)\right] + \frac{\beta}{w_o\alpha} F(\sigma(t)) \leq -(2\alpha)^{-1}(\eta^{\circ 2} + \xi^{\circ 2}) + \frac{\beta}{w_o\alpha} F(\sigma(o)) + \int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{w_o\alpha} h_o'(\tau)\right] \varphi(\sigma(\tau))\, d\tau$$

en posant $F(\sigma) = \int_0^\sigma \varphi(u)\, du$, nous obtenons:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\, d(\sigma(\tau)) = F(\sigma(t)) - F(\sigma(o))$$

Substituons cette valeur dans $\varsigma(t)$ nous avons:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\left[\sigma(\tau) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(\tau))\right] d\tau - (2\alpha)^{-1}\left[\eta^2(t) + \xi^2(t)\right] + \frac{\beta}{w_o\alpha} F(\sigma(t)) \\ &\leq -(2\alpha)^{-1}(\eta^{\circ 2} + \xi^{\circ 2}) + \frac{\beta}{w_o\alpha} F(\sigma(o)) + \int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{w_o\alpha} h_o'(\tau)\right] \varphi(\sigma(\tau))\, d\tau \end{aligned}} \quad \text{(A)}$$

Cette inégalité est fondamentale pour pouvoir étudier le comportement de $\sigma(t)$ à l'infini.

- Toutes les quantités du membre de gauche de l'inégalité sont $\geq o$
  car
  - $\gamma > o$
  - $o < \sigma\varphi(\sigma)$
  - $\alpha < o$
  - $\beta \leq o$

Dés lors, le premier terme a un intégrant $\geqslant$ o, nous pouvons l'écrire sous la forme $\frac{\varphi}{\sigma}(\sigma^2 - \gamma^{-1}\varphi\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$

$= 0$ pour $\sigma = 0$

le second terme ainsi que le troisième sont $\geqslant$ o, puisque $\alpha < 0$ et $\beta \leq 0$ par hypothèse. De plus $F(\sigma)$ pour $\sigma \neq 0$ est > 0 .

- Les deux premiers termes du membre de droite de l'inégalité sont également positifs vu les hypothèses sur α et β et $F(\sigma)$. Il nous reste à évaluer le troisième terme de l'inégalité, soit:

$$\int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{w_o\alpha} h'_o(\tau)\right]\varphi(\sigma(\tau))\,d\tau$$

or, par hypothèse toujours, h_o et $h'_o \in L^1(R^+;R)$

et $\varphi(\sigma)$ est une application continue et bornée de R dans R, c'est-à-dire:

$$\exists \phi \geqslant 0 \quad \text{tq.} \ |\varphi(\sigma)| \leq \phi \ ; \ \forall \sigma \in R$$

Dés lors:

$$\left|\int_0^t \left[h_o(\tau) + \frac{\beta}{w_o\alpha} h'_o(\tau)\right]\varphi(\sigma(\tau))\,d\tau\right| \leq \phi \int_0^\infty \left(|h_o(\tau)| + \frac{\beta}{w_o\alpha}|h'_o(\tau)|\right) d\tau$$

le membre de droite de l'inégalité est donc borné sur R^+.

Nous pouvons donc choisir judicieusement un nombre $K > 0$ tel que:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\left[\sigma(\tau) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(\tau))\right] d\tau < K \ ; \forall t \geqslant 0$$

☒ Pour appliquer le lemme de BARBALAT, nous allons tout d'abord prouver que $\sigma(t)$ est uniformément continu sur R^+.

La continuité uniforme de $\sigma(t)$ est une conséquence du caractère borné de $\sigma'(t)$. En effet, $\sigma'(t)$ est bornée par la somme d'une fonction intégrale sur R^+ et d'une fonction bornée sur R^+.

$$\sigma'(t) = h'_o(t) + \sigma'_1(t) + (\eta' \cos\nu + \xi' \sin\nu)$$

donc $|\sigma'(t)| \leq |h'_o(t) + \sigma'_1(t)| + w(\xi\cos\nu - \eta\sin\nu) + \alpha\varphi_t(\tau)$

nous avons: h'_o et σ'_1 définis dans $L^1(R^+;R)$.

D'autre part, les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont bornées sur R^+ puisque le membre de droite de l'inégalité (A) est lui-même borné. Tous ces résultats impliquent:

$|\sigma'(t)|$ est bornée.

Or, si $\sigma(t)$ et $\sigma'(t)$ sont des fonctions bornées, nous en déduisons directement la continuité uniforme de σ. De plus, φ étant continue, nous aurons $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\sigma)\sigma$ uniformément continues.

Donc $\varphi(\sigma)\left[\sigma - \gamma^{-1}\varphi(\sigma)\right]$:
- est uniformément continue
- est positive par l'hypothèse 3

et est intégrable sur R^+.

Dés lors, par application du lemme de BARBǍLAT (voir annexe C) nous concluons:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(\sigma(t))\left[\sigma(t) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] = 0$$

Ceci implique: $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$

sinon $\exists\, \varepsilon > 0$ tq. $\exists\, (t_n)$; $t_n \geq 0$ et $t_n \to +\infty$ tq. $|\sigma(t_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n$

posons $m = \inf_{\varepsilon \leq |\xi| \leq M} |\varphi(\xi)|$ où M est la borne sup. de σ le long des solutions.

donc $|\varphi(\sigma(t_n))| \geq m > 0$

Nous savons: $\varphi(\sigma(t_n))\left[\sigma(t_n) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(t_n))\right]$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Vu que $\varphi(\sigma(t_n))$ reste strictement positif, nous devons nécessairement avoir:

$$\sigma(t_n) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(t_n)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

De plus, σ est une fonction bornée, dés lors, sans perdre de généralité nous pouvons supposer que $\sigma(t_n)$ converge vers un nombre $l \neq 0$ (puisque $\sigma(t_n)$ est supposée telle que: $|\sigma(t_n)| \geq \varepsilon > 0$; $\forall t_n$)

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(t_n) = l \neq 0 \implies \lim_{n \to +\infty} \varphi(\sigma(t_n)) = \varphi(l)$$

puisque φ est continue.

Regardons de plus près la limite suivante:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sigma(t_n) - \gamma^{-1}\varphi(\sigma(t_n))\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - \gamma^{-1}\varphi(1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma 1 = \varphi(1) \quad \text{ou encore} \quad \varphi(1)1 = \gamma 1^2$$

Or, l'hypothèse 3 s'énonce: $0 < \sigma\varphi(\sigma) < \gamma\sigma^2 \quad ; \quad \forall \sigma \neq 0$

en particulier, si $\sigma = 1$, nous obtenons:

$$1\varphi(1) < \gamma 1^2 \text{ (puisque } 1 \neq 0.)$$

Ceci est incompatible avec le résultat découlant de l'hypothèse de l'absurde. Cette dernière est donc non acceptable et

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$$

* * * * * * * *

§.4.-CAS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ASSOCIEES AU CONTROLE DIRECT : CAS CRITIQUE

Nous allons étudier un cas critique de stabilité pour le contrôle direct:Contrôle direct admettant deux racines caractériques purement imaginaires conjuguées.

Nous supposons que les racines caractéristiques distinctes de ces deux racines imaginaires sont à partie réelle strictement négative.Nous aurons un contrôle direct régi par le système d'équations différentielles suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathring{\xi} = -w\eta + b_1\varphi(\sigma) \\ \mathring{\eta} = w\xi + b_2\varphi(\sigma) \\ \mathring{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = c_1\xi + c_2\eta + (c,x) \end{array}\right. \qquad (I)$$

où -.w est positif.

-.b_1, b_2, c_1, c_2 sont des constantes réelles

-.c,b sont deux vecteurs de R^n

-.ξ, η sont deux fonstions scalaires de R^+dans R.

-. x est une fonction vectorielle de R^+ dans R^n.

Faisons apparaître les racines imaginaires dans ce système; pour cela,posons:

$z = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} \mathring{z} &= \mathring{\xi} + i\mathring{\eta} \\ &= (-w\eta + b_1\varphi(\sigma)) + i(w\xi + b_2\varphi(\sigma)) \\ &= iw(\xi + i\eta) + (b_1 + ib_2)\varphi(\sigma) \end{aligned}$$

posons: $b_1 + ib_2 = \beta$

Nous obtenons le système suivant::

$$\left\{\begin{array}{l} \mathring{z} = iwz + \beta\varphi(\sigma) \\ \mathring{\bar{z}} = -iw\bar{z} + \bar{\beta}\varphi(\sigma) \\ \mathring{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = \gamma_o z + \bar{\gamma}_o\bar{z} + (c,x) \end{array}\right. \qquad (II)$$

où- nous avons toutes les caractéristiques du système (I)

- z est une fonction de R^+ dans C
- $\gamma_o = \frac{1}{2}(c_1 + \frac{c_2}{i})$

Recherche de la valeur de γ_o.

$$z = \xi + i\eta \text{ implique } \quad \xi = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$\eta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Reprenons la dernière équation du système (I) nous obtenons:

$$c_1\xi + c_2\eta = \frac{1}{2} \quad c_1(z + \bar{z}) + \frac{c_2}{i}(z - \bar{z})$$
$$= \gamma_o z + \bar{\gamma}_o \bar{z} \qquad \text{en posant } \gamma_o = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{c_2}{i}\right)$$

4.1 -Recherche de l'équation intégrale associée à ce système particulier

Nous nous intéressons à l'équation intégrale associée à ce système d'équations différentielles.Sa forme générale est:

$$\sigma(t) = h(t) + \int_o^t k(t-s)\Psi(\sigma(s))ds$$

Déterminons h(t) et k(t) :

-.Pour ce faire,mettons en évidence la solution de l'équation:

$$\dot{z} = iwz + \beta\Psi(\sigma)$$

Solution de l'équation homogène:

$$\dot{z} - iwz = o \quad \text{implique: } z(t) = e^{iwt}z^\circ \quad \text{où } z^\circ = z(o)$$

Solution de l'équation non homogène:

Elle est obtenue par la méthode de variation des constantes:

$$z(t) = e^{iwt}z^\circ + \int_o^t e^{iw(t-s)}\beta\varphi(\sigma(s))ds$$

d'où l'on tire directement la solution de l'équation:

$$\dot{\bar{z}} = -iw\bar{z} + \bar{\beta}\varphi(\sigma)$$

$$\bar{z}(t) = e^{-iwt}\bar{z}^\circ + \int_o^t e^{-iw(t-s)}\bar{\beta}\varphi(\sigma(s))ds$$

-.Mettons également en évidence,la solution du système:

$$\dot{x} = Ax + b\Psi(\sigma)$$

$$x(t) = e^{At}x^\circ + \int_o^t e^{A(t-s)}b\,\varphi(\sigma(s))ds \qquad \text{où } x^\circ = x(o)$$

(cfr. §2 Chapitre I)

Nous établissons l'équation intégrale à partir de la dernière équation du système différentiel (2):

$$\sigma(t) = \gamma_o z(t) + \bar{\gamma}_o \overline{z}(t) + (c, x(t))$$

$$\sigma(t) = \gamma_o\left[e^{iwt} z^\circ + \int_0^t e^{iw(t-s)} \beta\varphi(\sigma(s))ds\right]$$

$$+ \bar{\gamma}_o\left[e^{-iwt}\bar{z}^\circ + \int_0^t e^{-iw(t-s)} \bar{\beta}\varphi(\sigma(s))ds\right]$$

$$+ (c, \left[e^{At}x^\circ + \int_0^t e^{A(t-s)} b\varphi(\sigma(s))ds\right])$$

le noyau k vaut:

$$k(t) = \gamma_o e^{iwt}\beta + \bar{\gamma}_o e^{-iwt}\bar{\beta} + (c, e^{At}b)$$

$$= k_o(t) + \gamma_o(\cos wt + i \sin wt)\beta + \bar{\gamma}_o(\cos wt - i \sin wt)\bar{\beta}$$

$$\boxed{k(t) = k_o(t) + \alpha \cos wt + \beta \sin wt}$$

où $\alpha = \gamma_o\beta + \bar{\gamma}_o\bar{\beta}$ $\qquad \alpha \in R$

$\beta = i(\gamma_o\beta - \bar{\gamma}_o\bar{\beta})$ $\qquad \beta \in R$

<u>Vérification</u>: Posons $\gamma_o = \varepsilon + i\delta$ et $\beta = \mu + i\eta$

$$\alpha = (\varepsilon + i\delta)(\mu + i\eta) + (\varepsilon - i\delta)(\mu - i\eta)$$

$$= 2(\varepsilon\mu - \eta\delta)$$

$$\beta = i\left[(\varepsilon + i\delta)(\mu + i\eta) - (\varepsilon - i\delta)(\mu - i\eta)\right]$$

$$= -2(\delta\mu - \varepsilon\eta)$$

la fonction h vaut:

$$h(t) = \gamma_o e^{iwt} z^\circ + \bar{\gamma}_o e^{-iwt}\bar{z}^\circ + (c, e^{At}x^\circ)$$

$$= \gamma_o(\cos wt + iwt)z^\circ + \bar{\gamma}_o(\cos wt - i \sin wt)\bar{z}^\circ + (c, e^{At}x^\circ)$$

$$\boxed{h(t) = h_o(t) + a \cos wt + d \sin wt}$$

où $a = \gamma_o z^\circ + \bar{\gamma}_o \bar{z}^\circ \in R$

$d = (\gamma_o z^\circ - \bar{\gamma}_o \bar{z}^\circ)i \in R$

L'équation intégrale s'écrit alors:

$$\sigma(t) = h_o(t) + a \cos wt + d \sin wt + \int_o^t [k_o(t-s) + \alpha \cos w(t-s) + \beta \sin w(t-s)] \varphi(\sigma(s))ds$$

$$\text{avec } h_o(t) = (c, e^{At}x^\circ)$$

$$k_o(t) = (c, e^{At}b)$$

4.2.-Nous nous trouvons dans le cadre des hypothèses du théorème 5

Nous allons d'abord vérifier que les hypothèses du théorème 5 sont bien réalisées pour cette équation intégrale.

Condition 1: la fonction h peut être représentée sous la forme:

$$h(t) = h_o(t) + \lambda \cos wt + \mu \sin wt \quad ; \; w \neq o$$

et $h_o, h'_o \in L^1(R^+;R)$

Nous avons établi la forme générale de la fonction h, elle est du type ci-dessus avec $h_o(t) = (c, e^{At}x^\circ)$ avec $w > o$

$h_o \in L^1(R^+;R)$

h_o peut être majorée par une fonction intégrable sur R^+, elle est donc elle-même intégrable sur R^+. Cette majoration est établie grâce au caractère stable de la matrice A. En effet: $\exists\, k_o, k_1 > o$ tq. $\|e^{At}\| \leq k_1 e^{-k_o t}$

Nous obtenons:

$$|h_o(t)| \leq k_1 e^{-k_o t} \; \|c\| \; \|x^\circ\|$$

$h'_o \in L^1(R^+;R)$

$$h'_o(t) = (c, Ae^{At}x^\circ)$$

$$|h'_o(t)| \leq \|c\| \; \|A\| \; k_1 e^{k_o t} \; \|x^\circ\|$$

La fonction h'_o est du même type que la fonction h_o. De plus, comme elle est majorée elle-aussi par une fonction intégrable sur R^+ elle est, elle-même, intégrable sur R^+.

Condition 2: la fonction noyau k est de la forme:

$$k(t) = k_o(t) + \alpha \cos wt + \beta \sin wt \quad ; \; w \neq o$$

$$\alpha < o \; ; \; \beta \leq o$$

avec k_o et k'_o appartenant à $L^1(R^+;R)$

Nous avons mis en évidence, la forme générale de k. Elle correspond bien à l'expression ci-dessus avec $w > o$ et $k_o(t) = (c, e^{At}b)$.

Les fonctions k_o, k_o' peuvent être majorées en norme par:

$$|k_o(t)| = |(c, e^{At}b)| \leq \|c\| \; \|b\| \; k_1 e^{-k_o t} \qquad ; k_1, k_o > o$$

$$|k_o'(t)| = |(c, Ae^{At}b)| \leq \|c\| \; \|A\| \; \|b\| \; k_1 e^{k_o t}$$

en utilisant le caractère stable de la matrice A.

Les fonctions majorantes respectivement de k_o et de k_o' sont intégrables sur R^+, k_o et k_o' le sont donc également.

$$k_o(t) = k_o(t) + \alpha \cos wt + \beta \sin wt$$

avec $\alpha = 2(\varepsilon\mu - \eta\delta)$ posons $\alpha < o$

$\beta = -2(\delta\mu - \varepsilon\eta)$ et $\beta \leq o$

Condition 3: $\varphi(\sigma) : R \to R$ continue et bornée telle que:

$$o < \sigma\varphi(\sigma) < \gamma^* \sigma^2 \; , \; \sigma \neq o \qquad o < \gamma^* \leq \infty$$

(•)

Par hypothèse, $\varphi(\sigma)$ est définie dans cette classe de fonctions

Condition 4: la condition de fréquence: $(\forall s \in R)$

$$-\gamma^{*-1} + \frac{\beta}{w} + \mathrm{Re}\left\{\left[1 - \frac{is\beta}{w\alpha}\right] \tilde{k}_o(s)\right\} \leq o$$

Exprimons explicitement cette condition de fréquence où:

$$k_o(t) = (c, e^{At}b) \implies \tilde{k}_o(s) = \left(c, \int_o^\infty e^{At} e^{ist} dt\, b\right)$$

$$\text{or}, \; A \int_o^\infty e^{At} e^{ist} dt = \int_o^\infty e^{ist} d(e^{At}) = I - is \int_o^\infty e^{At} e^{ist} dt$$

$$(A + isI) \int_o^\infty e^{At} e^{ist} dt = -I \Rightarrow \boxed{\int_o^\infty e^{At} e^{ist} dt = -(A + isI)^{-1}}$$

(•) La démonstration reste valable pour la condition $\sigma\varphi(\sigma) > o \; ; \; \sigma \neq o$

Elle est même plus simple. Dans ce cas, nous prendrons $\gamma^{*-1} = o$

$\Rightarrow \tilde{k}_o(s) = -(c,(A+isI)^{-1}b)$

La condition de fréquence s'écrit:

$$-\gamma^{*-1} + \frac{\beta}{w} + \operatorname{Re}\left\{\left[1-\left(\frac{is\beta}{w\alpha}\right)\right]\left[-(c,(A+isI)^{-1}b)\right]\right\} \leq o \qquad \forall s \in R$$

Ces conditions étant vérifiées, nous savons par application du théorème 5:

"Toute solution $\sigma(t)$ de l'équation intégrale associée au système d'équations différentielles du système de contrôle direct avec un couple de racines purement imaginaires conjuguées est telle que: $\lim\limits_{t \to +\infty} \sigma(t) = o$."

Nous savons que le système d'équations différentielles (II) admet au moins une solution $x_*(t) = (x(t), z(t), \bar{z}(t))$ à laquelle nous associons $\sigma(t)$ de la façon suivante:

$$\sigma(t) = \gamma_o z(t) + \bar{\gamma}_o \bar{z}(t) + (c, x(t))$$

<u>4.3.Les solutions $x(t), z(t), \bar{z}(t)$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini</u>

Nous allons montrer que toute solution $x_*(t) = (x(t), z(t), \bar{z}(t))$ tend vers $o_{R^{n+2}}$ lorsque t tend vers l'∞ indépendemment des conditions initiales $x°$ et $z°$;

c'est-à-dire:

Montrons que pour toutes conditions initiales $x°, z°$ définis respectivement dans R^n et C.

$$\lim_{t \to +\infty} x_*(t) = o$$

C'est-à-dire:

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = \lim_{t \to +\infty} \bar{z}(t) = \lim_{t \to +\infty} x(t) = o$$

Nous avons directement par l'analyse du système d'équations différentielles associé au système de contrôle direct avec matrice stable que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = o \qquad \text{(cfr. §2.Chapitre I)}$$

Il nous reste à montrer que: $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \bar{z}(t) = o$

Nous avons posé $z(t) = \xi(t) + i\,\eta(t)$.

Ainsi pour prouver le caractère nul de $z(t)$ et $\bar{z}(t)$ à l'infini, <u>il nous faut prouver que: $\lim\limits_{t \to +\infty} \xi(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \eta(t) = o$</u>

–. Nous allons, pour cela, partir d'un résultat mis en évidence dans la démonstration du théorème 5, soit:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\left[\sigma(\tau)-\gamma^{*-1}\varphi(\sigma(\tau))\right]d\tau \;-(2\alpha)^{-1}\left[\eta^2(t)+\xi^2(t)\right] + \frac{\beta}{w\alpha}F(\sigma(t))$$

$$\leqslant -(2\alpha)^{-1}(\eta^{\circ 2}+\xi^{\circ 2})+\frac{\beta}{w\alpha}F(\sigma(o))+\int_0^t\left[h_o(\tau)+\frac{\beta}{w\alpha}h_o'(\tau)\right]\varphi(\sigma(\tau))d\tau$$

par hypothèse φ est une fonction bornée et les fonctions h_o et h_o' sont intégrables, dés lors:

$$\int_0^t \left|\left[h_o(\tau)+\frac{\beta}{w\alpha}h_o'(\tau)\right]\right|\,|\varphi(\sigma(\tau))|\;d\tau \leq \phi\left[|h_o|_{L^1}+|h_o'|_{L^1}\frac{\beta}{w\alpha}\right] \triangleq \delta_o$$

Nous obtenons:

$$\int_0^t \varphi(\sigma(\tau))\left[\sigma(\tau)-\gamma^{*-1}\varphi(\sigma(\tau))\right]d\tau \leq s(\overset{\circ}{\xi},\overset{\circ}{\eta},\overset{\circ}{\sigma},\delta_o)$$

$$\text{et}\quad -\frac{1}{2\alpha}\left[\eta^2(t)+\xi^2(t)\right] \leq s(\overset{\circ}{\xi},\overset{\circ}{\eta},\overset{\circ}{\sigma},\delta_o)$$

où s tend vers zéro avec ses arguments.

–. ■ De plus, nous avons établi: $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=o$

■ Nous pouvons affirmer $\lim\limits_{t\to+\infty}h_o(t)=o$ puisque h_o et h_o' appartiennent à $L^1(R^+;R)$

■ Nous obtenons également: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t k_o(t-s)\varphi(\sigma(s))ds = o$ par simple application de la règle de l'HOSPITAL ,

puisque –. k_o appartient à $L^1(R^+;R)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{–. } \varphi \text{ est continue et bornée de } R \to R \\ \text{et } \lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=o \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{s\to+\infty}\varphi(\sigma(s))=o$$

–. Montrons maintenant que $|\xi(t)|+|\eta(t)| \to o$ quand $t\to\infty$

Nous considérons un t^* quelconque que nous prenons pour condition initiale. Dans le théorème 5, nous avons établi des relations pour $\xi(t)$ et $\eta(t)$ pour la condition initiale $t^\circ = o$. Nous reprenons ce résultat pour la condition initiale t^*. Dés lors, pour tout t supérieur à t^* nous avons:

$$\xi(t) = \xi(t^*)\cos w(t-t^*) - \eta(t^*)\sin w(t-t^*) + \varphi_1(t)$$
$$\eta(t) = \xi(t^*)\sin w(t-t^*) + \eta(t^*)\cos w(t-t^*) + \varphi_2(t) \qquad (1)$$

$$\text{où } \varphi_1(t) = \int_{t^*}^{t}[\alpha_2\cos w(t-s) - \alpha_1\sin w(t-s)]\,\varphi(\sigma(s))ds$$

$$\varphi_2(t) = \int_{t^*}^{t}[\alpha_1\cos w(t-s) + \alpha_2\sin w(t-s)]\,\varphi(\sigma(s))ds$$

- Nous obtenons le résultat suivant:

$$\sup_{t^* \leq t \leq t^* + \frac{\pi}{2w}} (|\varphi_1(t)| + |\varphi_2(t)|) \longrightarrow o \text{ lorsque } t^* \longrightarrow +\infty$$

Ceci, puisque nous nous situons dans un intervalle de grandeur $\frac{\pi}{2w}$ et puisque $\varphi(\sigma(t)$ est une fonction qui tend vers zéro si t tend vers l'infini et par hypothèse $\varphi(o) = o$.

- Nous pouvons substituer $\eta(t)$ et $\xi(t)$ dans l'équation intégrale en reprenant de nouveau un résultat du théorème 5:

$$\sigma(t) = h_o(t) + \int_o^t k_o(t-s)\varphi(\sigma(s))ds + \eta(t)\cos\nu + \xi(t)\sin\nu$$

d'où nous tirons:

$$\boxed{\eta(t)\cos\nu + \xi(t)\sin\nu = \sigma(t) - h_o(t) - \sigma_1(t)}$$

$$\text{puisque } \sigma_1(t) = \int_o^t k_o(t-s)\,\varphi(\sigma(s))ds$$

Considérons cette expression pour deux valeurs particulières de t:

$$t = t^* \;;\; \eta(t^*)\cos\nu + \xi(t^*)\sin\nu = \sigma(t^*) - h_o(t^*) - \sigma_1(t^*)$$

et

$$t = t^* + \frac{\pi}{2w} \;;\; \eta(t^* + \frac{\pi}{2w})\cos\nu + \xi(t^* + \frac{\pi}{2w})\sin\nu = \sigma(t^* + \frac{\pi}{2w}) - h_o(t^* + \frac{\pi}{2w}) - \sigma_1(t^* + \frac{\pi}{2w})$$

Or, si nous reprenons $\eta(t^* + \frac{\pi}{2w})$ et $\xi(t^* + \frac{\pi}{2w})$ dans les expressions (1) nous obtenons:

$$\eta(t^* + \frac{\pi}{2w}) = \xi(t^*) + \varphi_2(t^* + \frac{\pi}{2w})$$
$$\xi(t^* + \frac{\pi}{2w}) = -\eta(t^*) + \varphi_1(t^* + \frac{\pi}{2w})$$

Nous pouvons, dés lors, retirer les expressions suivantes:

$$\eta(t^*)\cos\nu + \xi(t^*)\sin\nu = \sigma(t^*) - h_o(t^*) - \sigma_1(t^*) \triangleq \varepsilon_1(t^*)$$

$$\xi(t^*)\cos\nu - \eta(t^*)\sin\nu = \sigma(t^* + \frac{\pi}{2w}) - h_o(t^* + \frac{\pi}{2w}) - \sigma_1(t^* + \frac{\pi}{2w}) - \varphi_1(t^* + \frac{\pi}{2w})$$

$$- \varphi_2(t^* + \frac{\pi}{2w}) \triangleq \varepsilon_2(t^*)$$

C'est-à-dire:

$$\xi(t^*)\cos\nu - \eta(t^*)\sin\nu = \varepsilon_2(t^*)$$

$$\xi(t^*)\sin\nu + \quad (t^*)\cos\nu = \varepsilon_1(t^*)$$

Nous avons: $\varepsilon_1(t^*), \varepsilon_2(t^*) \longrightarrow o$ quand $t^* \longrightarrow +\infty$

Puisque nous avons établi précédemment:

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = \lim_{t \to +\infty} h_o(t) = \lim_{t \to +\infty} \int_o^t k_o(t-s)\,\varphi(\sigma(s))ds = o$$

Nous obtenons facilement:

$$\xi(t^*) = \varepsilon_1(t^*)\sin\nu + \varepsilon_2(t^*)\cos\nu$$

$$\eta(t^*) = \varepsilon_1(t^*)\cos\nu - \varepsilon_2(t^*)\sin\nu$$

Dés lors,

$$|\xi(t^*)| + |\eta(t^*)| \leq 2|\varepsilon_1(t^*)| + 2|\varepsilon_2(t^*)|$$

Donc $|\xi(t^*)|$ et $|\eta(t^*)|$ peuvent être rendus arbitrairement petits si t^* devient important.

Or, t^* a été choisi arbitrairement. Nous obtenons:

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = \lim_{t \to +\infty} \xi(t) = o$$

Dés lors, $\lim_{t \to +\infty} z(t) = \lim_{t \to +\infty} (\xi(t) + i\eta(t))$

$$= \lim_{t \to +\infty} \xi(t) + i \lim_{t + \infty} \eta(t)$$

$$= o$$

De même, $\lim_{t \to +\infty} \overline{z}(t) = \lim_{t \to +\infty} (\xi(t) - i\eta(t)) = o$

Dés lors, $x_*(t)$ tend donc vers zéro si t tend vers l'infini.

4.4.-La solution $x_*(t) = (x(t), z(t), \overline{z}(t))$ vérifie la stabilité simple pour le système (II)

Position du problème:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) \\ \dot{\eta} = w\xi + b_2\varphi(\sigma) \\ \dot{\xi} = -w\eta + b_1\varphi(\sigma) \\ \sigma = c_1\xi + c_2\eta + (c,x) \end{cases}$$

avec $x(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)$ tq. $x(o) = x^\circ$

$\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) = c_1\xi(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + c_2\eta(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + (c,x(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ$

$\xi(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)$ tq. $\xi(o) = \xi^\circ$

$\eta(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)$ tq. $\eta(o) = \eta^\circ$

de plus:

$$\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) = h(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + \int_o^t k(t-s)\varphi(\sigma(s,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ))ds$$

où $h(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) = (c,e^{At}x^\circ) + a(\xi^\circ,\eta^\circ)\cos wt + d(\xi^\circ,\eta^\circ)\sin wt$

$$k(t) = (c,e^{At}b) + \alpha\cos wt + \beta\sin wt$$

Prouvons que la solution $x_*(t)$ du système d'équations différentielles (I) vérifie la stabilité simple.C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \quad ; \exists \eta > o \quad tq. \forall x_*^\circ \in R^{n+2} \quad tq. \ \| x_*^\circ \| < \eta \ ; \forall t \geq o$$

$$\Rightarrow \| x_*(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) \| < \varepsilon$$

où $x_*^\circ = (x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)$ défini dans R^{n+2}

De là,nous pouvons déduire la stabilité simple de la solution $x_*(t)$ de (II) car $z = \xi + i\eta$.(Les deux systèmes sont équivalents)

> La solution $x_*(t)$ du système (I) vérifie la stabilité simple
>
> ssi
>
> $\forall \varepsilon > o \quad \exists \delta > o$ tq. $\forall x^\circ \in R^n \quad \|x^\circ\| < \delta$
>
> $\forall \xi^\circ \in R \quad |\xi^\circ| < \delta$
>
> $\forall \eta^\circ \in R \quad |\eta^\circ| < \delta$
>
> $\forall t \geq o \implies \| x(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| < \varepsilon \ ; \ |\xi(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)| < \varepsilon$
>
> et $|\eta(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)| < \varepsilon$

<u>en utilisant la norme:</u> $\|x_*(t)\| = \mathrm{Sup}_{1\leq i\leq n+2} \lvert x_i(t)\rvert$ où $(x_1,\ldots,x_n) = x$ et $x_{n+1} = \xi$; $x_{n+2} = \eta$

Nous pouvons établir ce résultat de façon similaire au cheminement suivi pour établir la stabilité de la solution du système de contrôle direct avec matrice stable.

<u>ETAPE 1.-</u>

$$\boxed{\forall r > o \qquad \mathcal{B}(r) = \mathrm{Sup.}_{\substack{t > o \\ \|x^\circ_*\| \leq r}} \|x_*(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| < +\infty}$$

-. $\|x(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| \leq \|e^{At}\|\,\|x^\circ\| + \int_o^t \|e^{A(t-s)}\|\,\|b\|\,|\varphi(\sigma(s,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ))|\,ds$

en vertu de la forme de la solution x(t)

utilisons la stabilité de A : $\exists\ k_o, k_1 > o$

tq. $\|e^{At}\| < k_1 e^{-k_o t}$

$\leq k_1 e^{-k_o t}\|x^\circ\| + \dfrac{k_1\,\phi\,\|b\|}{k_o}$ puisque φ est bornée.

$$\|x(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| \leq B_1(r) = k_1 r + \frac{k_1\,\phi\,\|b\|}{k_o}$$

-. $[\eta^2(t) + \xi^2(t)] \leq s(\xi^\circ,\eta^\circ,x^\circ)$

où $s(\xi^\circ,\eta^\circ,x^\circ)$ est une fonction bornée dépendant des conditions initiales.

Du théorème 5, nous pouvons tirer la majoration suivante:

$$-\frac{1}{2\alpha}[\eta^2(t) + \xi^2(t)] \leq -(2\alpha)^{-1}(\xi^{\circ 2}+\eta^{\circ 2}) + \frac{\beta}{w\alpha}F(\sigma(o)) + \phi\int_o^\infty \Big[|h_o(\tau)| + \frac{\beta}{w\alpha}|h'_o(\tau)|\Big]\,d\tau$$

-. posons $(-2\alpha)^{-1}(\xi^{\circ 2}+\eta^{\circ 2}) \triangleq s_1(\xi^\circ,\eta^\circ)$

-. $\|h_o(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| = |(c, e^{At}x^\circ)|$

$\leq \|c\|\;\|x^\circ\|\quad k_1 e^{-k_o t}$ puisque A est stable.

$$\|h_o'(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ)\| = |(c, Ae^{At}x^\circ)|$$
$$\leq \|c\| \; \|A\| \; \|x^\circ\| \; k_1 e^{-k_o t}$$

nous obtenons:

$$\int_o^\infty \left[|h_o(\tau)| + \frac{\beta}{w\alpha}|h_o'(\tau)|\right] d\tau \leq \|c\| k_1 \|x^\circ\| \left[1 + \frac{\beta}{w\alpha} \|A\|\right] \int_o^\infty e^{-k_o\tau} d\tau$$
$$= \frac{\|c\| \; \|x^\circ\| \; k_1 \left[1 + \frac{\beta}{w\alpha} \|A\|\right]}{k_o}$$
$$\triangleq s_2(x^\circ)$$

$$-. \quad F(\sigma(o)) = \int_o^{\sigma(o)} \varphi(u)du \leq \phi\sigma(o) = \phi\left[(c,x^\circ) + c_1\xi^\circ + c_2\eta^\circ\right]$$
$$\leq \phi\left[\|c\| \; \|x^\circ\| + |c_1| \; |\xi^\circ| + |c_2| \, |\eta^\circ|\right]$$
$$\triangleq s_3(x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ)$$

Nous pouvons poser $s(x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ) = \sum_{i=1}^{3} s_i(x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ)(-2\alpha)$

Si nous prenons la condition initiale dans un domaine borné, soit: $\|x_*^\circ\| \leq r$, nous obtenons le fait que $|\eta(t)|$ et $|\xi(t)|$ sont bornées par une fonction dépendant directement des conditions initiales.

Dés lors, le résultat annoncé par l'étape 1 nous est acquis.

ETAPE 2.-

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall r > o & C(r) = \underset{\substack{\forall t \geq o \\ \|x_*^\circ\| \leq r}}{\text{Sup.}} \left\| \frac{d}{dt} \; x_*(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ) \right\| < +\infty \end{array}}$$

Pour cette étape, nous pouvons nous référer au résultat obtenu (§2-Chapitre I) dans des hypothèses similaires.

La démarche reste semblable.

De même, pour les étapes suivantes(3 à 6) qui permettent de mettre en évidence le caractère également uniformément continu des fonctions: $x_*(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ)$; $\varphi(\sigma(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ))$; $\varphi(\sigma(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ))\sigma(t, x^\circ, \xi^\circ, \eta^\circ)$

et $\varphi(\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ))\left[\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)-\delta^{-1}\varphi(\sigma(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ))\right.$, le raisonnement est similaire.

ETAPE 7.-

La fonction $R^+ \times R^{n+2} \longrightarrow R^+$

$$(t,x^\circ_*) \rightsquigarrow \varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\left[\sigma(t,x^\circ_*)-\delta^{-1}\varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\right]$$

tend vers o quand x°_* tend vers $o_{R^{n+2}}$ uniformément par rapport à $t \in R^+$ c'est-à-dire:

$\forall \varepsilon > o$; $\exists \mu > o$ tq. $\forall x^\circ_* \in R^{n+2}$ tq $\|x^\circ_*\| < \mu$; $\forall t \geq o$

nous avons : $\varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\left[\sigma(t,x^\circ_*)-\delta^{-1}\varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\right] < \varepsilon$

1°) Reprenons la majoration établie lors de la démonstration du théorème 5 qui fait apparaître l'intégrale de cette fonction.

$$\int_o^t \left[\varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\sigma(t,x^\circ_*) - \delta^{-1}\varphi^2(\sigma(t,x^\circ_*))\right] d\tau \leq -(2\alpha)^{-1}(\eta^{\circ 2}+\xi^{\circ 2}) + \frac{\beta}{w\alpha} F(\sigma(o)$$

$$+ \phi\int_o^\infty \left[|h_o(\tau)| + \frac{\beta}{w\alpha}\,|h_o'(\tau)|\right] d\tau$$

Nous pouvons affirmer:

$$\int_o^t \left[\varphi(\sigma(t,x^\circ_*))\sigma(t,x^\circ_*) - \delta^{-1}\varphi^2(\sigma(t,x^\circ_*))\right] d\tau \leq s(x^\circ_*) \;;\; \forall t \geq o, \;\; \forall \delta^* : o < \delta^* \leq \infty$$

$$\text{où } s(x^\circ_*) \longrightarrow o \text{ quand } x^\circ_* \longrightarrow o_{R^{n+2}}$$

Cette fonction $s(x^\circ_*)$ a été mise en évidence dans l'étape 1

2°) Aidons-nous de cette majoration pour montrer que nous avons le résultat annoncé par l'étape 7.

Nous pouvons par analogie avec le cas de contrôle direct (§ 2-Chapitre I) nous aider de cette majoration pour établir le résultat annoncé par l'étape 7.

ETAPE 8.-

Montrons que la fonction: $R^+ \times R^{n+2} \longrightarrow R$

$$(t,x^\circ_*) \rightsquigarrow \sigma(t,x^\circ_*)$$

tend vers zéro quand x°_* tend vers $o_{R^{n+2}}$, uniformément par rapport à $t \in R^+$ c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \;;\; \exists \mu > o \text{ tel que } \forall x^{\circ}_{*} \in R^{n+2} \text{ tq } \|x^{\circ}_{*}\| \leq \mu ;\; \forall t \geq o$$

$$\Rightarrow |\sigma(t, x^{\circ}_{*})| < \varepsilon$$

Nous procédons par l'absurde.Nous supposons:

$$\exists \varepsilon > o \quad \text{tq. } \forall \mu > o \quad \exists\, t_{\mu} \geq o \text{ et } \exists\, x^{\circ}_{*\mu} \quad \text{tq. } \|x^{\circ}_{*\mu}\| \leq \mu$$

$$\text{avec} |\sigma(t_{\mu}(x^{\circ}_{*\mu})| \geq \varepsilon$$

posons $\mu = \frac{1}{n}$ avec $n \in N_o$:

Nous voyons qu'il existe une suite (t_n) de réels $\geq o$

et une suite (x°_{*n}) de points de R^{n+2}

telles que pour tout $n \in N_*$; $\|x^{\circ}_{*n}\| \leq \frac{1}{n}$ et $|\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n})| \geq \varepsilon$

puisque σ est une fonction bornée toujours supérieure en valeur absolue à un nombre ε strictement positif,nous pouvons affirmer que: $\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n})$ converge vers un nombre l distinct de o.

Puisque φ est une fonction continue,nous avons également:

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n})) = \varphi(l) > o \text{ (puisque } l \neq o \text{ et } \varphi \text{ ne s'annule qu'en o.)}$$

Or,nous avons vu lors de l'étape précédente,que la fonction:

$$\varphi(\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n}))\left[\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n}) - \gamma^{*-1}\varphi(\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n}))\right]$$

tend vers zéro si n tend vers l'infini.C'est-à-dire:

$$\lim_{n \to +\infty} (\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n}) - \gamma^{*-1}\varphi(\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n})))\varphi(\sigma(t_n, x^{\circ}_{*n})) = o$$

Nous obtenons à partir de la limite ci-dessus:

$$l - \gamma^{*-1}\varphi(l) = o \iff l = \gamma^{*-1}\varphi(l)$$

c'est-à-dire:

$$\boxed{\gamma^{*} l^{2} = \varphi(l) l}$$

Or,par hypothèse,nous avons une condition de secteur imposée sur la fonction: telle que:

$$o < \sigma\varphi(\sigma) < \gamma^{*}\sigma^{2} \qquad \forall \sigma \in R_o$$

Nous devrions donc avoir $l\,\varphi(l) < l^{2}\gamma^{*}$ puisque $l \neq o$.

Ceci contredit le résultat obtenu ci-dessus.Notre hypothèse de l'absurde nous conduisant à une contradiction, nous acceptons donc le résultat annoncé par cette 8ème étape.

ETAPE 9.-

Vérifions la stabilité:

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists \mu > 0$ tq. $\forall x_*^\circ \in R^{n+1}$ tq. $\| x_*^\circ \| < \mu$

$\forall t \geq 0$ nous avons $\| x_* (t, x_*^\circ) \| < \varepsilon$

Nous allons procéder en deux phases: $\| x_*(t,x_*^\circ) \| = \text{Sup.} \ | x_i(t,x_*^\circ)|$

$i = 1, \dots, n+2$

1°) montrons $\| x(t,x_*^\circ) \| < \varepsilon$ où x est la solution associée au système de dimension n à matrice stable extrait de ce problème.
Nous avons vu au paragraphe 1, chapitre I que cette solution vérifie dans ces conditions, la stabilité simple.
C'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists \mu_1 > 0 \ \text{tq.} \ \forall x_*^\circ \in R^{n+1} \ \text{tq.} \ \| x_*^\circ \| < \mu_1 \ ; \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \| x (t, x_*^\circ) \| < \varepsilon$$

2°) montrons que $\forall \varepsilon > 0$; $\exists \mu > 0$ tq. $\forall x_*^\circ \in R^{n+2}$ tq. $\|x_*^\circ\| < \mu$

$\forall t \geq 0 \Rightarrow | \xi(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)|$ et $|\eta(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)| < \varepsilon$

$$\xi^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + \eta^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) \leq \eta^{\circ 2} + \xi^{\circ 2}$$

$$+ (-2\alpha) \ \frac{\| c \| \ \| x^\circ \| \ k_1}{k_o} \ (1 + \| A \| \frac{\beta}{w\alpha})$$

$$+ \phi (\| x^\circ \| \ \| c \| + |c_1| \, |\xi^\circ| + |c_2| \, |\eta^\circ|)$$ (par l'étape 1

Dés lors,

$$\xi^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + \eta^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) \leq 2\mu^2 - \frac{2\alpha \| c \| \mu k_1}{k_o} \ (1 + \| A \| \frac{\beta}{w\alpha})$$

$$+ \phi \mu \ (\| c \| + |c_1| + |c_2|)$$

posons $\mu = \inf.\left(\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon k_o}{-6\alpha \|c\| k_1 (1+\|A\| \frac{\beta}{w\alpha})} \frac{\varepsilon}{3\phi(\|c\| + c_1 + c_2)}\right)$

nous obtenons:

$$\forall \varepsilon > o \; ; \exists \mu > o \quad tq. \; \forall x_*^\circ \in R^{n+2} \quad tq. \; \|x_*^\circ\| < \mu$$

$$\forall t \geq o \qquad \xi^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) + \eta^2(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ) < \varepsilon$$

dés lors, nous pouvons affirmer:

$$\forall \varepsilon > o \; ; \exists \mu_2 > o \; tq. \quad \forall x_*^\circ \in R^{n+2} \quad tq. \; \|x_*^\circ\| < \mu_2$$

$$\forall t \geq o. \qquad |\xi(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)| < \varepsilon$$

$$\text{et } |\eta(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)| < \varepsilon$$

En regardant les résultats obtenus pour x, ξ et η et en prenant pour μ le min. de μ_1 et μ_2 nous obtenons bien le résultat espéré.

C'est-à-dire:

Nous obtenons la stabilité simple pour la solution nulle du système.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \varepsilon > o \quad \exists \mu > o \quad tq. \; \forall x_*^\circ \in R^{n+2} \quad tq. \; \|x_*^\circ\| < \mu ; \forall t \in R^+ \\ \|x_*(t,x^\circ,\xi^\circ,\eta^\circ)\| < \varepsilon\end{array}}$$

<u>Conclusion:</u>

Comme $x_*(t)$ est une solution qui vérifie:

- . la stabilité simple, c'est-à-dire:

$$\forall \varepsilon > o \; ; \exists \mu > o \quad tq. \; \forall x_*^\circ \in R^{n+2} \quad tq. \; \|x_*^\circ\| < \mu$$

$$\text{et } \forall t \geq o \implies \|x_*(t,x_*^\circ)\| < \varepsilon$$

de plus,

- . $\lim\limits_{t \to +\infty} x_*(t,x_*^\circ) = o \qquad \forall x_*^\circ \in R^{n+2}$

la solution $x_*(t)$ vérifie la <u>stabilité asymptotique globale</u>

Cette notion de stabilité est réalisée pour une classe de fonctions φ continues de R dans R telles que $\varphi(o) = o$ et vérifiant la condition de secteur $\sigma\varphi(\sigma) > o$; $\forall\sigma \neq o$.

Nous avons donc pour $x_*(t)$ une notion de stabilité absolue.

* * * * * * * *

§.5.-SYSTEME DE CONTROLE DIRECT AVEC UNE RACINE CARACTERISTIQUE NULLE

Nous allons montrer de quelle manière ce problème de contrôle direct peut se ramener à l'étude d'un problème de contrôle indirect. Nous partons d'un système de contrôle direct de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,y) \end{cases} \qquad (I)$$

où A admet une racine caractéristique nulle, les autres étant toutes à partie réelle strictement négative.
Il nous faut ramener ce système sous la forme d'un système de contrôle indirect, c'est-à-dire, sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - p\xi \end{cases} \qquad (II)$$

où A est une matrice régulière constante.

DETAILLONS CETTE TRANSFORMATION:

Nous partons de (I)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} + \varphi(\sigma) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_n \end{pmatrix} \\ \sigma = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Or, A est une **matrice** qui admet une racine caractéristique nulle. Nous pouvons, dés lors, particulariser la forme de la matrice A à l'aide d'une transformation régulière, par exemple, l'écrire sous la forme de JORDAN qui lui est équivalente.
Nous pouvons toujours permuter l'ordre des équations du système de façon à ce que la forme de JORDAN admette comme dernier bloc, celui associé à la valeur propre nulle.

C'est-à-dire sous la forme:

$$A' = \begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots & 0 \end{array}\right)$$

A est stable car A admet une et une seule valeur propre nulle par hypothèse. De plus, cette transformation est possible puisque:

$$\forall A \; ; \; \exists S \quad \text{tq.} \quad S^{-1} A S = A'$$

où A' est la forme de JORDAN associée à A. Puisque nous avons le théorème:

> Chaque matrice complexe A est équivalente dans un domaine complexe (par l'intermédiaire d'une matrice de transformation complexe P) à la matrice $A_o = \text{diag.}(C_{r1}(\lambda_1), \ldots, C_{rs}(\lambda_s))$ où λ_k sont les racines caractéristiques de A (ainsi que de chaque matrice semblable à A) toutes comprises, certaines peuvent se répéter. L'ordre de ces blocs $C(\lambda)$ est quelconque.

(cfr. PONTRIAGUINE)

Le système (I) est équivalent au système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \tilde{A} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \varphi(\sigma) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \\ \sigma = (c_1, c_2, \ldots c_{n-1}, c_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Posons:

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le système (I) est équivalant au système:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}\,\varphi(\sigma) \\ \overset{\circ}{y}_n = b_n\,\varphi(\sigma) \\ \sigma = (\tilde{c},x) + c_n y_n \end{cases}$$ où $\tilde{A}$ est stable.

Faisons apparaître la forme d'un système de contrôle indirect. Pour cela, posons $y_n = b_n \xi$, nous obtenons :

$$\overset{\circ}{y}_n = b_n \overset{\circ}{\xi}$$

Or, dans le système ci-dessus, nous avons:

$$\overset{\circ}{y}_n = b_n\,\varphi(\sigma)$$

Ceci nous permet de conclure:

Si $b_n \neq o$ Nous obtenons: $\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\sigma)$

et le système (I) équivaut au système : $$\begin{cases} \overset{\circ}{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}\,\varphi(\sigma) \\ \overset{\circ}{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (\tilde{c},x) - p\xi \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

où $p = -c_n\, b_n$

Si $b_n = o$

le système (I) équivaut à : $$\begin{cases} \overset{\circ}{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}\,\varphi(\sigma) \\ \sigma = (\tilde{c},x) \end{cases}$$

c'est-à-dire, le système de contrôle direct de dimension n (I) avec une racine caractéristique nulle se réduit à un système de contrôle direct de dimension n-1.

Il nous reste à voir que le système (III) est semblable au système (II), c'est-à-dire, qu'ils sont équivalents au point de vue stabilité absolue. Nous aurons alors ramené ce système de contrôle direct particulier à une forme équivalente, mais de contrôle indirect.

Voyons tout d'abord si (III) vérifie les conditions de stabilité absolue:

1°) Une condition nécessaire pour avoir la stabilité absolue est que $x = o$; $\sigma = o$ soit le seul point critique du système (III) c'est-à-dire, la seule solution du système:

$$\begin{cases} \tilde{A}x - \varphi(\sigma)\tilde{b} = o \\ \varphi(\sigma) = o \end{cases}$$

Or, $\varphi(\sigma) = o$ ssi $\sigma = o$

$\tilde{A}x = o$ ssi $x = o$ ($\tilde{A}$ est stable, donc son inverse existe.)

Nous avons donc bien cette condition nécessaire de stabilité absolue.

2°) Une seconde condition nécessaire de stabilité absolue est que p soit strictement positif.

<u>REMARQUE</u>: Si $p = o$,nous obtenons l'égalité: $c_n b_n = o$ .Dans le cadre de l'étude du système (III),nous avons l'hypothèse: $b_n \neq o$ .Donc,l'égalité ci-dessus implique $c_n = o$.

Dans ce cas,le système (I) est équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = \breve{A}x + \breve{b}\varphi(\sigma) \\ \sigma = (\breve{c},x) \end{cases}$$

et de nouveau,nous obtenons un système de contrôle direct d'une dimension inférieure.

Dans la suite,nous supposerons $p \neq o$.

Puisque nous avons $p \neq o$,nous pouvons appliquer la transformation suivante au système (III) :

$$\begin{cases} x = x \\ \sigma = (c,x) - p\xi \end{cases}$$

Cette transformation est non singulière,puisque : $\begin{vmatrix} 1 & o \\ c' & -p \end{vmatrix} \neq o$ .Elle transforme le système (III) comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} = (\tilde{c},\dot{x}) - p\dot{\xi} \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} = (\tilde{c},\tilde{A}x) - \rho\varphi(\sigma) \\ \rho = p - (\tilde{c},\tilde{b}) \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Puisque la transformation est régulière,le système (IV) obtenu est équivalent au système de départ (I).
Or,le système de contrôle direct s'écrit sous la forme générale de la façon suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\xi \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Mais,nous pouvons lui donner une représentation équivalente (toujours au point de vue stabilité absolue) par une transformation régulière de (x,ξ) vers (y,σ) définie comme suit:

$$\begin{cases} y = Ax + b\xi \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases}$$

Ceci nous donne: $\begin{cases} \dot{y} = A\dot{x} + b\dot{\xi} \\ \dot{\sigma} = (c,\dot{x}) - \rho\dot{\xi} \end{cases}$ avec $\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + b\xi = y \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \end{array}$

Nous obtenons le système (b) :

$$\begin{cases} \mathring{y} = Ay + b\varphi(\sigma) \\ \mathring{\sigma} = (c,y) - \rho\varphi(\sigma) \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Cette transformation effectuée est régulière ssi $\begin{vmatrix} A & b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} \neq o$. Puisque par hypothèse A est stable et donc inversible, la condition de régularité peut s'écrire: $\rho \neq -(c,A^{-1}b)$.

Nous devons encore vérifier la conservation d'un seul point critique à l'origine dans le dernier système obtenu(b) engendré par cette dernière transformation régulière.(Ceci est requis par la stabilité absolue.)

Montrons que $y = o$; $\sigma = o$ est le seul point critique de (b) c'est-à-dire, la seule solution de:

$$\begin{cases} Ay + b\varphi(\sigma) = o \\ \varphi(\sigma) = o \end{cases}$$

Or, $\varphi(\sigma) = o$ ssi $\sigma = o$

$Ay = o$ ssi $y = o$ (puisque A est stable).

Dés lors, si la condition de régularité de la dernière transformation n'est pas mise en défaut, nous pouvons définir la transformation inverse qui nous permettra de passer du système (b) au système (a).

Nous avons pu ramener le système de départ (I) à la forme (IV) qui est elle-même équivalente à (b). Dés lors, si la transformation suivante est régulière:

$$\begin{cases} x = \breve{A}y + \breve{b}\xi \\ \sigma = (\breve{c},y) - \rho\xi \end{cases} \qquad \text{où } \rho = p - (\breve{c},\breve{b})$$

le système (IV) qui est équivalent au système de départ (I) est équivalent au système:

$$\begin{cases} \mathring{y} = \breve{A}y + \breve{b}\xi \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (\breve{c},\breve{A}y) - \rho\xi \end{cases}$$

qui, lui, est un système de contrôle indirect avec une matrice A stable.

ANNEXE A

UN PROBLEME DE PILOTAGE AUTOMATIQUE D'UN AVION

Nous nous proposons de mettre en évidence des conditions suffisantes pour assurer la stabilité d'un tel problème,c'est-à-dire,nous allons étudier dans quelle mesure un faible écart de la trajectoire réelle provoqué par des perturbations permanentes et mesuré par rapport à la trajectoire idéale peut être rendu arbitrairement petit à condition que la perturbation et celle des conditions initiales soient suffisamment petites.

Nous avons les équations suivantes qui décrivent le mouvement d'une coordonnée de l'autopilote à tout instant corrigé par le centre de contrôle:

$$\begin{cases} T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi + \mu = 0 \\ \dot{\mu} = f^*(\sigma) \\ \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\mu \end{cases}$$

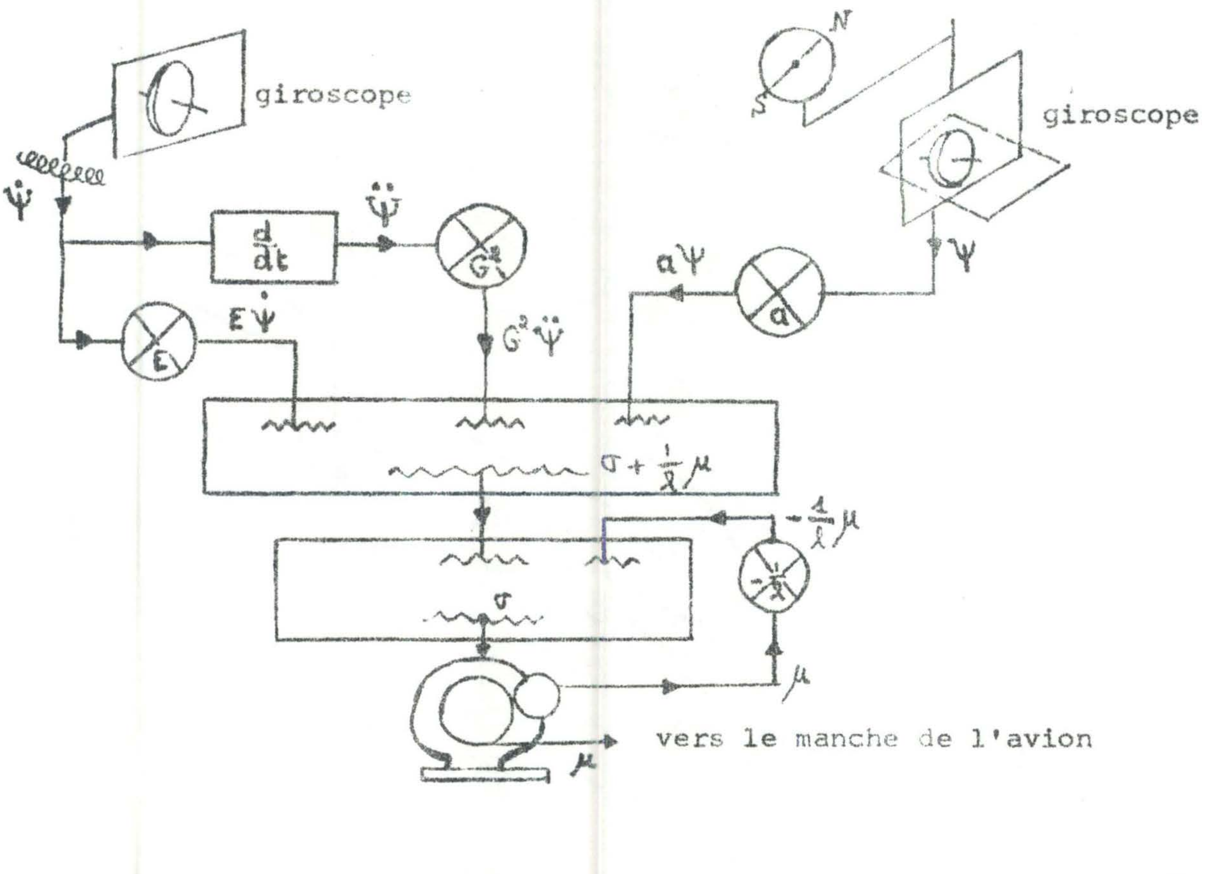
où: -. G^2, T^2 sont les coefficients des termes d'inertie.

-. E , U sont les coefficients des termes dissipatifs.

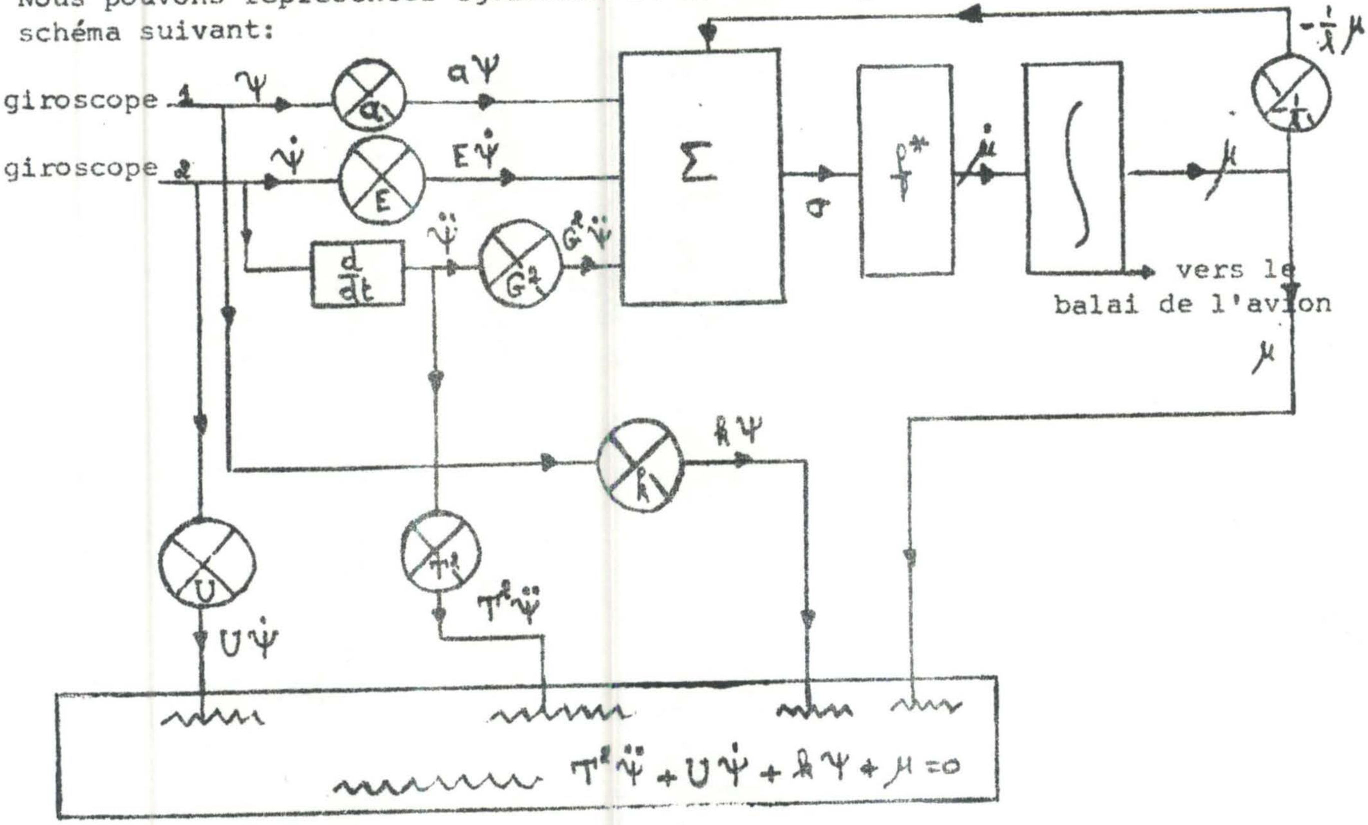
-. a , k sont les coefficients des termes de rappel.

-. μ est le contrôle.

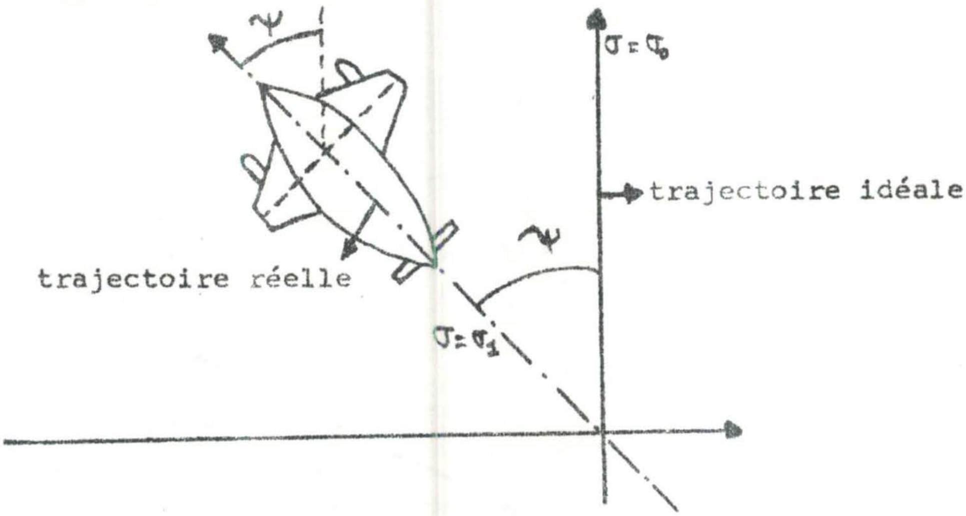
Pour le contrôle μ ,nous avons le schéma suivant:



Nous pouvons représenter également le mouvement général du système par le schéma suivant:



L'avion lors de son mouvement subit des perturbations dues au frottement de l'air,à la situation extérieure en général(vents,pluies,...),il est donc dévié par rapport à sa trajectoire idéale.Nous avons en tout instant t :



où Ψ est l'écart entre la trajectoire réelle et la trajectoire idéale.

Nous voyons trés bien que si l'avion se situe en $\sigma = \sigma_1$,le contrôle μ doit agir en sens inverse de la perturbation pour ramener la trajectoire réelle caractérisée par $\sigma = \sigma_1$ en $\sigma = \sigma_o$ qui caractérise la trajectoire idéale. Si $\sigma = \sigma_o$, le contrôle μ est nul,ceci est trés plausible puisque $\sigma = \sigma_o$ est la caractéristique de la trajectoire idéale.

Le contrôle μ doit,bien sûr,agir en sens inverse de la perturbation subie par l'avion.Ceci est exprimé par la condition de secteur imposée sur la fonction φ ,en effet,l'écartement enregistré par rapport à la position idéale se fait dans un sens ou dans l'autre.

$\boxed{\text{Si } \sigma > o}$ par hypothèse: $\sigma\varphi(\sigma) > o \Rightarrow \varphi(\sigma) > o$

dés lors $\dot{\mu} > o$ et $\mu > o$

Si l'avion se trouve sur la trajectoire correspondant à $\sigma = \sigma_1$,alors μ doit être positif pour ramener l'avion vers $\sigma = \sigma_o$ **correspondant à la trajectoire idéale.**

$\boxed{\text{Si } \sigma < o}$ par hypothèse: $\sigma\varphi(\sigma) > o \Rightarrow \varphi(\sigma) < o$

dés lors $\dot{\mu} < o$ et $\mu < o$

Si l'avion se trouve sur la trajectoire correspondant à $\sigma = \sigma_2$ alors μ doit être négatif pour ramener l'avion vers $\sigma = \sigma_o$ correspondant à la trajectoire idéale.

Il faut donner une pulsion"judicieuse" au système pour que l'avion revienne dans la bonne direction.

Il est à remarquer que si le contrôle μ doit agir en sens inverse de la perturbation,cette correction ne doit pas s'effectuer trop brusquement pour éviter les oscillations.Ceci est bien observé dans ce problème puisque, dans σ ,apparaissent des termes en $\dot{\psi}$ et même en $\ddot{\psi}$ qui contrôlent la vitesse de correction.

Nous allons appliquer la technique de fréquence pour étudier la stabilité de ce problème,mais auparavant,nous allons effectuer un changement de variables pour nous ramener à la forme générale d'un système de contrôle automatique de type indirect.

$$\begin{cases} T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi + \mu = o \\ \dot{\mu} = f^*(\sigma) \\ \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{\ell}\mu \end{cases}$$

où $U,k > o$

Posons:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \Psi = \eta_1 \; ; & \dfrac{d\Psi}{dt} = \sqrt{r}\,\eta_2 \; ; & \mu = i\,\xi \; ; & t = \dfrac{\tau}{\sqrt{r}} \\ p = \dfrac{U}{T^2} \; ; & q = \dfrac{k}{T^2} \; ; & r = \dfrac{i}{T^2} \; ; & n_2 = -1 \\ i = \dfrac{1T^2}{T^2+1G^2} \; ; & f(\sigma) = \dfrac{1}{i\sqrt{r}} f^*(\sigma) \; ; & b_{21} = -\dfrac{q}{r} & \\ b_{22} = -\dfrac{p}{\sqrt{r}} \; ; & p_1 = a - qG^2 \; ; & p_2 = (E-pG^2)\sqrt{r} & \end{array}}$$

Convention: Nous employons la notation suivante: $\frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}$; $\frac{d\eta}{d\tau} = \eta'$

$$- \eta_1' = \frac{d\eta_1}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \dot{\Psi}\,\frac{1}{\sqrt{r}} = \eta_2$$

$$\boxed{\eta_1' = \eta_2}$$

$$- \eta_2' = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{d\Psi}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{r}}\right] = \frac{\ddot{\Psi}}{r} = -\frac{1}{rT^2}\left[U\eta_2\sqrt{r} + k\eta_1 + \mu\right]$$

en utilisant l'équation du mouvement et le changement de variables en Ψ et $\dot{\Psi}$

$$\eta_2' = -\frac{1}{rT^2}\left[U\eta_2\sqrt{r}\right] - \frac{k}{rT^2}\eta_1 - \frac{i\,\xi}{rT^2}$$

$$= -\frac{p}{\sqrt{r}}\eta_2 - \frac{q}{r}\eta_1 - \left(\frac{i}{rT^2}\right)\xi \qquad \text{puisque } \frac{U}{T^2} = p \text{ et } \frac{k}{T^2} = q$$

$$\boxed{\eta_2' = b_{22}\eta_2 + b_{21}\eta_1 + n_2\,\xi} \qquad \text{puisque } r = \frac{i}{T^2} \quad \text{et } n_2 = -1$$

$$- \xi' = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\mu}{i}\right] = \frac{\dot{\mu}}{i\sqrt{r}}$$

$$\text{or } \dot{\mu} = f^*(\sigma) \qquad\qquad \boxed{\xi' = f(\sigma)}$$

$$- \sigma = a\Psi + E\dot{\Psi} + G^2\ddot{\Psi} - \frac{1}{1}\mu$$

$$\sigma = a\eta_1 + E\sqrt{r}\,\eta_2 + rG^2\eta_2' - \frac{1}{l}(i\xi)$$

$$\sigma = \left[a + rG^2 b_{21}\right]\eta_1 + \left[E\sqrt{r} + rG^2 b_{22}\right]\eta_2 + \left[rG^2 n_2 - \frac{1}{l}i\right]\xi$$

$$\text{or, } b_{21} = -\frac{q}{r} \quad ; \quad b_{22} = -\frac{p}{\sqrt{r}} \quad ; \quad n_2 = -1$$

$$\sigma = \left[a - qG^2\right]\eta_1 + \left[E - pG^2\right]\sqrt{r}\,\eta_2 - \left(rG^2 + \frac{i}{l}\right)\xi$$

$$\boxed{\sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi}$$

puisque $a - qG^2 = p_1$ et $\left[E - pG^2\right]\sqrt{r} = p_2$

et d'autre part, $rG^2 + \frac{i}{l} = 1$ en effet $\frac{lT^2}{T^2 + lG^2} = i$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{i}{T^2} = r \quad ; \quad T^2 \neq 0 \quad ; \quad l = i + lrG^2$$

donc: $\boxed{l = \frac{i}{l} + rG^2}$

Nous obtenons donc le système:

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_2 \\ \eta_2' = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + n_2\xi \\ \xi' = f(\sigma) \\ \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \end{pmatrix} \xi \\ \xi' = f(\sigma) \\ \sigma = (c, \eta) - \rho\xi \end{cases} \quad \text{où } c' = (p_1, p_2) \quad ; \quad \eta' = (\eta_1, \eta_2)$$

$$\rho = 1$$

Ceci correspond bien à un système de contrôle indirect de la forme étudiée.

Conditions de stabilité:

1.- $\rho > o$ dans $\sigma = (c, \eta) - \rho\xi$

dans notre cas, $\rho = +1$; cette première condition est donc vérifiée.

2.- A doit être une matrice stable.

1°) $|A| \neq o \Longleftrightarrow b_{21} \neq o$ (réalisé puisque q et r $\neq$ o)

2°)Calculons les racines de l'équation caractéristique.Elles doivent être à partie réelle strictement négative.

$$|I_2 p - A| = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -b_{21} & p-b_{22} \end{vmatrix} = o$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$p(p-b_{22}) - b_{21} = o$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$p^2 - pb_{22} - b_{21} = o$$

$$p_{1,2} = \frac{b_{22} \pm \sqrt{b_{22}^2 + 4b_{21}}}{2}$$

nous calculons le discriminant $\Delta = b_{22}^2 + 4b_{21}$ en fonction des données du problème:

$$b_{22}^2 + 4b_{21} = \frac{p^2}{r} - \frac{4q}{r} = \frac{1}{rT^2} \left(\frac{U^2}{T^2} - 4k \right)$$

avec $r, k > o$

nous devons envisager 3 cas suivant le signe de Δ

a) λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués: $\Delta < o$

c'est-à-dire:

$$\frac{U^2}{T^2} - 4k < o \qquad \boxed{k > \frac{U^2}{4T^2}}$$

nous devons avoir $\boxed{b_{22} < o}$ ceci est vérifié

puisque $b_{22} = -\frac{U}{T^2\sqrt{r}}$ avec U et r $> o$

b) λ_1 et λ_2 racines confondues: $\Delta = o$

c'est-à-dire: $\boxed{k = \frac{U^2}{4T^2}}$

nous devons également avoir $\boxed{b_{22} < o}$,ceci est réalisé.

c) $\underline{\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ racines réelles: } \Delta > o}$

c'est-à-dire: $\boxed{k < \dfrac{U^2}{4T^2}}$

$$\begin{cases} \lambda_1 < o \\ \lambda_2 < o \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 < o \\ \lambda_1 \lambda_2 > o \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b_{22} < o \\ b_{21} < o \end{cases}$$

car $b_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$

et $-b_{21} = \lambda_1 \lambda_2$

b_{22} est strictement négatif ainsi que b_{21}

puisque $b_{21} = -\dfrac{k}{T^2 r}$ avec $r,k > o$

$b_{22} = -\dfrac{U}{T^2\sqrt{r}}$ avec $U > o$

Ces trois cas peuvent être envisagés.Il est simple à partir des données pratiques du problème de voir dans quel cas on se trouve.

3.- Il nous reste à vérifier la condition de fréquence.
C'est-à-dire:

$$\exists\, q \geqslant o \text{ tq. } \operatorname{Re}\left\{(1-isq)G(s)\right\} \leq o \quad \text{où } G(s) = \tilde{k}_o(s) + \rho(is)^{-1} \ \forall s \neq o$$

$$k_o(t) = (c, A^{-1}e^{At}b) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} o & 1 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} o \\ -1 \end{pmatrix}; \ c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons étudié la forme de $\tilde{k}_o(s)$

$$\tilde{k}_o(s) = -(c, A^{-1}(isI + A)^{-1}b)$$

Nous devons donc pour satisfaire la condition de fréquance et ainsi assurer la stabilité,trouver un nombre $q \geqslant o$ tel que:

$$\operatorname{Re}\left\{(isq-1)\left[(c, A^{-1}(isI + A)^{-1}b) - \rho(is)^{-1}\right]\right\} \leq o \quad \forall s \neq o$$

Nous pouvons développer cette expression afin de voir comment se ramener à une simple relation algébrique,puis à un problème de minimisation.
Calculons $A^{-1}(isI + A)^{-1}b$.

$$A^{-1}(isI + A)^{-1}b = A^{-1}\left[\begin{pmatrix} is & o \\ o & is \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & 1 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right]^{-1} b = A^{-1}\left[\begin{pmatrix} is & 1 \\ b_{21} & b_{22}+is \end{pmatrix}\right]^{-1} b$$

$$A^{-1}(isI+A)^{-1}b = A^{-1}\frac{1}{is(b_{22}+is)-b_{21}}\begin{pmatrix} is+b_{22} & -b_{21} \\ -1 & is \end{pmatrix}\begin{pmatrix} o \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{21}(b_{22}is-s^2-b_{21})}\begin{pmatrix} -b_{22} & b_{21} \\ 1 & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{21} \\ -is \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{21}(b_{22}is-s^2-b_{21})}\begin{pmatrix} -b_{21}(b_{22}+is) \\ b_{21} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}(isI+A)^{-1}b = \frac{1}{b_{22}is-s^2-b_{21}}\begin{pmatrix} -b_{22} & -is \\ & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad (c, A^{-1}(isI+A)^{-1}b) = (p_1,p_2)\begin{pmatrix} -b_{22} & -is \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{b_{22}is-s^2-b_{21}}$$

$$= \frac{-p_1(b_{22}+is)+p_2}{b_{22}is-s^2-b_{21}}$$

La condition de fréquence s'écrit:

$$\exists\, q \geqslant o \quad tq. \quad \forall\, s \neq o :$$

$$\mathrm{Re}\left\{(isq-1)\left[\frac{-p_1(b_{22}+is)+p_2}{b_{22}is-s^2-b_{21}} - \varrho(is)^{-1}\right]\right\} \leqslant o \qquad (1)$$

$$\text{or,}\quad \frac{-p_1(b_{22}+is)+p_2}{(b_{22}is)-(s^2+b_{21})} = \frac{\left[-p_2(b_{22}+is)+p_2\right]\left[b_{22}is+(s^2+b_{21})\right]}{-b_{22}s^2-(s^2+b_{21})^2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \exists\, q \geqslant o \quad tq. \forall\, s \neq o$$

$$\frac{sq\left[p_1b_{22}^2s-p_2b_{22}s+p_1(s^2+b_{21})\right] + p_1b_{22}(s^2+b_{21})-p_2(s^2+b_{21})-p_1b_{22}s^2}{-b_{22}s^2-(s^2+b_{21})^2} - \varrho q \leqslant o$$

nous avons un problème algébrique du type:

voir si $\exists\, q \geqslant o$ tq. $\dfrac{sqA + B}{C} - q\Pi \leqslant o \quad \forall s \neq o$

Nous pouvons ramener ce problème à un simple problème de minimisation d'une fonction rationnelle réelle à une seule variable s .
Puisque c'est équivalent à voir si:

$$\exists q \geq 0 \quad \text{tq.} \quad q \leq \frac{B}{CD-sA} \quad \forall s \neq 0$$

c'est-à-dire, finalement, nous devons vérifier s'il existe un réel $q \geq 0$ tel que pour tout $s \neq 0$

$$q \leq \frac{p_1 b_{22}(s^2+b_{21})-p_2(s^2+b_{21})-p_1 b_{22} s^2}{\rho(-b_{22}s^2-(s^2+b_{21})^2)-s\left[p_1 b_{22}^2 s-p_2 b_{22} s+p_1(s^2+b_{21})\right]}$$

Il suffit pour voir si il existe oui ou non un nombre réel $q \geq 0$ satisfaisant cette relation, d'évaluer le minimum de la fonction rationnelle réelle en s du membre de droite de l'inégalité. Si celui-ci est non négatif, nous pouvons satisfaire la condition de stabilité sinon la condition de fréquence est en défaut.

* * * * * * * *

ANNEXE B

UN PROBLEME DE REACTEURS NUCLEAIRES

La théorie établie par V.M.POPOV à propos des systèmes de contrôle automatique peut être aussi appliquée à des problèmes extérieurs à cette classe de systèmes.

L'application suivante, tirée de la théorie de la puissance des réacteurs nucléaires a été traitée par SMETS dans son ouvrage: " Stability in the large of heterogeneous power reactors".

- Soit le scalaire η, la densité moyenne d'un neutron d'un réacteur nucléaire.

  La densité η du neutron satisfait une équation:

  $$\dot{\eta} = k\eta$$

  où k, la réactivité, est une fonction de l'état du réacteur.

- Nous pouvons supposer que la réactivité k est une fonction linéaire de η et des températures $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des diverses composantes du réacteur.

  Par exemple, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ peuvent être les températures du fuel, des agents de refroidissement, ...

  De façon spécifique:

  $$k = k_o + (c,y) - \varrho\eta$$ où $-k_o, \varrho$ sont des scalaires

  $-y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

- Si nous supposons que la chaleur transférée provient d'une conduction, nous pouvons appliquer la loi de réfrigération de NEWTON; nous trouvons que y doit satisfaire l'équation:

  $$\dot{y} = Ay - b\eta$$ où -A est une matrice régulière de dimension n x n.

  -b, c sont des vecteurs de dimension n

  $-\eta$ est un scalaire.

Nous obtenons donc le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay - b\eta \\ \dot{\eta} = k\eta \end{cases}$$

<u>Mettons en évidence les points critiques du système:</u>

Si (y, η) est un point critique du système, alors nous avons:

$$\begin{cases} Ay - b\eta = o \\ k\eta = o \end{cases} \iff \begin{cases} Ay - b\eta = o \\ (k_o + (c,y) - \varrho\eta)\eta = o \end{cases}$$

De la première équation du système, nous tirons: $y = A^{-1}b\eta$

Nous obtenons le système: $\begin{cases} Ay - b\eta = o \\ \{k_o + ((c,A^{-1}b) - \rho)\eta\}\eta = o \end{cases}$

Si $(c,A^{-1}b) - \rho \neq o$, nous avons deux points critiques.

- $\begin{cases} y_1 = o \\ \eta_1 = o \end{cases}$

- $\begin{cases} \eta_2 = (\rho - (c,A^{-1}b))^{-1} k_o \\ y_2 = A^{-1}b\eta_2 \end{cases}$

C'est-à-dire:

$$\begin{cases} \eta_2 = (\rho-(c,A^{-1}b))^{-1} k_o \\ y_2 = A^{-1}b(\rho-(c,A^{-1}b))^{-1} k_o \end{cases}$$

Remarque: Nous savons que η est un scalaire désignant la densité moyenne d'un neutron d'un réacteur nucléaire. Ce scalaire est donc positif. Dés lors, une seconde condition d'existence du deuxième point critique (y_2,η_2) est que η_2 soit positif.

Le point (y_1,η_1) correspond à l'état du réacteur lorsqu'il est au repos, c'est-à-dire lorsque celui-ci est coupé.

Le point (y_2,η_2) correspond à l'état continu d'un point représentatif (y,η) quand le réacteur est en marche. C'est-à-dire il correspond à **l'état du** réacteur maintenu à une température plus ou moins constante.

Nous voudrions que le point critique (y_2,η_2) soit asymptotiquement stable pour tout y et pour tout η positif.

Soit $\eta_2 \neq o$, nous allons faire un changement de variables de façon à amener le point (y_2,η_2) à l'origine.

$$x = y - y_2 \quad \Rightarrow \quad x = y - A^{-1}b(\rho - (c,A^{-1}))^{-1} k_o$$

$$\theta = \eta - \eta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \eta - (\rho - (c,A^{-1}b))^{-1} k_o$$

Etudions la transformation du système:

- $\mathring{y} = Ay - b\eta$ or, $\mathring{x} = \mathring{y}$

$y = x + y_2$

$\eta = \theta + \eta_2$

Nous obtenons: $\mathring{x} = A(x+y_2) - b(\theta + \eta_2)$

- $\mathring{\eta} = \mathring{\theta}$ or, $\mathring{\eta} = k\eta$

Nous obtenons: $\mathring{\theta} = k(\theta + \eta_2)$

$$
\begin{aligned}
- k &= k_o + (c,y) - \rho\eta \\
&= k_o + (c,x+y_2) - \rho(\theta + \eta_2) \\
&= k_o + (c,x) + (c,A^{-1}b(\rho - (c,A^{-1}b))^{-1}k_o) - \rho\theta - \rho(\rho - (c,A^{-1}b))^{-1}k_o \\
&= k_o\left[1 + [(c,A^{-1}b) - \rho][\rho - (c,A^{-1}b)]^{-1}\right] + (c,x) - \rho\theta \\
&= (c,x) - \rho\theta
\end{aligned}
$$

puisque $[(c,A^{-1}b) - \rho]\,[\rho - (c,A^{-1}b)]^{-1} = -1$. (Pour le vérifier, il suffit de considérer l'équation: $Ay_2 - b\eta_2 = o$ et les valeurs critiques y_2 et η_2)

Nous obtenons alors le système:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax - b\theta & \text{puisque } Ay_2 - b\eta_2 = o \\
\dot{\theta} = k(\theta + \eta_2) \\
k = (c,x) - \rho\theta
\end{cases}
$$

$$\text{où } \theta + \eta_2 = \eta > o$$

Posons $\sigma = \ln\left[(\theta + \eta_2)/\eta_2\right]$

(L'argument du logarithme est bien positif puisque η et η_2 sont tous deux positifs)

Exprimons θ en fonction de σ :

$$\frac{\theta + \eta_2}{\eta_2} = e^{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \theta = \eta_2(e^{\sigma} - 1)$$

Nous obtenons le système:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax - b\,\eta_2(e^{\sigma} - 1) \\
\dot{\sigma} = \dfrac{\eta_2}{\theta + \eta_2} \cdot \dfrac{\dot{\theta}}{\eta_2} = \dfrac{\dot{\theta}}{\theta + \eta_2} = k
\end{cases}
$$

C'est-à-dire:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax - b\,\eta_2\,(e^{\sigma} - 1) \\
\dot{\sigma} = (c,x) - \rho\eta_2(e^{\sigma} - 1)
\end{cases}
$$

Nous pouvons poser $\varphi(\sigma) = \eta_2\,(e^{\sigma} - 1)$, nous obtenons:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax - b\,\varphi(\sigma) \\
\dot{\sigma} = (c,x) - \rho\varphi(\sigma)
\end{cases}
\qquad \text{(a)}
$$

Il est à remarquer que φ est une fonction continue de R dans R puisque la fonction $\eta_2(e^{\sigma} - 1)$ est continue de R dans R.

Elle vérifie: $-\ \varphi(o) = o$ puisque $\varphi(o) = \eta_2(1-1) = o$

-la condition de secteur: $\sigma\varphi(\sigma) > 0$; $\forall \sigma \neq 0$

$\eta_2 > 0$ par hypothèse

$$\sigma\varphi(\sigma) > 0 \iff \sigma(e^{\sigma} - 1) > 0$$

$$\text{si } \sigma > 0 \Rightarrow e^{\sigma} > 1 \Rightarrow \sigma(e^{\sigma}-1) > 0$$

$$\text{si } \sigma < 0 \Rightarrow e^{\sigma} < 1 \Rightarrow \sigma(e^{\sigma}-1) > 0$$

Nous obtenons donc un système qui se ramène à un système de contrôle indirect mais sous la forme standard (a).
D'autre part, nous avons étudié (Chapitre 2 § 4) la correspondance entre la forme standard du système de contrôle indirect (a) en (x,σ) et la forme en (x,ξ) suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \varphi(\sigma)\, b \\ \dot{\sigma} = (c,Ax) - \rho\varphi(\sigma) \\ \rho = \gamma + (c_1,b) \end{cases}$$

C'est-à-dire la transformation suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \varphi(\sigma) b \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c_1,x) - \gamma\xi \end{cases} \xrightarrow[\substack{x = x \\ \sigma = (c_1,x) - \gamma\xi}]{} \begin{cases} \dot{x} = Ax - \varphi(\sigma)\, b \\ \dot{\sigma} = (c,Ax) - \rho\varphi(\sigma) \\ \rho = \gamma + (c_1,b) \end{cases}$$

Cette transformation est non singulière si $\gamma \neq 0$.

Adaptons cette transformation à ce cas présent:
Recherchons la valeur de γ :

$$\gamma = \rho - (c_1,b) \qquad \text{où } c_1 = cA^{-1}$$

$$\gamma = \rho - (cA^{-1},b)$$

Il nous faut $\gamma \neq 0$, or, cette condition est imposée plus haut pour assurer l'existence du second point critique (y_2, η_2).
Nous pouvons dès lors écrire (a) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - b\,\varphi(\sigma) \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (cA^{-1},x) - \gamma\xi \end{cases} \qquad \text{où } \gamma = \rho - (cA^{-1}b)$$

Mais, ce système ne correspond pas encore exactement à la forme du système de contrôle indirect traité par V.M.POPOV dans la technique de fréquence. Pour nous y ramener, nous faisons un nouveau changement de variables: $x = z - b\xi$ (Cette transformation est régulière sinon nous aurions $z = \xi = 0$).

Le nouveau système s'écrit:

$$\begin{cases} \mathring{z} - b\,\mathring{\xi} = A(z - b\xi) - b\varphi(\sigma) \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (cA^{-1},(z-b\xi)) - \gamma\xi \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathring{z} = Az - Ab\,\xi \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (cA^{-1},z) - \rho\xi \end{cases} \qquad \text{où } \rho = (cA^{-1},b) + \gamma$$

Nous obtenons bien un système se présentant comme un système de contrôle indirect général du type:

$$\begin{cases} \mathring{x} = Ax + b_o\xi \\ \mathring{\xi} = \varphi(\sigma) \\ \sigma = (c,x) - \rho\xi \end{cases} \qquad \text{où:} \quad \begin{aligned} x &= z \\ A &= A \\ b_o &= -Ab \\ c &= cA^{-1} \\ \rho &= (cA^{-1},b) + \gamma \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer à ce système la technique de fréquence. Ceci montre clairement le fait que la technique de fréquence établie par V.M.POPOV ne se limite pas uniquement à l'étude de problèmes de contrôle automatique puisque ici, elle s'applique à un problème physique lié à la puissance des réacteurs nucléaires.

* * * * * * * *

ANNEXE C

DEMONSTRATION DU LEMME DE BARBALAT

LEMME:

> Soit f une fonction positive, intégrable et uniformément continue sur R^+
> alors, $f(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$

Démonstration:

Procédons par l'absurde.

Supposons $f(t) \not\to 0$ quand $t \to \infty$

$\Rightarrow \exists \{t_n\}$ avec $t_n \to \infty$ et telle que $f(t_n) > \alpha > 0$; $\forall n \geq 1$

-Nous savons que f est uniformément continue.

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists \beta > 0 \quad \text{tq.} \ \forall \ |t - t_n| \leq \beta \Rightarrow |f(t) - f(t_n)| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$

Posons $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$; nous obtenons:

$$|f(t) - f(t_n)| < \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \forall \ |t-t_n| < \beta$$

$$|f(t_n)| - |f(t)| \leq |f(t) - f(t_n)|$$ puisque $f(t) > 0; \forall t$

$$\Rightarrow \quad -|f(t)| < \frac{\alpha}{2} - |f(t_n)|$$

$$\Rightarrow \quad f(t) > -\frac{\alpha}{2} + f(t_n)$$ en utilisant toujours le caractère positif de $f(t)$ $\forall t \in R^+$

$$f(t) > \frac{\alpha}{2}$$

En résumé, pour un ε fixé égal à $\frac{\alpha}{2}$ nous avons:

$$\exists \beta > 0 \quad \text{tq.} \ \forall \ |(t-t_n)| \leq \beta \Rightarrow f(t) > \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

-Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que les intervalles $(t_n - \beta, t_n + \beta)$ ne se chevauchent pas. Nous obtenons alors :

$$\int_0^\infty f(t)dt \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_n-\beta}^{t_n+\beta} f(t)dt \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{2} 2\beta = N\alpha\beta \quad ; \quad \forall N \geq 1$$

Ceci contredit le caractère intégrable de f sur R^+

L'hypothèse de l'absurde n'est donc pas acceptable, f s'annule donc si t tend vers l'infini.

ANNEXE D

EXISTENCE D'UNE SOLUTION POUR UN SYSTEME DE CONTROLE AUTOMATIQUE AVEC RETARDEMENT

THEOREME D'EXISTENCE:

Considérons un système (I) de la forme:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-h)) \quad \text{où } h > o$$

Supposons que f soit continue dans tous ses arguments, alors,ce système admet au moins une solution que nous construisons pas à pas.

Démonstration:

Etant donnée une fonction $\varphi_o(t)$ continue sur $[t_o-h,t_o]$ nous formons le système:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),\varphi_o(t-h)) \qquad t_o \leq t \leq t_o+h$$

Considérons une solution de ce système déterminée par la condition initiale $x(t_o) = \varphi(t_o)$

Soit $\varphi_1(t)$ la solution,elle existe en vertu des hypothèses de continuité.

Si cette solution est définie sur le segment $[t_o,t_o+h]$,nous formons le nouveau système:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),\varphi_1(t-h) \qquad t_o+h \leq t \leq t_o+2h$$

et nous considérons une solution de ce système déterminée par la condition initiale $x(t_o+h) = \varphi_1(t_o+h)$.

Soit $\varphi_2(t)$ cette solution,elle existe toujours en vertu des hypothèses de continuité.

En général,supposons que $\varphi_{k-1}(t)$ soit définie sur l'intervalle $[t_o+(k-2)h,t_o+(k-1)h]$

Nous formons le système:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),\varphi_{k-1}(t-h))$$

$$\text{avec } t_o+(k-1)h \leq t \leq t_o+kh$$

Nous considérons de nouveau une solution de ce système avec:

$$x(t_o+(k-1)h) = \varphi_{k-1}(t_o+(k-1)h)$$

Nous la notons $\varphi_k(t)$

Une solution du système (I), $x(t)$, définie par la valeur initiale $\varphi_o(t)$ sera donnée par les relations:

$$x(t) = \varphi_k(t) \qquad \forall t \in [t_o+(k-1)h, t_o+kh]$$

avec $k = 0,1,2,\ldots$

Cette fonction $x(t)$ est continue. De plus, par construction, elle est différentiable dans les points intérieurs des intervalles $[t_o+(k+1)h, t_o+kh]$; $k \geq 1$ et admet une dérivée continue aux points t_o+kh; $k \geq 1$

(Au point t_o, seule, la dérivée à droite existe).

Il est à remarquer que si $f(t,x,y)$ vérifie la condition de LIPSCHITZ par rapport à x, quel que soit y, alors, il existe une solution simple qui coïncide avec φ_o en $[t_o-h, t_o]$ parce que les fonctions $\varphi_k(t)$ sont déterminées de façon unique et chaque solution coïncide avec $\varphi_k(t)$ dans $[t_o+(k-1)h, t_o+kh]$.

\- - -

* * * * * * * *

BIBLIOGRAPHIE

C.CORDUNEANU:"Integral equations and stability of feedback systems"
Academic press,New-York -London 1965

"Sur une équation intégrale non linéaire"
Premier article 1963

C.A. DESOER AND M.VIDYASAGAR: "Feedback systems:Input-Output properties"
Academic press,New-York -San Francisco - London 1975

A.HALANAY:"Differential equations:Stability,oscillations,time-lags"
New-York 1966

J.K.HALE:"Functionnal Differential Equations"
Springer verlag,New-York,Heidelberg,Berlin 1971

"Ordinary Differential Equations"
Wiley-interscience,New-York - London - Sidney - Toronto 1969

J.F.LA SALLE AND S.LEFSCHETZ:"Stability by LIAPOUNOV's Direct Method with Applications"
Academic press - New-York 1961

S.LEFSCHETZ:"Stability of Nonlinear Control Systems"
Academic press,New-York - London 1965

A.M.LETOV:"Stabilité des Systèmes de règlage"
Moscou 1962

A.KH.GELIG:"Stability in Critical Cases of Control Systems with Distributed Parameters"
Article 20 janvier 1965. Automation and Remote Control Vol.27 No4
(527 - 534)

J.DIEUDONNE:"Eléments d'Analyse"
Gauthier Villars 1972

L.PONTRIAGUINE:Equations différentielles ordinaires"
Editions Mir Moscou 1969

N.ROUCHE ET J.MAWHIN:"Equations différentielles ordinaires"
Tome 2:Stabilité et solutions périodiques"
Masson and Cie Paris 1973

I.W.SANBERG:"Some results on the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations"
Article 2 février 1965 Bell system Techn. Journal XLIV (871 - 898)

"Some Stability Results Related of those of V.M. POPOV"
Bell System Techn.Journal XLIV 15 juillet 1965
(2133 - 2148)

H.H.SCHAEFER: "Topological Vector Spaces"
The MacMillan Company - New-York 1966

D.R.SMART: "Fixed point Theorems"
Cambridge University Press 1974

B.SZ. NAGY and F.RIESZ: "Leçons d'Analyse Fonctionnelle"

K.YOSIDA: "Fonctional Analysis"
Springer, Berlin and New-York 1965

* * * * * * * *