

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Plasmons de surface autour de N trous sphériques et équation de Laplace

Botron, Arlette; Censier, Maggy

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX
NAMUR



Année académique 1975-1976

PLASMONS DE SURFACE AUTOUR DE N TROUS SPHERIQUES

et

EQUATION DE LAPLACE

LABORATOIRE
DE
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE
PHYSIQUE DU SOLIDE

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de Licencié en sciences
mathématiques

par

Arlette BOTRON
et

PROMOTEUR :
André RONVEAUX

Maggy CENSIER

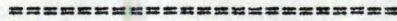
FMB 1/1976/8

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude envers toutes les personnes qui nous ont aidées à la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions Monsieur le Professeur Ronveaux qui a dirigé notre travail avec compétence et dextérité.

Nous sommes particulièrement reconnaissantes envers Monsieur Moussiaux dont l'aide et la bonne humeur furent précieuses durant cette année.

I N T R O D U C T I O N .



A. Généralités.

Il a été observé que, sous des températures élevées, des voids (cavités sphériques) se créent dans les métaux soumis à de fortes radiations et produisent ainsi une augmentation de volume. Les voids proviennent de l'agglomération de vacances, cavités qui apparaissent généralement au hasard durant l'irradiation. Cependant, sous des conditions expérimentales particulières, les voids s'arrangent suivant un réseau dont la structure et l'orientation sont analogues à celles des cristaux.

Durant ces dernières années, on s'est beaucoup intéressé aux processus nucléaires responsables de la formation de voids, étant donné l'importance technologique de l'accroissement de volume du matériau irradié.

En pratique, on remarque que le volume du void divisé par le volume total peut atteindre 10 % si le métal est soumis à une radiation importante.

Récemment, on a découvert que les plasmons (c'est-à-dire les oscillations collectives du gaz d'électrons dans un métal) jouent un rôle important dans la détermination de l'énergie de surface sur la frontière séparant le vide du métal.

Il est indispensable d'élucider le mécanisme responsable de la nucléation et de la formation de voids, et cela avant 1985, en effet, plus tard par suite de l'option énergétique nucléaire, les coûts dus aux dommages ou à la prévention de ceux-ci s'élèveront à 3.000 millions de dollars par an aux USA.^[1]

B. Equations du problème.

Le but de ce travail est d'étudier l'interaction entre les voids suivant la théorie de Lipshitz sur les forces de Van der Waals.^[2]

On désire obtenir les modes propres du champ électromagnétique d'un solide infini dans lequel se trouvent des cavités séparées par des distances finies.

On suppose que les distances entre les voids sont suffisamment petites que pour négliger les effets de retard.

On peut représenter le milieu métallique par un continuum diélectrique isotrope grâce à une fonction diélectrique dépendant de la fréquence : $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ où $\omega_p = (4\pi N e^2 / m)^{1/2}$ est la fréquence de plasma des électrons du métal (N est la densité électronique - électron de masse m et de charge e). Pour le vide $\epsilon(\omega) = 1$.

Le problème consiste à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, où V est le potentiel, plus les conditions aux frontières de l'électrodynamique: on impose la continuité de la composante normale du déplacement électrique $\vec{D} = -\epsilon \text{grad } V$ et de la composante tangentielle du champ électrique $\vec{E} = -\text{grad } V$ à la surface des voids.

Ces conditions restreignent les fréquences possibles des modes électromagnétiques aux valeurs $\omega_i(D)$ qui dépendent de la distance entre les voids.

L'énergie d'interaction s'exprime alors comme variation de l'énergie de point zéro :

$$W(D) = \frac{1}{2} \hbar \sum_i \left[\omega_i(D) - \omega_i(\infty) \right]$$

où h est la constante de Planck et où l'indice de sommation porte sur tous les modes y compris les dégénérescences éventuelles.

C. Modes d'un trou isolé.

Pour un void sphérique, la recherche des modes w se fait exactement de la même façon que pour un solide sphérique dans le vide [3]. En effet, il suffit simplement de remplacer $\mathcal{E}(w)$ par $\mathcal{E}^{-1}(w)$ dans les équations de continuité.

Le potentiel est donné par :

$$V = \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \left[A r^\ell + B r^{-(\ell+1)} \right]$$

où $Y_{\ell m}$ est un harmonique sphérique et où r^ℓ et $r^{-(\ell+1)}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation de Laplace radiale.

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions de régularité à l'origine et à l'infini et par les conditions de continuité à la surface de la sphère $r = R$.

Donc, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, les potentiels ont pour forme respective :

$$V^{\text{int}} = A \sum_{\ell, m} Y_{\ell m} r^\ell$$

$$V^{\text{out}} = B \sum_{\ell, m} Y_{\ell m} r^{-(\ell+1)}$$

Pour un void, les conditions aux frontières sont :

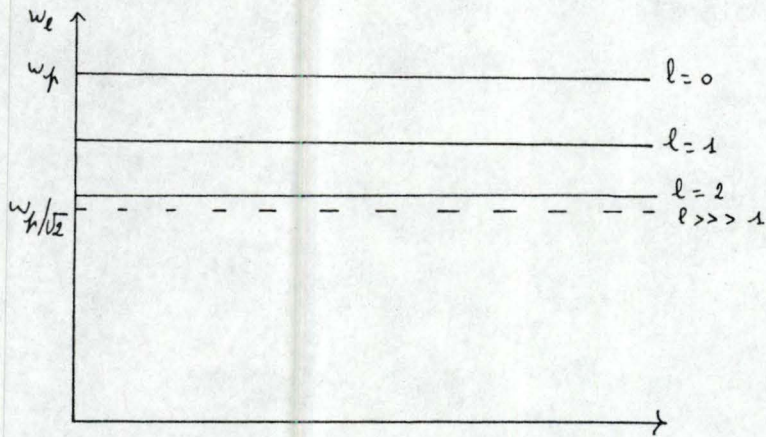
$$A \cdot R^\ell = B \cdot R^{-(\ell+1)}$$

$$1 \cdot A \cdot R^{(\ell-1)} = -\mathcal{E}(w) \cdot (\ell+1) \cdot B \cdot R^{-(\ell+2)}$$

Utilisant l'équation $\mathcal{E}(w) = 1 - \frac{w^2}{w^2}$, la condition de compa-

tibilité entre les 2 équations précédentes donne la relation de dispersion : $\omega_l = \omega_p \left(1 - \frac{1}{2l+1}\right)^{1/2}$, $l = 0, 1, 2, \dots$

Dans la figure suivante, nous représentons les spectres des premiers modes

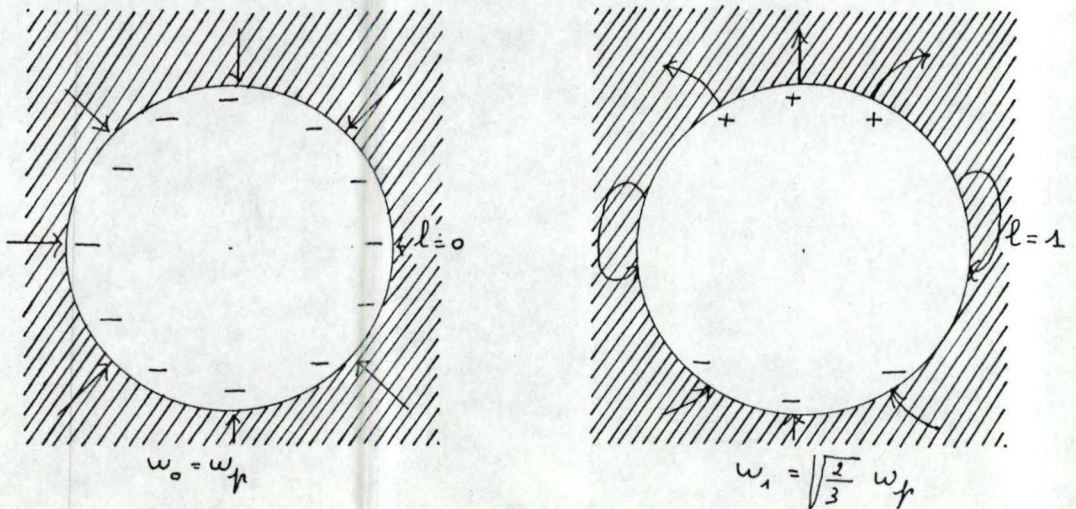


Cette figure donne le spectre des quanta possibles du plasmon de surface d'un void sphérique dans le métal.

Le niveau l est $(2l + 1)$ fois dégénéré. Pour les l grands, il y a convergence vers la limite $\omega_p / \sqrt{2}$.

Le spectre du void a pour limite supérieure la fréquence $\omega = \omega_p$. Dessinons maintenant les oscillations de courants d'électrons autour d'un void correspondant au mode $l = 0$ et au mode dipolaire $l = 1$.

La densité d'électron demeure uniforme partout sauf à la surface où les charges s'accumulent.



D. Plan du travail.

Dans la première partie de ce mémoire, on calcule jusqu'à l'ordre quatre les modes d'oscillations pour deux sphères pleines (ou cavités) égales, de rayon R et séparées par une distance D . Nous résolvons l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques pour lesquelles elle est partiellement séparable.

Les conditions aux frontières donnent un système infini d'équations linéaires homogènes. La compatibilité de ces équations impose au déterminant du système d'être nul. Ceci peut s'écrire $A \vec{X} = \lambda B \vec{X}$ où les valeurs propres $\lambda_n = \xi(w)$ sont les fréquences des modes de surface.

Nous résolvons ce problème sous la forme $B^{-1}A \vec{X} = \lambda \vec{X}$ par la méthode des perturbations : nous développons B^{-1} , A , \vec{X} , λ en série de z ($z = \frac{R}{D} (1 - \frac{R^2}{D^2} \dots)$).

Le calcul des λ_n étant connu jusqu'au troisième ordre, ^[2] nous le prolongeons au quatrième ordre.

Vu le nombre important de produits matriciels, nous employons l'ordinateur.

Nous établissons que la contribution des termes en $(\frac{R}{D})^4$ est nulle et nous calculons enfin l'énergie de Van der Waals à partir des valeurs de ξ .

Dans la deuxième partie, nous considérons N sphères pleines (ou N cavités) quelconques, alignées. Nous utilisons N systèmes de coordonnées sphériques d'origines aux centres des sphères et résolvons l'équation de Laplace dans chacun des systèmes. Les conditions de continuité nous donnent quatre séries de N équations.

Nous restreignons l'exploitation à N cavités identiques de rayons R , séparées par des distances D . Pour vérifier la relation de compatibilité, nous annulons un déterminant de $N \times N$ matrices infinies. La permutation de certaines lignes nous permet de grouper les termes de même puissance en $\frac{R}{D}$.

Nous obtenons ainsi $\infty \times N$ blocs de dimension $N \times \infty$.

Nous recherchons ensuite la première correction des modes w_{mm} ce qui nous amène à annuler un déterminant d'ordre N .

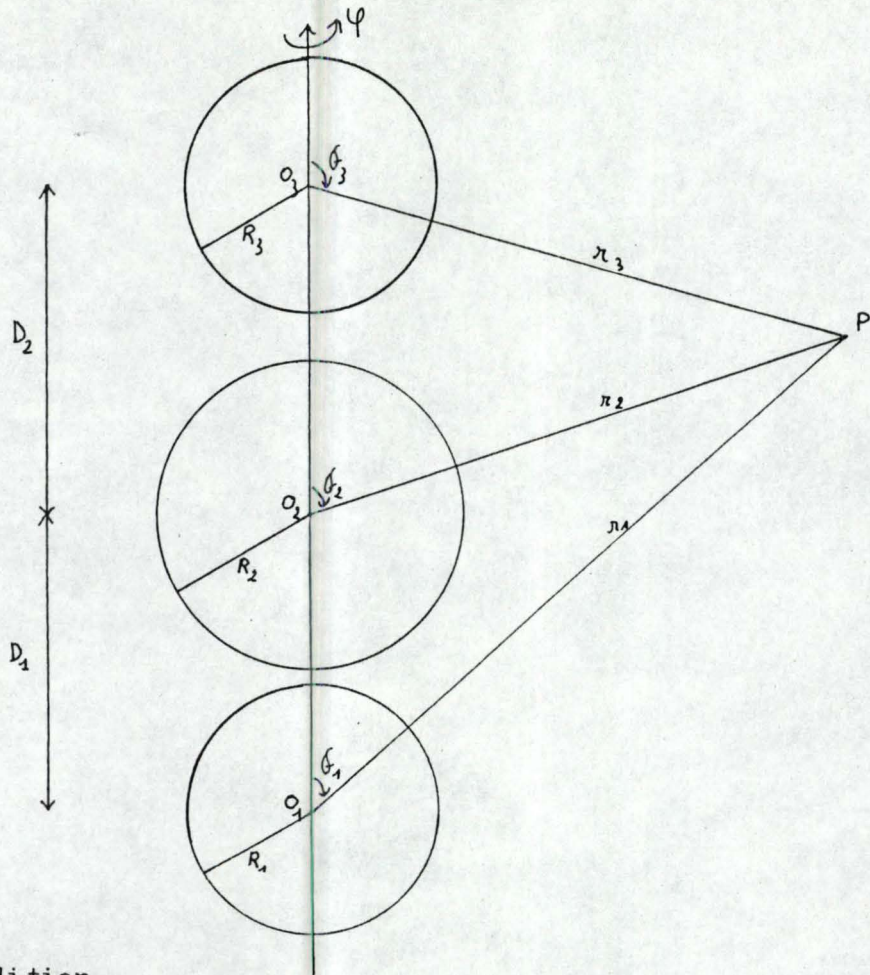
Pour le paramètre $\lambda = \frac{m + (m + 1)\varepsilon}{\varepsilon - 1}$, nous obtenons un problème aux valeurs propres.

Nous résolvons ce déterminant pour N variant de un à cinq. La théorie des groupes permet de réduire la dimension du déterminant.

Pour $N = 5$, nous avons une équation du troisième degré dont les solutions sont calculées par ordinateur.

Enfin, nous traçons les courbes des différents modes $w_{m,m}$ en fonction de m et de $\frac{R}{D}$.

Organigramme de la deuxième partie.



Théorème d'addition.

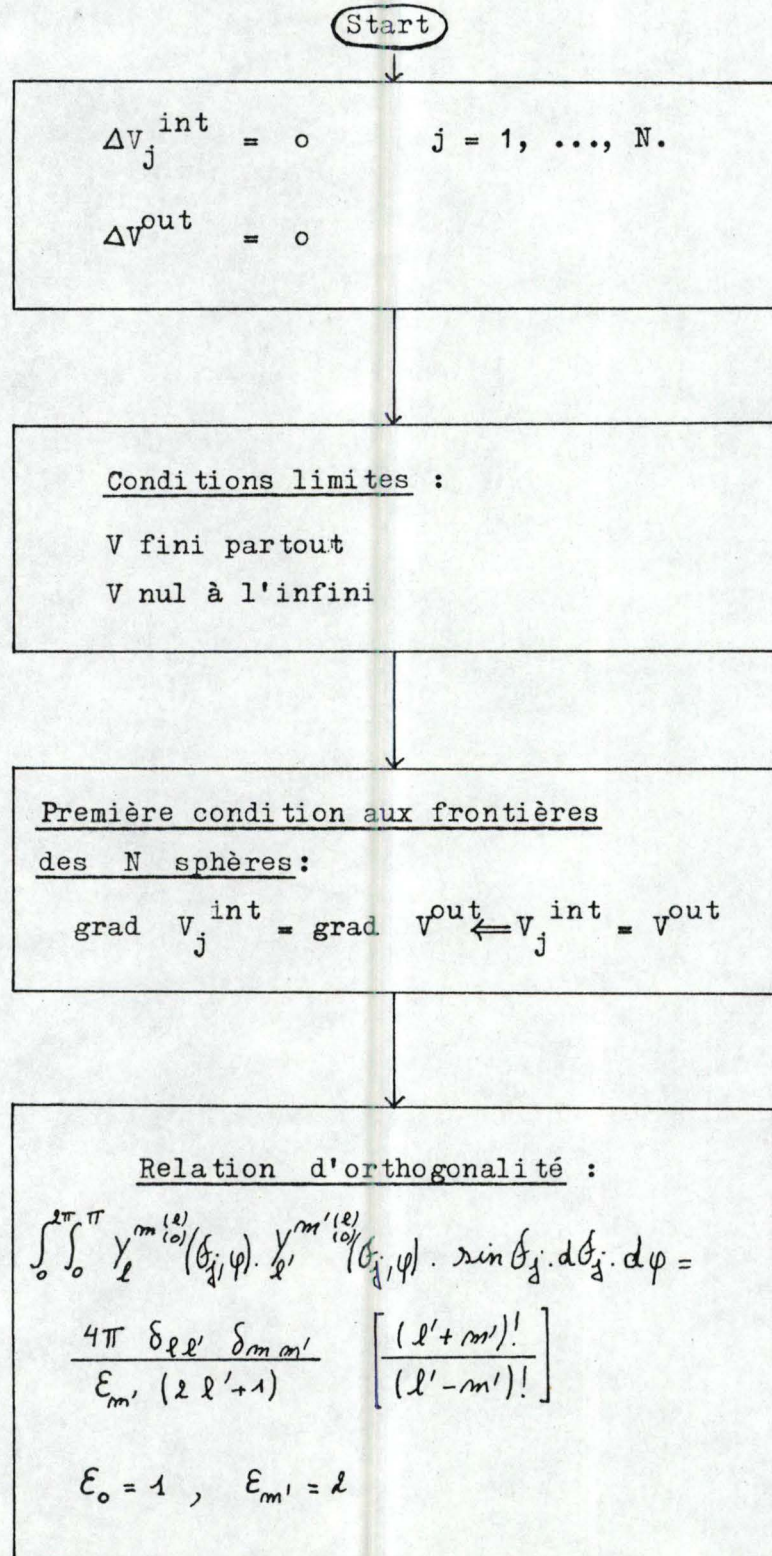
$$\frac{Y_e^{m(0)}(\mathcal{G}_{j-k}, \varphi)}{x_{j-k}^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p_1=0}^{\infty} (-1)^{p_1} \frac{(l+m+p_1)!}{(2m+p_1)!} \frac{x_j^{m+p_1}}{d_{j,j-k}^{l+m+p_1+1}} Y_{m+p_1}^{m(0)}(\mathcal{G}_j, \varphi)$$

$$\frac{Y_e^{m(0)}(\mathcal{G}_{j+k}, \varphi)}{x_{j+k}^{l+1}} = \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p_1=0}^{\infty} \frac{(l+m+p_1)!}{(2m+p_1)!} \frac{x_j^{m+p_1}}{d_{j,j+k}^{l+m+p_1+1}} Y_{m+p_1}^{m(0)}(\mathcal{G}_j, \varphi)$$

[8]

$$\text{avec } \begin{cases} d_{j,j-k} = D_{j-1} + D_{j-2} + \dots + D_{j-k} \\ d_{j,j+k} = D_j + D_{j+1} + \dots + D_{j+k-1} \end{cases}$$

Position du problème :



①

Deuxième condition aux frontières
des N sphères :

$$(\epsilon_j \text{ grad } v_j^{\text{int}}) \cdot \vec{n} = (\epsilon \text{ grad } v^{\text{out}}) \cdot \vec{n}$$

$$\epsilon_j \frac{\partial v_j^{\text{int}}}{\partial R_j} = \epsilon \frac{\partial v^{\text{out}}}{\partial R_j}$$

$$j = 1, \dots, N$$

Formulation matricielle :

N sphères identiques séparées par des
distances égales :

$$R_j = R \quad j = 1, \dots, N$$

$$D_j = D \quad j = 1, \dots, N-1$$

Forme matricielle générale
N x N blocs de dimension infinie

Permutation de lignes pour grouper
les termes de même puissance en $\frac{R}{D}$
 $\infty \times N$ blocs de dimension $N \times \infty$

②

2

Compatibilité de ces équations :
déterminant = 0

Première correction des modes $w_{m,m}$

Négliger les termes en $(\frac{R}{D})^{2m+3}$,
 $(\frac{R}{D})^{2m+5}$, ...
 \Rightarrow déterminant de A d'ordre N à annuler

Première correction des modes $w_{m,m}$
 \Rightarrow déterminant d'ordre N à annuler

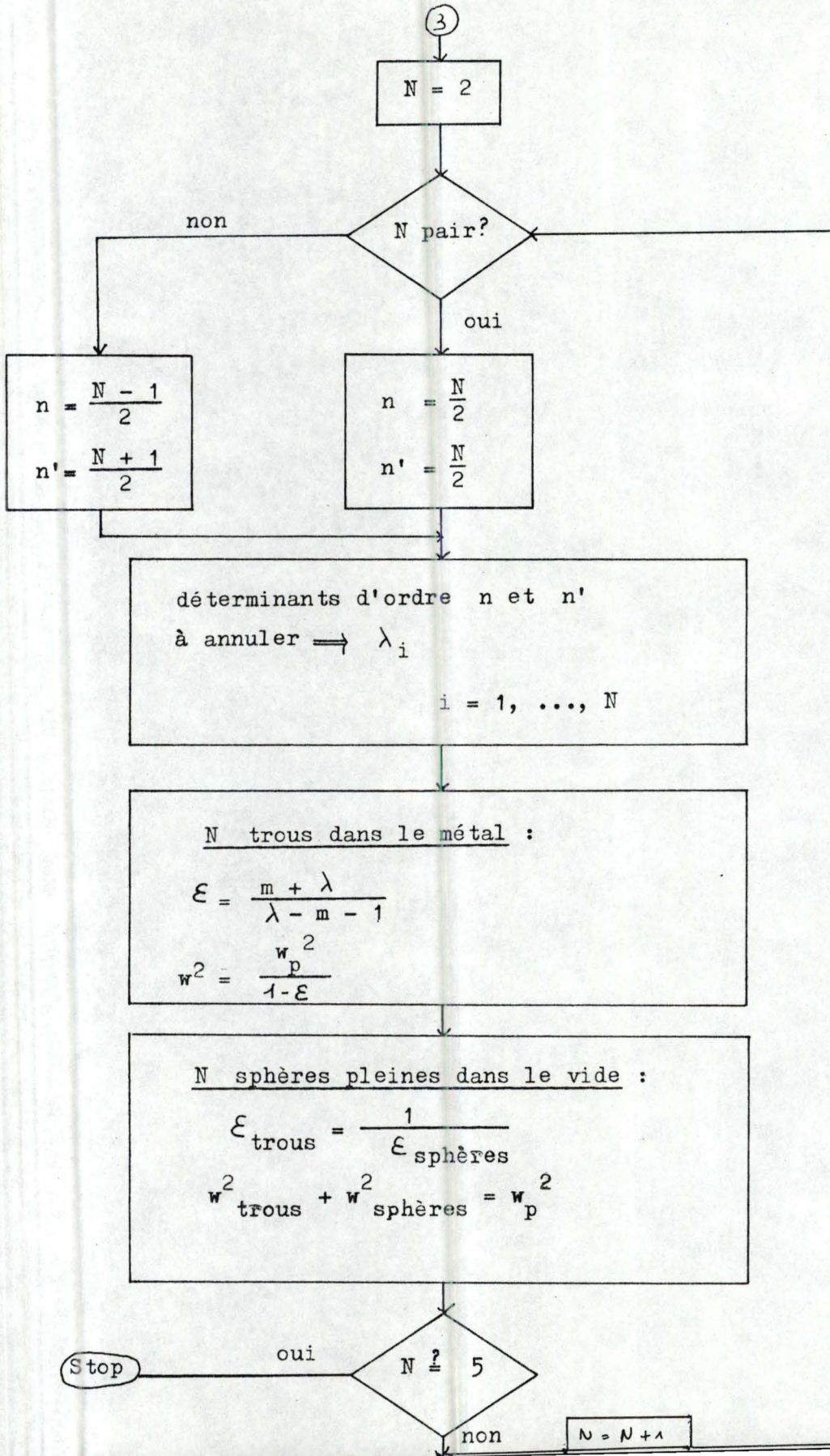
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N$$

Problème aux valeurs propres :

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1}$$

3



1ère P A R T I E.

=====

Deux sphères - coordonnées bisphériques.

A. RAPPEL THEORIQUE.

Réolvons l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ où V est le potentiel électrique. Le potentiel doit être nul à l'infini et fini partout. De plus, les conditions aux frontières doivent être vérifiées :

1. continuité, à la surface des voids, de la composante normale du déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon(\omega) \cdot \vec{E}$
 $\epsilon(\omega)$ est la fonction diélectrique qui caractérise le solide.
2. continuité, à la surface des voids, des composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E} = -\text{grad } V$.

Vu la géométrie du problème, nous employons les coordonnées bisphériques.

Pour la résolution de l'équation de Laplace, voir Annexe 1.

La condition limite, V fini partout, impose que le coefficient

D_n^m soit nul. En effet $Q_n^m(\cos \eta)$ est fini partout sauf quand $\eta = 0$.

La solution devient :

$$V = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^m \left[A_n^m e^{(m+\frac{1}{2})\mu} + B_n^m e^{-(m+\frac{1}{2})\mu} \right] \cdot P_n^m(\cos \eta) \cdot e^{im\phi}$$

m, n entiers

$$|m| \leq n$$

Cette solution vérifie la condition : $V = 0$ à l'infini.

Grâce aux conditions aux frontières, on obtient un système infini d'équations linéaires homogènes pour les coefficients A_n^m et B_n^m .

Dans le cas de deux trous sphériques de même rayon R , séparés par

une distance D , la condition pour que ce système admette une solution est ^[2]:

$$\det | M_0 + E \sinh \mu + \mathcal{E}(M_0 T^{\pm 1} - E \sinh \mu) | = 0. \quad (1)$$

$$\text{avec } M_0 = \text{tridiag} \begin{vmatrix} -(2n+1) \cosh \mu & n+1+m \\ n+1-m & -(2n+3) \cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$n \geq |m|$$

$$T = \text{diag} \begin{vmatrix} \tanh (n + \frac{1}{2}) \mu \end{vmatrix}$$

$$n \geq |m|$$

$E =$ matrice unité.

La relation (1) peut s'écrire sous la forme :

$$A \vec{x} = \lambda B \vec{x} \quad (2)$$

$$\text{où } A = M_0 + E \sinh \mu$$

$$B = - (M_0 T^{\pm 1} - E \sinh \mu)$$

Les valeurs propres $\lambda_n = \mathcal{E}(w_n)$ donnent la fréquence des modes de surface du système de voids.

La relation entre les valeurs de μ caractérisant la surface d'un void de rayon R et la surface D est : $\cosh \mu = \frac{D}{2R}$ (3)

Lorsque la distance entre les voids devient infinie c'est-à-dire quand D tend vers l'infini, alors μ tend vers l'infini et les éléments extra-diagonaux de la matrice M_0 deviennent négligeables comparativement à ceux de la diagonale et $T^{\pm 1}$ devient la matrice unité.

L'équation (1) donne alors $\mathcal{E}(w) = -\frac{n}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Or $\mathcal{E}(w) = 1 - \frac{w_p^2}{w^2}$ ou w_p est la fréquence de pulsation.

On obtient alors $w_n(\infty) = w_p \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}}$

B. EXPLOITATION.

Plaçons-nous dans l'espace de Hilbert $l^2 = \left\{ (x_i) \mid \sum x_i^2 < \infty \right\}$

Posons $z = e^{-\mu} < 1$

Ceci implique, par (3), que $z = \frac{R}{D} \left(1 - \frac{R^2}{D^2} + \dots \right)$

$$\cosh \mu = \frac{1+z^2}{2z}$$

$$\sinh \mu = \frac{1-z^2}{2z}$$

Les matrices $A(\mu)$ et $B(\mu)$ s'écrivent :

$$A(z) = \text{tridiag} \frac{1}{2z} \begin{vmatrix} (1-z^2) - (2m+1)(1+z^2) & (m+1+m)2z \\ (m+1-m)2z & (1-z^2) - (2m+3)(1+z^2) \end{vmatrix}$$

$$B(z) = \text{tridiag} \frac{1}{2z} \begin{vmatrix} (1-z^2) + (2m+1)(1+z^2) \frac{1+z^{2m+1}}{1+z^{2m+1}} & -2(m+1+m)z \frac{1+z^{2m+1}}{1+z^{2m+1}} \\ -2(m+1-m)z \frac{1+z^{2m+1}}{1+z^{2m+1}} & (1-z^2) + (2m+3)(1+z^2) \frac{1+z^{2m+1}}{1+z^{2m+1}} \end{vmatrix}$$

Décomposons $A(z)$ et $B(z)$ en séries des puissances de z .

$$A(z) = A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2.$$

$$B(z) = B_0 + B_1 \cdot z + B_2 \cdot z^2 + B_3 \cdot z^3 + B_4 \cdot z^4 + \dots$$

Nous calculerons les valeurs propres de $B^{-1} A \vec{x} = \lambda \vec{x}$

$$[B(z)]^{-1} = \left[B_0 (1 + z B_0^{-1} B_1 + z^2 B_0^{-1} B_2 + \dots) \right]^{-1}$$

$$\text{Posons : } L = B_0^{-1} B_1$$

$$M = B_0^{-1} B_2$$

$$N = B_0^{-1} B_3$$

$$O = B_0^{-1} B_4$$

Exprimons que $B^{-1} B = E$. Nous obtenons :

$$\bar{B}^{-1} = \left[1 - z \cdot L + z^2 (L^2 - M) + z^3 (ML + LM - L^3 - N) \right] B_0^{-1} + \left[z^4 (NL + LN - ML^2 - LML - L^2 M + L^4 + M^2 - O) + \dots \right] B_0^{-1}$$

Pour trouver le développement en série de

$$B^{-1}(z) A(z) = \mathcal{K}_0 + z \mathcal{K}_1 + z^2 \mathcal{K}_2 + \dots$$

il suffit d'effectuer le produit $B^{-1} A$ et d'identifier les coefficients des mêmes puissances de z ; ce qui conduit à :

$$\mathcal{K}_0 = B_0^{-1} A_0$$

$$\mathcal{K}_1 = -L B_0^{-1} A_0 + B_0^{-1} A_1$$

$$\mathcal{K}_2 = B_0^{-1} A_2 - L B_0^{-1} A_1 + (L^2 - M) B_0^{-1} A_0$$

$$\mathcal{K}_3 = -L B_0^{-1} A_2 + (L^2 - M) B_0^{-1} A_1 + (ML + LM - L^3 - N) B_0^{-1} A_0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4 = & (L^2 - M) B_0^{-1} A_2 + (ML + LM - L^3 - N) B_0^{-1} A_1 \\ & + (NL + LN - ML^2 - LML - L^2M + L^4 + M^2 - O) B_0^{-1} A_0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 z + \mathcal{K}_2 z^2 + \mathcal{K}_3 z^3 + \mathcal{K}_4 z^4 + \dots$$

Le calcul des \mathcal{K}_i ($i = 0, \dots, 4$), faisant intervenir un nombre important de produits matriciels, a été effectué par ordinateur.

C. RESULTATS.

Les données du programme sont $A_i, B_i, (i = 0, \dots, 4)$

1er cas : $m = 0$

$$A_0 = \text{diag } (-n); \quad A_1 = \text{tridiag } \begin{bmatrix} 0 & n+1 \\ n+1 & 0 \end{bmatrix};$$

$n \geq 0$ $n \geq 0$

$$A_2 = \text{diag } [-(n+1)]; \quad B_0 = \text{diag } (n+1);$$

$n \geq 0$ $n \geq 0$

$$B_1 = \text{tridiag } \begin{bmatrix} c & -(n+1) \\ -(n+1) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \text{diag } n + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ +2 & & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$n \geq 0$ $n \geq 0$

$$B_3 = \begin{bmatrix} +2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & +3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B_4 = \begin{bmatrix} +2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2ème cas : $m \neq 0$

$$A_0 = \text{diag } (-n); \quad A_1 = \text{tridiag } \begin{bmatrix} 0 & n+1+m \\ n+1-m & 0 \end{bmatrix};$$

$n \geq |m|$ $n \geq |m|$

$$A_2 = \text{diag } [-(n+1)]; \quad B_0 = \text{diag } (n+1);$$

$n \geq |m|$ $n \geq |m|$

$$B_1 = \text{tridiag } \begin{bmatrix} 0 & -(n+1+m) \\ -(n-m+1) & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \text{diag } (n)$$

$n \geq |m|$ $n \geq |m|$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ sauf pour } m = 1 \text{ où } B_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul a été effectué avec des matrices carrées limitées à l'ordre 11.

Calculs des \mathcal{H}_i :

$$B^{-1}(z) A(z) = \mathcal{H}_0 + z \mathcal{H}_1 + z^2 \mathcal{H}_2 + \dots$$

 *
 *
 * SIGNE = 1 QUAND ON A+ OU -, ON PREND LE - *
 *
 * SIGNE = 2 QUAND ON A+ OU -, ON PREND LE + *
 *
 *
 * BA0 , MATRICE A RONDE 0 = \mathcal{H}_0 *
 *
 * BA1 , MATRICE A RONDE 1 = \mathcal{H}_1 *
 *
 * BA2 , MATRICE A RONDE 2 = \mathcal{H}_2 *
 *
 * BA3 , MATRICE A RONDE 3 = \mathcal{H}_3 *
 *
 * BA4 , MATRICE A RONDE 4 = \mathcal{H}_4 *
 *
 *
 *
 *

M= 0 SIGNE= 1

BA0										
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091
BA1										
0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3333	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000
BA2										
-0.5000	-0.5000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1667	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3333	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909

BA3

0.5000	-0.1667	-0.3333	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1667	1.0000	-0.0833	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909	0.0000	0.0000

BA4

-0.1667	1.6667	-0.0833	-0.2500	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-1.0000	-0.0833	-0.3333	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	0.6667	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909	0.0000	-0.0000	0.0000

SIGNE = 2

BA0										
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091
BA1										
0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5000	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3333	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000
BA2										
-0.5000	0.5000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1667	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3333	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909

BA3

-0.5000	-0.1667	0.3333	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1667	-1.0000	-0.0833	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909	0.0000

BA4

-0.1667	0.3333	-0.0833	0.2500	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	-0.0833	0.3333	-0.0500	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	-0.6667	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.2000	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.1667	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1429	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.1250	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0909	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	-0.0909	0.0000	-0.0000

BA3

0.7500	-0.5000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1667	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0667	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1250	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1111
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0667	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0111	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0636	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0924
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0606	0.0000	-0.0770	0.0000

BA4

0.0000	-0.7500	-0.5000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	-0.1667	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000
0.0000	0.0476	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1429	0.0000
0.0000	0.0000	0.0536	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1250
0.0000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.1028
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0545	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0848	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0530	0.0000	-0.0701	0.0000	-0.0001

S I G N E = 2

BA0										
-0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9167
BA1										
0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1667	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.1333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1190	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1071	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0972	0.0000	0.1111	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0889	0.0000	0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0818	0.0000	0.0909
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0758	0.0000
BA2										
-0.5000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1000	0.0000	-0.0500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0952	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0893	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1250	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0833	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1111	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0778	0.0000	-0.0111	0.0000	0.1000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0727	0.0000	-0.0091	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0682	0.0000	-0.0840

BA3

-0.7500	-0.5000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1667	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0667	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1429	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1250	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000	0.1111
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0667	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0111	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0636	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0924
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0606	0.0000	-0.0770	0.0000

BA4

0.0000	0.7500	-0.5000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2500	-0.1667	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	-0.0833	0.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	-0.0500	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000
0.0000	0.0476	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	-0.0238	0.0000	0.1429	0.0000
0.0000	0.0000	0.0536	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	-0.0179	0.0000	0.1250
0.0000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000	-0.0139	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.0111	0.0000	-0.1028
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0545	0.0000	-0.0091	0.0000	-0.0848	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0530	0.0000	-0.0701	0.0000	-0.0001

M= 2 SIGNE= 1

BA0										
-0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9167	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9231
BA1										
0.0000	0.4167	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0833	0.0000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1000	0.0000	0.2333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.1905	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0952	0.0000	0.1607	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0893	0.0000	0.1389	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0833	0.0000	0.1222	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0778	0.0000	0.1091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0727	0.0000	0.0985	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0682	0.0000	0.0897
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0641	0.0000
BA2										
-0.4167	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1833	0.0000	0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0333	0.0000	-0.1000	0.0000	0.2667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0500	0.0000	-0.0619	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0571	0.0000	-0.0417	0.0000	0.1786	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0595	0.0000	-0.0298	0.0000	0.1528	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0595	0.0000	-0.0222	0.0000	0.1333	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0583	0.0000	-0.0172	0.0000	0.1182	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0566	0.0000	-0.0136	0.0000	0.1061
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0545	0.0000	-0.0111	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0524	0.0000	-0.0789

BA3

0.0000	-0.5833	0.0000	0.5833	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1167	0.0000	-0.2500	0.0000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.1333	0.0000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0167	0.0000	-0.0571	0.0000	-0.0810	0.0000	0.2381	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0286	0.0000	-0.0405	0.0000	-0.0536	0.0000	0.1964	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0357	0.0000	-0.0298	0.0000	-0.0377	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0397	0.0000	-0.0226	0.0000	-0.0278	0.0000	0.1444	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0000	-0.0177	0.0000	-0.0212	0.0000	0.1273	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0141	0.0000	-0.0167	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0115	0.0000	-0.0948	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0420	0.0000	-0.0677	0.0000	0.0000

BA4

0.0833	0.0000	-0.7500	0.0000	0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1333	0.0000	-0.3167	0.0000	0.4500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0500	0.0000	-0.1000	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0452	0.0000	-0.0690	0.0000	-0.1000	0.0000	0.2619	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0095	0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0488	0.0000	-0.0655	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0179	0.0000	-0.0278	0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0456	0.0000	0.1806	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0238	0.0000	-0.0218	0.0000	-0.0270	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1556	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0278	0.0000	-0.0174	0.0000	-0.0210	0.0000	-0.0253	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0303	0.0000	-0.0141	0.0000	-0.0167	0.0000	-0.1159	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0318	0.0000	-0.0117	0.0000	-0.0813	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0326	0.0000	-0.0573	0.0000	-0.0001	0.0000

BA0										
-0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9167	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9231
BA1										
0.0000	0.4167	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0833	0.0000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.1000	0.0000	0.2333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.1905	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0952	0.0000	0.1607	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0893	0.0000	0.1389	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0833	0.0000	0.1222	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0778	0.0000	0.1091	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0727	0.0000	0.0985	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0682	0.0000	0.0897
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0641	0.0000
BA2										
-0.4167	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1833	0.0000	0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0333	0.0000	-0.1000	0.0000	0.2667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0500	0.0000	-0.0619	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0571	0.0000	-0.0417	0.0000	0.1786	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0595	0.0000	-0.0298	0.0000	0.1528	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0595	0.0000	-0.0222	0.0000	0.1333	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0583	0.0000	-0.0172	0.0000	0.1182	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0566	0.0000	-0.0136	0.0000	0.1061
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0545	0.0000	-0.0111	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0524	0.0000	-0.0789

BA3

0.0000	-0.5833	0.0000	0.5833	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1167	0.0000	-0.2500	0.0000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0833	0.0000	-0.1333	0.0000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0167	0.0000	-0.0571	0.0000	-0.0810	0.0000	0.2381	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0286	0.0000	-0.0405	0.0000	-0.0536	0.0000	0.1964	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0357	0.0000	-0.0298	0.0000	-0.0377	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0397	0.0000	-0.0226	0.0000	-0.0278	0.0000	0.1444	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0000	-0.0177	0.0000	-0.0212	0.0000	0.1273
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0141	0.0000	-0.0167	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0115	0.0000	-0.0948
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0420	0.0000	-0.0677	0.0000

BA4

0.0833	0.0000	-0.7500	0.0000	0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1333	0.0000	-0.3167	0.0000	0.4500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0500	0.0000	-0.1000	0.0000	-0.1667	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0452	0.0000	-0.0690	0.0000	-0.1000	0.0000	0.2619	0.0000	0.0000	0.0000
0.0095	0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0488	0.0000	-0.0655	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000
0.0000	0.0179	0.0000	-0.0278	0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0456	0.0000	0.1806	0.0000
0.0000	0.0000	0.0238	0.0000	-0.0218	0.0000	-0.0270	0.0000	-0.0333	0.0000	0.1556
0.0000	0.0000	0.0000	0.0278	0.0000	-0.0174	0.0000	-0.0210	0.0000	-0.0253	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0303	0.0000	-0.0141	0.0000	-0.0167	0.0000	-0.1159
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0318	0.0000	-0.0117	0.0000	-0.0813	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0326	0.0000	-0.0573	0.0000	-0.0001

M= 3 SIGNE= 1

BA0

-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9167	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9231	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9286

BA1

0.0000	0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0500	0.0000	0.2667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0667	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	0.1786	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	0.1528	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0000	0.1333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0667	0.0000	0.1182	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0636	0.0000	0.1061	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0606	0.0000	0.0962	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0577	0.0000	0.0879
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0549	0.0000

BA2

-0.3500	0.0000	0.4667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1833	0.0000	0.3429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0167	0.0000	-0.1095	0.0000	0.2679	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0286	0.0000	-0.0714	0.0000	0.2183	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0357	0.0000	-0.0496	0.0000	0.1833	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0397	0.0000	-0.0361	0.0000	0.1576	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0000	-0.0273	0.0000	0.1379	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0212	0.0000	0.1224	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0169	0.0000	0.1099
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0420	0.0000	-0.0137	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0412	0.0000	-0.0750

PA3

0.0000	-0.5833	0.0000	0.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	0.0000	-0.2952	0.0000	0.4286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0738	0.0000	-0.1714	0.0000	0.3274	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0071	0.0000	-0.0571	0.0000	-0.1091	0.0000	0.2619	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0143	0.0000	-0.0436	0.0000	-0.0742	0.0000	0.2167	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0198	0.0000	-0.0337	0.0000	-0.0530	0.0000	0.1838	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0238	0.0000	-0.0265	0.0000	-0.0394	0.0000	0.1591	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0265	0.0000	-0.0212	0.0000	-0.0302	0.0000	0.1399
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0283	0.0000	-0.0172	0.0000	-0.0237	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0294	0.0000	-0.0142	0.0000	-0.0973
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0300	0.0000	-0.0608	0.0000

BA4

0.1167	0.0000	-0.8667	0.0000	0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0881	0.0000	-0.4286	0.0000	0.5238	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0310	0.0000	-0.0929	0.0000	-0.2441	0.0000	0.3929	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0746	0.0000	-0.1528	0.0000	0.3095	0.0000	0.0000	0.0000
0.0036	0.0000	-0.0325	0.0000	-0.0575	0.0000	-0.1024	0.0000	0.2528	0.0000	0.0000
0.0000	0.0079	0.0000	-0.0278	0.0000	-0.0445	0.0000	-0.0722	0.0000	0.2121	0.0000
0.0000	0.0000	0.0119	0.0000	-0.0233	0.0000	-0.0348	0.0000	-0.0530	0.0000	0.1818
0.0000	0.0000	0.0000	0.0152	0.0000	-0.0194	0.0000	-0.0277	0.0000	-0.0402	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0177	0.0000	-0.0163	0.0000	-0.0224	0.0000	-0.1292
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0196	0.0000	-0.0138	0.0000	-0.0786	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0210	0.0000	-0.0484	0.0000	0.0001

BA0

-0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8750	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.8889	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9091	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9167	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9231	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9286	0.0000

BA1

0.0000	0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0500	0.0000	0.2667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0667	0.0000	0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	0.1786	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	0.1528	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0000	0.1333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0667	0.0000	0.1182	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0636	0.0000	0.1061	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0606	0.0000	0.0962	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0577	0.0000	0.0879	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0549	0.0000	0.0000

BA2

-0.3500	0.0000	0.4667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.1833	0.0000	0.3429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0167	0.0000	-0.1095	0.0000	0.2679	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0286	0.0000	-0.0714	0.0000	0.2183	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0357	0.0000	-0.0496	0.0000	0.1833	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0397	0.0000	-0.0361	0.0000	0.1576	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0000	-0.0273	0.0000	0.1379	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0212	0.0000	0.1224	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0424	0.0000	-0.0169	0.0000	0.1099	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0420	0.0000	-0.0137	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0412	0.0000	-0.0750	0.0000

BA3

0.0000	-0.5833	0.0000	0.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0833	0.0000	-0.2952	0.0000	0.4286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0738	0.0000	-0.1714	0.0000	0.3274	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0071	0.0000	-0.0571	0.0000	-0.1091	0.0000	0.2619	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0143	0.0000	-0.0436	0.0000	-0.0742	0.0000	0.2167	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0198	0.0000	-0.0337	0.0000	-0.0530	0.0000	0.1838	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0238	0.0000	-0.0265	0.0000	-0.0394	0.0000	0.1591	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0265	0.0000	-0.0212	0.0000	-0.0302	0.0000	0.1399
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0283	0.0000	-0.0172	0.0000	-0.0237	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0294	0.0000	-0.0142	0.0000	-0.0973
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0300	0.0000	-0.0608	0.0000

BA4

0.1167	0.0000	-0.8667	0.0000	0.7500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0881	0.0000	-0.4286	0.0000	0.5238	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0310	0.0000	-0.0929	0.0000	-0.2441	0.0000	0.3929	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0357	0.0000	-0.0746	0.0000	-0.1528	0.0000	0.3095	0.0000	0.0000	0.0000
0.0036	0.0000	-0.0325	0.0000	-0.0575	0.0000	-0.1024	0.0000	0.2528	0.0000	0.0000
0.0000	0.0079	0.0000	-0.0278	0.0000	-0.0445	0.0000	-0.0722	0.0000	0.2121	0.0000
0.0000	0.0000	0.0119	0.0000	-0.0233	0.0000	-0.0348	0.0000	-0.0530	0.0000	0.1818
0.0000	0.0000	0.0000	0.0152	0.0000	-0.0194	0.0000	-0.0277	0.0000	-0.0402	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0177	0.0000	-0.0163	0.0000	-0.0224	0.0000	-0.1292
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0196	0.0000	-0.0138	0.0000	-0.0786	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0210	0.0000	-0.0484	0.0000	0.0001

Développons en série les valeurs propres $\lambda(z)^{(n)}$ et les vecteurs propres $\vec{X}(z)^{(n)}$

$$\lambda(z)^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} z + \lambda_2^{(n)} z^2 + \dots$$

$$\vec{X}(z)^{(n)} = \vec{X}_0^{(n)} + \vec{X}_1^{(n)} z + \vec{X}_2^{(n)} z^2 + \dots$$

Les vecteurs $\left\{ \vec{X}_0^{(n)} \right\}$ formant une base de \mathbb{R}^2 , on a donc :

$$\vec{X}_0^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ \hookrightarrow (n+1-m)^{\text{ième place}}$$

$$\vec{X}_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^{(m)} \vec{X}_0^{(i)}$$

$$\vec{X}_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^{(m)} \vec{X}_0^{(k)}$$

$$\vec{X}_3^{(n)} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l^{(m)} \vec{X}_0^{(l)}$$

$$\vec{X}_4^{(n)} = \sum_{h=0}^{\infty} v_h^{(m)} \vec{X}_0^{(h)}$$

$$\mathcal{A}(z) \vec{X}(z) = \lambda(z) \cdot \vec{X}(z)$$

$$(\mathcal{A}_0 + z \mathcal{A}_1 + z^2 \mathcal{A}_2 + \dots) (\vec{X}_0^{(n)} + z \vec{X}_1^{(n)} + z^2 \vec{X}_2^{(n)} + \dots) =$$

$$(\lambda_0^{(n)} + z \lambda_1^{(n)} + z^2 \lambda_2^{(n)} + \dots) (\vec{X}_0^{(n)} + z \vec{X}_1^{(n)} + z^2 \vec{X}_2^{(n)} + \dots)$$

Identifions les coefficients des mêmes puissances de z ; on obtient les équations permettant de déterminer $\lambda_i^{(n)}$ et $X_i^{(n)}$.

Effectuons les calculs pour $m = 0$.

Ordre 0.

$$\mathcal{A}_0 \vec{X}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \vec{X}_0^{(n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\vec{X}_0^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

\downarrow $(n+1)$ ième place

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \vec{X}_0^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 &= 0 \\ \lambda_0^1 &= -\frac{1}{2} \\ \lambda_0^2 &= -\frac{2}{3} \\ \lambda_0^3 &= -\frac{3}{4} \\ \lambda_0^4 &= -\frac{4}{5} \\ \lambda_0^5 &= -\frac{5}{6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ordre 1.

$$\mathcal{A}_0 \vec{x}_1^{(n)} + \mathcal{A}_1 \vec{x}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \vec{x}_1^{(n)} + \lambda_1^{(n)} \vec{x}_0^{(n)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_1^{(n)}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/7 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_0^{(n)}$$

$$= \lambda_0^{(n)} \vec{x}_1^{(n)} + \lambda_1^{(n)} \vec{x}_0^{(n)}$$

$$\begin{array}{l} x_0^0 \text{ indéterminé} \\ x_1^0 = 1 \\ x_2^0 = 0 \\ x_3^0 = 0 \\ x_4^0 = 0 \\ x_5^0 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0^1 = -1 \\ x_1^1 \text{ indéterminé} \\ x_2^1 = 2 \\ x_3^1 = 0 \\ x_4^1 = 0 \\ x_5^1 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_0^2 = 0 \\ x_1^2 = -2 \\ x_2^2 \text{ indéterminé} \\ x_3^2 = 3 \\ x_4^2 = 0 \\ x_5^2 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_0^3 = 0 \\
 x_1^3 = 0 \\
 x_2^3 = -3 \\
 x_3^3 \text{ indéterminé} \\
 x_4^3 = 4 \\
 x_5^3 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \lambda_1^0 = 0 \\
 \lambda_1^1 = 0 \\
 \lambda_1^2 = 0 \\
 \lambda_1^3 = 0 \\
 \lambda_1^4 = 0 \\
 \lambda_1^5 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_0^4 = 0 \\
 x_1^4 = 0 \\
 x_2^4 = 0 \\
 x_3^4 = -4 \\
 x_4^4 \text{ indéterminé} \\
 x_5^4 = 5 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_0^5 = 0 \\
 x_1^5 = 0 \\
 x_2^5 = 0 \\
 x_3^5 = 0 \\
 x_4^5 = -5 \\
 x_5^5 \text{ indéterminé} \\
 x_6^5 = 6 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Ordre 2. $\mathcal{A}_0 \vec{X}_2^{(m)} + \mathcal{A}_1 \vec{X}_1^{(m)} + \mathcal{A}_2 \vec{X}_0^{(m)} = \lambda_0^{(m)} \vec{X}_2^{(m)} + \lambda_1^{(m)} \vec{X}_1^{(m)} + \lambda_2^{(m)} \vec{X}_0^{(m)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_2^{(n)}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/6 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/7 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_1^{(n)}$$

$$+ \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/6 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ 1/3 & 0 & -1/12 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/20 & 0 & 1/6 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & -1/30 & 0 & 1/7 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/42 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_0^{(n)}$$

$$= \lambda_0^{(n)} \vec{X}_2^{(n)} + \lambda_1^{(n)} \vec{X}_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} \vec{X}_0^{(n)}$$

$$\begin{array}{l}
 y_0^0 \text{ indéterminé} \\
 y_1^1 = x_0^0 \\
 y_2^0 = 1 \\
 y_3^0 = 0 \\
 y_4^0 = 0 \\
 y_5^0 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y_0^3 = 0 \\
 y_1^3 = 3 \\
 y_2^3 = -3 x_3^3 \\
 y_3^3 \text{ indéterminé} \\
 y_4^3 = 4 x_3^3 \\
 y_5^3 = 10 \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \lambda_2^0 = 0 \\
 \lambda_2^1 = 0 \\
 \lambda_2^2 = 0 \\
 \lambda_2^3 = 0 \\
 \lambda_2^4 = 0 \\
 \lambda_2^5 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y_0^1 = -x_1^1 + 1 \\
 y_1^1 \text{ indéterminé} \\
 y_2^1 = 2 x_1^1 \\
 y_3^1 = 3 \\
 y_4^1 = 0 \\
 y_5^1 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y_0^4 = 0 \\
 y_1^4 = 0 \\
 y_2^4 = 6 \\
 y_3^4 = -4 x_4^4 \\
 y_4^4 \text{ indéterminé} \\
 y_5^4 = 5 x_4^4 \\
 y_6^4 = 15 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y_0^2 = 1 \\
 y_1^2 = -2 x_2^2 \\
 y_2^2 \text{ indéterminé} \\
 y_3^2 = 3 x_2^2 \\
 y_4^2 = 6 \\
 y_5^2 = 0 \\
 \vdots \\
 y_0^5 = 0 \\
 y_1^5 = 0 \\
 y_2^5 = 0 \\
 y_3^5 = 10 \\
 y_4^5 = -5 x_5^5 \\
 y_5^5 \text{ indéterminé} \\
 y_6^5 = 6 x_5^5 \\
 y_7^5 = 21 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Ordre 3. $\mathcal{L}_0 \vec{X}_3^{(m)} + \mathcal{L}_1 \vec{X}_2^{(m)} + \mathcal{L}_2 \vec{X}_1^{(m)} + \mathcal{L}_3 \vec{X}_0^{(m)} = \lambda_0^{(m)} \vec{X}_3^{(m)} + \lambda_1^{(m)} \vec{X}_2^{(m)} + \lambda_2^{(m)} \vec{X}_1^{(m)} + \lambda_3^{(m)} \vec{X}_0^{(m)}$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_3^{(n)} \\
 + & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/6 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/7 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_2^{(n)} \\
 + & \begin{bmatrix} -1/2 \pm 1/2 & 1/3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1/6 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ 1/3 & 0 & -1/12 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/20 & 0 & 1/6 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & -1/30 & 0 & 1/7 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/42 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_1^{(n)} \\
 + & \begin{bmatrix} \mp 1/2 & -1/6 & \pm 1/3 & 1/4 & 0 & \dots & \dots \\ -1/6 & \mp 1 & -1/12 & 0 & 1/5 & 0 & \dots \\ 0 & -1/12 & 0 & -1/20 & 0 & 1/6 & 0 \dots \\ 1/4 & 0 & -1/20 & 0 & -1/30 & 0 & 1/7 \dots \\ 0 & 1/5 & 0 & -1/30 & 0 & -1/42 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/42 & 0 & -1/56 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \vec{X}_0^{(n)} \\
 = & \lambda_0^{(n)} \vec{X}_3^{(n)} + \lambda_1^{(n)} \vec{X}_2^{(n)} + \lambda_2^{(n)} \vec{X}_1^{(n)} + \lambda_3^{(n)} \vec{X}_0^{(n)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 z_0^0 \text{ indéterminé} \\
 z_1^0 = y_0^0 \\
 z_2^0 = x_0^0 \\
 z_3^0 = 1 \\
 z_4^0 = 0 \\
 z_5^0 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 z_0^1 = -y_1^1 - 2x_1^1 \\
 z_1^1 \text{ indéterminé} \\
 z_2^1 = 2y_1^1 + 1 \\
 z_3^1 = 3x_1^1 \\
 z_4^1 = 4 \\
 z_5^1 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 z_0^2 = x_2^2 + 1 \\
 z_1^2 = -2y_2^2 - 9 \\
 z_2^2 \text{ indéterminé} \\
 z_3^2 = 3y_2^2 + 6 \\
 z_4^2 = 6x_2^2 \\
 z_5^2 = 10 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 z_0^3 = -1 \\
 z_1^3 = 3x_3^3 \\
 z_2^3 = -24 - 3y_3^3 \\
 z_3^3 \text{ indéterminé} \\
 z_4^3 = 4y_3^3 + 18 \\
 z_5^3 = 10x_3^3 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 z_0^4 = 0 \\
 z_1^4 = -4 \\
 z_2^4 = 6x_4^4 \\
 z_3^4 = -50 - 4y_4^4 \\
 z_4^4 \text{ indéterminé} \\
 z_5^4 = 5y_4^4 + 40 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 z_0^5 = 0 \\
 z_1^5 = 0 \\
 z_2^5 = -10 \\
 z_3^5 = 10x_5^5 \\
 z_4^5 = -90 - 5y_5^5 \\
 z_5^5 \text{ indéterminé} \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \lambda_3^0 = 0 \\
 \lambda_3^1 = +3/2 \\
 \lambda_3^2 = 0 \\
 \lambda_3^3 = 0 \\
 \lambda_3^4 = 0 \\
 \lambda_3^5 = 0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$+ \begin{bmatrix} -1/2 & -1/6 & \pm 1/3 & 1/4 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1/6 & \mp 1 & -1/12 & 0 & 1/5 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1/12 & 0 & -1/20 & 0 & 1/6 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & -1/20 & 0 & -1/30 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & -1/30 & 0 & -1/42 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/42 & 0 & -1/56 & 0 & 1/9 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \vec{x}_1(n)$$

$$+ \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/12 & \pm 1/4 & 1/5 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \pm 1 & -1/12 & \pm 1/3 & -1/20 & 0 & 1/6 & 0 & \dots & \dots \\ -1/12 & \mp 2/3 & -1/20 & 0 & -1/30 & 0 & 1/7 & 0 & \dots \\ 0 & -1/20 & 0 & -1/30 & 0 & -1/42 & 0 & 1/8 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/30 & 0 & -1/42 & 0 & -1/56 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/42 & 0 & -1/56 & 0 & -1/72 & 0 & 1/10 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \vec{x}_0(n)$$

$$= \lambda_0(n) \vec{x}_4(n) + \lambda_1(n) \vec{x}_3(n) + \lambda_2(n) \vec{x}_2(n) + \lambda_3(n) \vec{x}_1(n) + \lambda_4(n) \vec{x}_0(n)$$

- $\lambda_4^0 = 0$
- $\lambda_4^1 = 0$
- $\lambda_4^2 = 0$
- $\lambda_4^3 = 0$
- $\lambda_4^4 = 0$
- $\lambda_4^5 = 0$

On procède de la même manière quand $m \neq c$.

Ordre C.

$$\underline{m = 1}$$

$$\vec{x}_0(n) = (0, \dots, \dots, 1, \dots, \dots)$$

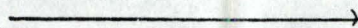


$n^{\text{ième}}$ place

$$\begin{array}{l} \lambda_0^1 = -1/2 \\ \lambda_0^2 = -2/3 \\ \lambda_0^3 = -3/4 \\ \lambda_0^4 = -4/5 \\ \lambda_0^5 = -5/6 \\ \vdots \end{array}$$

$$\underline{m = 2}$$

$$\vec{x}_c(n) = (0, \dots, \dots, 1, \dots, \dots)$$



$(n - 1)^{\text{ième}}$ place

$$\begin{array}{l} \lambda_0^2 = -2/3 \\ \lambda_0^3 = -3/4 \\ \lambda_0^4 = -4/5 \\ \lambda_0^5 = -5/6 \\ \vdots \end{array}$$

Ordre 1.

$$m = 1.$$

$$\begin{array}{l} x_1^1 \text{ indéterminé} \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = 0 \\ x_4^1 = 0 \\ x_5^1 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^4 = 0 \\ x_2^4 = 0 \\ x_3^4 = -5 \\ x_4^4 \text{ indéterminé} \\ x_5^4 = 4 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1^1 = 0 \\ \lambda_1^2 = 0 \\ \lambda_1^3 = 0 \\ \lambda_1^4 = 0 \\ \lambda_1^5 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^2 = -3 \\ x_2^2 \text{ indéterminé} \\ x_3^2 = 2 \\ x_4^2 = 0 \\ x_5^2 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^5 = 0 \\ x_2^5 = 0 \\ x_3^5 = 0 \\ x_4^5 = -6 \\ x_5^5 \text{ indéterminé} \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = -4 \\ x_3^3 \text{ indéterminé} \\ x_4^3 = 3 \\ x_5^3 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$m = 2.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2^2 \text{ indéterminé} \\ x_3^2 = 1 \\ x_4^2 = 0 \\ x_5^2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x_2^3 = -5 \\ x_3^3 \text{ indéterminé} \\ x_4^3 = 2 \\ x_5^3 = 0 \\ \vdots \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x_2^4 = 0 \\ x_3^4 = -6 \\ x_4^4 \text{ indéterminé} \\ x_5^4 = 3 \\ \vdots \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2^5 = 0 \\ x_3^5 = 0 \\ x_4^5 = -7 \\ x_5^5 \text{ indéterminé} \\ \vdots \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1^2 = 0 \\ \lambda_1^3 = 0 \\ \lambda_1^4 = 0 \\ \lambda_1^5 = 0 \\ \vdots \end{array} \right|$$

Ordre 2.

$$m = 1.$$

$$\left| \begin{array}{l} y_1^1 \text{ indéterminé} \\ y_2^1 = x_1^1 \\ y_3^1 = 1 \\ y_4^1 = 0 \\ y_5^1 = 0 \\ \vdots \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} y_1^2 = -3 x_2^2 \\ y_2^2 \text{ indéterminé} \\ y_3^2 = 2 x_2^2 \\ y_4^2 = 3 \\ y_5^2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} y_1^3 = 6 \\ y_2^3 = -4 x_3^3 \\ y_3^3 \text{ indéterminé} \\ y_4^3 = 3 x_3^3 \\ y_5^3 = 6 \\ \vdots \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} y_1^4 = 0 \\ y_2^4 = 10 \\ y_3^4 = -4 x_3^3 \\ y_4^4 \text{ indéterminé} \\ y_5^4 = 4 x_4^4 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^5 = 0 \\ y_2^5 = 0 \\ y_3^5 = 15 \\ y_4^5 = -6 x_5^5 \\ y_5^5 = \text{indéterminé} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2^1 = 0 \\ \lambda_2^2 = 0 \\ \lambda_2^3 = 0 \\ \lambda_2^4 = 0 \\ \lambda_2^5 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$m = 2.$$

$$\begin{cases} y_2^2 \text{ indéterminé} \\ y_3^2 = x_2^2 \\ y_4^2 = 1 \\ y_5^2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2^3 = -5 x_3^3 \\ y_3^3 \text{ indéterminé} \\ y_4^3 = 2 x_3^3 \\ y_5^3 = 3 \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} y_2^4 = 15 \\ y_3^4 = -6 x_4^4 \\ y_4^4 \text{ indéterminé} \\ y_5^4 = 3 x_4^4 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^5 = 0 \\ y_3^5 = 21 \\ y_4^5 = -6 x_5^5 \\ y_5^5 \text{ indéterminé} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_2^2 = 0 \\ \lambda_2^3 = 0 \\ \lambda_2^4 = 0 \\ \lambda_2^5 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

Ordre 3.

$$m = 1.$$

$$\begin{array}{l} z_1^1 = \text{indéterminé} \\ z_2^1 = y_1^1 \\ z_3^1 = x_1^1 \\ z_4^1 = 1 \\ z_5^1 = 0 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} z_1^2 = -12 - 3y_2^2 \\ z_2^2 = \text{indéterminé} \\ z_3^2 = 3 + 2y_2^2 \\ z_4^2 = 3x_2^2 \\ z_5^2 = 4 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} z_1^3 = 6x_3^3 \\ z_2^3 = -30 - 4y_3^3 \\ z_3^3 = \text{indéterminé} \\ z_4^3 = 12 + 3y_3^3 \\ z_5^3 = 6x_3^3 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z_1^4 = -10 \\ z_2^4 = 10x_4^4 \\ z_3^4 = -60 - 5y_4^4 \\ z_4^4 = \text{indéterminé} \\ z_5^4 = 30 + 4y_4^4 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_3^1 = \bar{+} 3/4 \\ \lambda_3^2 = 0 \\ \lambda_3^3 = 0 \\ \lambda_3^4 = 0 \\ \lambda_3^5 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

$$\underline{m = 2.}$$

$$\left| \begin{array}{l} z_2^2 \text{ indéterminé} \\ z_3^2 = y_2^2 \\ z_4^2 = x_2^2 \\ z_5^2 = 1 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} z_2^3 = -30 - 5 y_3^3 \\ z_3^3 \text{ indéterminé} \\ z_4^3 = 5 + 2 y_3^3 \\ z_5^3 = 3 x_3^3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_3^2 = 0 \\ \lambda_3^3 = 0 \\ \lambda_3^4 = 0 \\ \lambda_3^5 = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ordre 4.

$$\underline{m = 1.}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_4^1 = 0 \\ \lambda_4^2 = 0 \\ \lambda_4^3 = 0 \\ \lambda_4^4 = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\underline{m = 2.}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_4^2 = 0 \\ \lambda_4^3 = 0 \\ \lambda_4^4 = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Conclusion :

La contribution de l'ordre 4 est nulle dans le calcul des ϵ .
 De plus, toutes les valeurs des $\lambda_i^{(n)}$ calculées ci-dessus vérifient
 les relations analytiques obtenues par la perturbation sur
 $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$ ^[2,4]

D. ENERGIE DE VAN DER WAALS.

Etant donné que $\epsilon(w) = 1 - \frac{w_p^2}{w^2}$ où w_p est la fréquence de pulsation, on peut calculer l'énergie de Van der Waals.

$$\epsilon(w) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \dots$$

$$1 - \frac{w_p^2}{w^2} = -\frac{n}{m+1} + \lambda_3 z^3 + \dots$$

$$\frac{w_p^2}{w^2} = 1 + \frac{n}{m+1} - \lambda_3 z^3 + \dots$$

$$w^2 = w_p^2 \frac{m+1}{2m+1} \left(1 - \frac{m+1}{2m+1} \lambda_3 z^3 + \dots \right)^{-1}$$

$$w = w_p \sqrt{\frac{m+1}{2m+1}} \left(1 + \frac{m+1}{2m+1} \lambda_3 z^3 + \dots \right)^{1/2}$$

$$w = w_p \sqrt{\frac{m+1}{2m+1}} \left(1 + \frac{m+1}{2m+1} \frac{\lambda_3}{2} z^3 - \left(\frac{m+1}{2m+1} \right)^2 \frac{\lambda_3^2}{8} z^6 + \dots \right)$$

$$\lambda^{(m)} = \lambda_0^{(m)} + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \lambda_3^{(m)} \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + \dots$$

Nous obtenons, jusqu'à l'ordre 4 :

$n = 1$ et $m = 0$.

Pour $\lambda_3 = \frac{3}{2}$; $w_a = w_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{2} z^3 - \frac{1}{8} z^6 \right)$

Pour $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$; $w_b = w_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{2} z^3 - \frac{1}{8} z^6 \right)$

$n = 1$ et $|m| = 1$.

Pour $\lambda_3 = \frac{3}{4}$; $w_c = w_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{4} z^3 - \frac{1}{32} z^6 \right)$

Pour $\lambda_3 = -\frac{3}{4}$; $w_d = w_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{4} z^3 - \frac{1}{32} z^6 \right)$

$n = 1, m \neq 0$ et $|m| \neq 1$.

$$w_e = w_p \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Pour les autres valeurs de n .

$$w_n = w_p \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$$

L'énergie d'interaction est donnée par^[5,6]:

$$\begin{aligned} W(D) &= \frac{1}{2} \hbar \sum_i (w_i(D) - w_i(\infty)) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \left[2 \cdot (w_a + w_b) + 2 \cdot (w_c + w_d) + w_e + \sum_{n \neq 1} w_n - \sum_n w_p \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$W(D) = -\frac{3}{16} \hbar w_p \sqrt{\frac{2}{3}} z^6$$

Pour les deux sphères pleines, il suffit de remplacer $\mathcal{E}(w)$ par $\mathcal{E}^{-1}(w)$.

Ceci conduit à la relation $\mathcal{E}^{-1}(w) = 1 - \frac{w_p^2}{w^2}$ qui permet de déterminer l'énergie de Van der Waals en remplaçant les w_i par les valeurs trouvées.

On obtient :

$$W(D) = -\frac{3}{4} \hbar w_p \sqrt{\frac{1}{3}} z^6$$

2ème P A R T I E.

=====

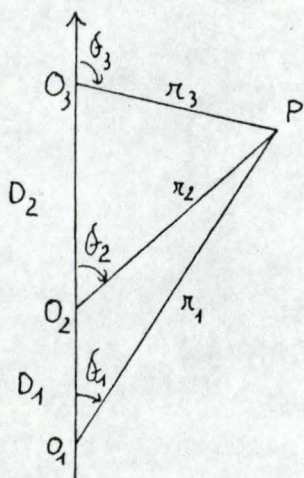
N sphères - coordonnées sphériques
et théorème d'addition.

A. THEORIE. N SPHERES OU CAVITES ALIGNEES QUELCONQUES.

Considérons N sphères alignées.

Soient

R_1, R_2, \dots, R_N	les rayons des différentes sphères
D_1, D_2, \dots, D_{N-1}	les distances séparant ces sphères
$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$	les constantes diélectriques des sphères
ϵ	la constante diélectrique du milieu considéré.



- . Considérons la droite joignant les centres des N sphères comme zème axe de notre système de coordonnées.
- . Choisissons N ensembles de systèmes de coordonnées sphériques d'origine aux centres des sphères.
- . $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ sont les coordonnées sphériques d'un point P quelconque dans le j^{ième} système.

Nous nous proposons de résoudre l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \quad \text{où } V \text{ est le potentiel électrique}$$

V doit satisfaire les conditions suivantes :

1. conditions limites : V fini partout
V nul à l'infini
2. conditions aux frontières :
 - . la composante normale du déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon(w) \vec{E}$ doit être continue à la surface des sphères.

- les composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E} = -\text{grad } V$ doivent être continues à la surface des sphères.

La solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est [47]

$$V_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[(\pi_i^l + \pi_i^{-(l+1)}) \cdot (A_{lm}^i P_l^m(\cos \theta_i) + B_{lm}^i Q_l^m(\cos \theta_i)) \cdot (C_{lm}^i \cos m \varphi_i + D_{lm}^i \sin m \varphi_i) \right]$$

où m, l entiers ≥ 0

$$m \leq l$$

La condition limite V fini partout impose que le coefficient

B_{lm}^i de Q_{lm} soit nul.

Notons V_i^{out} le potentiel à l'extérieur de toutes les sphères

V_i^{int} le potentiel à l'intérieur de la $i^{\text{ème}}$ sphère.

Dans les régions où r_i peut s'annuler, il faut exclure la dépendance en $r_i^{-(l+1)}$

$$V_i^{\text{int}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \pi_i^l \left[A_{lm}^i Y_l^{m(e)}(\theta_i, \varphi_i) + B_{lm}^i Y_l^{m(o)}(\theta_i, \varphi_i) \right]$$

$$\text{où } Y_l^{m(e)}(\theta_i, \varphi_i) = P_l^m(\cos \theta_i) \cos m \varphi_i$$

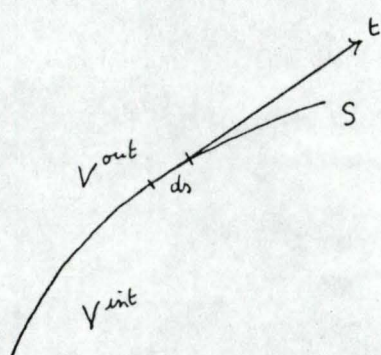
$$Y_l^{m(o)}(\theta_i, \varphi_i) = P_l^m(\cos \theta_i) \sin m \varphi_i$$

Dans les régions où r_i est non borné, il faut exclure la dépendance en r_i^l pour que la solution soit nulle à l'infini.

$$V^{\text{out}} = \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \pi_i^{-(l+1)} \left[C_{lm}^i Y_{lm}^{m(l)}(\theta_i, \varphi_i) + D_{lm}^i Y_{lm}^{m(o)}(\theta_i, \varphi_i) \right]$$

Les N sphères sont alignées, nous avons donc $\varphi_1 = \dots = \varphi_N = \varphi$

Exprimer la continuité des composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E} = -\text{grad } V$ est équivalent à exprimer que $V^{\text{int}} = V^{\text{out}}$ sur les sphères. [2]



soient $\left\{ \begin{array}{l} S \text{ la surface des sphères} \\ ds \text{ un élément de longueur} \end{array} \right.$

$$(\vec{E} \cdot \vec{t})_{\text{int}} = (\vec{E} \cdot \vec{t})_{\text{out}}$$

$$-\text{grad } V_{\text{int}} \cdot \vec{t} = -\text{grad } V_{\text{out}} \cdot \vec{t}$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \vec{r} \in S$$

$$-\frac{dV_{\text{int}}}{ds} = -\frac{dV_{\text{out}}}{ds}$$

ce qui est vérifié si $V_{\text{int}}(\vec{r}) = V_{\text{out}}(\vec{r})$
pour $\vec{r} \in S$

1. V int = V out.

$$\sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l R_j^l \left[A_{lm}^j Y_l^{m(e)}(\theta_j, \varphi) + B_{lm}^j Y_l^{m(o)}(\theta_j, \varphi) \right] =$$

$$\sum_{i:1}^{j-1} \sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l \pi_i^{-(l+1)} \left[C_{lm}^i Y_l^{m(e)}(\theta_i, \varphi) + D_{lm}^i Y_l^{m(o)}(\theta_i, \varphi) \right] +$$

$$\sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l R_j^{l-1} \left[C_{lm}^j Y_l^{m(e)}(\theta_j, \varphi) + D_{lm}^j Y_l^{m(o)}(\theta_j, \varphi) \right] +$$

$$\sum_{i:j+1}^N \sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l \pi_i^{-(l+1)} \left[C_{lm}^i Y_l^{m(e)}(\theta_i, \varphi) + D_{lm}^i Y_l^{m(o)}(\theta_i, \varphi) \right]$$

$j: 1, \dots, N$

Exprimons les $Y_l^m(\theta_{j+k}, \varphi)$ en fonction des $Y_l^m(\theta_j, \varphi)$

$$\frac{Y_l^{m(e)}(\theta_{j+k}, \varphi)}{\pi_{j+k}^{l+1}} = \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{k_1:0}^{\infty} \frac{(l+m+k_1)!}{(2m+k_1)!} \frac{\pi_j^{m+k_1}}{d_{j, j+k}^{l+m+k_1+1}} Y_{m+k_1}^{m(e)}(\theta_j, \varphi)$$

$$\frac{Y_l^{m(o)}(\theta_{j-k}, \varphi)}{\pi_{j-k}^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{k_1:0}^{\infty} (-1)^{k_1} \frac{(l+m+k_1)!}{(2m+k_1)!} \frac{\pi_j^{m+k_1}}{d_{j, j-k}^{l+m+k_1+1}} Y_{m+k_1}^{m(o)}(\theta_j, \varphi)$$

[8]

avec $d_{j, j+k} = D_j + D_{j+1} + \dots + D_{j+k-1}$

$d_{j, j-k} = D_{j-1} + D_{j-2} + \dots + D_{j-k}$

$$\sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l R_j^l \left[A_{lm}^j Y_l^{m(e)}(\theta_j, \varphi) + B_{lm}^j Y_l^{m(o)}(\theta_j, \varphi) \right] =$$

$$\sum_{i:1}^{j-1} \sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l \left(C_{lm}^i \chi_{lm}^{i(e)} + D_{lm}^i \chi_{lm}^{i(o)} \right) +$$

$$\sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l R_j^{-(l+1)} \left[C_{lm}^j Y_l^{m(e)}(\theta_j, \varphi) + D_{lm}^j Y_l^{m(o)}(\theta_j, \varphi) \right] +$$

$$\sum_{i:j+1}^N \sum_{l:0}^{\infty} \sum_{m:0}^l \left(C_{lm}^i \chi_{lm}^{i(e)} + D_{lm}^i \chi_{lm}^{i(o)} \right)$$

(1)

avec
$$t_{lm}^{i \binom{l}{l_0}} = \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(l+m+k_1)!}{(2m+k_1)!} \frac{R_j^{m+k_1} Y_{m+k_1}^{m \binom{l}{l_0}}(\theta_j, \varphi)}{(d_{j,i})^{l+m+k_1+1}}$$

$$g_{lm}^{i \binom{l}{l_0}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1} \frac{(l+m+k_1)!}{(2m+k_1)!} \frac{R_j^{m+k_1} Y_{m+k_1}^{m \binom{l}{l_0}}(\theta_j, \varphi)}{(d_{j,i})^{l+m+k_1+1}}$$

Pour calculer les A_{lm}^j et B_{lm}^j en fonction des C_{lm}^j et D_{lm}^j employons la relation d'orthogonalité [8]:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m \binom{l}{l_0}}(\theta_j, \varphi) \cdot Y_{l'}^{m' \binom{l'}{l'_0}}(\theta_j, \varphi) \cdot \sin \theta_j \cdot d\theta_j \cdot d\varphi = \frac{4\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'}}{\varepsilon_{m'} (2l'+1)} \cdot \left[\frac{(l'+m')!}{(l'-m')!} \right]$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_{m'} = 2$$

On a la même relation si on considère $y_1^m \binom{l}{l_0}(\theta_j, \varphi)$

De plus

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m \binom{l}{l_0}}(\theta_j, \varphi) \cdot Y_{l'}^{m' \binom{l'}{l'_0}}(\theta_j, \varphi) \cdot \sin \theta_j \cdot d\theta_j \cdot d\varphi = 0$$

Après avoir appliqué ces formules à l'équation (1), on obtient les deux équations suivantes :

$$R_j^{l'} A_{l'm'}^j = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{l:m'}^{\infty} C_{lm}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \cdot \frac{(l+l')!}{(m'+l')!} \cdot \frac{R_j^{l'}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} + R_j^{-(l'+1)} C_{l'm'}^j + \sum_{i=j+1}^N \sum_{l:m'}^{\infty} C_{lm}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \cdot \frac{(l+l')!}{(m'+l')!} \cdot \frac{R_j^{l'}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} \quad (2)$$

et

$$R_j^{l'} B_{l'm'}^j = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{l:m'}^{\infty} D_{lm}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \cdot \frac{(l+l')!}{(m'+l')!} \cdot \frac{R_j^{l'}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} + R_j^{-(l'+1)} D_{l'm'}^j + \sum_{i=j+1}^N \sum_{l:m'}^{\infty} D_{lm}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \cdot \frac{(l+l')!}{(m'+l')!} \cdot \frac{R_j^{l'}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) sont équivalentes.

Exprimons que la composante normale du déplacement électrique

$\vec{D} = \epsilon(w) \vec{E}$ est continue à la surface des sphères.

$$\vec{D} = -\epsilon \text{ grad. } V.$$

La composante normale de \vec{D} s'écrit : $\vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon \frac{\partial V}{\partial r}$

La condition de continuité de $\vec{D} \cdot \vec{n}$ est

II.

$$\epsilon_j \frac{\partial V_j^{\text{int}}}{\partial R_j} = \epsilon \frac{\partial V_j^{\text{out}}}{\partial R_j}$$

On a les relations :

$$\epsilon_j \cdot l' R_j^{l'-1} A_{l'm'}^j = \epsilon \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{l:m'}^{\infty} C_{lm'}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \frac{(l+l')!}{(m+l')!} l' \frac{R_j^{l'-1}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} -$$

$$\epsilon (l'+1) R_j^{-(l'+2)} C_{l'm'}^j + \epsilon \sum_{i=j+1}^N \sum_{l:m'}^{\infty} C_{lm'}^i \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \frac{(l+l')!}{(m+l')!} l' \frac{R_j^{l'-1}}{(d_{j,i})^{l+l'+1}} \quad (4)$$

$j = 1, \dots, N$

et une relation équivalente en remplaçant les A par B : (4)'

De l'équation (2), on tire la valeur de $A_{l'm'}^j$ en fonction de C et on remplace dans l'équation (4).

On obtiendrait un résultat identique en travaillant avec les équations (3) et (4)'

$$\epsilon_j \cdot l R_j^{l-1} \left[\kappa_{jlm} + R_j^{-(2l+1)} C_{lm}^j + L_{jlm} \right] = \epsilon R_j^{l-1} \left[l \cdot \kappa_{jlm} - (l+1) R_j^{-(2l+1)} C_{lm}^j + l L_{jlm} \right]$$

avec
$$K_{jlm}^i = \sum_{i: j+1}^{j-1} \sum_{k:m}^{\infty} C_{km}^i \frac{(-1)^{l-m}}{(k-m)!} \frac{(k+l)!}{(m+l)!} \frac{1}{(d_{j,i})^{k+l+1}}$$

$$L_{jlm} = \sum_{i: j+1}^N \sum_{k:m}^{\infty} C_{km}^i \frac{(-1)^{k-m}}{(k-m)!} \frac{(k+l)!}{(m+l)!} \frac{1}{(d_{j,i})^{k+l+1}}$$

$$E_j \cdot l C_{lm}^j + E(l+1) C_{lm}^j = (E_l - E_j \cdot l) R_j^{2l+1} \left[K_{jlm} + L_{jlm} \right]$$

$$\frac{E_j \cdot l + (l+1)E}{E - E_j} \frac{C_{lm}^j}{D_j^l} = l \frac{R_j^{2l+1}}{D_j^l} \left[K_{jlm} + L_{jlm} \right] \quad (5)$$

notons
$$\frac{C_{lm}^j}{D_j^l} \text{ par } X_{lm}^j$$

(5) devient :

$$\frac{E_j \cdot l + (l+1)E}{E - E_j} X_{lm}^j = l \left(\frac{R_j}{D_j} \right)^{2l+1} \left[K_{jlm} D_j^{l+1} + L_{jlm} D_j^{l+1} \right]$$

$$\frac{E_j \cdot l + (l+1)E}{E - E_j} X_{lm}^j = \frac{l}{(m+l)!} \left(\frac{R_j}{D_j} \right)^{2l+1} \left[M_{jlm} + N_{jlm} \right] \quad (6)$$

avec
$$M_{jlm} = \sum_{i: j+1}^{j-1} \sum_{k:m}^{\infty} X_{km}^i \frac{(-1)^{l-m}}{(k-m)!} \frac{(k+l)!}{(m+l)!} \frac{D_j^{l+1} \cdot D_i^k}{(d_{j,i})^{k+l+1}}$$

$$N_{jlm} = \sum_{i: j+1}^N \sum_{k:m}^{\infty} X_{km}^i \frac{(-1)^{k-m}}{(k-m)!} \frac{(k+l)!}{(m+l)!} \frac{D_j^{l+1} \cdot D_i^k}{(d_{j,i})^{k+l+1}}$$

$$j = 1, \dots, N.$$

B. Exploitation.

B₁ : Formulation matricielle pour N sphères identiques.

Exploitions l'équation (6) du paragraphe précédent lorsque

$$D_1 = D_2 = \dots = D_N = D$$

$$R_1 = R_2 = \dots = R_N = R$$

notation : $\frac{C_{\ell m}^j}{D^l} = X_{\ell m}^j$.

(6) devient

$$\frac{\varepsilon_j^{\ell} + (\ell+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_j} X_{\ell m}^j = \frac{\ell}{(\ell+m)!} \left(\frac{R}{D}\right)^{2\ell+1} [M_{j\ell m} + N_{j\ell m}]$$

$$j = 1, \dots, N \quad \text{avec} \quad M_{j\ell m} = \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k:m}^{\infty} X_{k m}^i (-1)^{\ell-m} \frac{(\ell+1)!}{(k-m)!} \frac{D^{\ell+k+1}}{[D \cdot (j-i)]^{\ell+k+1}}$$

$$N_{j\ell m} = \sum_{i=j+1}^N \sum_{k:m}^{\infty} X_{k m}^i (-1)^{k-m} \frac{(\ell+1)!}{(k-m)!} \frac{D^{\ell+k+1}}{[D \cdot (i-j)]^{\ell+k+1}}$$

notations : $\frac{R}{D} = s$

$$a_k^{lm} = \frac{(-1)^{k-m} (k+1)!}{(k-m)! (m+1)!} 1$$

$$b_k^{lm} = \frac{(+1)^{-m+1} (k+1)!}{(k-m)! (m+1)!} 1$$

$$\frac{\varepsilon_j \cdot l + (l+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_j} X_{lm}^j = \sum_{i:1}^{j-1} \sum_{k:m}^{\infty} X_{km}^i \gamma_{km}^{2l+1} b_{km}^{lm} \frac{1}{(j-i)^{k+l+1}} +$$

$$\sum_{i:j+1}^N \sum_{k:m}^{\infty} X_{km}^i \gamma_{km}^{2l+1} a_{km}^{lm} \frac{1}{(i-j)^{k+l+1}} \quad (7)$$

$l \geq m \quad ; \quad j: 1, \dots, N$

Ecrivons l'équation (7) sous forme matricielle.

1. Cas particuliers.

$$j = 1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1 m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon_1(m+1) + (m+2)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & \frac{\varepsilon_1(m+2) + (m+3)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{mm}^1 \\ X_{m+1m}^1 \\ X_{m+2m}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_m^{mm} \gamma_{mm}^{2m+1}}{1^{2m+1}} \\ \frac{a_m^{m+1m} \gamma_{mm}^{2m+3}}{1^{2m+2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{mm}^2 \\ X_{m+1m}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \dots +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_m^{mm} \gamma_{mm}^{2m+1}}{(N-1)^{2m+1}} \\ \frac{a_m^{m+1m} \gamma_{mm}^{2m+3}}{(N-1)^{2m+2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{mm}^N \\ X_{m+1m}^N \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$j = 2$

$$\begin{bmatrix} \frac{E_2 m + (m+1)E}{E - E_2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{E_2(m+1) + (m+2)E}{E - E_2} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \frac{E_2(m+2) + (m+3)E}{E - E_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m,m}^2 \\ X_{m+1,m}^2 \\ X_{m+2,m}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b_m^{m,m} \quad 2m+1}{1^{2m+1}} \\ \frac{b_m^{m+1,m} \quad 2m+3}{1^{2m+2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_{m+1}^{m,m} \quad 2m+1}{1^{2m+2}} \\ \frac{b_{m+1}^{m+1,m} \quad 2m+3}{1^{2m+3}} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} X_{m,m}^1 \\ X_{m+1,m}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} + \dots +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_m^{m,m} \quad 2m+1}{(N-2)^{2m+1}} \\ \frac{a_m^{m+1,m} \quad 2m+3}{(N-2)^{2m+1}} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_{m+1}^{m,m} \quad 2m+1}{(N-2)^{2m+2}} \\ \frac{a_{m+1}^{m+1,m} \quad 2m+3}{(N-2)^{2m+3}} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} X_{m,m}^N \\ X_{m+1,m}^N \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2. Forme générale.

Nous obtenons un tableau de la forme :

Λ_1	A_1	A_2	...	A_{N-1}
B_1	Λ_2	A_1	...	A_{N-2}
B_2	B_1	Λ_3	...	A_{N-3}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
B_{N-1}	B_{N-2}	B_{N-3}	...	Λ_N

où

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \frac{E_i(m+1)(m+1)E}{-E+E_i} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{E_i(m+1)(m+2)E}{-E+E_i} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{E_i(m+2)(m+3)E}{-E+E_i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{a_{m,m}}{i^{2m+1}} \gg \frac{a_{m,m}}{i^{2m+2}} \gg \frac{a_{m,m}}{i^{2m+3}} \gg \dots \\ \frac{a_{m+1,m}}{i^{2m+1}} \gg \frac{a_{m+1,m}}{i^{2m+3}} \gg \frac{a_{m+1,m}}{i^{2m+4}} \gg \dots \\ \frac{a_{m+2,m}}{i^{2m+3}} \gg \frac{a_{m+2,m}}{i^{2m+4}} \gg \frac{a_{m+2,m}}{i^{2m+5}} \gg \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{b_{m,m}}{i^{2m+1}} \gg \frac{b_{m,m}}{i^{2m+2}} \gg \frac{b_{m,m}}{i^{2m+3}} \gg \dots \\ \frac{b_{m+1,m}}{i^{2m+2}} \gg \frac{b_{m+1,m}}{i^{2m+3}} \gg \frac{b_{m+1,m}}{i^{2m+4}} \gg \dots \\ \frac{b_{m+2,m}}{i^{2m+3}} \gg \frac{b_{m+2,m}}{i^{2m+4}} \gg \frac{b_{m+2,m}}{i^{2m+5}} \gg \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\frac{E_1(m+1)(m+1)E}{-E+E_1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$\frac{a_{m,m}}{1^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1}$	$X_{m,m}^{-1}$
$0 \quad \frac{E_1(m+1)(m+2)E}{-E+E_1} \quad 0 \quad \dots$	$\frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3}$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3}$	$X_{m+1,m}^{-1}$
$0 \quad 0 \quad \frac{E_1(m+2)(m+3)E}{-E+E_1} \quad \dots$	$\frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5}$	$\frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5}$	$X_{m+2,m}^{-1}$
$\frac{a_{m,m}}{1^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1} \dots$	$E_2(m+1)(m+1)E \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$\frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1}$	$X_{m,m}^{-2}$
$\frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3} \dots$	$0 \quad E_2(m+1)(m+2)E \quad 0 \quad \dots$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3}$	$X_{m+1,m}^{-2}$
$\frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{1^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5} \dots$	$0 \quad 0 \quad E_2(m+2)(m+3)E \quad \dots$	$\frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5}$	$X_{m+2,m}^{-2}$
$\frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1} \dots$	$\frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+1}$	$E_N(m+1)(m+1)E \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$X_{m,m}^{-N}$
$\frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3} \dots$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+3}$	$0 \quad \frac{E_N(m+1)(m+2)E}{-E+E_N} \quad 0 \quad \dots$	$X_{m+1,m}^{-N}$
$\frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-1)^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5} \dots$	$\frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+4}} \xrightarrow{2m+5} \frac{a_{m+2,m}}{(N-2)^{2m+5}} \xrightarrow{2m+5}$	$0 \quad 0 \quad \frac{E_N(m+2)(m+3)E}{-E+E_N} \quad \dots$	$X_{m+2,m}^{-N}$

= 0

Ce tableau est formé de $(N \times N)$ matrices de dimension infinie. La présence d'une même puissance de s pour les éléments extra diagonaux de chaque ligne nous suggère de permuter ces lignes pour obtenir le tableau 2 :

La condition de compatibilité entre les équations (7) pour $j = 1, \dots, N$ impose au déterminant de ce tableau d'être nul.

Tableau 2

$\frac{E_1 m + (m+1)E}{-E + E_1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$\frac{m, m}{(N-1)^{2m+1}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \dots$	$X_{m, m}^1$
$\frac{m, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$\frac{E_2 m + (m+1)E}{-E + E_2} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m, m}{(N-2)^{2m+1}} \gg \frac{m, m}{(N-2)^{2m+2}} \gg \frac{m, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \dots$	$X_{m+1, m}^1$
$\frac{m, m}{(N-1)^{2m+1}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \dots$	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{m, m}{(N-1)^{2m+1}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \dots$	$\frac{E_N m + (m+1)E}{-E + E_N} \quad 0 \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m, m}{(N-2)^{2m+1}} \gg \frac{m, m}{(N-2)^{2m+2}} \gg \frac{m, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \dots$	$X_{m+2, m}^1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$0 \quad \frac{E_1(m+1) + (m+2)E}{-E + E_1} \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m+1, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m+1, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m+1, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$\frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \dots$	$X_{m, m}^2$
$\frac{m+1, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m+1, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m+1, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$0 \quad \frac{E_2(m+1) + (m+2)E}{-E + E_2} \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+2}} \gg \frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+4}} \gg \dots$	$X_{m+1, m}^2 = 0$
$\frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \dots$	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+2}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+1, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \dots$	$0 \quad \frac{E_N(m+1) + (m+2)E}{-E + E_N} \quad 0 \quad \dots$	$\frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+2}} \gg \frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \frac{m+1, m}{(N-2)^{2m+4}} \gg \dots$	$X_{m+2, m}^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$0 \quad 0 \quad \frac{E_1(m+2) + (m+3)E}{-E + E_1}$	$\frac{m+2, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m+2, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m+2, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$\frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+5}} \gg \dots$	$X_{m, m}^N$
$\frac{m+2, m}{a_{m,m}} \gg \frac{m+2, m}{a_{m+1, m+1}} \gg \frac{m+2, m}{a_{m+2, m+2}} \gg \dots$	$0 \quad 0 \quad \frac{E_2(m+2) + (m+3)E}{-E + E_2}$	$\frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+4}} \gg \frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+5}} \gg \dots$	$X_{m+1, m}^N$
$\frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+5}} \gg \dots$	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+3}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+4}} \gg \frac{m+2, m}{(N-1)^{2m+5}} \gg \dots$	$0 \quad 0 \quad \frac{E_N(m+2) + (m+3)E}{-E + E_N}$	$\frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+3}} \gg \frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+4}} \gg \frac{m+2, m}{(N-2)^{2m+5}} \gg \dots$	$X_{m+2, m}^N$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

B_2 : Approximation de l'équation caractéristique.

La première approximation consiste à négliger s^{2m+3} ,
 s^{2m+5} , s^{2m+7} , ... et à ne conserver que les termes en
 s^{2m+1} dans le tableau précédent.

On obtient le tableau 3.

0 =

$\begin{matrix} \vdots \\ \omega^2 + \omega \\ N \end{matrix} X$	$\frac{3 - N_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega + \omega \\ N \end{matrix} X$	0	0	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega \\ N \end{matrix} X$	0	0	0	0	0	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega^2 + \omega \\ 2 \end{matrix} X$	0	$\frac{3 - N_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0	0	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega + \omega \\ 2 \end{matrix} X$	0	0	0	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega \\ 2 \end{matrix} X$	0	0	0	0	0	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	0
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega^2 + \omega \\ r \end{matrix} X$	0	0	$\frac{3 - N_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega + \omega \\ r \end{matrix} X$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	0	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$
$\begin{matrix} \vdots \\ \omega \\ r \end{matrix} X$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	$\frac{\varepsilon + \omega r (r-N)}{\omega^2 + \omega r}$	0	$\frac{3 - r_3}{3(r+\omega) + (r+\omega)\omega^2}$

Tableau 3 -

$$\prod_{i:2}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} \prod_{i:2}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_2} \dots \prod_{i:2}^{\infty} \frac{\varepsilon_N(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_N} \cdot \det A = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(m+(m+1))\varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon} & \frac{a_m^{mm} \gg^{2m+1}}{1^{2m+1}} & \dots & \frac{a_m^{mm} \gg^{2m+1}}{(N-1)^{2m+1}} \\ \frac{b_m^{mm} \gg^{2m+1}}{1^{2m+1}} & \frac{\varepsilon_2(m+(m+1))\varepsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon} & \dots & \frac{a_m^{mm} \gg^{2m+1}}{(N-2)^{2m+1}} \\ \frac{b_m^{mm} \gg^{2m+1}}{2^{2m+1}} & \frac{b_m^{mm} \gg^{2m+1}}{1^{2m+1}} & \dots & \frac{a_m^{mm} \gg^{2m+1}}{(N-3)^{2m+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_m^{mm} \gg^{2m+1}}{(N-1)^{2m+1}} & \frac{b_m^{mm} \gg^{2m+1}}{(N-2)^{2m+1}} & \dots & \frac{\varepsilon_N(m+(m+1))\varepsilon}{\varepsilon_N - \varepsilon} \end{bmatrix}$$

A : matrice de dimension $N \times N$

$$\prod_{j:1}^N \left[\prod_{i:2}^{\infty} \frac{\varepsilon_j(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_j} \right] \cdot \det A = 0$$

(8)

Remarques.

=====

$$1. \quad a_m^{mm} = b_m^{mm} = m$$

2. Lorsque nous annulons s dans (8), on obtient :

$$\prod_{j=1}^N \left[\prod_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_j (m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_j} \right] \cdot \prod_{k=1}^N \left(\frac{\varepsilon_k \cdot m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_k} \right) = 0$$

$$\prod_{j=1}^N \left[\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j (m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_j} \right] = 0.$$

Si l'on considère N sphères creuses, $\varepsilon_j = 1$.

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^N = 0$$

$$\left[\frac{(m+i-1) + (m+i)\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right]^N = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\varepsilon = - \frac{m+i-1}{m+i} \quad i = 1, 2, \dots$$

et ceci N fois

On retrouve donc le résultat obtenu pour un "void" isolé ^[3]

B_3 : Première correction des modes $w_{m,m}$

La première correction des modes $w_{m,m}$ revient à se limiter aux termes en s^{2m+1} dans le tableau 2.

Il faut donc résoudre

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1 m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon} & \frac{m s^{2m+1}}{1^{2m+1}} & \dots & \frac{m s^{2m+1}}{(N-1)^{2m+1}} \\ \frac{m s^{2m+1}}{1^{2m+1}} & \frac{\varepsilon_2 m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon} & \dots & \frac{m s^{2m+1}}{(N-2)^{2m+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m s^{2m+1}}{(N-1)^{2m+1}} & \frac{m s^{2m+1}}{(N-2)^{2m+1}} & \dots & \frac{\varepsilon_N m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon_N - \varepsilon} \end{bmatrix} = 0$$

Faisons-nous dans le cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \dots = \varepsilon_N$

Considérons $\lambda = \frac{\varepsilon_1 m + (m+1)\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1}$

$$A = m s^{2m+1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1^{2m+1}} & \frac{1}{2^{2m+1}} & \dots & \frac{1}{(N-1)^{2m+1}} \\ \frac{1}{1^{2m+1}} & 0 & \frac{1}{1^{2m+1}} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{2m+1} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(N-1) (N-2)

on obtient ainsi un problème aux valeurs propres :

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

$$\text{posons } A = m \cdot s^{2m+1} A'$$

$$\text{et } \lambda = \lambda' m s^{2m+1} = \frac{\varepsilon_1^{m+1} (m+1) \varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_1)}$$

$$\boxed{A' \vec{x} = \lambda' \vec{x}} \quad (10)$$

soit $\mu = 2m + 1$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1^\mu} & \frac{1}{2^\mu} & \dots & \frac{1}{(N-1)^\mu} \\ \frac{1}{1^\mu} & 0 & \frac{1}{1^\mu} & \dots & \frac{1}{(N-2)^\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(N-1)^\mu} & \frac{1}{(N-2)^\mu} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce problème aux valeurs propres, nous utiliserons la méthode exposée dans l'annexe 2.

$$\underline{N = 2.}$$

$$-\frac{1}{1^\mu} \vec{x} = \lambda' \vec{x}$$

$$\frac{1}{1^\mu} \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\boxed{\lambda' = \pm 1}$$

Pour deux cavités.

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2} \right)_{m,m} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \right\}$$

et

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2} \right)_{m,m} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 - \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \right\}$$

Pour deux sphères.

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2} \right)_{m,m} = \frac{m}{2m+1} \left\{ 1 - s^{2m+1} \right\}$$

et

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2} \right)_{m,m} = \frac{m}{2m+1} \left\{ 1 + s^{2m+1} \right\}$$

N = 3.

$$-\frac{1}{2^\mu} \cdot \vec{X} = \lambda' \vec{X}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2^\mu} & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{X} = \lambda' \vec{X}.$$

$$\lambda'_1 = -\frac{1}{2^\mu}$$

$$\lambda'_2 = \frac{1}{2^{\mu+1}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2^{2\mu+3}} \right\}$$

$$\lambda'_3 = \frac{1}{2^{\mu+1}} \left\{ 1 - \sqrt{1 + 2^{2\mu+3}} \right\}$$

Pour trois cavités.

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 - \frac{m}{m+1} \frac{s^{2m+1}}{2^{2m+1}} \right\}$$

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = - \frac{4 m s^{2m+1} - \left(-\frac{1}{2^{2m+1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(m+1)}{\left(-\frac{1}{2^{2m+1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(2m+1)}$$

et

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = - \frac{4 m s^{2m+1} - \left(-\frac{1}{2^{2m+1}} - \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(m+1)}{\left(-\frac{1}{2^{2m+1}} - \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(2m+1)}$$

Pour trois sphères.

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = \frac{m+1}{2m+1} \left(1 + \frac{s^{2m+1}}{2^{2m+1}} \right)$$

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = \frac{4 m s^{2m+1} + m \left(-\frac{1}{2^{2m+1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)}{\left(-\frac{1}{2^{2m+1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(2m+1)}$$

$$\left(\frac{w^2}{w_p^2}\right)_{m,m} = \frac{4 m s^{2m+1} + m \left(-\frac{1}{2^{2m+1}} + \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)}{\left(-\frac{1}{2^{2m+1}} - \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + \varepsilon}\right)(2m+1)}$$

N = 4.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3\mu} & 1 - \frac{1}{2\mu} \\ 1 - \frac{1}{2\mu} & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{\chi} = \lambda' \vec{\chi}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3^\mu} & 1 + \frac{1}{2^\mu} \\ 1 + \frac{1}{2^\mu} & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} = \lambda' \vec{X}$$

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{1}{3^\mu} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{2^\mu}\right)^2} \right] \\ \lambda'_2 &= \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{1}{3^\mu} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{2^\mu}\right)^2} \right] \\ \lambda'_3 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3^\mu} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{1}{2^\mu}\right)^2} \right] \\ \lambda'_4 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3^\mu} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{1}{2^\mu}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Pour quatre cavités.

$$\left(\frac{w}{w_p} \right)_{m, m} = \frac{\left[2^{2m+1} (3^{2m+1} + 1) + \sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} - 1)^2} \right] m^{2m+1}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)}$$

$$+ \frac{m+1}{2m+1}$$

$$\left(\frac{w}{w_p} \right)_{m, m} = \frac{\left[-2^{2m+1} (3^{2m+1} + 1) + \sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} + 1)^2} \right] m^{2m+1}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)}$$

$$+ \frac{m+1}{2m+1}$$

Pour quatre sphères.

$$\left(\frac{w}{w_p} \right)_{n_1, m} = \frac{\left[-2^{2m+1} (3^{2m+1} + 1) \pm \sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} - 1)^2} \right]_{m, 2^{2m+1}}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)} + \frac{m}{2m+1}$$

$$\left(\frac{w}{w_p} \right)_{m, m} = \frac{\left[2^{2m+1} (3^{2m+1} + 1) \pm \sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} + 1)^2} \right]_{m, 2^{2m+1}}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)} + \frac{m}{2m+1}$$

N = 5.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4^\mu} & 1 - \frac{1}{3^\mu} \\ 1 - \frac{1}{3^\mu} & -\frac{1}{2^\mu} \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \lambda' \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4^\mu} & 1 + \frac{1}{3^\mu} & \frac{1}{2^\mu} \\ 1 + \frac{1}{3^\mu} & \frac{1}{2^\mu} & 1 \\ \frac{2}{2^{2m+1}} & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \lambda' \vec{x}$$

$$\lambda'_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{4^\mu} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} \right)^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{3^\mu} \right)^2}$$

$$\lambda'_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{4^\mu} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} \right)^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{3^\mu} \right)^2}$$

λ'_3, λ'_4 et λ'_5 sont racines de l'équation du troisième degré :

$$\lambda'^3 - \lambda'^2 \left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^{2\mu}} \right) - \lambda \left(-\frac{1}{2^{3\mu}} + \frac{2}{2^{2\mu}} + 3 + \frac{2}{3^\mu} + \frac{1}{3^{2\mu}} \right) - \frac{4}{2^\mu} \left(1 + \frac{1}{3^\mu} \right) + 2 \left(\frac{1}{2^{3\mu}} + \frac{1}{4^\mu} \right) = 0.$$

Pour la résolution de cette équation, voir annexe 3.

Etant donné les valeurs de λ' , on peut calculer $\lambda, \varepsilon, \frac{w^2}{w_p^2}$ à partir des formules $\lambda = \lambda' \cdot m s^{2m+1}$

$$\varepsilon_{\text{trous}} = \frac{m + \lambda}{\lambda - m - 1} \quad \varepsilon_{\text{sphères}} = \frac{\lambda - m - 1}{m + \lambda}$$

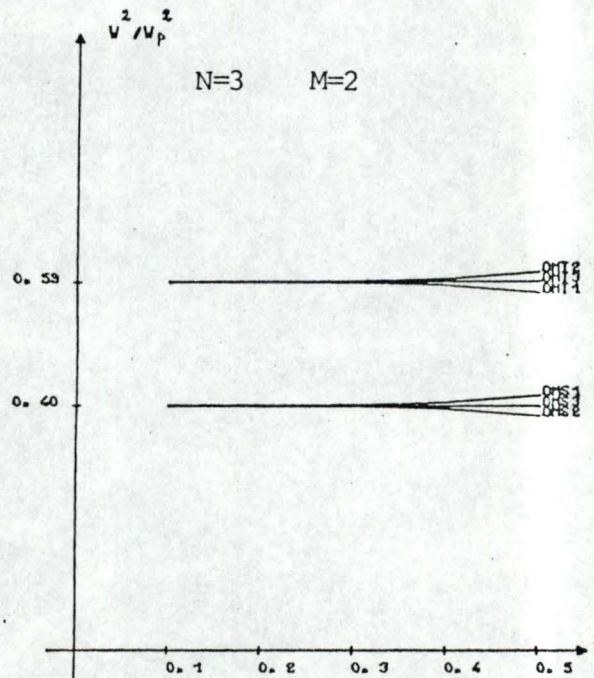
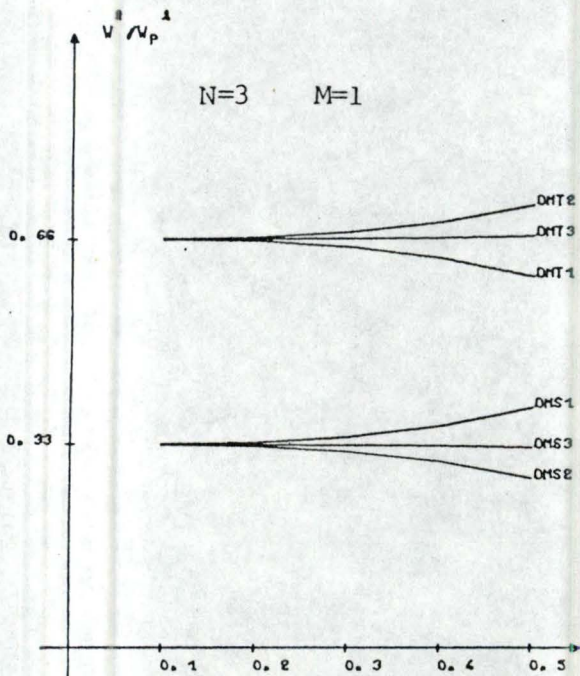
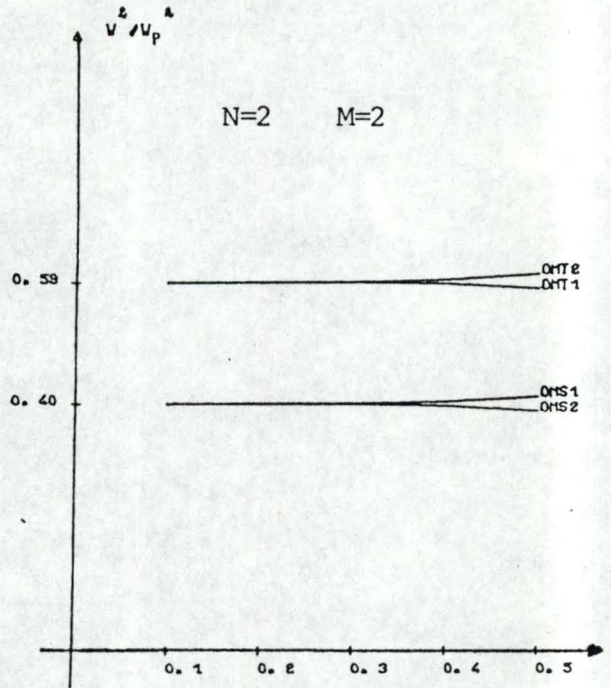
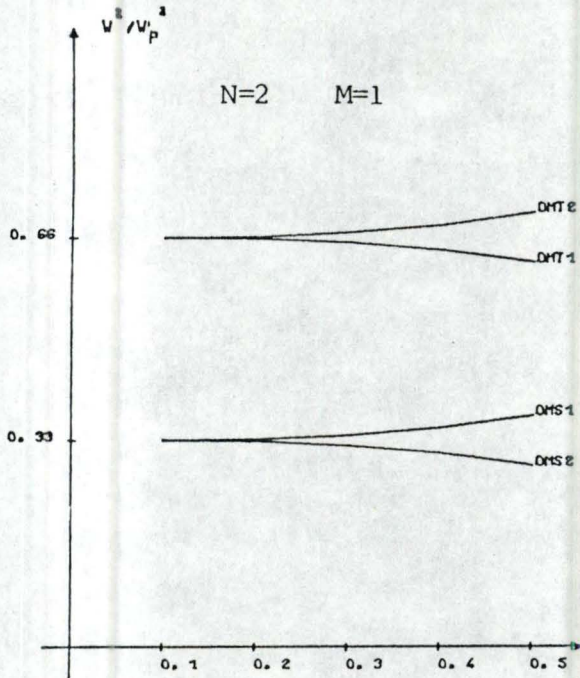
$$(w_{\text{trous}}^2)_{m,m} = w_p^2 \left(\frac{m+1}{2m+1} - \lambda' \frac{m}{2m+1} s^{2m+1} \right)$$

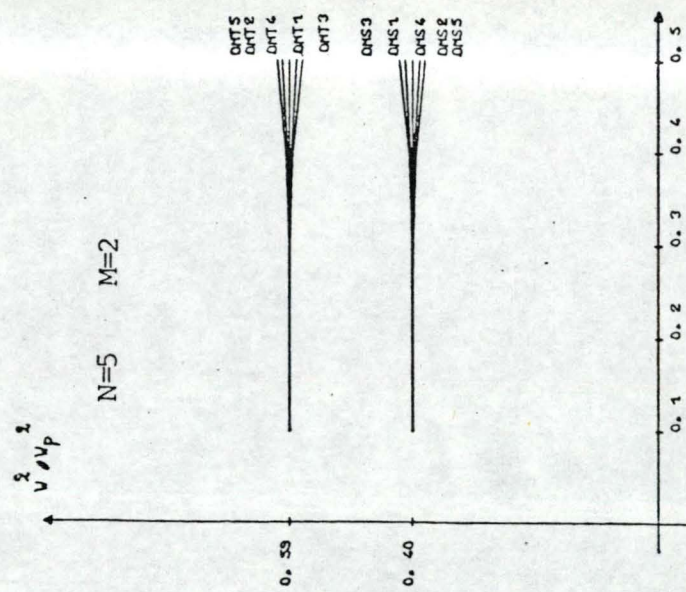
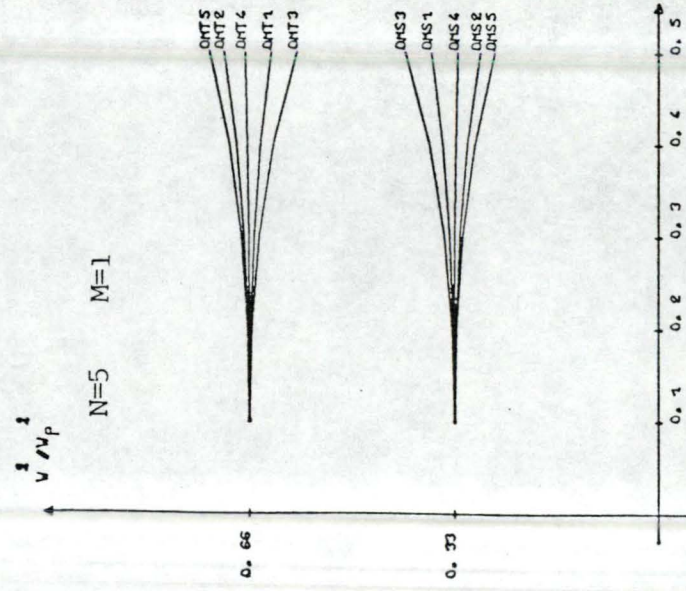
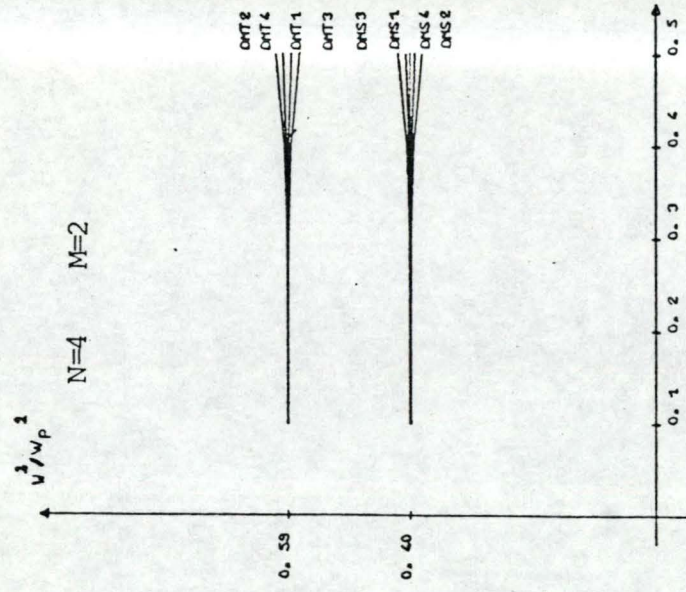
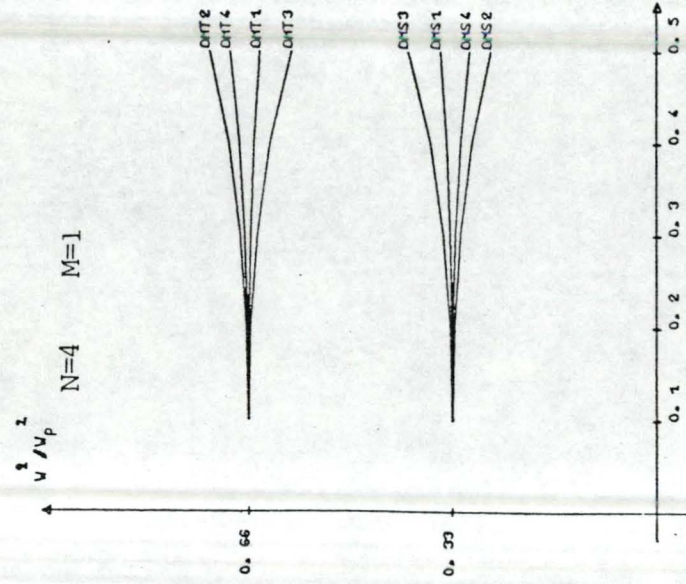
$$(w_{\text{sphères}}^2)_{m,m} = w_p^2 \left(\frac{m}{2m+1} + \lambda' \frac{m}{2m+1} s^{2m+1} \right)$$

λ'	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$N=1$	0	0	0	0	0	0
$N=2$	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1
$N=3$	1,478 -1,353 -0,125	1,429 -1,398 -0,031	1,418 -1,410 -0,007	1,415 -1,413 -0,001	1,414 -1,413 -0,0004	1,412 -1,414 -0,0001
$N=4$	0,480 -1,517 1,742 -0,705	0,587 -1,591 1,647 -0,643	0,610 -1,611 1,625 -0,624	0,616 -1,616 1,619 -0,619	0,617 -1,617 1,618 -0,618	0,617 -1,617 1,618 -0,618
$N=5$	0,894 -1,034 1,904 -0,158 -1,605	0,979 -1,012 1,771 -0,041 -1,697	0,995 -1,003 1,741 -0,010 -1,723	0,998 -1,0009 1,734 -0,002 -1,729	0,999 -1,0002 1,732 -0,0006 -1,731	0,999 -1,000 1,732 -0,0001 -1,731

Les graphes des différents modes en fonction de s pour N variant de deux à cinq sont donnés par les tableaux suivants:
(table traçante BENSON)

SPLITTING





Recherche des modes $w_{o, o}$ pour N sphères creuses.

Nous devons alors résoudre :

$$\text{dét} \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{\xi-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\frac{\xi}{\xi-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & -\frac{\xi}{\xi-1} & \cdot \end{bmatrix} = 0 .$$

$$\text{Nous obtenons} \quad \left(\frac{\xi}{\xi-1} \right)^N = 0$$

$$\xi = 0$$

$$\left(w_{\text{trous}}^2 \right)_{o, o} = w_p^2$$

Recherche des modes $w_{o, o}$ pour N sphères pleines.

$$\text{dét} \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-\xi} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & -\frac{1}{1-\xi} & \cdot \end{bmatrix} = 0 .$$

$$\text{Nous obtenons} \quad \frac{1}{1-\xi} = 0$$

$$\xi = \infty$$

$$\left(w_{\text{sphères}}^2 \right)_{o, o} = 0$$

B₄ : Approximation des modes $w_{m,n}$.

Une approximation des modes $w_{m,m}$ consiste à résoudre l'équation (8) en se limitant à :

$$\prod_{j=1}^N \left(\prod_{i=2}^{\infty} \frac{\epsilon_j (m+i-1) + (m+i)\epsilon}{\epsilon - \epsilon_j} \right) \det A^{\text{approché}} = 0.$$

$$A^{\text{approché}} = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon_{1m} + (m+1)\epsilon}{\epsilon - \epsilon_1} & m s^{2m+1} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m s^{2m+1} & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m s^{2m+1} & -\frac{\epsilon_N^m + (m+1)\epsilon}{\epsilon - \epsilon_N} \end{bmatrix}$$

Considérons N sphères creuses : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_N = 1$

$A^{\text{approché}}$ est donc une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

de dimension $N \times N$

avec $a = -\frac{m + (m+1)\epsilon}{\epsilon - 1}$

$b = m s^{2n+1}$

$$\det A^{\text{approché}} = \prod_{k:1}^N \left(a - 2 b \cos \frac{k \pi}{N+1} \right) = 0. \quad [2]$$

$$\text{Donc } a = 2 b \cos \frac{k \pi}{N+1} \quad k = 1, \dots, N$$

$$- \frac{m + (m+1) \varepsilon(k)}{\varepsilon(k) - 1} = 2 m s^{2m+1} \cos \frac{k \pi}{N+1} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\varepsilon(k) = \frac{2 m s^{2m+1} \cos \frac{k \pi}{N+1} - m}{m + 1 + 2 m s^{2m+1} \cos \frac{k \pi}{N+1}}$$

$$\text{Or, nous avons : } \varepsilon = 1 - \frac{\frac{w_p^2}{w^2}}$$

$$\frac{\frac{w^2}{w_p^2}}{1 - \varepsilon} = \frac{m + 1 + 2 m s^{2m+1} \cos \frac{k \pi}{N+1}}{2m + 1}$$

$$\frac{\frac{w^2}{w_p^2}}{1 - \varepsilon} = \frac{m + 1}{2m + 1} \left\{ 1 + \frac{2 m}{m + 1} s^{2m+1} \cos \frac{k \pi}{N+1} \right\}$$

Comparons avec les résultats des $\frac{\frac{w^2}{w_p^2}}$ du paragraphe B₃

$$N = 1.$$

$$\frac{\frac{w^2}{w_p^2}}{1 - \varepsilon} = \frac{m + 1}{2m + 1}$$

$$\underline{N = 2.}$$

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \right\}$$

et

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 - \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \right\}$$

Pour $N = 1$ et $N = 2$, on retrouve les valeurs exactes de $\frac{w^2}{w_p^2}$

$$\underline{N = 3.}$$

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2m}}{m+1} s^{2m+1} \right)$$

et

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1}$$

Considérons les valeurs exactes de $w_{m, m}$:

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 - \frac{s^{2m+1}}{2^{2m+1}} \frac{m}{m+1} \right\}$$

et

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{4ms^{2m+1} - \left(-\frac{1}{2^{2m+1}} \pm \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + 8} \right) (m+1)}{\left(-\frac{1}{2^{2m+1}} \pm \sqrt{\frac{1}{2^{4m+2}} + 8} \right) (2m+1)}$$

Négligeons les termes en $\frac{1}{2^{2m+1}}$ dans les valeurs exactes de $w_{m,m}$:

$$\frac{w^2}{w_f^2} = \frac{m+1}{2m+1}$$

et

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{-4ms^{2m+1} \pm 2\sqrt{2}(m+1)}{\pm 2\sqrt{2}(2m+1)}$$

Nous retrouvons les valeurs approchées.

$$\underline{N} = 4.$$

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{n+1}{2m+1} \left(1 \pm \frac{2m}{m+1} s^{2m+1} \cdot 0,8090 \right)$$

et

$$\frac{w^2}{w_p^2} = \frac{m+1}{2m+1} \left(1 \pm \frac{2m}{m+1} s^{2m+1} \cdot 0,3090 \right)$$

Considérons les valeurs exactes de $w_{m,m}$:

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{w_p^2} &= \frac{\left[2^{2m+1}(3^{2m+1}+1) \pm \sqrt{2^{4m+2}(3^{2m+1}-1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2}(2^{2m+1}-1)^2} \right] m \cdot 2^{m+1}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)} \\ &+ \frac{m+1}{2m+1} \\ &= \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} \cdot 2^{2m+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^{2m+1}} \pm \frac{\sqrt{2^{4m+2}(3^{2m+1}-1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2}(2^{2m+1}-1)^2}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\left[-2^{2m+1} (3^{2m+1} + 1) \pm \sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} + 1)^2} \right]}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2} \cdot (2m+1)}$$

$$+ \frac{m+1}{2m+1}$$

$$= \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2m+1}} \pm \frac{\sqrt{2^{4m+2} (3^{2m+1} - 1)^2 + 4 \cdot 3^{4m+2} (2^{2m+1} + 1)^2}}{3^{2m+1} \cdot 2^{2m+2}} \right) \right\}$$

Négligeons les termes en $\frac{1}{2^{2m+1}}$ et en $\frac{1}{3^{2m+1}}$ dans les valeurs exactes de $w_{m,m}$:

$$\frac{w_2}{w_p} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

et

$$\frac{w_2}{w_p} = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} s^{2m+1} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

Nous retrouvons les valeurs approchées.

Remarque.

On peut faire de même pour N sphères pleines.

B_5 : Première correction des modes $w_{m+1,m}$.

Pour rechercher les modes $w_{m+1,m}$, il suffit de se limiter aux termes en s^{2m+1} et s^{2m+3} dans le tableau 2.

Ceci donne le tableau 4.

0 =

$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ N \end{matrix}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ N \end{matrix}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ N \end{matrix}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{3-N3}{3(z+m+)(v+m)N}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	$\frac{3-3z}{3(z+m+)(v+m)z}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	$\frac{3-3z}{3(z+m+)(v+m)z}$	0
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	0	$\frac{3-N3}{3(z+m+)(v+m)z}$	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	$\frac{z-3z}{z(z+m+)(v+m)z}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$
$\begin{matrix} \vdots \\ X \\ z \end{matrix}$	0	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	$\frac{4+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	$\frac{z+mz(z-N)}{z+mz(z-N)}$	0	0	$\frac{3-3z}{3(z+m+)(v+m)z}$

Tableau 4

Développons le tableau selon la règle des mineurs, on obtient :

$$\prod_{i=3}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(m+i-1) + \varepsilon(m+i)}{\varepsilon - \varepsilon_1} \prod_{i=3} \frac{\varepsilon_2(m+i-1) + \varepsilon(m+i)}{\varepsilon - \varepsilon_2} \dots$$

$$\prod_{i=3}^{\infty} \frac{\varepsilon_N(m+i-1) + \varepsilon(m+i)}{\varepsilon - \varepsilon_N} \cdot \det B = 0$$

B =

$\frac{\varepsilon_1(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_1 - \varepsilon} \quad 0$	$\frac{a_{m,m}}{1^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$
$\frac{b_{m,m}}{1^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{b_{m,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{\varepsilon_2(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_2 - \varepsilon} \quad 0$	$\frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{a_{m,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$
$\frac{b_{m,m}}{(N-1)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{b_{m,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{b_{m,m}}{(N-2)^{2m+1}} \xrightarrow{2m+1} \frac{b_{m,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+1}$	$\frac{\varepsilon_N(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_N - \varepsilon} \quad 0$	
$0 \quad \frac{\varepsilon_1(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_1 - \varepsilon}$	$\frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$
$\frac{b_{m+1,m}}{1^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{b_{m+1,m}}{1^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$0 \quad \frac{\varepsilon_2(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_2 - \varepsilon}$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$\frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{a_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$
$\frac{b_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{b_{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$\frac{b_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+2}} \xrightarrow{2m+3} \frac{b_{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \xrightarrow{2m+3}$	$0 \quad \frac{\varepsilon_N(m+(m+1)\varepsilon)}{\varepsilon_N - \varepsilon}$	

B : matrice de dimension 2N x 2N

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=3}^{\infty} \frac{\xi_j^{(m+i-1)} + \xi_j^{(m+i)}}{\xi_j - \xi_j} \right] \det B = 0$$

Remarques.

=====

$$\begin{aligned} b_m^{mm} &= \frac{mm}{m} = m \\ b_{m+1}^{m,n} &= m(2m+1) \\ b_{m+1}^{m+1,m} &= -(m+1)(2m+2) \\ b_m^{m+1,m} &= -(m+1) \\ a_{m+1}^{mn} &= -m(2m+1) \\ a_{m+1}^{m+1,n} &= -(m+1)(2m+2) \\ a_m^{m+1,m} &= m+1 \end{aligned}$$

Recherchons la première correction des modes $m+1, m$ pour N cavités. c'est-à-dire quand $\xi_1 = \dots = \xi_N = 1$

Pour $l = m, m + (m+1)\xi = X s^{2m+1} + \dots$ où X est une constante et $\xi = -\frac{m}{m+1}$

Pour $l = m+1, (m+1) + (m+2)\xi = Y s^{2m+3} + \dots$ où Y est une constante et $\xi = -\frac{m+1}{m+2}$

Nous pouvons diviser les N dernières lignes du déterminant de B par s^{2m+3} , ce qui les rend indépendantes de s .

$$m - \frac{(m+1)^2}{2} = \frac{1 + \frac{m+1}{m+2}}{1} = \frac{3 - 1}{3(m+1)} = \frac{2}{3(m+1)}$$

Le déterminant de B devient :

$$\det B = \begin{vmatrix} \frac{(N-1)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-1)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-1)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-1)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(N-2)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-2)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-2)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} & \frac{(N-2)z^{m+2}}{z^{m+1}z^{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3-r}{3(z+r)(m+2)} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(-\frac{1}{2m+3}\right)^N \det C = 0$$

où

$$C = \begin{bmatrix} \frac{(m+1)+(m+2)\varepsilon}{1-\varepsilon} & \frac{a_{m+1,m}^{m+1,m}}{1^{2m+3}} \gg^{2m+3} & \dots & \frac{a_{m+1,m}^{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \gg^{2m+3} \\ \frac{b_{m+1,m}^{m+1,m}}{1^{2m+3}} \gg^{2m+3} & \frac{(m+1)+(m+2)\varepsilon}{1-\varepsilon} & \dots & \frac{a_{m+1,m}^{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \gg^{2m+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{m+1,m}^{m+1,m}}{(N-1)^{2m+3}} \gg^{2m+3} & \frac{b_{m+1,m}^{m+1,m}}{(N-2)^{2m+3}} \gg^{2m+3} & \dots & \frac{(m+1)+(m+2)\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{bmatrix}$$

C de dimension $N \times N$

Considérons $\gamma = \frac{(m+1)+(m+2)\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$$D = -(m+1)(2m+2) s^{2m+3} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1^{2m+3}} & \dots & \frac{1}{(N-1)^{2m+3}} \\ \frac{1}{1^{2m+3}} & 0 & \dots & \frac{1}{(N-2)^{2m+3}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(N-1)^{2m+3}} & \frac{1}{(N-2)^{2m+3}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un problème aux valeurs propres :

$\det (D - \gamma E) = 0$ qui se résoud de la même façon que pour les modes $w_{m,m}$

R_6 : Première correction des modes $w_{1, m}$

Pour la recherche des modes $w_{1, m}$, il suffit d'annuler le déterminant formé par les $(1-m+1)^{\text{ème}}$ éléments de la diagonale des $N \times N$ matrices du tableau 1.

$$\text{Posons } \xi = \frac{1 + (1 + 1)\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

Le problème s'écrit alors sous la forme : $\det (F - \xi E) = 0$
où E est la matrice unité

et où

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{l, m}^{l, m}}{1^{2l+1}} & \dots & \frac{a_{l, m}^{l, m}}{(N-1)^{2l+1}} \\ \frac{b_{l, m}^{l, m}}{1^{2l+1}} & 0 & \dots & \frac{a_{l, m}^{l, m}}{(N-2)^{2l+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_{l, m}^{l, m}}{(N-1)^{2l+1}} & \frac{b_{l, m}^{l, m}}{(N-2)^{2l+1}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : $a_1^{1, m} = b_1^{1, m}$

A N N E X E S .

=====

A N N E X E 1.

Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques.

Les coordonnées bisphériques d'un point (μ, η, ϕ) sont définies

$$\begin{aligned} \mu &= \ln \frac{e_-}{e_+} \\ \eta &= \theta_+ - \theta_- \\ \phi &= \phi \end{aligned}$$

où (e_+, θ_+, ϕ) et (e_-, θ_-, ϕ) sont les coordonnées sphériques par rapport aux points a et $-a$ sur l'axe z . (cfr. figure 1.)

L'équation $\Delta V = 0$ s'écrit [7]:

$$\frac{1}{h_\mu^3} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right] = 0$$

où $h_\mu = \frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta}$

L'équation de Laplace est séparable moyennant l'introduction d'un facteur de modulation. $V = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \cdot F(\mu, \eta, \phi)$

$$\text{L'équation devient : } \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{F}{4} = 0$$

La séparation sous la forme $F = M(\mu) \cdot H(\eta) \cdot \Phi(\phi)$ donne les 3 équations :

$$\frac{d^2 M}{d\mu^2} = \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 M$$

$$- \frac{\sin \eta}{H} \frac{d}{d\eta} \left(\sin \eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \frac{\sin^2 \eta}{4} - \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \eta = -m^2$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi$$

Ces équations ont pour solutions :

$$e^{(n+\frac{1}{2})\mu} \quad \text{et} \quad e^{-(n+\frac{1}{2})\mu}$$

$$P_m^m(\cos\eta) \quad \text{et} \quad Q_m^m(\cos\eta)$$

$$e^{im\phi} \quad \text{et} \quad e^{-im\phi}$$

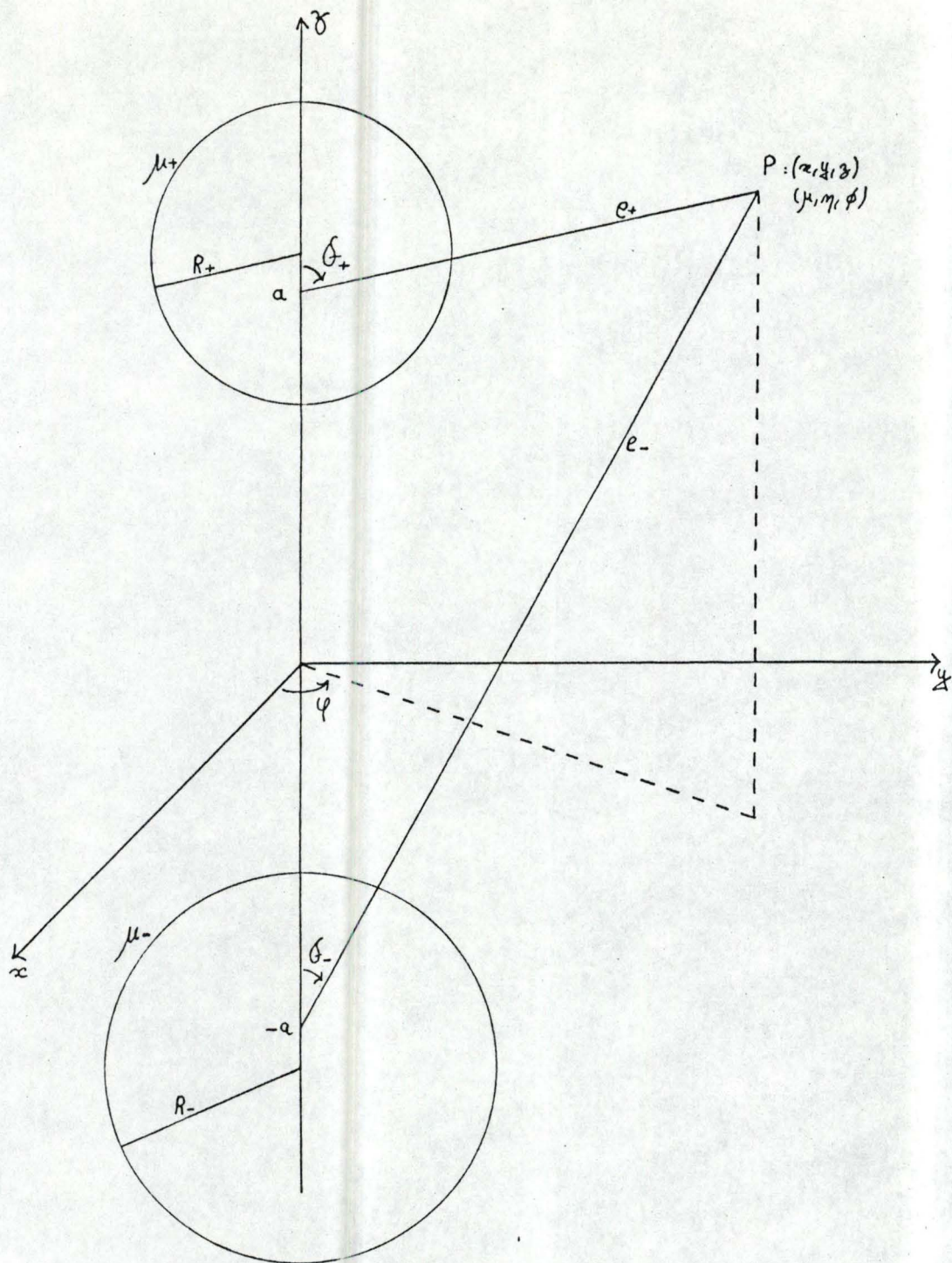
m et n entiers positifs
ou nuls

$$|m| \leq n$$

La solution générale s'écrit donc :

$$V = \sqrt{\cosh\mu - \cos\eta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} V_n^m$$

$$V_n^m = \left[A_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\mu} + B_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} \right] \left[C_n^m P_m^m(\cos\eta) e^{im\phi} + D_n^m Q_m^m(\cos\eta) e^{im\phi} \right]$$



- figure 1 -

Deux voids caractérisés par leurs coordonnées bisphériques

$$\mu = \mu_+ \text{ et } \mu = \mu_-$$

$$\text{Cosh } \mu_{\pm} = \frac{D}{R_{\pm}} \quad \text{où } D \text{ est la distance entre le centre des}$$

voids et le plan (x, y) .

A N N E X E 2.

Réduction de $K\vec{X} = 0$

$$\text{où } K = \begin{bmatrix} k & a_2 \dots \dots & a_N \\ a_2 & k & a_2 \dots \dots & a_{N-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_N & a_{N-1} \dots \dots & k \end{bmatrix}$$

Le problème peut s'écrire : $H \vec{X} = \lambda \vec{X}$

$$\text{avec } H = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \dots \dots \dots & a_N \\ a_2 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_N & a_{N-1} \dots \dots \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = k$$

Le déterminant final obtenu lors de la résolution de l'équation de Laplace pour N sphères pleines ou creuses est un déterminant d'ordre N de cette forme.

Nous nous proposons de simplifier la recherche des valeurs propres λ dans $H\vec{X} = \lambda \vec{X}$

Si N est pair, on pose $N = 2n$

Si N est impair, on pose $N = 2n + 1$

1. N pair.

Le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{n+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_2 & \dots & a_{n+1} \end{bmatrix}$$

$B^t =$ transposée de B .

$$\text{Il faut que : } A \vec{X} + B \vec{Y} = \lambda \vec{X} \quad (1)$$

$$B^t \vec{X} + A \vec{Y} = \lambda \vec{Y} \quad (2)$$

$$\text{Posons } \vec{Y} = \pm T \vec{X} \quad \text{où} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d'ordre } n$$

$$(1) \text{ devient : } A \vec{X} + B T \vec{X} = \lambda \vec{X} \quad (1')$$

$$(2) \text{ devient : } B^t \vec{X} \pm A T \vec{X} = \pm \lambda T \vec{X} \quad (2')$$

Multipliant (1') par T , on obtient :

$$T A \vec{X} \pm T B T \vec{X} = \lambda T \vec{X} \quad (1'')$$

De (1'') et (2'), on déduit :

$$(A T \pm B^t) \vec{X} = (T A \pm T B T) \vec{X}$$

Etant donné que A et T commutent et que $T B T = B^t$ on a :

$$A T \pm B^t = T A \pm T B T$$

$$\begin{bmatrix} \vec{X} \\ T\vec{X} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \vec{X} \\ -T\vec{X} \end{bmatrix} \text{ sont donc solutions de (1) et (2)}$$

Conclusion.

Le problème de la recherche des $2n$ valeurs propres et des $2n$ vecteurs propres correspondants est ramené à la résolution de deux problèmes aux valeurs propres de dimension n

$$(A \pm B T) \vec{X} = \lambda \vec{X}$$

2. N impair.

Le problème s'écrit sous la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & \begin{matrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ a_2 \end{matrix} & B \\ \hline \begin{matrix} a_{n+1} \dots a_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a_2 \dots a_{n+1} \end{matrix} \\ \hline B^t & \begin{matrix} a_2 \cdot \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{matrix} & A \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \\ \vec{Y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \vec{X} \\ 0 \\ \vec{Y} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_2 & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_n & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{n+2} & \dots & a_{2n+1} \\ a_{n+1} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & \dots & a_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons } \vec{v} = (a_{n+1}, a_n, \dots, a_2)$$

$$\vec{u} = (a_2, a_3, \dots, a_{n+1})$$

$$\text{Il faut que : } A \vec{X} + B \vec{Y} = \lambda \vec{X} \quad (1)$$

$$\vec{v} \vec{X} + \vec{u} \vec{Y} = 0 \quad (2)$$

$$B^t \vec{X} + A \vec{Y} = \lambda \vec{Y} \quad (3)$$

$$\text{Posons : } \vec{Y} = -T \vec{X}$$

$$(1) \text{ devient : } A \vec{X} - B^t \vec{X} = \lambda \vec{X} \quad (1')$$

$$(3) \text{ devient : } B^t \vec{X} - A \vec{X} = -\lambda \vec{X} \quad (2')$$

multipliant (1') par T , on obtient :

$$T A \vec{X} - T B T \vec{X} = \lambda T \vec{X} \quad (1'')$$

De (1'') et (2'), on déduit

$$(T A - T B T) \vec{X} = (A T - B^t) \vec{X}$$

Etant donné que $A T = T A$ et que $T B T = B^t$, nous avons

$$T A - T B T = A T - B^t$$

L'hypothèse $\vec{Y} = -T \vec{X}$ est donc compatible. De plus, l'équation (2) est satisfaite.

Le problème revient donc à résoudre :

$$(A - B T) \vec{X} = \lambda \vec{X}$$

Remarquons que l'équation (2) n'est pas satisfaite si on pose $\vec{Y} = T \vec{X}$. Nous écrivons donc le problème sous la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & \begin{matrix} a_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 \end{matrix} & B \\ \hline \begin{matrix} a_{n+1} \cdots \cdots a_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a_2 \cdots \cdots a_{n+1} \end{matrix} \\ \hline B^t & \begin{matrix} a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n+1} \end{matrix} & A \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \\ \\ \vec{Y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \\ \\ \vec{Y} \end{bmatrix}$$

Il faut que :

$$A \vec{X} + a \vec{v}^t + B \vec{Y} = \lambda \vec{X} \quad (1)$$

$$B^t \vec{X} + a \vec{u}^t + A \vec{Y} = \lambda \vec{Y} \quad (2)$$

$$\vec{v} \vec{X} + \vec{u} \vec{Y} = \lambda a \quad (3)$$

$$\text{où } \vec{v}^t = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{et } \vec{u}^t = \begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

Posons $\vec{Y} = T \vec{X}$.

$$(1) \text{ devient } A \vec{X} + a \vec{v}^t + B T \vec{X} = \lambda \vec{X} \quad (1')$$

$$(2) \text{ devient } B^t \vec{X} + a \vec{u}^t + A T \vec{X} = \lambda T \vec{X} \quad (2')$$

Multipliant (1') par T, on obtient :

$$T A \vec{X} + a T \vec{v}^t + T B T \vec{X} = \lambda T \vec{X} \quad (1'')$$

De (1'') et (2') on déduit :

$$T A \vec{X} + a T \vec{v}^t + T B T \vec{X} = B^t \vec{X} + a \vec{u}^t + A T \vec{X}$$

Etant donné que $A T = T A$ et $T B T = B^t$, on obtient :

$$a T \vec{v}^t = a \vec{u}^t$$

$$\begin{bmatrix} \vec{X} \\ T \vec{X} \end{bmatrix} \text{ est donc solution de (1), (2), (3)}$$

Nous avons

$$A \vec{X} + a \vec{v}^t + B T \vec{X} = \lambda \vec{X} \quad (4)$$

$$\vec{v} \vec{X} + \vec{u} \vec{Y} = \lambda a \quad (5)$$

$$\vec{Y} = \lambda T \vec{X} \quad (6)$$

$$\text{or } \vec{u} = \vec{v} T$$

Remplaçant dans (5), on obtient :

$$2 \vec{v} \vec{X} = \lambda a$$

Le problème revient donc à résoudre

$$\begin{cases} (A + B T) \vec{X} + a \vec{v}^t = \lambda \vec{X} \\ 2 \vec{v} \vec{X} = \lambda a \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire

$$(A' + B' T) \vec{R} = \lambda \vec{R}$$

$$\text{où } A' = \left[\begin{array}{c|c} & A \\ \hline a_{n+1} \dots a_2 & 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & c \\ & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{où } \vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{X} \\ a \end{bmatrix}$$

$$\text{et } T = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \text{ d'ordre } n+1$$

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} a_{n+1} & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_2 & \\ \hline 0 & a_2 \dots a_{n+1} \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ B \end{array}$$

Conclusion.

Le problème de la recherche des $2n + 1$ valeurs propres et des $2n + 1$ vecteurs propres correspondants est ramené à la résolution de deux problèmes aux valeurs propres : le premier de dimension n et le second de dimension $n + 1$.

$$\begin{cases} (A - BT) \vec{X} = \lambda \vec{X} \\ (A' + B' T) \vec{R} = \lambda \vec{R} \end{cases}$$

ANNEXE 3.

Résolution de l'équation du 3e degré.

Dans la recherche des valeurs de $\xi = \frac{m + \lambda' m s^{2m+1}}{m s^{2m+2} \lambda'^{-m-1}}$ pour cinq

sphères alignées, nous devons rechercher les racines de l'équation :

$$a_0 \lambda'^3 + a_1 \lambda'^2 + a_2 \lambda' + a_3 = 0 \quad (1)$$

avec $a_0 = 1$

$$a_1 = - \left[\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^{2\mu}} \right]$$

$$a_2 = - \left[\frac{2}{2^{2\mu}} - \frac{1}{2^{3\mu}} + \left(1 + \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 2 \right]$$

$$a_3 = - \left[\frac{4}{2^\mu} + \frac{4}{2^\mu 3^\mu} - \frac{2}{2^{3\mu}} - \frac{2}{2^{2\mu}} \right]$$

Il n'est pas facile de calculer les valeurs de λ' , aussi utilisons-nous l'ordinateur.

Rappelons que $\mu = 2m + 1$ et que m est un entier positif ou nul. Recherchons une limite supérieure des racines λ' .

$$\cdot \quad \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^{2\mu}} > 0 \quad \text{pour } \mu \geq 1$$

$$\cdot \quad \frac{2}{2^{2\mu}} - \frac{1}{2^{3\mu}} + \left(1 + \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 2 =$$

$$\frac{2}{2^{2\mu}} - \frac{1}{2^{3\mu}} + 1 + \frac{2}{3^\mu} + \frac{1}{3^{2\mu}} + 2 > 0 \quad \text{pour } \mu \geq 1$$

$$\text{car } \frac{1}{2^{3\mu}} < 1 \quad \text{donc } 1 - \frac{1}{2^{3\mu}} > 0$$

$$\text{et } \frac{2}{2^{2\mu}} + \frac{2}{3^\mu} + \frac{1}{3^{2\mu}} + 2 > 0$$

$$\cdot \frac{4}{2^\mu} + \frac{4}{2^\mu 3^\mu} - \frac{2}{2^3 \mu} - \frac{2}{2^2 \mu} =$$

$$\frac{4}{2^\mu} - \frac{2}{2^2 \mu} + \frac{4}{2^\mu 3^\mu} - \frac{2}{2^3 \mu} > 0 \text{ pour } \mu \geq 1$$

car

$$\frac{4}{2^\mu} - \frac{2}{2^2 \mu} = \frac{4 \cdot 2^\mu - 2}{2^2 \mu} = \frac{2 \cdot (2^{\mu+1} - 1)}{2^2 \mu}$$

or

$$\frac{2}{2^2 \mu} > 0 \text{ et } 2^{\mu+1} > 1 \text{ pour } \mu \geq 1$$

donc

$$\frac{4}{2^\mu} - \frac{2}{2^2 \mu} > 0 \text{ pour } \mu \geq 1$$

de plus :

$$\frac{4}{2^\mu \cdot 3^\mu} - \frac{2}{2^3 \mu} = \frac{4 \cdot 2^2 \mu - 2 \cdot 3^\mu}{2^3 \mu \cdot 3^\mu} = \frac{2 \cdot (2^{2\mu+1} - 3^\mu)}{2^3 \mu \cdot 3^\mu}$$

or

$$\frac{2}{2^3 \mu \cdot 3^\mu} > 0 \text{ et } 2^{2\mu+1} = 2 \cdot 4^\mu > 3^\mu \text{ pour } \mu \geq 1$$

donc

$$\frac{4}{2^\mu \cdot 3^\mu} - \frac{2}{2^3 \mu} > 0 \text{ pour } \mu \geq 1$$

On a donc : $a_0 = 1$

$$a_1 < 0$$

$$a_2 < 0$$

$$a_3 < 0$$

L'équation (1) admet au moins une racine réelle de signe contraire à a_3 . Il y a donc au moins une racine réelle positive.

De Plus, $L = 1 + \sqrt[p]{\frac{p}{a_0}}$ est une limite supérieure des racines positives.

p est l'indice du premier coefficient négatif

$$N = \max \left\{ |a_1|, |a_2|, |a_3| \right\}$$

[10]

Nous avons ici $L = 1 + N$

Comparons $|a_1|$ et $|a_2|$

$$|a_2| = \frac{2}{2^2 \mu} - \frac{1}{2^3 \mu} + \left(1 + \frac{1}{3\mu}\right)^2 + 2 > |a_1| = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2^2 \mu}$$

en effet : $\frac{2}{2^2 \mu} > \frac{1}{2^2 \mu}$

et

$$-\frac{1}{2^3 \mu} + \left(1 + \frac{1}{3\mu}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{2^3 \mu} + 3 + \frac{2}{3\mu} + \frac{1}{3^2 \mu} > 2$$

tandis que $\frac{1}{2\mu} < 2$

Comparons $|a_2|$ et $|a_3|$

$$|a_2| - |a_3| = \frac{4}{2^{2\mu}} + \frac{1}{2^{3\mu}} + 1 + \frac{2}{3^\mu} + \frac{1}{3^{2\mu}} + 2 - \frac{4}{2^\mu} - \frac{4}{2^\mu 3^\mu} > 0$$

car

$$2 - \frac{4}{2^\mu} \geq 0, \quad 1 - \frac{4}{2^\mu 3^\mu} > 0 \quad \text{et tous les autres termes sont } > 0.$$

Nous obtenons : $N = |a_2|$

$$L = 1 + \frac{2}{2^{2\mu}} - \frac{1}{2^{3\mu}} + \left(1 + \frac{1}{3^\mu}\right)^2 + 2$$

Nous utilisons la méthode de Newton Raphson de formule itérative :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dans le programme de recherche des racines λ' , nous partons de la valeur L , en choisissant le pas ϵ négatif et assez petit pour que la méthode de Newton Raphson converge.

Montrons que les trois racines de l'équation sont distinctes.

supposons qu'il y ait deux racines confondues.

$f(\lambda')$ s'écrit alors :

$$(\lambda' - r)^2 (\lambda' - s) = \lambda'^3 - (2r + s) \lambda'^2 +$$

$$\frac{r}{2} (2r + s) \lambda' - r(r.s.)$$

il faudrait avoir $a_2 = -\frac{r}{2} a_1$

donc $r = -\frac{2a_2}{a_1}$, qui n'est pas racine de l'équation $f(\lambda') = 0$ car elle devrait vérifier :

$$r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0$$

$$2a_2^2 (-4a_2 + a_1^2) + a_3 a_1^3 = 0 \quad (2)$$

étant donné que a_1, a_2, a_3 sont strictement négatifs, le membre de gauche de (2) est > 0

On a une contradiction ce qui dénonce une hypothèse fausse.

Conclusion : les trois racines sont distinctes.

$$F(X, A, B, C) = X^3 + A \cdot X^2 + B \cdot X + C$$

$$FPRIM(X, A, B) = 3 \cdot X^2 + 2 \cdot A \cdot X + B$$

N=5

```

900 READ 900, M1, M2
    FORMAT(2I3)
    READ 300, EPS, DEL
300  FORMAT(E15.8)
    DO 20 M=M1, M2
    M11=M
    FMM=M11
    FM=2.*M11+1.
    A=-1./2.**FM-1./2.**(2.*FM)
    B=-2./2.**(2.*FM)+1./2.**(3.*FM)-(1.+1./3.**FM)**2-2.
    C=-4./2.**FM-4./((2.**FM)*(3.**FM))+2./2.**(3.*FM)+2./2.**(2.*FM)
    L=1
    IK=1
  3  FLI=IK
    X=(FLI-1.)*EPS+1.-B
    FF=F(X, A, B, C)
    IK=IK+1
    FLI=IK
    X=(FLI-1.)*EPS+1.-B
    FFF=F(X, A, B, C)
    P=FF*FFF
    IF(P)1,2,3
  2  XR=X-EPS
    XL=X
    IF(L.NE.1)GOTO 33
    FLA3=XL
    GOTO 34
  33 IF(L.NE.2)GOTO 35
    FLA4=XL
    GOTO 34
  35 FLA5=XL
  34 L=L+1
    IF(L-4)3,39,39
  1  XR=X-EPS
    XL=X
    X=XR
  7  XX=X-F(X, A, B, C)/FPRIM(X, A, B)
    T=ABS(XX-X)
    IF(T-DEL)4,4,5
  4  IF(L.NE.1)GOTO 36
    FLA3=XX

```

```
GOTO 37
36 IF(L.NE.2)GOTO38
   FLA4=XX
   GOTO 37
38 FLA5=XX
37 L=L+1
   IF(L-4)3,39,39
   5 X=XX
   GO TO 7
39 PRINT 9000,M11
9000 FORMAT(1H1,/////, 'M=', I2)
      PRINT 8011, FLA3, FLA4, FLA5
8011 FORMAT(1X, 'LAM1=', E15.8, 2X, 'LAM2', E15.8, /, 'LAM3=', E15.8, /)
20 CONTINUE
   STOP
   END
```

M= 1

LAM1= 0.19043007E 01 LAM2=0.15808970E 00

LAM3=-0.16055861E 01

M= 2

LAM1= 0.17711506E 01 LAM2=0.41068774E-01

LAM3=-0.16978550E 01

M= 3

LAM1= 0.17414446E 01 LAM2=0.10377496E-01

LAM3=-0.17231932E 01

M= 4

LAM1= 0.17343588E 01 LAM2=0.26016687E-02

LAM3=-0.17298002E 01

M= 5

LAM1= 0.17326231E 01 LAM2=0.65088411E-03

LAM3=-0.17314835E 01

M= 6

LAM1= 0.17321930E 01 LAM2=0.16275048E-03

LAM3=-0.17319088E 01

M= 7

LAM1= 0.17320862E 01 LAM2=0.40689468E-04

LAM3=-0.17320156E 01

Conclusions et extensions.

Dégageons les résultats suivants de notre étude.

1. Nous avons mis en évidence dans la première partie que les corrections en $(\frac{R}{D})^4$ étaient nulles pour tous les modes de deux sphères ou deux cavités.

2. Nous avons découvert une règle de somme sur les corrections des modes l, m (conséquence de la trace nulle p. 97) : la première correction pour le carré des fréquences des modes m, m est donnée par

$$\left(\frac{w}{w_p}\right)^2 = 1 + \lambda_i^{m, N} s^{2m+1}.$$

Les coefficients $\lambda_i^{m, N}$ satisfont la relation $\sum_{i=1}^N \lambda_i^{m, N} = 0$

de sorte que le centre de gravité du splitting reste inchangé au premier ordre comme dans le cas $N = 2$.

Nous observons que pour chaque m , la correction maximum augmente avec N est toujours de même signe.

3. Nous avons réduit l'ordre du déterminant apparaissant dans le calcul de la première correction des modes m, m .

Pour N variant de deux à cinq, le problème se ramenait à diagonaliser une matrice de dimension N et de trace nulle.

La théorie des groupes permet de réduire cette dimension à

$$\frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{N+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{N-1}{2} \quad \text{selon la parité de } N.$$

Plus de temps nous eût permis de rechercher les modes l, m pour N sphères différentes.

Il eût aussi été intéressant d'envisager le cas d'une sphère devant un plan et enfin le problème d'une chaîne infinie de sphères quelconques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. F.L. VOOK
Effects of radiation on materials.
Physics today (sep. 1975)
2. A.A. LUCAS, A. RONVEAUX, M. SCHMEITS, G. DELANAYE
Van der Waals energy between voids in dielectrics.
Physical review B, 12, 12 (déc. 1975)
3. A.A. LUCAS
Plasmon cohesive energy of voids and lattices in irradiated metals.
Physical review B, 7, 8 (avr. 1973)
4. M.P. ADAM, Ch. SEGHERS
Memoire de licence en mathématiques (1975 - 1976).
Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur
5. A. RONVEAUX, A.A. LUCAS, M. SCHMEITS, F. DELANAYE
Electromagnetic interaction between spherical cavities in solids.
Physics letters, 54A, 4 (sept. 1975)
6. G. MUKHOPADHUYAY, S. LUNDQVIST
Van der Waals interaction between spherical voids.
Pergamon Press, solid state communications, 17 (1975)

7. P.M. MORSE, H. FESHBACH

Methods of theoretical physics.

Mc Graw-Hill Book Company, inc. (1953)

8. L. ROBIN

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales (tome 1).

Gauthier-Villars (1957)

9. P. LEONARD

Calcul matriciel.

Syllabus de l'université de Liège (1961)

10. L. DERWIDUE

Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique.

Sciences et lettres (1957)

TABLE DES MATIERES

. <u>Introduction</u> :	
A. Généralités	1
B. Equations du problème	2
C. Modes d'un trou isolé	4
D. Plan du travail	6
. <u>1ère partie</u> : Deux sphères - coordonnées bisphériques.	
A. Rappel théorique	13
B. Exploitation	15
C. Résultats	17
D. Energie de Van der Waals	53
. <u>2ème partie</u> : N sphères - coordonnées sphériques et théorème d'addition	
A. Théorie. N sphères ou cavités alignées quelconques	55
B. Exploitation.	
B ₁ . Formulation matricielle pour N sphères identiques	63
B ₂ . Approximation de l'équation caractéristique	70
B ₃ . Première correction des modes $w_{m,m}$	74
B ₄ . Approximation des modes $w_{m,m}$	85
B ₅ . Première correction des modes $w_{m+1, m}$	90
B ₆ . Première correction des modes $w_{1, m}$	97
. <u>Annexes</u> :	
1. Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées bisphériques	98
2. Réduction de $K \vec{X} = 0$	101
3. Résolution de l'équation du 3e degré	108

- . Conclusions et extensions
- . Références bibliographiques
- . Table des matières