

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Équation de Laplace et interaction de Van Der Waals entre deux cavités sphériques

Adam, Marie-Paule; Seghers, Chantal

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

Année académique 1975-1976.

EQUATION DE LAPLACE

&

INTERACTION DE VAN DER WAALS

ENTRE DEUX CAVITES SPHERIQUES.

LABORATOIRE
DE
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE
PHYSIQUE DU SOLIDE

Promoteur
André RONVEAUX

Mémoire présenté pour l'obtention
du Grade de Licencié en Sciences
Mathématiques
par

Marie-Paule ADAM
&
Chantal SEGHERS

FMB1/1976/84

Nous tenons à remercier Monsieur Ronveaux et
Monsieur Moussiaux pour l'aide précieuse qu'ils nous
ont apportée, toujours dans la bonne humeur.

Marie-Paule

Chantal

INTRODUCTION.

၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀

I. - GENERALITES.

Récemment, l'observation de structures poreuses particulières a soulevé le problème de calculer une interaction effective de type Van der Waals entre des cavités ou "voids" dans la matière. Lorsqu'une cavité est créée à l'intérieur d'une surface métallique, des charges fluctuantes apparaissent sur les surfaces frontières.

Les voids^[1] résultent de l'agglomérat de plusieurs petites cavités sphériques, appelées vacances; ces vacances sont accumulées lorsque l'irradiation dans le métal est suffisamment forte et la température assez élevée. Les voids apparaissent généralement dispersés au hasard dans des régions homogènes irradiées. Cependant, il faut certaines conditions expérimentales spéciales et il doit exister une certaine agitation du réseau pour que les vacances puissent voyager.

Depuis quelque temps, les processus de réactions nucléaires et "cristallisation" des voids ont retenu l'attention : ceci est dû en fait à l'importance technologique d'un phénomène dit de "gonflement" (augmentation de volume). En pratique, la fraction de gonflement, c'est-à-dire le volume du void divisé par le volume total, peut augmenter de 10 % après une forte irradiation.^[2]

Actuellement, ces phénomènes restent toujours méconnus et de ce fait, les réacteurs ne peuvent fonctionner dans des conditions optimales. Ceci a un impact économique important : en effet,

si on ne parvient pas à élucider le mécanisme responsable de la croissance des voids, cela coûtera après 1985 trois milliards de dollars par an aux U.S.A. [3]

Nous allons donc étudier l'interaction entre deux voids d'après la théorie de Lifshitz des forces de Van der Waals. [4,5] Si on place deux corps à proximité l'un de l'autre, il existe une interaction. On se propose donc d'étudier cette interaction dite de Van der Waals entre deux sphères pleines, ou deux voids, séparées par le vide et situées à petite distance pour que les effets de retard puissent être négligés. Dans ce cas, la densité d'électrons reste uniforme partout, excepté sur les surfaces, et le potentiel scalaire généré par les fluctuations des charges de surface satisfait l'équation de Laplace. [6]

Le problème général consisterait à résoudre les équations de Helmholtz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta V - \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions limites qui comprennent $\epsilon(\omega)$ restreignent les fréquences possibles des modes électromagnétiques à certaines valeurs $\omega_i(D)$ qui, en général, dépendent de la distance D entre les voids. Quand D devient inférieure à la longueur d'onde typique $\frac{2\pi c}{\omega_i}$ du champ électromagnétique, les effets de retard peuvent être négligés entièrement et le problème se réduit alors à l'équation de Laplace

$\Delta V = 0$ avec des conditions limites.

En pratique, la distance observée dans les métaux irradiés est de 100 \AA alors que la longueur d'onde typique du plasmon est de 1.000 \AA dans la plupart des métaux : la constante diélectrique $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ où ω_p est la fréquence de plasma et vaut $(\frac{4 \pi n e^2}{m})^{1/2}$ avec m = masse de l'électron et n = densité des électrons.

=====

II. - PREMIERE PARTIE : plan.

Le problème consiste à résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites de l'électrodynamique aux surfaces de deux voids. En utilisant les coordonnées bisphériques, on parvient à résoudre le problème formellement en le réduisant à un problème aux valeurs propres généralisé $A \vec{X} = \lambda B \vec{X}$ où A et B sont des matrices infinies dépendant du paramètre z ($z=e^{-\mu}$; $\cosh \mu = D/2R$). On utilise pour cela la théorie standard de perturbation et on obtient les modes de surface $\epsilon_{1,m}$ pour les voids.

Finalemment, on trouve l'énergie d'interaction exprimée par $W(D) = \frac{1}{2} \hbar \sum_i [\omega_i(D) - \omega_i(\infty)]$ avec i parcourant tous les modes même avec dégénérescence éventuelle et $\omega_i(D)$, les pulsations des modes propres du champ électromagnétique d'un solide infini ayant deux cavités sphériques situées à une distance D l'une de l'autre et de rayon R .

Les coordonnées bisphériques ne nous permettent pas d'aller à un ordre supérieur à z^4 car le calcul des matrices employées deviendrait trop compliqué.

=====

III. - DEUXIEME PARTIE : plan.

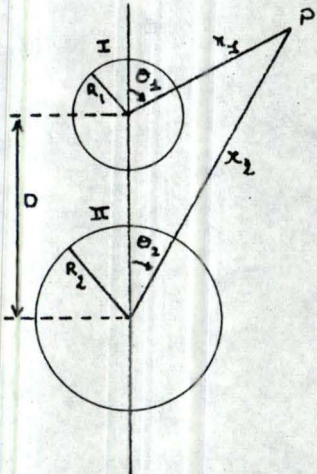
En partant de l'équation de Laplace résolue en coordonnées sphériques ^[7] pour chacune des sphères, on trouve les modes propres d'oscillations de plasmons de surfaces en calculant successivement les potentiels et les dérivées normales ^[10] pour chaque sphère. Grâce au théorème d'addition des harmoniques sphériques, ^[11] le problème se réduit alors à la résolution d'une équation algébrique d'ordre infini pour la constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ obtenue en annulant un déterminant infini dépendant de s (où s est le rapport Rayon / Distance = $\frac{R}{D}$).

Par approximations successives, on trouve la première correction des modes $\omega_{1,m}^2$ ^[13] et la seconde correction est donnée explicitement pour les modes $\omega_{m,m}^2$ et $\omega_{m+1,m}^2$ ^[14].

On peut alors calculer les interactions de Van der Waals à l'ordre 8, ce qui n'est pas possible si on utilise les coordonnées bisphériques, la perturbation étant limitée à l'ordre 4.

=====

IV. - ORGANIGRAMME : Plan du travail (deuxième partie).



$$\Delta V_{IN} = 0$$

$$\Delta V_{OUT} = 0$$

Equation de Laplace.

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} V_{OUT} = 0$$

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} V_{OUT} = 0$$

$$V_{IN} < \infty$$

$$V_{IN} = V_{OUT} \text{ si } \begin{matrix} r_1 = R_1 \\ r_2 = R_2 \end{matrix}$$

Conditions de régularité.

voids sphères.

$$\frac{\partial V_{IN}}{\partial R_i} = \epsilon \frac{\partial V_{OUT}}{\partial R_i} \quad i=1,2$$

$$\epsilon \frac{\partial V_{IN}}{\partial R_i} = \frac{\partial V_{OUT}}{\partial R_i} \quad i=1,2$$

Conditions aux limites.

Calcul des $\epsilon_{1,m}$

Calcul des $\epsilon_{1,m}$

Valeurs propres.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{1}{1-\lambda}$$

$\lambda = \epsilon$

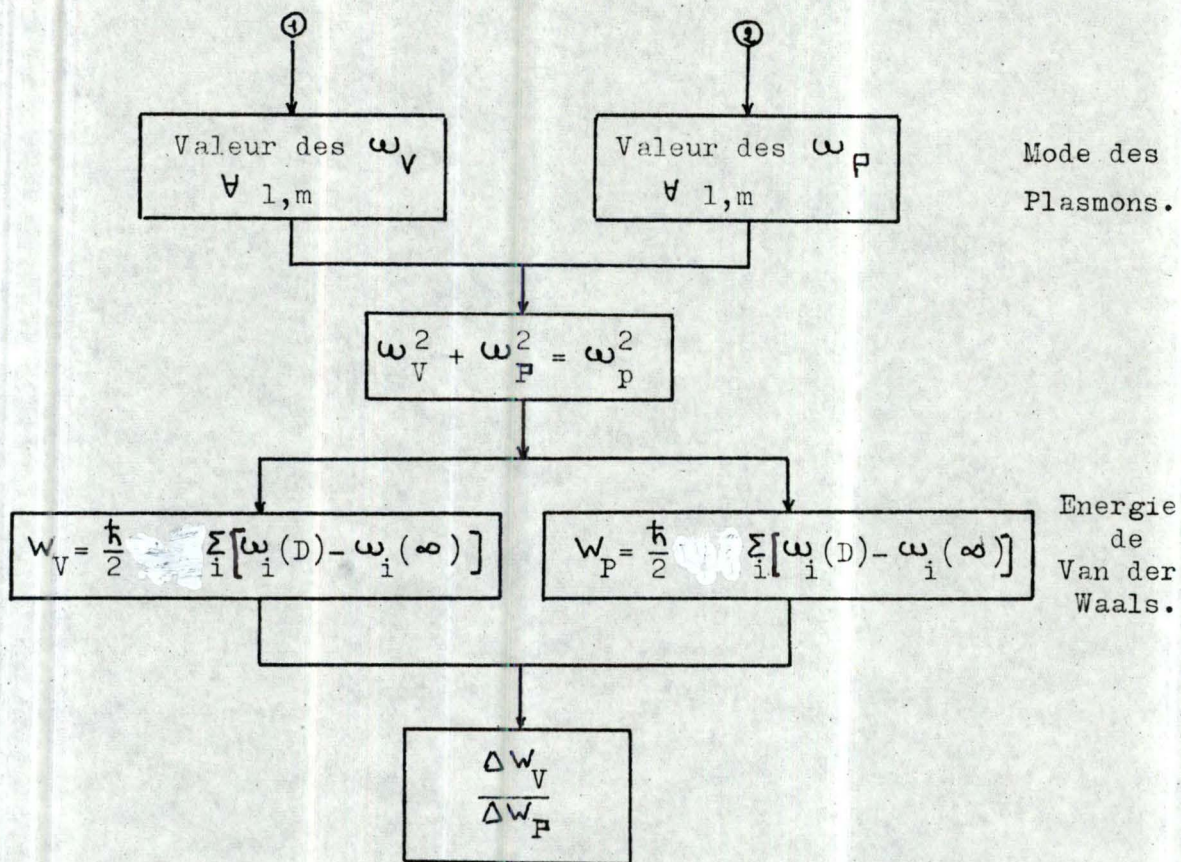
$\lambda = \epsilon^{-1}$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{1}{1-\epsilon_{1,m}}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{\epsilon_{1,m}}{\epsilon_{1,m}-1}$$

①

②



V. - AVERTISSEMENT RELATIF AUX NOTATIONS.

PREMIERE PARTIE.

$$\text{tridiag}_{n \geq 0} \begin{vmatrix} 2n+1 & n+1 \\ n+1 & 2n+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & 2 & 5 & 3 & \\ & & 3 & 7 & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{matrice tridiagonale.}$$

$$\text{diag}_{n \geq 0} (\dots) \quad \text{matrice diagonale.}$$

$|n\rangle$ vecteur colonne base d'un espace vectoriel dont le seul élément non nul est à la $(n+1)$ place et vaut 1.

$\langle n|$ vecteur transposé de $|n\rangle$

$\langle j|A|n\rangle$ produit matriciel du vecteur ligne $\langle j|$, de la matrice A et du vecteur colonne $|n\rangle$

DEUXIEME PARTIE.

$\gamma_l^{m(e)}(\theta, \varphi)$ fonction harmonique sphérique paire (e)

$\gamma_l^{m(o)}(\theta, \varphi)$ fonction harmonique sphérique impaire (o)

$$\left\langle \begin{matrix} m & o \\ l & e \end{matrix} \middle| \begin{matrix} o & m' \\ e & l' \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \gamma_l^{m(o)}(\theta, \varphi) \gamma_{l'}^{m'(o)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$(2n-1)!!$

Notation de Schuster [15]

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots 1$

et $(-1)!! = 1$

I PARTIE : COORDONNEE BISPHERIQUE.

~~~~~

I. - FORMULATION DU PROBLEME.

Soit deux sphères de rayon  $R_+$  et  $R_-$  situées à une distance  $D$  l'une de l'autre. Elles interagissent et de cette interaction résulte une énergie que l'on déterminera par la suite.

Le problème, maintenant, consiste à résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites imposées à la surface des deux voids, c'est-à-dire :

$$\Delta V = 0$$

$$V \text{ nul à l'infini} \tag{1.1}$$

$$V \text{ fini partout}$$

$$V \text{ continu à la surface de chaque sphère}$$

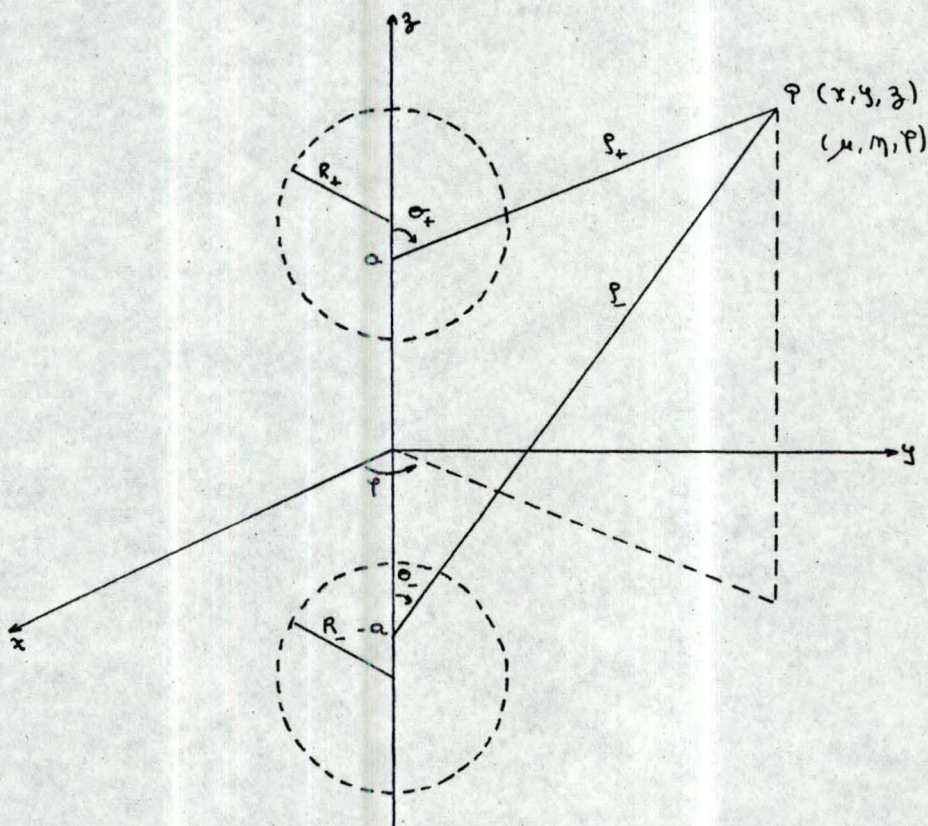
$$\vec{E}_t^{\text{in}} = \vec{E}_t^{\text{out}}$$

$$\vec{D}_n^{\text{in}} = \vec{D}_n^{\text{out}}$$

$$\text{où } \vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$\epsilon(\omega)$  est la fonction diélectrique caractérisant le solide. Dans le traitement des forces de Van der Waals entre des corps, la propriété des milieux interagissants est que leur fonction diélectrique dépend des pulsations  $\omega$

Aucun des systèmes de coordonnées dans lesquels l'équation de Laplace est facilement séparable n'est adéquat pour la géométrie de nos deux voids sphériques. Ainsi le système qui semble être le plus adéquat est le système de coordonnées bisphériques dans lequel les surfaces des voids sont caractérisées par une valeur constante de la coordonnée radiale



Les coordonnées  $(\mu, \eta, \varphi)$  d'un point P de l'espace sont définies dans ce système par :

$$\mu = \ln \frac{\rho}{\rho_+}$$

$$\eta = \theta_+ - \theta_-$$

$$\varphi = \varphi$$

où  $(\vartheta_-, \vartheta_-, \varphi)$  et  $(\vartheta_+, \vartheta_+, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques du point P par rapport aux points  $-a$  et  $a$ , respectivement, situés sur l'axe Z. Ces points  $-a$  et  $a$  sont les pôles du système bisphérique. Ceci implique que :

$$\mu \in ]-\infty, \infty[ , \quad \eta \in [0, \pi] , \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

A présent, on peut séparer l'équation de Laplace dans ce système de coordonnées et trouver ainsi sa solution.

La solution générale de l'équation de Laplace, dans ce système, est :

(1.2)

$$V = (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ A_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\mu} + B_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} \right] P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$$

L'équation de Laplace n'est donc que partiellement séparable dans ce système vu que les variables  $\mu$  et  $\eta$  restent inséparables à cause de la racine carrée apparaissant dans (1.2).

Les coefficients  $A_n^m$  et  $B_n^m$  sont déterminés par les conditions aux limites. On constate que l'on devra considérer ces solutions pour un  $m$  fixé afin d'exploiter l'orthogonalité de ces solutions : ainsi, on examinera le cas des modes axiaux  $m = 0$ .



Expression des conditions aux limites.

L'espace entier est divisé en trois régions séparées par les deux sphères  $\mu = \mu_+ > 0$  et  $\mu = \mu_- < 0$ , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'intérieur du void +} \quad \mu_+ < \mu < \infty \\ \text{l'extérieur des voids} \quad \mu_- < \mu < \mu_+ \\ \text{l'intérieur du void -} \quad -\infty < \mu < \mu_- \end{array} \right.$$

Considérons le cas  $m = 0$

dans ces trois régions, les solutions générales pour le potentiel sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_+ = (\cosh \mu - \cos \eta) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n+\frac{1}{2})\mu} P_n(\cos \eta) \\ V_0 = (\cosh \mu - \cos \eta) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n e^{(n+\frac{1}{2})\mu} + C_n e^{-(n+\frac{1}{2})\mu}] P_n(\cos \eta) \\ V_- = (\cosh \mu - \cos \eta) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{(n+\frac{1}{2})\mu} P_n(\cos \eta) \end{array} \right.$$

La continuité de la composante normale de  $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$  impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_+}{\partial \mu} = \epsilon(\omega) \frac{\partial V_0}{\partial \mu} \Big|_{\mu = \mu_+} \\ \frac{\partial V_-}{\partial \mu} = \epsilon(\omega) \frac{\partial V_0}{\partial \mu} \Big|_{\mu = \mu_-} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Remarque : pour les sphères  $\epsilon(\omega)$  est à remplacer par  $\epsilon^{-1}(\omega)$ .

Si on désire obtenir les conditions correspondantes

pour deux sphères pleines dans le vide, on devrait mettre  $\epsilon(\omega)$  à gauche dans (1.3). En conséquence, elles s'obtiennent directement en remplaçant  $\epsilon(\omega)$  par  $\epsilon^{-1}(\omega)$  dans (1.3).

En exprimant la condition de continuité (1.3), on parvient à obtenir un système infini d'équations homogènes qui permet de déterminer les coefficients  $A_n^m$  et  $B_n^m$  de la relation (1.2). Pour que ce système admette une solution non triviale, on doit exiger que son déterminant s'annule. Ceci s'écrit :

$$\begin{vmatrix} A(\mu_+) + \epsilon A(-\mu_+) & (1 - \epsilon) A(\mu_+) \mathcal{L} \\ (1 - \epsilon) A(-\mu_-) \mathcal{L} & A(-\mu_-) + \epsilon A(\mu_-) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{avec } A(\mu) = \text{tridiag}_{n \geq 0} \begin{vmatrix} \sinh \mu - (2n+1) \cosh \mu & & n+1 \\ & n+1 & \\ & & \sinh \mu - (2n+3) \cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \text{diag}_{n \geq 0} e^{(n+\frac{1}{2})} (\mu_- - \mu_+)$$

La relation (1.4) est la relation de dispersion.

Seules certaines valeurs discrètes de  $\omega$  vont satisfaire la relation (1.4), pour un  $D$  et un  $\epsilon$  donnés. Ces valeurs discrètes sont les fréquences propres qui serviront dans le calcul de l'énergie d'interaction.

Pour le cas  $m \neq 0$ .

La procédure est exactement la même :

- les potentiels dans les trois régions de l'espace sont exprimés comme combinaisons linéaires des  $P_n^m$  avec comme restriction  $n \geq |m|$
- on exprime les conditions de continuité sur les surfaces des sphères.

Ceci nous permet d'écrire la relation de dispersion qui a une forme identique à la relation (1.4), mais où on définit pour matrices

$A(\mu)$  et  $\Lambda$

$$A_m(\mu) = \text{tridiag}_{n \geq |m|} \begin{vmatrix} \sinh \mu - (2n+1) \cosh \mu & n+1+m \\ n+1-m & \sinh \mu - (2n+3) \cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_m = \text{diag}_{n \geq |m|} e^{(n + \frac{1}{2})(\mu_- - \mu_+)}$$

Cas symétrique.

On considère le cas de deux voids de rayons égaux

$$R_+ = R_- = R.$$

La relation liant la valeur de  $\mu$ , le rayon  $R$  des voids et la distance  $D$  les séparant est

$$\text{ch } \mu = \frac{D}{2R}$$

Dans ce cas, le système possède un plan de symétrie ( $Z = 0$  ou  $\mu = 0$ )  
 En conséquence, on aura deux types de modes : symétrique ou antisymétrique. La relation de dispersion (1.4) s'écrit plus simplement, vu que  $\mu_+ = \mu_- \equiv \mu$  et se sépare en deux relations : une pour les modes symétriques, l'autre pour les modes antisymétriques.

$$\left| A(\mu)(1 \pm \Lambda) + \varepsilon [A(-\mu) \mp A(\mu)\Lambda] \right| = 0 \quad (1.5)$$

Cette relation de dispersion peut encore être écrite sous la forme :

$$\boxed{M_0 + E \sinh \mu + (M_0 T^{\pm 1} - E \sinh \mu) = 0} \quad (1.6)$$

$$\text{avec } M_0 = \text{tridiag}_{n \geq |m|} \begin{vmatrix} -(2n+1)\cosh \mu & n+1+m \\ n+1-m & -(2n+3)\cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$T = \frac{1-\Lambda}{1+\Lambda} = \text{diag}_{n \geq |m|} \left[ \tanh \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu \right]$$

$E$  = matrice unité de dimension infinie.

Cette relation de dispersion peut être considérée comme une équation d'un problème aux valeurs propres généralisé du type :

$$A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$$

avec  $\lambda = \varepsilon$

$$A = E \sinh \mu + M_0$$

$$B = E \sinh \mu - M_0 T^{\pm 1}$$

On va résoudre ce problème, pour le cas symétrique de deux voids identiques de rayon  $R$  et séparés par une grande distance  $D$ , au moyen de la théorie de la perturbation.

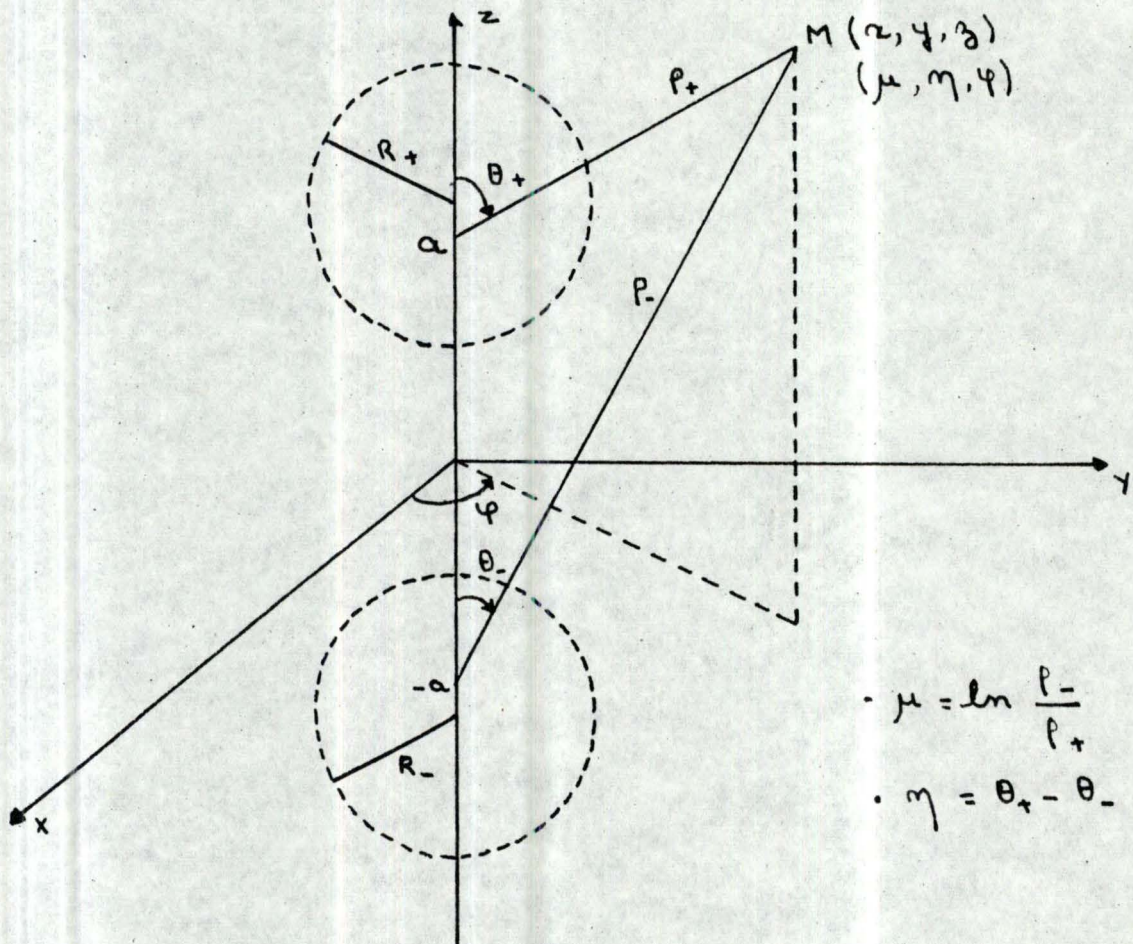
-----

II. - THEORIE DE LA PERTURBATION.

 § 1 - PRELIMINAIRES.
 

---

Nous nous intéressons plus spécialement au cas de deux trous de même rayon  $R_+ = R_- = R$ , la configuration géométrique de ces deux trous caractérisée par les coordonnées bisphériques étant :



Ce système possède donc un plan de symétrie

(  $z$  ou  $\mu = 0$  )

Dans ce qui précède, nous avons établi :

$$\det \left| M_0 + \sinh \mu E + (M_0 T^{\pm 1} - \sinh \mu E) \right| = 0 \quad (1.1)$$

Après calcul, la relation de dispersion (1.1) peut s'écrire comme un problème aux valeurs propres généralisé :

$$A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$$

$$\text{avec } A = E \sinh \mu + M_0$$

$$B = E \sinh \mu - M_0 T^{\pm 1}$$

$$\lambda = \varepsilon(\omega)$$

E = matrice unité

$$M_0 = \text{Tridiag}_{n \geq |m|} \begin{vmatrix} -(2n+1) \cosh \mu & & n+1+m \\ & & \\ n+1-m & & -(2n+3) \cosh \mu \end{vmatrix}$$

$$T = \frac{1 - \Lambda}{1 + \Lambda} = \text{diag}_{n \geq |m|} \left| \tanh \left( n + \frac{1}{2} \right) \mu \right|$$

$$\text{car } \Lambda = \text{diag}_{n \geq 0} e^{(n + \frac{1}{2})(\mu_- - \mu_+)}$$

Remarque :

les valeurs propres  $\lambda_n = \varepsilon(\omega_n)$  donnent les fréquences des modes du système " vides " tandis que la relation inverse

$\lambda_i = \varepsilon^{-1}(\omega_i)$  fournit les fréquences pour les sphères.

Rappelons la relation entre  $\mu$ , R et D

$$\cosh \mu = \frac{D}{2R}$$

Pour des trous à distance infinie ( $D \rightarrow \infty$  et  $\mu \rightarrow \infty$ ), on doit retrouver les modes pour un trou seul car, lorsque  $\mu \rightarrow \infty$ , les éléments off-diagonaux de  $M_0$  deviennent négligeables comparés à ceux de la diagonale et  $T^{\pm 1} \rightarrow E$

La relation de dispersion pour un void isolé est donnée par :

$$\epsilon(\omega) = -\frac{n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

Pour une séparation infinie, toutes les matrices de  $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$  sont diagonales, le vecteur propre correspondant à la valeur propre (1.2) est donc le  $(n+1)^{\text{ème}}$  vecteur unité de l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2$ , à savoir :

$$\vec{x}_n = \left( \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots}_{n+1} \right) \equiv |n\rangle$$

#### THEORIE DE LA PERTURBATION POUR UNE DISTANCE D GRANDE MAIS FINIE.

Le problème consiste à trouver les valeurs propres non nulles de l'équation :

$$A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$$

Pour cela, nous partirons des solutions connues dans le cas d'une séparation infinie et nous essayerons de résoudre le problème de séparation finie (mais grande) par la théorie de perturbation.



Comme paramètre de développement dans la méthode, nous choisirons  $z = e^{-\mu} < 1$  que l'on met en relation avec

$$\cosh \mu = \frac{D}{2R}$$

$z$  donne de cette façon le coefficient exact dans le développement en puissance de  $\frac{R}{D}$  jusqu'à l'ordre 4 seulement.

En effet :

$$\cosh \mu = \frac{D}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{2} = \frac{D}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + z = \frac{D}{R} \quad (\text{car } e^{-\mu} = z)$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{R}{D}$$

$$\text{Posons } \frac{R}{D} = \mu$$

$$\Rightarrow \mu z^2 - z + \mu = 0$$

$$z = \frac{1}{2\mu} \left[ 1 \pm (1 - 4\mu^2)^{1/2} \right]$$

En développant  $(1 - 4\mu^2)^{1/2}$  en série et en ne conservant que le signe - dans l'expression de  $z$  ci-dessus, on obtient :

$$\underline{z = \mu + \mu^3 + 2\mu^5 + \dots}$$

Inversément, si on exprime  $\mu$  en terme des puissances de  $z$ , on a :

$$\underline{\mu = z - z^3 + z^5 - \dots}$$

Les matrices  $A$  et  $B$ , les valeurs propres  $\lambda^{(n)}$  et les vecteurs propres  $\vec{x}^{(n)}$  de  $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$  sont développés en puissance de  $z$  :

$$A(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \quad (\text{il n'existe pas de termes d'ordre supérieur pour } A)$$

$$B(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + \dots$$

$$\lambda^{(n)}(z) = \lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} z + \lambda_2^{(n)} z^2 + \lambda_3^{(n)} z^3 + \dots$$

§ 2 - MODES AXIAUX. ( m = 0 )

=====

D'après l'expression analytique de  $A$  et  $B$ , on trouve comme coefficients des différentes matrices :

$$A_0 = \text{diag} \begin{matrix} (-n) \\ n \geq 0 \end{matrix}$$

$$A_1 = \text{tridiag} \begin{matrix} 0 & & n+1 \\ n \geq 0 & \left| \begin{matrix} n+1 & & \\ & & 0 \end{matrix} \right| \end{matrix}$$

$$A_2 = \text{diag} \begin{matrix} -(n+1) \\ n \geq 0 \end{matrix}$$

$$B_0 = \text{diag} \begin{matrix} (n+1) \\ n \geq 0 \end{matrix}$$

$$B_1 = \text{tridiag} \begin{matrix} 0 & & -(n+1) \\ n \geq 0 & \left| \begin{matrix} -(n+1) & & \\ & & 0 \end{matrix} \right| \end{matrix} + \begin{matrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$B_2 = \text{diag} \begin{matrix} (n) \\ n \geq 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} \mp 2 & 0 & 0 \\ -2 & \mp 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_4 = \begin{vmatrix} \mp 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$  s'écrit alors :

$$(A_0 + A_1 z + A_2 z^2) (\vec{x}_0^{(n)} + \vec{x}_1^{(n)} z + \vec{x}_2^{(n)} z^2 + \vec{x}_3^{(n)} z^3 + \vec{x}_4^{(n)} z^4) = (\lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} z + \lambda_2^{(n)} z^2 + \lambda_3^{(n)} z^3 + \lambda_4^{(n)} z^4).$$

$$(B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4) (\vec{x}_0^{(n)} + \vec{x}_1^{(n)} z + \vec{x}_2^{(n)} z^2 + \vec{x}_3^{(n)} z^3 + \vec{x}_4^{(n)} z^4)$$

jusqu'au quatrième ordre.

ORDRE ZERO.

on a donc  $A_0 \vec{x}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} B_0 \vec{x}_0^{(n)}$

si on multiplie scalairement à gauche par  $\langle j |$

on a  $\vec{x}_0^{(j)} \vec{x}_0^{(i)} = \langle j | i \rangle = \delta_{j,i}$

$$\vec{x}_0^{(j)} A_0 \vec{x}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \vec{x}_0^{(j)} B_0 \vec{x}_0^{(n)}$$

ou  $\langle j | A_0 | n \rangle = \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle$

D'après les définitions de  $A_0$  et  $B_0$

$$\langle j | A_0 | n \rangle = -n \quad \text{pour } j = n$$

$$\langle j | B_0 | n \rangle = n + 1 \quad \text{pour } j = n$$

Pour  $j = n$ , on obtient :

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{\langle n | A_0 | n \rangle}{\langle n | B_0 | n \rangle}$$

$$\lambda_0^{(n)} = -\frac{n}{n+1}$$

$$\vec{x}_0^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, \overset{n+1}{\longleftarrow \longrightarrow} 1, 0, \dots) \quad n = 0, 1, \dots,$$

PREMIER ORDRE.

-----

On doit résoudre :

$$A_0 \vec{x}_1^{(n)} + A_1 \vec{x}_0^{(n)} = \lambda_0^{(n)} B_0 \vec{x}_1^{(n)} + \lambda_0^{(n)} B_1 \vec{x}_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} B_0 \vec{x}_0^{(n)}$$

Posons :  $\vec{x}_1^{(n)} = \sum_i \vec{x}_i^{(n)} \vec{x}_0^{(i)}$

En multipliant scalairement par le vecteur  $\langle j |$  on obtient :

$$\sum_i x_i^{(n)} [\langle j | A_0 | i \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | i \rangle] =$$

$$\lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle + \lambda_1^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle - \langle j | A_1 | n \rangle$$

Pour  $j = n$   
 .....

$$\langle n | A_0 | i \rangle = -n \delta_{n,i}$$

$$\langle n | B_0 | i \rangle = (n+1) \delta_{n,i}$$

$$\langle n | B_1 | n \rangle = 0$$

$$\langle n | B_0 | n \rangle = n+1$$

$$\langle n | A_1 | n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 0}$$

Calcul des vecteurs propres correspondants :

On a que :

$$\begin{cases} | A_1 | n \rangle = n | n-1 \rangle + (n+1) | n+1 \rangle \\ | B_1 | n \rangle = -A_1 | n \rangle \end{cases}$$

Pour  $j = n+1$   
 .....

$$\langle n+1 | A_1 | n \rangle = n+1$$

$$\langle n+1 | A_0 | i \rangle = -(n+1) \delta_{n+1,i}$$

$$\langle n+1 | B_0 | i \rangle = (n+2) \delta_{n+1,i}$$

$$\langle n+1 | B_1 | n \rangle = -(n+1)$$

$$\langle n+1 | B_0 | n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^{(n)} \left[ - (n + 1) + \frac{n}{n + 1} (n + 2) \right] = + \frac{n}{n + 1} (n + 1) - (n + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1}^{(n)} = n + 1}$$

Pour  $j = n - 1$

.....

on trouve

$$\boxed{x_{n-1}^{(n)} = -n}$$

et

$x_n^{(n)}$  arbitraire

DEUXIEME ORDRE.

-----

L'équation devient :

$$\begin{aligned} A_0 \vec{x}_2^{(n)} + A_1 \vec{x}_1^{(n)} + A_2 \vec{x}_0^{(n)} &= \lambda_0^{(n)} B_0 \vec{x}_2^{(n)} + \lambda_0^{(n)} B_1 \vec{x}_1^{(n)} \\ &+ \lambda_0^{(n)} B_2 \vec{x}_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} B_0 \vec{x}_1^{(n)} + \lambda_1^{(n)} B_1 \vec{x}_0^{(n)} \\ &+ \lambda_2^{(n)} B_0 \vec{x}_0^{(n)} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \vec{x}_1^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} \vec{x}_0^{(i)} \\ \vec{x}_2^{(n)} = \sum_k y_k^{(n)} \vec{x}_0^{(k)} \end{cases}$$

On multiplie scalairement à gauche par  $\langle j |$  et, en tenant compte des relations ci-dessus et du fait que  $\lambda_1^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_k y_k^{(n)} \langle j | A_0 | k \rangle + \sum_i x_i^{(n)} \langle j | A_1 | i \rangle + \langle j | A_2 | n \rangle \\ &= \lambda_0^{(n)} \left[ \sum_k y_k^{(n)} \langle j | B_0 | k \rangle + \sum_i x_i^{(n)} \langle j | B_1 | i \rangle \right. \\ & \quad \left. + \langle j | B_2 | n \rangle \right] + \lambda_2^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle \end{aligned}$$

Pour  $j = n$   
.....

$$\langle n | A_0 | k \rangle = -n \delta_{n,k}$$

$$\langle n | B_0 | k \rangle = (n+1) \delta_{n,k}$$

$$\langle n | A_1 | n+1 \rangle = n+1 = -\langle n | B_1 | n+1 \rangle$$

$$\langle n | A_1 | n-1 \rangle = n = -\langle n | B_1 | n-1 \rangle$$

$$\langle n | A_2 | n \rangle = -(n+1)$$

$$\langle n | B_2 | n \rangle = n \quad \text{si } n \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

On obtient les relations :

$$A_1 |n-1\rangle = n-1 |n-2\rangle + n |n\rangle = -B_1 |n-1\rangle$$

$$A_1 |n+1\rangle = n+1 |n\rangle + (n+2) |n+2\rangle = -B_1 |n+1\rangle$$

$$A_1 |n-2\rangle = n-2 |n-3\rangle + (n-1) |n-1\rangle = -B_1 |n-2\rangle$$

$$A_1 |n+2\rangle = n+2 |n+1\rangle + (n+3) |n+3\rangle = -B_1 |n+2\rangle$$

on continue pour  $j = n-3, n+3, \dots$  de la même façon.

Calcul des vecteurs propres :

Pour  $j = n+1$

.....

$$\langle n+1 | A_0 | k \rangle = - (n+1) \delta_{n+1,k}$$

$$\langle n+1 | A_1 | n \rangle = n+1$$

$$\langle n+1 | B_0 | k \rangle = (n+2) \delta_{n+1,k}$$

$$\langle n+1 | B_1 | n \rangle = - (n+1)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(n)} & \left[ - (n+1) + \frac{n}{n+1} (n+2) \right] \\ & = - x_n^{(n)} (n+1) + n x_n^{(n)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1}^{(n)} = (n+1) x_n^{(n)}}$$



Pour  $j = n - 1$

.....

$$\langle n - 1 | A_0 | k \rangle = - (n - 1) \delta_{n-1,k}$$

$$\begin{aligned} \langle n - 1 | B_1 | n - 1 \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq 1 \\ &= \mp 1 \quad \text{si } n = 1 \end{aligned}$$

$$\langle n - 1 | B_0 | k \rangle = n \delta_{n-1,k}$$

$$\langle n - 1 | A_1 | n \rangle = n = - \langle n - 1 | B_1 | n \rangle$$

Si  $n \neq 1$

$$y_{n-1}^{(n)} \left[ - (n - 1) + \frac{n^2}{n + 1} \right] = x_n^{(n)} \left[ \frac{n^2}{n + 1} - n \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n-1}^{(n)} = -n x_n^{(n)}}$$

Si  $n = 1$

on obtient

$$\boxed{y_0^{(1)} = -x_1^{(1)} \mp 1}$$

Pour  $j = n - 2$

.....

$$\langle n - 2 | A_1 | n - 1 \rangle = n - 1$$

$$\langle n - 2 | B_1 | n - 1 \rangle = - (n - 1)$$

$$\langle n - 2 | A_0 | k \rangle = - (n - 2) \delta_{n-2,k}$$

$$\langle n - 2 | B_0 | k \rangle = (n - 1) \delta_{n-2,k}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n-2}^{(n)} = \frac{1}{2} n (n - 1)}$$

Pour  $j = n + 2$

.....

$$y_{n+2}^{(n)} = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2)$$

TROISIEME ORDRE.

L'équation s'écrit :

$$A_0 \vec{x}_3^{(n)} + A_1 \vec{x}_2^{(n)} + A_2 \vec{x}_1^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \left[ B_0 \vec{x}_3^{(n)} + B_1 \vec{x}_2^{(n)} \right. \\ \left. + B_2 \vec{x}_1^{(n)} + B_3 \vec{x}_0^{(n)} \right] + \lambda_3^{(n)} B_0 \vec{x}_0^{(n)}$$

Multiplions scalairement par  $\langle j |$

et posons :

$$\vec{x}_1^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} \vec{x}_0^{(i)}$$

$$\vec{x}_2^{(n)} = \sum_k y_k^{(n)} \vec{x}_0^{(k)}$$

$$\vec{x}_3^{(n)} = \sum_p v_p^{(n)} \vec{x}_0^{(p)}$$

$$\sum_i x_i^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | i \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | i \rangle \right] \\ + \sum_k y_k^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | k \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | k \rangle \right] \\ + \sum_p v_p^{(n)} \left[ \langle j | A_0 | p \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | p \rangle \right] \\ = \lambda_0^{(n)} \langle j | B_3 | n \rangle + \lambda_3^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle$$

Pour  $j = n$

.....

$$\begin{aligned}
 \langle n | B_2 | n - 1 \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq 1 \\
 &= \pm 2 \quad \text{si } n = 1 \\
 \langle n | A_2 | n \rangle &= - (n + 1) \\
 \langle n | B_2 | n \rangle &= n \\
 \langle n | A_1 | n + 1 \rangle &= n + 1 = - \langle n | B_1 | n + 1 \rangle \\
 \langle n | A_1 | n - 1 \rangle &= n = - \langle n | B_1 | n - 1 \rangle \\
 \langle n | A_0 | p \rangle &= - n \delta_{n,p} \\
 \langle n | B_0 | p \rangle &= (n + 1) \delta_{n,p} \\
 \langle n | B_3 | n \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq 0, n \neq 1 \\
 &= \mp 2 \quad \text{si } n = 0 \\
 &= \mp 3 \quad \text{si } n = 1 \\
 \langle n | B_0 | n \rangle &= n + 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{(n)} = 0 \quad n \neq 0, n \neq 1$$

Pour  $n = 1$

.....

$$\lambda_3^{(1)} = \mp \frac{3}{2}$$

Pour  $n = 0$

.....

$$\lambda_3^{(0)} = 0$$

Calcul des vecteurs propres :Pour  $j = n + 1$ 

.....

$$\langle n + 1 | A_0 | p \rangle = - (n + 1) \delta_{n+1,p}$$

$$\langle n + 1 | B_0 | p \rangle = (n + 2) \delta_{n+1,p}$$

$$\langle n + 1 | A_1 | n \rangle = n + 1 = - \langle n + 1 | B_1 | n \rangle$$

$$\langle n + 1 | A_1 | n + 2 \rangle = n + 2 = - \langle n + 1 | B_1 | n + 2 \rangle$$

$$\langle n + 1 | B_2 | n \rangle = \begin{cases} \pm 2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\langle n + 1 | A_2 | n + 1 \rangle = - (n + 2)$$

$$\langle n + 1 | B_2 | n + 1 \rangle = \begin{cases} n + 1 & n \neq 0 \\ 2 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$\langle n + 1 | B_3 | n \rangle = \begin{cases} 0 \\ -2 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1}^{(n)} = (n + 1) y_n^{(n)} + \frac{1}{2} n^2}$$

Pour  $j = n - 1$ 

.....

$$\langle n - 1 | A_0 | p \rangle = - (n - 1) \delta_{n-1,p}$$

$$\langle n - 1 | B_0 | p \rangle = n \delta_{n-1,p}$$

$$\langle n - 1 | A_1 | n - 2 \rangle = n - 1 = - \langle n - 1 | B_1 | n - 2 \rangle$$

$$\langle n - 1 | B_1 | n - 1 \rangle = \begin{cases} 0 \\ \mp 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$\langle n - 1 | A_1 | n \rangle = n = - \langle n - 1 | B_1 | n \rangle$$

$$\langle n - 1 | A_2 | n - 1 \rangle = -n$$

$$\langle n - 1 | B_2 | n - 1 \rangle = \begin{cases} n - 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n-1}^{(n)} = -n y_n^{(n)} + \frac{1}{2} (n+1)^2}$$

si n = 1

$$\boxed{v_0^{(1)} = \mp x_1^{(1)} - y_1^{(1)} - 2}$$

Pour  $j = n - 2$

.....

$$\langle n-2 | A_0 | p \rangle = -(n-2) \delta_{n-2,p}$$

$$\langle n-2 | B_0 | p \rangle = n-1$$

$$\langle n-2 | B_1 | n-2 \rangle = \mp 1 \quad \text{si } n = 2 \\ = 0 \quad \text{sinon}$$

$$\langle n-2 | A_1 | n-1 \rangle = n-1$$

$$\langle n-2 | B_1 | n-1 \rangle = -(n-1)$$

on obtient pour  $n \neq 2$  :

$$\boxed{v_{n-2}^{(n)} = \frac{1}{2} n (n-1) x_n^{(n)}}$$

si n = 2 :

$$\boxed{v_0^{(2)} = x_2^{(2)} \pm 1}$$

Pour  $j = n + 2$

.....

$$\langle n+2 | A_0 | p \rangle = -(n+2) \delta_{n+2,p}$$

$$\langle n+2 | B_0 | p \rangle = (n+3) \delta_{n+2,p}$$

$$\langle n+2 | A_1 | n+1 \rangle = n+2 = - \langle n+2 | B_1 | n+1 \rangle$$

$$\boxed{v_{n+2}^{(n)} = \frac{1}{2} (n+1) (n+2) x_n^{(n)}}$$

Pour  $j = n - 3$

.....

$$v_{n-3}^{(n)} = -\frac{1}{6} n (n-1) (n-2)$$

Pour  $j = n + 3$

.....

$$v_{n+3}^{(n)} = \frac{1}{6} (n+1) (n+2) (n+3)$$

QUATRIEME ORDRE.

-----

On a :

$$\begin{aligned} A_0 \vec{x}_4^{(n)} + A_1 \vec{x}_3^{(n)} + A_2 \vec{x}_2^{(n)} &= \lambda_0^{(n)} \left[ B_0 \vec{x}_4^{(n)} + B_1 \vec{x}_3^{(n)} \right. \\ &+ B_2 \vec{x}_2^{(n)} + B_3 \vec{x}_1^{(n)} + B_4 \vec{x}_0^{(n)} \left. \right] + \lambda_3^{(1)} \left[ B_0 \vec{x}_1^{(n)} + B_1 \vec{x}_0^{(n)} \right] \\ &+ \lambda_4^{(n)} \left[ B_0 \vec{x}_0^{(n)} \right] \end{aligned}$$

Posons :

$$\vec{x}_1^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} \vec{x}_0^{(i)}$$

$$\vec{x}_2^{(n)} = \sum_k y_k^{(n)} \vec{x}_0^{(k)}$$

$$\vec{x}_3^{(n)} = \sum_p v_p^{(n)} \vec{x}_0^{(p)}$$

$$\vec{x}_4^{(n)} = \sum_t w_t^{(n)} \vec{x}_0^{(t)}$$

et multiplions scalairement par  $\langle j |$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \sum_t w_t^{(n)} \left[ \langle j | A_0 | t \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | t \rangle \right] \\
& + \sum_p v_p^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | p \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | p \rangle \right] \\
& + \sum_k y_k^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | k \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | k \rangle \right] \\
& = \sum_i x_i^{(n)} \langle j | B_3 | i \rangle \lambda_0^{(n)} + \lambda_0^{(n)} \langle j | B_4 | n \rangle \\
& + \lambda_3^{(1)} \left[ \langle j | B_1 | 1 \rangle + \sum_i x_i^{(1)} \langle j | B_0 | i \rangle \right] \\
& + \lambda_4 \langle j | B_0 | n \rangle
\end{aligned}$$

Pour  $j = n$

.....

$$\begin{aligned}
\langle n | B_2 | n - 1 \rangle &= \pm 2 & \text{si } n = 1 \\
\langle n | B_2 | n \rangle &= n \\
&= 1 & \text{si } n = 0 \\
\langle n | B_1 | n \rangle &= \mp 1 & \text{si } n = 0 \\
\langle n | B_3 | n - 1 \rangle &= -2 \\
&= 0 & \text{si } n = 1 \\
\langle n | B_3 | n \rangle &= \mp 2 & \text{si } n = 0 \\
&= \mp 3 & \text{si } n = 1 \\
\langle n | B_1 | 1 \rangle &= -2 & \text{si } n = 2 \\
&= -1 & \text{si } n = 0 \\
\langle n | B_4 | n \rangle &= \mp 2 & \text{si } n = 0 \\
\langle n | B_0 | n \rangle &= n + 1
\end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n > 2$$

En calculant respectivement  $\lambda_4^{(n)}$  pour  $\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

on aboutit au fait que :

$$\lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

### Conclusions :

- 1) La théorie des perturbations confirme que jusqu'au quatrième ordre, les modes :  $n = 0$  ne bougent pas.
- 2) d'autre part, les seuls modes affectés en  $\frac{R}{D}$  au quatrième ordre sont les modes dipolaires ( $n = 1$ ).

### § 3 - MODES NON AXIAUX. ( m ≠ 0 )

Comme dans le cas axial, le problème est de trouver les valeurs propres non nulles de l'équation  $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$ .

Nous déterminons les expressions des différentes matrices  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$  qui interviennent dans le développement de  $A(z)$  et  $B(z)$ .

A partir de l'expression :

$$M_0 = \text{Tridiag}_{n \geq |m|} \begin{vmatrix} -(2n+1)\cosh \mu & & n+1-m \\ & & \\ n+1-m & & -(2n+3)\cosh \mu \end{vmatrix}$$



nous pouvons obtenir les coefficients des matrices intervenant dans la perturbation.

On trouve :

$$A_0(z) = \text{diag} \begin{matrix} (-n) \\ n \geq |m| \end{matrix}$$

$$A_1(z) = \text{tridiag} \begin{matrix} 0 & & n+1+m \\ n \geq |m| & & \\ & n+1-m & & 0 \end{matrix}$$

$$A_2(z) = \text{diag} \begin{matrix} -(n+1) \\ n \geq |m| \end{matrix}$$

$$B_0 = \text{diag} \begin{matrix} (n+1) \\ n \geq |m| \end{matrix}$$

$$B_1 = \text{tridiag} \begin{matrix} 0 & & -(n+m+1) \\ n \geq |m| & & \\ & -(n-m+1) & & 0 \end{matrix}$$

$$B_2 = \text{diag} \begin{matrix} (n) \\ n \geq |m| \end{matrix}$$

$$B_3 = 0 \quad \text{Sauf pour } m = 1 \quad B_3 = \begin{bmatrix} \mp 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = 0 \quad \forall m$$

Dans ce qui suit, nous essayerons par cette méthode de perturbation de déterminer la valeur propre  $\lambda^{(n)}$  et les vecteurs propres associés  $\vec{x}^{(n)}$  jusqu'au quatrième ordre.

Etant donné que les  $(\vec{x}_0^{(n)})$  constituent une base de l'espace de Hilbert  $l^2$ , nous pouvons exprimer les approximations  $\vec{x}_i^{(n)}$  du vecteur propre  $\vec{x}^{(n)}$  en termes de  $\vec{x}_0^{(n)}$ . Nous aurons :

$$\vec{x}_1^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} \vec{x}_0^{(i)} \quad (3.1)$$

$$\vec{x}_2^{(n)} = \sum_k y_k^{(n)} \vec{x}_0^{(k)}$$

$$\vec{x}_3^{(n)} = \sum_p v_p^{(n)} \vec{x}_0^{(p)}$$

$$\vec{x}_4^{(n)} = \sum_t w_t^{(n)} \vec{x}_0^{(t)}$$

Remarque : Nous utilisons la Notation de Dirac

ainsi  $\vec{x}_0^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} n - m + 1 \end{matrix}$  est noté par  $\vec{x}_0^{(n)} \equiv |n\rangle$

Cette notation nous a permis de trouver aisément des relations qui donnent immédiatement les éléments de la matrice  $A_1$  et donc les éléments de  $B_1$  vu que  $B_1 = -A_1$

Ce sont :

$$\begin{aligned} A_1 |n\rangle &= (n+m) |n-1\rangle + (n-m+1) |n+1\rangle \\ A_1 |n+1\rangle &= (n+m+1) |n\rangle + (n-m+2) |n+2\rangle \\ A_1 |n+2\rangle &= (n+m+2) |n+1\rangle + (n-m+3) |n+3\rangle \\ A_1 |n-1\rangle &= (n+m-1) |n-2\rangle + (n-m) |n\rangle \\ A_1 |n-2\rangle &= (n+m-2) |n-3\rangle + (n-m-1) |n-1\rangle \end{aligned}$$

Déterminons maintenant les corrections jusqu'au quatrième ordre des valeurs et vecteurs propres.

Pour cela, nous écrivons d'abord l'équation  $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$  en développant A, B et  $\lambda$  en puissances de z.

Ceci nous donne :

(3.2)

$$\begin{aligned} & (A_0 + A_1 z + A_2 z^2) (\vec{x}_0^{(n)} + \vec{x}_1^{(n)} z + \vec{x}_2^{(n)} z^2 + \vec{x}_3^{(n)} z^3 \\ & + \vec{x}_4^{(n)} z^4 + \dots) = (\lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} z + \lambda_2^{(n)} z^2 + \lambda_3^{(n)} z^3 \\ & + \lambda_4^{(n)} z^4 + \dots) (B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + \dots). \\ & (\vec{x}_0^{(n)} + \vec{x}_1^{(n)} z + \vec{x}_2^{(n)} z^2 + \vec{x}_3^{(n)} z^3 + \vec{x}_4^{(n)} z^4 + \dots) \end{aligned}$$

A chaque ordre, nous considérerons cette équation développée uniquement jusqu'à la puissance de z qui est égale à l'ordre considéré et nous la multiplierons scalairement à gauche par  $\langle j |$

ORDRE ZERO.

-----

Soit l'équation (3.2) multipliée scalairement à gauche par  $\langle j |$

$$\Rightarrow \langle j | A_0 | n \rangle = \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle$$

on pose  $j = n$

$$\langle n | A_0 | n \rangle = -n$$

$$\langle n | B_0 | n \rangle = + (n + 1)$$

et on en déduit :

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{-n}{n+1} \quad \text{avec } n \geq |m|$$

## PREMIER ORDRE.

-----

En multipliant (3.2) à gauche par  $\langle j |$   
et en utilisant (3.1), on a :

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^{(n)} \left[ \langle j | A_0 | i \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | i \rangle \right] + \langle j | A_1 | n \rangle \\ = \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle + \lambda_1^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle \end{aligned}$$

Pour  $j = n$  :

.....

les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | A_0 | n \rangle = -n$$

$$\langle n | B_0 | n \rangle = + (n + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|}$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour  $j = n - 1$  et  $j = n + 1$  :

.....

les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n + 1 | A_0 | n + 1 \rangle = - (n + 1)$$

$$\langle n + 1 | B_0 | n + 1 \rangle = n + 2$$

$$\langle n + 1 | A_1 | n \rangle = n - m + 1 = - \langle n + 1 | B_1 | n \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_{n-1}^{(n)} = -(m+n) \\ x_{n+1}^{(n)} = n - m + 1 \end{array} \quad \forall n \geq |m|$$

et

$$x_n^{(n)} \text{ arbitraire} \quad \forall n \geq |m|$$

### DEUXIEME ORDRE.

-----

En multipliant (3.2) à gauche par  $\langle j |$   
 et en utilisant (3.1), on a :

$$\begin{aligned} & \sum_k y_k^{(n)} \left[ \langle j | A_0 | k \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | k \rangle \right] \\ & + x_{n-1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n-1 \rangle \right] \\ & + x_n^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle \right] \\ & + x_{n+1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+1 \rangle + \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+1 \rangle \right] \\ & + \left[ \langle j | A_2 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n \rangle \right] \\ & = \lambda_2^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle \end{aligned}$$

Pour  $j = n$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\begin{aligned} \langle n | A_0 | k \rangle &= -n \delta_{nk} \\ \langle n | B_0 | k \rangle &= (n+1) \delta_{nk} \\ \langle n | A_1 | n-1 \rangle &= n-m = -\langle n | B_1 | n-1 \rangle \\ \langle n | A_1 | n+1 \rangle &= n+m+1 = -\langle n | B_1 | n+1 \rangle \\ \langle n | A_2 | k \rangle &= -(n+1) \delta_{nk} \\ \langle n | B_2 | k \rangle &= n \delta_{nk} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda_2^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

Calcul des vecteurs propres :

Pour  $j = n - 2$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\begin{aligned} \langle n-2 | A_0 | k \rangle &= -(n-2) \delta_{n-2,k} \\ \langle n-2 | B_0 | k \rangle &= (n-1) \delta_{n-2,k} \\ \langle n-2 | A_1 | n-1 \rangle &= n+m-1 = -\langle n-2 | B_1 | n-1 \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_{n-2}^{(n)} = \frac{1}{2} (m+n) (m+n-1) \quad \forall n \geq |m|$$

Pour  $j = n - 1$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n - 1 | A_0 | k \rangle = - (n - 1) \delta_{n-1,k}$$

$$\langle n - 1 | B_0 | k \rangle = n \delta_{n-1,k}$$

$$\langle n - 1 | A_1 | n \rangle = n + m = - \langle n - 1 | B_1 | n \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n-1}^{(n)} = - (n + m) x_n^{(n)} \quad \forall n \geq |m|}$$

Pour  $j = n + 1$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n + 1 | A_0 | k \rangle = - (n + 1) \delta_{n+1,k}$$

$$\langle n + 1 | B_0 | k \rangle = (n + 2) \delta_{n+1,k}$$

$$\langle n + 1 | A_1 | n \rangle = n - m + 1 = - \langle n + 1 | B_1 | n \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1}^{(n)} = (-m + n + 1) x_n^{(n)} \quad \forall n \geq |m|}$$

Pour  $j = n + 2$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+2 | A_0 | k \rangle = -(n+2) \delta_{n+2,k}$$

$$\langle n+2 | B_0 | k \rangle = (n+3) \delta_{n+2,k}$$

$$\langle n+2 | A_1 | n+1 \rangle = n-m+2 = -\langle n+2 | B_1 | n+1 \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+2}^{(n)} = \frac{1}{2} (n-m+1)(n-m+2) \quad \forall n \geq |m|}$$

TROISIEME ORDRE.

-----

En multipliant (3.2) à gauche par  $\langle j |$   
et en utilisant les relations (3.1), on a :

$$\begin{aligned} & x_{n-1}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n-1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n-1 \rangle \right] \\ & + x_n^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n \rangle \right] \\ & + x_{n+1}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n+1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n+1 \rangle \right] \\ & + y_{n-2}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n-2 \rangle \right] \\ & + y_{n-1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n-1 \rangle \right] \\ & + y_n^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle \right] \\ & + y_{n+1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+1 \rangle \right] \\ & + y_{n+2}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+2 \rangle \right] \\ & + \sum_p v_p \left[ \langle j | A_0 | p \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | p \rangle \right] \\ & = \lambda_0^{(n)} \langle j | B_3 | n \rangle + \lambda_3^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle \end{aligned}$$



Pour  $j = n$  :

.....

les seuls produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | A_2 | n \rangle = - (n + 1)$$

$$\langle n | B_2 | n \rangle = n$$

$$\langle n | A_1 | n - 1 \rangle = n - m = - \langle n | B_1 | n - 1 \rangle$$

$$\langle n | A_1 | n + 1 \rangle = n + m + 1 = - \langle n | B_1 | n + 1 \rangle$$

$$\langle n | A_0 | p \rangle = n \delta_{n,p}$$

$$\langle n | B_0 | p \rangle = (n + 1) \delta_{n,p}$$

$$\langle n | B_3 | n \rangle = 0$$

$$= \mp 3 \quad \text{si } |m| = n = 1$$

$$\langle n | B_0 | n \rangle = n + 1$$

A la suite de ces résultats, nous remarquons une différence avec ce qui précède. En effet, dans les trois ordres précédents, nous obtenions toujours pour nos produits scalaires la même valeur propre, quelque soit  $m$ .

Ici, au contraire, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle n | B_3 | n \rangle &= \mp 3 \quad \text{si } |m| = n = 1 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

En conséquence, nous obtenons des valeurs différentes pour  $\lambda_3^{(n)}$  suivant que  $|m| = n = 1$  ou que  $|m| > 1$

ainsi :

|                                     |                  |
|-------------------------------------|------------------|
| $\lambda_3^{(n)} = 0$               | $n \geq  m  > 1$ |
| $\lambda_3^{(1)} = \mp \frac{3}{4}$ | $ m  = n = 1$    |

Calcul des vecteurs propres :Pour  $j = n - 3$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n - 3 | A_1 | n - 2 \rangle = n + m - 2 = \langle n - 3 | B_1 | n - 2 \rangle$$

$$\langle n - 3 | A_0 | p \rangle = - (n - 3) \delta_{n-3,p}$$

$$\langle n - 3 | B_0 | p \rangle = (n - 2) \delta_{n-3,p}$$

$$\Rightarrow v_{n-3}^{(n)} = -\frac{1}{6} (m + n) (m + n - 1) (m + n - 2)$$

Pour  $j = n - 2$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n - 2 | A_1 | n - 1 \rangle = n + m - 1 = - \langle n - 2 | B_1 | n - 1 \rangle$$

$$\langle n - 2 | A_0 | p \rangle = - (n - 2) \delta_{n-2,p}$$

$$\langle n - 2 | B_0 | p \rangle = (n - 1) \delta_{n-2,p}$$

$$\Rightarrow v_{n-2}^{(n)} = \frac{1}{2} (n + m) (m + n - 1) x_n^{(n)}$$

Pour  $j = n - 1$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n - 1 | A_2 | n - 1 \rangle = - n$$

$$\langle n - 1 | B_2 | n - 1 \rangle = n - 1$$

$$\langle n - 1 | A_1 | n - 2 \rangle = n - m + 1 = - \langle n - 1 | B_1 | n - 2 \rangle$$

$$\langle n-1 | A_1 | n \rangle = n+m = - \langle n-1 | B_1 | n \rangle$$

$$\langle n-1 | A_0 | p \rangle = - (n-1) \delta_{n-1,p}$$

$$\langle n-1 | B_0 | p \rangle = n \delta_{n-1,p}$$

$$\Rightarrow v_{n-1}^{(n)} = - (m+n) \left( n - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2} + y_n^{(n)} \right)$$

Pour  $j = n+1$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+1 | A_2 | n+1 \rangle = - (n+2)$$

$$\langle n+1 | B_2 | n+1 \rangle = n+1$$

$$\langle n+1 | A_1 | n \rangle = n-m+1 = - \langle n+1 | B_1 | n \rangle$$

$$\langle n+1 | A_1 | n+2 \rangle = n+m+2 = - \langle n+1 | B_1 | n+2 \rangle$$

$$\langle n+1 | A_0 | p \rangle = - (n+1) \delta_{n+1,p}$$

$$\langle n+1 | B_0 | p \rangle = (n+2) \delta_{n+1,p}$$

$$\Rightarrow v_{n+1}^{(n)} = (n-m+1) \left( \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}m^2 + y_n^{(n)} \right)$$

Pour  $j = n+2$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n+2 | A_1 | n+1 \rangle = n-m+2 = - \langle n+2 | B_1 | n+1 \rangle$$

$$\langle n+2 | A_0 | p \rangle = - (n+2) \delta_{n+2,p}$$

$$\langle n+2 | B_0 | p \rangle = (n+3) \delta_{n+2,p}$$

$$\Rightarrow v_{n+2}^{(n)} = \frac{1}{2} (-m + n + 1) (-m + n + 2) x_n^{(n)}$$

Pour  $j = n + 3$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n + 3 | A_1 | n + 2 \rangle = n - m + 3 = - \langle n + 3 | B_1 | n + 2 \rangle$$

$$\langle n + 3 | A_0 | p \rangle = - (n + 3) \delta_{n+3,p}$$

$$\langle n + 3 | B_0 | p \rangle = (n + 4) \delta_{n+3,p}$$

$$\Rightarrow v_{n+3}^{(n)} = \frac{1}{6} (n - m + 1) (n - m + 2) (n - m + 3)$$

Remarque :

Le fait que  $\lambda_3^{(n)}$  prenne des valeurs différentes suivant le  $m$  considéré n'apparaît pas dans l'expression des  $v_p^{(n)}$  non nuls. Ceci provient de ce que le produit scalaire  $\langle j | B_0 | n \rangle$  est toujours nul dès que  $j \neq n$ .

Par conséquent, quelque soit la valeur de  $\lambda_3^{(n)}$ ,  
on a :

$$\lambda_3^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle = 0 \quad \text{si } j \neq n$$

## QUATRIEME ORDRE.

-----

En multipliant (3.2) à gauche par  $\langle j |$   
 et en utilisant les relations (3.1), on a :

$$\begin{aligned}
 & y_{n-2}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n-2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n-2 \rangle \right] \\
 & + y_{n-1}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n-1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n-1 \rangle \right] \\
 & + y_n^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n \rangle \right] \\
 & + y_{n+1}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n+1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n+1 \rangle \right] \\
 & + y_{n+2}^{(n)} \left[ \langle j | A_2 | n+2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_2 | n+2 \rangle \right] \\
 & + v_{n-3}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-3 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle \right] \\
 & + v_{n-2}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n-1 \rangle \right] \\
 & + v_{n-1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n-1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n-1 \rangle \right] \\
 & + v_n^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n \rangle \right] \\
 & + v_{n+1}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+1 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+1 \rangle \right] \\
 & + v_{n+2}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+2 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+2 \rangle \right] \\
 & + v_{n+3}^{(n)} \left[ \langle j | A_1 | n+3 \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_1 | n+3 \rangle \right] \\
 & + \sum_t w_t^{(n)} \left[ \langle j | A_0 | t \rangle - \lambda_0^{(n)} \langle j | B_0 | t \rangle \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_{n-1}^{(n)} \lambda_0^{(n)} \langle j | B_3 | n-1 \rangle + x_n^{(n)} \lambda_0^{(n)} \langle j | B_3 | n \rangle \\
&+ x_{n+1}^{(n)} \lambda_0^{(n)} \langle j | B_3 | n+1 \rangle + \lambda_0^{(n)} \langle j | B_4 | n \rangle \\
&+ \lambda_3^{(1)} \left[ \langle j | B_1 | 1 \rangle + \sum_i x_i^{(1)} \langle j | B_0 | i \rangle \right] \\
&+ \lambda_4^{(n)} \langle j | B_0 | n \rangle
\end{aligned}$$

Pour  $j = n$  :

.....

les produits scalaires non nuls sont :

$$\langle n | A_2 | n \rangle = - (n + 1)$$

$$\langle n | B_2 | n \rangle = n$$

$$\langle n | A_1 | n-1 \rangle = n - m = - \langle n | B_1 | n-1 \rangle$$

$$\langle n | A_1 | n+1 \rangle = n + m + 1 = - \langle n | B_1 | n+1 \rangle$$

$$\langle n | A_0 | t \rangle = n \quad \text{si } n = t$$

$$\langle n | B_0 | t \rangle = n + 1 \quad \text{si } n = t$$

$$\langle n | B_3 | n \rangle = 0$$

$$= \frac{1}{2} 3 \quad \text{si } m = n = 1$$

$$\langle n | B_4 | n \rangle = 0$$

Pour déterminer la valeur de  $\lambda_4^{(n)}$ , nous devons considérer le cas où  $|m| = n = 1$  et, ensuite, le cas où  $|m| > 1$ , vu que la

valeur propre  $\lambda_3^{(n)}$  trouvée au troisième ordre prend des valeurs différentes pour ces deux cas et aussi parce que le produit scalaire  $\langle n | B_4 | n \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \quad \text{si } |m| = n = 1 \\ &= 0 \quad \forall |m| > 1 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi pour  $\lambda_4^{(n)}$  finalement que :

$$\lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

et ceci est vrai pour  $|m| = 1$  et  $|m| > 1$

### Conclusion.

En résumé, nous avons trouvé aux différents ordres les valeurs suivantes pour les valeurs propres :

$$\lambda_1^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

$$\lambda_2^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

$$\lambda_3^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

$$\lambda_3^{(1)} = \mp \frac{3}{4} \quad \forall |m| = n = 1$$

$$\lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq |m|$$

Nous voyons donc qu'il n'apparaît aucune correction au premier et au second ordre en  $z$  pour la valeur propre  $\lambda$ , et par consé-

quent aucune correction d'ordre  $\frac{R}{D}$  et  $\frac{R^2}{D^2}$  dans les fréquences perturbées (  $z = \frac{R}{D}$  ).

Les seuls modes qui bougent au troisième ordre en  $\frac{R}{D}$  sont les modes  $|m| = n = 1$ .

Tout ceci est en accord avec des résultats trouvés précédemment. En plus, nous avons montré qu'au quatrième ordre il n'apparaît aussi aucune correction en  $z^4$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

=====



III. - CALCUL DE L'ENERGIE D'INTERACTION.

 § 1. - PRELIMINAIRES.
   
 =====

Soit deux voids (ou sphères pleines) situés à une distance D l'un de l'autre.

L'énergie de Van der Waals s'exprime de la manière suivante :

$$W(D) = \frac{1}{2} \hbar \sum_i [\omega_i(D) - \omega_i(\infty)] \quad (3.1)$$

avec  $\omega_i(D)$  : les modes propres du champ électromagnétique qui dépendent de la distance D entre les deux corps.

$\omega_i(\infty)$  : les modes propres du champ électromagnétique dus à un seul corps, car on a supposé que la distance D est très grande.

la somme parcourt tous les modes possibles avec leur dégénérescence éventuelle.

Le problème est donc de déterminer tous ces  $\omega_i$

Il faut rappeler ici que le milieu métallique est caractérisé par sa fonction diélectrique dynamique  $\epsilon(\omega)$  qui dépend des fréquences  $\omega$

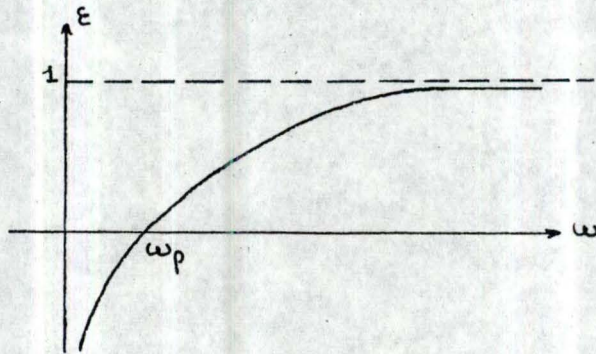
La relation entre  $\epsilon(\omega)$  et  $\omega$  est donnée par :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.2)$$

où  $\omega_p = \left( \frac{4 \pi n e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$  = la fréquence du plasmon  
(oscillation collective du gaz d'électrons).

$m$  = masse de l'électron.

$n$  = densité des électrons.



A partir de la relation (3.2), il nous est facile de déterminer les  $\omega_i$ . En effet, pour un void, les valeurs propres  $\lambda_n$  du problème aux valeurs propres généralisé :  $A \vec{x} = \lambda B \vec{x}$  sont liées à la fonction diélectrique  $\epsilon(\omega)$  par  $\lambda_n = \epsilon(\omega_n)$  (pour une sphère pleine  $\lambda_n = \epsilon^{-1}(\omega_n)$  où les  $\lambda_i$  ont été déterminés par la théorie de la perturbation.

§ 2. - ENERGIE D'INTERACTION ENTRE DEUX VOIDS.

=====

$$\text{On a } \lambda = \epsilon(\omega) \text{ et } \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Il faut à présent déterminer les  $\omega_i(D)$  et  $\omega_i(\infty)$  de façon générale :

a) Valeur des  $\omega_i(\infty)$

Dans le cas de deux voids situés à distance  $D$  infinie, on a vu dans le calcul des valeurs propres  $\lambda_n$  qu'on retrouve les modes de surface d'un void isolé.

En effet, en faisant  $\mu \rightarrow \infty$  dans la relation de dispersion (1.1), on obtient :

$$\epsilon(\omega) = -\frac{n}{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Donc 
$$\omega_n(\infty) = -\frac{n}{n+1} \quad (3.3)$$

b) Valeur des  $\omega_i(D)$

Dans la théorie de la perturbation, on écrit  $\epsilon(\omega)$  en série de puissance de  $z$  (où  $z = e^{-\mu} < 1$ ).

On a :

$$\varepsilon(\omega) = \lambda_0^{(n)} + z \lambda_1^{(n)} + z^2 \lambda_2^{(n)} + z^3 \lambda_3^{(n)} + z^4 \lambda_4^{(n)} + \dots$$

$$\text{avec } \lambda_0^{(n)} = -\frac{n}{n+1}$$

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_2^{(n)} = \lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{c'est-à-dire } \varepsilon(\omega) = -\frac{n}{n+1} + \lambda_3^{(n)} z^3 + \dots$$

Si on remplace cette valeur de  $\varepsilon(\omega)$  dans (3.2), on déduit  $\omega_n$

En effet :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -\frac{n}{n+1} + \lambda_3^{(n)} z^3 + \dots$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 + \frac{n}{n+1} - \lambda_3^{(n)} z^3 - \dots$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left[ \frac{2n+1}{n+1} - \lambda_3^{(n)} z^3 - \dots \right]^{-1}$$

en développant en série :

$$\omega^2 = \left[ \frac{n+1}{2n+1} \right] \omega_p^2 \left[ 1 + \lambda_3^{(n)} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) z^3 + \dots \right]$$

Dans le développement de  $(1-x)^{-1}$ , on ne considère que les termes linéaires.

$$\omega = \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \omega_p \left[ 1 + \lambda_3^{(n)} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) z^3 + \dots \right]^{\frac{1}{2}}$$

On pose  $\lambda' = |\lambda|$  et on développe :

$$\rightarrow \omega = \omega_p \left[ \frac{n+1}{2n+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) \lambda_3^{(n)} z^3 - \frac{1}{8} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^2 \left( \lambda_3^{(n)} \right)^2 z^6 + \dots \right] \quad (3.4)$$

Aucune correction en  $z^8$  n'apparaît dans l'expression des  $\omega_n$ .  
On obtient alors la même valeur pour l'énergie que celle trouvée en se limitant à l'ordre trois en  $z$  dans la perturbation.

c) Calcul de l'énergie.

Pour  $m = 0$  ;  $n = 1$  on a  $\lambda^{(1)} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} z^3$

mode antisymétrique :

$$\omega_a = \omega_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 - \frac{z^3}{2} - \frac{z^6}{8} \right)$$

mode symétrique :

$$\omega_b = \omega_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^6}{8} \right)$$

Pour  $|m| = 1; n = 1$  on a  $\lambda^{(1)} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} z^3$

mode antisymétrique :

$$\omega_c = \omega_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 - \frac{z^3}{4} - \frac{z^6}{32} \right)$$

mode symétrique :

$$\omega_d = \omega_p \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 + \frac{z^3}{4} - \frac{z^6}{32} \right)$$

$$\text{Alors } W = \frac{1}{2} \hbar \left[ \omega_a + \omega_b + 2\omega_c + 2\omega_d - \omega(\infty) \right]$$

où  $2\omega_c$  et  $2\omega_d$  viennent du fait que  $|m| = 1$

$$\Rightarrow m = 1, m = -1$$

$$\omega(\infty) = 6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$W = \frac{1}{2} \hbar \left[ -\frac{3z^6}{8} \omega_p \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

$$\Rightarrow W = -\frac{3}{16} \hbar \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_p z^6 \quad (3.5)$$

§ 3. - ENERGIE D'INTERACTION ENTRE DEUX SPHERES PLEINES.

---

Ici, on a  $\lambda = \epsilon^{-1}(\omega)$

La relation (3.2) devient alors :

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (3.6)$$

On va déterminer les  $\omega_i(D)$  de la même manière que dans le cas précédent, mais en se servant de (3.6).

a) Valeur de  $\omega_i(\infty)$

$$\epsilon^{-1}(\omega) = -\frac{n}{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n(\infty) = -\frac{n}{n+1}} \quad (3.7)$$

b) Valeur de  $\omega_i(D)$

Ecrivons  $\epsilon(\omega)$  en série de puissance de  $z$

$$\epsilon(\omega) = \lambda_0^{(n)} + \lambda_1^{(n)} z + \lambda_2^{(n)} z^2 + \lambda_3^{(n)} z^3 + \lambda_4^{(n)} z^4 + \dots$$

$$\text{avec } \lambda_0^{(n)} = -\frac{n}{n+1} \quad \forall n$$

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_2^{(n)} = \lambda_4^{(n)} = 0 \quad \forall n$$

$$\lambda_3^{(n)} \neq 0 \quad \text{pour } n = 1$$

c'est-à-dire  $\epsilon(\omega) = -\frac{1}{2} + \lambda_3^{(m)} z^3 + \dots$

Si on met cette valeur dans (3.6), on obtient :

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left[ -\frac{1}{2} \pm \lambda_3^{(m)} z^3 - \dots \right] \left[ -\frac{3}{2} \mp \lambda_3^{(m)} z^3 - \dots \right]^{-1}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left[ \frac{1}{3} \mp \frac{2}{9} \lambda_3^{(m)} z^3 \mp \frac{2}{3} \lambda_3^{(m)} z^3 + \frac{4}{9} (\lambda_3^{(m)})^2 z^6 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_p \sqrt{\frac{1}{3}} \left[ 1 \mp \frac{4}{3} \lambda_3^{(m)} z^3 - \frac{8}{9} (\lambda_3^{(m)})^2 z^6 \right]} \quad (3.8)$$

c) Calcul de l'énergie.

Pour  $m = 0, n = 1$   $\lambda^{(1)} = -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} z^3$

mode antisymétrique :

$$\omega_a = \omega_p \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 + 2z^3 - \frac{1}{2}z^6 \right)$$

mode symétrique :

$$\omega_b = \omega_p \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 - 2z^3 - \frac{1}{2}z^6 \right)$$



Pour  $|m| = 1, n = 1$   $\lambda^{(1)} = -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{4}z^3$

mode antisymétrique :

$$\omega_c = \omega_p \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{8}z^6 \right)$$

mode symétrique :

$$\omega_d = \omega_p \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{8}z^6 \right)$$

$$\text{Alors } W = \frac{1}{2} \hbar \left[ \omega_a + \omega_b + 2\omega_c + 2\omega_d - \omega(\infty) \right]$$

où  $2\omega_c$  et  $2\omega_d$  viennent du fait que  $|m| = 1$

$$\Rightarrow m = 1, m = -1$$

$$\omega(\infty) = 6 \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$W = \frac{1}{2} \hbar \left[ -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_p z^6 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -\frac{3}{4} \hbar \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_p z^6} \quad (3.9)$$

#### § 4. - CONCLUSIONS.

=====

La fréquence  $\omega_p$  du plasmon caractéristique du mode  $m = 0$ ,  $l = 0$  pour un void isolé reste inchangée par la présence d'un second void placé à distance quelconque du premier.

Pour une large séparation, deux voids interagissent de façon similaire à deux sphères.

L'énergie d'interaction se comporte comme l'inverse de la puissance six de  $\frac{R}{D}$  qui est typique des énergies de dispersion dipolaires.

Le coefficient de cette sixième puissance est plus petit pour deux voids que pour deux sphères.

Le rapport, en tenant compte de (3.5) et (3.9), vaut :

$$\frac{W_{\text{void}}}{W_{\text{sphère}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Cette différence apparaît à cause du fait de l'effet d'interaction de plusieurs atomes qui est inclus implicitement dans le modèle continu que l'on utilise ici.

=====



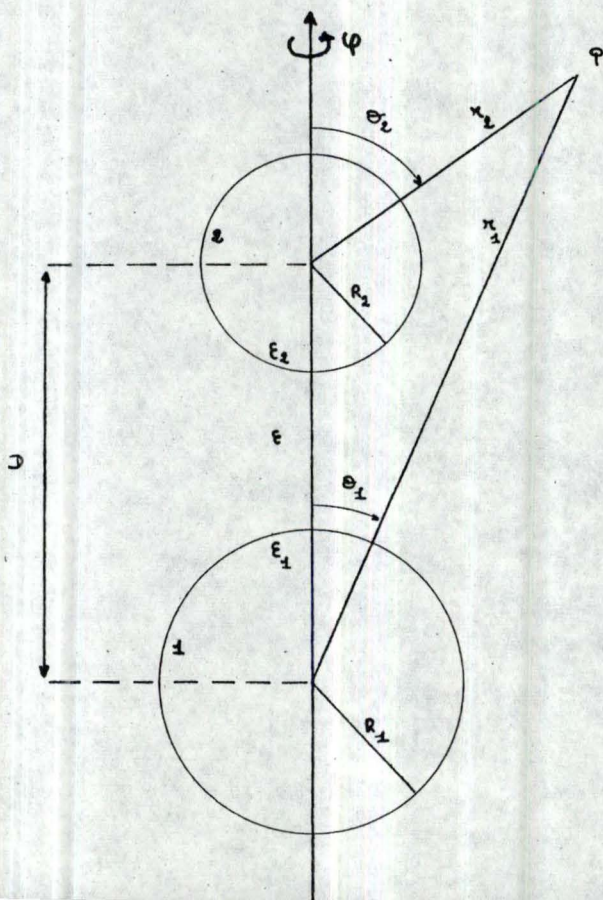
I - CONDITIONS AUX LIMITES ET DE REGULARITE  
POUR LA SOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE.

§ 1. - CAS  $m = 0$ .

=====

1. - RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES,  
RELATIVE A DEUX SPHERES DE RAYONS INEGAUX SITUEES A DISTANCE  
FINIE.

-----



Soit deux sphères (1 et 2)  
de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , de  
constantes diélectriques  
 $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  respectivement,  
distantes de  $D$ .

$\epsilon$  est la constante dié-  
lectrique du milieu exté-  
rieur aux deux sphères.

Conditions aux limites :

- le potentiel est fini partout.
- le potentiel est nul à l'infini.
- le potentiel est continu à la surface de chaque sphère.
- le raccord des dérivées ~~tangentielles~~ <sup>normales</sup> du champ électrique est imposé.

Expression du potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de chacune des sphères.

En utilisant l'expression du potentiel trouvée dans le cas d'une sphère seule (annexe 1), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 v_1^{IN} &= \sum_{l=0} A_{1,1} r_1^l P_l(\cos \theta_1) \\
 v_2^{IN} &= \sum_{l=0} A_{1,2} r_2^l P_l(\cos \theta_2) \\
 v^{OUT} &= \sum_{l=0} \left[ C_{1,1} r_1^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_1) \right. \\
 &\quad \left. + C_{1,2} r_2^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_2) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Exprimons  $r_1^l P_l(\cos \theta_1)$  et  $r_1^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_1)$  en fonction  
 -----  
 de  $r_2$  et  $\theta_2$  .  
 -----

En utilisant le théorème d'addition (annexe 2), on obtient successivement :

$$r_1^l P_l(\cos \theta_1) = l! \sum_{p=0}^l \frac{D^p r_2^{l-p}}{p! (l-p)!} P_{l-p}(\cos \theta_2) \quad (2.2)$$

$$\frac{P_l(\cos \theta_1)}{r_1^{l+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (l+p)!}{p! l!} D^p \frac{P_{l+p}(\cos \theta_2)}{r_2^{l+p+1}} \quad \text{si } D < r_2 \quad (2.3)$$

$$\frac{P_l(\cos \theta_1)}{r_1^{l+1}} = \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_2^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_2) \quad \text{si } D > r_2 \quad (2.4)$$

==== Raccordement sur  $r_2 = R_2$  :

=====

a) Potentiel.

- on exprime d'abord  $r_1^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_1)$  dans  $V^{\text{OUT}}$  en termes de  $r_2$  et  $\theta_2$ .

- parmi les deux possibilités (2.3) et (2.4), on va choisir celle qui sera valable sur  $r_2 = R_2 < D$  : c'est-à-dire (2.4)

D'après (2.4), on obtient :

$$V^{\text{OUT}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{1,1} \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_2^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_2) + C_{1,2} r_2^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_2) \right]$$

$$V_2^{\text{IN}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{1,2} r_2^l P_l(\cos \theta_2)$$

Donc, en raccordant sur  $r_2 = R_2$ , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,2} R_2^l P_l(\cos \theta_2) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{l,1} \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{R_2^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_2) \right. \\ & \quad \left. + C_{l,2} R_2^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_2) \right] \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par  $P_l(\cos \theta_2)$  et intégrons

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,2} R_2^l \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta_2) P_l(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{C_{l,1}}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{R_2^p}{D^{l+p+1}} \int_0^{\pi} P_p(\cos \theta_2) \right. \\ & \quad \left. P_l(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 + C_{l,2} R_2^{-(l+1)} \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta_2) P_l(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 \right] \end{aligned}$$

Or la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre  $P_n$  est :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx &= \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \\ &= 0 & \text{si } n \neq m \end{aligned}$$

ou encore, en posant  $x = \cos \theta$  :

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2 \delta_{m,n}}{2n+1} \quad (2.5)$$

Donc (2.4) s'écrit en utilisant (2.5) :

$$A_{1',2} R_2^{1'} \frac{1}{2^{1'+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{C_{1,1}}{l!} (-1)^{l'} \frac{(1+l')!}{l!} \frac{R_2^{1'}}{D^{1'+1}} \frac{2}{2^{1'+1}} + C_{1,2} R_2^{-(1+1)} \frac{2 \delta_{11'}}{2^{1'+1}} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{1',2} R_2^{1'} = \frac{(-1)^{l'} R_2^{1'}}{l! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1,1}}{l!} \frac{(1+l')!}{D^l} + C_{1,2} R_2^{-(1+1)}} \quad (2.6)$$

b) Dérivée normale.

Rappelons que  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  et  $\vec{E} = -\text{grad } V$

La condition de continuité pour la composante normale de  $\vec{D}$  s'exprime par :

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2^{\text{IN}}}{\partial R_2} = \epsilon \frac{\partial V^{\text{OUT}}}{\partial R_2}$$

En multipliant cette relation par  $P_{1'}(\cos \theta_2)$  et en intégrant, on obtient :



$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,2} R_2^{l-1} \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta_2) P_{l'}(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 = \\ \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{l,1} \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} P \frac{R_2^{p-1}}{D^{l+p+1}} \int_0^{\pi} P_p(\cos \theta_2) \right. \\ \left. P_{l'}(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 - C_{l,2} (l+1) R_2^{-(l+1)-1} \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta_2) P_{l'}(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 \right] \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.5) d'orthogonalité des  $P_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 A_{l',2} R_2^{l'-1} \frac{2}{2l'+1} \\ = \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{C_{l,1}}{l!} (-1)^{l'} \frac{(l+l')!}{l'!} R_2^{l'-1} \frac{2}{D^{l+l'+1}} \frac{2}{2l'+1} \right. \\ \left. - \varepsilon C_{l',2} (l'+1) R_2^{-(l'+1)-1} \frac{2}{2l'+1} \right] \\ \varepsilon_2 A_{l',2} R_2^{l'-1} = \varepsilon \frac{(-1)^{l'} R_2^{l'-1}}{l'! D^{l'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{l,1}}{l!} \frac{(l+l')!}{D^l} \\ - \varepsilon C_{l',2} (l'+1) R_2^{-(l'+1)-1} \end{aligned}$$

En simplifiant par  $R_2^{-1}$ , ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 A_{1',2}^{1'} R_2^{1'} &= \varepsilon \frac{(-1)^{1'} 1' R_2^{1'}}{1'! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1,1}}{l!} \frac{(1+l')!}{D^l} \\ &- \varepsilon C_{1',2}^{(1'+1)} R_2^{-(1'+1)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

==== Raccordement sur  $r_1 = R_1$  :

=====

a) Potentiel.

- on exprime  $r_2^{-(1+1)} P_1(\cos \theta_2)$  dans  $V^{OUT}$  en terme de  $r_1, \theta_1$ .

- par le théorème d'addition (annexe 2), on a :

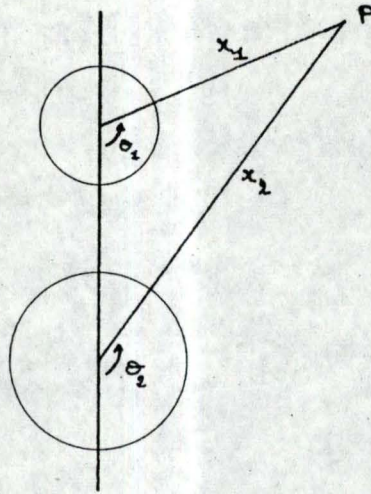
$$\frac{P_1(\cos \theta_1)}{r_2^{1+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (1+p)!}{p! 1!} D^p \frac{P_{1+p}(\cos \theta_2)}{r_1^{1+p+1}} \quad \text{si } D < r_1$$

$$\frac{P_1(\cos \theta_1)}{r_2^{1+1}} = \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(1+p)!}{p!} \frac{r_1^p}{D^{1+p+1}} P_p(\cos \theta_2) \quad \text{si } D > r_1$$

Or ici, on désire exprimer  $r_2^{-(1+1)} P_1(\cos \theta_2)$  en fonction de  $r_1$  et  $\theta_1$ . On doit donc inverser les rôles de  $r_2, \theta_2$  et de  $r_1, \theta_1$  dans les formules ci-dessus.

C'est-à-dire que :

$r_1$  devient  $r_2$   
 $r_2$  devient  $r_1$   
 $\theta_1$  devient  $\theta_2$   
 $\theta_2$  devient  $\theta_1$



Donc  $\theta_1 \Rightarrow \pi - \theta_2$  :  $\cos \theta_1 = \cos (\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$

$\theta_2 \Rightarrow \pi - \theta_1$  :  $\cos \theta_2 = \cos (\pi - \theta_1) = -\cos \theta_1$

Les relations s'écrivent alors :

$$\frac{P_1(-\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (l+p)!}{p! l!} D^p \frac{P_{l+p}(-\cos \theta_1)}{r_1^{l+p+1}} \quad \text{si } D < r_1$$

$$\frac{P_1(-\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_1^p}{D^{l+p+1}} P_p(-\cos \theta_1) \quad \text{si } D > r_1$$

De ces deux possibilités, la seule valable sur  $r_1 = R_1$  est  $D > r_1$ .

En utilisant la propriété  $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ , celle-ci s'écrit :

$$(-1)^l \frac{P_1(\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{1}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_1^p}{D^{l+p+1}} (-1)^p P_p(\cos \theta_1)$$

Donc pour  $r_1 = R_1 \leq D$ , on obtient :

$$\frac{P_l(\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_1^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_1)$$

En conséquence, le  $V^{\text{OUT}}$  et le  $V_1^{\text{IN}}$  s'écrivent :

$$V^{\text{OUT}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{l,1} r_1^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_1) + C_{l,2} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+p)!}{p!} \frac{r_1^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_1) \right]$$

$$V_1^{\text{IN}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,1} r_1^l P_l(\cos \theta_1)$$

Donc en raccordant ces potentiels sur  $r_1 = R_1$ , on a :

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_{l,1} R_1^l P_l(\cos \theta_1) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{l,1} R_1^{-(l+1)} P_l(\cos \theta_1) + C_{l,2} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+p)!}{p!} \frac{R_1^p}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_1) \right]$$

On multiplie ceci par  $P_l(\cos \theta_1)$  et on intègre. On obtient alors :

$$A_{l',1} R_1^{l'} \frac{2}{2l'+1} = C_{l',1} R_1^{-(l'+1)} \frac{2}{2l'+1} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{l,2} (-1)^l}{l!}$$

$$\frac{(1+l')!}{l'!} \frac{R_1^{l'}}{D^{l'+1}} \frac{2}{2l'+1}$$

$$\Rightarrow A_{l',1} R_1^{l'} = C_{l',1} R_1^{-(l'+1)} + \frac{R_1^{l'}}{D^{l'+1}} \frac{1}{l'!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{l,2} (-1)^l (1+l')!}{D^l l!}$$

(2.8)

b) Dérivée normale.

La condition de continuité pour la composante normale de  $\vec{D}$

s'exprime par :

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{IN}}{\partial R_1} = \varepsilon \frac{\partial V^{OUT}}{\partial R_2}$$

c'est-à-dire :

$$\varepsilon_1 \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,1} R_1^{l-1} P_l(\cos \theta_1)$$

$$= \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left[ C_{l,1} (-1)^{(l+1)} R_1^{-(l+1)-1} P_l(\cos \theta_1) \right.$$

$$\left. + \frac{C_{l,2} (-1)^l}{l!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1+p)!}{p!} \frac{R_1^{p-1}}{D^{l+p+1}} P_p(\cos \theta_1) \right]$$

En multipliant par  $P_{1'}(\cos \theta_1)$ , et en intégrant :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 A_{1',1}^{1'} R_1^{1'-1} \frac{2}{2^{1'+1}} \\ &= \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{C_{1,2} (-1)^l (1+l')!}{l! 1'!} \frac{R_1^{1'-1} 2}{D^{1+l'+1} 2^{1'+1}} \right] \\ &+ \varepsilon C_{1',1} (-1)^{(1'+1)} R_1^{-(1'+1)-1} \frac{2}{2^{1'+1}} \end{aligned}$$

En simplifiant par  $R_1^{-1}$ , ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 A_{1',1}^{1'} R_1^{1'} &= - \varepsilon C_{1',1} (1'+1) R_1^{-(1'+1)} \\ &+ \varepsilon \frac{1' R_1^{1'}}{1'! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1,2} (-1)^l (1+l')!}{l! D^l} \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2. - EXPLOITATION DES RESULTATS.

---

En multipliant la relation (2.6) par  $\varepsilon_2 1$  et en utilisant (2.7), on déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon (-1)^1 {}_1 R_2^1}{1! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k,1} (k+1)!}{k! D^k} - \varepsilon C_{1,2} (1+1) R_2^{-(1+1)} \\ & = \frac{(-1)^1 \varepsilon {}_2 {}_1 R_2^1}{1! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k,1} (k+1)!}{k! D^k} + \varepsilon {}_2 {}_1 C_{1,2} R_2^{-(1+1)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

De même, en multipliant la relation (2.8) par  $\varepsilon_1 1$  et en utilisant (2.9), on déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon {}_1 R_1^1}{1! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k,2} (-1)^k (k+1)!}{k! D^k} - \varepsilon C_{1,1} (1+1) R_1^{-(1+1)} \\ & = \frac{{}_1 R_1^1 1 \varepsilon_1}{1! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k,2} (-1)^k (k+1)!}{D^k k!} + 1 \varepsilon_1 C_{1,1} R_1^{-(1+1)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il nous reste donc seulement deux relations (2.10) et (2.11).

Transformons (2.10) en mettant dans un membre ce qui est indépendant de la sommation sur  $k$ . On obtient :

$$C_{1,2} = \frac{(-1)^1 {}_1 R_2^{2+1}}{1! D^{1+1}} \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{[1 \varepsilon_2 + (1+1)\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k,1} (k+1)!}{k! D^k}$$

En particulier, pour  $k = 1$ , on a :

$$C_{k,2} = \frac{(-1)^k k R_2^{2k+1}}{k! D^{k+1}} \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{[k\varepsilon_2 + (k+1)\varepsilon]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j,1}}{j!} \frac{(j+k)!}{D^j}$$

Ce résultat peut être introduit dans la relation (2.11),  
c'est-à-dire :

$$[\varepsilon - \varepsilon_1] \frac{1 R_1^l}{1! D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k R_2^{2k+1}}{k! D^{k+1}} \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{[k\varepsilon_2 + (k+1)\varepsilon]}.$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j,1}}{j!} \frac{(j+k)!}{D^j} \frac{(-1)^k}{k! D^k} (k+1)!$$

$$= C_{1,1} R_1^{-(l+1)} [1\varepsilon_1 + \varepsilon(l+1)]$$

avec  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Modifions cette relation en faisant sortir de la somme ce qui est indépendant de  $k$  :

$$[\varepsilon - \varepsilon_1] [\varepsilon - \varepsilon_2] \frac{1 R_1^l}{1! D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} k (k+1)! R_2^{2k+1}}{(k!)^2 D^{2k+1} [k\varepsilon_2 + (k+1)\varepsilon]}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{j,1}}{j!} \frac{(j+k)!}{D^j} = C_{1,1} R_1^{-(l+1)} [1\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon]$$



$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 D^{2k+1} [k \epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} j! D^j C_{j,1} \\ &= \frac{1! D^{1+1} R_1^{-(1+1)}}{[\epsilon - \epsilon_1] [\epsilon - \epsilon_2] 1 R_1^1} [1 \epsilon_1 + (1+1)\epsilon] C_{1,1} \end{aligned}$$

Si on permute les sommations et si on remet tout dans le premier membre, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 D^{2k+1} [k \epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} j! D^j \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{1! D^{1+1} R_1^{-(1+1)} [1 \epsilon_1 + (1+1)\epsilon]}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) 1 R_1^1} \right] \delta_{j,1} \right\} C_{j,1} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à écrire :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} C_j = 0 \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{1j} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (+1)! R_2^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 D^{2k+1+j} j! [k \epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} \\ &\quad - \frac{1! D^{1+1} [1 \epsilon_1 + (1+1)\epsilon]}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) 1 R_1^{2l+1}} \delta_{1,j} \end{aligned}$$

La condition pour que le système (2.12) qui est homogène admette une solution non triviale est :

$$\text{Dtm } A_{1j} = 0$$

Or, si  $l=0$ , on a des problèmes dans la définition de  $A_{1j}$ .

Il faut donc écrire de préférence :

$$A_{1j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)! l}{(k!)^2 D^{2k+1+j} j! [k\varepsilon_2 + (k+1)\varepsilon]} - \frac{l! D^{l+1} [l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon]}{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) R_1^{2l+1}} \delta_{1,j}$$

(2.13)

Cas particuliers.

$l = 0$

$$A_{0j} = - \frac{D(\varepsilon) \delta_{0,j}}{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) R_1}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{00} = - \frac{D\varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) R_1} \\ A_{01} = 0 \\ A_{02} = 0 \end{array} \right.$$

en général  $A_{0j} = 0$  pour  $j \neq 0$ , car  $\delta_{0,j} = 0$  si  $j \neq 0$

$$\underline{l = 1}$$

$$A_{1j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 D^{2k+1+j} j! [k\epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} - \frac{D^2 (\epsilon_1 + 2\epsilon)}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) R_1^3} \delta_{1,j}$$

$$\Rightarrow A_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1}}{(k!) D^{2k+1} [k\epsilon_2 + (k+1)\epsilon]}$$

Réécrivons le système (2.12) sous une autre forme.

$$\text{On a } \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} C_j = 0$$

c'est-à-dire, avec (2.13) :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 D^{2k+1} j! [k\epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} \frac{1}{D^j} - \frac{1! [1\epsilon_1 + \epsilon(1+1)] D^{2l+1}}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) R_1^{2l+1} D^l} \delta_{1,j} \right] C_j = 0$$

$$\text{ou } \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! \left(\frac{R_2}{D}\right)^{2k+1} (j+k)!}{(k!)^2 j! [k\epsilon_2 + (k+1)\epsilon]} \frac{1}{D^j} - \frac{1! [1\epsilon_1 + (1+1)\epsilon] D^{2l+1}}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) R_1} \delta_{1,j} \right] \frac{C_j}{D^j} = 0$$

Posons :

$$s_2 = \frac{R_2}{D} ; s_1 = \frac{R_1}{D}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1$$

On a :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A'_{1j} \frac{C_j}{D^j} = 0$$

avec

$$A'_{1j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (k+1)! (j+k)! 1 s_2^{2k+1}}{(k!)^2 j! [k + (k+1)\varepsilon]}$$

$$- \frac{1! [1 + (1+1)\varepsilon]}{(\varepsilon - 1)^2} s_1^{-(2l+1)} \delta_{1,j}$$

$$\Rightarrow A'_{1j} = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{1j,k} \frac{s_2^{2k+1}}{[k + (k+1)\varepsilon]} - \frac{1! [1 + (1+1)\varepsilon]}{(\varepsilon - 1)^2} s_1^{-(2l+1)} \delta_{1,j}$$

$$\text{avec } a'_{1j,k} = \frac{k (k+1)! (j+k)! 1}{(k!)^2 j!}$$

$$\text{et } a'_{1j,0} = 0$$

Ou encore, en divisant  $A'_{1j}$  par  $1!$ , on obtient :

$$\mathcal{A}_{lj} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{lj}^k \frac{s_2^{2k+1}}{[k + (k+1)\epsilon]} - \frac{[1 + \epsilon(1+1)]}{(\epsilon - 1)^2} \frac{1}{s_1^{2l+1}} \delta_{l,j}$$

(2.14)

$$\text{avec } a_{lj}^k = \frac{k(k+1)! (j+k)!}{(k!)^2 j! l!}$$

Conclusion.

=====

Dans le cas  $m = 0$ , pour deux sphères de rayons  <sup>$R_1$  et  $R_2$</sup>  égaux, nous obtenons un déterminant infini qu'il faut annuler, c'est-à-dire :

$$\det \mathcal{A}_{lj} = 0$$

avec  $\mathcal{A}_{lj}$  défini par (2.14)

Le tableau (T.1) montre les premiers termes de ce déterminant infini.

-----

$$m = 0$$

|       | $j = 0$                                                          | $j = 1$                                                                                              | $j = 2$                                                                                              | $j = 3$                                                                                              | $j = 4$                                                                                               |
|-------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l=0$ | $-\frac{\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$                               | 0                                                                                                    | 0                                                                                                    | 0                                                                                                    | 0                                                                                                     |
| $l=1$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{10}^k \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$  | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^k \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{1+2\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^k \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{13}^k \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{14}^k \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| $l=2$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{20}^k \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$  | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^k \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^k \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{2+3\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^k \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{24}^k \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| $l=3$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{30}^k \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$  | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{31}^k \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{32}^k \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{33}^k \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{3+4\epsilon}{(\epsilon+1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{34}^k \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| $l=4$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{40}^k \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{41}^k \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{42}^k \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{43}^k \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{44}^k \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{4+5\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ |

Tableau T.1

$$a_{lj}^k = \frac{k(k+1)\dots(k+j)!}{(k!)^2 j! 1!}$$

| $m = 0$<br>$k = 1$ | $j$<br>1 | 1                | 2                 | 3                 |
|--------------------|----------|------------------|-------------------|-------------------|
|                    | 1        | $a_{11}^1 = 4$   | $a_{12}^1 = 6$    | $a_{13}^1 = 8$    |
|                    | 2        | $a_{21}^1 = 12$  | $a_{22}^1 = 18$   | $a_{23}^1 = 24$   |
|                    | 3        | $a_{31}^1 = 24$  | $a_{32}^1 = 36$   | $a_{33}^1 = 48$   |
| $k = 2$            | $j$<br>1 | 1                | 2                 | 3                 |
|                    | 1        | $a_{11}^2 = 18$  | $a_{12}^2 = 36$   | $a_{13}^2 = 60$   |
|                    | 2        | $a_{21}^2 = 72$  | $a_{22}^2 = 144$  | $a_{23}^2 = 240$  |
|                    | 3        | $a_{31}^2 = 180$ | $a_{32}^2 = 360$  | $a_{33}^2 = 600$  |
| $k = 3$            | $j$<br>1 | 1                | 2                 | 3                 |
|                    | 1        | $a_{11}^3 = 48$  | $a_{12}^3 = 120$  | $a_{13}^3 = 240$  |
|                    | 2        | $a_{21}^3 = 240$ | $a_{22}^3 = 600$  | $a_{23}^3 = 1200$ |
|                    | 3        | $a_{31}^3 = 720$ | $a_{32}^3 = 1800$ | $a_{33}^3 = 3600$ |

Tableau T.2

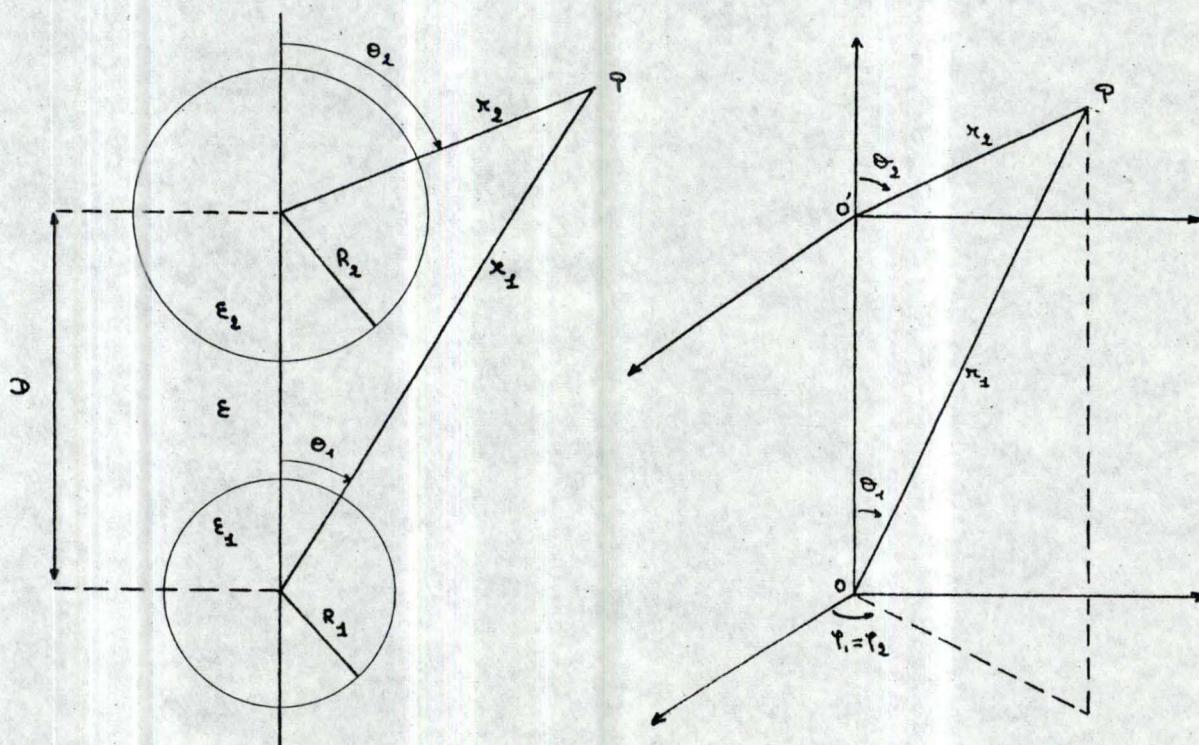
§ 2. - CAS GENERAL  $m \neq 0$ .

=====

1. - RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES,  
 -----  
 RELATIVE A DEUX SPHERES DE RAYONS INEGAUX SITUEES A DISTANCE  
 -----  
 FINIE.  
 -----

On considère deux sphères de centre  $O$  et  $O'$ , notées 1 et 2, de rayons  $R_1$  et  $R_2$  respectivement. On désigne par  $D$  la distance entre leurs centres.

On trace la droite joignant les centres des deux sphères, c'est-à-dire  $OO'$ , et on considère  $OO'$  comme étant l'axe  $z$  de notre système de coordonnées.





On choisit deux ensembles de systèmes de coordonnées sphériques : l'un centré en  $O'$  et l'autre en  $O$ .

Ainsi, les coordonnées sphériques d'un point  $P$  quelconque, prises par rapport à  $O$ , seront notées par  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et celles prises par rapport à  $O'$  par  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ .

On remarque que dans n'importe lequel des systèmes de coordonnées sphériques considérés ici, la coordonnée  $\varphi$  du point  $P$  est identique. Donc  $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$

Les conditions aux limites sont :

- le potentiel est fini partout.
- le potentiel est nul à l'infini.
- le potentiel est continu à la surface de chaque sphère.
- le raccord des dérivées <sup>normales</sup> ~~tangentes~~ du champ électrique est imposé.

Expression du potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de chacune des sphères.

Pour cela, nous nous servirons des expressions du potentiel trouvées dans le cas d'une seule sphère (annexe 1).

On a :

$$V_1^{IN} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r_1^l \left[ A_{lm}^1 Y_l^{m(e)}(\theta_1, \varphi_1) + B_{lm}^1 Y_l^{m(o)}(\theta_1, \varphi_1) \right]$$

$$V_2^{IN} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r_2^l \left[ A_{lm}^2 Y_l^{m(e)}(\theta_2, \varphi_2) + B_{lm}^2 Y_l^{m(o)}(\theta_2, \varphi_2) \right]$$

(2.15)

$$V^{OUT} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r_1^{-(l+1)} \left[ C_{lm}^1 Y_l^{m(e)}(\theta_1, \varphi_1) + D_{lm}^1 Y_l^{m(o)}(\theta_1, \varphi_1) \right]$$

$$+ r_2^{-(l+1)} \left[ C_{lm}^2 Y_l^{m(e)}(\theta_2, \varphi_2) + D_{lm}^2 Y_l^{m(o)}(\theta_2, \varphi_2) \right]$$

avec  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ 

Raccord des potentiels sur la surface de la seconde sphère.

Nous allons maintenant effectuer le raccord des potentiels sur la surface de la seconde sphère, c'est-à-dire lorsque

$$r_2 = R_2.$$

Dans ce but, nous allons d'abord exprimer

$$r_1^{-(l+1)} Y_l^{m(e)}(\theta_1, \varphi) \text{ et } r_1^{-(l+1)} Y_l^{m(o)}(\theta_1, \varphi) \text{ en termes de } r_2 \text{ et}$$

$\theta_2$  en utilisant le théorème d'addition (annexe 2).

Les formules de transformation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1^m(\cos \theta_1)}{r_1^{l+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (l+p-m)!}{p! (l-m)!} D^p \frac{P_{l+p}^m(\cos \theta_2)}{R_2^{l+p+1}} \quad \text{si } r_2 > D \\ \frac{P_1^m(\cos \theta_1)}{r_1^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)! R_2^{m+p}}{(2m+p)! D^{l+m+p+1}} P_{m+p}^m(\cos \theta_2) \quad \text{si } r_2 < D \end{array} \right.$$

En se souvenant que 
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1^{m(e)}(\theta, \varphi) = P_1^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ Y_1^{m(o)}(\theta, \varphi) = P_1^m(\cos \theta) \sin m\varphi \end{array} \right.$$

ces formules s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_{l(o)}^{m(e)}(\theta_1, \varphi)}{r_1^{l+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (l+p-m)!}{p! (l-m)!} D^p \frac{Y_{l+p(o)}^{m(e)}(\theta_2, \varphi)}{r_2^{l+p+1}} \quad \text{si } r_2 > D \\ \frac{Y_{l(o)}^{m(e)}(\theta_1, \varphi)}{r_1^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)! r_2^{m+p}}{(2m+p)! D^{l+m+p+1}} Y_{m+p(o)}^{m(e)}(\theta_2, \varphi) \quad \text{si } r_2 < D \end{array} \right.$$

où  $Y_{l(o)}^{m(e)}$  indique qu'il s'agit aussi bien de la fonction harmonique impaire ou paire.

Puisque nous raccordons les potentiels sur la surface de la seconde sphère, c'est-à-dire pour  $r_2 = R_2$ , il est évident que nous nous trouvons toujours dans le cas  $r_2 < D$ , puisque  $D$  représente la distance entre les deux centres des sphères et que  $r_2 = R_2$  est précisément le rayon de l'une de ces sphères.

Par conséquent, seule la formule de transformation dans le cas  $r_2 < D$  sera utilisée.

Moyennant cette formule, exprimons le raccord des potentiels sur la seconde sphère, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{IN} \\ V_2 \end{array} = \begin{array}{c} \text{OUT} \\ V \end{array} \\
 & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_2^l \left[ A_{lm}^2 Y_l^{m(e)}(\theta_2, \varphi) + B_{lm}^2 Y_l^{m(o)}(\theta_2, \varphi) \right] \\
 & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(1+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_2^{m+p}}{D^{1+m+p+1}} Y_{m+p}^{m(e)}(\theta_2, \varphi) \right] \\
 & \quad + D_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(1+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_2^{m+p}}{D^{1+m+p+1}} Y_{m+p}^{m(o)}(\theta_2, \varphi) \right] \\
 & \quad + R_2^{-(1+l)} \left[ C_{lm}^2 Y_l^{m(e)}(\theta_2, \varphi) + D_{lm}^2 Y_l^{m(o)}(\theta_2, \varphi) \right] \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Ici, nous allons exploiter la propriété d'orthogonalité des fonctions harmoniques.

Rappelons, en effet, que :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_1^m(\theta, \varphi) Y_{1'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta$$

$$= 0 \quad \text{si } l \neq l' \text{ et } m \neq m'$$

$$= \frac{4\pi}{\epsilon_m(2l+1)} \left[ \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \right] \quad \text{si } l = l' \text{ et } m = m'$$

$$\text{avec } \begin{cases} \epsilon_0 = 1 \\ \epsilon_m = 2 \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad [7, 14]$$

Cette relation est valable pour  $Y_1^{m(e)}$  et  $Y_1^{m(o)}$

Remarque :

Désormais, afin de simplifier les notations, nous écrivons

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_1^{m(o)}(\theta, \varphi) Y_{1'}^{m'(o)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \left\langle \begin{array}{c|c} m & o \\ \hline 1 & e \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} o & m' \\ \hline e & l' \end{array} \right\rangle_{\theta, \varphi}$$

(2.17)

$$= \frac{4\pi}{\epsilon_m(2l+1)} \left[ \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \right] \delta_{m, m'} \delta_{l, l'}$$

Nous allons donc multiplier les deux membres de la relation (2.16),  
une première fois par  $Y_{1'}^{m'(e)}(\Theta_2 \varphi)$ , puis intégrer,

et ensuite par  $Y_{1'}^{m'(o)}(\Theta_2 \varphi)$ , puis intégrer.

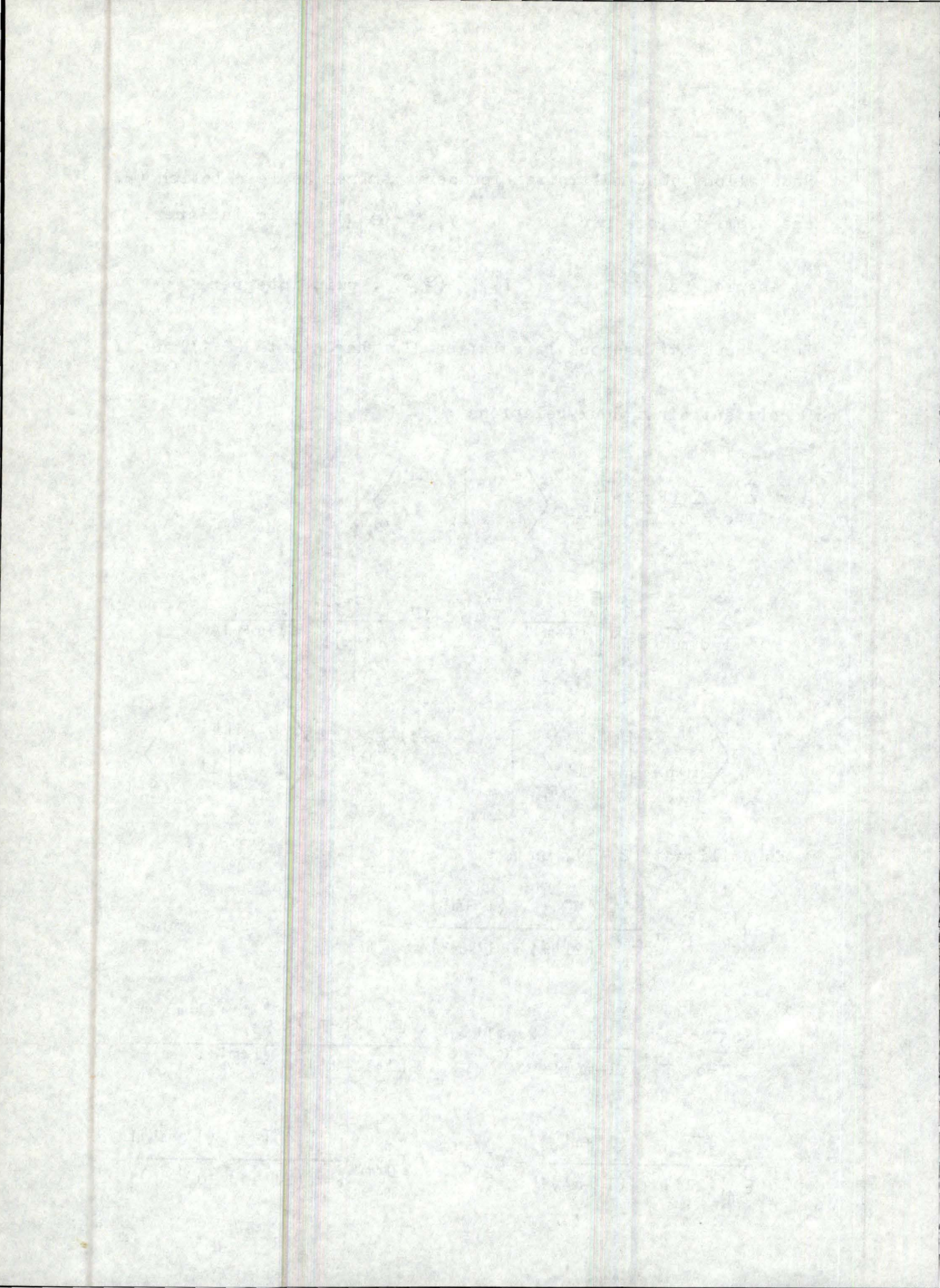
Puis, nous utiliserons la relation d'orthogonalité (2.17) des  $Y_1^m$

On obtient ainsi deux relations :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_2^l A_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} e \middle| e \begin{matrix} m' \\ 1' \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2 \varphi} \\
 & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_2^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} \right. \\
 & \quad \left. \left\langle \begin{matrix} m \\ m+p \end{matrix} e \middle| e \begin{matrix} m' \\ 1' \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2 \varphi} \right] + R_2^{-(l+1)} C_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix} e \middle| e \begin{matrix} m' \\ 1' \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2 \varphi}
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.17), on a :

$$\begin{aligned}
 & R_2^{l'} A_{l'm'}^2 \frac{4\pi}{\epsilon_{m'} (2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!} \\
 & = \sum_{l=0}^{\infty} C_{lm'}^1 \frac{1}{(l-m')!} (-1)^{l'-m'} \frac{(l+m'+l'-m')!}{(2m'+l'-m')!} \frac{R_2^{m'+l'-m'}}{D^{l+m'+l'-m'+1}} \cdot \\
 & \quad \frac{4\pi}{\epsilon_{m'} (2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!} + R_2^{-(l'+1)} C_{l'm'}^2 \frac{4\pi}{\epsilon_{m'} (2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!}
 \end{aligned}$$



En divisant dans les deux membres par  $\frac{4\pi}{\epsilon_m(2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!}$ , on obtient

$$R_2^{l'} A_{l',m'}^2 = \frac{(-1)^{l'-m'} R_2^{l'}}{(m'+1)! D^{l'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{lm'}^1}{(l-m')!} \frac{(l+1)!}{D^l} + C_{l',m'}^2 R_2^{-(l'+1)}$$

(ceci est équivalent à la relation (2.6) lorsque  $m = 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_2^l B_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & & m' \\ & \circ & | & \circ \\ 1 & & l' & \end{matrix} \right\rangle_{\theta_2, \varphi} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l D_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_2^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} \right. \\ & \quad \left. \left\langle \begin{matrix} m & & m' \\ & \circ & | & \circ \\ m+p & & l' & \end{matrix} \right\rangle_{\theta_2, \varphi} \right] + R_2^{-(l+1)} D_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & & m' \\ & \circ & | & \circ \\ 1 & & l' & \end{matrix} \right\rangle_{\theta_2, \varphi} \end{aligned}$$

En utilisant (2.17), on a :

$$\begin{aligned} R_2^{l'} B_{l',m'}^2 & \frac{4\pi}{\epsilon_m(2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} D_{lm}^1 \frac{1}{(l-m)!} (-1)^{l'-m'} \frac{(l+m'+l'-m')!}{(2m'+l-m')!} \frac{R_2^{m'+l'-m'}}{D^{l+m'+l'-m'+1}} \\ & \quad + R_2^{-(l'+1)} D_{l',m'}^2 \frac{4\pi}{\epsilon_m(2l'+1)} \frac{(l'+m')!}{(l'-m')!} \end{aligned}$$



Après simplification, cette relation s'écrit :

(2.19)

$$R_2^{1'} B_{1'm'}^2 = \frac{(-1)^{1'-m'} R_2^{1'}}{(m'+1')! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_{1m'}^1 (1+1')!}{(1-m')! D^1} + D_{1'm'}^2 R_2^{-(1'+1)}$$

Conditions aux limites pour la seconde sphère.

On considère la sphère 2 uniquement, c'est-à-dire comme une sphère isolée et on va exprimer les conditions aux limites sur la surface de cette sphère.

Les équations de Maxwell

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad \text{où } \vec{D} \text{ est le déplacement électrique}$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{où } \vec{E} \text{ est le champ électrique}$$

nous assurent que  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  où  $\epsilon$  est la constante diélectrique qui vaut 1 pour le vide.

La composante normale de  $\vec{D}$ , en tenant compte du fait que  $\vec{D} = -\epsilon \text{ grad } V$ , s'écrit :

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon \frac{\partial V}{\partial R}$$

Les conditions de continuité pour la composante normale de  $\vec{D}$ , dans le cas de la sphère 2, s'exprime par :

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2^{\text{IN}}}{\partial R_2} = \epsilon \frac{\partial V^{\text{OUT}}}{\partial R_2} \quad (2.20)$$

c'est-à-dire que les composantes normales de  $\bar{D}$  à l'extérieur et à l'intérieur de la seconde sphère doivent être égales.

La relation (2.20) s'écrit :

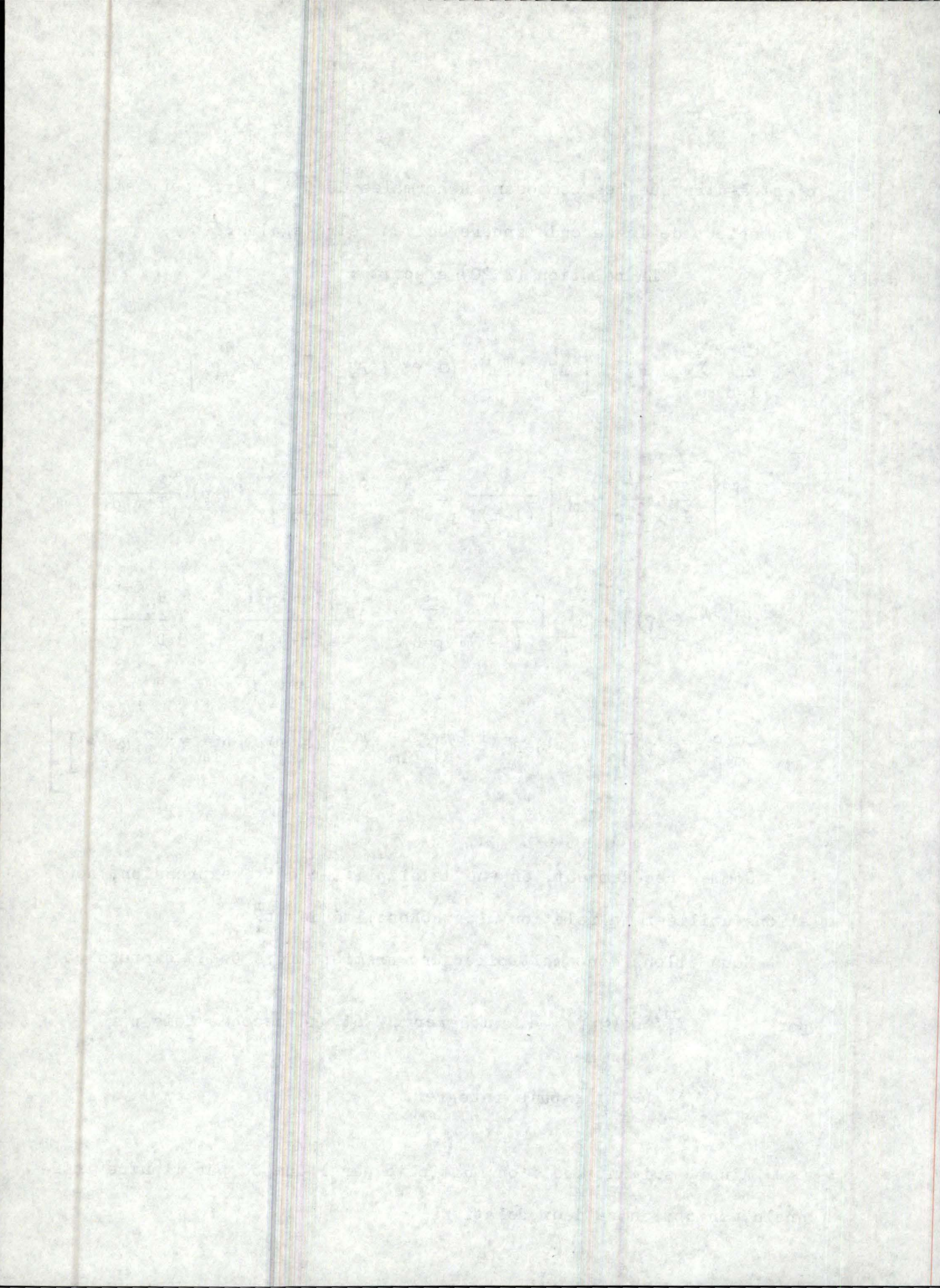
$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_2^{l-1} \left[ A_{lm}^2 Y_1^{m(e)}(\Theta_2 \rho) + B_{lm}^2 Y_1^{m(o)}(\Theta_2 \rho) \right] \epsilon_2 \\ &= \epsilon \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} (m+p) \frac{R_2^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. Y_{m+p}^{m(e)}(\Theta_2 \rho) \right] + D_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} (m+p) \frac{R_2^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. Y_{m+p}^{m(o)}(\Theta_2 \rho) \right] - (l+1) R_2^{-(l+2)} \left[ C_{lm}^2 Y_1^{m(e)}(\Theta_2 \rho) + D_{lm}^2 Y_1^{m(o)}(\Theta_2 \rho) \right] \right] \end{aligned}$$

Comme précédemment, en vue de simplifier cette expression, nous allons utiliser la relation d'orthogonalité des  $Y_1^m$ .

Nous allons donc multiplier une première fois cette expression par  $Y_{1'}^{m'(e)}(\Theta_2 \rho)$  et intégrer, et une seconde fois par

$$Y_{1'}^{m'(o)}(\Theta_2 \rho), \text{ puis intégrer.}$$

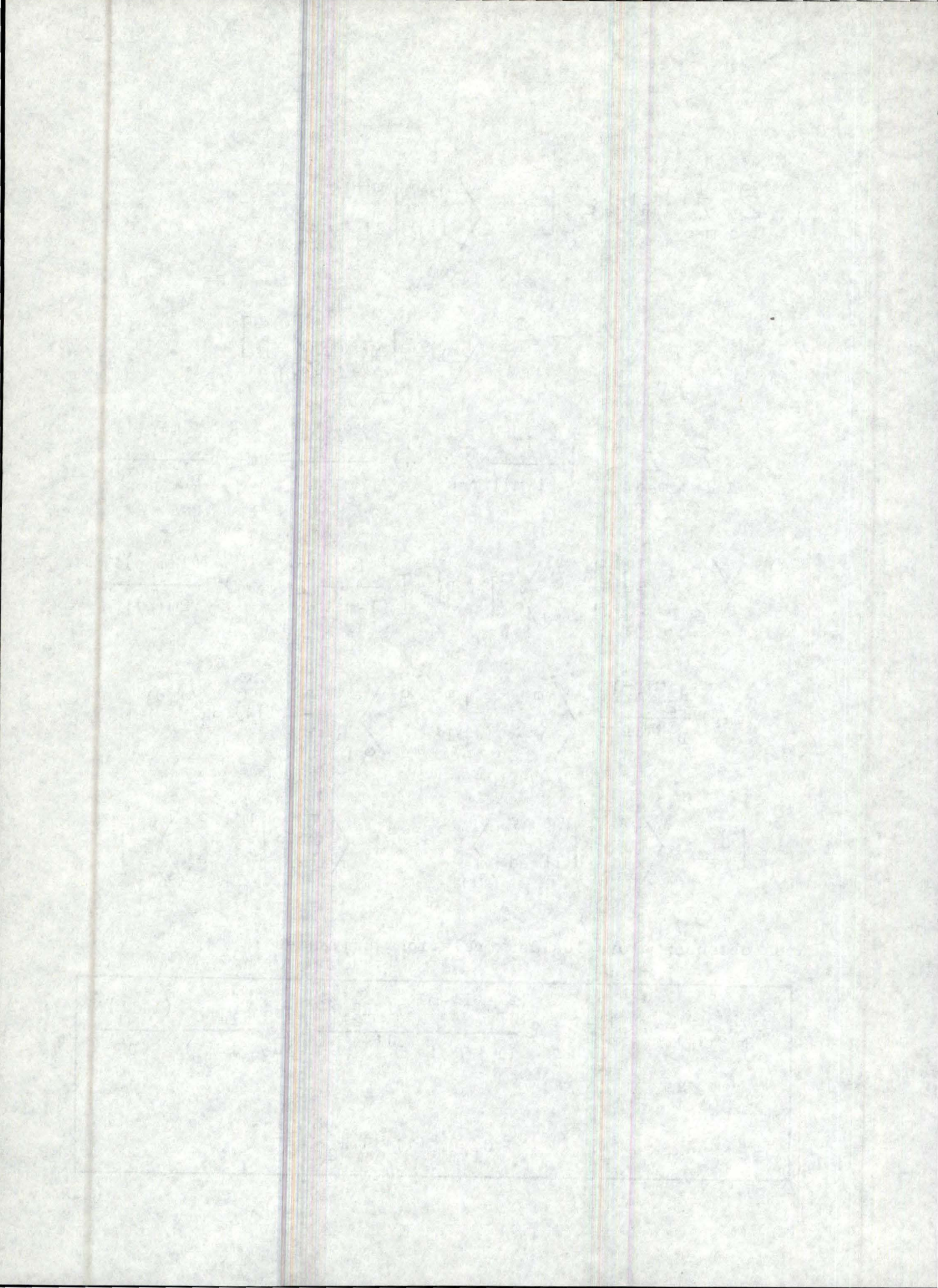
Ainsi, suivant que l'on multiplie par l'une ou par l'autre intégrale, on obtiendra deux relations :



$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l l R_2^{l-1} \epsilon_2 \left[ A_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & e & m' & o \\ 1 & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} \right. \\
& \quad \left. + B_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & & m' & o \\ 1 & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} \right] \\
& = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} (m+p) \frac{R_2^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} \right. \\
& \quad \left. \left\langle \begin{matrix} m & e & m' & o \\ m+p & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} \right] + D_{lm}^1 \left[ \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \right. \\
& \quad \left. (m+p) \frac{R_2^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} \left\langle \begin{matrix} m & & m' & o \\ m+p & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} \right] - (l+1) R_2^{-(l+2)} \\
& \quad \left[ C_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & e & m' & o \\ 1 & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} + D_{lm}^2 \left\langle \begin{matrix} m & & m' & o \\ 1 & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\Theta_2, f} \right]
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 A_{l'm'}^2 l' R_2^{l'-1} &= \epsilon \frac{(-1)^{l'-m'} l' R_2^{l'-1}}{(l'+m')! D^{l'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{lm'}^1 (l+l')!}{(l-m')! D^l} \\
&\quad - \epsilon C_{l'm'}^2 (l'+1) R_2^{-(l'+2)}
\end{aligned}$$



(cette relation (2.21) est équivalente à la relation (2.7) lorsque  $m = 0$ ).

et

$$\varepsilon_2 B_{1'm'}^2 R_2^{l'-1} = \varepsilon \frac{(-1)^{l'-m'} R_2^{l'-1}}{(l'+m')! D^{l'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_{1m'}^1}{(l-m')!} \frac{(l+l')!}{D^l} - \varepsilon D_{1'm'}^2 (l'+1) R_2^{-(l'+2)}$$

(2.22)

Ces deux relations expriment donc la condition de continuité vérifiée par la composante normale de  $\vec{D}$  à la surface de la seconde sphère.

Raccord des potentiels sur la surface de la première sphère.

Nous allons à présent effectuer le raccord des potentiels sur  $r_1 = R_1$ .

Rappelons que :

$$V_1^{IN} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r_1^l \left[ A_{1m}^1 Y_l^{m(e)}(\mathbf{e}_1 \varphi) + B_{1m}^1 Y_l^{m(o)}(\mathbf{e}_1 \varphi) \right]$$

$$V_1^{OUT} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r_1^{-(l+1)} \left[ C_{1m}^1 Y_l^{m(e)}(\mathbf{e}_1 \varphi) + D_{1m}^1 Y_l^{m(o)}(\mathbf{e}_1 \varphi) \right] + r_2^{-(l+1)} \left[ C_{1m}^2 Y_l^{m(e)}(\mathbf{e}_2 \varphi) + D_{1m}^2 Y_l^{m(o)}(\mathbf{e}_2 \varphi) \right]$$

Nous allons procéder d'une manière tout-à-fait analogue à celle utilisée dans le cas de la seconde sphère.

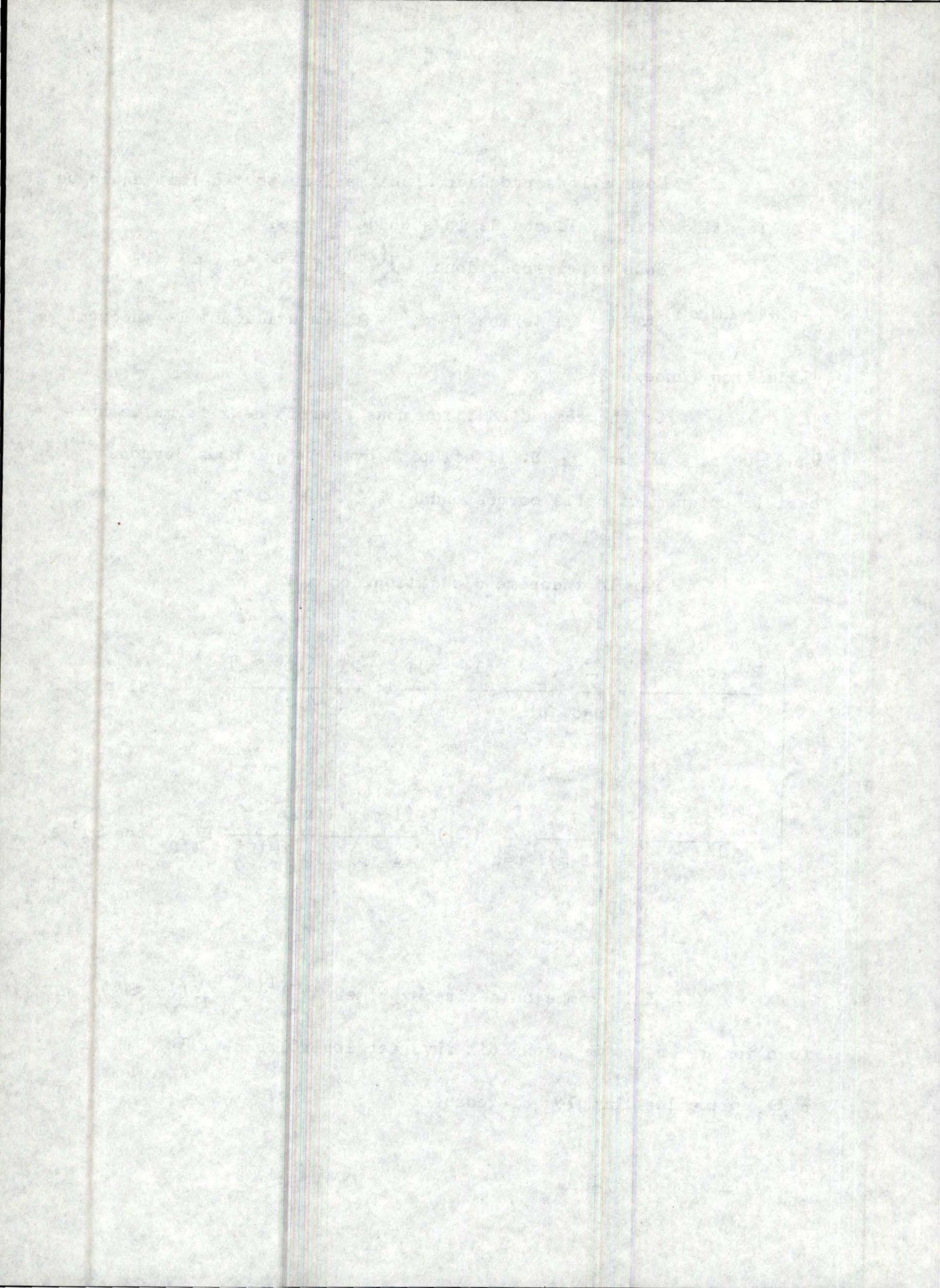
Nous exprimerons donc  $r_2^{-(1+1)} Y_1^{m(e)} (\Theta_2 \varphi)$  et  $r_2^{-(1+1)} Y_1^{m(o)} (\Theta_2 \varphi)$  en termes de  $r_1$  et  $\Theta_1$  en utilisant le théorème d'addition (annexe 2).

Ce théorème d'addition nous fournit deux formules suivant que  $r_1 > D$  ou  $r_1 < D$ . Il est bien évident que nous devons choisir uniquement celle correspondant à  $r_1 = R_1 < D$ .

Par le théorème d'addition, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1^m (\cos \Theta_1)}{r_1^{1+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (1+p-m)!}{p! (1-m)!} D^p \frac{P_{1+p}^m (\cos \Theta_2)}{r_2^{1+p+1}} \quad \text{si } r_2 > D \\ \frac{P_1^m (\cos \Theta_1)}{r_1^{1+1}} = \frac{1}{(1-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(1+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{r_2^{m+p}}{D^{1+m+p+1}} P_{m+p}^m (\cos \Theta_2) \quad \text{si } r_2 < D \end{array} \right.$$

Ici, comme on désire exprimer  $r_2^{-(1+1)} P_1^m (\cos \Theta_2)$  en fonction de  $r_1$  et  $\Theta_1$ , on doit inverser les rôles de  $r_2, \Theta_2$  et de  $r_1, \Theta_1$  dans les formules ci-dessus :





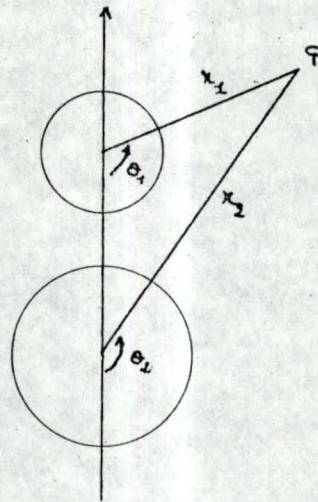
c'est-à-dire que :

$$r_1 \text{ devient } r_2$$

$$r_2 \text{ devient } r_1$$

$$\theta_1 \text{ devient } \pi - \theta_2$$

$$\theta_2 \text{ devient } \pi - \theta_1$$



Le théorème d'addition s'exprime alors de la manière suivante :

$$\frac{P_1^m(-\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (l+p+m)!}{p! (l-m)!} D^p \frac{P_{l+p}^m(-\cos \theta_1)}{r_1^{l+p+1}} \quad r_1 > D$$

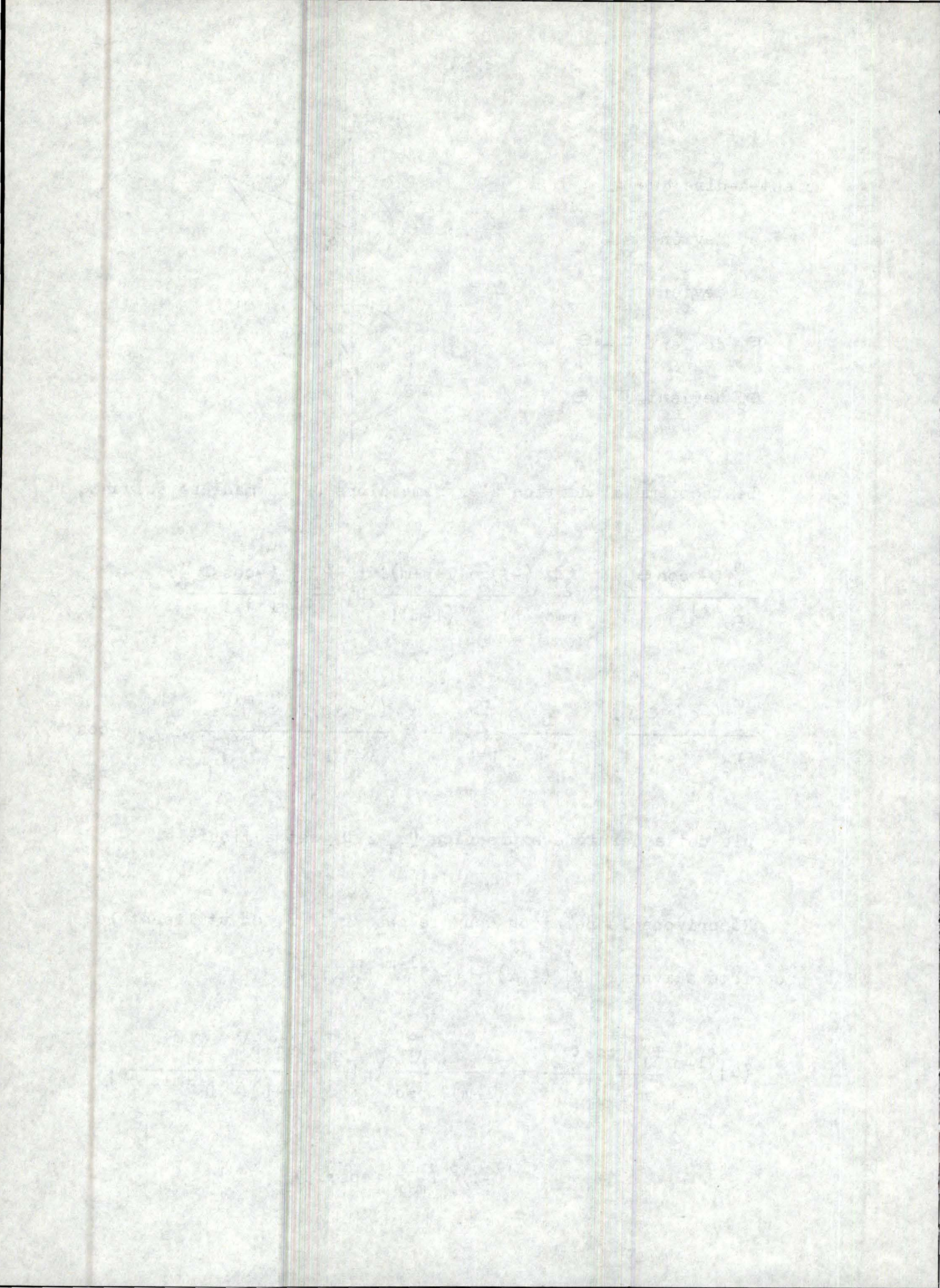
$$\frac{P_1^m(-\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{r_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} P_{m+p}^m(-\cos \theta_1) \quad r_1 < D$$

et seule cette dernière expression ( $r_1 < D$ ) est admissible.

Récrivons la relation dans le cas  $r_1 < D$ , en utilisant la propriété suivante  $P_1^m(-x) = (-1)^{l-m} P_1^m(x)$  :

$$(-1)^{l-m} \frac{P_1^m(\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{r_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} \cdot$$

$$(-1)^p P_{m+p}^m(\cos \theta_1)$$



c'est-à-dire :

$$\frac{P_l^m(\cos \theta_2)}{r_2^{l+1}} = \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{r_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} P_{m+p}^m(\cos \theta_1)$$

En termes des fonctions harmoniques, nous avons donc :

$$\frac{1}{r_2^{l+1}} Y_l^m(e)_{(o)}(\theta_2, \varphi) = \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{r_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} Y_{m+p}^m(e)_{(o)}(\theta_1, \varphi)$$

dans le cas  $r_1 < D$

Moyennant cette formule, exprimons le raccord des potentiels sur la première sphère ( $r_1 = R_1$ ),

c'est-à-dire :  $V_1^{\text{IN}} = V^{\text{OUT}}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^l \left[ A_{lm}^1 Y_l^m(e)_{(e)}(\theta_1, \varphi) + B_{lm}^1 Y_l^m(o)_{(e)}(\theta_1, \varphi) \right]$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^{-(l+1)} \left[ C_{lm}^1 Y_l^m(e)_{(e)}(\theta_1, \varphi) + D_{lm}^1 Y_l^m(o)_{(e)}(\theta_1, \varphi) \right]$$

$$+ C_{1m}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} Y_{m+p}^m(e)_{(e)}(\theta_1, \varphi) \right] \quad (2.23)$$

$$+ D_{1m}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} Y_{m+p}^m(o)_{(e)}(\theta_1, \varphi) \right]$$

Afin de pouvoir simplifier cette expression du raccord des potentiels, nous allons multiplier cette relation une fois par

$$Y_{1'}^{m'}(e)(\theta_1, \rho) \text{ et intégrer, et ensuite par}$$

$$Y_{1'}^{m'}(o)(\theta_1, \rho) \text{ et intégrer et utiliser la relation d'ortho-}$$

gonalité des fonctions harmoniques :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^l \left[ A_{1m}^1 \left\langle \begin{matrix} m & e & o & m' \\ 1 & & e & 1' \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} + B_{1m}^1 \left\langle \begin{matrix} m & o & o & m' \\ 1 & & e & 1' \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} \right] \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^{-(l+1)} \left[ C_{1m}^1 \left\langle \begin{matrix} m & e & m' & o \\ 1 & & 1' & e \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} \right. \\ & \quad \left. + D_{1m}^1 \left\langle \begin{matrix} m & o & o & m' \\ 1 & & e & 1' \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} \right] \\ & + C_{1m}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} \left\langle \begin{matrix} m & e & o & m' \\ m+p & & e & 1' \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} \right] \\ & + D_{1m}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{R_1^{m+p}}{D^{l+m+p+1}} \left\langle \begin{matrix} m & o & o & m' \\ m+p & & e & 1' \end{matrix} \right\rangle_{\theta_1, \rho} \right] \\ \Rightarrow \text{ a) } R_1^{1'} A_{1', m'}^1 & = R_1^{-(1'+1)} C_{1', m'}^1 + \sum_{l=0}^{\infty} C_{1m}^2 \frac{(-1)^{l-m'}}{(l-m')!} \frac{(l+1')!}{(m'+1')!} \frac{R_1^{1'}}{D^{l+1'+1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{1'm'}^1 R_1^{1'} = \frac{(-1)^{m'} R_1^{1'}}{(m'+1')! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1m'}^2 (-1)^l (1+l')!}{(1-m')! D^l} + C_{1'm'}^1 R_1^{-(1'+1)} \quad (2.24)$$

(ceci est équivalent à la relation (2.8) lorsque  $m=0$ ).

$$b) R_1^{1'} B_{1'm'}^1 = D_{1'm'}^1 R_1^{-(1'+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} D_{1'm'}^2 \frac{(-1)^{1-m'} (1+l')!}{(1-m')! (m'+1')!} \frac{R_1^{1'}}{D^{1+1'+1}}$$

$$\Rightarrow R_1^{1'} B_{1'm'}^1 = \frac{(-1)^{-m'} R_1^{1'}}{(m'+1')! \cdot D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_{1m'}^2 (-1)^l (1+l')!}{(1-m')! D^l} + D_{1'm'}^1 R_1^{-(1'+1)} \quad (2.25)$$

Conditions aux limites pour la première sphère.

On considère cette fois la sphère 1 comme étant isolée et on exprime les conditions de continuité pour la composante normale de  $\vec{D}$  sur la surface de la sphère 1

c'est-à-dire :

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1^{\text{IN}}}{\partial R_1} = \epsilon \frac{\partial V^{\text{OUT}}}{\partial R} \quad (2.26)$$

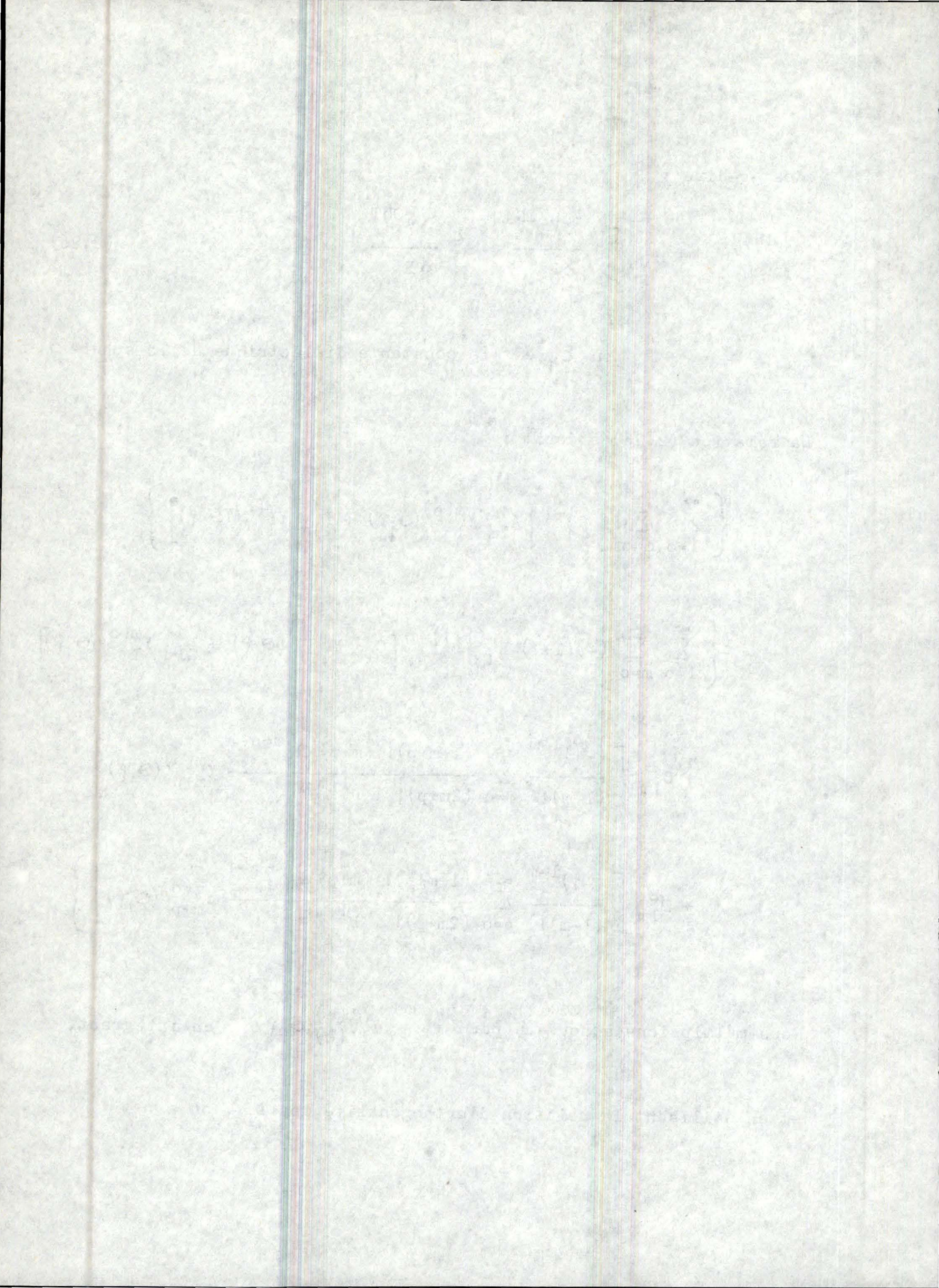
où  $\epsilon_1$  est la constante diélectrique de la sphère 1.

La relation (2.26) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_1^{l-1} \left[ A_{lm}^1 Y_l^{m(e)}(\theta_1, \varphi) + B_{lm}^1 Y_l^{m(o)}(\theta_1, \varphi) \right] \right\} \\ & = \epsilon \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-)(l+1) R_1^{-(l+1)-1} \left[ C_{lm}^1 Y_l^{m(e)}(\theta_1, \varphi) + D_{lm}^1 Y_l^{m(o)}(\theta_1, \varphi) \right] \right. \\ & \quad + C_{lm}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{(m+p) R_1^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} Y_{m+p}^{m(e)}(\theta_1, \varphi) \right] \\ & \quad \left. + D_{lm}^2 \left[ \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+m+p)!}{(2m+p)!} \frac{(m+p) R_1^{m+p-1}}{D^{l+m+p+1}} Y_{m+p}^{m(o)}(\theta_1, \varphi) \right] \right\} \end{aligned}$$

Nous multiplions à nouveau par  $Y_{l'}^{m'}(e)(\theta_1, \varphi)$ , en intégrant,

et en utilisant la relation d'orthogonalité des  $Y_l^m$ , on a :



$$\begin{aligned}
 \text{a) } \epsilon_1 A_{1'm'}^1 R_1^{1'-1} &= \frac{\epsilon (-1)^{-m'} R_1^{1'-1}}{(1'+m')! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1m'}^2 (-1)^l (1+l')!}{(1-m')! D^l} \\
 &- \epsilon C_{1'm'}^1 (1'+1) R_1^{-(1'+1)-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

(ceci est équivalent à la relation (2.9) pour  $m = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \epsilon_1 B_{1'm'}^1 R_1^{1'-1} &= \frac{\epsilon (-1)^{-m'} R_1^{1'-1}}{(1'+m')! D^{1'+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_{1m'}^2 (-1)^l (1+l')!}{(1-m')! D^l} \\
 &- \epsilon D_{1'm'}^1 (1'+1) R_1^{-(1'+1)-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

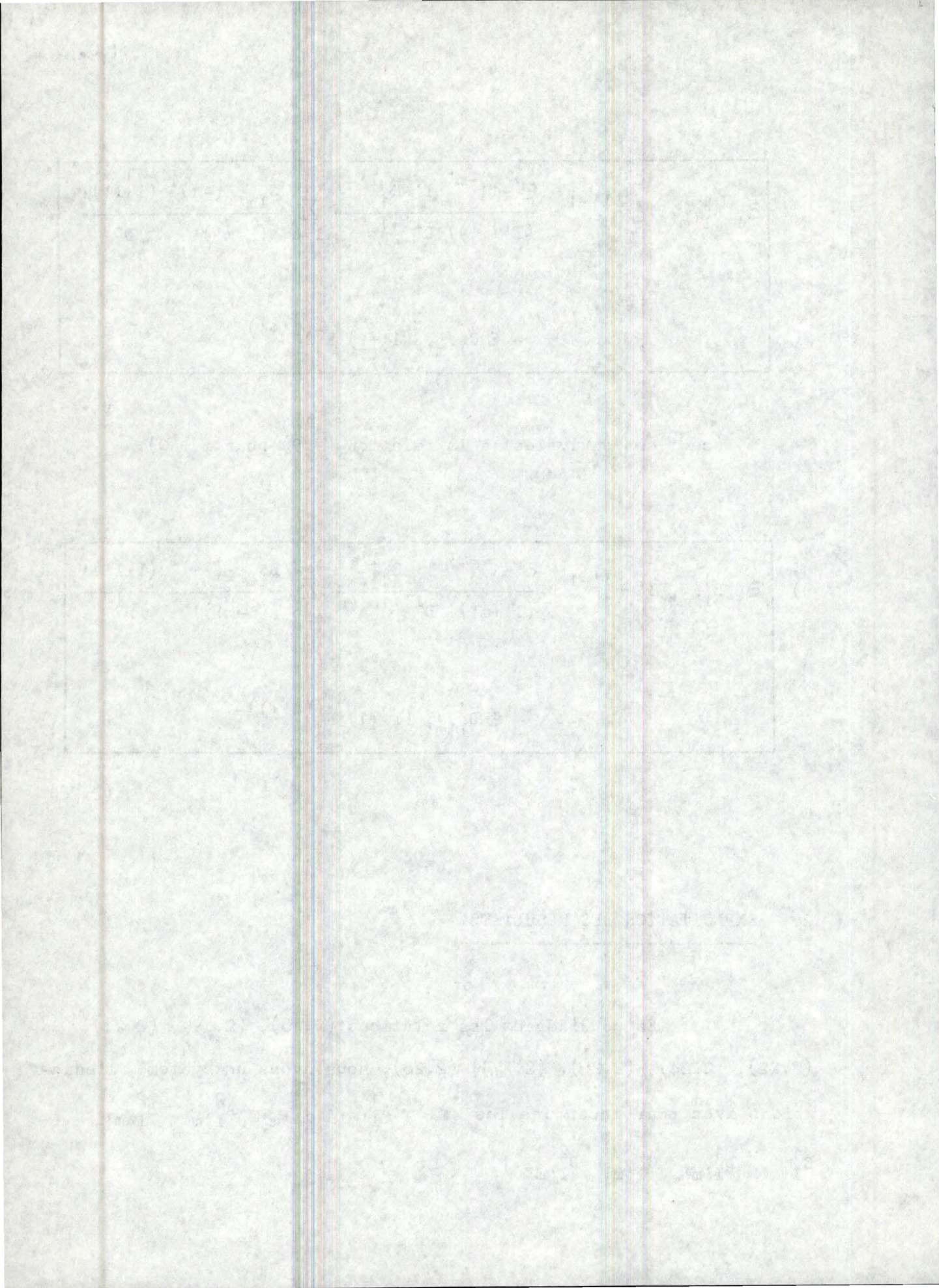
## 2. - EXPLOITATION DES RESULTATS.

---

En considérant les relations (2.18), (2.19), (2.21), (2.22), (2.24), (2.25), (2.27), (2.28), nous avons un système d'équations avec pour inconnues les :

$$A_{1'm'}^1, B_{1'm'}^1, A_{1'm'}^2, B_{1'm'}^2, C_{1'm'}^1, D_{1'm'}^1, C_{1'm'}^2, D_{1'm'}^2.$$





Pour le résoudre, nous allons procéder de la manière suivante :

- nous allons d'abord éliminer l'inconnue  $A_{1,m}^2$ , des équations (2.18) et (2.21). Nous obtiendrons ainsi une seule équation comprenant les inconnues  $C_{1,m}^1$ , et  $C_{1,m}^2$ .

- ensuite, nous éliminerons  $A_{1,m}^1$ , des équations (2.24) et (2.27) et nous obtiendrons ainsi une seule équation comprenant aussi les deux inconnues  $C_{1,m}^1$ , et  $C_{1,m}^2$ .

- en mettant les deux résultats précédents ensemble, nous parviendrons à obtenir finalement une seule équation en  $C_{1,m}^1$ , par exemple.

Si nous procédons de l'autre manière, à savoir :

- éliminer  $B_{1,m}^2$ , entre (2.19) et (2.22) pour obtenir l'équation en  $D_{1,m}^1$ , et  $D_{1,m}^2$ ,

- éliminer  $B_{1,m}^1$ , entre (2.25) et (2.28) pour obtenir une équation en  $D_{1,m}^1$ , et  $D_{1,m}^2$ ,

dans ce cas, nous constatons que l'équation en  $D_{1,m}^1$ , résultant des deux équations en  $D_{1,m}^1$ , et  $D_{1,m}^2$ , est exactement identique à l'équation en  $C_{1,m}^1$ , trouvée en premier lieu.

Afin de simplifier les notations, nous allons dans ce qui suit remplacer  $l'$ ,  $m'$ ,  $l$  par  $l$ ,  $m$ ,  $k$  respectivement.

Les équations (2.18) et (2.21) nous donnent :

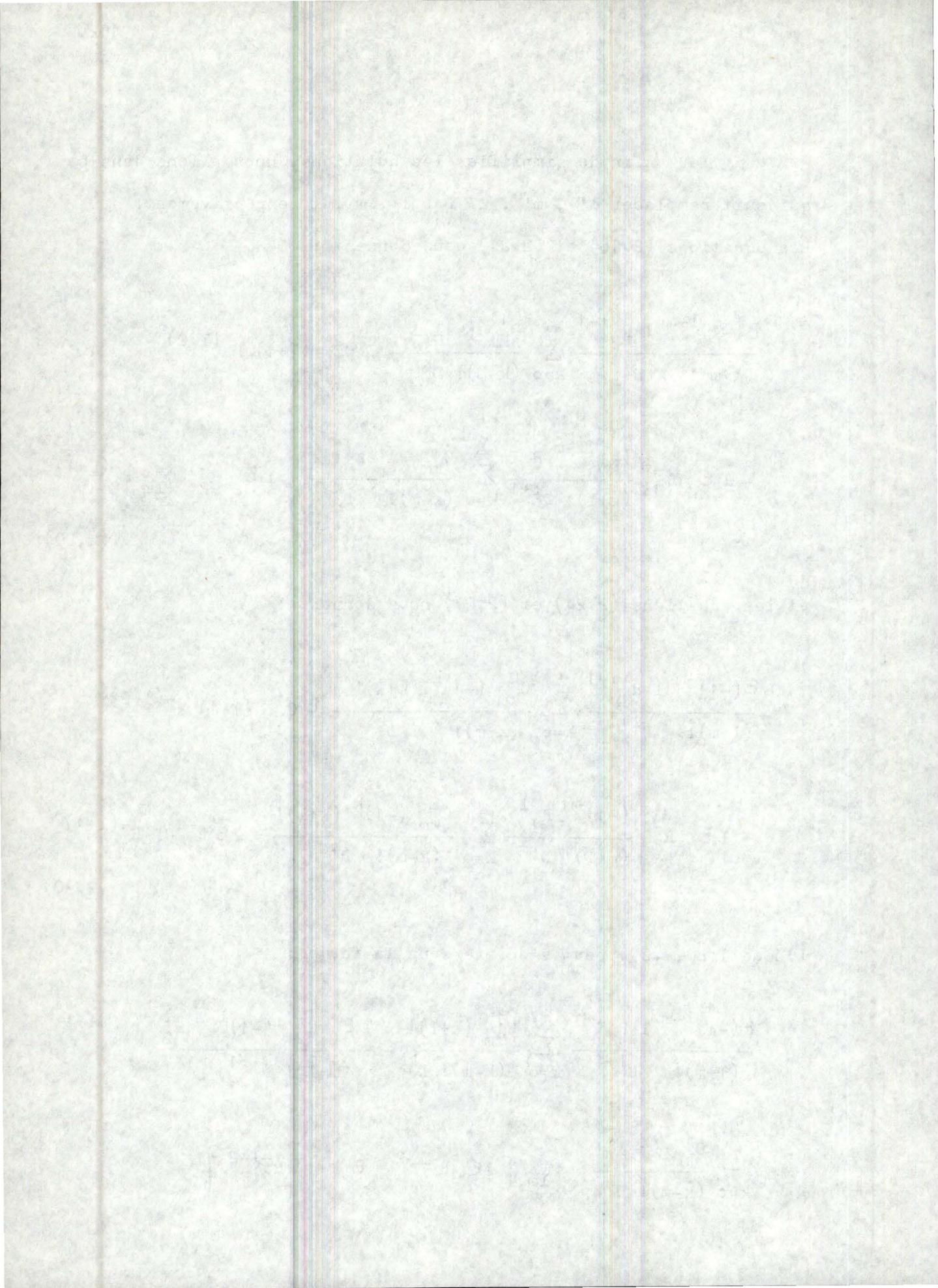
$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon (-1)^{l-m}}{(l+m)!} \frac{1 R_2^{l-1}}{D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k} - C_{1m}^2 (l+1) R_2^{-(l+2)} \\ &= 1 \varepsilon_2 R_2^{-1} \frac{(-1)^{l-m} R_2^l}{(m+1)! D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k} + 1 \varepsilon_2 R_2^{-1} C_{1m}^2 R_2^{-(l+1)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

et les équations (2.24) et (2.27) nous donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon (-1)^{-m}}{(l+m)!} \frac{1 R_1^{l-1}}{D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^2 (-1)^k (k+1)!}{(k-m)! D^k} - \varepsilon C_{1m}^1 (l+1) R_1^{-(l+2)} \\ &= 1 \varepsilon_1 R_1^{-1} \frac{(-1)^{-m} R_1^l}{(m+1)! D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^2 (-1)^k (k+1)!}{(k-m)! D^k} + 1 \varepsilon_1 R_1^{-1} C_{1m}^1 R_1^{-(l+1)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'équation (2.29) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon (-1)^{l-m}}{(l+m)!} \frac{1 R_2^{l-1}}{D^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k} - \frac{1 \varepsilon_2 R_2^{-1} (-1)^{l-m} R_2^l}{(m+1)! D^{l+1}} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k} = C_{1m}^2 \left[ 1 \varepsilon_2 R_2^{-l-2} + \varepsilon (l+1) R_2^{-l-2} \right] \end{aligned}$$



ou encore, en multipliant par  $\left\{ (-1)^{1-m} R_2^{-1+1} D^{1+1} (1+m)! \right\}$

$$1 (\varepsilon - \varepsilon_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k}$$

$$= C_{1m}^2 [1 \varepsilon_2 + \varepsilon(1+1)] R_2^{-2l-1} D^{1+1} (1+m)! (-1)^{1-m}$$

et, donc, on peut en déduire l'expression de  $C_{km}^2$

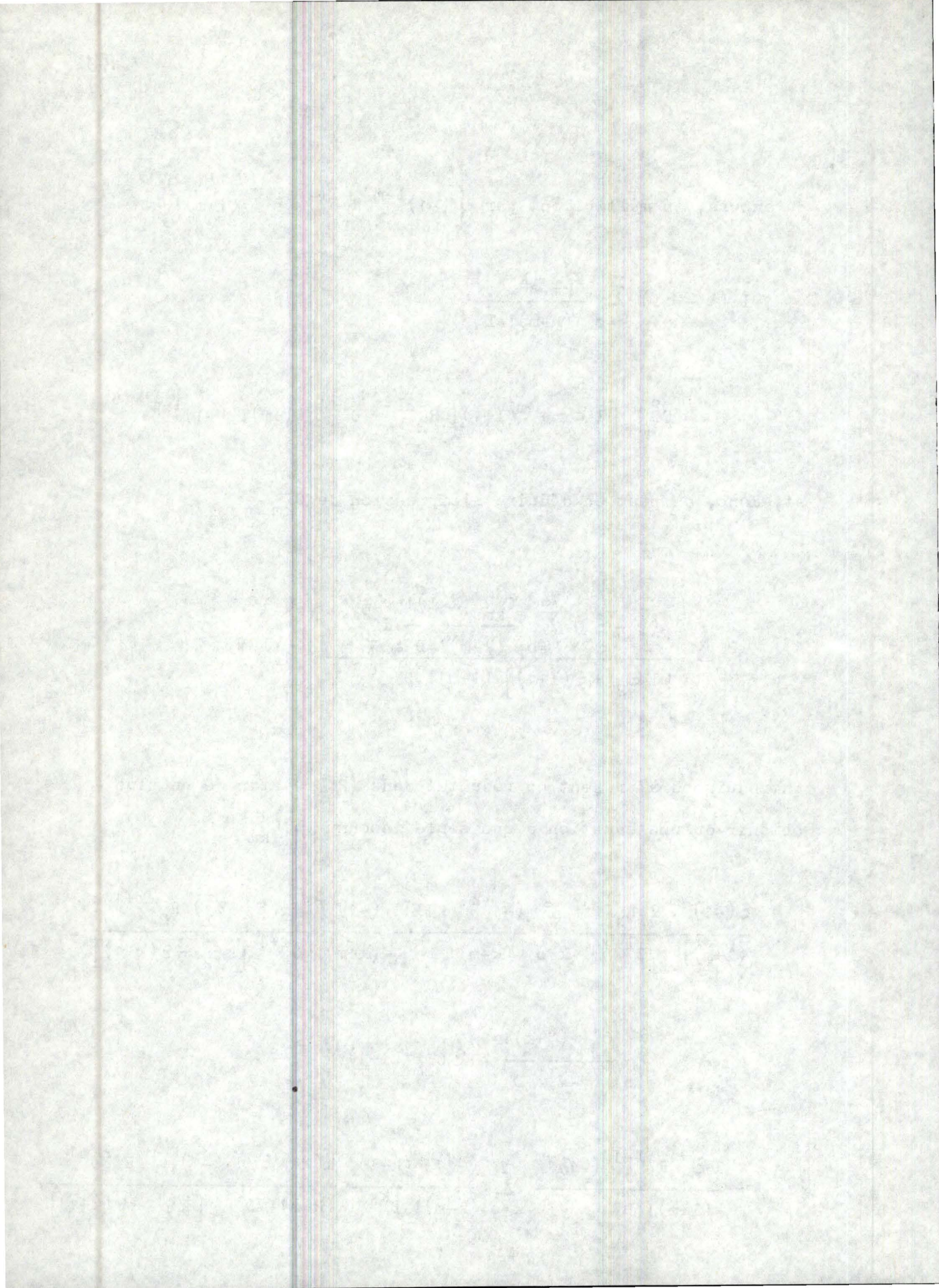
$$C_{1m}^2 = \frac{1 (\varepsilon - \varepsilon_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{km}^1 (k+1)!}{(k-m)! D^k} R_2^{2l+1}}{[1 \varepsilon_2 + \varepsilon(1+1)] (1+m)! D^{1+1}} (-1)^{1-m}$$

Introduisons à présent ce résultat dans (2.30) afin de ne plus obtenir qu'une équation à une seule inconnue :  $C_{km}^1$

$$\frac{\varepsilon (-1)^{-m} 1 R_1^{1-1}}{(1+m)! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)! (-1)^{k-m} k(\varepsilon - \varepsilon_2) R_2^{2k+1}}{(k-m)! D^k (k+m)! D^{k+1} [k\varepsilon_2 + \varepsilon(k+1)]}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{jm}^1 (j+k)!}{(j-m)! D^j} - \varepsilon C_{1m}^1 (1+1) R_1^{-(1+2)}$$

$$= \frac{1 \varepsilon_1 R_1^{1-1} (-1)^{-m}}{(1+m)! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)! k(\varepsilon - \varepsilon_2) (-1)^{k-m} R_2^{2k+1}}{(k-m)! D^k (k+m)! D^{k+1} [k\varepsilon_2 + \varepsilon(k+1)]}$$

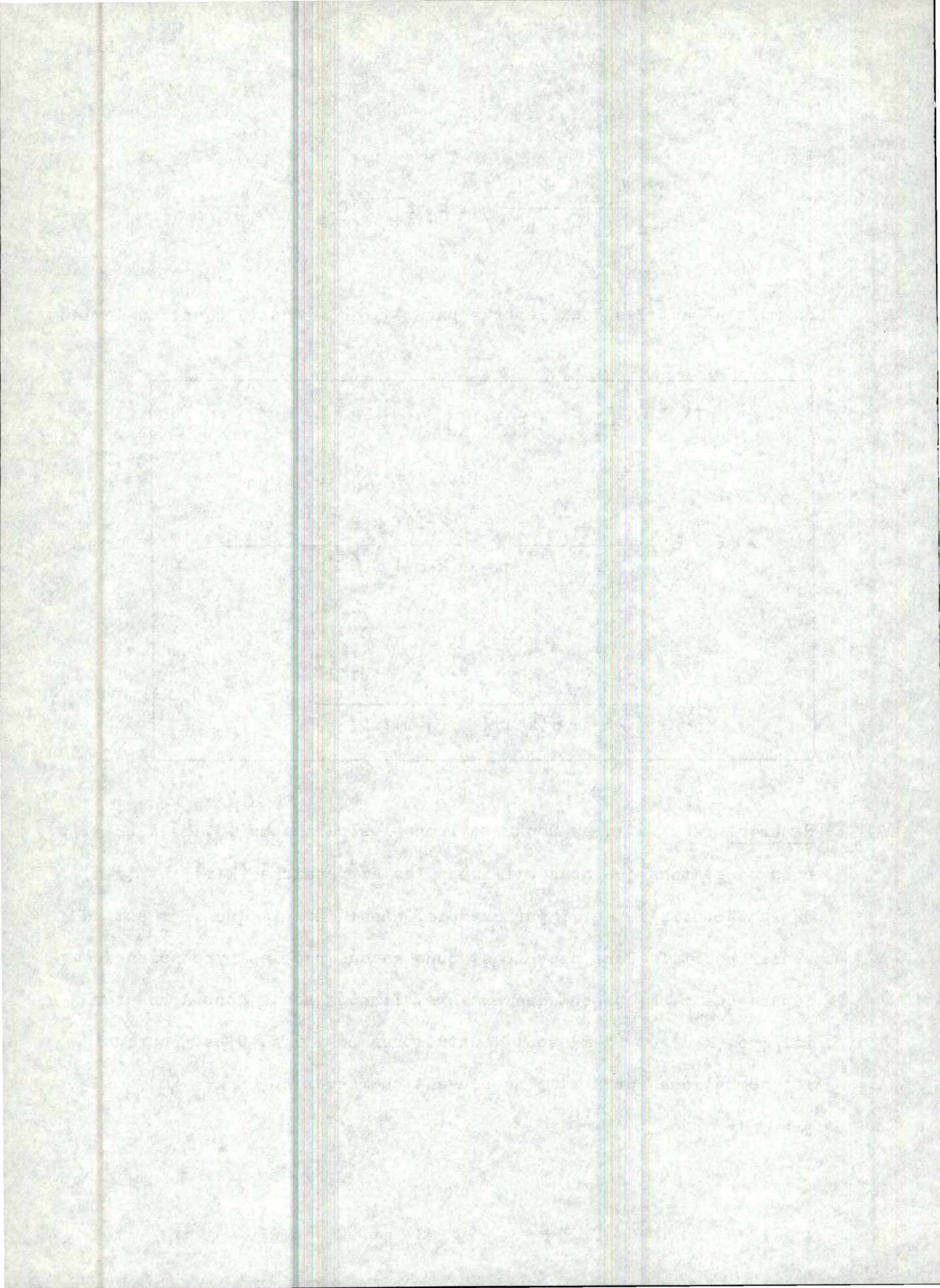


$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{jm}^1 (j+k)!}{(j-m)! D^j} + 1 \epsilon_1 R_1^{-1-2} c_{1m}^1$$

En multipliant les deux membres par  $(-1)^m R_1$ , cette équation devient

$$\begin{aligned} & c_{1m}^1 R_1^{-(1+1)} [1 \epsilon_1 + \epsilon(1+1)] \\ &= (\epsilon - \epsilon_1) \frac{1 R_1^1}{(1+m)! D^{1+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)! k R_2^{2k+1} (\epsilon - \epsilon_2)}{(k-m)! D^{2k+1} (k+m)!} \\ & \frac{1}{[k \epsilon_2 + \epsilon(k+1)]} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} c_{jm}^1 (j+k)!}{(j-m)! D^j} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Remarque : En fait, si nous examinons les relations (2.18) à (2.31), nous constatons que nous utilisons les expressions  $(k-m)!$  et  $(j-m)!$ . Or la factorielle de  $x$ , par exemple, n'est définie que si  $x$  est un entier positif. Dans notre cas, nous savons par les hypothèses de départ que  $m$ ,  $k$ ,  $j$  sont des entiers. Il nous reste donc à assurer ici que  $(k-m)$  et  $(j-m)$  sont deux nombres positifs. C'est pourquoi les sommations sur  $k$  et  $j$  ne peuvent commencer qu'en  $k = |m|$  et  $j = |m|$ .





Expression de l'équation en  $C_{jm}^1$

En tenant compte à présent de la remarque formulée ci-avant, nous pouvons exprimer la relation (2.31) sous forme d'une équation en  $C_{jm}^1$ .

En multipliant (2.31) par  $\frac{(l+m)! D^{l+1}}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) R_1^l}$ , nous obtenons :

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k-m)!} \frac{k R_2^{2k+1} 1}{D^{2k+1} (k+m)! [k\epsilon_2 + \epsilon(k+1)]} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_{jm}^1 (j+k)!}{(j-m)! D^j} - C_{lm}^1 \frac{R_1^{-(l+1)}}{R_1^l} \frac{[l\epsilon_1 + \epsilon(l+1)]}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)} D^{l+1} (l+m)! = 0$$

Ceci peut s'écrire finalement comme :

$$\sum_{j=m}^{\infty} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k (k+1) R_2^{2k+1} (j+k)! 1}{(k-m)! (k+m)! D^{2k+1+j} (j-m)! [k\epsilon_2 + \epsilon(k+1)]} - \frac{(l+m)! D^{l+1} R_1^{-(l+1)} [l\epsilon_1 + \epsilon(l+1)]}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) R_1^l} \delta_{j,l} \right\} C_{jm}^1 = 0$$

(2.32)

Nous trouvons finalement une équation (2.32) qui peut s'écrire sous forme plus condensée comme étant :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{1j}^{(m)} C_{jm}^1 = 0 \quad \text{avec } A_{1j}^{(m)} = 0 \quad j < |m| \quad (2.33)$$

Nous avons donc trouvé un système d'équations homogènes. On a une équation pour chaque valeur de  $l$  considérée.

La condition pour que ce système infini d'équations admette une solution non triviale est que le déterminant des coefficients du système soit nul.

Nous devons donc imposer que :

$$\boxed{\det A_{1j}^{(m)} = 0}$$

où les  $A_{1j}^{(m)}$  sont donnés par :

$$A_{1j}^{(m)} = \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{k(k+1)! R_2^{2k+1} (j+k)! l}{(k-m)! (k+m)! D^{2k+1+j} (j-m)! [k\epsilon_2 + \epsilon(k+1)]}$$

$$- \frac{(1+m)! D^{1+1} [1\epsilon_1 + \epsilon(1+1)] \delta_{1,j}}{(\epsilon - \epsilon_1) (\epsilon - \epsilon_2) R_1^{2l+1}}$$

Ecrivons le système (2.33) sous une autre forme :

$$\sum_{j=m}^{\infty} \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k(k+1)!}{(k-m)!(k+m)!} \left(\frac{R_2}{D}\right)^{2k+1} \frac{(j+k)!}{(j-m)!} \frac{1}{[k\varepsilon_2 + \varepsilon(k+1)]} \right. \\ \left. - \frac{(1+m)!}{(\varepsilon - \varepsilon_1)} \frac{1 + (1+1)}{(\varepsilon - \varepsilon_2)} \left(\frac{D}{R_1}\right)^{2l+1} \delta_{1,j} \right\} \frac{C_{jm}^1}{D^j} = 0$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R_2 \quad (\text{les deux sphères ont même rayon}) \\ \frac{R}{D} = s \quad s_2 = \frac{R_2}{D} \quad s_1 = \frac{R_1}{D} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1 \end{array} \right.$$

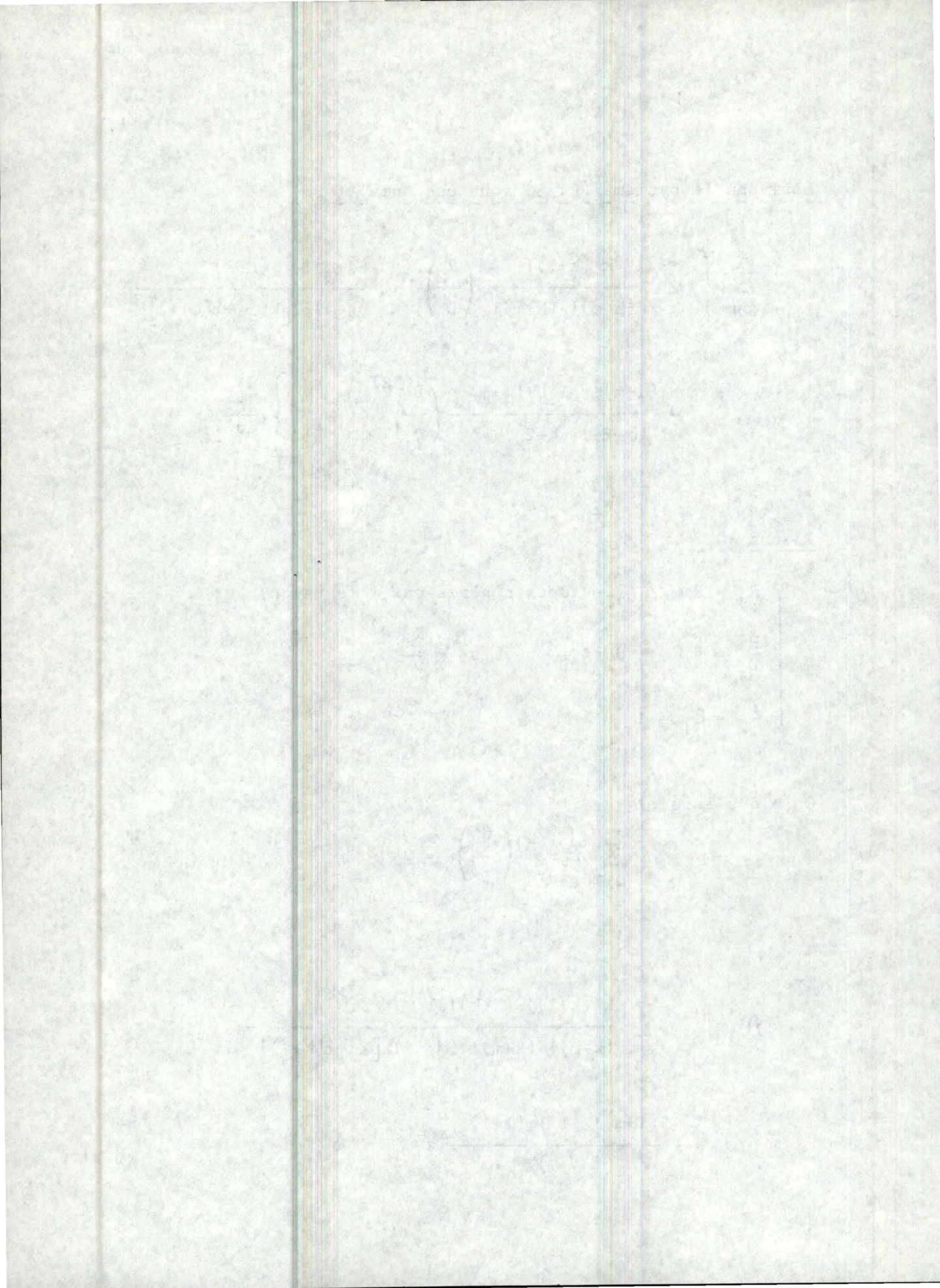
On a dès lors :

$$\sum_{j=m}^{\infty} A'_{1j}{}^{(m)} \left( \frac{C_{jm}^1}{D^j} \right) = 0$$

avec

$$A'_{1j}{}^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k(k+1)! (j+k)!}{(k-m)!(k+m)!(j-m)!} \frac{s_2^{2k+1}}{[k + \varepsilon(k+1)]}$$

$$- \frac{(1+m)!}{(\varepsilon - 1)^2} \frac{1 + (1+1)}{s_1^{-(2l+1)}} \delta_{1,j} \quad (j \geq m)$$



et

$$A'_{lj}^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} a'_{lj}{}^{k(m)} \frac{s_2^{2k+1}}{k+(k+1)} - \frac{(l+m)! [1+(l+1)\epsilon]}{(\epsilon-1)^2} s_1^{-(2l+1)} \delta_{l,j} \quad (j \geq m)$$

$$\text{avec } a'_{lj}{}^{k(m)} = \frac{k(k+1)! (j+k)! l}{(k-m)! (k+m)! (j-m)!}$$

En divisant  $A'_{lj}^{(m)}$  par  $(l+m)!$ , on obtient :

$$A_{lj}^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} a_{lj}{}^{k(m)} \frac{s_2^{2k+1}}{[k+(k+1)\epsilon]} - \frac{l+(l+1)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} s_1^{-(2l+1)} \delta_{l,j} \quad (j \geq m)$$

$$\text{avec } a_{lj}{}^{k(m)} = \frac{k(k+1)! (j+k)! l}{(k-m)! (k+m)! (j-m)! (l+m)!}$$

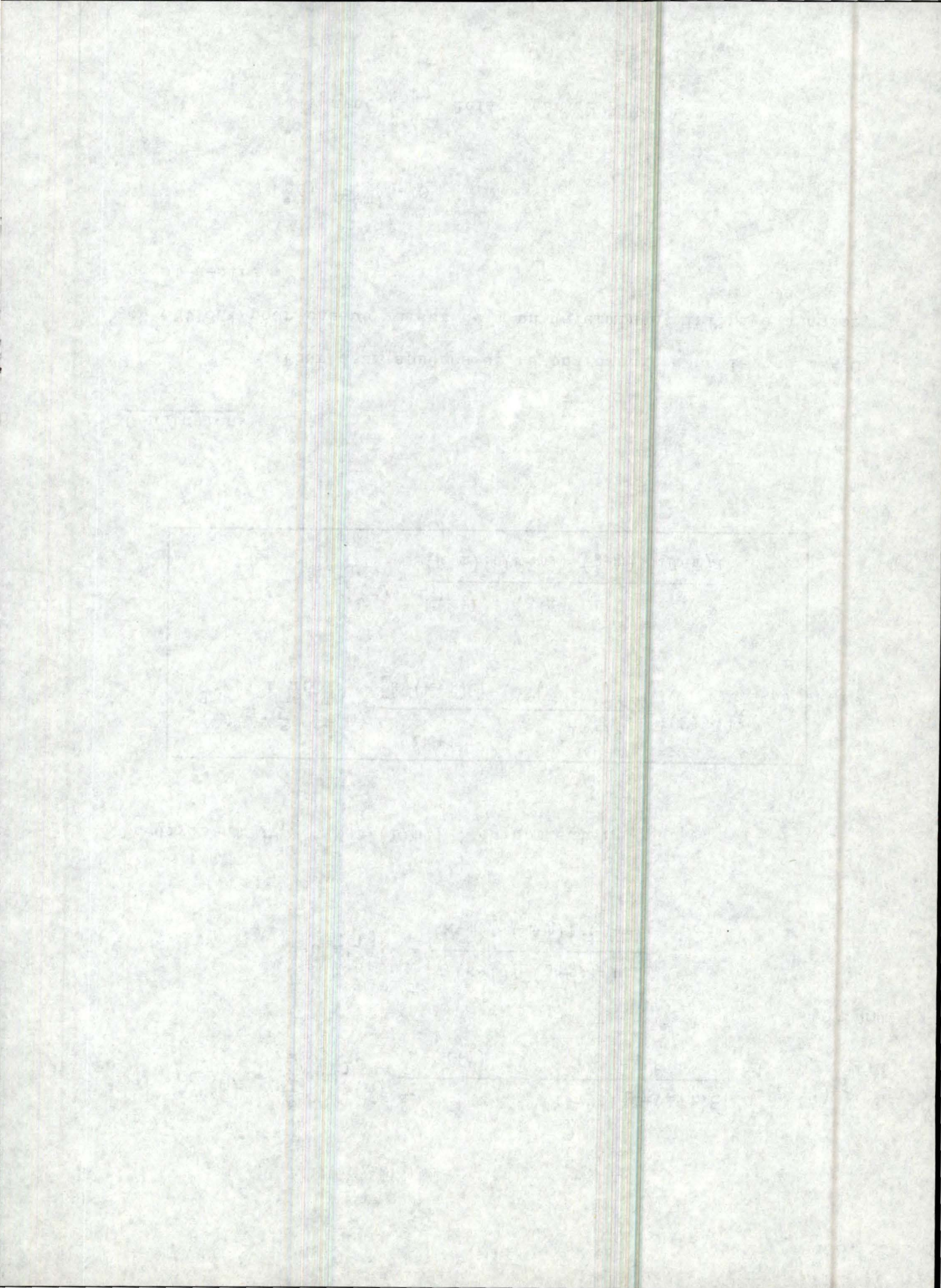
(2.34)

### Conclusion.

Pour deux sphères de rayons égaux, dans le cas  $m \neq 0$ , on obtient pour chaque valeur de  $m$  un déterminant infini à annuler, c'est-à-dire :

$$\det A_{lj}^{(m)} = 0$$

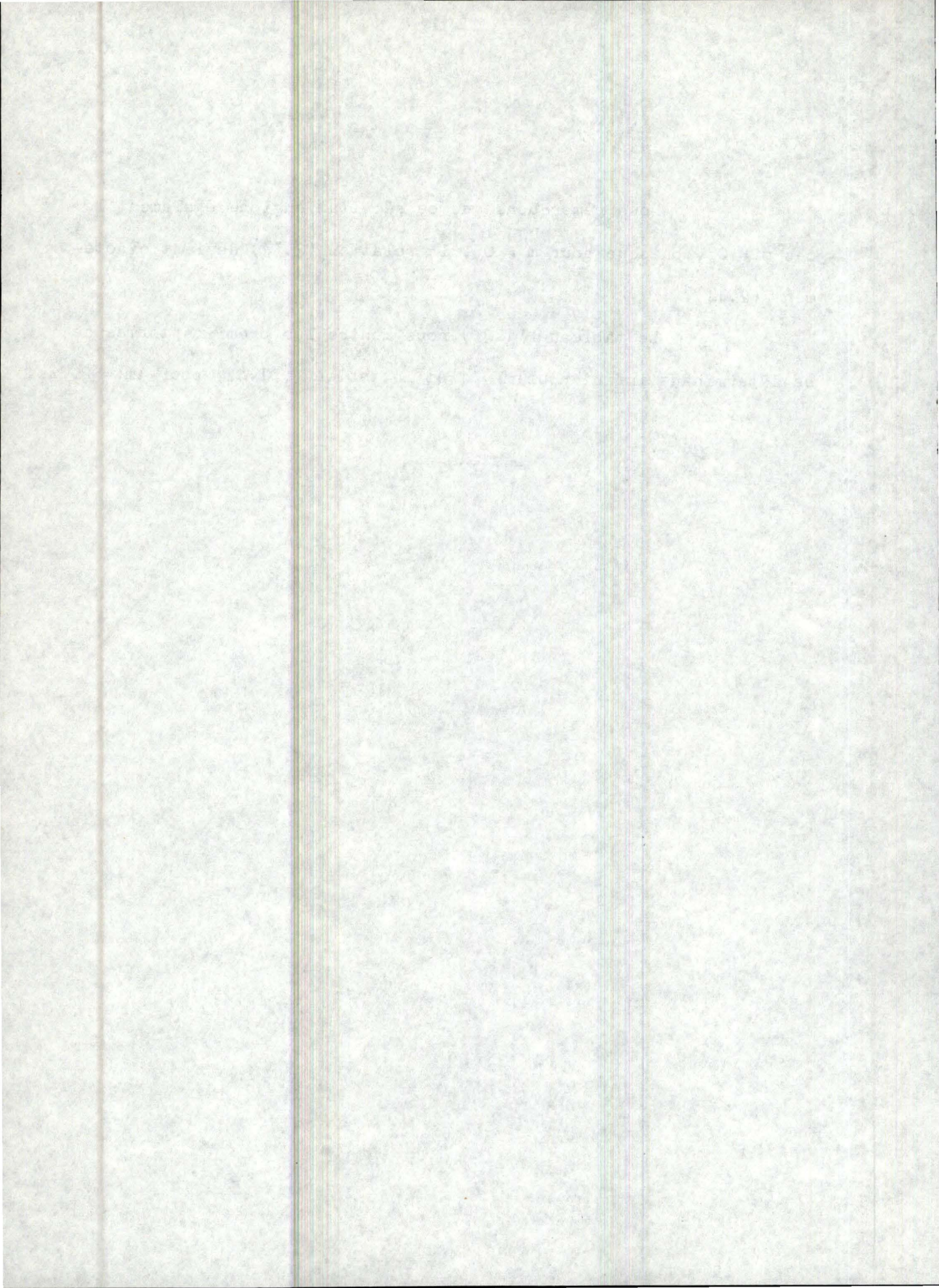
avec  $A_{lj}^{(m)}$  défini par (2.34)



Nous remarquons que ce résultat englobe également le cas  $m = 0$ , puisque pour  $m = 0$ , la relation (2.34) devient exactement (2.14).

Le tableau ( T.3 ) nous montre les premiers termes de ce déterminant infini pour  $|m| = 1$  et le tableau ( T.4 ) pour  $|m| = 2$ .

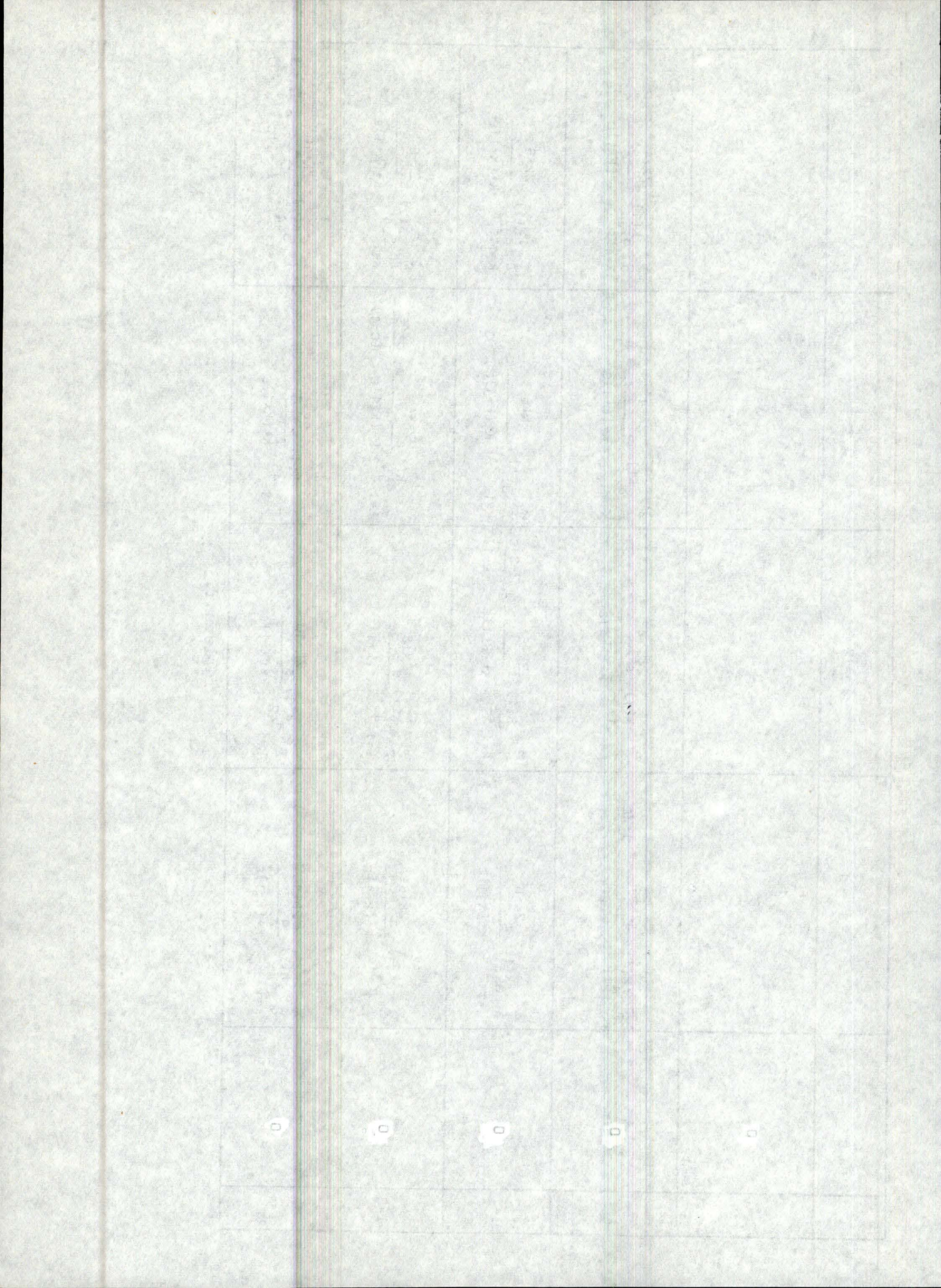
=====





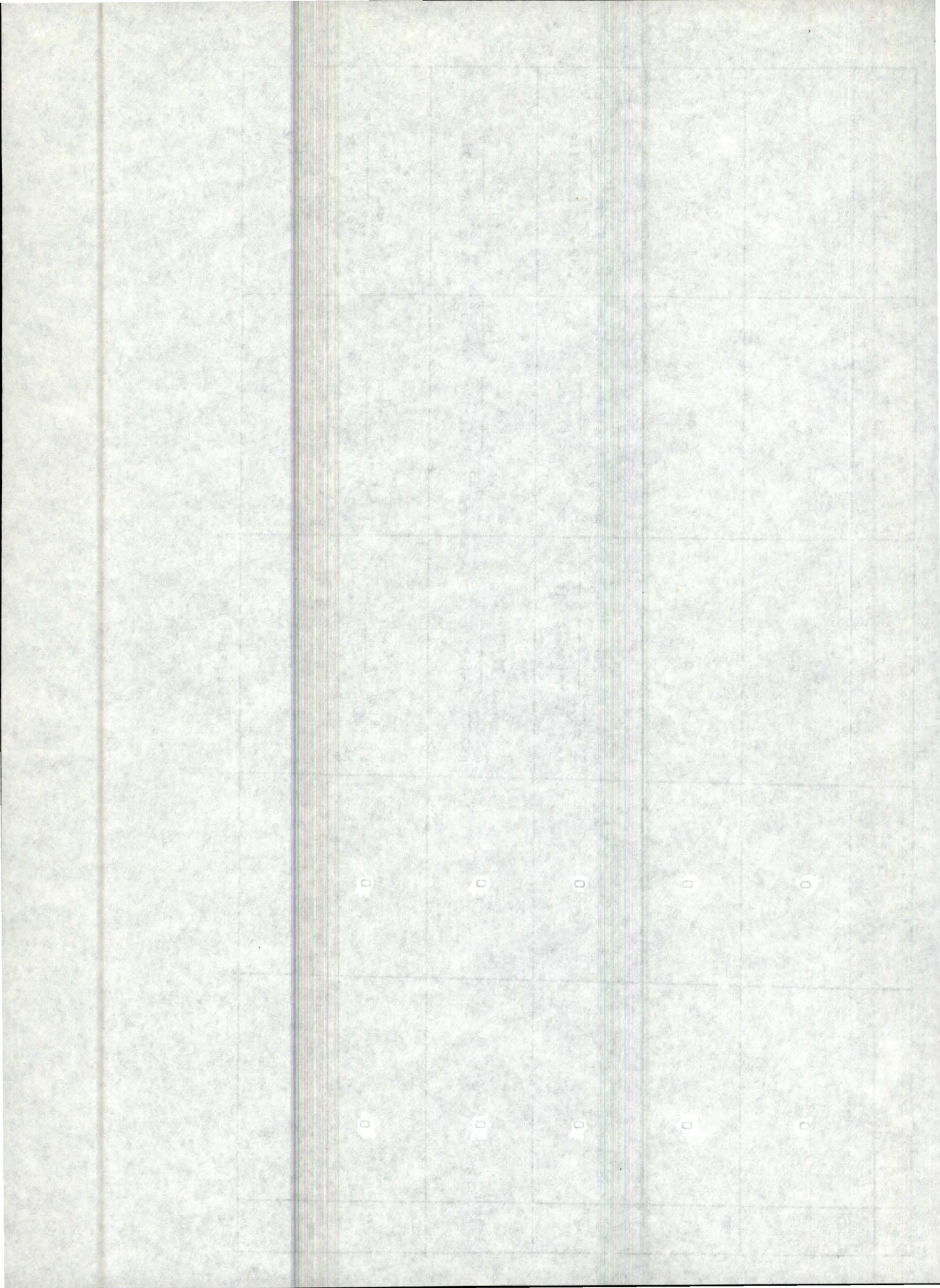
|     | j = 0 | j = 1                                                                                                     | j = 2                                                                                                     | j = 3                                                                                                     | j = 4                                                                                                      |
|-----|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| l=0 | -     | 0                                                                                                         | 0                                                                                                         | 0                                                                                                         | 0                                                                                                          |
| l=1 | -     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{k(1)} \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{1+2\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{k(1)} \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{13}^{k(1)} \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{14}^{k(1)} \frac{s^{2k+4}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| l=2 | -     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{k(1)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{k(1)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{2+3\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{k(1)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{24}^{k(1)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| l=3 | -     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{31}^{k(1)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{32}^{k(1)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{33}^{k(1)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{3+4\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{34}^{k(1)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| l=4 | -     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{41}^{k(1)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{42}^{k(1)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{43}^{k(1)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=1}^{\infty} a_{44}^{k(1)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{4+5\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ |

Tableau T.3



|       | $j = 0$ | $j = 1$ | $j = 2$                                                                                                   | $j = 3$                                                                                                   | $j = 4$                                                                                                    |
|-------|---------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l=0$ |         |         | o                                                                                                         | o                                                                                                         | o                                                                                                          |
| $l=1$ |         |         | o                                                                                                         | o                                                                                                         | o                                                                                                          |
| $l=2$ |         |         | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{22}^{k(2)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{2+3\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{23}^{k(2)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{24}^{k(2)} \frac{s^{2k+6}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| $l=3$ |         |         | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{32}^{k(2)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                      | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{33}^{k(2)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{3+4\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{34}^{k(2)} \frac{s^{2k+8}}{k+(k+1)\epsilon}$                                       |
| $l=4$ |         |         | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{42}^{k(2)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{43}^{k(2)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon}$                                     | $\sum_{k=2}^{\infty} a_{44}^{k(2)} \frac{s^{2k+10}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{4+5\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ |

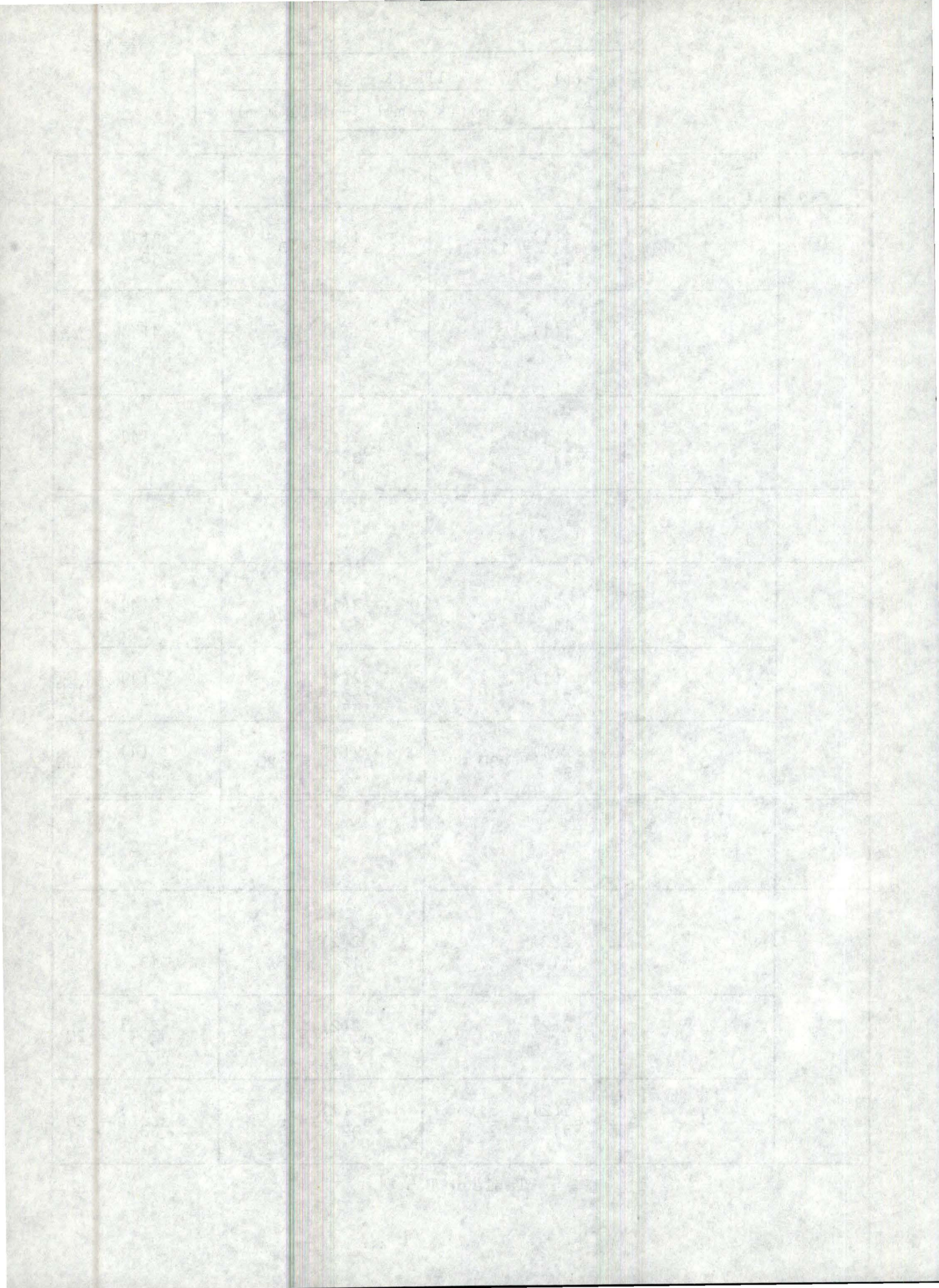
Tableau T.4



$$a_{1j}^{k(m)} = \frac{k(k+1)!(k+j)!1}{(k-m)!(k+m)!(j-m)!(1+m)!}$$

|                    |          |                               |                       |                       |
|--------------------|----------|-------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $m = 1$<br>$k = 1$ | $j$<br>1 | 1                             | 2                     | 3                     |
|                    | 1        | $a_{11}^{1(1)} = 1$           | $a_{12}^{1(1)} = 3$   | $a_{13}^{1(1)} = 6$   |
|                    | 2        | $a_{21}^{1(1)} = 2$           | $a_{22}^{1(1)} = 6$   | $a_{23}^{1(1)} = 12$  |
|                    | 3        | $a_{31}^{1(1)} = 3$           | $a_{32}^{1(1)} = 9$   | $a_{33}^{1(1)} = 18$  |
| $k = 2$            | $j$<br>1 | 1                             | 2                     | 3                     |
|                    | 1        | $a_{11}^{2(1)} = 6$           | $a_{12}^{2(1)} = 24$  | $a_{13}^{2(1)} = 60$  |
|                    | 2        | $a_{21}^{2(1)} = 16$          | $a_{22}^{2(1)} = 64$  | $a_{23}^{2(1)} = 160$ |
|                    | 3        | $a_{31}^{2(1)} = 30$          | $a_{32}^{2(1)} = 120$ | $a_{33}^{2(1)} = 300$ |
| $m = 2$<br>$k = 2$ | $j$<br>1 | 1                             | 2                     | 3                     |
|                    | 1        | $a_{11}^{2(2)} = \frac{1}{2}$ | $a_{12}^{2(2)} = 2$   | $a_{13}^{2(2)} = 10$  |
|                    | 2        | $a_{21}^{2(2)} = 1$           | $a_{22}^{2(2)} = 4$   | $a_{23}^{2(2)} = 20$  |
|                    | 3        | $a_{31}^{2(2)} = \frac{3}{2}$ | $a_{32}^{2(2)} = 6$   | $a_{33}^{2(2)} = 30$  |

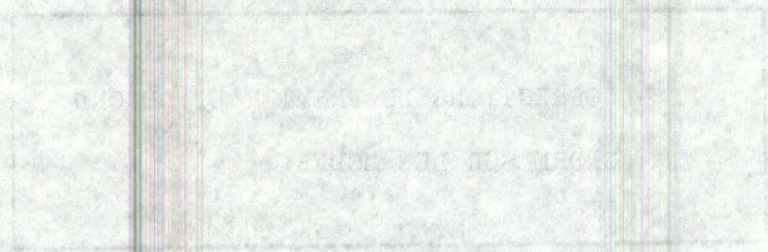
Tableau T.5



II - CORRECTIONS DU PREMIER ET SECOND  
ORDRE SUR LES MODES.

Nous avons déterminé jusqu'à présent quelle est, pour les différentes valeurs de  $|m|$  l'expression du déterminant infini à annuler. Ce qui nous intéresse maintenant, c'est de connaître pour ces différents  $|m|$  la valeur de  $\epsilon$  qui rend le déterminant nul. Dans ce but, nous considérons le premier déterminant ( $2 \times 2$ ) qui apparaît dans le déterminant infini et on cherche les valeurs de  $\epsilon$  qui l'annule. Lorsqu'on parle d'"annuler" un déterminant infini, cela signifie qu'on l'annule effectivement jusqu'à un ordre  $r$  donné en  $s$  ; c'est pourquoi il est légitime de se limiter à un déterminant ( $2 \times 2$ ) pour trouver les  $\epsilon$  qui annulent le déterminant infini à l'ordre  $r$ . En effet, si on prend un déterminant ( $3 \times 3$ ) ou de dimension plus élevée et si pour calculer les  $\epsilon$  qui l'annulent on se limite à l'ordre  $r$  en  $s$ , on constate qu'on ne considère en fait rien d'autre que le premier déterminant ( $2 \times 2$ ). Ainsi, on détermine d'abord la première correction de  $\epsilon$  pour des valeurs de  $|m|$  et  $l$  tout-à-fait quelconques. Ensuite, on établira la seconde correction pour  $\epsilon$  qui, elle, est valable dans les cas  $|m|, l = |m|$  et  $|m|, l = |m| + 1$ .

Ecrivons en premier lieu la forme générale (c'est-à-dire  $\forall |m|$ ) d'un déterminant ( $2 \times 2$ ) situé le long de la "diagonale" du déterminant infini. Il ne s'agit donc pas nécessairement du pre-





mier déterminant (2 x 2) rencontré lorsqu'on regarde le tableau infini.

On a :

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{1,1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+2}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{1+(1+1)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \right]$$

$$\cdot \left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{1+1,1+1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{(1+1)+(1+2)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \right] \quad (2.1)$$

$$- \left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{1,1+1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+2}}{k+(k+1)\epsilon} \right] \left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{1+1,1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} \right] = 0$$

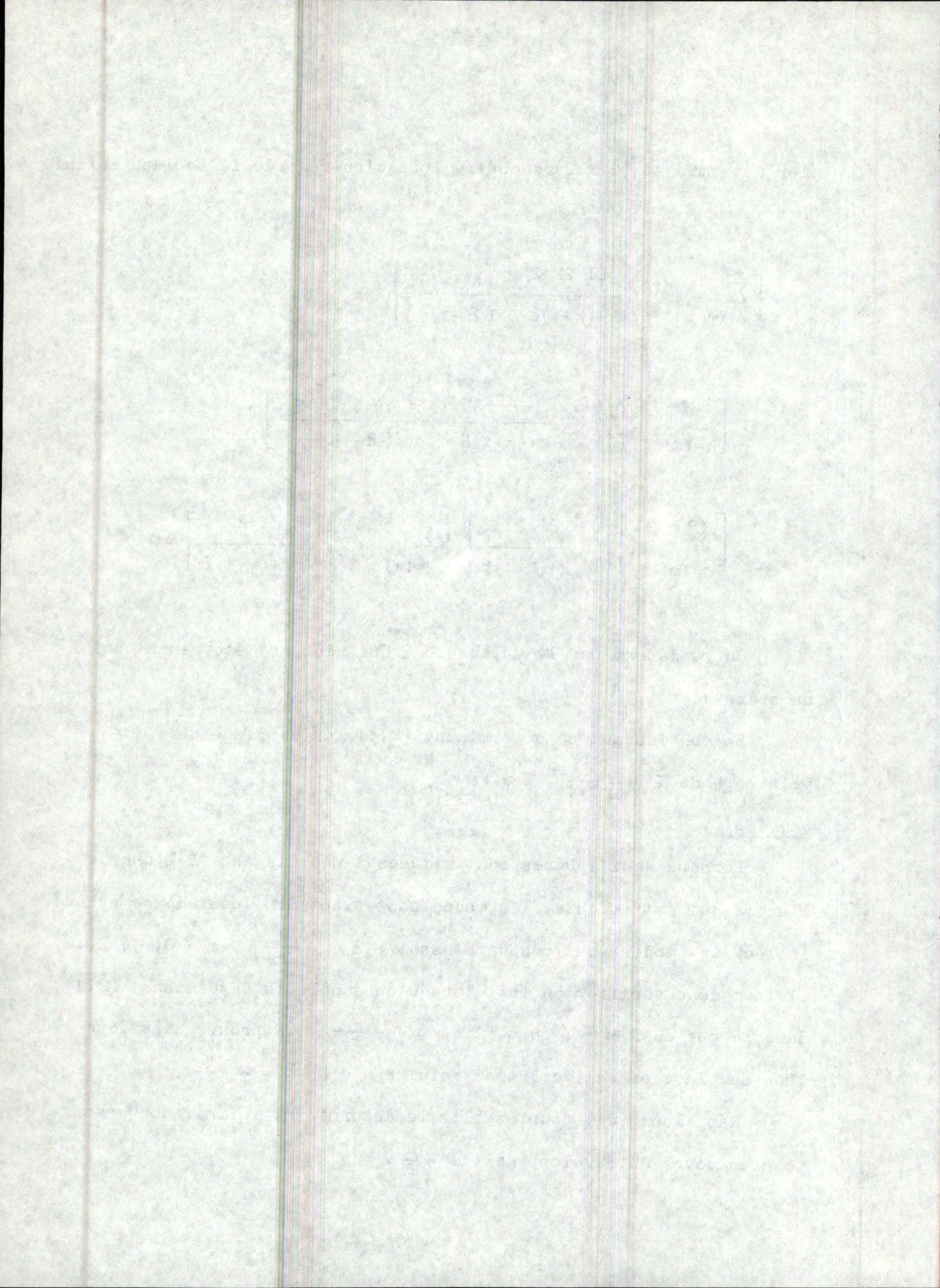
On va déterminer la valeur de  $\epsilon$  qui rend ce déterminant nul à un ordre donné.

En considérant ce déterminant (2.1), on se place en fait au voisinage de  $\epsilon = -\frac{1}{1+1}$ ,  $l \geq |m|$

En effet :

Lorsque deux sphères sont situées à une distance  $D$  l'une de l'autre qui est infinie, les modes sont exactement ceux d'une sphère isolée. Ces modes sont connus et sont :  $\epsilon = -\frac{1}{1+1}$   $l = 0, 1, 2, \dots$   
Il faut donc vérifier qu'ici, lorsqu'on annule le déterminant (2.1) dans le cas où  $D \rightarrow \infty$ , on obtient  $\epsilon = -\frac{1}{1+1}$ . On prouve ainsi que l'on se place effectivement au voisinage d'un  $\epsilon = -\frac{1}{1+1}$ .

Rappelons que, pour établir le déterminant infini, nous avons posé au cours du développement  $s = \frac{R}{D}$ .



Par conséquent, lorsque  $D \rightarrow \infty$ , on a  $s \rightarrow 0$ .

Pour  $s \rightarrow 0$ , (2.1) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1 + (1+1)\epsilon}{(\epsilon - 1)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{(1+1) + (1+2)\epsilon}{(\epsilon - 1)^2} \end{vmatrix}$$

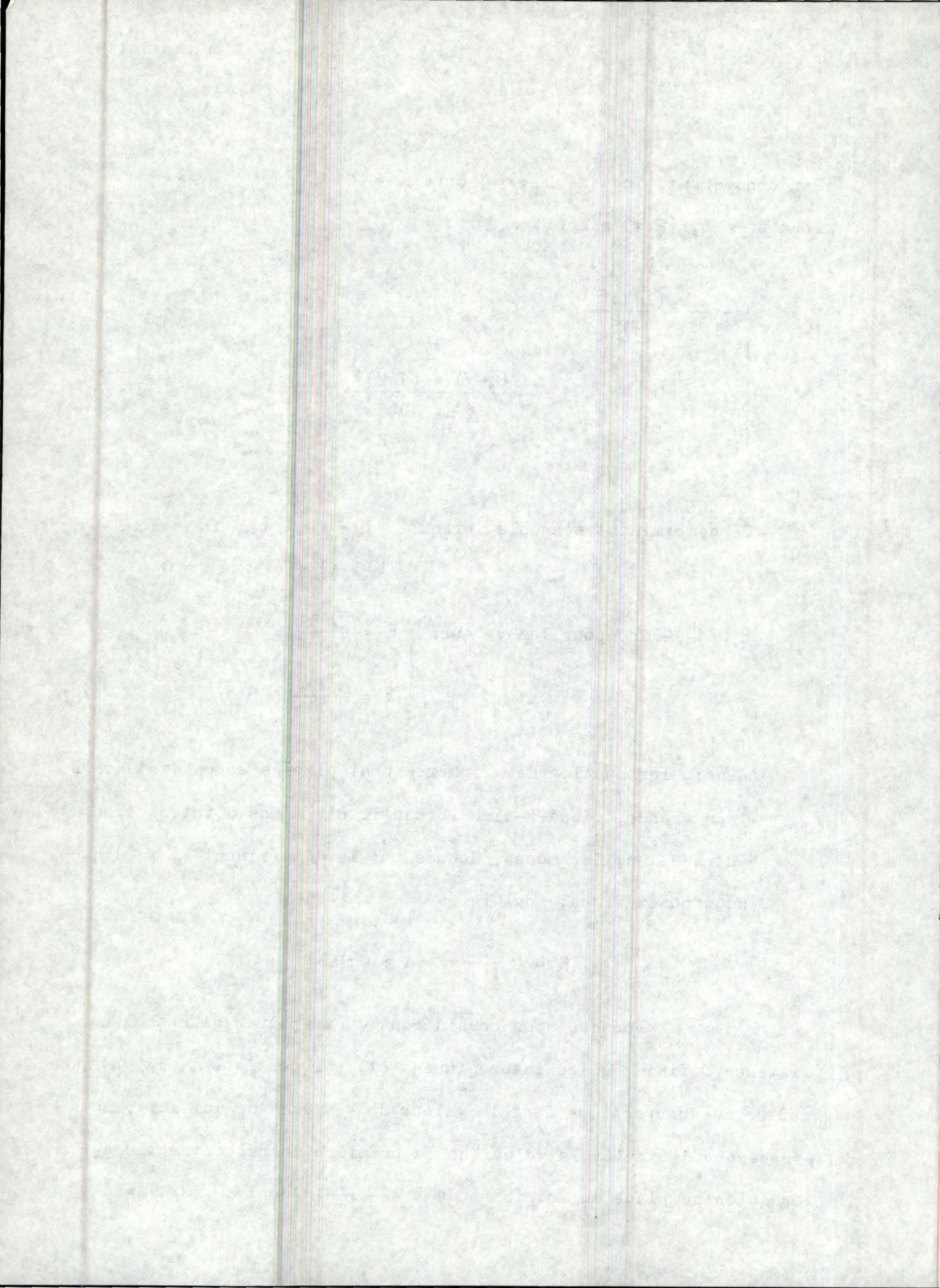
Ce déterminant s'annule lorsque 
$$\begin{cases} 1 + (1+1)\epsilon = 0 \\ (1+1) + (1+2)\epsilon = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire pour les valeurs 
$$\begin{cases} \epsilon = -\frac{1}{1+1} \\ \epsilon = -\frac{1+1}{1+2} \end{cases} \quad \text{avec } l \geq |m|$$

Ainsi, lorsque les deux sphères sont placées à une distance  $D$  très grande, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre elles, les modes, donnés par le déterminant ( $2 \times 2$ ) que nous considérons, sont :

$$\epsilon = -\frac{1}{1+1} \quad l \geq |m|$$

Lorsque nous considérons deux sphères situées à une distance  $D$  finie, elles interagissent et, par conséquent, il va apparaître des corrections dans la valeur de  $\epsilon$ . Dans ce qui suit, nous essayerons d'établir la valeur de la première de ces corrections lorsqu'on se place au voisinage de  $\epsilon = -\frac{1}{1+1}$  avec  $l \geq |m|$ .



VALEUR DE LA PREMIERE CORRECTION EN "s".

=====

Pour la déterminer, nous suivrons la procédure suivante :

On se place au voisinage de  $\epsilon = -\frac{1}{1+1} \quad 1 \gg |m|$

On suppose alors qu'il existe une correction pour le  $\epsilon$ , que l'on note  $X s^N$  avec  $X$  et  $N$  inconnus. D'où :  $\epsilon = -\frac{1}{1+1} + X s^N$ .

Dans un premier temps, on détermine  $N$  et ensuite la valeur de  $X$ .

Pour connaître l'exposant  $N$  de  $s$ , on examine toutes les puissances de  $s$  qui interviennent dans le déterminant (2.1).

Afin d'avoir compatibilité entre les puissances et puisqu'on exige que le déterminant (2.1) soit nul jusqu'à un ordre donné en  $s$ , donc notamment à l'ordre le plus bas, on impose que  $N$  soit égal à la plus petite puissance intervenant dans le déterminant (2.1).

On détermine alors le coefficient  $X$  de sorte que le déterminant (2.1) limité aux termes d'ordre  $N$  (connu) soit nul exactement.

On obtient ainsi une équation où la seule inconnue est  $X$ , ce qui nous permet de la déterminer.

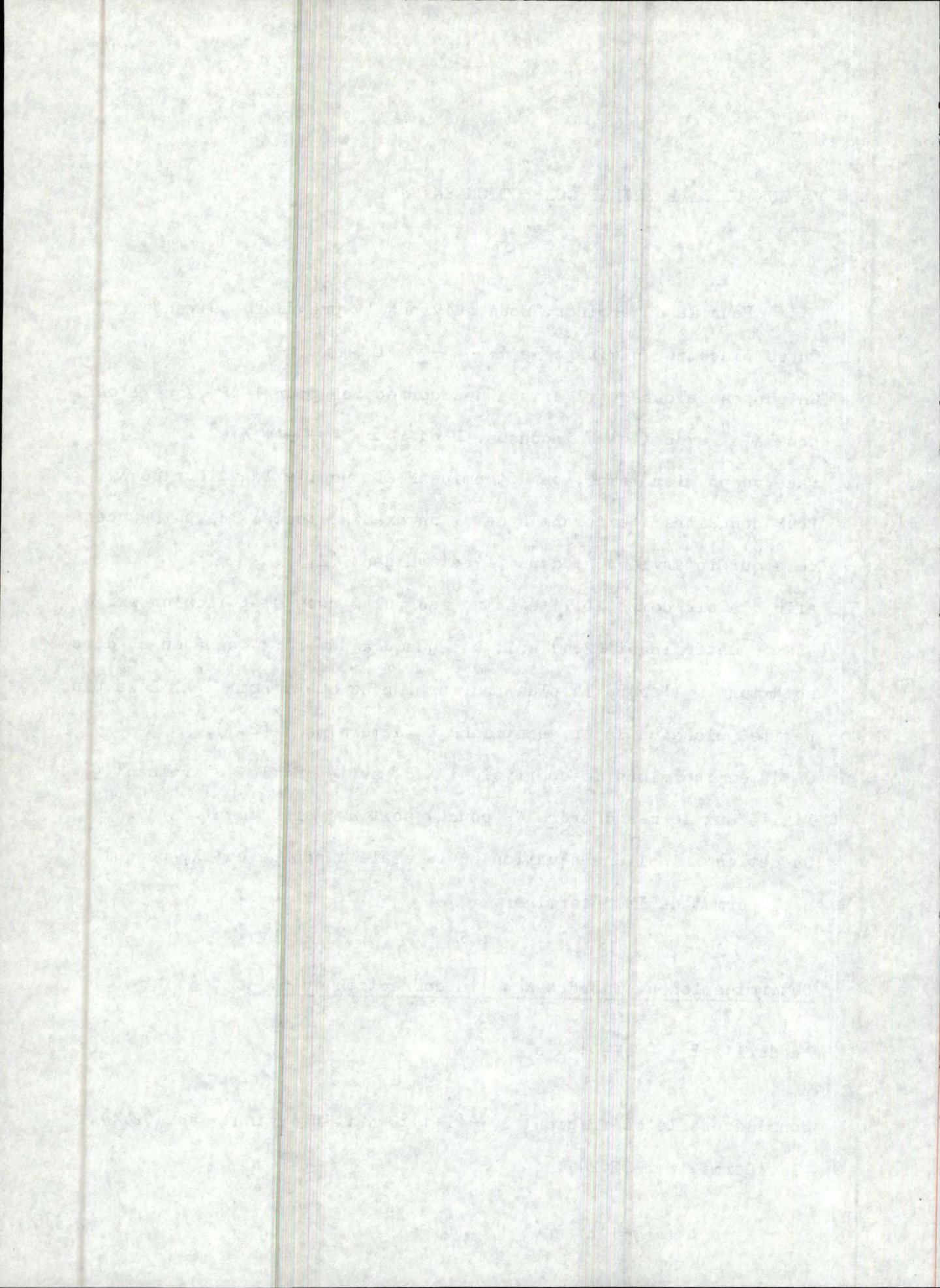
Détermination de l'ordre  $N$  de la correction en  $s$ .

$$\text{On écrit } \epsilon = -\frac{1}{1+1} + X s^N \quad (2.2)$$

Considérons le coefficient  $1 + (1+1)\epsilon$  qui intervient dans (2.1).

Il s'écrit, par (2.2) :

$$1 + (1+1)\epsilon = (1+1) X s^N \quad (2.3)$$



Ceci signifie que le terme  $1 + (1+1)\varepsilon$  n'est pas une constante, mais au contraire un terme en  $s^N$  ! Par contre, tous les termes  $k + (k+1)\varepsilon$  avec  $k \neq 1$  sont des constantes car, pour  $k \neq 1$ , on ne se place pas au voisinage de  $\varepsilon = -\frac{1}{1+1}$   $1 \geq |m|$

Le fait que  $1 + (1+1)\varepsilon$  ne soit pas une constante a une importance capitale. En effet, vue que ce terme apparait en dénominateur dans certains coefficients du déterminant (2.1), l'ordre en  $s$  de ces coefficients diminue.

Ainsi, dans la première ligne de ce déterminant (2.1), le terme

$\frac{s^{4l+2}}{1+(1+1)\varepsilon}$  se comporte comme  $s^{4l+2-N}$  et c'est le terme de puissance

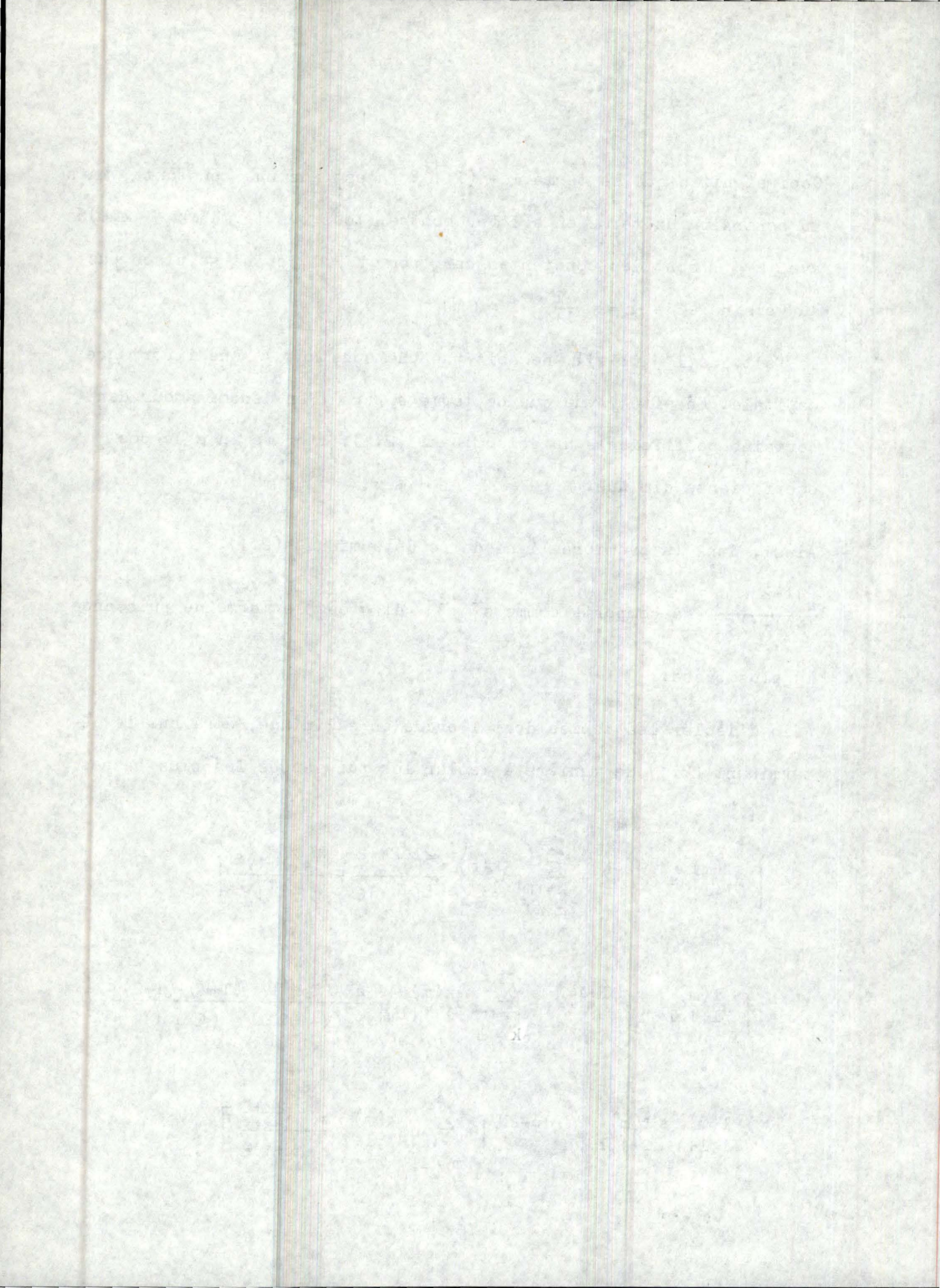
la plus basse.

Afin d'isoler les termes dont l'ordre en  $s$  diminue, écrivons le déterminant (2.1) de manière à isoler les puissances les plus basses en  $s$  :

$$\left[ a_{1,1}^{1(m)} s^{4l+2-N} + \sum_{\substack{k=|m| \\ m \neq 1}}^{\infty} a_{1,1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+2}}{k+(k+1)\varepsilon} - \frac{1+(1+1)\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} \right]$$

$$\cdot \left[ a_{1+1,1+1}^{1(m)} s^{4l+4-N} + \sum_{\substack{k=|m| \\ m \neq 1}}^{\infty} a_{1+1,1+1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+4}}{k+(k+1)\varepsilon} - \frac{(1+1)+(1+2)\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} \right]$$

$$- a_{1,1+1}^{1(m)} a_{1+1,1}^{1(m)} s^{8l+6-2N} \left[ \sum_{\substack{k=|m| \\ m \neq 1}}^{\infty} a_{1,1+1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+2}}{k+(k+1)\varepsilon} \right].$$





$$\cdot \left[ \sum_{\substack{k=|m| \\ m \neq 1}}^{\infty} a_{l+1,1}^{k(m)} \frac{s^{2l+2k+4}}{k+(k+1)\varepsilon} \right] + O(s^{1l+9}) \quad (2.4)$$

Si nous examinons (2.4), on constate que dans la première ligne du déterminant, on a un terme en  $s^{4l+2-N}$  qui est manifestement le terme d'ordre le plus bas.

Or, on exige que le déterminant (2.4) soit nul notamment pour l'ordre le plus bas. Il faut donc que le terme en  $s^{4l+2-N}$  puisse être compensé par quelque chose.

Dans la première ligne du déterminant, nous avons également le terme en  $\frac{1+(l+1)}{(\varepsilon-1)^2}$  qui est en  $s^N$ .

On exige donc, pour avoir la compatibilité dans les puissances  $s$ , que la puissance du terme  $a_{l+1,1}^{l(m)} s^{4l+2-N}$  soit égale à celle de  $\frac{1+(l+1)}{(\varepsilon-1)^2}$ , c'est-à-dire:

$$4l + 2 - N = N$$

$$\Rightarrow \underline{N = 2l + 1} \quad \forall l \geq |m|$$

d'où, on a :

$$\varepsilon = -\frac{1}{l+1} + X s^{2l+1} \quad \forall l \geq |m|$$

Détermination du coefficient de la correction en s.

Etant donné que le déterminant (2.1) doit s'annuler à tous les ordres, il faut exiger que le déterminant limité à l'ordre  $N = 2l+1$  soit nul.

Or, les seuls termes d'ordre  $(2l+1)$  sont  $a_{1,1}^{1(m)} \frac{s^{4l+2}}{1+(l+1)\epsilon}$  et  $\frac{1+(l+1)\epsilon}{(\epsilon-1)^2}$ .

Il suffit donc de les évaluer et d'y remplacer  $\epsilon$  par

$$\epsilon = -\frac{1}{l+1} + X s^{2l+1}$$

On aura ainsi une équation qui donne la valeur de  $X$ .

On a :

$$\frac{1+(l+1)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} = a_{1,1}^{1(m)} \frac{s^{4l+2}}{1+(l+1)\epsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1+(l+1)\epsilon}{\epsilon-1} = \pm \sqrt{a_{1,1}^{1(m)}} s^{2l+1}$$

en remplaçant  $\epsilon$  par sa valeur :

$$\frac{1+(l+1) \left( -\frac{1}{l+1} + X s^{2l+1} \right)}{-\frac{2l+1}{l+1} + X s^{2l+1}} = \pm \sqrt{a_{1,1}^{1(m)}} s^{2l+1}$$

$$\Rightarrow \frac{(l+1) X s^{2l+1}}{-\left(\frac{2l+1}{l+1}\right)} \left( 1 - \frac{l+1}{2l+1} X s^{2l+1} \right) = \pm \sqrt{a_{1,1}^{1(m)}} s^{2l+1}$$

si on égale les termes en  $s^{2l+1}$ , on a :

$$X = \mp \frac{2l+1}{(l+1)^2} \sqrt{a_{l,l}^{1(m)}}$$

Conclusion.

La valeur de  $\epsilon$  avec sa première correction est :

$$\epsilon_{l,m} = -\frac{1}{l+1} \mp \frac{2l+1}{(l+1)^2} \sqrt{a_{l,l}^{1(m)}} s^{2l+1} \quad \forall l \geq |m| \quad (2.5)$$

où  $\epsilon_{l,m}$  indique qu'il s'agit du  $\epsilon$  calculé pour les valeurs  $l, |m|$ .

Valeurs des  $a_{l,l}^{1(m)}$

$$a_{l,l}^{1(m)} = \left[ \frac{l (2l)!}{(l-m)! (l+m)!} \right]^2 \quad \forall l \geq |m|$$

en particulier si  $m = 0$

$$a_{l,l}^1 = \left[ \frac{l (2l)!}{l! l!} \right]^2$$

Cas particuliers.

1)  $\underline{\epsilon}_{m,m}$

$$\epsilon_{m,m} = -\frac{m}{m+1} \left[ 1 \pm \frac{2m+1}{m+1} s^{2m+1} \right] \quad (2.6)$$

2)  $\underline{\epsilon}_{m+1,m}$

$$\epsilon_{m+1,m} = -\frac{m+1}{m+2} \left[ 1 \pm 2 \frac{(m+1)}{(m+2)} (2m+3) s^{2m+3} \right] \quad (2.7)$$

Expression des  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  correspondants.

Dans le cas de deux vides, la relation entre  $\omega$  et  $\epsilon$  est donnée par :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{1}{1 - \epsilon_{1,m}}$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{1}{\frac{2l+1}{l+1} \left[ 1 + \frac{\sqrt{a_{1,1}^{1(m)}}}{l+1} s^{2l+1} \right]}$$

$$\boxed{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{l+1}{2l+1} \left[ 1 \mp \frac{1}{l+1} \sqrt{a_{1,1}^{1(m)}} s^{2l+1} \right]} \quad (2.8)$$

VALEUR DE LA DEUXIEME CORRECTION EN "s".

=====

Sous forme générale, le déterminant (2 x 2) peut s'écrire :

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{m,m}^{k(m)} \frac{s^{2m+2k+2}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{m+(m+1)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \right].$$

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{m+1,m+1}^{k(m)} \frac{s^{2m+2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{(m+1)+(m+2)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \right] -$$

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{m,m+1}^{k(m)} \frac{s^{2m+2k+2}}{k+(k+1)\epsilon} \right] \left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} a_{m+1,m}^{k(m)} \frac{s^{2m+2k+4}}{k+(k+1)\epsilon} \right] = 0$$

A) Calculons les modes 1,1 c'est-à-dire  $\epsilon_{1,1}$  ( $l = |m|$ )

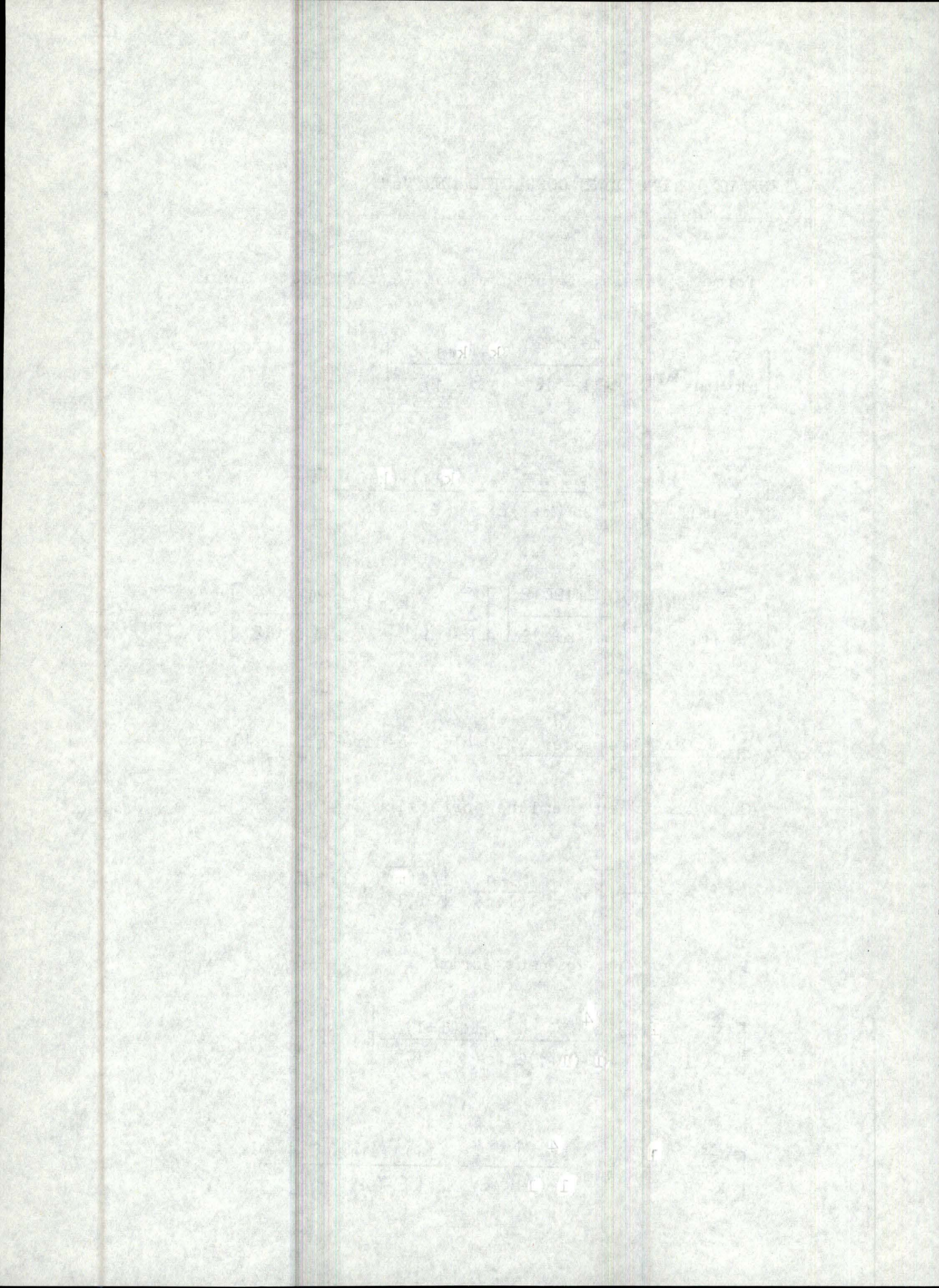
On a trouvé en première correction :

$$\epsilon = -\frac{1}{1+1} \left[ 1 \pm \frac{2l+1}{1(1+1)} \sqrt{a_{1,1}^{1(l)}} s^{2l+1} \right]$$

Pour  $l = |m|$ , on peut écrire :

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,1}^{k(1)} \frac{s^{2l+2+2k}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{1+(1+1)}{(\epsilon-1)^2} \right].$$

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_{1+1,1+1}^{k(1)} \frac{s^{2l+4+2k}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{(1+1)+(1+2)\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \right] -$$



$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,1+1}^{k(1)} \frac{s^{21+2+k}}{k+(k+1)\epsilon} \right] \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_{1+1,1}^{k(1)} \frac{s^{21+4+k}}{k+(k+1)\epsilon} \right] = 0$$

Supposons que la deuxième correction de  $\epsilon$  soit  $X s^N$ . On va trouver les valeurs de  $N$  et de  $X$ .

On a :

$$\epsilon = -\frac{1}{1+1} \mp \frac{(21+1)}{(1+1)^2} \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}} s^{21+1} + X s^N$$

$$1+(1+1)\epsilon = -\frac{21+1}{1+1} \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}} s^{21+1}$$

$$\cdot \left[ 1 \mp X \frac{(1+1)^2}{(21+1) \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}}} s^{N-21-1} \right]$$

$$(\epsilon - 1)^2 = \left( \frac{21+1}{1+1} \right)^2$$

$$(1+1)+(1+2)\epsilon = \frac{1}{1+1}$$

$$\left\{ a_{1,1}^{1(1)} \frac{s^{41+2}}{\mp \frac{21+1}{1+1} \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}} s^{21+1} \left[ 1 \mp X \frac{(1+1)^2}{(21+1) \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}}} s^{N-21-1} \right]^{\pm}} \right\}$$

$$\frac{2l+1}{l+1} \sqrt{a_{l,1}^{1(1)}} s^{2l+1} \left[ 1 \mp X \frac{(l+1)^2}{(2l+1) a_{l,1}^{1(1)}} s^{N-2l-1} \right] \cdot \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^2$$

$$+ a_{l,1}^{1+1(1)} (l+1) s^{4l+4} \left. \cdot \left\{ -\frac{1}{(l+1)} \frac{(l+1)^2}{(2l+1)^2} \right\} =$$

$$a_{l+1,1}^{1(1)} a_{l,1+1}^{1(1)} \frac{s^{4l+4} (l+1)^2}{l^2 (2l+1)^2}$$

Il faut donc que  $N = 4l + 4$

Cherchons la valeur de X :

$$\left\{ \frac{a_{l,1}^{1(1)} s^{2l+1} \left[ 1 \pm X \frac{(l+1)^2}{(2l+1) a_{l,1}^{1(1)}} s^{2l+3} \right]}{\mp \left( \frac{2l+1}{l+1} \right) \sqrt{a_{l,1}^{1(1)}}} \pm \left( \frac{l+1}{2l+1} \right) \sqrt{a_{l,1}^{1(1)}} s^{2l+1} \right.$$

$$\left. \cdot \left[ 1 \mp X \frac{(l+1)^2}{(2l+1) a_{l,1}^{1(1)}} s^{2l+3} \right] + a_{l,1}^{1+1(1)} (l+1) s^{4l+4} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{l+1}{(2l+1)^2} \right\} = a_{l+1,1}^{1(1)} a_{l,1+1}^{1(1)} \frac{s^{4l+4} (l+1)^2}{l^2 (2l+1)^2}$$



En  $s^{4l+4}$  :

$$\mp \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}} \frac{1+1}{2l+1} \left[ \pm \frac{x (1+1)^2}{(2l+1) a_{1,1}^{1(1)}} \right]$$

$$\pm \left( \frac{1+1}{2l+1} \right) \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}} \left[ \mp \frac{(1+1)^2 x}{(2l+1) \sqrt{a_{1,1}^{1(1)}}} \right] + a_{1,1}^{1+1(1)} (1+1)$$

$$= a_{1+1(1)}^{1(1)} a_{1,1+1}^{1(1)} \frac{(1+1)^2}{1^2 (2l+1)^2} \left[ - \frac{(2l+1)^2}{1+1} \right]$$

$$\Rightarrow - 2 x \frac{(1+1)^3}{(2l+1)^2} + a_{1,1}^{1+1(1)} (1+1) = - a_{1+1,1}^{1(1)} a_{1,1+1}^{1(1)} \frac{(1+1)}{1^2}$$

On a donc :

$$x = \frac{1 (2l+1)^3}{1+1}$$

B) Calcul des modes  $m+1,1$  ( $l = m + 1$ )

De la même façon que précédemment, on a que :

$$\xi = - \frac{1+1}{1+2} \mp \frac{(2l+3)(1+1)}{(1+2)^2} s^{2l+3} + x s^{4l+4}$$

$$(1+1)+(1+2)\epsilon = \mp \frac{(21+3)(1+1)}{(1+2)} s^{21+3} + X (1+2) s^{41+4}$$

$$(\epsilon - 1)^2 = \frac{(21+3)^2}{(1+2)^2}$$

$$1+(1+1)\epsilon = -\frac{1}{1+2}$$

Le déterminant s'écrit :

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{a_{m,m}^{k(m)} s^{2k+2m+2}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{m+(m+1)\epsilon}{(\epsilon - 1)^2} \right]$$

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{a_{m+1,m+1}^{k(m)} s^{2k+2m+4}}{k+(k+1)\epsilon} - \frac{(m+1) + (m+2)\epsilon}{(\epsilon - 1)^2} \right] -$$

$$\left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{a_{m,m+1}^{k(m)} s^{2k+2m+2}}{k+(k+1)\epsilon} \right] \left[ \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{a_{m+1,m}^{k(m)} s^{2k+2m+4}}{k+(k+1)\epsilon} \right] = 0$$

Le deuxième crochet se réduit à l'ordre le plus bas en prenant les deux premiers termes :

$$\epsilon = -\frac{1}{1+1} = -\frac{m+1}{m+2} \quad (\text{pour } l = |m| + 1)$$

$$\epsilon - 1 = -\frac{2m+3}{m+2}$$

$$\Rightarrow (m+1)+(m+2)\varepsilon = \pm (\varepsilon - 1) \sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} s^{2m+3} + X (m+2) s^{4m+4}$$

d'après le deuxième crochet.

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{m+1}{m+2} \mp \frac{2m+3}{(m+2)^2} \cdot 2(m+1)^2 s^{2m+3} \quad \text{en remplaçant } \varepsilon - 1$$

et  $\sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}}$  par leur valeur.

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{m+1}{m+2} \pm \left(\frac{2m+3}{m+2}\right) \sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} s^{2m+3} \\ \cdot \left[ 1 \mp \frac{X (m+2)^2}{(2m+3) a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} s^{2m+1} \right]$$

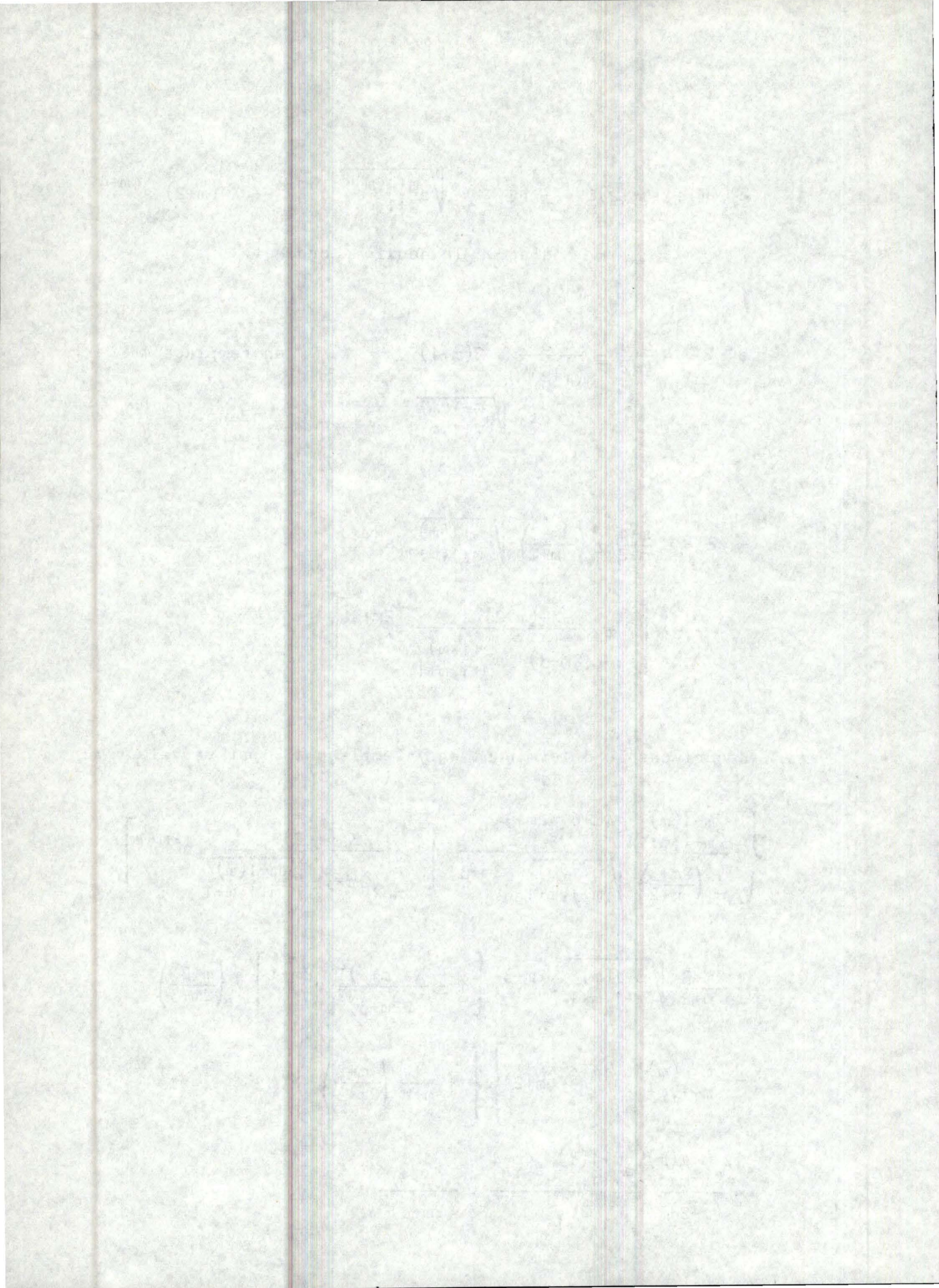
Réécrivons le déterminant en y remplaçant  $\varepsilon$  par sa valeur :

$$\left\{ \frac{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)} s^{4m+6} s^{2m+3}}{\pm \left(\frac{2m+3}{m+2}\right) \sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} s^{2m+3}} \left[ 1 \mp \frac{X (m+2)^2}{(2m+3) \sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}}} s^{2m+1} \right] \right\}$$

$$\mp \frac{2m+3}{m+2} \sqrt{a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} s^{2m+3} \left[ 1 \pm \frac{X (m+2)^2}{(2m+3)^2} s^{2m+1} \right] \cdot \left(\frac{m+2}{2m+3}\right)^2$$

$$- a_{m+1,m+1}^m (m) s^{4m+4} (m+2) \cdot \left\{ + \frac{1}{m+2} \left(\frac{m+2}{2m+3}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{a_{m,m+1}^{m+1(m)} a_{m+1,m}^{m+1(m)} s^{4m+4}}{(m+2)^2 a_{m+1,m+1}^{m+1(m)}} \cdot \frac{(m+2)^2}{(2m+3)^2}$$



On a donc, en remplaçant les  $a_{1,j}^{k(m)}$  par leur valeur (voir tabl. (T.6)) et en identifiant les coefficients de  $s^{4m+4}$ :

$$X = - \frac{m(m+1)(2m+1)(2m+3)^2}{(m+2)^2}$$

Reprenons le déterminant pour  $m = 0$

Les calculs ci-dessus ne donnent rien pour le cas  $m = 0$ , car dans ce cas  $s^{4m+4}$  devient  $s^4$ . Or il n'existe aucune correction en  $s^4$ . Il est donc impossible d'appliquer les résultats trouvés au cas  $m = 0$ .

Nous allons donc examiner chaque cas particulier séparément.

1)  $m = 0, l = 1$

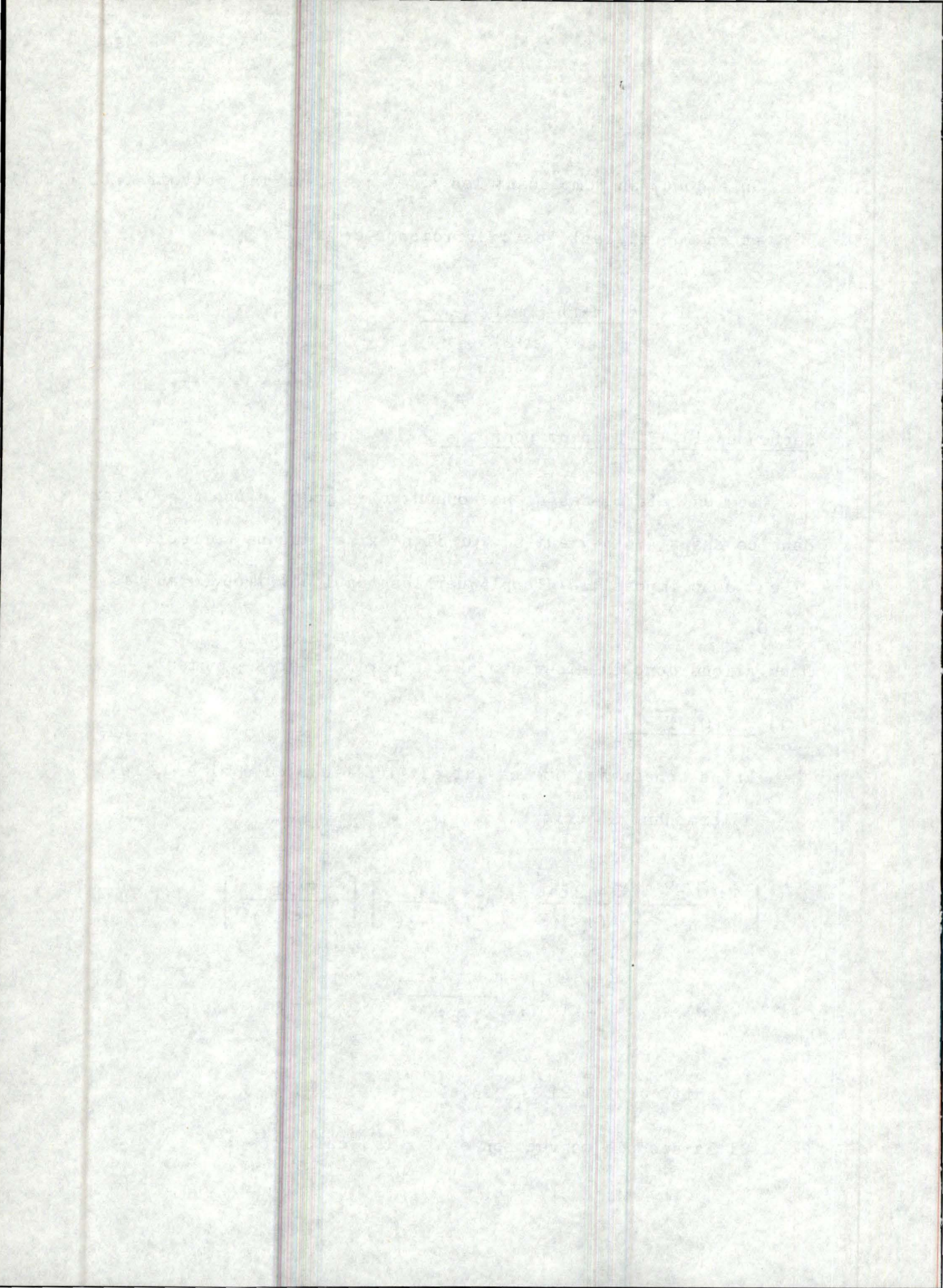
En ne conservant que ce qui est inférieur ou égal à 0, le déterminant s'écrit :

$$\left[ a_{1,1}^1 \frac{s^6}{1+2\varepsilon} - \frac{1+2\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} + a_{1,1}^2 \frac{s^8}{2+3\varepsilon} \right] \left[ - \frac{2+3\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} \right]$$

$$= a_{2,1}^1 a_{1,2}^1 \frac{s^{14}}{(1+2\varepsilon)^2}$$

On sait que  $1 + 2\varepsilon = \mp 3 s^3$

Si la seconde correction est en  $s^8$ , calculons :



$$1+2\varepsilon = \mp 3 s^3 + X s^8 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} s^3 + \frac{X}{2} s^8$$

$$\text{alors } (\varepsilon - 1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$2 + 3\varepsilon = \frac{1}{2}$$

En remplaçant  $a_{1,j}^k$ ,  $(2+3\varepsilon)$ ,  $(\varepsilon-1)^2$  et  $(1+2\varepsilon)$  par leur valeur et en identifiant les coefficients de  $s^8$ , on obtient :

$$\left[ \frac{4 s^6 s^3}{\mp 3 s^3 \left(1 \mp \frac{X}{3} s^5\right)} - \frac{\mp 3 s^3 + X s^8}{\frac{9}{4}} + \frac{18 s^8}{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \right]$$

$$= \frac{12 \cdot 6 \cdot s^8}{9}$$

$$\Rightarrow \underline{X = 81}$$

$\Rightarrow$  On trouve pour  $\varepsilon$  et  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  :

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} s^3 + \frac{81}{2} s^8$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{2}{3} (1 \mp s^3 + 27 s^8)$$

$$2) \underline{m = 0, l = 2}$$

On a :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{a_{2,2}^1 s^8}{1+2\varepsilon} + \frac{a_{2,2}^2 s^{10}}{2+3\varepsilon} - \frac{2+3\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1+2\varepsilon \\ -\frac{1+2\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{a_{2,1}^2 a_{1,2}^2 s^{18}}{(2+3\varepsilon)^2}$$

$$\text{Or } 2 + 3\varepsilon = \mp 20 s^5 + X s^8$$

$$(\varepsilon - 1)^2 = \frac{25}{9}$$

$$1 + 2\varepsilon = -\frac{1}{3}$$

Par conséquent :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{18 s^8}{-\frac{1}{3}} + \frac{144 s^5}{\mp 20 \left(1 \mp \frac{X}{20} s^3\right)} - \frac{\mp 20 s^5 + X s^8}{\frac{25}{9}} \end{array} \right] \left[ +\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} \right]$$

$$= \frac{72 \cdot 36 \cdot s^8}{400}$$

En identifiant les coefficients de  $s^8$ , on obtient :

$$X = -150$$



⇒ On trouve pour  $\xi$  et  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  :

$$\xi = -\frac{2}{3} \mp \frac{20}{3} s^5 - 50 s^8$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = \frac{3}{5} (1 \mp 4 s^5 - 30 s^8)$$

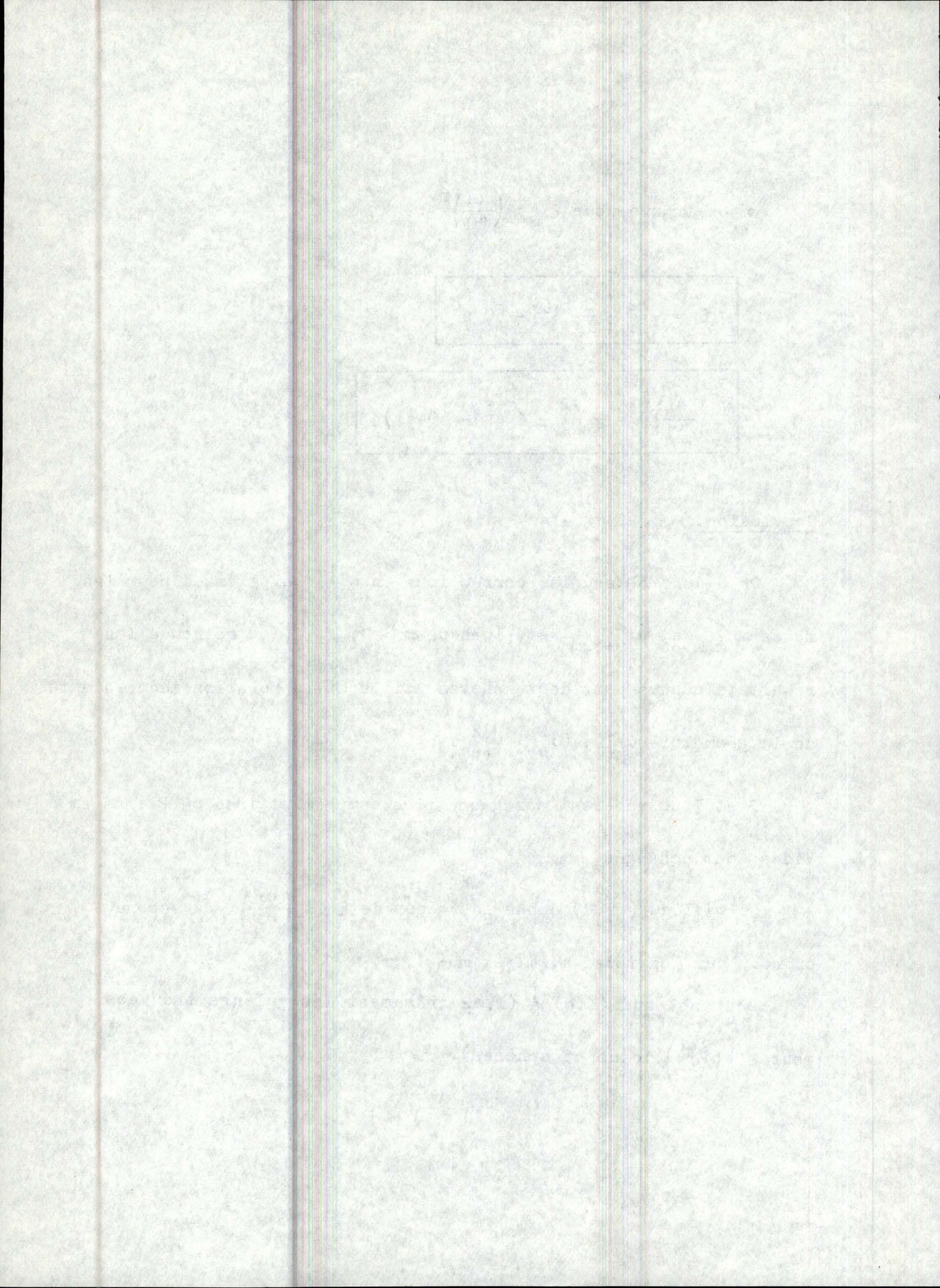
### Conclusion.

On a donc obtenu les corrections en  $s^{4l+4}$  explicites pour les modes  $\omega_{m,m}^2$  et  $\omega_{m+1,m}^2$  et, lorsque  $m = 0, 1, 2$ , on retrouve les résultats connus pour deux sphères utilisant la relation indépendante de la géométrie  $\omega_P^2 + \omega_V^2 = \omega_p^2$ .

$P$  et  $V$  se réfèrent aux géométries complémentaires où Pleins et Vides sont échangés.

Le tableau (T.7) donne la valeur de  $\xi$  et  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  au second ordre, pour les modes  $m, m$  et  $m+1, m$ .

Les tableaux (T.8) à (T.12) résument les valeurs trouvées pour  $\xi$  et  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  (voids et sphères).



$$a_{1j}^{k(m)} = \frac{k(k+1)! (k+j)! 1}{(k-m)! (k+m)! (j-m)! (1+m)!}$$

$$l = m$$

$$a_{m m}^{m(m)} = m^2$$

$$a_{m m}^{m+1 m} = m(m+1)(2m+1)$$

$$a_{m+1 m}^{m(m)} = m(m+1)$$

$$a_{m m+1}^{m(m)} = m^2 (2m+1)$$

$$l = m+1$$

$$a_{m+1 m}^{m+1(m)} = 2 (m+1)^3$$

$$a_{m m+1}^{m+1(m)} = 2m (m+1)^2 (2m+1)$$

$$a_{m+1 m+1}^{m+1(m)} = (m+1)^2 (2m+2)^2$$

$$a_{m+1 m+1}^m = m(m+1) (2m+1)$$

Tableau T.6

## CORRECTION DU SECOND ORDRE

Modes  $m, m$ 

$$\epsilon_{m,m} = -\frac{m}{m+1} \left\{ 1 \pm \frac{2m+1}{m+1} s^{2m+1} - (2m+1)^3 s^{4m+4} \right\}$$

$$\left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)_{m,m}^2 = \frac{m+1}{2m+1} \left\{ 1 \mp \frac{m}{m+1} s^{2m+1} + m(2m+1)^2 s^{4m+4} \right\}$$

Modes  $m+1, m$ 

$$\epsilon_{m+1,m} = -\frac{m+1}{m+2} \left\{ 1 \pm \frac{2(m+1)(2m+3)}{(m+2)} s^{2m+3} + \frac{m(2m+1)(2m+3)^2}{(m+2)} s^{4m+4} \right\}$$

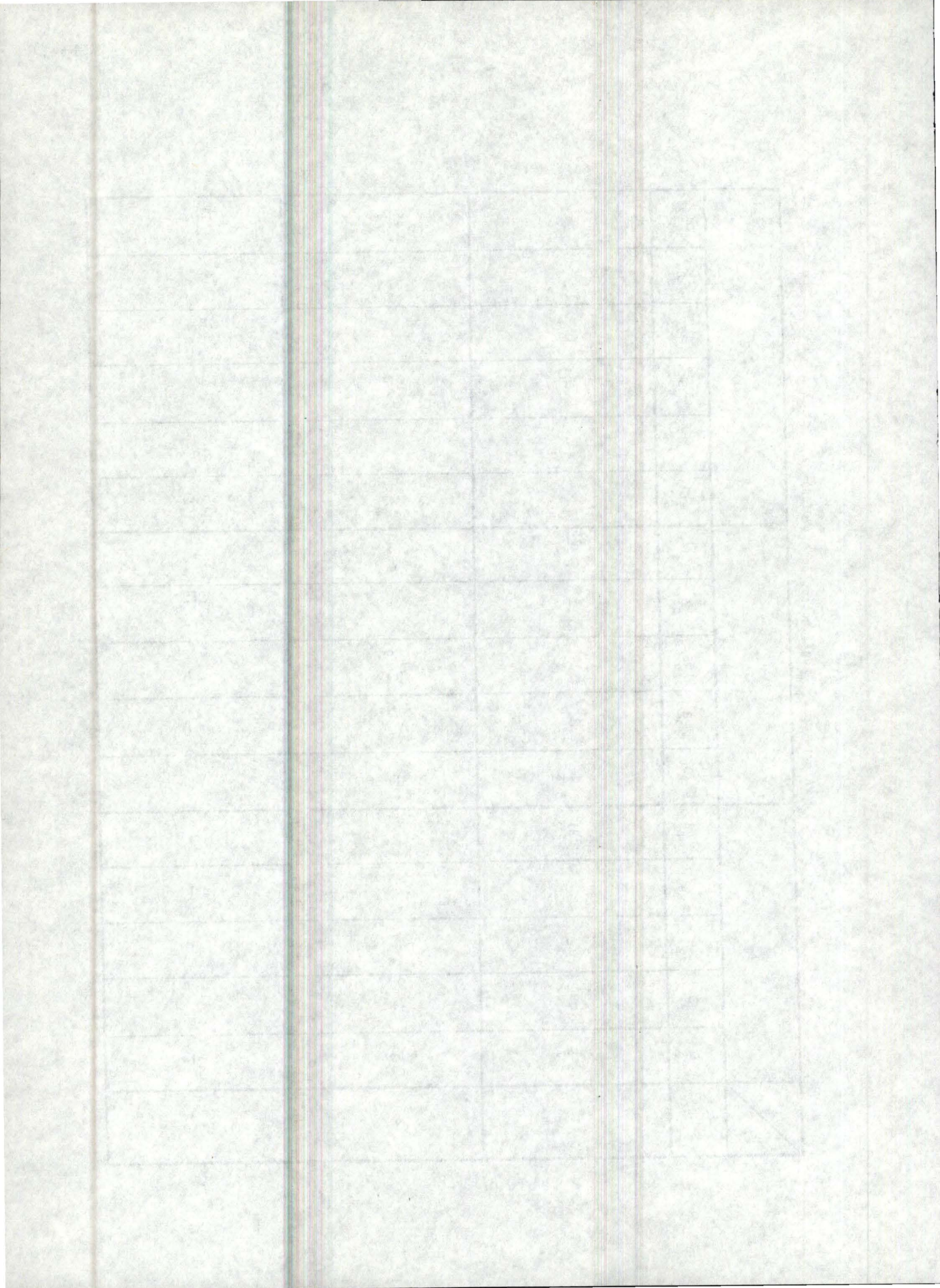
$$\left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)_{m+1,m}^2 = \frac{m+2}{2m+3} \left\{ 1 \mp \frac{2(m+1)^2}{(m+2)} s^{2m+3} - \frac{m(m+1)(2m+1)(2m+3)}{(m+2)} s^{4m+4} \right\}$$

Tableau T.7

valeurs de  $\epsilon_{1,m}$  en fonction de s (VOIDS)

| 1 \ m | 0              |                |                 |                |                 | ± 1            |                |                 |                   |                 | ± 2            |                |                 |                 |                |                  |
|-------|----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|------------------|
|       | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup> | s <sup>8</sup>  | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup>    | s <sup>8</sup>  | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup>  | s <sup>8</sup> | s <sup>12</sup>  |
| 1     | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{3}{2}$ | -               | -              | $+\frac{81}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{3}{4}$ | -               | -                 | $+\frac{27}{2}$ | -              | -              | -               | -               | -              | -                |
| 2     | $-\frac{2}{3}$ | -              | $+\frac{20}{3}$ | -              | - 50            | $-\frac{2}{3}$ | -              | $+\frac{40}{9}$ | -                 | $-\frac{50}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | -              | $+\frac{10}{9}$ | -               | -              | $+\frac{250}{3}$ |
| 3     | $-\frac{3}{4}$ | -              | -               | -              | -               | $-\frac{3}{4}$ | -              | -               | $+\frac{315}{16}$ | -               | $-\frac{3}{4}$ | -              | -               | $+\frac{63}{2}$ | -              | $-\frac{735}{2}$ |

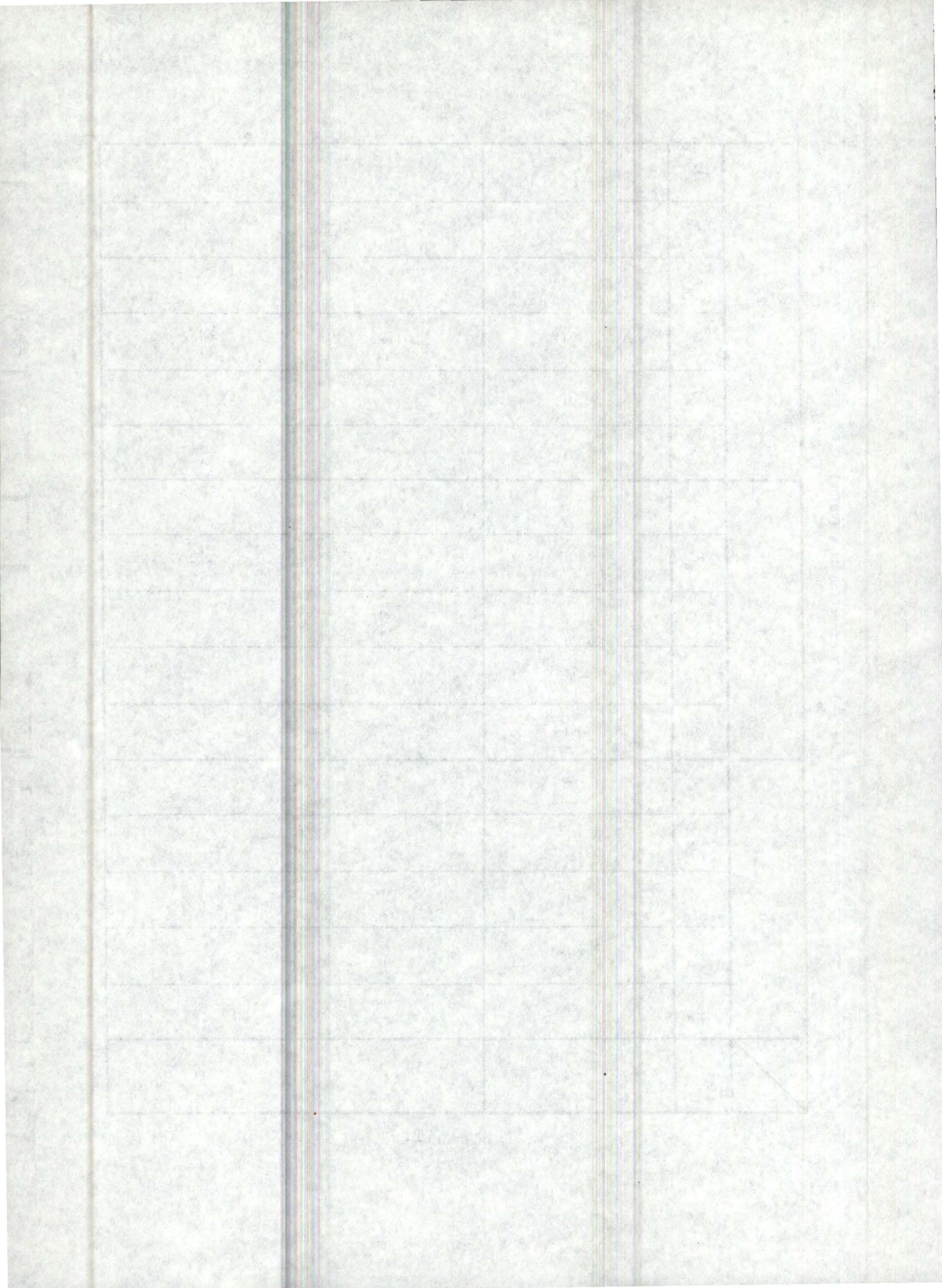
Tableau T. 8



valeurs de  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$  en fonction de s (VOIDS)  
p 1,m

| 1 \ m | 0              |                |                 |                 |                | ± 1            |                |                |                   |                | ± 2            |                |                 |                |                |                 |
|-------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|
|       | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup>  | s <sup>8</sup> | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup> | s <sup>7</sup>    | s <sup>8</sup> | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup> | s <sup>8</sup> | s <sup>12</sup> |
| 1     | $+\frac{2}{3}$ | $+\frac{2}{3}$ | -               | -               | + 18           | $+\frac{2}{3}$ | $+\frac{1}{3}$ | -              | -                 | + 6            | -              | -              | -               | -              | -              | -               |
| 2     | $+\frac{3}{5}$ | -              | $+\frac{12}{5}$ | -               | - 18           | $+\frac{3}{5}$ | $+\frac{8}{5}$ |                |                   | - 6            | $+\frac{3}{5}$ |                | $+\frac{2}{5}$  |                |                | + 30            |
| 3     | $+\frac{4}{7}$ |                |                 | $+\frac{15}{7}$ |                | $+\frac{4}{7}$ |                |                | $+\frac{315}{49}$ |                | $+\frac{4}{7}$ |                | $+\frac{72}{7}$ |                |                | - 120           |

Tableau T.9

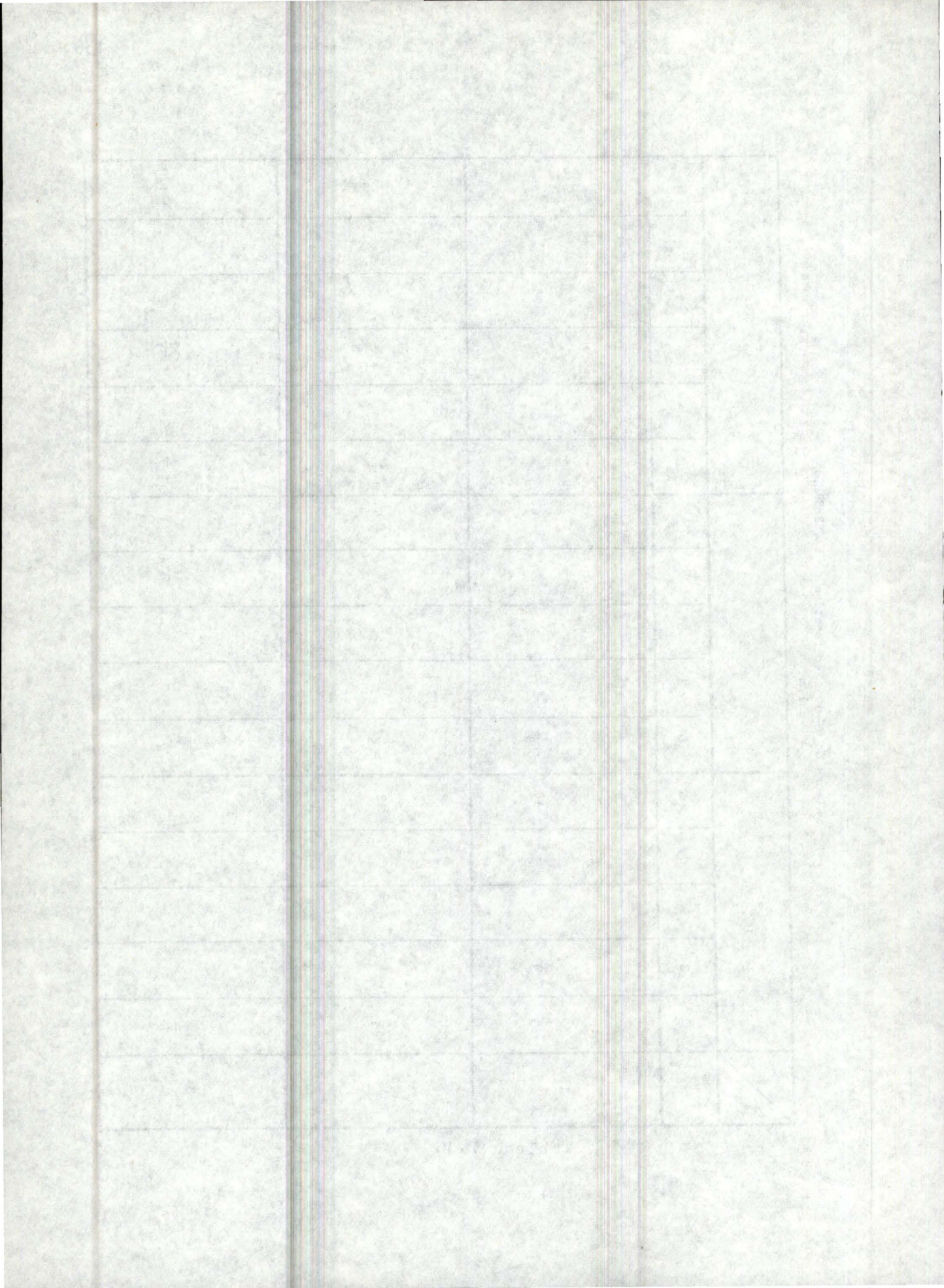




valeurs de  $\left(\frac{\omega^2}{\omega}\right)_{p,1,m}$  en fonction de s (SPHERES)

Tableau T. 10

| 1 \ m | 0              |                |                 |                |                | ± 1            |                |                |                   |                | ± 2            |                |                 |                |                |                 |
|-------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|
|       | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup> | s <sup>8</sup> | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup> | s <sup>7</sup>    | s <sup>8</sup> | s <sup>0</sup> | s <sup>3</sup> | s <sup>5</sup>  | s <sup>7</sup> | s <sup>8</sup> | s <sup>12</sup> |
| 1     | $+\frac{1}{3}$ | $+\frac{2}{3}$ | -               | -              | - 18           | $+\frac{1}{3}$ | $+\frac{1}{3}$ |                |                   | - 6            |                |                |                 |                |                |                 |
| 2     | $+\frac{2}{5}$ |                | $+\frac{12}{5}$ |                | + 18           | $+\frac{2}{5}$ |                | $+\frac{8}{5}$ |                   | + 6            | $+\frac{2}{5}$ |                | $+\frac{2}{5}$  |                |                | - 30            |
| 3     | $+\frac{3}{7}$ |                |                 |                |                | $+\frac{3}{7}$ |                |                | $+\frac{315}{49}$ |                | $+\frac{3}{7}$ |                | $+\frac{72}{7}$ |                |                | + 120           |



valeurs de  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)_{1,m}$  en fonction de  $s$  (SPHERES)

$$m = 0$$

$$l = 1 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 \pm s^3 - \frac{1}{2} s^6 - 27 s^8\right)$$

$$l = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(1 \pm 3s^5 + \frac{45}{2} s^8 - \frac{9}{2} s^{10}\right)$$

$$m = \pm 1$$

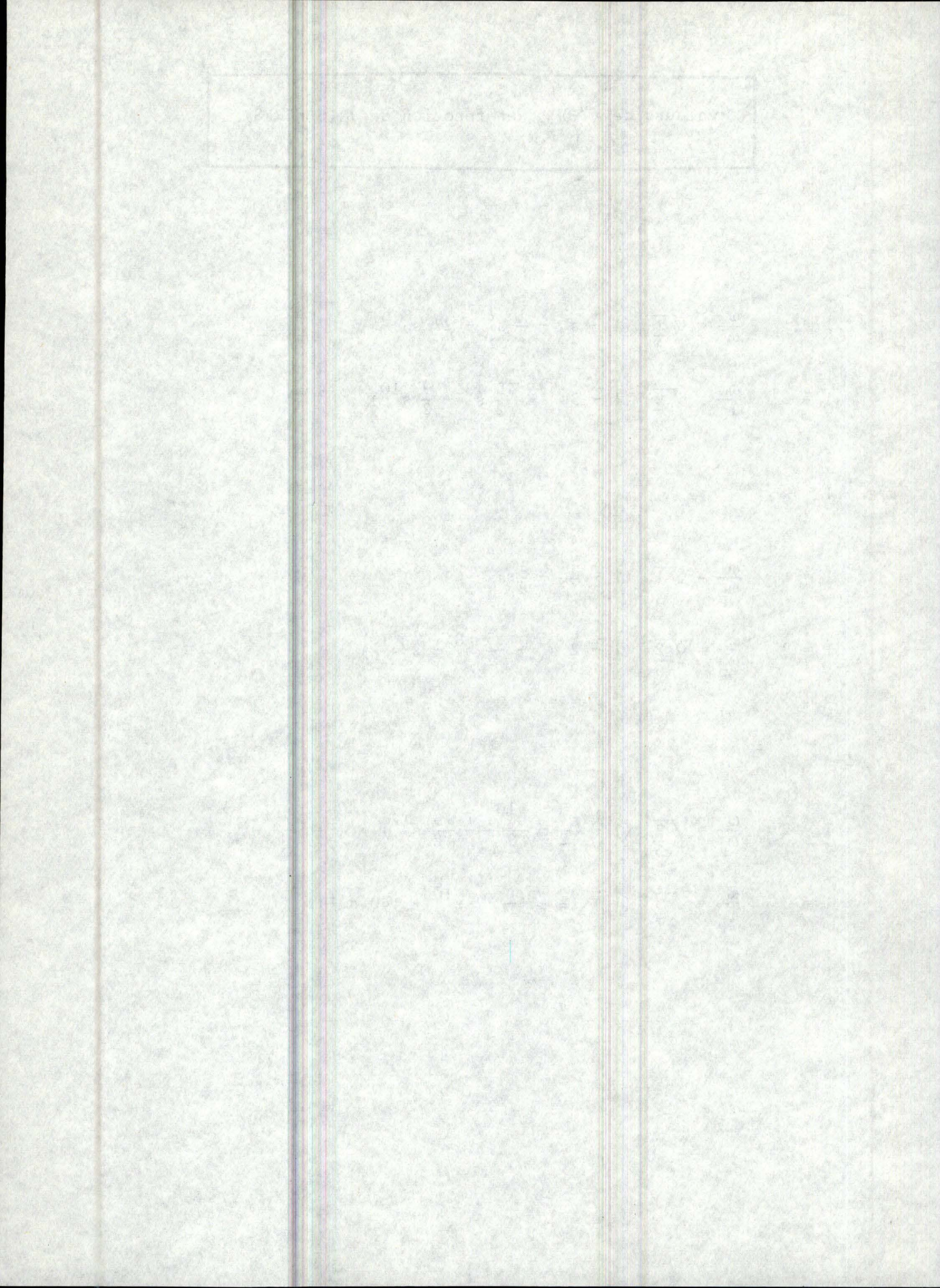
$$l = 1 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 \pm \frac{s^3}{2} - \frac{1}{8} s^6 - 9 s^8\right)$$

$$l = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(1 \pm 2 s^5 + \frac{15}{2} s^8 - 2 s^{10}\right)$$

$$m = \pm 2$$

$$l = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(1 \pm \frac{s^5}{2} - \frac{s^{10}}{8} - \frac{75}{2} s^{12}\right)$$

$$l = 3 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{3}{7}} \left(1 \pm 12 s^5 - 72 s^{10} + 140 s^{12}\right)$$



valeurs de  $\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)_{1,m}$  en fonction de s (VOIDS)

m = 0

$$1 = 1 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} s^3 - \frac{1}{8} s^6 + \frac{27}{2} s^8 + \frac{1}{16} s^9 \right\}$$

$$1 = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ 1 + 2 s^5 - 15 s^8 - \frac{1}{2} s^{10} \right\}$$

$$1 = 3 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{4}{7}} \left\{ 1 + \frac{15}{2} s^7 \right\}$$

m = 1

$$1 = 1 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} s^3 - \frac{1}{32} s^6 + \frac{9}{2} s^8 + \frac{1}{128} s^9 \right\}$$

$$1 = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ 1 + \frac{4}{3} s^5 - 5 s^8 - \frac{1}{18} s^{10} \right\}$$

$$1 = 3 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{4}{7}} \left\{ 1 + \frac{315}{56} s^7 \right\}$$

m = 2

$$1 = 2 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ 1 + 3 s^5 - \frac{9}{2} s^{10} + 25 s^{12} \right\}$$

$$1 = 3 \quad \frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{4}{7}} \left\{ 1 + 9 s^5 - \frac{81}{2} s^{10} - 105 s^{12} \right\}$$

III - ENERGIE DE VAN DER WAALS.

Les tableaux (T.9) et (T.10) nous permettent de calculer l'énergie d'interaction à l'ordre 8 pour les sphères et les voids.

$$\Delta W = \frac{1}{2} \hbar \omega_p \sum_i [w_i(0) - w_i(\infty)]$$

Pour les sphères, l'énergie s'écrit :

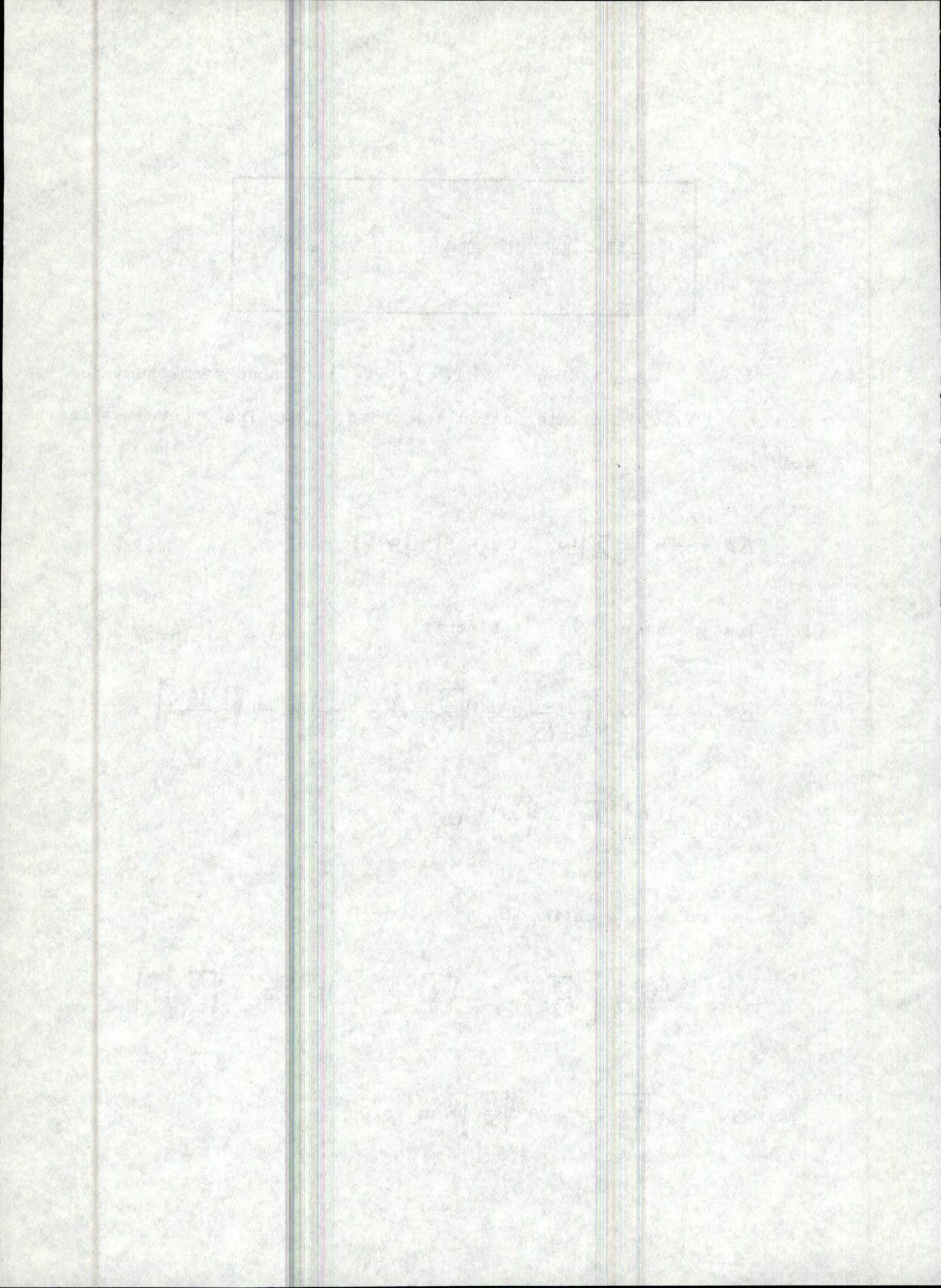
$$\Delta W_8 = \frac{1}{2} \hbar \omega_p \left[ -\frac{27}{\sqrt{3}} \cdot 2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{45}{2} \cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9 \cdot 4 + \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{15}{2} \cdot 4 \right]$$

$$\Delta W_8 = -15 \left( \sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \hbar \omega_p s^8$$

Pour les voids, on obtient :

$$\Delta W_8 = \frac{1}{2} \hbar \omega_p \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{27}{2} \cdot 2 - \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot 15 \cdot 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{9}{2} \cdot 4 - \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot 5 \cdot 4 \right]$$

$$\Delta W_8 = \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{45}{2} - 25 \sqrt{\frac{3}{5}} \right] \hbar \omega_p s^8$$



Dans la partie I, chapitre 3, on a calculé l'énergie d'interaction jusqu'à l'ordre 6.

Reprenons les résultats : (3.5) , (3.9)

$$w_V = -\frac{3}{16} \sqrt{\frac{2}{3}} w_p \hbar z^6$$

$$w_P = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} w_p \hbar z^6$$

On a montré ensuite que  $s \simeq z$  au premier ordre, avec  $z = e^{-\mu}$ ,  $s = \frac{R}{D}$

Avec la valeur en  $s^8$  trouvée précédemment, l'énergie s'écrit :

$$W_V = \hbar w_p \left[ -\frac{3}{16} \sqrt{\frac{2}{3}} s^6 + \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{45}{2} - 25 \sqrt{\frac{3}{5}} \right) s^8 \right]$$

$$W_P = \hbar w_p \left[ -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} s^6 - 15 \left( \sqrt{3} - \sqrt{\frac{5}{2}} \right) s^8 \right]$$

Le rapport des interactions de Van der Waals est donné par la relation :

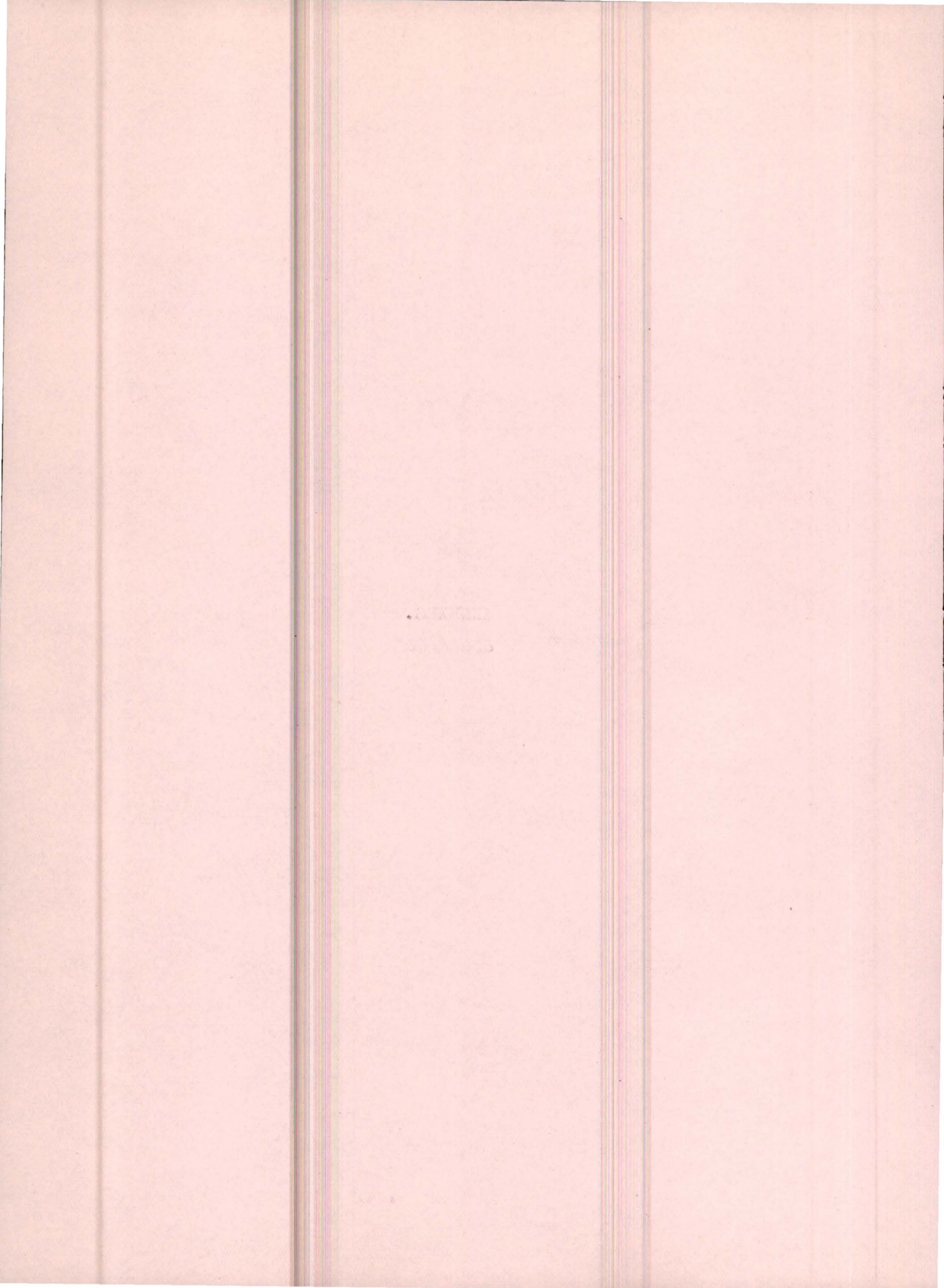
$$\boxed{\frac{W_V}{W_P} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ 1 - 2,26 s^2 + 0 (s^4) \right]}$$

Ceci traduit le fait que la correction à l'ordre 8 est moins grande pour les voids que pour les sphères.



ANNEXES .

၆၆၆၆၆၆၆၆၆၆



## ANNEXE 1.

~~~~~

 RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE EN
 COORDONNEES SPHERIQUES - EXPRESSION DU
 POTENTIEL POUR UNE SPHERE SEULE.

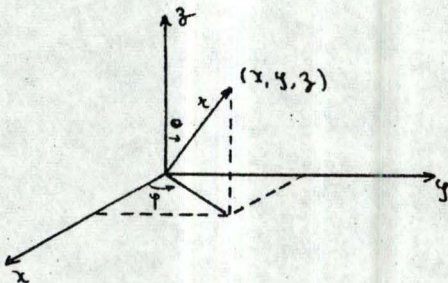
1. - RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE.

L'équation de Laplace à trois dimensions exprimée dans un repère cartésien (x, y, z) s'écrit :

$$\Delta V (x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Dans ce qui suit, nous allons écrire cette équation en coordonnées sphériques et, ensuite, la résoudre dans ce système de coordonnées.

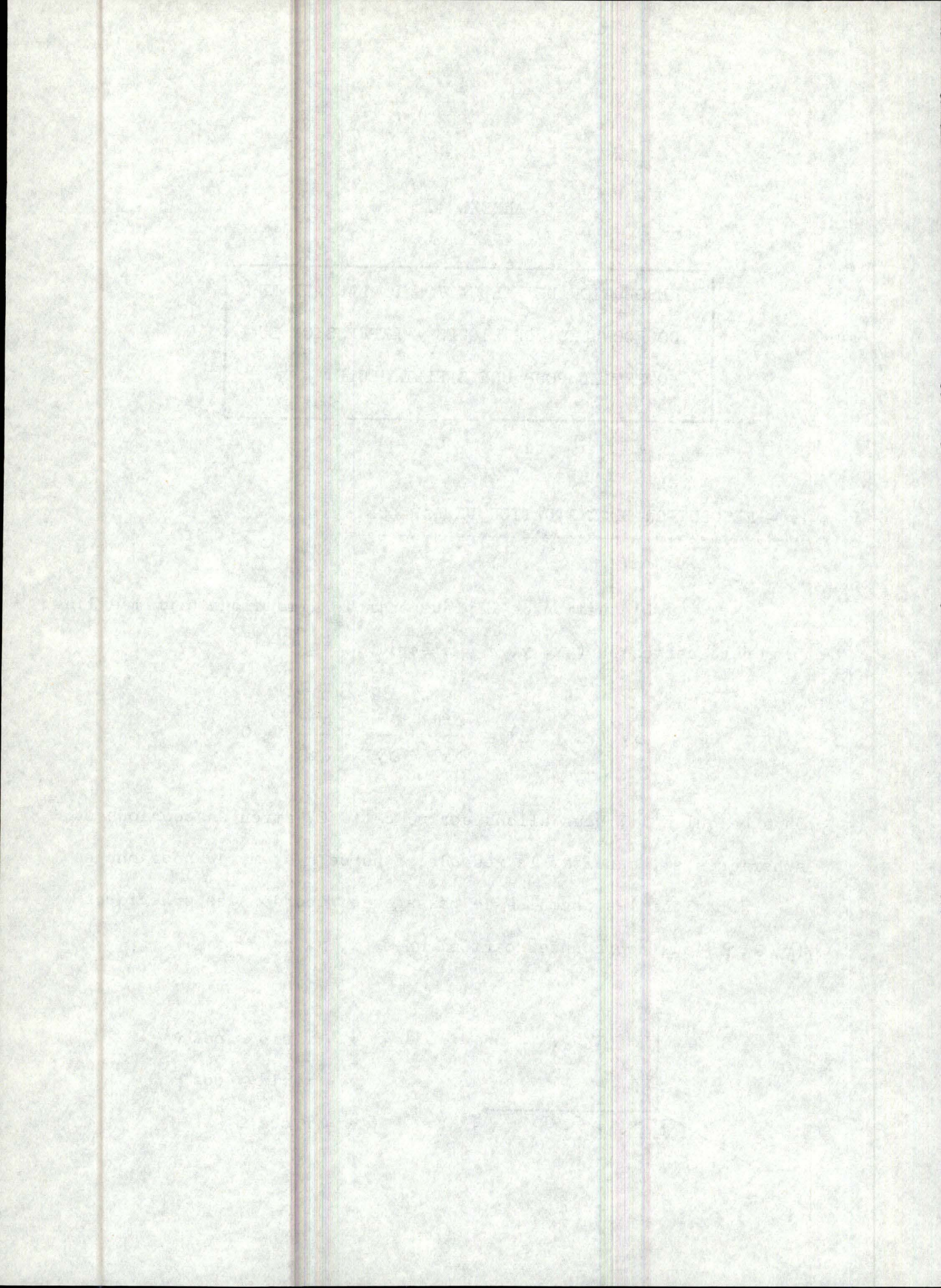
Rappelons les formules de passage des coordonnées sphériques (r, θ , φ) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$



L'équation de Laplace écrite dans le système de coordonnées sphériques devient donc :

$$\Delta V (r, \theta, \varphi) \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

La méthode utilisée pour résoudre l'équation $\Delta V (r, \theta, \varphi) = 0$ est la méthode de la séparation des variables.

Cette méthode consiste à trouver une solution de l'équation sous la forme :

$$V (r, \theta, \varphi) = R (r) \Theta (\theta) \Phi (\varphi)$$

où $R (r)$, $\Theta (\theta)$, $\Phi (\varphi)$ sont à déterminer.

On remplace cette valeur de V dans l'équation de Laplace (A1.1) et on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) \Theta (\theta) \Phi (\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta (\theta)}{d\theta} \right) R (r) \Phi (\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi (\varphi)}{d\varphi^2} R (r) \Theta (\theta) = 0$$

On divise cette relation par $[R (r) \Theta (\theta) \Phi (\varphi)]$

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

Afin d'obtenir une équation où chacun des termes dépend uniquement d'une seule variable, nous multiplions la relation ci-dessus par $r^2 \sin^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$$

Le second membre de cette équation est une fonction de φ tandis que le premier membre est indépendant de φ

Ceci implique que chaque membre de la relation est égal à une constante m^2 .

On a donc :

$$1) \quad \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (\text{A1.2})$$

$$2) \frac{\sin^2 \Theta}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{\sin \Theta}{\Theta(\Theta)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sin \Theta \frac{d\Theta(\Theta)}{d\Theta} \right) = m^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{1}{\Theta(\Theta)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sin \Theta \frac{d\Theta(\Theta)}{d\Theta} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \Theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \Theta} - \frac{1}{\sin \Theta} \frac{1}{\Theta(\Theta)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sin \Theta \frac{d\Theta(\Theta)}{d\Theta} \right)$$

Le premier membre est une fonction de r tandis que le second membre est une fonction de Θ

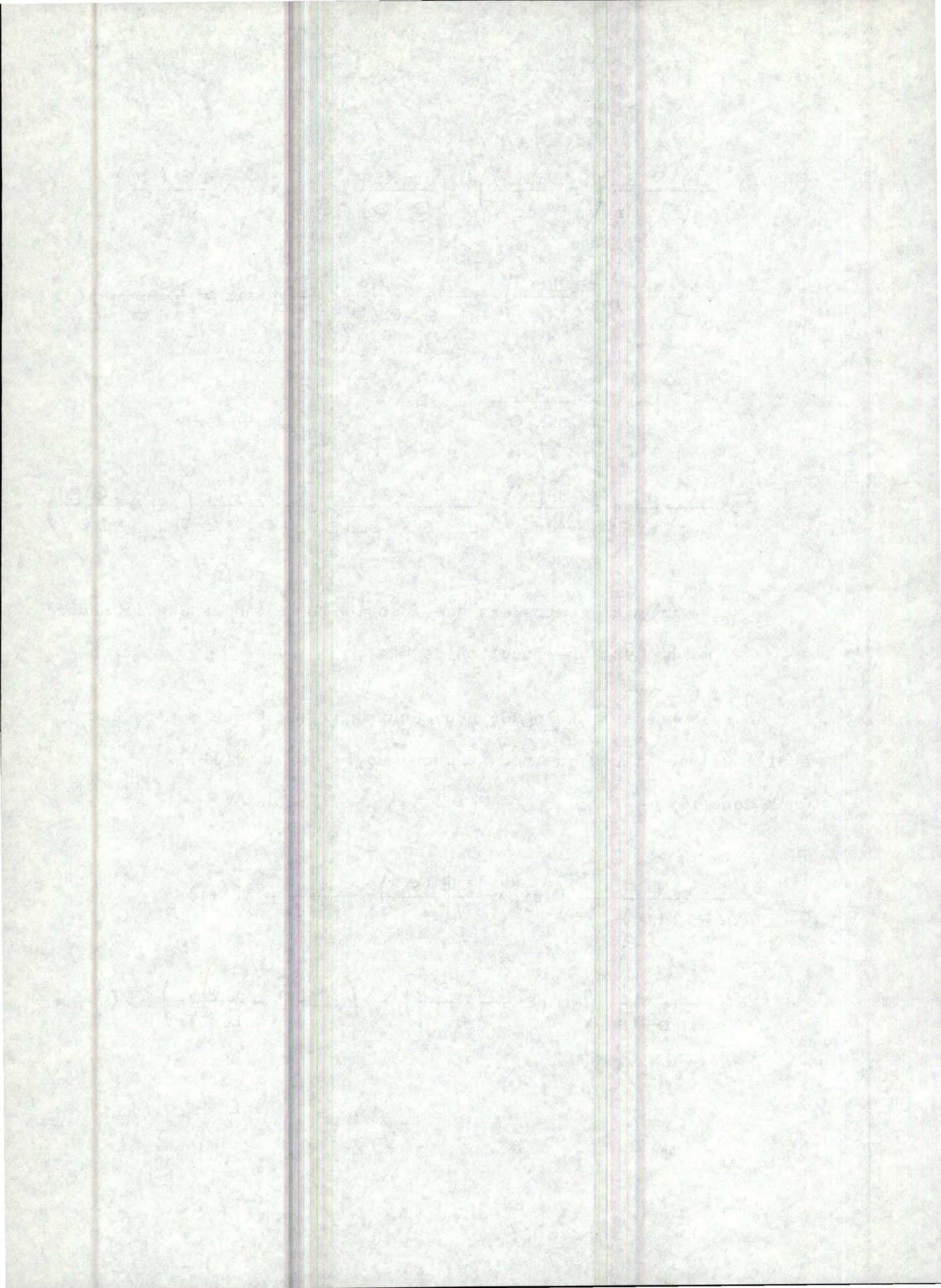
Par un raisonnement analogue, nous écrivons que chaque membre est égal à une constante que nous prenons comme étant $l(l+1)$.

On a donc :

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{1}{\Theta(\Theta)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sin \Theta \frac{d\Theta(\Theta)}{d\Theta} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \Theta} - l(l+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \Theta} \frac{d}{d\Theta} \left(\sin \Theta \frac{d\Theta(\Theta)}{d\Theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \Theta} \right) \Theta(\Theta) = 0$$

(A1.3)



$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l+1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - l(l+1) R(r) = 0 \quad (\text{A1.4})$$

Donc, en plaçant la valeur $V(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$ dans l'équation de Laplace (A1.1), nous obtenons un système de trois équations différentielles indépendantes, c'est-à-dire (A1.2) (A1.3) et (A1.4).

Pour déterminer les valeurs de $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$, $\Phi(\varphi)$, il nous reste à résoudre chacune de ces trois équations :

- la première équation (A1.2) est la plus simple; c'est une équation qui a une solution en $\cos m\varphi$ et $\sin m\varphi$

La solution de (A1.2) s'écrit :

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi$$

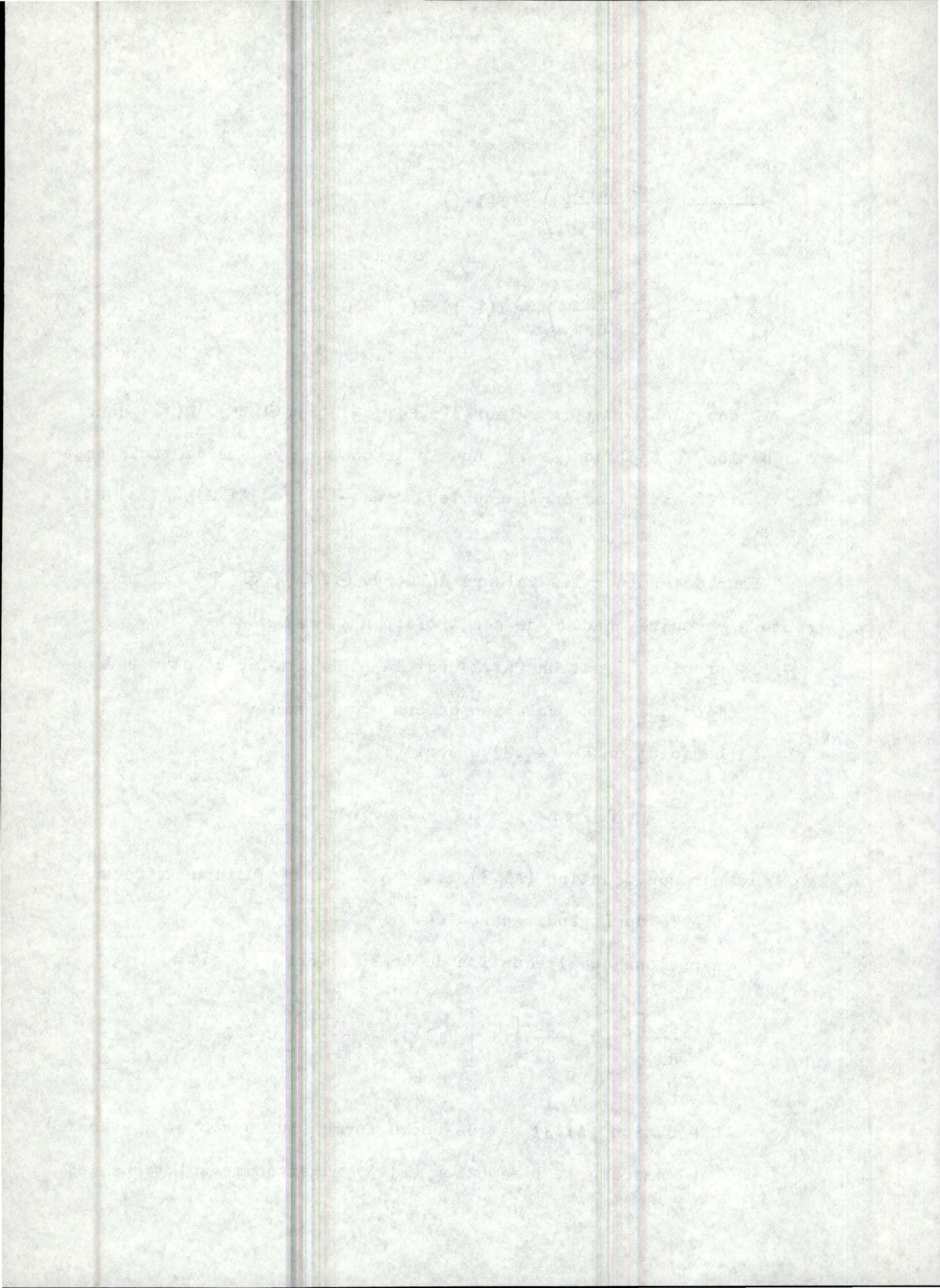
- la seconde équation (A1.3) est, en fait, l'équation différentielle de Legendre associée.

Rappelons que l'équation de Legendre associée est :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u = 0$$

L'équation (A1.3) est de cette forme (ici $u = \Theta$ et $x = \cos \vartheta$)

Par conséquent, l'équation (A1.3) admet comme solutions les



fonctions $P_1^m(\cos \Theta)$ et $Q_1^m(\cos \Theta)$ qui sont les fonctions de Legendre respectivement de première et seconde espèce.

La solution de (A1.3) s'écrit :

$$\Theta(\Theta) = A_2 P_1^m(\cos \Theta) + B_2 Q_1^m(\cos \Theta)$$

- la dernière équation (A1.4) est une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants.

On la résoud en faisant le changement de variable suivant :

$$r = e^y$$

On trouve finalement une solution en r^1 et $\frac{1}{r^{1+1}}$

La solution de (A1.4) s'écrit :

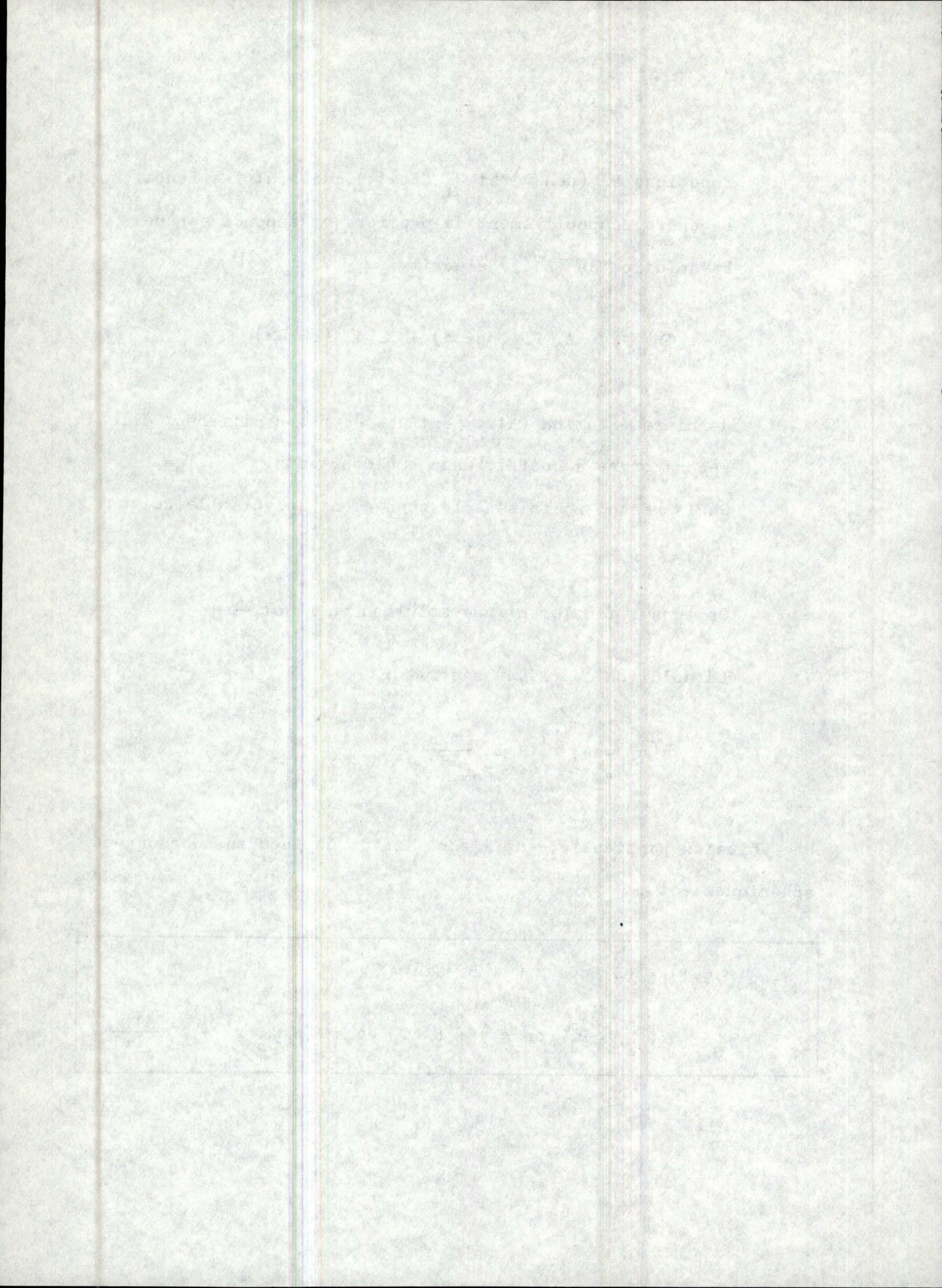
$$R(r) = A_3 r^1 + B_3 \frac{1}{r^{1+1}}$$

Une solution particulière de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est :

$$V_{1,m}(r, \Theta, \varphi) = (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi).$$

$$\left[A_2 P_1^m(\cos \Theta) + B_2 Q_1^m(\cos \Theta) \right] \cdot \left(A_3 r^1 + B_3 \frac{1}{r^{1+1}} \right)$$

(A1.5)



2. - CAS D'UNE SPHERE.

=====
 Considérons à présent le cas d'une seule sphère et cherchons pour cette sphère de rayon R l'expression du potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de cette sphère.

La solution de l'équation de Laplace, en coordonnées sphériques, trouvée en (A1.5) se simplifie fortement à cause de la symétrie et de la physique du problème.

A) Potentiel à l'intérieur de la sphère. ($r < R$)

- a) En premier lieu, le potentiel au centre de la sphère, c'est-à-dire en $r = 0$, est fini.

Par conséquent, le coefficient B_3 du terme $\frac{1}{r^{l+1}}$ doit être nul

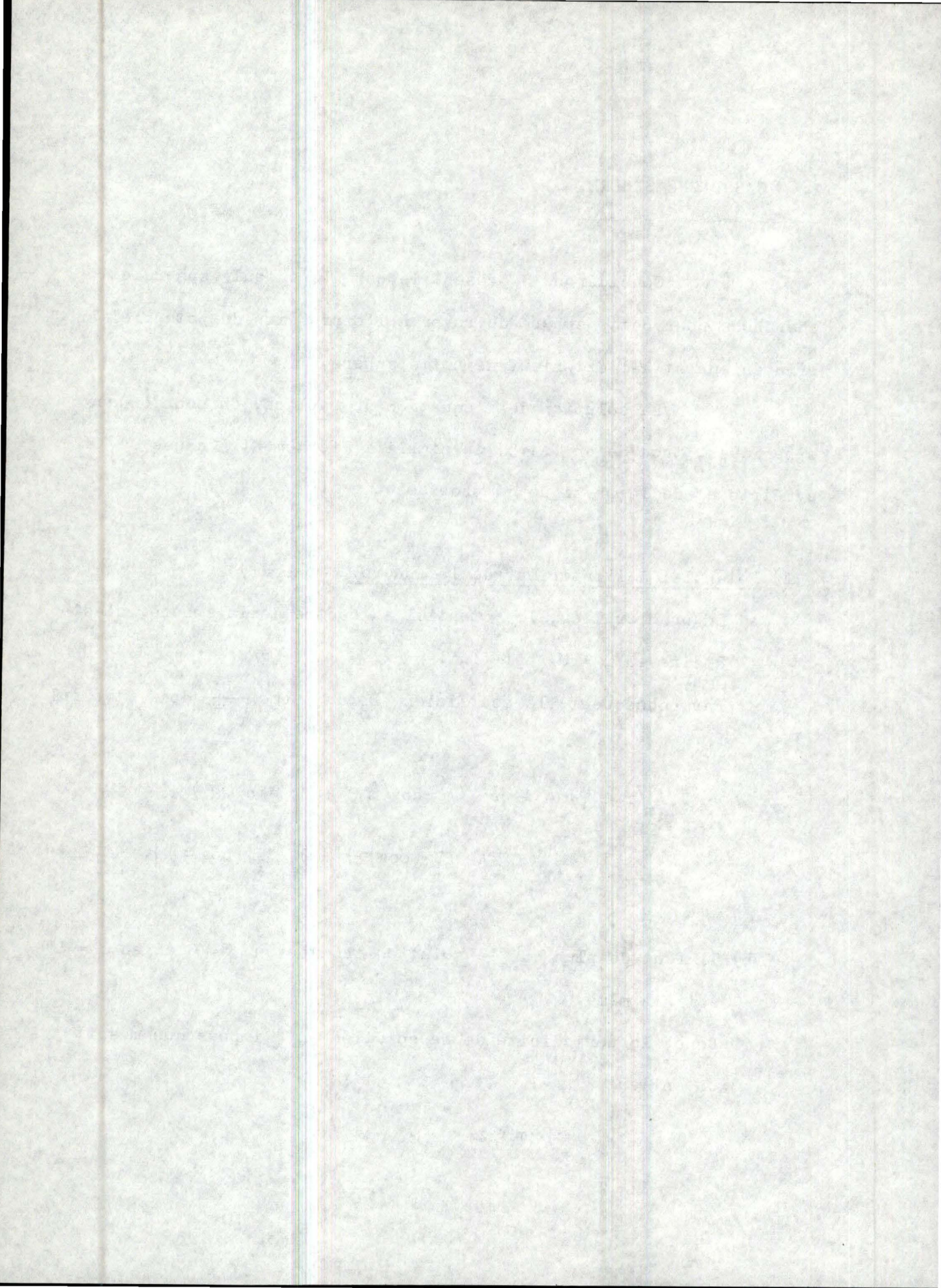
$$\Rightarrow V_{1,m}(r, \theta, \varphi) = A_3 r^l (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi) .$$

$$[A_2 P_1^m(\cos \theta) + B_2 Q_1^m(\cos \theta)]$$

- b) Il faut de plus que la solution trouvée en $\varphi = 0$ et en $\varphi = 2\pi$ soit la même.

Donc, la périodicité de la solution en φ impose que m soit un entier

$$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$



- c) Considérons à présent le cas des fonctions P_1^m et Q_1^m
 (= fonctions associées de Legendre respectivement de première et de seconde espèce).

La théorie générale concernant ces fonctions nous dit que les fonctions Q_1^m tendent vers l'infini lorsque $x \rightarrow \pm 1$. Or, l'angle θ varie dans l'intervalle $[0, \pi]$, c'est-à-dire que le cosinus de cet angle prend les valeurs ± 1 . Il en résulte donc qu'afin d'éviter que Q_1^m ne devienne infini, on doit imposer $B_2 = 0$.

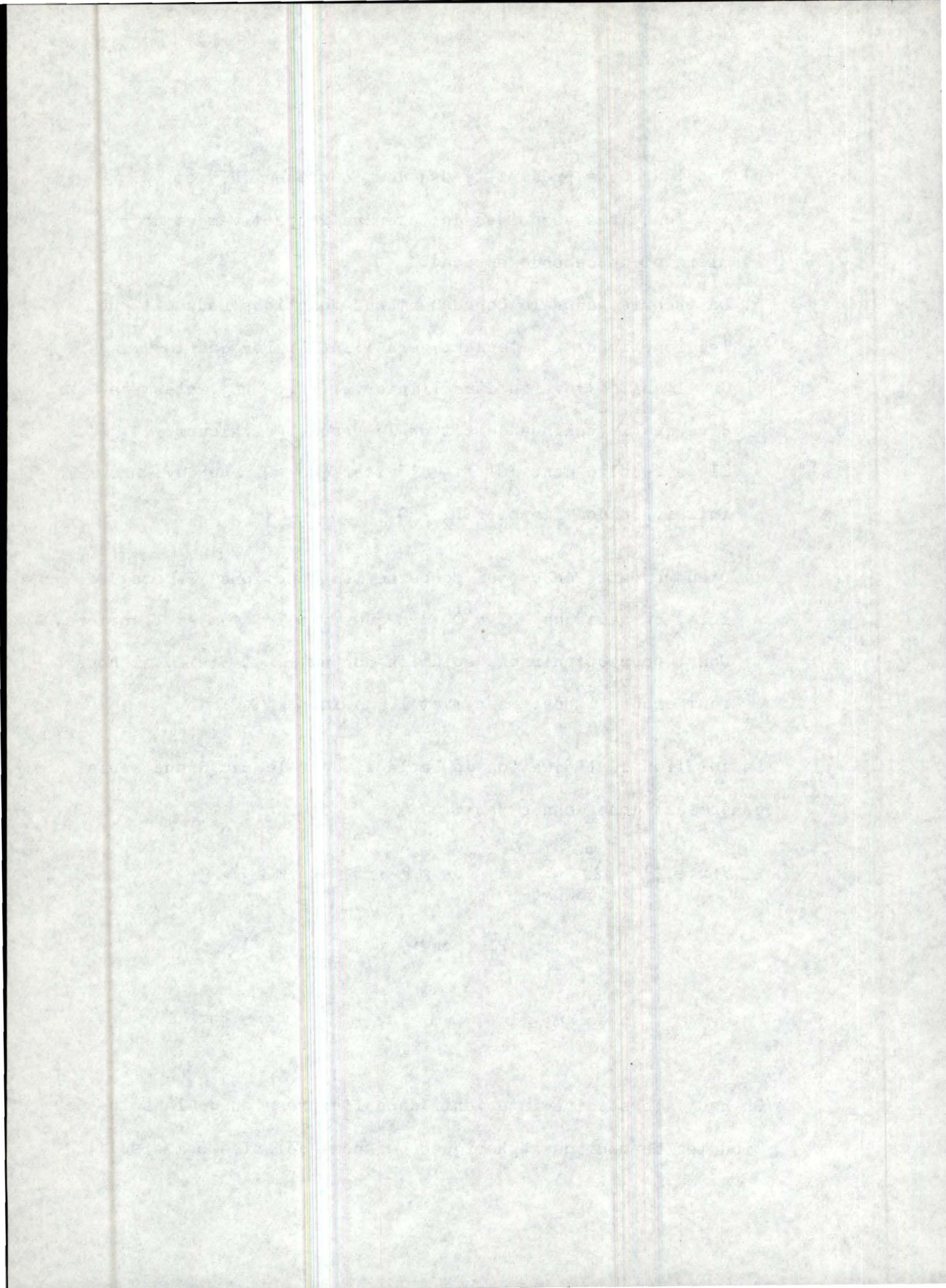
- d) D'autre part, en ce qui concerne les fonctions P_1^m cette fois, on sait que $P_1^m = 0$ dès que $|m| > 1$ m et l entiers. Donc, pour obtenir une solution non nulle et finie, il nous faut encore imposer sur m et l que $|m| \leq l$

La solution de l'équation de Laplace, dans le cas d'une seule sphère, est donc donnée par :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (A_1 \cos m\varphi + B_1 \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) r^l A_2 A_3$$

$$\text{avec } |m| \leq l \quad m, l \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

On peut alors faire intervenir dans l'expression de la solution les harmoniques sphériques qui sont définies comme suit:



$$\begin{cases} Y_{1(e)}^m(\theta, \varphi) = P_1^m(\cos \theta) \cos m \varphi \\ Y_{1(o)}^m(\theta, \varphi) = P_1^m(\cos \theta) \sin m \varphi \end{cases}$$

où e, o signifient "even" et "odd"

En termes de ces fonctions harmoniques, la solution s'écrit :

$$V^{IN}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^l \left(A_{ml} Y_{1(e)}^m(\theta, \varphi) + B_{ml} Y_{1(o)}^m(\theta, \varphi) \right)$$

(A1.6)

(les A_{ml} , B_{ml} sont déterminés en exploitant la relation d'orthogonalité des Y_1^m)

Ceci exprime la valeur du potentiel à l'intérieur de la sphère.

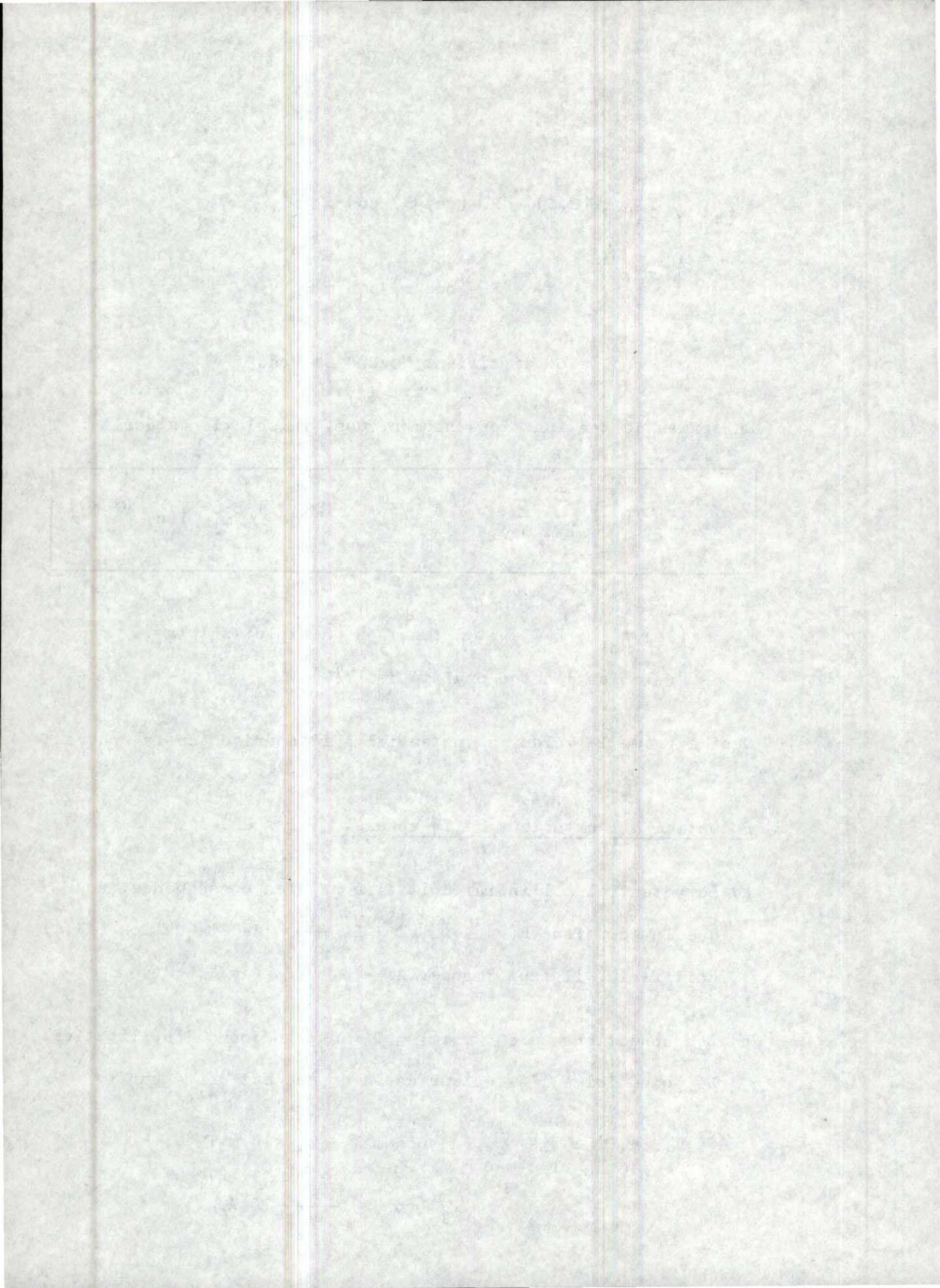
B) Potentiel à l'extérieur de la sphère. ($r > R$)

a) Le potentiel à l'infini doit être nul; en conséquence, pour que la solution $R(r) = A_3 r^1 + B_3 \frac{1}{r^{1+1}}$ de l'équation (A1.4) soit finie, il faut imposer $A_3 = 0$.

b) Les conditions $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l$ sont toujours d'application.

→ Le potentiel à l'extérieur de la sphère est donné par :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (A_1 \cos m \varphi + B_1 \sin m \varphi) P_1^m(\cos \theta) \frac{1}{r^{1+1}} B_3 A_2$$

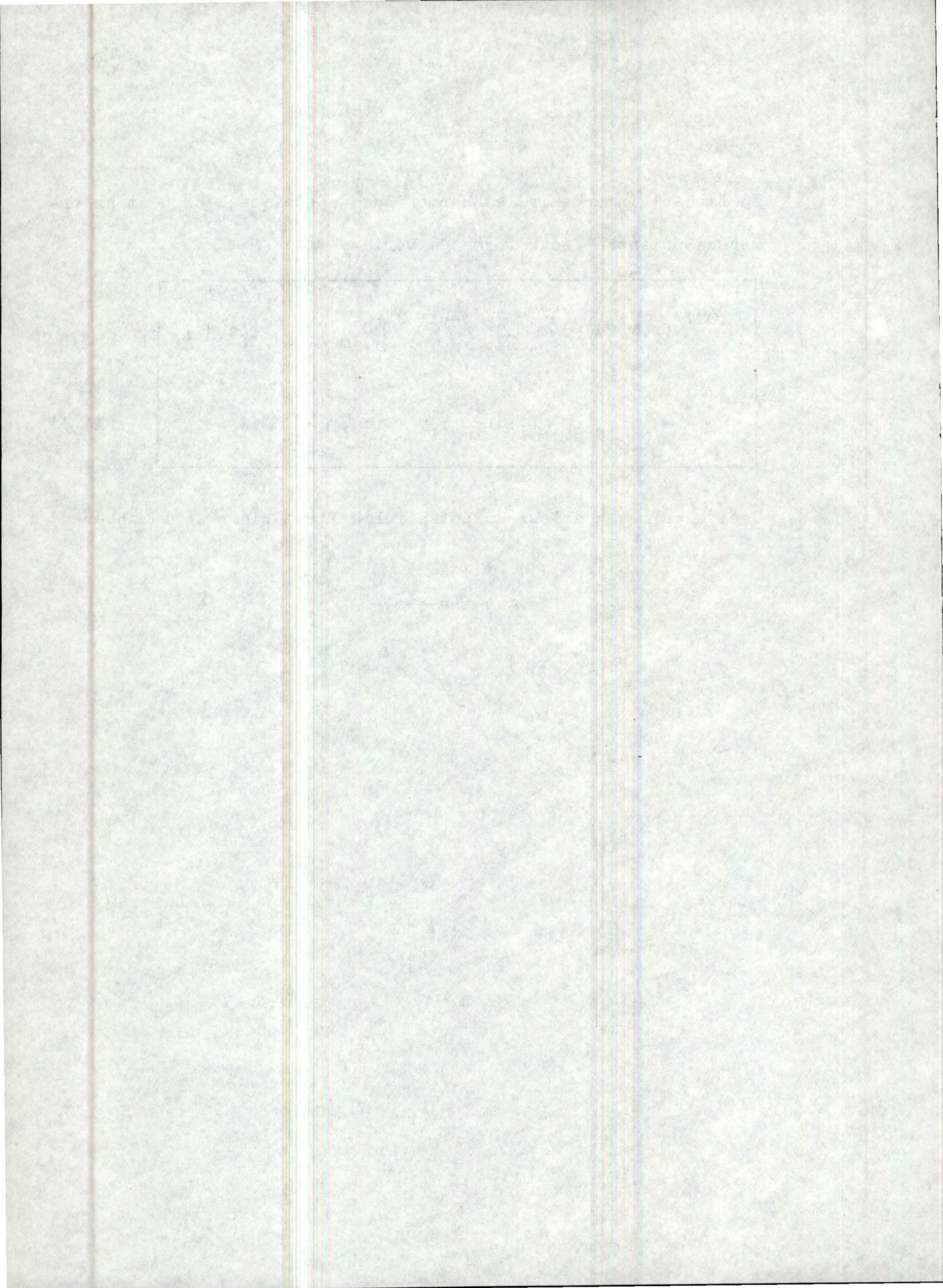


En faisant intervenir les harmoniques sphériques, on peut exprimer ce potentiel sous forme de série :

$$\begin{aligned}
 v^{\text{OUT}}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^{-(l+1)} & \left[c_{lm} Y_{l(e)}^m(\theta, \varphi) \right. \\
 & \left. + d_{lm} Y_{l(o)}^m(\theta, \varphi) \right] \quad (\text{A1.7})
 \end{aligned}$$

Ceci exprime la valeur du potentiel à l'extérieur de la sphère.

=====



ANNEXE 2.

~~~~~

THEOREME D'ADDITION : TRANSFORMATION  
DES HARMONIQUES SPHERIQUES PAR  
CHANGEMENT DE L'ORIGINE.

Définition.

=====

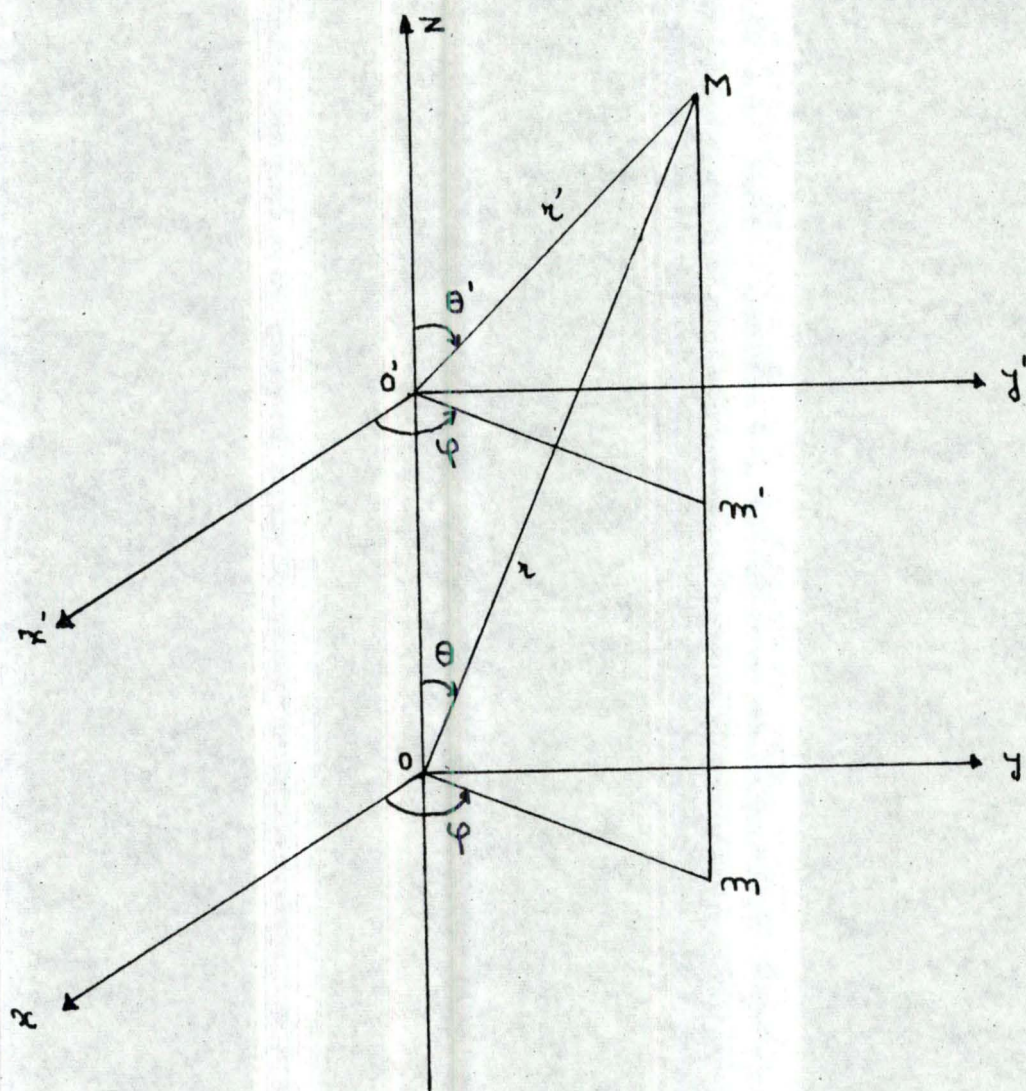
On appelle harmonique sphérique de degré ou d'ordre  $n$  une fonction homogène  $u(x, y, z)$  de degré  $n$  qui vérifie l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$  ( $n$  entier).

Une harmonique sphérique ordinaire quelconque, d'ordre  $n$ , étant une forme linéaire des  $(2n + 1)$  harmoniques  $r^n P_n(\cos \theta)$ ,  $r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ ,  $r^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi$ , il suffit d'établir les formules de transformation pour ces dernières harmoniques.

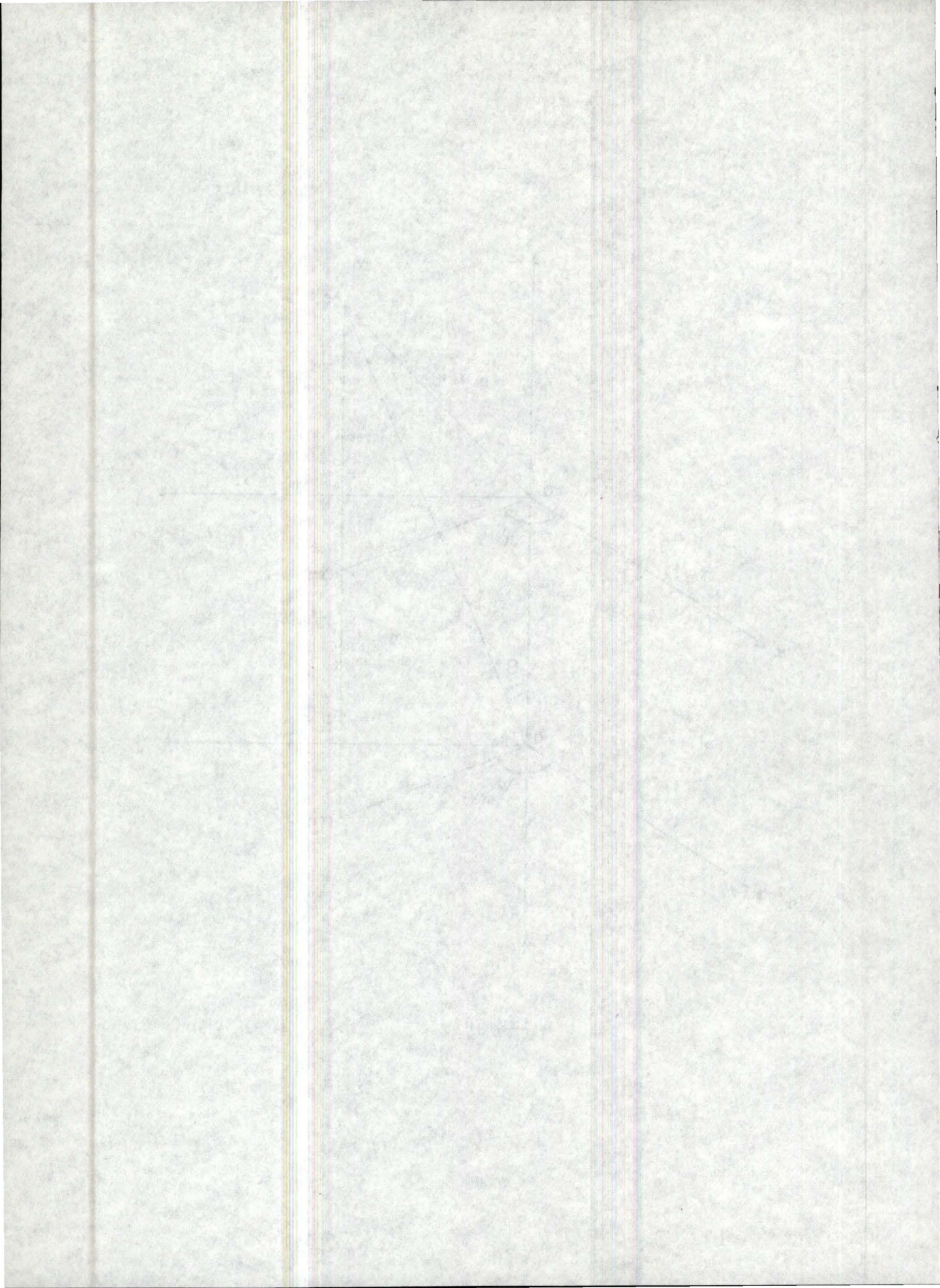
Le but est d'exprimer

$$r^n P_n(\cos \theta) \quad \text{et} \quad \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$$

en fonction du changement de l'origine, c'est-à-dire dans les variables  $\theta'$  et  $r'$  (voir fig. 1)



( fig. 1 )



D'après les expressions des fonctions de première espèce

$P_n^m(\mu)$ ,  $P_n^m(\cos \theta)$  sous forme de développements limités, on a,  
avec  $n, m$  entiers

$$|m| \leq n$$

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \frac{(-1)^m}{2^m} (n+m)! r^m \sin^m \theta \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}.$$

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} r^{2p} \sin^{2p} \theta}{2^{2p} p! (m+p)! (n-m-2p)!}$$

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \frac{\xi^m + \eta^m}{i}.$$

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi\eta)^p}{2^{2p} p! (m+p)! (n-m-2p)!} \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{où } \xi = x + iy = r \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$\eta = x - iy = r \sin \theta e^{-i\varphi}$$



Si on suppose  $k \leq n - m$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \left[ r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right] = \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \frac{\xi^m + \eta^m}{\xi^m - \eta^m} \cdot$$

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-m-k}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-k-2p} (\xi\eta)^p}{2^{2p} p! (m+p)! (n-m-k-2p)!}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-k} P_{n-k}^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \quad (\text{A2.2})$$

Si  $k > n - m$  les deux membres de (A2.2) s'annulent.

Cas particulier : pour  $m = 0, k \leq n$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \left[ r^n P_n(\cos \theta) \right] = \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k} P_{n-k}(\cos \theta) \quad (\text{A2.3})$$

Calculons de façon analogue :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^1 + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^1 \right] \left[ r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \right] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p}}{2^{2p} p! (m+p)! (n-m-2p)!} \cdot \end{aligned}$$

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^1 + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^1 \right] \left[ \xi^{m+p} \eta^p + \xi^m \eta^{m+p} \right]$$

$$\text{Or : } \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^1 + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^1 \right] \left[ \xi^{m+p} \eta^p + \xi^m \eta^{m+p} \right]$$

$$= \frac{(m+p)!}{(m+p-1)!} (\xi \eta)^p (\xi^{m-1} + \eta^{m-1}) + \frac{p!}{(p-1)!} (\xi \eta)^{p-1} (\xi^{m+1} + \eta^{m+1})$$

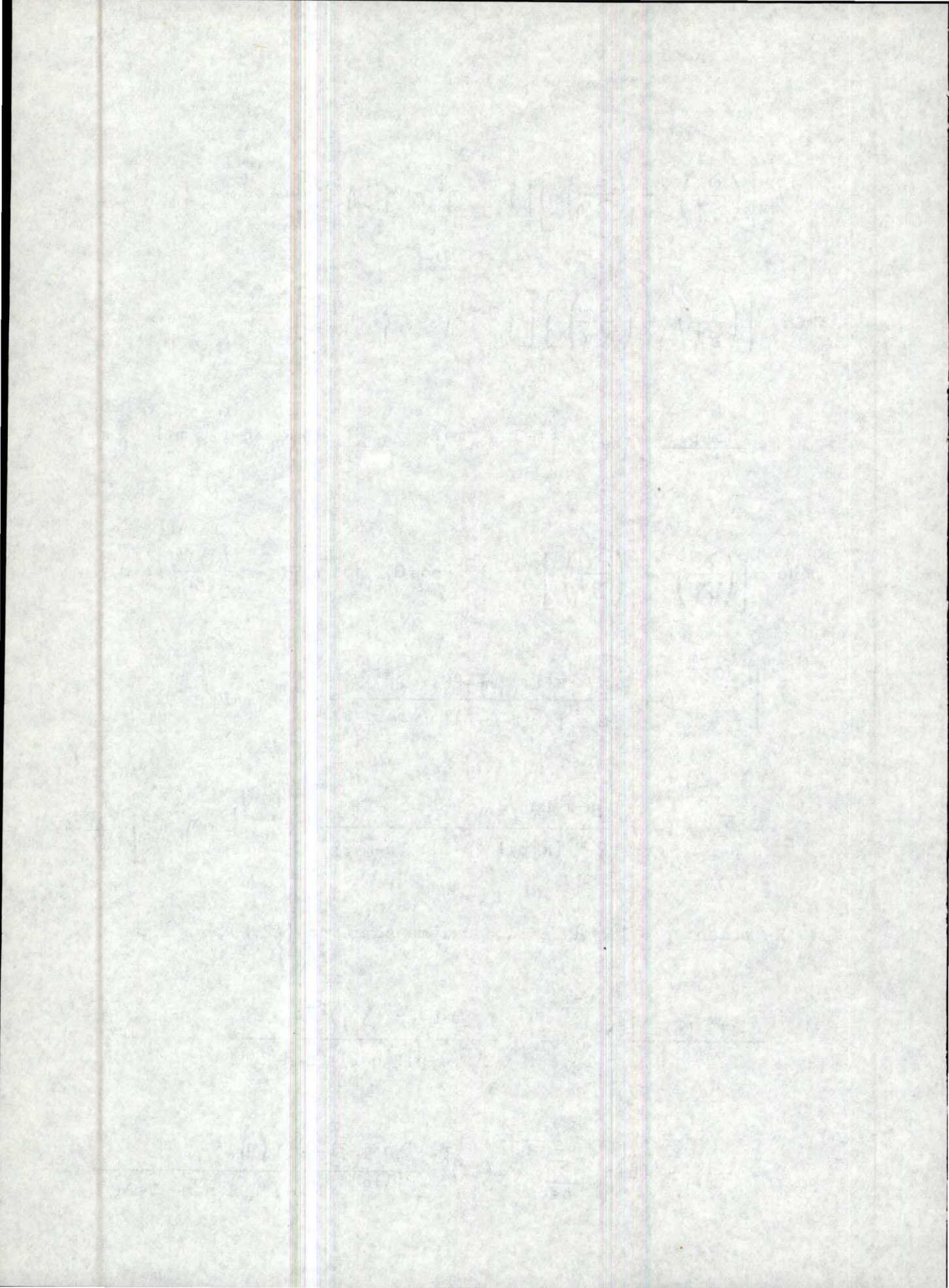
$$\text{Donc : } \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^1 + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^1 \right] r^n P_n^m (\cos \theta) \cos m \varphi = \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! .$$

$$\left[ \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi \eta)^p}{2^{2p} p! (m-1+p)! (n-m-2p)!} (\xi^{m-1} + \eta^{m-1}) \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi \eta)^{p-1}}{2^{2p} (m+p)! (p-1)! (n-m-2p)!} (\xi^{m+1} + \eta^{m+1}) \right] \quad (\text{A2.4})$$

1) En posant  $p = 1+q$  dans la deuxième somme de (A2.4), on a :

$$\frac{(-1)^m (n+m)!}{2^{m+1}} \sum_{p=1}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi \eta)^{p-1}}{2^{2p} (m+p)! (p-1)! (n-m-2p)!} (\xi^{m+1} + \eta^{m+1})$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} (n+m)! \sum_{q=0}^{\frac{n-m-21}{2}} (-1)^q \frac{z^{n-m-21-2q} (\xi \eta)^q}{2^{2(1+q)} q! (m+1+q)! (n-m-21-2q)!} .$$



$$(\xi^{m+1} + \eta^{m+1})$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^m (n+m)!}{2^{m+1}} \sum_{p=1}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi\eta)^{p-1}}{2^{2p} (m+p)! (p-1)! (n-m-2p)!} (\xi^{m+1} + \eta^{m+1})$$

$$= \frac{1}{2^1} r^{n-1} P_{n-1}^{m+1} (\cos \theta) \cos(m+1)\varphi \quad \text{en vertu de (A2.1)}$$

2) Pour la première somme de (A2.4), il faut distinguer le cas suivant le signe de  $(m-1)$ .

a) si  $m-1 \geq 0$ , ce terme s'écrit, en vertu de (A2.1) :

$$(-1)^1 \frac{(n+m)!}{2^1 (m+n-21)!} r^{n-1} P_{n-1}^{m-1} (\cos \theta) \cos(m-1)\varphi$$

et alors (A2.4) devient :

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^1 + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^1 \right] \left[ r^n P_n^m (\cos \theta) \cos m\varphi \right]$$

$$= \frac{(-1)^1}{2^1} \frac{(n+m)!}{(n+m-21)!} r^{n-1} P_{n-1}^{m-1} (\cos \theta) \cos(m-1)\varphi$$

$$+ \frac{1}{2^1} r^{n-1} P_{n-1}^{m+1} (\cos \theta) \cos(m+1)\varphi \quad (\text{A2.5})$$



Remarque :

si  $n - m < 2l$ , le deuxième terme de droite s'annule. Ceci est dû à la fonction de Legendre :

$$P_{n+1}^{m+1} = 0 \quad \text{si } m+1 < n+1$$

b) si  $m - 1 < 0$ , la première somme de (A2.4) s'écrit :

$$\frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \sum_{p=1-m}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi\eta)^p (\xi^{m-1} + \eta^{m-1})}{2^{2p} p! (m-1+p)! (n-m-2p)!}$$

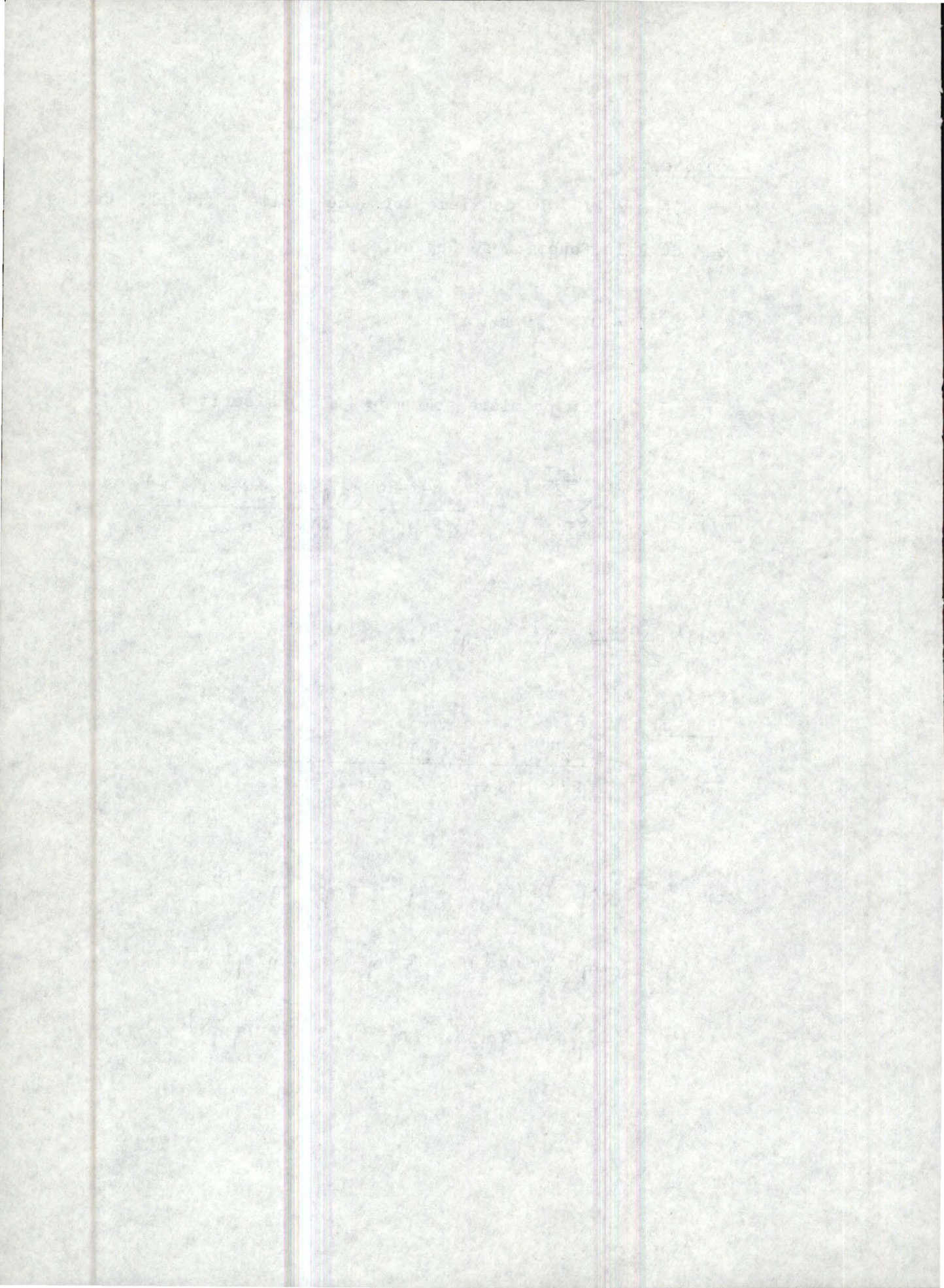
$$= (-1)^1 \frac{(n+m)!}{2^{2l-m+1}} (\xi^{1-m} + \eta^{1-m}).$$

$$\sum_{q=0}^{\frac{n+m-2l}{2}} (-1)^q \frac{z^{n+m-2l-2q} (\xi\eta)^q}{2^{2q} q! (1+m-q)! (n+m-2l-2q)!}$$

$$\text{car } (\xi^{m-1} + \eta^{m-1}) (\xi\eta)^p = \xi^{m-1+p} \eta^p + \eta^{m-1+p} \xi^p$$

$$(\xi^{m-1} + \eta^{m-1}) (\xi\eta)^p = \xi^q \eta^{1+q-m} + \eta^q \xi^{1+q-m}$$

$$(\xi^{m-1} + \eta^{m-1}) (\xi\eta)^p = (\eta^{1-m} + \xi^{1-m}) (\xi\eta)^q$$



$$\frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \sum_{p=1-m}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{z^{n-m-2p} (\xi\eta)^p (\xi^{m-1} + \eta^{m-1})}{2^{2p} p! (m-1+p)! (n-m-2p)!}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} r^{n-1} P_{n-1}^{l-m}(\cos \theta) \cos(l-m)\varphi \quad \text{en utilisant (A2.1)}$$

et alors (A2.4) est :

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^l + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^l \right] r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$$

$$= \frac{1}{2^l} r^{n-1} P_{n-1}^{m+1}(\cos \theta) \cos(m+1)\varphi$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} r^{n-1} P_{n-1}^{l-m}(\cos \theta) \cos(l-m)\varphi \quad (\text{A2.6})$$

Remarque : si  $2l > n-m$ , le premier terme de droite est nul et si  $2l > n+m$ , les deux membres de (A2.6) s'annulent.

En appliquant  $i \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^l - \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^l \right]$  à  $r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$

et  $\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^l + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^l \right]$  à  $r^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi$

on obtient des résultats analogues aux précédents.

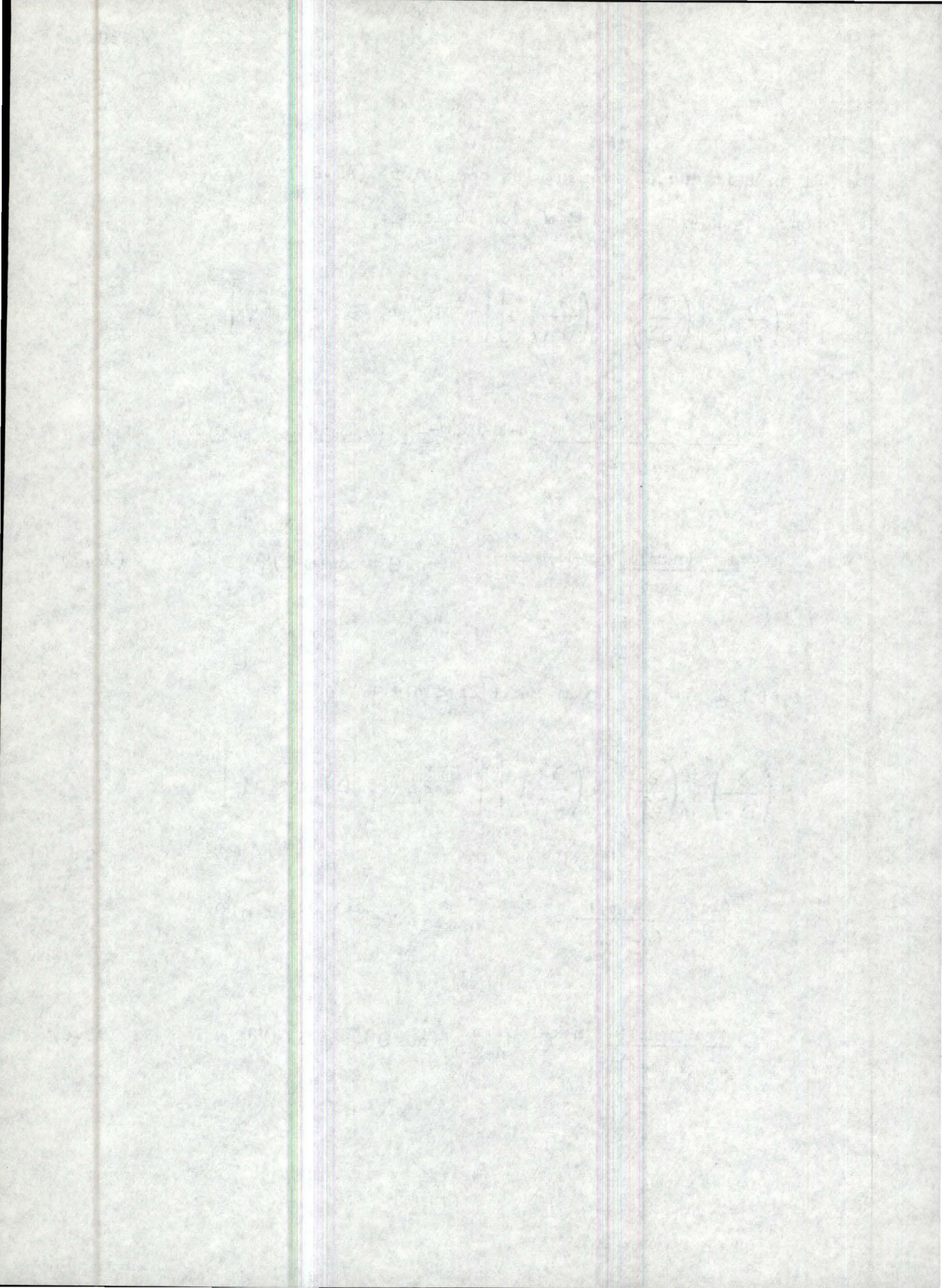


Si on fait successivement les opérations (A2.2) et (A2.4) pour  $k \leq n - m$  et  $l \leq m$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^l + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^l \right] \left[ r^n P_n^m (\cos \theta) \cos m\varphi \right] \\ &= \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n+m-k-2l)!} r^{n-k-l} P_{n-k-l}^{m-l} (\cos \theta) \cos(m-l)\varphi \\ &+ \frac{1}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-k-l} P_{n-k-l}^{m-l} (\cos \theta) \cos(m+1)\varphi \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

et si  $k \leq n - m$ ,  $l > m$ ,  $k + 2l \leq n + m$ , on a :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^l + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^l \right] \left[ r^n P_n^m (\cos \theta) \cos m\varphi \right] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n-m-k)!} r^{n-k-l} P_{n-k-l}^{l-m} (\cos \theta) \cos(l-m)\varphi \\ &+ \frac{1}{2^l} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} r^{n-k-l} P_{n-k-l}^{l+m} (\cos \theta) \cos(l+m)\varphi \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$



En particulier, pour  $m = 0$ ,  $k + 21 \leq n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \left[ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^l + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^l \right] r^n P_n^m(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2^{l-1}} \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k-1} P_{n-k-1}^l(\cos \theta) \cos l\varphi$$

En prenant maintenant une nouvelle origine de coordonnées  $O'$  sur l'axe  $OZ$ , comme indique (fig. 1), on peut écrire d'après (A2.1) :

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \frac{\xi^m + \eta^n}{\xi^m - \eta^n} \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(z'+c)^{n-m-2p} (-\eta)^p}{2^{2p} p! (m+p)! (n-m-2p)!}$$

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \frac{\xi^m + \eta^n}{\xi^m - \eta^n} \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-\eta)^p}{2^{2p} p! (m+p)!}$$

$$\sum_{q=0}^{n-m-2p} \frac{c^q z'^{n-m-2p-q}}{q! (n-m-2p-q)!}$$

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} (n+m)! \frac{\xi^m + \eta^m}{\xi^m - \eta^m} \sum_{q=0}^{n-m} \frac{c^q}{q!} .$$

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-m-q}{2}} \frac{z'^{n-m} (-\eta)^p}{2^{2p} q! (m+p)! (n-m-2p-q)!}$$

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$= (n+m)! \sum_{q=0}^{n-m} \frac{c^q}{q!} \frac{r'^{n-q}}{(n+m-q)!} P_{n-q}^m(\cos \theta') \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \quad (\text{A2.9})$$

Une harmonique sphérique d'ordre  $n$  et d'origine  $O$  est ainsi la somme de  $(n - m + 1)$  harmoniques sphériques, d'origine  $O'$  et de degré  $n, n - 1, \dots, m$ .

Si  $m = 0$ , on a :

$$r^n P_n(\cos \theta) = n! \sum_{p=0}^n \frac{c^p}{p!} \frac{r'^{n-p}}{(n-p)!} P_{n-p}(\cos \theta') \quad (\text{A2.10})$$

Si on considère maintenant les harmoniques sphériques de degré  $(-n - 1)$ , on a :

$$\frac{P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi}{r^{n+1}} \sin m\varphi$$

$$= (-1)^{n-m} \frac{2^{m-1}}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^m + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^m \right] \frac{1}{r}$$

$$i \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^m + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^m \right]$$

Et en appliquant la formule de Taylor :

$$\frac{1}{r} = \left[ \rho + (z'+c)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial z'^p} \frac{1}{r'} \quad \text{pourvu que la s\u00e9rie converge.}$$

$$\text{o\u00f9 } r'^2 = \rho + z'^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{car } 0 z = 0 z')$$

$$\text{or } \frac{1}{r} = (r'^2 + 2z'c + c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r} = (r'^2 + 2r'c \cos \theta' + c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \left( 1 + 2\frac{c}{r'} \cos \theta' + \frac{c^2}{r'^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$



si  $c < r'$

---

Posons  $h = \frac{c}{r'}$

Alors  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} (1 + 2h \cos \theta' + h^2)^{-\frac{1}{2}}$

et les racines de  $h^2 + 2h \cos \theta' + 1$

sont  $h = -\cos \theta' \pm i \sin \theta'$

qui sont les seuls points singuliers de  $\frac{1}{r}$  et de module égal à  $r$ .

D'après la théorie des fonctions d'une variable complexe, la série :

$$(1 + 2h \cos \theta' + h^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} h (2 \cos \theta' - h) \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} h^n (2 \cos \theta' - h)^n + \dots$$

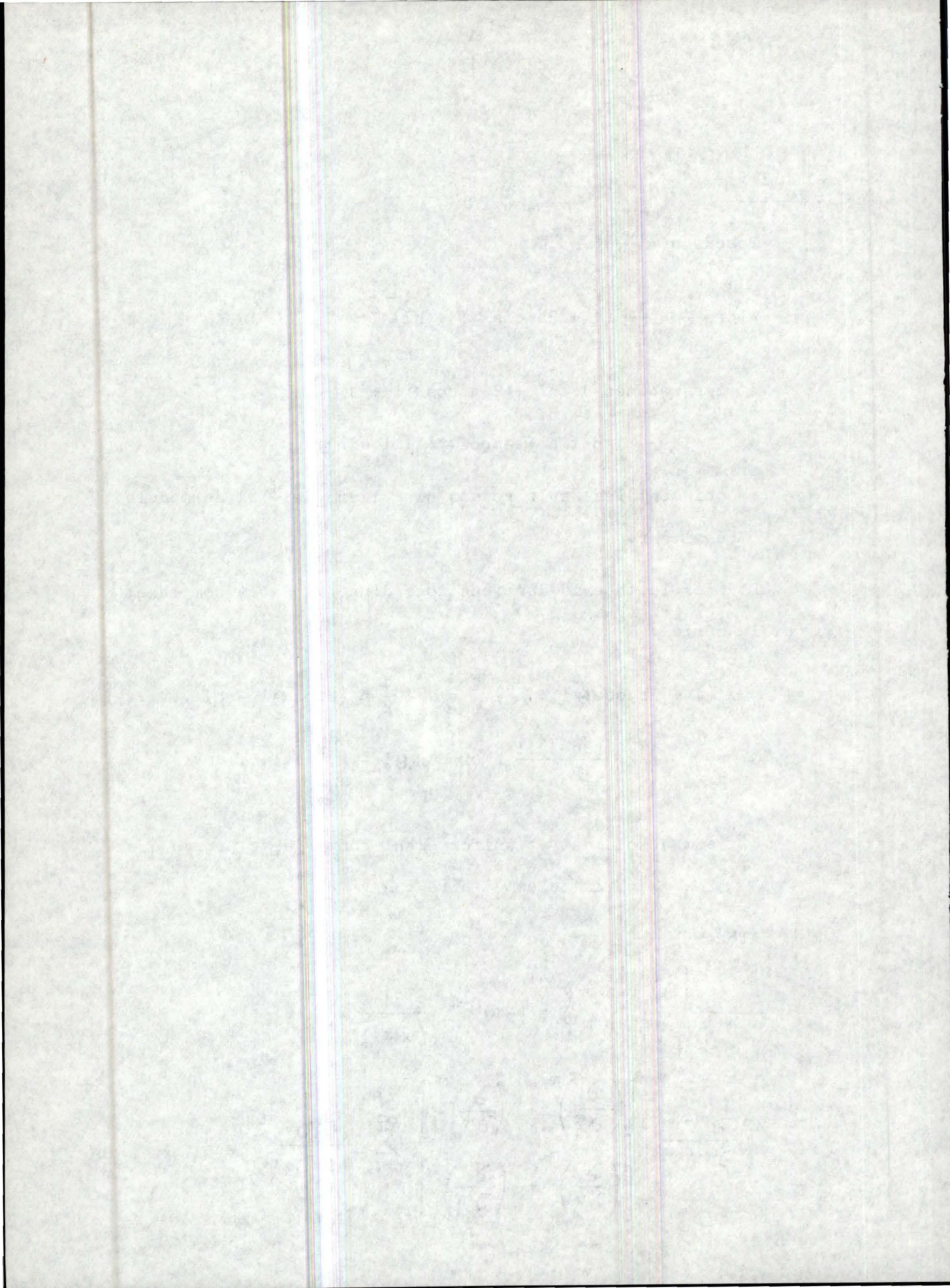
est absolument et uniformément convergente pourvu que  $h < 1$  c'est-à-dire  $c < r'$

Alors

$$\frac{P_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} = (-1)^{n-m} \frac{2^{m-1}}{(n-m)!} .$$

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z'^{n-m}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^m + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^m \right] \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial z'^p} \frac{1}{r}$$

$$i \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^m + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^m \right]$$





$$\frac{P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi}{r^{n+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p-m)!}{p! (n-m)!} \sin m\varphi$$

$$c^p \frac{P_{n+p}^m(\cos \theta') \cos m\varphi}{r'^{n+p+1}} \sin m\varphi \quad (\text{A2.11})$$

Pour  $m = 0$ ,  $c < r'$

$$\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p)!}{p! n!} c^p \frac{P_{n+p}(\cos \theta')}{r'^{n+p+1}} \quad (\text{A2.12})$$

si  $c > r'$ , on a :

$$\frac{1}{r} = (c^2 + 2cr' \cos \theta' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{r'^p}{c^{p+1}} P_p(\cos \theta')$$

les points  $O'$  et  $M$  étant considérés comme fixes  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial c}$

et alors :

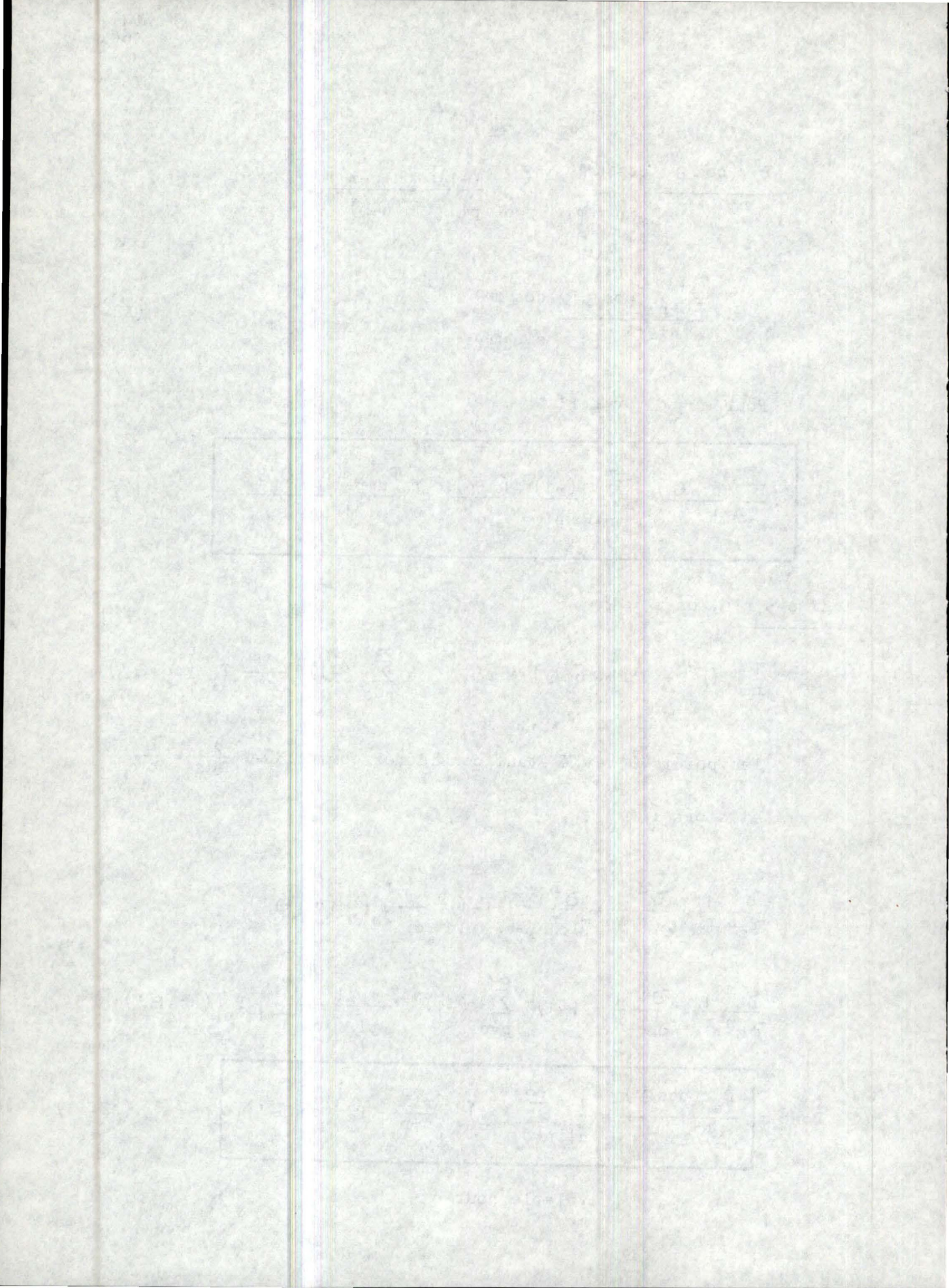
$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r} = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \frac{1}{r} = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{r'^p}{c^{p+1}} P_p(\cos \theta')$$

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r} = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \frac{1}{r} = (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p)!}{p!} \frac{r'^p}{c^{n+p+1}} P_p(\cos \theta')$$

Donc :

$$\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{r'^p}{c^{n+p+1}} P_p(\cos \theta') \quad (\text{A2.13})$$

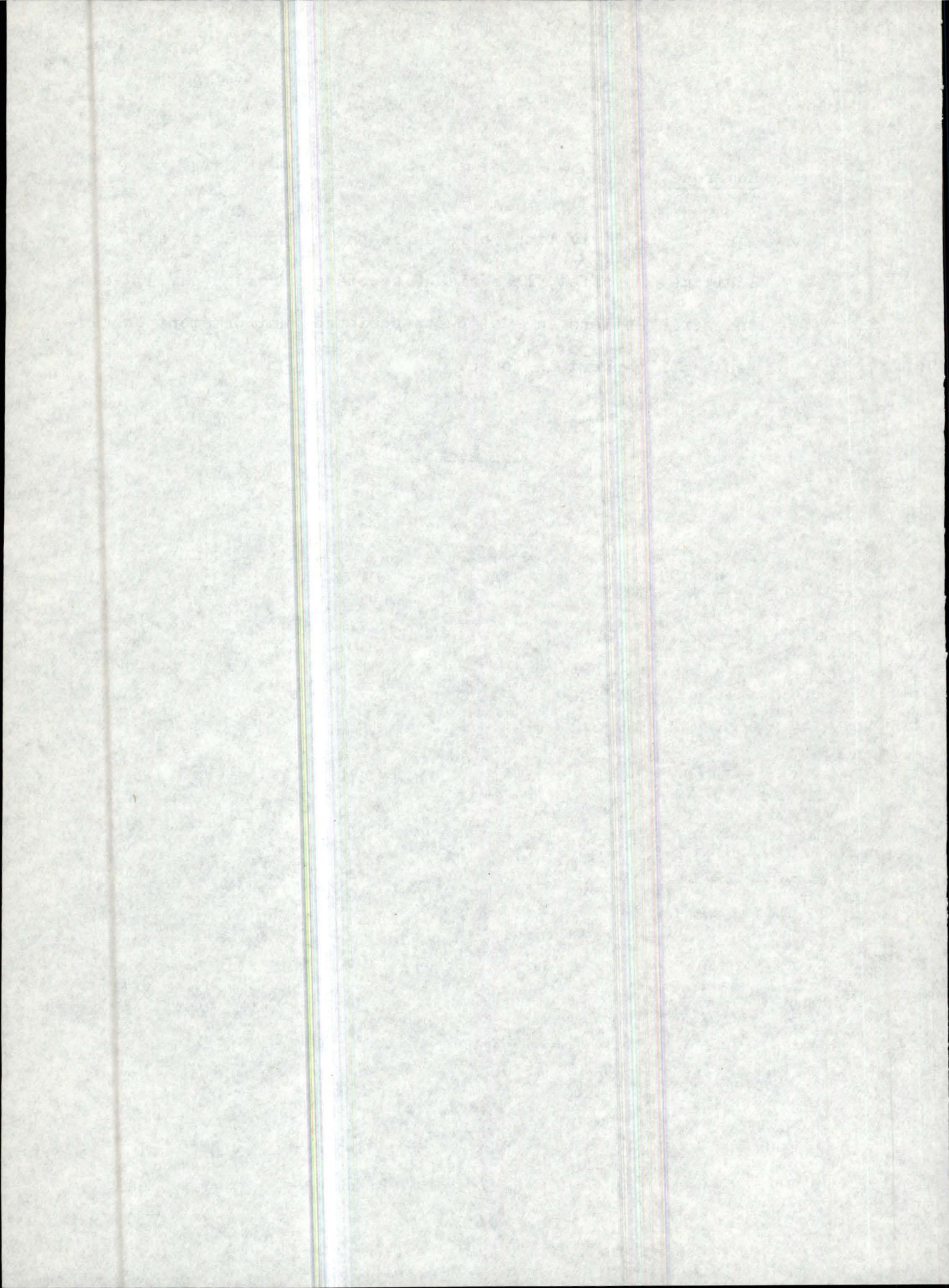
valable pour  $c > r'$



Remarque.

La dérivation de la série par rapport à  $c$  est légitime. En effet, la série du second membre de (A2.13) est une série entière en  $\frac{1}{c}$  et cette série est uniformément convergente par rapport à  $\frac{1}{c}$  ou  $c$ .

=====





COMPTON

1914

## CONCLUSION.

~~~~~

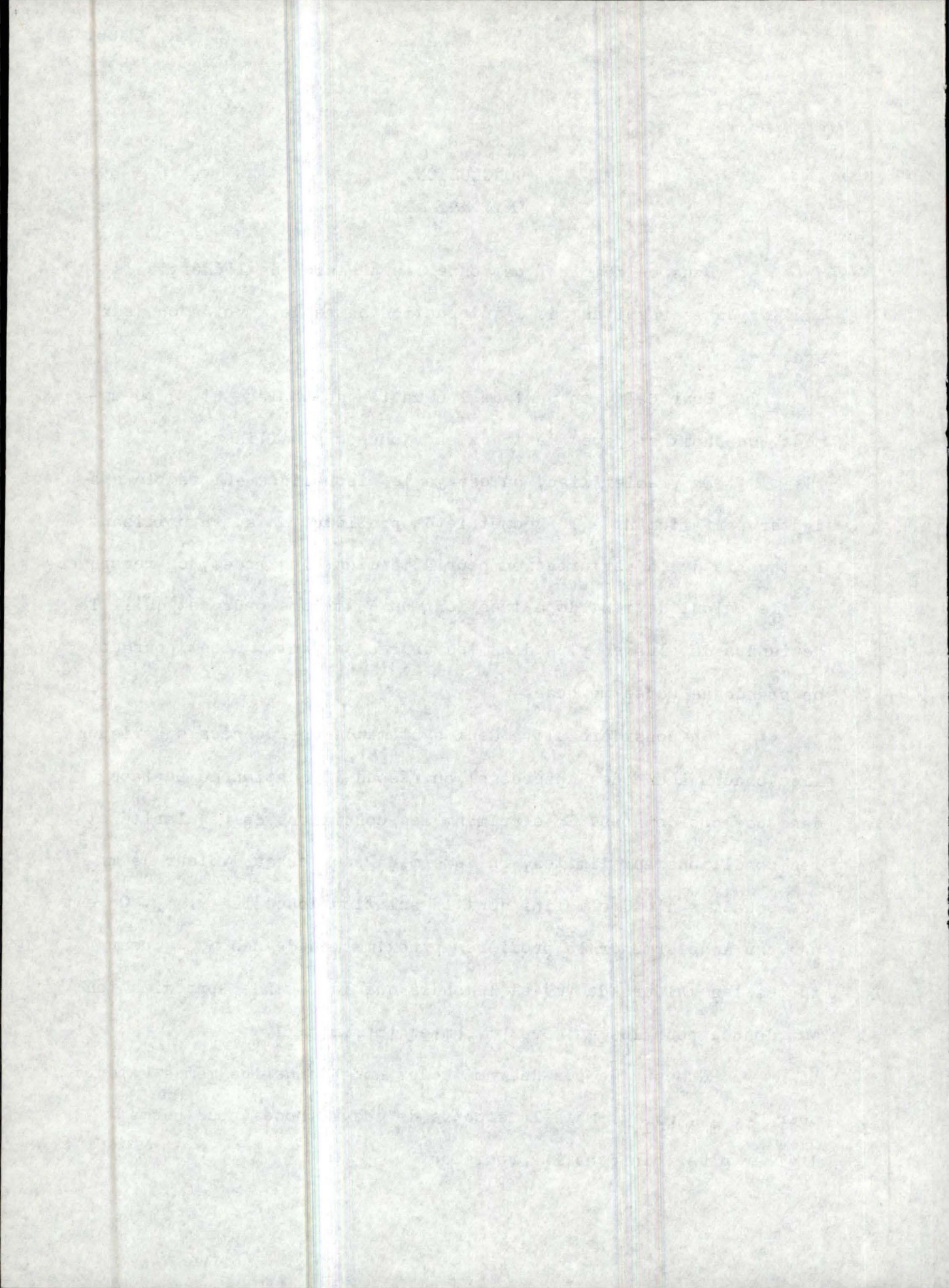
Dans ce mémoire, on donne l'expression de l'énergie de Van der Waals résultant de l'interaction entre deux voids ou deux sphères.

Pour cela, on part de l'équation de Laplace et, à ce moment, un choix s'opère quant aux coordonnées à utiliser.

En premier lieu, on essayé le bisphérique qui semble s'adapter parfaitement à la géométrie du problème. Mais, en utilisant la théorie de la perturbation pour déterminer les modes, on remarque que le calcul devient déjà très long au quatrième ordre et qu'il le deviendra de plus en plus dans les ordres suivants. C'est pourquoi on abandonne cette méthode.

On considère alors deux systèmes de coordonnées sphériques liés chacun à une des sphères et on résoud l'équation de Laplace dans ces coordonnées. En exprimant les conditions de régularité et les conditions aux limites, on détermine pour chaque valeur de m une équation d'ordre infini dont la solution donne les $\epsilon_{1,m}$. On est parvenu à déterminer la première approximation de ces $\epsilon_{1,m}$ pour toutes les valeurs de $|m|$ et l tandis que la seconde approximation est donnée pour les valeurs $|m|, |m|$ et $|m|, |m| + 1$.

Chacune de ces deux méthodes nous donne les mêmes valeurs pour $\epsilon_{1,m}$, $\omega_{1,m}$ mais la seconde de ces méthodes nous permet d'aller plus loin dans la précision.



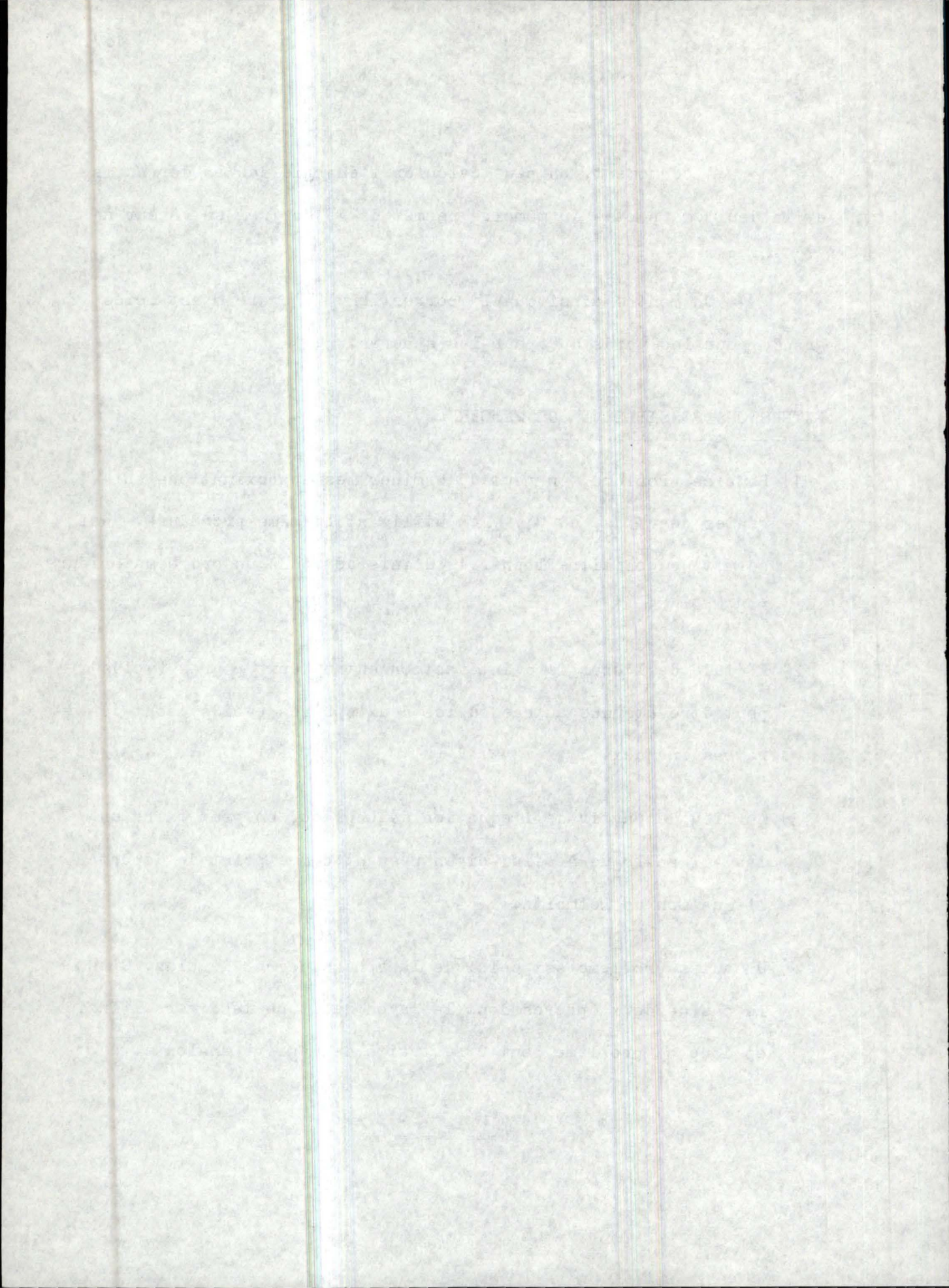
A ce moment, on peut calculer l'énergie de Van der Waals et la deuxième partie du mémoire permet de déterminer sa valeur à l'ordre 8.

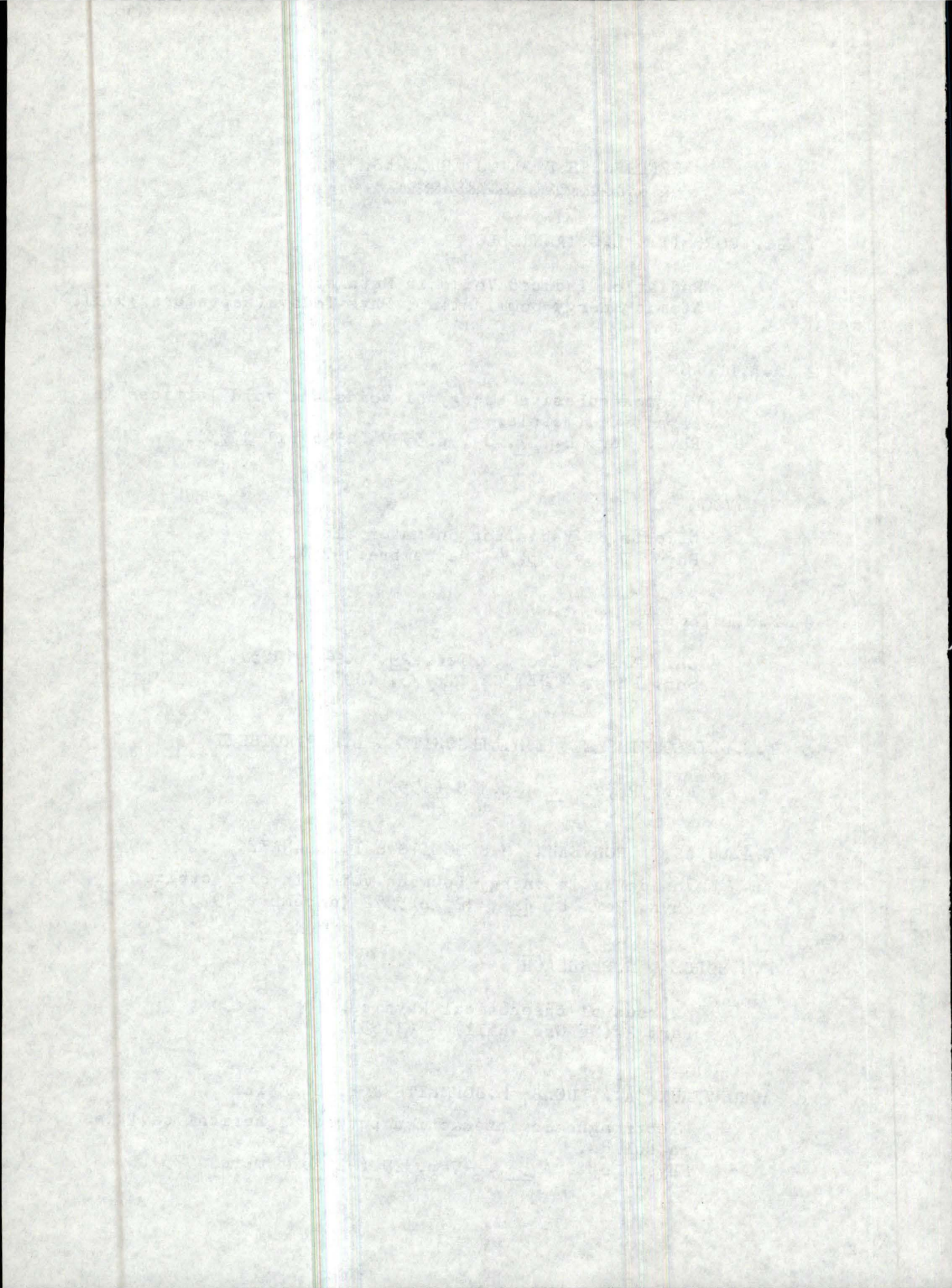
On montre ainsi que la correction à l'ordre 8 est moins grande pour les voids que pour les sphères.

EXTENSIONS POSSIBLES DE CE MEMOIRE.

- 1) Pour ce problème, on peut déterminer les approximations suivantes des $\epsilon_{1,m}$ et $\omega_{1,m}$ en utilisant la même procédure. Ceci permet de connaître l'énergie d'interaction à un ordre supérieur à 8.
- 2) L'étude de l'énergie d'interaction entre deux sphères (voids) peut être étendue au cas où les deux sphères (voids) sont de rayons inégaux.
- 3) Au lieu de partir de l'équation de Laplace, on peut faire un travail analogue à celui-ci en prenant comme point de départ l'équation de Helmholtz.
- 4) Un autre problème est celui de la sphère devant le plan. C'est le cas de deux sphères dont le rayon de l'une tend vers l'infini et donc ce problème peut être traité de manière analogue.

=====





- 9 N.G.VAN KAMPEN, B.R.A.NIJBOER & K.SCHRAM

Phys. Lett. A 26 ,p.30 (1968).

- 10 D.K.ROSS

The Dirichlet boundary value problem for two non-overlapping spheres.

Bull. Austral. Math. Soc., vol 2 ,p.237 (1970).

- 11 L.ROBIN

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales.

Vol. 1 ,p.158 Gauthier-Villars PARIS (1957).

- 12 E.N, HOBSON

The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.

Chelsea Publishing Company NEW-YORK (1965).

- 13 G.MUKHOPADHYAY & S.LUNDQVIST

Van der Waals interaction between spherical voids.

Solid State Communications, vol. 17 ,p.949 (1975).

- 14 R.BRAKO, M.SUNJIC & V.SIPS

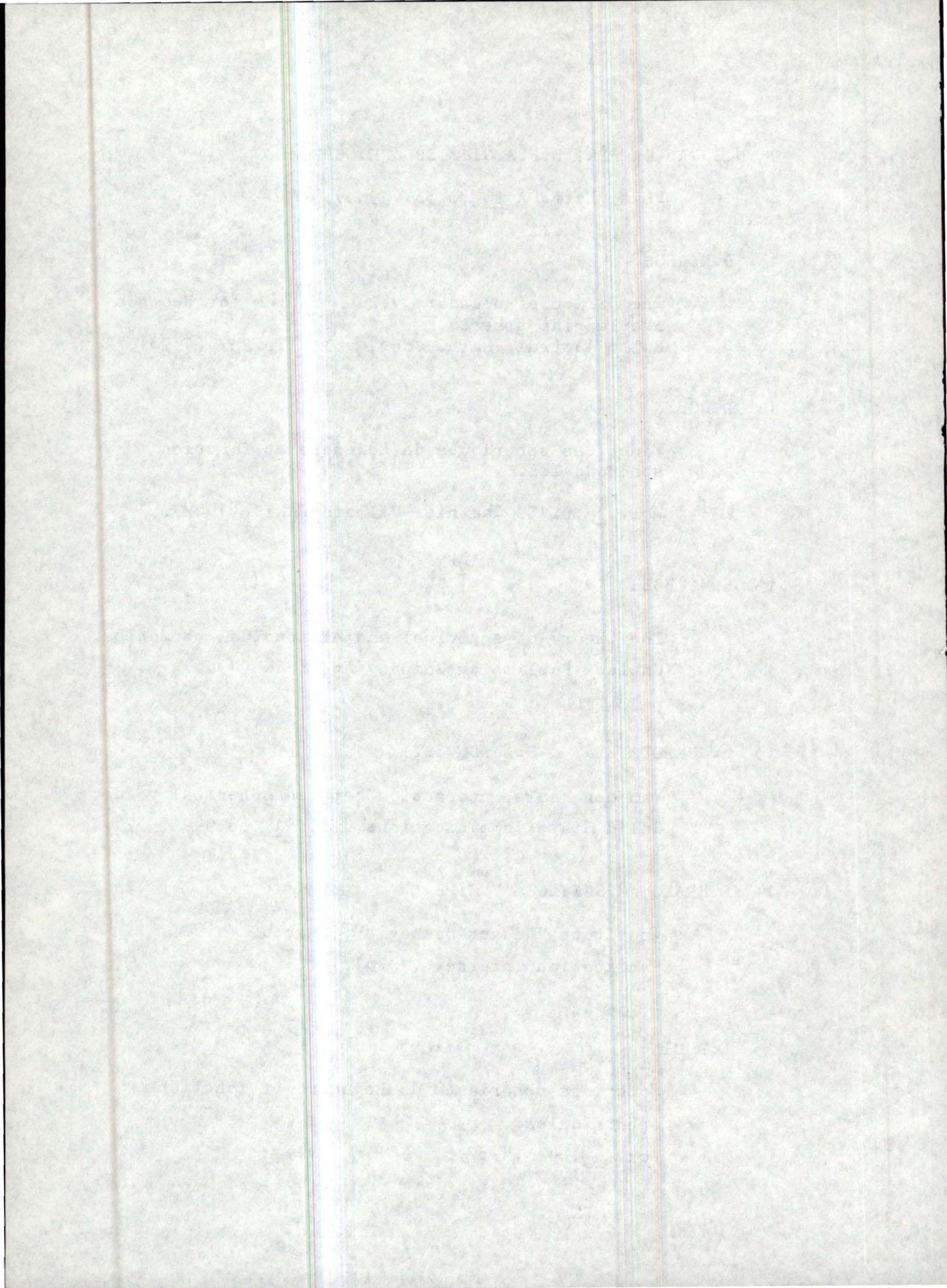
Institute "Rudger Boskovic", Zagreb.

Publication interne. (1976).

- 15 L.ROBIN

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales.

Vol. 1 , 4, (1957).



16 C.COHEN

Mécanique Quantique

Complément C_{x1}, Edition Hermann, p.1118, (1973).

17 M.ABRAMOWITZ & I.A.STEGUN

Handbook of mathematical fonctions.

Dover Publ., Inc, p.15,331, (1965).

18 D.LANGBEIN

Van der Waals attraction in symmetric arrays.

J.Phys.A : Math, Nucl.Gen., Vol.6, p.1149(août 1973).

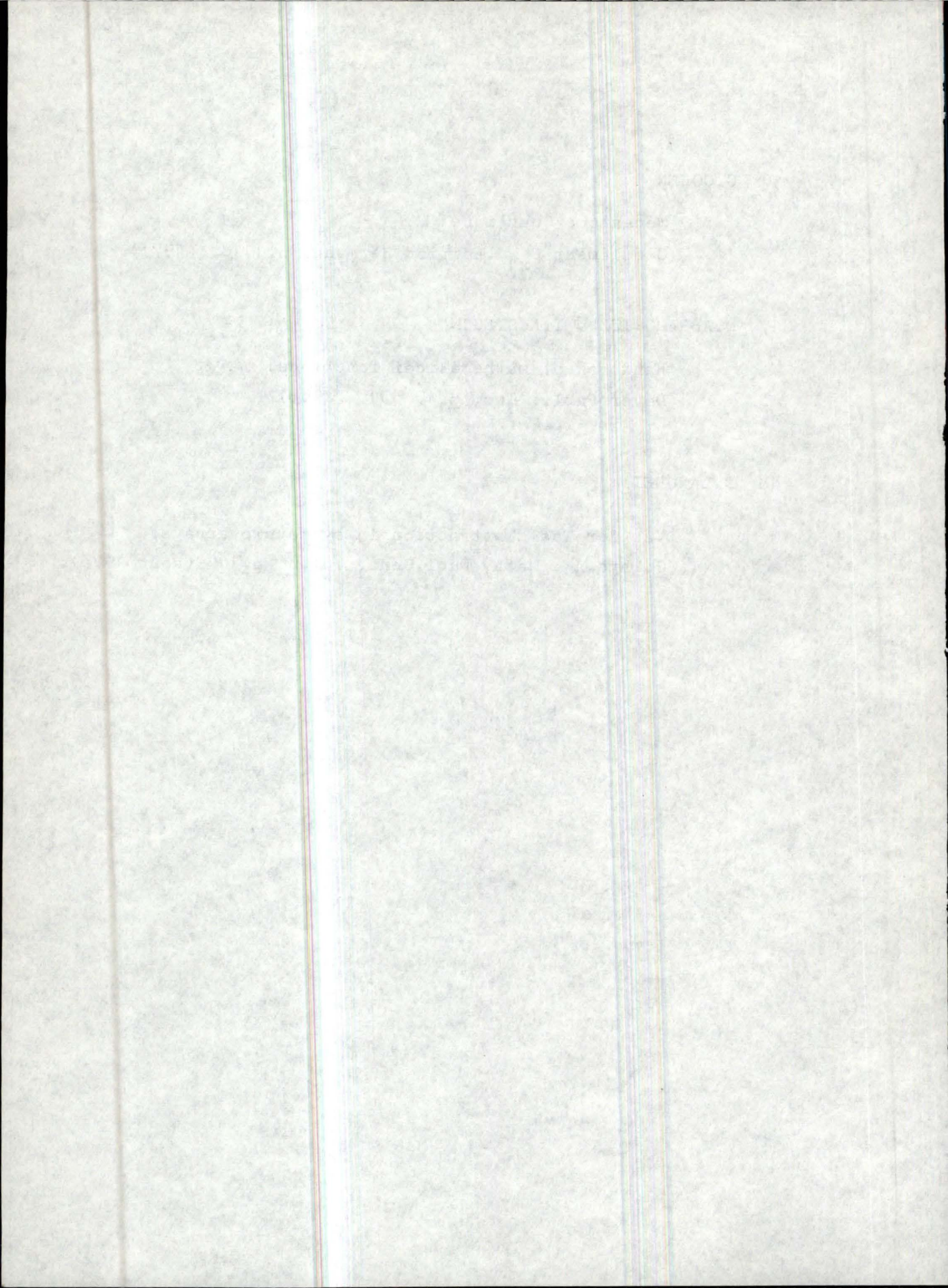


TABLE DES MATIERES.

~~~~~

## INTRODUCTION.

- |                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. - Généralités.                                      | 1. |
| 2. - Première partie : plan.                           | 4. |
| 3. - Seconde partie : plan.                            | 5. |
| 4. - Organigramme : plan du travail (deuxième partie). | 6. |
| 5. - Avertissement relatif aux notations.              | 8. |

## I PARTIE : COORDONNEE BISPHERIQUE.

- |                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 1. - Formulation du problème.           | 9.  |
| 2. - Théorie de la perturbation.        | 17. |
| 3. - Calcul de l'énergie d'interaction. | 52. |

## II PARTIE : COORDONNEES SPHERIQUES.

- |                                                                                         |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1. - Conditions aux limites et de régularité pour la solution de l'équation de Laplace. | 62.  |
| 2. - Corrections du premier et second ordre sur les modes.                              | 113. |
| 3. - Energie de Van der Waals.                                                          | 139. |

## ANNEXES.

- |                                                                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1. - Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. - Expression du potentiel pour une sphère seule. | 141. |
| 2. - Théorème d'addition : transformation des harmoniques sphériques par changement de l'origine.                    | 151. |

## CONCLUSION

166.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

168.

## TABLE DES MATIERES.

171.

=====

