

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Extensions du théorème de Bertrand

Wenin, Jean-Marie

*Award date:*  
1974

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX

NAMUR

Année académique 1973-1974

EXTENSIONS DU THEOREME  
DE BERTRAND

Mémoire présenté pour l'obtention  
du Grade de Licencié en Sciences

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Mathématiques

par

Promoteur

André RONVEAUX

Jean-Marie WENIN

1974

FMB-1/1974/6

## Résumé.

Nous envisageons dans ce travail différentes démonstrations du théorème de J. Bertrand et quelques types d'extensions possibles.

# Introduction.

1. Le problème examiné en 1873 par J. Bertrand est l'objet, ces dernières années, d'une nouvelle étude. Celle-ci résulte du fait qu'en mécanique quantique, les potentiels  $+kr^2$  et  $+\frac{k}{r}$  possèdent des dégénérescences et que ce sont ces mêmes potentiels qui sont privilégiés par le théorème de Bertrand.

2. Dans la première partie de ce travail, nous présentons les quatre types principaux de démonstrations du théorème de Bertrand que nous avons relevés dans la littérature au sujet.

3. La seconde partie est consacrée à trois genres d'extensions obtenues en abandonnant successivement des hypothèses du théorème.

# I<sup>re</sup> Partie.

## Théorème de Bertrand.

Dans une première étape, nous allons nous intéresser au problème de J. Bertrand proprement dit. Il s'énonce de la manière suivante: <sup>[1]</sup>

"Étant donné une particule ponctuelle placée dans un potentiel à symétrie sphérique  $V(r)$ , fonction continue de  $r$  (et à dérivées continues jusqu'à l'ordre 3 inclus), la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les trajectoires bornées soient fermées est que le potentiel soit en  $r^2$  ou en  $1/r$ ".

Passons en revue les différentes démonstrations de ce théorème que l'on peut rencontrer avant de présenter les principales.

Il nous faut tout d'abord citer la démonstration originale de Bertrand <sup>[2]</sup> en termes de potentiels, qui a été reprise par Tisserand <sup>[3]</sup> et par Greenberg <sup>[4]</sup>. Nous relevons par la suite d'autres démonstrations moins générales telles celle faite par Darboux et Halphen et publiée par Appel <sup>[5]</sup> dans laquelle il recherche les forces centrales donnant pour trajectoires des coniques fermées; celle de Eckmann <sup>[6]</sup> dans laquelle il se limite à des

forces du type " $-kr^n$ "; et enfin, celle étudiée par Rosenber<sup>[1]</sup> et par Synge et Griffith<sup>[2]</sup> qui a permis la stabilité.

Pour suivre, nous allons développer dans les grandes lignes les principaux types de preuve du problème.

### 1. Premier type de preuve:

Commençons par la démonstration donnée par Bertrand<sup>[2]</sup> et publiée par Birkhoff.<sup>[3]</sup>

Soit la force centrale conservative  $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$  appliquée à une particule<sup>(\*)</sup> dans un espace à deux dimensions.

Puisque la force est conservative, elle dérive d'un potentiel  $U$  et l'énergie totale est conservée:

$$(T+U)_{t=t_0} = T_0 + U_0 = T + U$$

ce qui nous note encore:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{r_0}^r f(r) dr \quad (I-1)$$

où  $r_0$  et  $v_0$  sont les conditions initiales.

Travaillons en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Si nous tenons compte du fait que:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{r} \right)^2 + \left( \frac{d(1/r)}{d\theta} \right)^2 \right]$$

où  $\alpha = r^2 \dot{\theta}$  est la constante des aires,

---

(\*) nous considérons dans tout le travail des particules de masse

et si nous posons :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{r} & \text{et } u_0 = \frac{1}{r_0} \\ \mathcal{Q}(u) = -r^2 f(r), \end{cases}$$

la formule (I-1) deviendra :

$$d^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = v_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \mathcal{Q}(u) du \quad (\text{I-2})$$

nous pouvons encore transformer (I-2) en :

$$d\theta = \frac{d \, du}{\sqrt{v_0^2 - d^2 u^2 + \Psi(u)}} \quad (\text{I-3})$$

où on a posé  $\Psi(u) = 2 \int_{u_0}^u \mathcal{Q}(u) du$ .

Si nous mesurons  $\theta$  à partir de  $r_0$ , nous aurons en intégrant les deux membres de (I-3) :

$$\theta = d \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{v_0^2 - d^2 u^2 + \Psi(u)}}$$

Or par hypothèse, nous avons supposé que la trajectoire décrite par la particule est fermée donc il existe des  $\theta$  pour lesquels  $u$  (c'est-à-dire  $r$ ) sera optimum.

Supposons que  $\beta_1$ , le premier optimum de  $u$ , est un maximum.

En ce point, nous aurons donc :

$$\frac{du}{d\theta} = d \sqrt{v_0^2 - d^2 \beta_1^2 + \Psi(\beta_1)} = 0 \quad (\text{I-4})$$

Pour les  $\theta$  supérieurs à  $\theta_1$ , qui est l'angle entre  $r_0$  et  $\frac{r}{\beta_1} = r_1$ ,  $u$  décroît mais pas indéfiniment du fait que la trajectoire est fermée. Notons  $\beta_2$  l'optimum suivant de  $u$  qui sera un minimum. Nous aurons en ce point, la même relation que (I-4) :

$$\frac{du}{d\theta} = d \cdot \sqrt{V_0^2 - d^2 \beta_2^2 + \psi(\beta_2 u)} = 0 \quad (\text{I-5})$$

La courbe devant être fermée, les rayons vecteurs  $r_2 = \frac{1}{\beta_2}$  et  $r_1 = \frac{1}{\beta_1}$  sont des axes de symétrie de celle-ci et dès lors, elle se compose de d'une série d'arcs égaux à  $\overline{r_1 r_2}$ . Si nous notons  $\theta_0$  l'angle entre  $r_1$  et  $r_2$ , il faudra que  $\theta_0$  soit commensurable avec  $\pi$ , ce qui signifie:  $\exists \lambda$  rationnel tel que:

$$\theta_0 = d \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{du}{\sqrt{V_0^2 - d^2 u^2 + \psi(u)}} = \lambda \pi \quad (\text{I-6})$$

Mais cette égalité doit être vraie pour toutes conditions initiales, ou l'hypothèse de fermeture quelles qu'aient celles-ci. L'éq. (I-6) doit être indépendante de  $d$  et de  $V_0^2$ . Remplaçons  $d$  et  $V_0^2$  par leurs valeurs tirées de (I-4) et de (I-5) dans (I-6)

$$(I-4) - (I-5) \rightarrow d^2 = \frac{\psi(\beta_1) - \psi(\beta_2)}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \quad (\text{I-7})$$

$$(I-7) \text{ dans } (I-4) \rightarrow V_0^2 = \frac{\beta_2^2 \cdot \psi(\beta_1) - \beta_1^2 \cdot \psi(\beta_2)}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \quad (\text{I-8})$$

et nous obtenons:

$$\theta_0 = \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{du}{\sqrt{(\beta_1^2 - \beta_2^2) \cdot \frac{\psi(u) - \psi(\beta_2)}{\psi(\beta_1) - \psi(\beta_2)} - (u^2 - \beta_2^2)}} = \lambda \pi \quad (\text{I-9})$$

où nous devons trouver  $\psi(u)$  quels que soient  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Remarquons cependant que  $\lambda$  est indépendant de ces deux valeurs. Supposons que la trajectoire de la particule soit un cercle de rayon  $h$  légèrement perturbé; dès lors, nous pouvons noter:

$$\beta_1 = h + \epsilon \quad ; \quad \beta_2 = h - \epsilon \quad ; \quad u = h + \epsilon \xi, \quad \xi \in [-1, +1]$$



et si  $\epsilon$  est suffisamment petit, nous pourrions développer en série de puissances de  $\epsilon$  les fonctions suivantes :

$$\Psi(\beta_1) = \Psi(h + \epsilon) \quad ; \quad \Psi(\beta_2) = \Psi(h - \epsilon)$$

$$\Psi(u) = \Psi(h + \epsilon \xi)$$

Introduisons ces développements dans (I-9) et nous obtenons :

$$O_0 = \lambda \pi = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{1 - h \frac{\Psi''}{\Psi'} - \frac{\xi h \epsilon}{3} \frac{\Psi'''}{\Psi'} - \frac{(1+\xi^2) h \epsilon^2}{12} \frac{\Psi^{(4)}}{\Psi'} + \dots}}$$

avec  $\Psi' = \left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u=h}$

Effectuons le changement de variables  $\xi = \sin \epsilon$  qui transforme la formule précédente en :

$$\lambda \pi = \frac{1}{\sqrt{1 - h \frac{\Psi''}{\Psi'}}} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \frac{\sin \epsilon}{6} h \epsilon \frac{\Psi'''}{\Psi' - h \Psi''} + \frac{1 + \sin^2 \epsilon}{24} \frac{h \epsilon^2 \Psi^{(4)}}{\Psi' - h \Psi''} - \frac{h \epsilon^2 \Psi'' \Psi'''}{12 (\Psi' - h \Psi'')} + \frac{\sin \epsilon}{24} h^2 \epsilon^2 \frac{\Psi^{(4)2}}{(\Psi' - h \Psi'')^2} + \dots \right\} d\epsilon$$

après avoir appliqué le développement de  $(1+x)^m$ .

Calculons les différentes intégrales; ce qui donne :

$$\lambda \pi = \frac{\pi}{\sqrt{1 - h \frac{\Psi''}{\Psi'}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{h \epsilon^2}{48 (\Psi' - h \Psi'')} \left( \frac{h \Psi^{(4)2}}{\Psi' - h \Psi''} + 3 \Psi^{(4)} - \frac{4 \Psi'' \Psi'''}{\Psi'} \right) \right\} \quad (\text{I-10})$$

et cette égalité doit être vraie  $\forall h$  et  $\forall \epsilon$  petit ce qui implique :

$$\frac{h \Psi^{(4)2}}{\Psi' - h \Psi''} + 3 \Psi^{(4)} - \frac{4 \Psi'' \cdot \Psi'''}{\Psi'} = 0 \quad (\text{I-11})$$

en limitant au 2<sup>e</sup> ordre en  $\epsilon$ ,

et alors, (I-10) devient :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - h \frac{\psi''}{\psi'}}$$

qui en intégrant donnera :  $\psi'(h) = \zeta h^{1-1/\lambda^2}$  (I-12)

Divisons (I-12) et introduisons cette dérivée dans (I-11) ce qui transformera cette condition en :

$$\frac{2\zeta}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) h^{2-\frac{2}{\lambda^2}} = 0$$

et cette relation se sera vérifiée que pour les valeurs :

$$\underline{\lambda = 1} \quad \text{et} \quad \underline{\lambda = \frac{1}{2}}$$

Dans ces deux cas, compte tenu de la définition de  $\psi$ , nous obtenons :

$$\psi'(a) = \psi'(1/a) = -2a^2 f(a) \begin{cases} = \zeta & \text{si } \lambda = 1 \\ = \zeta a^3 & \text{si } \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En conclusion, les deux nules lois de forces centrales conservatives faisant décrire à la particule une trajectoire fermée quel que soient les conditions initiales sont :

$$\underline{-\mu r} \quad \text{et} \quad \underline{-\mu r^{-2}}$$

c'est-à-dire que les potentiels dont elles découlent sont :

$$\underline{\frac{\mu r^2}{2}} \quad \text{et} \quad \underline{-\frac{\mu}{r}}$$

et nous retrouvons ainsi les affirmations de Bertrand.

2. Deuxième type de preuve.

Pourrions la présenter un aperçu de la démonstration de Darboux et Zelphén du théorème de Bertrand <sup>[5]</sup>. Cette preuve est moins générale que la précédente du fait qu'il impose à la trajectoire d'être une conique.

Considérons une particule sous l'action d'une force centrale conservative  $\vec{f}$  ne dépendant que des coordonnées  $(x, y)$  de son point d'application dans un système d'axes orthogonaux  $xOy$  (où  $O$  est le point fixe de  $\vec{f}$ ). Nous devons donc rechercher les  $\vec{f}$  telles que la trajectoire de la particule soit une conique pour toutes conditions initiales.

Les équations du mouvement sont:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f \cdot \frac{x}{r} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = f \cdot \frac{y}{r} \end{cases} \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et la loi des aires se note:  $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = d = \text{cte.}$

Effectuons la transformation homographique définie par:

$$x_2 = \frac{x}{f} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{f}$$

et en posant  $dt' = -\frac{dt}{f^2}$ , nous transformons

alors le champ de force central en un champ de force

parallèle à l'axe  $O'y_2$  <sup>(3)</sup> qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -f \frac{y_2^3}{r} = Y \quad \text{avec } Y = Y(x_2, y_2) \end{cases}$$

Par le fait que  $\frac{dx_2}{dt} = d$ , l'équation différentielle de la trajectoire sera :

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = \frac{Y}{d^3} \quad (\text{I-13})$$

On nous devra imposer que la trajectoire décrite soit une conique c'est-à-dire qu'elle ait l'équation suivante :

$$y = Ax + B + \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$$

dans le repère  $xOy$ , ce qui implique que tout point  $(x, y)$  de la conique vérifie la propriété :

$$\frac{d^3}{dx^3} \left\{ \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{-2/3} \right\} = 0 \quad (\text{I-14})$$

Mais le transformé homographique de  $(x, y)$  parcourra aussi une conique qui sera la transformée de la première et par conséquent, ce point  $(x_2, y_2)$  devra satisfaire à  $(\text{I-14})$ .

Comme  $Y = Y(x_2, y_2)$ , nous pouvons poser :

$$Y^{-2/3} = \mu^{-2/3} \mathcal{Q}(x_2, y_2) \quad \text{où } \mu \text{ est constant.}$$

Introduisons  $(\text{I-13})$  dans  $(\text{I-14})$  en tenant compte de la définition de  $\mathcal{Q}$  donnée par l'égalité précédente et nous devons avoir :

$$\frac{d^3}{dx_2^3} \left( \mathcal{Q}(x_2, y_2) \right) = 0$$

ce qui fournit encore l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1^3} + 3 \frac{dy_1}{d\alpha_1} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1^2 \partial y_1} + 3 \left( \frac{dy_1}{d\alpha_1} \right)^2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial y_1^2} + \left( \frac{dy_1}{d\alpha_1} \right)^3 \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y_1^3} \\ & + \frac{3\mu}{2d^2} \varphi^{-5/2} \cdot \left( 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) \\ & + \frac{3\mu}{2d^2} \cdot \frac{dy_1}{d\alpha_1} \cdot \varphi^{-5/2} \left[ 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

ce qui sera vérifié pour toutes conditions initiales si nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1^3} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1^2 \partial y_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial y_1^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y_1^3} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-17})$$

Les conditions (I-15) signifient que  $\varphi(\alpha_1, \gamma_1)$  est un polynôme du second degré en  $\alpha_1$  et en  $\gamma_1$  :

$$\varphi(\alpha_1, \gamma_1) = A'\alpha_1^2 + 2B'\alpha_1\gamma_1 + C\gamma_1^2 + 2D\alpha_1 + 2E\gamma_1 + F.$$

Ce polynôme doit en plus vérifier les deux dernières conditions. Pour ce faire, distinguons deux cas :

a)  $C \neq 0$  : l'égalité (I-17) donne :

$$\varphi(\alpha_1, \gamma_1) = \frac{1}{C} (B'\alpha_1 + C\gamma_1 + E)^2$$

qui satisfait aussi à (I-16).

b)  $C = 0$  : (I-17) nous permet d'écrire :

$$\varphi(\alpha_1, \gamma_1) = A'\alpha_1^2 + 2D\alpha_1 + F$$

qui vérifie aussi le premier membre de (I-16).

Reprenons la définition de  $\mathcal{C}(x_2, y_2)$  et effectuons la transformation homographique inverse ce qui va nous permettre de trouver les forces centrales qui donnent des coniques pour trajectoires et qui sont :

$$\begin{cases} f_1 = - \frac{\mu r \zeta^{3/2}}{(B'x + Ey + \zeta)^3} \\ f_2 = - \frac{\mu r}{(A'x^2 + 2Dxy + Fy^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Passons maintenant aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ; les deux forces prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{-k_1 r}{(B' \cos \theta + E r \sin \theta + \zeta)^3} \\ f_2 = \frac{-k_2}{r^2 (A' \cos^2 \theta + 2D \sin \theta \cos \theta + F \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{cases}$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes.

Par le fait que nous avons choisi des forces centrales conservatives, elles ne peuvent dépendre que de  $r$  et non de  $\theta$ , ce qui fixe la forme des deux champs de forces :

$$\underline{f_1 = -k_1 r} \quad \text{et} \quad \underline{f_2 = -k_2 r^{-2}}$$

et on peut montrer aisément que les trajectoires des particules sous l'action de  $f_1$  et de  $f_2$  ont des ellipses.

3. Troisième type de preuve :

Présentons maintenant une étude du théorème de Bertrand effectuée par Eubannes [6]. Ce travail constitue plus une vérification qu'une démonstration rigoureuse de ce théorème.

Limitons-nous à la classe des forces centrales conservatives du type  $f(r) = \mu r^n$  et notre problème est de déterminer les  $n$  tels que la trajectoire de la particule sur laquelle  $f(r)$  agit soit fermée quelles que soient les conditions initiales.

Écrivons l'équation différentielle de Binet pour de telles forces

$$\frac{d^2 u}{d\sigma^2} + u = -\frac{\mu}{a^2} u^{-n-2} \quad \text{avec } u = \frac{1}{r}. \quad (\text{I-18})$$

Étudions la trajectoire voisine d'une trajectoire circulaire de rayon  $a_0$  qui sera caractérisée par :

$$u = u_0(1 + \alpha)$$

où  $\alpha$  est petit.

Remplaçons  $u$  dans la formule (I-18) ce qui nous donne une équation différentielle en  $\alpha(\sigma)$  :

$$\frac{d^2 \alpha}{d\sigma^2} + \alpha = -1 - \frac{\mu}{a^2} u_0^{-n-3} (1 + \alpha)^{-n-2}$$

et en développant  $(1 + \alpha)^{-n-2}$  en série de Taylor au voisinage de 1, elle devient :

$$\frac{d^2 \alpha}{d\sigma^2} + \alpha = -1 - \frac{\mu}{a^2} u_0^{-n-3} - \frac{\mu}{a^2} u_0^{-n-3} \left\{ -(n+2)\alpha + \frac{(n+2)(n+3)}{2!} \alpha^2 - \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{3!} \alpha^3 + \dots \right\}$$

Nous n'entreagerons que le cas où le terme indépendant est nul, c'est-à-dire :  $d^2 = -\mu \mu_0^{-n-3}$

et par conséquent, l'équation en  $a(\theta)$  sera celle-ci :

$$\frac{d^2 a}{d\theta^2} = -(n+3) \left\{ a + \beta a^2 + \gamma a^3 + \dots \right\} \quad (\text{I-19})$$

où nous posons

$$\begin{cases} \beta = -\frac{(n+2)}{2!} \\ \gamma = \frac{(n+2)(n+4)}{3!} \end{cases}$$

Résolvons cette équation différentielle par approximations successives.

a) Limitons-nous au terme en  $a^2$  dans (I-19) :

$$\frac{d^2 a}{d\theta^2} + (n+3) a = 0$$

dont la solution est  $a(\theta) = M \cos p\theta$

où  $\begin{cases} M \text{ est infiniment petit mais arbitraire} \\ p = \sqrt{n+3} \end{cases}$

Or la condition à imposer pour que la trajectoire soit fermée est que l'angle entre deux optimums successifs de  $a$ , qui a pour valeur  $\frac{\pi}{p}$ , soit commensurable avec  $\pi$ . D'où les solutions  $a(\theta)$  seront fermées si  $p$  est rationnel c'est-à-dire pour  $n = -2, 1, 6, \dots$

b) Ne gardons ensuite que les termes de degré 2 au plus en  $a$  et introduisons dans  $a^2$  la valeur de  $a(\theta)$  trouvée à la première approximation :



$$\frac{d^2 \alpha}{d\theta^2} + (n+3) \alpha = - \frac{(n+3) \beta M^2}{2} \cos 2\theta_0 - \frac{(n+3) \beta M^2}{2}$$

et cette équation admet pour solution :

$$\alpha(\theta) = M \cos \theta_0 + M^2 (G + A \cos 2\theta_0)$$

$$\text{ce nous donne : } \begin{cases} G = -\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{n+2}{4} \\ A = \left(\frac{\beta}{6}\right) = -\frac{n+2}{12} \\ \mu = \sqrt{n+3} \end{cases}$$

et les trajectoires seront fermées pour les mêmes valeurs de  $n$  qu'à la première approximation.

g) Limitons le développement du second membre de (I-19) au terme en  $\alpha^2$  :

$$\frac{d^2 \alpha}{d\theta^2} + (n+3) \alpha = - (n+3) \beta \alpha^2 - (n+3) \gamma \alpha^2$$

et remplaçons  $\alpha$  par sa valeur trouvée à la deuxième approximation dans le second membre de cette équation :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{d\theta^2} + (n+3) \alpha = & - (n+3) M^3 \left[ 2G\beta + \frac{3}{4} \gamma + A\beta \right] \cos \theta_0 \\ & - (n+3) M^2 \frac{\beta}{2} \cos 2\theta_0 - (n+3) M^2 \left( \frac{\gamma}{4} + \beta A \right) \cos 3\theta_0 \\ & - (n+3) M^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

en nous limitant aux termes en  $M^3$ .

La solution générale sera de la forme :

$$\alpha(\theta) = M \cos \theta_0 + R_1 \cos 2\theta_0 + R_2 \cos 3\theta_0 + R_3$$

Introduisons-la dans le premier membre de l'équation précédente et nous obtenons en identifiant les coefficients de :

$$\rightarrow \cos 3\varphi_0 : R_2 = \frac{M^3}{96} \cdot (n+2)(n+3)$$

$$\rightarrow \cos 2\varphi_0 : R_1 = -\frac{M^2}{12} \cdot (n+2)$$

$$\rightarrow \text{terme indépendant} : R_0 = \frac{M^2}{4} (n+2)$$

$$\rightarrow \cos \varphi_0 : \mu = \sqrt{n+3} \cdot \left\{ 1 - \frac{M^2(n+2)(n-1)}{12} \right\}^{1/2} \quad (\text{I-20})$$

Et à partir de ces relations, nous pouvons écrire la solution à la troisième approximation:

$$r(\theta) = M \cos \varphi_0 + M^2 (G + A \cos 2\varphi_0) + M^3 B \cos 3\varphi_0$$

$$\text{où } \begin{cases} G = \frac{n+2}{4} \\ A = -\frac{n+2}{12} \\ B = \frac{(n+2)(n+3)}{96} \\ \mu^2 = (n+3) \cdot \left( 1 - \frac{M^2(n+2)(n-1)}{12} \right) \end{cases}$$

En conclusion, nous pouvons écrire la trajectoire sous la forme:

$$u = u_0 (1 + M \cos \varphi_0)$$

où nous avons  $\begin{cases} M \text{ infiniment petit et arbitraire.} \\ \mu \text{ donné par (I-20)} \end{cases}$

Elle sera fermée si  $\mu$  est rationnel ce qui ne sera possible que si  $\underline{n = +1}$  ou  $\underline{n = -2}$  c'est-à-dire si  $\underline{f = \mu r}$  ou  $\underline{f = \mu r^{-2}}$ .

Après retravailler les résultats de Bertrand.  
Examinons ensuite sa preuve à la troisième approximation. <sup>(6)</sup>

4. Quatrième type de poulie :

Nous terminerons cette action en donnant une preuve du théorème pour la seule force " $-kr^{-2}$ " qui a été faite par Rosenbergy [7] et qui se base sur la stabilité des trajectoires circulaires. Soit la force centrale  $\vec{f} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$  dans un espace à deux dimensions. L'équation différentielle de la trajectoire est :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{f(1/u)}{d^2 u^2} = \frac{P(u)}{d^2} \quad (I-25)$$

où nous notons  $P(u) = - \frac{f(1/u)}{u^2}$  et où nous prenons pour origine du système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  le centre de force.

Étudions une petite perturbation d'une trajectoire circulaire c'est-à-dire :  $u = u_0 + \epsilon$  où  $\epsilon$  est un nombre infiniment petit.

Si nous remplaçons  $u$  par sa valeur dans (I-25), nous aurons :

$$\frac{d^2 \epsilon}{d\theta^2} + u_0 + \epsilon = \frac{P(u_0 + \epsilon)}{d^2 (u_0 + \epsilon)^2}$$

Développons  $P$  en série de Taylor au voisinage de  $u_0$ , nous obtenons en nous limitant au 1<sup>er</sup> ordre [8] :

$$\frac{d^2 \epsilon}{d\theta^2} + \left( 3 - \frac{u_0 P_0'}{P_0} \right) \epsilon = \frac{P_0}{d^2 u_0^2} - u_0$$

où on note  $P_0' = \left. \frac{dP}{du} \right|_{u=u_0}$  et  $P_0 = P(u_0)$ .

Si nous posons  $A = 3 - \frac{u_0 P_0'}{P_0}$  et  $B = \frac{P_0}{d^2 u_0^2} - u_0$ ,

la solution de l'équation différentielle qui reste constantement

petite est de la forme :

$$E = \frac{B}{A} + G_2 \cos(\sqrt{A}\theta) + G_2 \sin(\sqrt{A}\theta)$$

$n$  :  $A$  est positif c'est-à-dire  $n : \frac{\mu_0 P_0'}{P_0} \leq 3$  (I-21).

Prenons le cas où la force est du type  $-k r^{-n}$  avec  $n > 0$  et alors la condition de stabilité de la trajectoire s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\mu_0 P_0'}{P_0} = n \leq 3 \quad (\text{I-22})$$

En résumé, les seules forces centrales de la forme

$$\vec{f} = -k r^{-n} \frac{\vec{r}}{r}$$

admettant des trajectoires circulaires stables sont celles pour lesquelles  $n$  vérifie les inégalités que voici :

$$0 < n \leq 3.$$

De plus, pour que les trajectoires soient fermées, nous devons imposer que :

$$3 - \frac{\mu P'}{P} = k^2 \quad (\text{I-23})$$

avec  $k$  rationnel.

En combinant (I-22) et (I-23), nous pouvons conclure que la seule valeur de  $n$  permise est

$$\underline{n = 2}.$$

où où, la force s'écrit :

$$\underline{f(r) = -k r^{-2}}.$$

Extensions du théorème de Bertrand.

Ayant auparavant résolu le problème de Bertrand, nous étudierons dans cette section quelques extensions de ce théorème.

A. Le premier type de généralisation que nous examinerons consiste à éliminer successivement une des trois hypothèses fondamentales faites par Bertrand et que voici :

la force  $\vec{f}$  appliquée (\*) sur la particule  $m$  est d'abord implicitement fonction uniquement de la position de  $m$

et ensuite

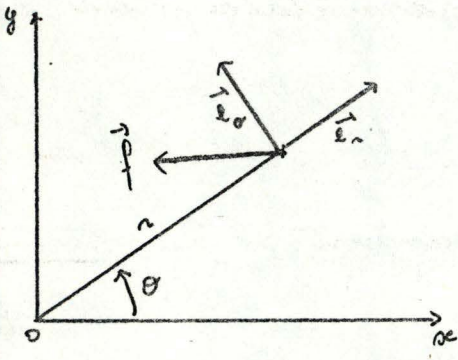
a)	conservative	(II-1)
b)	a <sup>c</sup> potentiel $V$ fonction continue de $r$	(II-2)
c)	centrale.	(II-3)

B. La deuxième généralisation ne s'appuiera plus sur les hypothèses du théorème de Bertrand. Elle permettra de découvrir les lois de forces dépendantes de la position et de la vitesse de la particule qui feront parcourir à celle-ci des trajectoires fermées.

C. Nous terminerons le chapitre par la présentation d'une extension d'un type différent : il s'agira de déterminer le champ de force le plus général sous lequel

---

(\*) Nous ne considérerons pas dans ce travail les forces dépendant explicitement de  $t$ .



une famille de courbes donnée peut être décrite.

Mais commençons par démontrer un résultat important énoncé par Whittaker<sup>[10]</sup> qui généralise une formule fondamentale de la théorie des forces centrales : la formule de Binet.

Preliminaire :

Considérons dans un espace de dimension deux une force quelconque  $\vec{f}$  appliquée sur une particule  $m$  repérée par rapport à un système d'axes cartésiens  $oxy$ .  
Exprimons la loi de Newton  $\vec{f} = m\vec{a}$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$+ P \vec{e}_r + T \vec{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

où  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont des vecteurs unitaires respectivement suivant  $\vec{r}$  et orthogonal à  $\vec{r}$ .

$T$  et  $P$  sont les projections de  $\vec{f}$  sur  $\vec{e}_\theta$  et sur  $\vec{e}_r$ .

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} ; \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} ; \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} ; \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

a) Développons la composante de l'accélération suivant  $\vec{e}_\theta$  :

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2 \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} + r \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Si nous notons :  $d = r^2 \dot{\theta}$

$$u = \frac{1}{r}$$

l'égalité précédente s'écrit :

$$2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2d^2 u^2 \frac{du}{d\theta} + \frac{1}{u} \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} \quad (\text{II-4})$$

Vu que  $d$  n'est pas constant, sa dérivée par rapport au temps vaut :

$$\frac{dd}{dt} = d u^2 \frac{dd}{do} = -2 d^2 u \frac{du}{do} + \frac{1}{u^2} \cdot \frac{do}{dt}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{do}{dt} = \frac{u^3}{2} \cdot \frac{dd^2}{do} + 2 d^2 u^2 \frac{du}{do} \quad (\text{II-5})$$

Compte tenu des égalités (II-4) et (II-5), l'équation du mouvement suivant  $\vec{e}_o$  se notera :

$$T = \frac{1}{2} u^3 \frac{d^2 d^2}{do}$$

ou encore :

$$\boxed{2 T u^{-3} = \frac{d(d^2)}{do}} \quad (\text{II-6})$$

b) Étudions maintenant le mouvement suivant  $\vec{e}_r$  :

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = +P$$

Après quelques transformations simples tenant compte des définitions de  $d$  et de  $u$ , le premier membre de cette égalité devient :

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -d^2 u^2 \frac{d^2 u}{do^2} - u^2 \frac{du}{do} \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 d^2}{do} \right) - d^2 u^3$$

Remplaçons y la quantité  $\frac{d^2 d^2}{do}$  par sa valeur donnée en (II-6) et nous écrirons l'équation radiale du mouvement sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^3 u}{do^3} + u = \frac{-P}{d^2 u^2} - \frac{T}{d^2 u^3} \cdot \frac{du}{do}} \quad (\text{II-7})$$



Remarquons que si la force  $\vec{f}$  est centrale - ce qui implique  $T=0$  et  $\alpha$  constant - nous retrouvons à partir de (II-7) la formule de Binet comme annoncé plus haut. Nous donnerons donc à (II-7) le nom de "Formule généralisée de Binet".

En conclusion, le mouvement de la particule sous l'action de  $\vec{f}$  sera donné par les deux équations (II-7) et (II-6).

## A. Premier type d'extensions:

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de cette seconde partie, nous allons rechercher des exemples de champs de forces vérifiant certaines des hypothèses fondamentales du théorème de Bertrand et donnant des trajectoires fermées.

### 1. Particule dans un champ de forces centrales non conservatives

Si nous éliminons l'hypothèse (II-1), notre problème revient à déterminer parmi l'ensemble des forces centrales du type  $\vec{f} = f(r, \theta) \vec{e}_r$  celles qui feront décrire à la particule sur laquelle elles agissent une trajectoire fermée pour toutes conditions initiales.

Une réponse partielle a été donnée par A. Rouveaux <sup>[11]</sup> qui suggère d'utiliser la formule de Binet pour des lois de forces centrales séparables de la

forme  $\vec{f} = Q(r) \cdot \psi(\theta) \vec{e}_r$  :

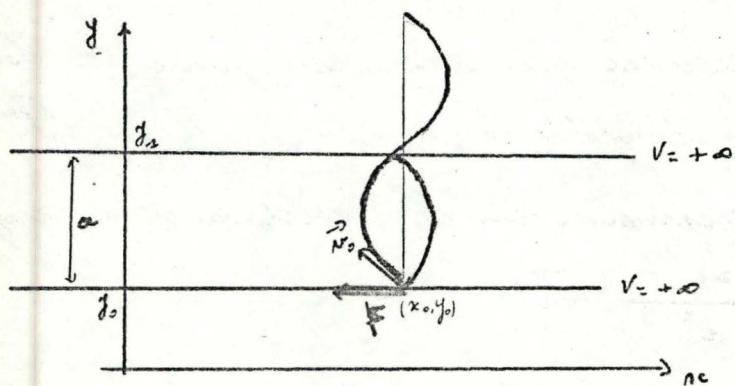
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{1}{a^2 u^2} Q\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \psi(\theta)$$

Dans le cas de la force de Newton généralisée, c'est-à-dire le cas où  $Q(r) = -kr^{-2}$ , il est possible d'obtenir des trajectoires fermées quelles que soient les conditions initiales du fait que l'équation précédente devient linéaire. Il en est ainsi lorsque  $\psi$  est une fonction périodique de  $\theta$  pouvant être représentée par une série finie de Fourier et ne contenant pas la période fondamentale  $2\pi$ . Par exemple la propriété de fermeture de la trajectoire sera vérifiée pour la force  $\vec{f} = \frac{k \cos 2\theta}{r^2} \vec{e}_r$ .

Par contre, dans le cas de l'oscillateur harmonique généralisé, c'est-à-dire dans le cas où  $Q(r) = -kr$ , le problème semble ne pas admettre de solution car que l'équation de Binet est non linéaire. <sup>[11]</sup>

2. Particule dans un champ de forces conservatives à potentiel discontinu :

a). Pour cette deuxième extension du théorème de Bertrand, éliminons les hypothèses (II-2) et (II-3). Plaçons la particule entre deux plaques parallèles qui formeront des barrières de potentiel infini. Nous allons alors examiner son mouvement entre ces deux bornes si on lui applique la force "- kx" de l'oscillateur harmonique et rechercher les conditions pour que la trajectoire de la particule soit fermée pour



toutes conditions initiales.

Nous supposons que les plaques sont parallèles à l'axe Oz en  $y_0$  et en  $y_1$ .

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{cases} ,$$

et si nous partons du point  $(x_0, y_0)$  avec une vitesse  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ , le mouvement de la particule sera donné par :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \\ y = \dot{y}_0 t + y_0 \end{cases}$$

où  $\omega = \sqrt{k}$ .

Si  $a$  est la distance entre les plaques, nous pouvons, à partir de la relation en  $y$ , calculer le temps nécessaire pour que la particule aille de l'une à l'autre :

$$t = \frac{y_1 - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{a}{\dot{y}_0}$$

et par conséquent, le temps d'un aller-retour vaudra :

$$T = \frac{2a}{\dot{y}_0}$$

Alors, la trajectoire sera fermée si la condition suivante est satisfaite :

$$T = n T'$$

où  $\begin{cases} T' \text{ est la période de l'oscillation harmonique : } \frac{2\pi}{\omega} \\ n \text{ est un entier positif.} \end{cases} ,$

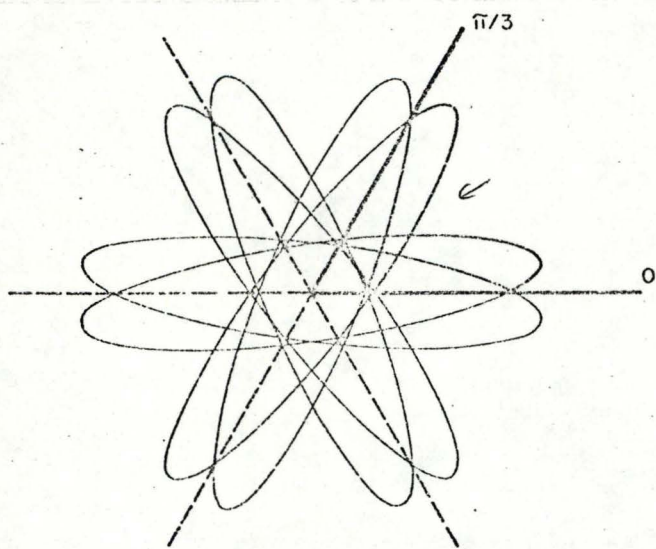


FIG. 1. Classical trajectory of a particle (bold lines) subject to an harmonic oscillator potential and restricted to a sector  $\pi/3$  in the plane.

c'est-à-dire si a vérifie l'égalité que voici :

$$\frac{\omega a}{\gamma_0} = n\pi$$

B) Un problème similaire se présente si nous désirons étudier le mouvement d'une particule sous l'action d'une force centrale - hypothèse que nous aurons répétée en d) - dans un espace de dimension deux restreint à un secteur. Cette étude a été effectuée par Douck, Prokivsky et Wolf <sup>[12]</sup> pour la force " $-kr$ " dans un secteur d'angle  $\frac{\pi}{q}$  où  $q$  est un entier positif ce qui entraîne la fermeture de toute trajectoire.

Nous représentons ci-joint la trajectoire de la particule soumise à la force de l'oscillateur harmonique dans un secteur d'angle  $\frac{\pi}{3}$  limité par des barrières de potentiel infini. <sup>[12]</sup>

### 3. Particule dans un champ de forces conservatives non centrales.

Conservons maintenant les hypothèses (II-1) et (II-2). Nous allons rechercher les lois de forces non centrales dérivant d'un potentiel  $V(r, \theta)$  continue qui donnent des trajectoires fermées.

a) Examinons tout d'abord le cas de l'oscillateur harmonique à deux dimensions.

En coordonnées cartésiennes, la force, qui est non centrale, s'écrit :

$$\vec{f} = -\text{grad} \left( \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} \right)$$

et on obtient donc les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_1 x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -k_2 y \end{cases},$$

qui ont pour solutions :

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ y = A_2 \sin(\omega_2 t - \phi_2) \end{cases}$$

où l'on note :  $\omega_1 = \sqrt{k_1}$  et  $\omega_2 = \sqrt{k_2}$ .

Si nous imposons à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de satisfaire à la condition suivante :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{où } n_1 \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}_0,$$

c'est-à-dire si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont commensurables, la trajectoire de la particule sur laquelle agit  $\vec{f}$  sera fermée et la période du mouvement s'écrira :

$$T = \frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2}$$

Les courbes fermées ainsi décrites sont les "figures de Lissajous" bien connues.

β) Pour étudier le mouvement d'une particule chargée dans un potentiel non central du type suivant :

$$J = \frac{1}{q} \left[ \frac{\psi(\omega)}{r^2} + V(r) \right]$$

où  $q$  est la charge de la particule, nous nous référons à A. Hautot <sup>[13]</sup>. Il a prouvé que dans le cas où  $V(r)$  est soit " $-kr^{-2}$ ", soit " $-kr^2$ ", la trajectoire de la particule, soumise à l'action de la force dont le potentiel électrique s'écrit:

$$J = \frac{1}{q} \left\{ \frac{\hbar^2 (A \cos^2 \theta + B \cos \theta + C)}{2r^2 \cos^2 \theta} + V(r) \right\}$$

est une rosette si les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$ , qui sont des constantes arbitraires, obéissent aux deux conditions:

$$A + B + C \geq 0$$

$$A - B + C \geq 0$$

et de plus, elle sera fermée si la relation

$$\frac{\sqrt{b + A\hbar^2}}{b} = \frac{m}{n} \quad \text{où } \begin{cases} m \text{ et } n \in \mathbb{N}_0 \\ b \text{ est un coefficient de l'équation de la rosette.} \end{cases}$$

est satisfaite.

## B. Deuxième type d'extensions:

Dans ce paragraphe, nous nous détachons du théorème de Bertrand et nous étudierons le cas de forces dépendant de la position et de la vitesse de la particule.

### 1. Particule dans un champ de forces non centrales et non conservatives

Retenons à la formule généralisée de Binet démontrée dans le préliminaire:



$$\frac{d^2 u}{d\sigma^2} + u = -\frac{P}{d^2 u^2} - \frac{T}{d^2 u^3} \cdot \frac{du}{d\sigma} \quad (\text{II-7})$$

où  $P$  et  $T$  sont tels que  $\vec{f} = P\vec{e}_r + T\vec{e}_\sigma$ .

Nous recherchons ici les conditions sur  $P$  et  $T$  afin que la particule sur laquelle agit la force  $\vec{f}$  décrit des trajectoires fermées indépendamment des conditions initiales. Pour ce faire, nous tenterons de ramener (II-7) à des équations donnant pour solutions des courbes fermées.

a) Si nous pouvons mettre (II-7) sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 u}{d\sigma^2} + nu = 0 \quad \text{avec } n = k^2,$$

la solution  $u(\sigma) = A \cos k(\sigma - \sigma_0) = \frac{1}{r(\sigma)}$  sera fermée

si  $k$  est un rationnel non nul.

D'où, il importe que  $P$  et  $T$  vérifient l'égalité suivante :

$$-\frac{P}{d^2 u^2} - \frac{T}{d^2 u^3} \cdot \frac{du}{d\sigma} = -(n-1)u$$

où nous avons défini  $\alpha = r^2 \dot{\sigma}$  et  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$

$$u = \frac{1}{r}$$

et par conséquent, les formes de  $P$  et  $T$  qui permettront à la particule de parcourir une trajectoire fermée s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} P = n(r\dot{\sigma}^2) \\ T = \frac{r^2 \dot{\sigma}^3}{\dot{\sigma}} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} P = -r\dot{\sigma}^2 \\ T = -\frac{nr^2 \dot{\sigma}^3}{\dot{\sigma}} \end{cases}$$

où nous posons  $m = k^2$  avec  $k \in \mathbb{Z}_0$ .

$\beta)$ . Si l'équation (II-7) est du même type que la formule de Binet (II-8) correspondant à la force centrale  $\vec{f} = -k \frac{\vec{r}}{r^2}$  de l'oscillateur harmonique à deux dimensions (où  $k_1 = k_2 = k$ ) c'est-à-dire si (II-7) est de la forme:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{C}{u^3}, \quad (\text{II-8})$$

elle procédera la même genre de solution:

$$u(\theta) = \frac{A \cos^2 \theta}{A^2} + \frac{B \sin^2 \theta}{B^2}$$

qui est une courbe fermée si la condition  $CA^2B^2 = 1$  établie dans le lemme est satisfaite.

Pour ce faire, cela nécessite que P et T satisfassent à:

$$-\frac{P}{d^2 u^2} - \frac{T}{d^2 u^3} \cdot \frac{du}{d\theta} = \frac{C}{u^3}$$

et donc T et P devront être de forme suivante:

$$\begin{cases} P = -k_1 r (r^2 \dot{\theta})^2 \\ T = k_2 \frac{(r^2 \dot{\theta})^3}{r} \end{cases}$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes telles que  $k_1 + k_2 = C$ .

$\gamma)$ . Il est encore possible d'obtenir des trajectoires fermées si la formule (II-7) s'écrit de cette manière:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = C \Psi(\theta) \quad (\text{II-9})$$

où  $\psi(\theta)$  est une fonction périodique de  $\theta$  ne contenant pas la période fondamentale  $2\pi$  et pouvant être représentée par une série finie de Fourier.

Si nous prenons un  $P$  et un  $T$  du type :

$$\begin{cases} T = k_2 \frac{(r\dot{\theta})^3}{i} \psi(\theta) \\ P = -k_1 (r\dot{\theta})^2 \psi(\theta) \end{cases} \quad \text{où } k_1 + k_2 = q$$

avec les hypothèses précédentes sur  $\psi(\theta)$ , nous obtenons l'équation (II-9) dont la solution est :

$$h(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + q \psi(\theta)$$

qui est bien fermée.

## 2. Particule dans un champ magnétique. (problème conductif).

Dans un espace de dimension trois rapporté à un système d'axes orthogonaux, plaçons une particule de charge électrique  $q$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  du type :

$$\vec{B} = B \vec{e}_3$$

où  $\vec{e}_3$  est un vecteur unitaire suivant l'axe  $oz$ .

### a) Champ magnétique constant.

Faisons l'hypothèse que  $B$  est une constante dans tout l'espace et imposons les conditions initiales suivantes à la particule :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0, & y(t=0) = y_0, & z(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0, & \dot{y}(t=0) = v_0, & \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

L'équation vectorielle du mouvement est :

$$\vec{f} = \vec{a} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II-10}).$$

et du fait que  $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ , nous concluons que la vitesse est constante et que le mouvement est plan.

Si nous projetons (II-10) sur les axes, nous aurons le système des équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = qB \dot{y} & (\text{II-11}) \\ \dot{y} = -qB \dot{x} & (\text{II-12}) \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

et en tenant compte des conditions initiales, la dernière équation a pour solution

$$z = 0$$

ce qui exprime que la particule se meut dans le plan  $xOy$ .

Intégrons la relation (II-12) une première fois et nous obtenons en nous servant des conditions initiales :

$$\dot{y} = -Bq (x - x_0) + v_0 \quad (\text{II-13})$$

Dans (II-13), remplaçons  $\dot{y}$  par sa valeur ; cela donne

ce :

$$\ddot{x} = -B^2 q^2 (x - x_0) + Bq v_0$$

En posant  $\omega = Bq$ , cette équation différentielle admet une pour solution, compte tenu du fait en  $t=0$   $x = x_0$  et

$\dot{x} = 0$ , la relation suivante :

$$x = \frac{v_0}{qB} (1 - \cos \omega t) + x_0,$$

que nous substituerons dans (II-13). En intégrant celle-ci

une nouvelle fois, nous obtiendrons :

$$y = \frac{v_0}{qB} \sin \omega t + y_0 ;$$

et ainsi, la trajectoire de la particule s'écrit comme suit :

$$\left[ x - \left( \frac{v_0}{qB} + x_0 \right) \right]^2 + \left[ y - y_0 \right]^2 = \frac{v_0^2}{q^2 B^2}$$

qui est l'équation d'un cercle de centre  $\left( \frac{v_0}{qB} + x_0, y_0 \right)$  et de rayon  $\frac{v_0}{qB}$ .

Nous pouvons donc conclure que la trajectoire de la particule chargée dans un champ magnétique constant  $\vec{B}$  de direction  $oz$ , sera toujours un cercle dont le rayon et les coordonnées du centre varieront avec les conditions initiales de la particule.

β) Champ magnétique  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_3$ .

Si nous passons à un système de coordonnées polaires cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les équations du mouvement (II-11) et (II-12) - celle en  $z$  restant identique - deviennent en prenant un  $B$  à dépendance radiale uniquement :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = q r \dot{\theta} B(r) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -q \dot{r} B(r) \end{cases}$$

Nous avons, pour la formule généralisée de Binet, définie par la force  $\vec{f}$  comme suit :  $\vec{f} = P\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$ , et

dans le cas qui nous occupe,  $P$  et  $T$  prendront les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} P = q r \dot{\theta} B(r) \\ T = -q \dot{r} B(r) \end{cases}$$

La formule (II-7) deviendra alors :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{q B(1/u) \cdot u}{\dot{\theta}} - \frac{q B(1/u)}{u \dot{\theta}} \cdot \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

et nous n'avons pas trouvé des  $B(1/u)$  donnant des trajectoires fermées comme solution de cette équation.

#### C. Troisième type d'extensions:

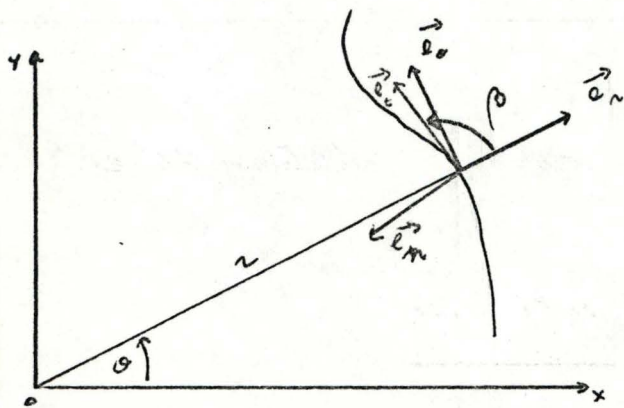
Cette dernière généralisation sera d'un genre un peu différent des deux autres. Ainsi, nous déterminerons tout d'abord la forme la plus générale du champ de forces ne dépendant que de la position de la particule sous lequel une famille de courbes donnée peut être décrite; ensuite, nous examinerons deux cas particuliers.

1.

##### 1. En général:

Pretons  $\phi(r, \theta) = c$  l'équation de la famille en coordonnées polaires,  $f_r^2$  et  $f_\theta^2$  les composantes radiale et transversale de la force  $\vec{F}$  à  $c$  déterminé. Faisons varier  $c$ , c'est-à-dire une courbe de la famille.

Grâce à la formule de Huygens qui s'é-



compose l'accélération en une accélération tangentielle et en une accélération centripète comme suit :

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \vec{e}_t + \frac{v^2}{l} \vec{e}_n$$

où  $ds$  est un élément infinitésimal de la courbe  
 $l$  est le rayon de courbure de celle-ci  
 $\vec{e}_t$  est un vecteur unitaire tangent à la courbe au point considéré.  
 $\vec{e}_n$  est un vecteur unitaire normal à  $\vec{e}_t$  en ce point.

Nous aurons :

$$f^n \vec{e}_n + f^o \vec{e}_o = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \vec{e}_t + \frac{v^2}{l} \vec{e}_n$$

En effectuant successivement le produit scalaire de cette égalité avec les vecteurs unitaires radial  $\vec{e}_n$  et transversal  $\vec{e}_o$ , nous trouverons les composantes de  $\vec{f}$  :

$$\begin{cases} f^n = \cos \beta \left( \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} - \frac{v^2}{l} \operatorname{tg} \beta \right) \\ f^o = \cos \beta \left( \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \operatorname{tg} \beta + \frac{v^2}{l} \right) \end{cases}$$

où  $\beta$  est l'angle entre  $\vec{e}_n$  et  $\vec{e}_t$ ,

et en remarquant que :

$$\frac{ds}{dr} = - \frac{\partial \phi / \partial r}{\partial \phi / \partial \theta} \stackrel{\text{not.}}{=} - \frac{\phi_r}{\phi_\theta}$$

et donc que :  $\operatorname{tg} \beta = - r \frac{\phi_r}{\phi_\theta}$ ,



nous pourrions écrire :

$$\begin{cases} f^r = \frac{\cos \beta}{\phi_0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{d\nu^2}{ds} \phi_0 + r \frac{\nu^2}{l} \phi_r \right) \\ f^\theta = \frac{\cos \beta}{\phi_0} \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{d\nu^2}{ds} r \phi_r + \frac{\nu^2}{l} \phi_0 \right) \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

On, on montre aisément que :

$$\frac{\cos \beta}{\phi_0} = \frac{-1}{\sqrt{\phi_0^2 + r^2 \phi_r^2}}$$

et on voit aussi que le rayon de courbure vérifie la relation que voici :

$$\rho = \frac{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - 2 \frac{d^2 r}{ds^2}}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 \phi_r^3 + 2 \phi_0^2 \phi_r + r \phi_r \phi_0^2 - 2r \phi_r \phi_0 \phi_{r0} + r \phi_{00} \phi_r^2}{(r^2 \phi_r^2 + \phi_0^2)^{3/2}}$$

Par conséquent, les égalités (II-14) se mettront sous la forme suivante :

$$\begin{cases} f^r = \frac{-\nu^2 r \phi_r \left[ r^2 \phi_r^3 + 2 \phi_0^2 \phi_r + r \phi_r \phi_0^2 - 2r \phi_r \phi_0 \phi_{r0} + r \phi_{00} \phi_r^2 \right]}{(\phi_0^2 + r^2 \phi_r^2)^2} \\ \quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\nu^2}{ds} \cdot \frac{\phi_0}{(\phi_0^2 + r^2 \phi_r^2)^{1/2}} \\ f^\theta = \frac{-\nu^2 \phi_0 \left[ r^2 \phi_r^3 + 2 \phi_0^2 \phi_r + r \phi_r \phi_0^2 - 2r \phi_r \phi_0 \phi_{r0} + r \phi_{00} \phi_r^2 \right]}{(\phi_0^2 + r^2 \phi_r^2)^2} \\ \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\nu^2}{ds} \cdot \frac{r \phi_r}{(\phi_0^2 + r^2 \phi_r^2)^{1/2}} \end{cases}$$

Posons maintenant  $v^2 = -\mu (\phi_\theta^2 + r^2 \phi_r^2)$   
 où  $\mu$  est une fonction arbitraire à préciser,  
 et remarquons que :

$$\frac{d}{ds} = (\phi_\theta^2 + r^2 \phi_r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \phi_r \frac{\partial}{\partial \theta} - \phi_\theta \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

D'où, on peut calculer  $\frac{dv^2}{ds}$  et remplacer cette quantité par  
 sa valeur dans les expressions de  $f^r$  et de  $f^\theta$ , ce qui donne  
 après calculs :

$$f^r = \mu (r \phi_r^2 - \phi_\theta \phi_{r\theta} + \phi_r \phi_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} \phi_\theta (\phi_r u_\theta - \phi_\theta u_r)$$

(II-15)

$$f^\theta = \mu (2 \phi_\theta \phi_r - r \phi_r \phi_{r\theta} + r \phi_\theta \phi_{r\theta}) + \frac{1}{2} r \phi_r (\phi_\theta u_r - \phi_r u_\theta)$$

où  $r$  et  $\theta$  en indices représentent les dérivées partielles par  
 rapport à ces variables et où nous prenons pour la fonction  $\mu$   
 une fonction arbitraire de  $r$  et de  $\theta$  du fait que nous avons fait cette  
 même hypothèse sur  $\vec{f}$ .

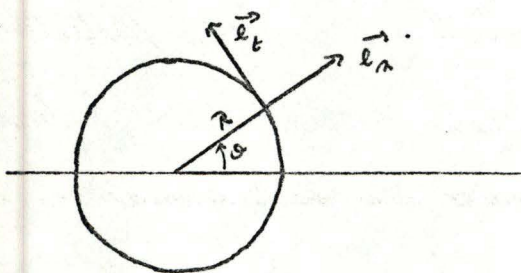
Il est possible également de trouver la solu-  
 tion de ce problème en coordonnées cartésiennes chez Whittaker.

## 2. Cas particuliers :

a) Si nous imposons de plus à  $\vec{f}$  d'être une  
 force centrale, il nous faut annuler la composante suivant  $\vec{e}_\theta$   
 c'est-à-dire :

$$f^\theta = \mu (2 \phi_r \phi_\theta - r \phi_r \phi_{r\theta} + r \phi_\theta \phi_{r\theta}) + \frac{1}{2} r \phi_r (\phi_\theta u_r - \phi_r u_\theta) = 0$$

ce qui permet de déterminer  $\mu$  et de le remplacer dans  $f^r$ .



β) Imposons maintenant que la trajectoire de la particule soit circulaire ce qui implique :

$$\phi(r) = c$$

comme équation de la courbe. Annulons alors  $\phi_0$  dans les deux formules (II - 15) et nous trouvons :

$$\begin{cases} f^r = \mu r \phi_0^2 \\ f^\theta = -\frac{1}{2} r \phi_0^2 \mu_0 \end{cases}$$

où  $\mu$  est fonction arbitraire de  $r$  et de  $\theta$ .

Divisons par rapport à  $\theta$  l'expression de  $f^r$  et nous obtenons ceci :

$$\frac{\partial f^r}{\partial \theta} = \mu_0 r \phi_0^2$$

qui, combinée avec la deuxième égalité, donne la relation suivante entre les composantes de  $\vec{f}$  :

$$\boxed{\frac{\partial f^r}{\partial \theta} = -2 f^\theta} \quad (\text{II} - 16).$$

Il est possible de retrouver cette formule par une démonstration plus directe.

Partons de l'équation de Lagrange appliquée au mouvement circulaire de vitesse angulaire  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  :

$$\vec{a} = -\omega^2 R \vec{e}_r + \dot{\omega} R \vec{e}_t$$

où  $R$  est le rayon du cercle trajectoire.

Si nous décomposons  $\vec{f}$  en  $f_r$  et  $f_t$  suivant  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_t$ , nous obtenons le système :

$$\begin{cases} f_r = -\omega^2 R \\ f_t = \dot{\omega} R \end{cases}$$

et de la première relation, nous tirons :

$$\frac{d}{dt} f_n = \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \cdot \omega = -2\omega \dot{\theta} R$$

Par conséquent, nous retrouvons bien la formule (II-16) par le fait que  $\vec{e}_n$  et  $\vec{e}_t$  sont identiques à  $\vec{e}_n$  et  $\vec{e}_\theta$ .

Si de plus, la force  $\vec{f}$  est conservative, nous avons :

$$f^r = - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{et} \quad f^\theta = - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

et l'égalité (II-16) s'écrit de cette manière :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial r \cdot \partial \theta} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0} \quad (\text{II-17})$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être facilement résolue en posant :

$$Z = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

et on obtient :

$$\boxed{V(r, \theta) = \frac{\varphi(\theta)}{r^2} + \psi(r)}$$

ce qui est une condition nécessaire pour obtenir une trajectoire circulaire.

De même que pour la formule (II-16), nous pouvons retrouver l'équation (II-17) par une voie plus directe.

La force  $\vec{f}$  étant conservative, le lagrangien correspondant

sera : 
$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta)$$

et les équations de Lagrange pour  $r$  et  $\theta$  dans le cas du mouvement circulaire ( $\dot{r} = 0$ ) s'écrivent :

$$\begin{cases} r \dot{\theta}^2 = \frac{\partial V}{\partial r} \\ r^2 \ddot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Dérivons la première relation par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} \cdot \dot{\theta} = 2r \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

et en combinant avec la deuxième relation, nous obtenons bien (II - 17).

## Annexe

Nous allons dans cette annexe, montrer que la trajectoire de la particule soumise à l'action de la force  $-kr$  de l'oscillateur harmonique est bien solution de l'équation de Binet correspondante.

Soit la formule de Binet :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{d^2 u^{-3}} \quad \text{où } \alpha = r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$

et l'équation de la trajectoire est : <sup>(A-1)</sup>

$$u^2 = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \quad (A-1)$$

ou encore :  $u(\theta) = \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$

Comme  $ab \frac{du}{d\theta} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \cdot \sin \theta \cos \theta$ , on trouve

avec aisément :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{a^2 - b^2}{ab} (b^2 \cos^3 \theta - a^2 \sin^3 \theta) \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{-3/2}$$

Par conséquent, le premier membre de l'équation de Binet devient :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{ab \sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}} \cdot a^2 b^2$$

On le second membre peut aussi s'écrire comme suit :

$$\frac{k}{d^2 u^{-3}} = \frac{k}{d^2} \cdot a^3 b^3 \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{-3/2}$$

D'où l'égalité entre les deux membres sera effective si la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{k}{d^2} a^2 b^2 = 1 \quad (A-2)$$

Ceci permet de dire que pour obtenir une solution du type (A-1), qui est fournie, de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = \frac{C}{x^3},$$

il faut imposer la condition

$$C a^2 b^2 = 1.$$

Vérifions que (A-2) est vérifiée.

Par le fait que  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$  et que nous

avons la loi des aires, c'est-à-dire que :

$$d = \frac{2\pi}{T} ab,$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{k a^2 b^2}{d^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^2 b^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} a^2 b^2} = 1.$$



## Commentaires.

1. Nous n'avons pas relevé dans la littérature de démonstration du théorème de Bertrand à partir de Hamilton Jacobi en termes de variables et d'action, <sup>(16)</sup> démarche qui pourtant, semble de premier abord assez naturelle.
2. Il ne nous a pas été possible d'étudier la démonstration du théorème de Bertrand donnée par Kalanay <sup>(17)</sup>. Na le temps, bien que cette preuve soit d'un type différent des quatre autres.
3. Les conditions obtenues dans l'énoncé B-1 (forces dépendant de la position et de la vitesse.) sont évidemment des conditions nécessaires. Nous n'avons pas vérifié si les forces traussées conduisaient effectivement à des trajectoires fermées indépendamment des conditions initiales.

## Conclusion.

1. Un autre type d'extension possible du théorème de Bertrand est été d'examiner le lien avec la mécanique quantique et la théorie des groupes et des algèbres de Lie. <sup>(18), (19), (20), (21)</sup>

2. Remarquons cependant que le rapport avec la mécanique quantique ne peut se faire que dans le cas de forces conservatives. Il serait donc impossible de trouver un équivalent quantique simple aux extensions de types A-1 et B-1.

3. Parmi les nombreuses généralisations du théorème de Bertrand, outre celles déjà étudiées, nous pouvons citer le développement du problème dans le cas de la sphère <sup>(22)</sup>, l'étude du cas de système à deux degrés de liberté à l'aide de Hamilton-Jacobi, "du théorème de séparation de Liouville et des intégrales non uniformes." <sup>(23)</sup>

4. La formule généralisée de Binet semble peu connue bien qu'elle soit d'intérêt; nous en donnons un exemple dans le cas du champ magnétique qui  $\vec{D} = D(r) \vec{e}_3$ .

5. Une remarque identique peut être faite pour la condition nécessaire sur le potentiel  $V(r, \theta)$  pour obtenir des trajectoires circulaires.

# Bibliographie.

---

- [1] H. BACRY : "Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires" p. 247.  
Gordon and Breach (1967).
- [2] J. BERTRAND : "Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences." LXXVII n° 16 - oct. 1878  
p. 849.
- [3] F. TISSERAND : "Traité de mécanique céleste" Tome 1 p. 43  
Gauthier - Villars (1960)
- [4] J.F. GREENBERG : "Accidental Degeneracy"  
in American Journal of Physics Vol. 34.  
n° 12. Déc. 66. (p. 1101)
- [5] P. APPEL : "Traité de mécanique rationnelle"  
Tome 1 : "Statique et Dynamique du point" p. 40  
Gauthier - Villars (1926)
- [6] H. CABANNES : "Problème de mécanique générale" p. 149.  
Dunod.
- [7] R.M. ROSENBERG : "On Newton's Law of Gravitation"  
in American Journal of Physics Vol. 40 p. 37  
Juillet 1972.
- [8] J.L. SYNGE - D.A. GRIFFITH : "Principles of Mechanics" p. 1  
(3<sup>e</sup> édition) International Edition
- [9] E.T. WHITTAKER : "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies" (p. 93)  
Cambridge University Press (1970).

- [10] E. T. WHITTAKER: "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies" p. 214 ca. 22.  
Cambridge University Press (1970).
- [11] P. RONVEAUX: "First Integral without groups and Bertrand's theorem."  
in "Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Colloquium on group theoretical methods in Physics" vol. 1 p. A-228.  
University of Nijmegen - Holland.
- [12] J. D. LOUCK, M. MOSHINSKY, K. B. WOLF  
"Canonical transformations and accidental degeneracy II. The isotropic oscillator in a sector"  
in Journal of Mathematical Physics Vol. 14  
n° 6 Juin 1973 p. 696.
- [13] A. HAUTOT: "Exact motion in noncentral electric fields"  
in Journal of Mathematical Physics  
Vol. 14 n° 10 Oct. 1973 p. 1520.
- [14] E. T. WHITTAKER: "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies" p. 95  
Cambridge University Press (1970).
- [15] T. C. BRADBURY: "Theoretical Mechanics" p. 384.  
John Wiley International edition.  
New-York (1968).
- [16] E. J. SALETAN - A. H. CROMER: "Theoretical Mechanics" p. 247.  
John Wiley International edition.

- [17] A. HALANAY : "Potentiels dont toutes les trajectoires ont fermées."  
 "Ergojectives fermées" p. 53.  
 Studia Univ. Babeş-Bolyai  
 Ser. Math. 16 - fasc. 2. Math (1971)
- [18] D. F. GREENBERG : "Accidental degeneracy"  
 in American Journal of Physics. Vol. 34  
 N° 12 Déc. 66 p. 1104.
- [19] V. A. DULOCK - H. V. MC INTOSH :  
 in American Journal of Physics Vol. 33  
 (1965) p. 109.
- [20] H. BACRY : "Leçons sur la théorie des groupes et les symétries  
 des particules élémentaires" p. 245.  
 Gordon and Breach (1967)
- [21] J. D. LOUCK, M. MOSHINSKY, K. B. WOLF.  
 "Canonical transformations and accidental degeneracy"  
 in Journal of Mathematical Physics Vol. 14.  
 N° 6 Juin 1973 p. 698.
- [22] A. HALANAY : "Potentiels dont toutes les trajectoires ont fermées"  
 "Essai de la sphère" p. 55.  
 Studia Univ. Babeş-Bolyai  
 Ser. Math. 16 - fasc. 2 Math (1971)
- [23] A. RONVEAUX : "Dégénérescence accidentelle en mécanique  
 classique et intégrales non uniformes."  
 in Annales de la Société Scientifique de Bruxelles  
 T. 85, I, p. 7 (1971)

# Table des Matières.

---

Résumé

Introduction

## I<sup>e</sup> partie : Théorème de Bertrand.

Introduction	1
1. Premier type de preuve	2
2. Deuxième type de preuve	7
3. Troisième type de preuve	11
4. Quatrième type de preuve	15

## II<sup>e</sup> partie : Extensions du Théorème de Bertrand.

Introduction	17
Preliminaire	18
A. Premier type d'extensions	
1. Particule dans un champ de forces centrales non conservatives.	20
2. Particule dans un champ de forces conservatives à potentiel discontinu	21
3. Particule dans un champ de forces conservatives non centrales	23
B. Deuxième type d'extensions	
1. Particule dans un champ de forces non centrales et non conservatives.	25
2. Particule dans un champ magnétique	28

4. Troisième type d'extension :

1. En général 31.
2. Cas particuliers 34

Annexe. 39

Commentaires 40

Conclusion 41

Bibliographie 43

Table des matières. 46.