THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Formes extérieures en mécanique des systèmes non holonomes

Vigneront , Anne

Award date:
1977

Awarding institution:
Universite de Namur

Année académique 1976 - 1977

FORMES EXTERIEURES EN MECANIQUE

DES SYSTEMES NON HOLONOMES.

Promoteur :
G. PLOTNIKOVA

VIGNERONT Anne.

Je tiens à remercier vivement
Monsieur I. Khmelevski pour
l'aide très précieuse qu'il
m'a apportée.

Anne.

Introduction.

Le calcul extérieur et la théorie des systèmes différentiels extérieurs ont été établis par E. Cartan afin de fonder une technique permettant une formulation invariante des équations du mouvement.

Les équations de Lagrange permettent de donner aux lois de la mécanique une forme indépendante du repérage adopté pour l'espace, et c'est ce qui fait leur importance. Mais le temps y garde encore une situation privilégiée. Au contraire le principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie qui sont exprimés à l'aide des notions du calcul extérieur donne aux lois de la mécanique une forme indépendante du repérage adopté pour l'Univers (espace-temps) (E. Cartan [5]).

E. Cartan a considéré les systèmes holonomes et conservatifs ayant un nombre fini de degré de liberté.

J. Kravtchenko [6] et A. Lichnerowicz [7] ont commencé l'étude des systèmes non holonomes et non conservatifs.
Une étape suivante, dans l'application du calcul extérieur aux problèmes de la mécanique a été franchie par François Gallissot [8]. Il a d'une part systématisé et modernisé la théorie et, d'autre part a étudié les liaisons non idéales et non holonomes.

F. Gallissot a trouvé les expressions générales des 2-formes Ω dont les systèmes associés sont les équations du mouvement des systèmes mécaniques. Nous avons voulu nous limiter à l'étude des systèmes classiques, c'est-à-dire le cas des liaisons non holonomes linéaires et idéales, mais en contrepartie développer ce sujet plus en détail. Notre but a été d'obtenir, pour les équations du mouvement en forme d'Euler Lagrange, de Čaplygin et de Voronec, les expressions explicites des 2-formes correspondantes. Nous avons ainsi élaboré dans le chapitre III une méthode uniforme pour obtenir les équations du mouvement des systèmes non holonomes, après avoir, dans le chapitre II, introduit les résultats de F. Gallissot. Nous espérons que cette méthode pourra contribuer à une très longue discussion sur "l'équivalence des équations du mouvement des systèmes non holonomes" (voir, par exemple, la bibliographie de la question dans [9]).

Les deux premiers chapitres du mémoire exposent le matériel classique et nécessaire pour les constructions du troisième chapitre qui, lui, au contraire, contient des résultats encore non publiés à notre connaissance. Signalons que l'exposé de quelques paragraphes du premier chapitre est proche de celui des références [2] et [3] et que, si le second chapitre reprend des résultats de F. Gallissot, ceux-ci ne sont pas toujours établis de la même manière.

Conventions :

Dans toutes les équations, nous ne notons pas les signes de sommation. Il y a une sommation sur les indices répétés.

Pour les sommes allant de $1 \to n$, nous utilisons les indices i, j, k, m.

Pour les sommes allant de $1 \to n+1$, nous utilisons les indices r, s, t.

Pour les sommes allant de $1 \to l$, nous utilisons les indices α, β, γ.

Pour les sommes allant de $l+1 \to n$, nous utilisons les indices μ, ν, σ.

CHAPITRE I : Equations du mouvement des systèmes non holonomes.

I.1. Systèmes non holonomes.

Supposons que la configuration d'un système de la mécanique classique soit définie au moyen de n coordonnées généralisées indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, liées par les équations non intégrables de liaison "*non holonome*" par la forme

$$a_{\alpha i} \dot{q}_i + a_\alpha = 0 \tag{I.1.1}$$

Les coefficients $a_{\alpha i}$ et a_α sont des fonctions des coordonnées généralisées et du temps.
Un exemple classique d'un système qui obéit à des liaisons non holonomes est celui d'un solide contraint à rouler sur une surface ne permettant pas le glissement du corps au point de contact.

Supposons que les équations (I.1.1) soient résolubles par rapport aux l vitesses généralisées $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$; dans ce cas, le rang de la matrice des $\{a_{\alpha i}\}$ est égal à l. Si nous exprimons les l vitesses généralisées au moyen des n - l restantes, nous aurons

$$\dot{q}_\alpha = b_{\alpha\mu} \dot{q}_\mu + b_\alpha \tag{I.1.2}$$

I.2. Les équations différentielles d'Euler Lagrange.

Ces équations du mouvement diffèrent des équations de Lagrange par l'emploi des quasi-vitesses au lieu des vitesses généralisées. Elles ont été établies par Poincaré pour les systèmes holonomes [1] et par Hamel pour les systèmes non holonomes.

a) quasi-vitesses et quasi-coordonnées.

Dans beaucoup de problèmes, nous utiliserons des formes linéaires des vitesses généralisées affectées de coefficients dépendant des coordonnées généralisées plutôt que d'utiliser les vitesses généralisées. Nous aurons

$$\omega_i = a_{i1}\,\dot{q}_1 + a_{i2}\,\dot{q}_2 + \ldots + a_{in}\,\dot{q}_n \tag{I.2.1}$$

Le nombre de ces équations est égal à n.
Les grandeurs ω_i sont appelées *quasi-vitesses*.
En présence de liaisons en formes différentielles, nous choisirons comme quasi-vitesses les formes linéaires des vitesses généralisées qui s'annulent en vertu des équations de liaison.
De cette façon, les équations de liaison non holonome s'écriront $\omega_\alpha = 0$ où

$$\omega_\alpha = a_{\alpha 1}\,\dot{q}_1 + a_{\alpha 2}\,\dot{q}_2 + \ldots + a_{\alpha n}\,\dot{q}_n \tag{I.2.2}$$

Parallèlement à (I.2.1), considérons les formes linéaires des différentielles des coordonnées généralisées,

$$d\,\pi_i = a_{i1}\,dq_1 + a_{i2}\,dq_2 + \ldots + a_{in}\,dq_n \tag{I.2.3}$$

Les grandeurs $d\,\pi_i$ sont appelées abusivement les différentielles *des quasi-coordonnées*. En effet, tant que les relations (I.2.1) ne sont pas intégrables, les grandeurs π_i n'existent pas en tant que fonctions de coordonnées.

Remarques :

1. Si la matrice des coefficients a_{ij} dans (I.2.1) n'est pas singulière, les équations (I.2.1) sont solubles en les vitesses généralisées

$$\dot{q}_j = b_{j1}\,\omega_1 + b_{j2}\,\omega_2 + \ldots + b_{jn}\,\omega_n \tag{I.2.4}$$

2. Soit $\phi(q_1, \ldots, q_n)$ une fonction des coordonnées généralisées. On définit "la dérivée partielle de ϕ par rapport à la quasi-coordonnée π_i" comme un opérateur :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i} = \frac{\partial\phi}{\partial q_j}\,b_{ji} \tag{I.2.5}$$

en utilisant : $d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial q_j}\,dq_j = \dfrac{\partial\phi}{\partial q_j}\,b_{ji}\,d\pi_i = \dfrac{\partial\phi}{\partial\pi_i}\,d\pi_i$.

3. Nous avons toujours considéré les formes linéaires homogènes des vitesses généralisées. Nous pouvons étendre au cas non homogène de la façon suivante :

$$\omega_i = a_{i1}\,\dot{q}_1 + a_{i2}\,\dot{q}_2 + \ldots + a_{in}\,\dot{q}_n + a_{i,n+1}$$

en posant $\omega_{n+1} = 1 = \dot{q}_{n+1}$; nous écrirons $\omega_s = a_{sr}\,\dot{q}_r$ avec $a_{n+1,s} = \delta_{n+1,s}$.

b) L'équation centrale de Lagrange.

Soient les équations de Newton du mouvement d'un système de n points matériels

$$m_i\,\vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \qquad (I.2.6)$$

où m_i représente la masse du point matériel M_i et $\vec{w}_i$ son vecteur accélération. $\vec{F}_i$ représente la résultante des forces actives, tandis que $\vec{R}_i$ est la résultante des réactions de liaison.
En se limitant aux liaisons idéales, on obtient le principe des travaux virtuels :

$$m_i\,\vec{w}_i \mid \delta\vec{r}_i = \vec{F}_i \mid \delta\vec{r}_i \qquad (I.2.7)$$

Dans (I.2.7), $\delta\vec{r}_i$ représente un déplacement virtuel.

Soit $\vec{f}(\vec{r})$ une fonction des coordonnées, introduisons une "δ-opération" par l'égalité :

$$\delta\vec{f} = \left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}}\right)\delta\vec{r}$$

où $\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{r}}\right)$ est la matrice de Jacobi et $\delta\vec{r}$ un déplacement virtuel. Considérons un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$, on notera $\delta\vec{v}$ un opérateur

$$\delta\vec{v} = \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right)\delta\vec{r}$$

où $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right)$ est la matrice de Jacobi.

Soulignons que, pour les systèmes non holonomes, les quantités $\delta\vec{v}$ ainsi déterminées sont différentes des dérivées des déplacements virtuels :

$$\delta\vec{v} \neq \frac{d}{dt}\,\delta\vec{r}$$

Le premier membre de l'équation (I.2.7) s'écrira :

$$m_i\,\vec{w}_i \mid \delta\vec{r}_i = m_i\,\dot{\vec{v}}_i \mid \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}(m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i) - m_i\,\vec{v}_i \mid (\delta\vec{r}_i)^{\cdot}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i) - m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{v}_i + m_i\,\vec{v}_i \mid [\,\delta\vec{v}_i - (\delta\vec{r}_i)^{\cdot}]$$

où $\vec{v}_i$ est le vecteur vitesse du point M_i.

Le second membre de l'équation (I.2.7) représente le travail élémentaire des forces $\vec{F}_i$ pour des déplacements virtuels $\delta\vec{r}_i$ et est noté δW.

D'autre part, $\vec{v}_i \mid \delta\vec{v}_i = \frac{1}{2}\,\delta(\vec{v}_i \mid \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\,\delta\vec{v}_i^{\,2}$ et $m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{v}_i = \delta T$ où T est l'énergie cinétique. L'équation (I.2.7) devient

$$\frac{d}{dt}\,m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i = \delta T + \delta W + m_i\,\vec{v}_i \mid [\,(\delta\vec{r}_i)^{\cdot} - \delta\vec{v}_i] \qquad \text{(I.2.8)}$$

appelée dans la référence [2], "*Equation centrale générale de Lagrange*".

c) <u>Transformation de l'équation centrale de Lagrange [2]</u>.

Dans ce paragraphe, nous exprimerons d'abord l'équation (I.2.8) en fonction des vitesses généralisées et ensuite en fonction des quasi-vitesses.

1) L'expression $m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i$ peut être interprétée comme le "travail élémentaire des vecteurs quantités de mouvement $m_i\,\vec{v}_i$ pour des déplacements virtuels $\delta\vec{r}_i$ des points du système".
Nous introduisons les impulsions généralisées :

$$m_i\,\vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i = m_i\,\vec{v}_i \mid \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

$$= \delta q_j\; m_i\,\vec{v}_i \mid \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

où δq_j sont des déplacements virtuels.

En posant $p_j = m_i \vec{v}_i \mid \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, nous obtenons l'égalité

$$m_i \vec{v}_i \mid \delta\vec{r}_i = p_j \delta q_j$$

p_j est aussi égal à $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ ce qui correspond à la définition de l'impulsion.

2) $$\delta W = \vec{F}_i \mid \delta\vec{r}_i = \vec{F}_i \mid \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

en posant $Q_j = \vec{F}_i \mid \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, nous obtenons $\delta W = Q_j \delta q_j$.

3) $$m_i \vec{v}_i \mid [(\delta\vec{r}_i)^{\cdot} - \delta\vec{v}_i] = m_i \vec{v}_i \mid \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} [(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j]$$

$$= [(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j]\, m_i \vec{v}_i \mid \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$= p_j [(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j]$$

En remplaçant ces trois expressions dans (I.2.8), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} p_j \delta q_j = \delta T + Q_j \delta q_j + p_j [(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j] \qquad (I.2.9)$$

Passons maintenant aux quasi-vitesses. Nous obtenons

1) $$p_j \delta q_j = p_j^{\star} \delta\pi_j$$

où $p_j^{\star}$ est lié à p_j par la relation

$$p_j^{\star} = b_{ji} p_i$$

qui peut encore s'écrire $p_j^{\star} = b_{ji} p_i = b_{ji} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}$

2) $$Q_j \delta q_j = P_j \delta\pi_j$$

P_j est la force généralisée exprimée en fonction des quasi-coordonnées.

3) p_j étant lié à $p_j^{\star}$ par la relation $p_j = a_{ij} p_i^{\star}$, on en déduit

$$p_j \ (\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j = p_i^{\star} a_{ij} [(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j] \qquad (I.2.10)$$

D'autre part, en considérant la dépendance du temps,

$$(\delta\pi_i)^{\cdot} = (a_{ir}\,\delta q_r)^{\cdot} = a_{ir}\,(\delta q_r)^{\cdot} + \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s}\,\dot{q}_s\,\delta q_r$$

$$\delta\omega_i = \delta(a_{ir}\,\dot{q}_r) = a_{ir}\,\delta\dot{q}_r + \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s}\,\delta q_s\,\dot{q}_r$$

nous obtenons ainsi

$$(\delta\pi_i)^{\cdot} - \delta\omega_i = a_{ir}\,[\,(\delta q_r)^{\cdot} - \delta\dot{q}_r] + (\frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{is}}{\partial q_r})\,\dot{q}_s\,\delta q_r$$

En prenant

$$\dot{q}_s = b_{st}\,\omega_t$$

$$\delta q_r = b_{rj}\,\delta\pi_j$$

et en notant

$$\gamma^i_{tj} = (\frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{is}}{\partial q_r})\,b_{st}\,b_{rj}$$

nous obtenons

$$(\delta\pi_i)^{\cdot} - \delta\omega_i = a_{ir}\,[\,(\delta q_r)^{\cdot} - \delta\dot{q}_r] + \gamma^i_{tj}\,\omega_t\,\delta\pi_j$$

En posant $\varepsilon^i_j = \gamma^i_{n+1,j}$ et en se rappelant que $\omega_{n+1} = \dot{q}_{n+1} = 1$, ce qui entraîne $\delta\dot{q}_{n+1} = (\delta q_{n+1})^{\cdot} = 0$, la sommation sur t et r se ramène à une sommation jusque n :

$$(\delta\pi_i)^{\cdot} - \delta\omega_i = a_{ik}\,[\,(\delta q_k)^{\cdot} - \delta\dot{q}_k\,] + \gamma^i_{mj}\,\omega_m\,\delta\pi_j + \varepsilon^i_j\,\delta\pi_j \qquad (I.2.11)$$

Grâce à (I.2.11), on obtient pour (I.2.10)

$$p_j\,[\,(\delta q_j)^{\cdot} - \delta\dot{q}_j] = p^{\star}_i\,\{[\,(\delta\pi_i)^{\cdot} - \delta\omega_i\,] - \gamma^i_{mj}\,\omega_m\,\delta\pi_j - \varepsilon^i_j\,\delta\pi_j\}$$

l'équation (I.2.9) devient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\omega_j}\,\delta\pi_j = \delta T + P_j\,\delta\pi_j + \frac{\partial T'}{\partial\omega_i}\,[\,(\delta\pi_i)^{\cdot} - \delta\omega_i\,] - \gamma^i_{mj}\,\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\,\omega_m\,\delta\pi_j - \varepsilon^i_j\,\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\,\delta\pi_j \qquad (I.2.12)$$

C'est enfin une dernière transformation de cette équation qui va nous donner l'équation d'Euler Lagrange.

d) Equation d'Euler Lagrange.

Développons le premier membre de l'équation (I.2.12) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,\delta\pi_j = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,(\delta\pi_j)^{\cdot} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\right)\delta\pi_j,$$

remplaçons dans le second membre δT par sa valeur :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,\delta\omega_j + \frac{\partial T}{\partial \pi_j}\,\delta\pi_j$$

nous obtenons ainsi l'équation

$$\delta\pi_j\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_j} + \underline{\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,(\delta\pi_j)^{\cdot}} = \underline{\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,\delta\omega_j} + \frac{\partial T}{\partial \pi_j}\,\delta\pi_j$$

$$+ P_j\,\delta\pi_j + \underline{\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,[\,(\delta\pi_j)^{\cdot} - \delta\dot{\pi}_j\,]} - \gamma^i_{mj}\,\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\,\omega_m\,\delta\pi_j$$

$$- \varepsilon^i_j\,\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\,\delta\pi_j$$

qui, après réduction des termes soulignés, fait apparaître la relation suivante :

$$\delta\pi_j\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_j} + \gamma^i_{mj}\,\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\,\omega_m + \varepsilon^i_j\,\frac{\partial T}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T}{\partial \pi_j} - P_j\right] = 0 \qquad (I.2.13)$$

1) Premier cas :

Supposons que toutes les grandeurs $\delta\pi_j$ soient indépendantes. Ce cas se présente, soit en l'absence des liaisons non holonomes, soit si l'on ne tient pas compte de ces liaisons en choisissant les formes $\delta\pi_j$. L'intérêt de cette approche peut résider dans la recherche des intégrales premières "cycliques" (Četaev).

Dans l'équation (I.2.13), les coefficients de $\delta\pi_j$ sont donc nuls et nous obtenons les équations du mouvement d'Euler Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_j} + \gamma^i_{mj}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\omega_m + \varepsilon^i_j\frac{\partial T}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T}{\partial \pi_j} = P_j} \qquad (I.2.14)$$

auxquelles nous devons joindre les n relations cinématiques

$$\dot{q}_i = b_{it}\,\omega_t$$

Nous avons ainsi obtenu un système de 2n équations différentielles ordinaires du premier ordre par rapport à un nombre égal d'inconnues $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $q_1, \ldots, q_n$.

Ces équations (I.2.14) ont été établies par H. Poincaré [1] et étudiées par N. Četaev.

Remarque : Le terme ε^i_j disparaît si la relation de définition des quasi-vitesses est homogène.

2) Second cas :

Supposons qu'il y a parmi les quasi-vitesses, des formes linéaires des vitesses généralisées qui s'annulent en vertu des l équations de liaison non holonome. Nous aurons

$$\omega_\alpha = a_{\alpha j}\,\dot{q}_j + a_{\alpha,n+1} = 0$$

et

$$\delta\pi_\alpha = a_{\alpha j}\,\delta q_j = 0.$$

Dans l'équation (I.2.13), la sommation sur m et j se ramène à une somme de l+1 jusque n

$$\delta\pi_\mu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} + \gamma^i_{\nu\mu}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\omega_\nu + \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\varepsilon^i_\mu - \frac{\partial T}{\partial \pi_\mu} - P_\mu\right] = 0$$

Les grandeurs restantes $\delta\pi_\mu$ sont indépendantes; leurs coefficients dans la somme doivent donc être nuls. Nous obtenons les n-l équations d'Euler Lagrange du mouvement :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\mu} + \gamma^i_{\nu\mu}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\omega_\nu + \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\varepsilon^i_\mu - \frac{\partial T}{\partial \pi_\mu} = P_\mu} \qquad (I.2.15)$$

auxquelles on doit joindre les n relations cinématiques

$$\dot{q}_i = b_{i\nu}\,\omega_\nu$$

pour obtenir 2n-l équations avec un nombre égal d'inconnues $\omega_{l+1}, \ldots, \omega_n$, $q_1, \ldots, q_n$.

I.3. Les équations de Čaplygin [3].

Les hypothèses des systèmes de Čaplygin sont les suivantes :

1) Les coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_l$ et le temps t n'interviennent ni dans l'expression du lagrangien L = T - U, ni dans celle des liaisons non holonomes et linéaires.

2) Ces liaisons sont idéales, homogènes.

De (I.1.2), on déduit

$$\delta q_\alpha = b_{\alpha\mu}\ \delta q_\mu \tag{I.3.1}$$

Ces variations δq_μ étant indépendantes, la relation (I.3.1) permet d'éliminer les δq_α de l'équation de d'Alembert-Lagrange

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0$$

dans laquelle $Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 0$.

Nous obtenons

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - Q_\mu + b_{\alpha\mu}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\mu = 0$$

L'indépendance des variations $\delta q_{l+1}, \ldots, \delta q_n$ entraîne l'annulation de leurs coefficients dans l'équation précédente. Nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - Q_\mu + b_{\alpha\mu}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \tag{I.3.2}$$

Dans l'expression de T, remplaçons $\dot{q}_\alpha$ par leur valeur en fonction des $\dot{q}_\mu$ données par les équations de liaison. Les fonctions obtenues seront notées avec un astérisque. On a alors :

$$\frac{\partial T^{\star}}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\mu} \tag{I.3.3}$$

$$\frac{\partial T^{\star}}{\partial q_\mu} = \frac{\partial T}{\partial q_\mu} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\mu} \tag{I.3.4}$$

Ici

$$\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\mu} = b_{\alpha\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\mu} = \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu}\dot{q}_\nu$$

En vertu des relations (I.3.3) et (I.3.4) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} + b_{\alpha\mu}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{\star}}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{db_{\alpha\mu}}{dt}$$

où $\frac{d}{dt} b_{\alpha\mu} = \frac{\partial b_{\alpha\mu}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu$, car $\frac{\partial b_{\alpha\mu}}{\partial q_\beta} = 0$ vu la première hypothèse.

L'équation (I.3.2) s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{\star}}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T^{\star}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{\partial b_{\alpha\mu}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu}\right)\dot{q}_\nu = Q_\mu}$$

Ce sont les équations de Čaplygin. Leur nombre est égal au degré de liberté du système.

Remarque : Dans le cas où les contraintes sont holonomes on a

$$\frac{\partial b_{\alpha\mu}}{\partial q_\nu} = \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu}$$

et les équations de Caplygin sont identiques aux équations de Lagrange de seconde espèce.

I.4. Les équations de Voronec [3].

On considère un mouvement d'un système de points matériels soumis aux liaisons (I.1.2) supposées homogènes ($b_\alpha = 0$). Nous supposerons aussi l'existence d'une fonction de force U.

Rappelons les équations de Lagrange avec multiplicateurs :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - Q_\mu + \lambda_\alpha \, b_{\alpha\mu} = 0 \tag{I.4.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial T}{\partial q_\beta} - Q_\beta - \lambda_\beta = 0 \tag{I.4.2}$$

Comme dans le paragraphe (I.3), nous avons les relations :

$$\frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \, b_{\beta\mu} \tag{I.4.3}$$

desquelles nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} + b_{\beta\mu}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{d}{dt} b_{\beta\mu} \tag{I.4.4}$$

D'autre part, en faisant intervenir la fonction de force U, les équations aux multiplicateurs de Lagrange deviennent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_\mu} - \lambda_\alpha \, b_{\alpha\mu} \tag{I.4.5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_\beta} + \lambda_\beta \tag{I.4.6}$$

Utilisant les équations (I.4.5) et (I.4.6) dans l'équation (I.4.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} &= \frac{\partial (T + U)}{\partial q_\mu} - \lambda_\alpha \, b_{\alpha\mu} + b_{\beta\mu}\frac{\partial (T + U)}{\partial q_\beta} + \lambda_\beta \, b_{\beta\mu} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{d}{dt} b_{\beta\mu} \\ &= \frac{\partial T}{\partial q_\mu} + \frac{\partial U}{\partial q_\mu} + b_{\beta\mu}\frac{\partial T}{\partial q_\beta} + b_{\beta\mu}\frac{\partial U}{\partial q_\beta} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{d}{dt} b_{\beta\mu}\end{aligned} \tag{I.4.7}$$

Dans cette expression, on élimine $\frac{\partial T}{\partial q_\mu}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_\beta}$ en les exprimant en fonction de $\frac{\partial T^\star}{\partial q_i}$ grâce à (I.4.8)

$$\frac{\partial T^\star}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial q_i}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_i}\dot q_\nu \qquad (I.4.8)$$

l'équation (I.4.7) devient :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} = \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu}\dot q_\nu + \frac{\partial U}{\partial q_\mu} + b_{\beta\mu}\frac{\partial T^\star}{\partial q_\beta} - b_{\beta\mu}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\beta}\dot q_\nu$$

$$+ b_{\beta\mu}\frac{\partial U}{\partial q_\beta} + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\beta}\frac{d}{dt}b_{\beta\mu}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} &= \frac{\partial(T^\star + U)}{\partial q_\mu} + \frac{\partial(T^\star + U)}{\partial q_\beta}b_{\beta\mu}\\ &+ \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\{\frac{d}{dt}b_{\alpha\mu} - \dot q_\nu(\frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\beta}b_{\beta\mu})\}\end{aligned}} \qquad (I.4.9)$$

Ce sont les équations de Voronec.

<u>Remarque</u> : Dans le cas où les forces ne dépendent pas d'une fonction de force, les équations s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\beta}b_{\beta\mu} - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\{\frac{d}{dt}b_{\alpha\mu} - \dot q_\nu(\frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\beta}b_{\beta\mu})\}$$

$$= Q_\mu + Q_\beta\, b_{\beta\mu}$$

CHAPITRE II : 2-Formes extérieures associées à des systèmes mécaniques.

II.1. Forme extérieure associée à un point matériel.

Ecrivons les équations du mouvement d'un point matériel de masse m, soumis à une force $\vec{F}$, et animé d'une vitesse $\vec{v}$,

$$d\vec{r} - \vec{v}\,dt = 0$$
$$m d\vec{v} - \vec{F}\,dt = 0$$

Nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des $dy = (d\vec{r}, d\vec{v}, dt)$ qui vérifie les équations du mouvement.

Construisons la forme extérieure

$$\Omega = (d\vec{r} - \vec{v}\,dt) \wedge (m d\vec{v} - \vec{F}\,dt) \qquad \text{(II.1.1)}$$

que l'on peut aussi écrire en utilisant deux séries de différentielles d et δ sous la forme :

$$\Omega = \begin{vmatrix} d\vec{r} - \vec{v}\,dt & m d\vec{v} - \vec{F}\,dt \\ \delta\vec{r} - \vec{v}\,\delta t & m\delta\vec{v} - \vec{F}\,\delta t \end{vmatrix} \qquad \text{(II.1.2)}$$

La forme Ω est nulle $\forall dy \in \mathcal{D}$ et quel que soit δy :

$$\Omega(dy) = 0 \quad \forall dy \in \mathcal{D}, \ \forall \delta y$$

ceci peut encore s'exprimer comme

$$\theta = \frac{\partial \Omega}{\partial(\delta y)} = 0 \Leftrightarrow \theta(dy) = 0$$

où θ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}$.

Dans la suite, nous changerons la notation des différentielles δ pour la notation plus habituelle d, et nous écrirons $\theta = \frac{\partial \Omega}{\partial(dy)}$.

Ecrivons l'équation vectorielle (II.1.1) sous forme scalaire :

$$\Omega = (m_i \, dv_i - X_i \, dt) \wedge (dx_i - v_i \, dt) \quad (i = 1,2,3) \quad \text{(II.1.3)}$$

où X_i sont les composantes de la force.
L'équation (II.1.3) sous forme développée s'écrit

$$\Omega = [m_i \, dv_i \wedge dx_i - m \, v_i \, dv_i \wedge dt + X_i \, dx_i \wedge dt]$$

Le système d'équations associées à Ω s'obtient en annulant toutes ses dérivées partielles du premier ordre.
Nous aurons donc :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dx_i)} = - m_i(dv_i - X_i \, dt) = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dv_i)} = m_i(dx_i - v_i \, dt) = 0$$

qui sont les équations classiques de Newton.

Les équations différentielles du mouvement sont donc les équations associées à la forme Ω.

Remarques :

1. La troisième équation associée $\frac{\partial\Omega}{\partial(dt)}$ exprime le théorème de l'énergie cinétique, et est donc une conséquence des autres équations.

2. Ω peut se décomposer en deux parties : une partie cinétique que nous noterons Ω_c, et une autre dynamique notée Ω_d,

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^{3} (m \, dv_i \wedge dx_i - m \, v_i \, dv_i \wedge dt) \; .$$

qui est une forme fermée que nous pouvons encore écrire

$$\boxed{\Omega_c = d(m \, v_i \, dx_i - T \, dt)} \quad \text{(II.1.4)}$$

où T est l'énergie cinétique et

$$\boxed{\Omega_d = X_i \, dx_i \wedge dt} \qquad (II.1.5)$$

produit extérieur du travail élémentaire de la force agissant sur le point par la différentielle du temps.

II.2. Forme extérieure associée à un système holonome.

On considère un système holonome S décrit par n coordonnées indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et un champ de vecteurs de forces $\vec{F}$.
La position d'un point $M \in S$ est donnée par une fonction vectorielle $\vec{f}$

$$d\,\vec{OM} = \vec{f}(q)$$

où $q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$ avec $q_{n+1} = t$.
Nous supposons l'existence des dérivées partielles de $\vec{f}$ par rapport aux q_i.
Sous ces conditions, la vitesse du point M sera donnée par :

$$\vec{V}_M = \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

1. Calcul de la partie cinétique.

Parallèlement à la relation (II.1.4), nous pouvons calculer Ω_c comme la dérivée extérieure de

$$\int_S (\vec{V}_M \mid d\,\vec{OM})dm - \frac{1}{2}\,dt \int_S (\vec{V}_M)^2 \,dm \qquad (II.2.1)$$

Nous remplaçons dans cette expression $d\,\vec{OM}$ et $\vec{V}_M$ par leur valeur :

$$d\,\vec{OM} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i} dq_i \quad \text{et} \quad \vec{V}_M = \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

nous obtenons

$$\boxed{\Omega_c = d\,[\,g_{ki}\,\dot{q}_k\,dq_i - \frac{1}{2}\,g_{ki}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_i\,dt\,]} \qquad (II.2.2)$$

où $g_{ki} = \int_S (\frac{\partial \vec{f}}{\partial q_k} \mid \frac{\partial \vec{f}}{\partial q_i})dm.$

2. Calcul de la partie dynamique.

En introduisant les forces généralisées, nous exprimons la puissance des forces $\vec{F}$ comme :

$$P = Q_i \dot{q}_i$$

et le travail élémentaire par $T = Q_i \, dq_i$.
Nous obtiendrons donc comme partie dynamique (II.1.5)

$$\boxed{\Omega_d = Q_i \, dq_i \wedge dt} \qquad \text{(II.2.3)}$$

II.3. Application : la forme de Lagrange.

Si nous remarquons que $g_{ki} \, \dot{q}_k = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, nous obtenons :

$$\Omega_c = d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} dq_i - T\, dt\right)$$

ou

$$\Omega_c = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \wedge dq_i + \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \partial q_i} \right) dq_k \wedge dq_i \right]^\star$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial q_k} dq_k \wedge dt \qquad \text{(II.3.1)}$$

Par $[\ ]^\star$ nous notons ici et dans la suite une somme suivant les indices croissants.
En se rappelant que $\Omega_d = Q_k \, dq_k \wedge dt$ et $\Omega = \Omega_c + \Omega_d$, nous obtenons les équations du mouvement :

(1) $$\frac{\partial \Omega}{\partial (d\dot{q}_k)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} dq_i - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} dt = 0$$

qui sont vérifiées automatiquement

(2) $$\frac{\partial \Omega}{\partial (dq_i)} = - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_k} dq_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \partial q_i} dq_k - \frac{\partial T}{\partial q_i} dt + Q_i dt = 0$$

Remarquant que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \partial q_i} dq_k = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \partial q_i} \dot{q}_k \, dt = 2 \frac{\partial T}{\partial q_i} dt$$

nous obtenons que

$$- d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} dt + Q_i \, dt = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

qui sont les équations de Lagrange.

CHAPITRE III : Equations du mouvement de systèmes non holonomes obtenues comme les équations associées de 2-formes extérieures.

III.1. Introduction.

Les équations considérées au chapitre I sont établies à partir des équations de Lagrange ou du principe des travaux virtuels en utilisant certaines hypothèses supplémentaires.

Dans ce cas, ne serait-il pas possible de transformer la forme de Lagrange obtenue dans le chapitre précédent en utilisant ces hypothèses ?

Nous espérons de cette façon obtenir une forme extérieure dont les équations associées seront les équations différentielles du mouvement en question.

Le problème est le suivant :

Soit Ω une forme extérieure du second ordre qui nous donne des équations du mouvement $\theta = \frac{\partial\Omega}{\partial(dy)} = 0$.

La marche habituelle consiste à effectuer une transformation sur les formes θ pour arriver à un nouveau système d'équations $\tilde{\theta}$.

Notre but serait de transformer Ω. On montrera dans la suite que la transformation doit être linéaire en dy.

Il faudra donc montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\frac{\partial\Omega}{\partial(dy)}"] \arrow[d, "dy \to d\tilde{y}"'] & \theta \arrow[d, "dy \to d\tilde{y}"] \\
\tilde{\Omega} \arrow[r, "\frac{\partial\Omega}{\partial(d\tilde{y})}"'] & \tilde{\theta}
\end{tikzcd}$$

Les passages aux quasi-coordonnées et quasi-vitesses sont exprimées par des formes linéaires non dégénérées. Il en est de même de la substitution $dx = \frac{\partial X}{\partial q_i} dq_i$. Nous devons démontrer la commutativité du diagramme dans le

cas de transformations linéaires non dégénérées. L'idée de la démonstration appartient à E. Cartan [4] .
Soit un monôme du second ordre $\Omega = u_1 \wedge u_2$, où u_1 et u_2 sont deux formes différentielles du premier ordre. Le système associé à cette forme est

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.1.1)}$$

Considérons une transformation linéaire non dégénérée

$$\begin{aligned} u_1 &= b_{1j}\, \tilde{u}_j \quad (i,\ j = 1,\ 2) \\ u_2 &= b_{2i}\, \tilde{u}_i \end{aligned} \qquad \text{(III.1.2)}$$

Alors la forme Ω se transforme en

$$\begin{aligned} \Omega \to \tilde{\Omega} &= b_{1j}\, \tilde{u}_j \wedge b_{2i}\, \tilde{u}_i \\ &= (b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{21})\, \tilde{u}_1 \wedge \tilde{u}_2. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\tilde{\Omega}$ est non nul et le système associé à $\tilde{\Omega}$ est

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= 0 \\ \tilde{u}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système est le même que le système (III.1.1) ayant subi la transformation (III.1.2), ce qui montre la commutativité du diagramme.

III.2. Application à l'équation d'Euler Lagrange.

1. Calcul de la partie dynamique.

P_i étant la force généralisée exprimée en fonction des quasi-coordonnées, nous avons pour la partie dynamique :

$$\Omega_d = P_j\, d\pi_j \wedge dt \qquad \text{(III.2.1)}$$

2. Calcul de la partie cinétique.

Soit $\Omega_c = d\, [\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\, dq_i - T\, dt]$ la partie cinétique de la forme de Lagrange, que l'on va transformer en fonction des quasi-vitesses et des quasi-coordonnées :

$$\omega_s = a_{sr}\,\dot{q}_r \quad \text{et} \quad d\pi_s = a_{sr}\,dq_r$$

a) Nous pouvons considérer T comme exprimée dans ces nouvelles variables, dès lors

$$d(T\,dt) = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,d\omega_j \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \pi_j}\,d\pi_j \wedge dt \qquad \text{(III.2.2)}$$

b) Pour calculer $d(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,dq_i)$, on remarque que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,\frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,a_{ji}$$

Nous devons donc calculer la dérivée extérieure de $(\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,a_{ji}\,dq_i)$ où a_{ji} dépend des coordonnées généralisées

$$d(\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,a_{ji}\,dq_i) = \underbrace{d(\frac{\partial T}{\partial \omega_j}) \wedge a_{ji}\,dq_i}_{\star} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,da_{ji} \wedge dq_i}_{\star\star}$$

$$\star \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j\,\partial \omega_m}\,d\omega_m \wedge d\pi_j + [\,(\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j\,\partial \pi_m} - \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_m\,\partial \pi_j})\,d\pi_m \wedge d\pi_j]^{\star} \qquad \text{(III.2.3)}$$

$$\star\star \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,[\,(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i})\,dq_k \wedge dq_i]^{\star} =$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,[\,(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i})\,b_{kt}\,d\pi_t \wedge b_{is}\,d\pi_s]^{\star}$$

où la somme sur les indices croissants ne s'étend pas ici à t et s, ou bien :

$$= \frac{\partial T}{\partial \omega_j}\,[\,(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i})(b_{kt}\,b_{is} - b_{it}\,b_{ks})\,d\pi_t \wedge d\pi_s]^{\star}$$

avec la somme sur les indices croissants s'appliquant à i, k, t et s, alors

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j} [(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}) b_{kt} b_{is} d\pi_t \wedge d\pi_s]^\star$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \omega_j} [(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}) b_{it} b_{ks} d\pi_t \wedge d\pi_s]^\star$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \omega_j} [\gamma^j_{ts} d\pi_t \wedge d\pi_s]^\star - \frac{\partial T}{\partial \omega_j} [\gamma^j_{st} d\pi_t \wedge d\pi_s]^\star$$

$$= 2 \frac{\partial T}{\partial \omega_j} [\gamma^j_{ts} d\pi_t \wedge d\pi_s]^\star$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \gamma^j_{ts} d\pi_t \wedge d\pi_s \qquad \text{(III.2.4)}$$

parce que $\gamma^j_{ts} = - \gamma^j_{st}$ et $2 [\ ]^\star = [\ ]$

En regroupant (III.2;1,2,3,4), on obtient la forme

$$\Omega = \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j \partial \omega_m} d\omega_m \wedge d\pi_j + [(\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j \partial \pi_m} - \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_m \partial \pi_j}) d\pi_m \wedge d\pi_j]^\star$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \omega_j} d\omega_j \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \pi_j} d\pi_j \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \gamma^j_{ts} d\pi_t \wedge d\pi_s + P_j d\pi_j \wedge dt$$

D'après la définition de $\varepsilon^j_i = \gamma^j_{n+1,i}$, le cinquième terme de la forme se décompose en deux :

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j} \gamma^j_{ts} d\pi_t \wedge d\pi_s = \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \varepsilon^j_i dt \wedge d\pi_i + \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \gamma^j_{mi} d\pi_m \wedge d\pi_i$$

Notre forme devient alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j \partial \omega_m} d\omega_m \wedge d\pi_j + [(\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_j \partial \pi_m} - \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_m \partial \pi_j}) d\pi_m \wedge d\pi_j]^\star \\ & - \frac{\partial T}{\partial \omega_j} d\omega_j \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \pi_j} d\pi_j \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \varepsilon^j_i d\pi_i \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \omega_j} \gamma^j_{mi} d\pi_m \wedge d\pi_i \\ & + P_j d\pi_j \wedge dt \qquad \text{(III.2.5)}\end{aligned}}$$

Le système d'équations associées à cette forme est le suivant :

(1) $$\frac{\partial\Omega}{\partial(d\omega_m)} = \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_j\,\partial\omega_m} d\pi_j - \frac{\partial T}{\partial\omega_m} dt = 0$$

Ces équations sont satisfaites automatiquement, en effet

$$T = \frac{1}{2} A^{\star}_{jm}\, \omega_j\, \omega_m$$

et les équations (1) donnent

$$\frac{1}{2} A^{\star}_{jm}(d\pi_j - \omega_j\, dt) = 0.$$

(2) $$\frac{\partial\Omega}{\partial(d\pi_i)} = - \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_i\,\partial\omega_m} d\omega_m - \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_i\,\partial\pi_m} d\pi_m + \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_m\,\partial\pi_i} d\pi_m$$

$$- \frac{\partial T}{\partial\pi_i} dt - \frac{\partial T}{\partial\omega_j} \varepsilon^j_i\, dt - \frac{\partial T}{\partial\omega_j} \gamma^j_{mi}\, d\pi_m + P_i\, dt = 0$$

En sachant que $\frac{\partial^2 T}{\partial\omega_m\,\partial\pi_i} d\pi_m = \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_m\,\partial\pi_i} \omega_m\, dt$

$$= 2 \frac{\partial T}{\partial\pi_i} dt,$$

nous avons

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial\pi_i} dt + \varepsilon^j_i \frac{\partial T}{\partial\omega_j} dt + \frac{\partial T}{\partial\omega_j} \gamma^j_{mi}\, \omega_m\, dt - P_i\, dt = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial\omega_j} \gamma^j_{mi}\, \omega_m + \varepsilon^j_i \frac{\partial T}{\partial\omega_j} - \frac{\partial T}{\partial\pi_i} = P_i$$

Si l'on tient compte des liaisons en annulant $\omega_1, \ldots, \omega_l$, les équations deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_\alpha}\right) + \frac{\partial T}{\partial\omega_\beta} \gamma^\beta_{\gamma\alpha}\, \omega_\gamma + \varepsilon^\beta_\alpha \frac{\partial T}{\partial\omega_\beta} - \frac{\partial T}{\partial\pi_\alpha} = P_\alpha \qquad \text{(III.2.6)}$$

qui sont les équations d'Euler Lagrange.

III.3. Application aux équations de $\check{C}$aplygin.

Avant de traiter les équations de $\check{C}$aplygin, il est utile de remarquer que dans la recherche d'une forme extérieure pour les équations d'Euler Lagrange, nous avons tenu compte des *liaisons* en annulant les l premières quasi-vitesses dans les *équations finales* (III.2.6).

Le cas des équations de $\check{C}$aplygin sera traité différemment. On considère dans la définition de la dérivée extérieure deux séries de différentielles $dq_1, \ldots, dq_n$ et $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ indépendantes qui ne satisfont pas les équations de liaison.

Cette indépendance implique aussi la commutativité des opérateurs d et δ : $d\delta q = \delta dq$, qui ne se vérifie pas dans le cas des liaisons non holonomes.

Par conséquent, on ne peut pas dans le cas des liaisons non holonomes tenir compte des équations de liaison dans les formes linéaires ω.

Autrement dit, le diagramme suivant n'est pas commutatif.

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "d"] \arrow[d, Rightarrow, "\sim"'] & \Omega \arrow[d, "\sim"] \\ \tilde{\omega} \arrow[r, Rightarrow, "d"'] & \tilde{\Omega} \end{tikzcd}$$

où $\omega = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} dq_i - T\, dt$

d représente le symbole de dérivation extérieure

$\sim$: éliminer $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_l$ en tenant compte des équations de liaison.

En effet, il est facile de voir qu'en suivant la double flèche, on va obtenir n-l équations de Lagrange en $T^\star$ et non les équations de $\check{C}$aplygin.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} dq_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} b_{\beta\mu}\, dq_\mu + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} dq_\mu$$

$$= \frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} dq_\mu$$

et
$$\tilde{\omega} = \frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} dq_\mu - T^\star dt$$

Nous travaillerons comme suit : à la forme $\tilde{\Omega}$ on ajoute une forme qui tient compte des liaisons, cette forme (comme pour les formes généralisées) sera le produit extérieur du travail élémentaire des forces de liaison par dt, soit $R_i \; dq_i \wedge dt = \Omega_l$.

Néanmoins, dans le cas de liaisons idéales, ce travail élémentaire est nul et les équations de Čaplygin seront obtenues comme système d'équations associées à $\tilde{\Omega}$, ce que nous allons montrer

$$\Omega^{*}_{\text{capl.}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \wedge dq_i + [(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \, \partial q_i}) dq_k \wedge dq_i]^{\star} -$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \wedge dt + Q_i \; dq_i \wedge dt + \Omega_l$$

où $\Omega_l = 0$ et où nous pouvons exprimer les l premières vitesses généralisées $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$ en fonction des n-l autres à l'aide des équations de liaison $\dot{q}_\alpha = b_{\alpha\mu} \; \dot{q}_\mu$.

a) La partie dynamique.

$$Q_i \; dq_i \wedge dt = Q_\alpha \; dq_\alpha \wedge dt + Q_\mu \; dq_\mu \wedge dt$$

Mais $Q_\alpha = 0$, nous obtenons pour la partie dynamique $Q_\mu \; dq_\mu \wedge dt$ (III.3.1).

b) La partie cinétique.

Traitons chaque partie séparément

1) $\frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \wedge dt = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt$

Le premier terme de la somme est nul, le second peut être remplacé par

$$\frac{\partial T^{\star}}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial b_{\alpha\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu \; dq_\mu \wedge dt \qquad \text{(III.3.2)}$$

2) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \wedge dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} b_{\alpha\mu} \; d\dot{q}_\mu \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\mu \; db_{\alpha\mu} \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt$$

$$= \frac{\partial T^{\star}}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\mu \frac{\partial b_{\alpha\mu}}{\partial q_\nu} dq_\nu \wedge dt \qquad \text{(III.3.3)}$$

$$3)\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i\ \partial \dot q_k}\, d\dot q_k \wedge dq_i = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\beta}\, d\dot q_\beta \wedge dq_\alpha + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\alpha$$

$$+ \underline{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\nu} + \underline{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\beta}\, d\dot q_\beta \wedge dq_\nu}$$

D'autre part les coefficients $b_{\beta\mu}$ ne dépendant pas des vitesses, nous avons la relation

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\mu} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\beta}\,.\, b_{\beta\mu} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\mu}$$

- ce qui va nous permettre de transformer les deux termes soulignés que nous pouvons encore écrire

$$\underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\beta}\, b_{\beta\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\nu} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\beta}\, \dot q_\mu\, db_{\beta\mu} \wedge dq_\nu$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\ \partial \dot q_\beta}\, \dot q_\mu\, db_{\beta\mu} \wedge dq_\nu \qquad \text{(III.3.4)}$$

- Les deux premiers termes de la somme peuvent être remplacés par

$$\underline{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\beta}\, b_{\beta\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\beta}\, \dot q_\mu\, db_{\beta\mu} \wedge dq_\alpha + \underline{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\mu}\, d\dot q_\mu \wedge dq_\alpha}$$

Les termes soulignés s'annulent et il nous reste

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha\ \partial \dot q_\beta}\, \dot q_\mu\, db_{\beta\mu} \wedge dq_\alpha \qquad \text{(III.3.5)}$$

$$4)\ \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i\ \partial q_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_k\ \partial q_i} \right) dq_k \wedge dq_i \right]^\star$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i\ \partial q_k}\, dq_k \wedge dq_i$$

La somme sur k ne s'étendra que de l+1 à n par les hypothèses de Čaplygin.

Nous obtenons

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_\mu} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial q_\mu} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu}$$

Nous utiliserons ici les relations

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu}$$

et

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial q_\mu} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu = 0$$

Ce qui nous donne

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\alpha = - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu \, dq_\mu \wedge dq_\alpha$$

$$= - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\nu \, db_{\beta\nu} \wedge dq_\alpha \qquad \text{(III.3.6)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu = \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu \, dq_\mu \wedge dq_\nu$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu \qquad \text{(III.3.7)}$$

Il nous reste à regrouper tous les termes affectés du signe correspondant dans la forme de Lagrange

$$\Omega = \text{(III.3.1)} + \ldots + \text{(III.3.7)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Omega = \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\nu \wedge dq_\mu + \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\nu \, \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu$$

$$- \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} db_{\beta\nu} \wedge dq_\nu$$

$$+ Q_\mu \, dq_\mu \wedge dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} \, d\dot q_\nu \wedge dq_\mu + \left[\left(\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_\mu} - \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\mu \, \partial q_\nu} \right) dq_\mu \wedge dq_\nu \right]^\star \\ & - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} \, dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} \, d\dot q_\mu \wedge dt \\ & - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\beta} \left[\left(\frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial b_{\beta\mu}}{\partial q_\nu} \right) dq_\mu \wedge dq_\nu \right]^\star + Q_\mu \, dq_\mu \wedge dt\end{aligned}}$$

Le système d'équations associées à cette forme est le suivant

(1) $$\frac{\partial \Omega}{\partial (d\dot q_\mu)} = \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} \, dq_\nu - \frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} \, dt = 0$$

qui sont vérifiées automatiquement.

(2) $$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial (dq_\mu)} = {} & - \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} \, d\dot q_\nu + \left(\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_\mu} - \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\mu \, \partial q_\nu} \right) dq_\nu \\ & - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} \, dt - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\beta} \left(\frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial b_{\beta\mu}}{\partial q_\nu} \right) dq_\nu + Q_\mu \, dt = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} \, d\dot q_\mu + \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\mu \, \partial q_\nu} \, dq_\nu - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} \, dt + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\beta} \left(\frac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial b_{\beta\mu}}{\partial q_\nu} \right) dq_\nu$$

$$= Q_\mu$$

ou encore $\dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} \right) - \dfrac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} + \dfrac{\partial T}{\partial \dot q_\beta} \left(\dfrac{\partial b_{\beta\nu}}{\partial q_\mu} - \dfrac{\partial b_{\beta\mu}}{\partial q_\nu} \right) \dot q_\nu = Q_\mu$

qui sont les équations de Čaplygin.

III.4. Application aux équations de Voronec.

a) La partie dynamique.

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \Rightarrow \Omega_d = \frac{\partial U}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu} dq_\mu \wedge dt + \frac{\partial U}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt \qquad \text{(III.4.1)}$$

b) La partie cinétique.

Comme dans l'exemple précédent, nous traitons chaque partie de la forme lagrangienne séparément.

1) $$\frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \wedge dt = \frac{\partial T^\star}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu} dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\beta} \dot{q}_\nu b_{\beta\mu} dq_\mu \wedge dt + \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\mu} \dot{q}_\nu dq_\mu \wedge dt \qquad \text{(III.4.2)}$$

2) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \wedge dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} b_{\beta\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\mu db_{\beta\mu} \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt = \frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\mu db_{\beta\mu} \wedge dt \qquad \text{(III.4.3)}$$

3) $$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \wedge dq_i = \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\mu db_{\beta\mu} \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\mu db_{\beta\mu} \wedge dq_\alpha \qquad \text{(III.4.4)}$$

4) $$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} dq_k \wedge dq_i = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} dq_\beta \wedge dq_\alpha + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\alpha + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\nu \partial q_\beta} dq_\beta \wedge dq_\nu$$

Nous utilisons ici les relations

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_i} \dot{q}_\nu = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_i} \dot q_\nu + \frac{\partial T}{\partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_i}$$

pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \, \partial q_k} dq_k \wedge dq_i = - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha \, \partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\mu} \dot q_\nu \, dq_\mu \wedge dq_\alpha - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\alpha \, \partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\beta} \dot q_\nu \, dq_\beta \wedge dq_\alpha$$
$$+ \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\mu} \dot q_\nu \, dq_\mu \wedge dq_\nu - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dq_\nu$$
$$+ \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_\beta} dq_\beta \wedge dq_\nu - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\beta} \dot q_\nu \, dq_\beta \wedge dq_\nu - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\nu}}{\partial q_\beta} dq_\beta \wedge dq_\nu \quad \text{(III.4.5)}$$

Nous devons maintenant regrouper tous les termes (III.4.1), (III.4.5) affectés du signe correspondant dans la forme de Lagrange.

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} d\dot q_\mu \wedge dq_\nu + \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_i} dq_i \wedge dq_\nu - \frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} d\dot q_\mu \wedge dt \\ & - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T^\star}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu} \, dq_\mu \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\gamma} db_{\gamma\nu} \wedge dq_\nu \\ & + \frac{\partial U}{\partial q_\mu} dq_\mu \wedge dt + \frac{\partial U}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu} \, dq_\mu \wedge dt \end{aligned}}$$

Le système d'équations associées à cette forme est le suivant :

(1)
$$\frac{\partial \Omega}{\partial (d\dot q_\mu)} = \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} dq_\nu - \frac{\partial T^\star}{\partial \dot q_\mu} dt = 0$$

qui est vérifié automatiquement.

(2)
$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dq_\nu)} = + \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial \dot q_\mu} d\dot q_\mu + \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\nu \, \partial q_i} dq_i - \frac{\partial^2 T^\star}{\partial \dot q_\mu \, \partial q_\nu} dq_\mu$$
$$+ \frac{\partial T^\star}{\partial q_\nu} dt + \frac{\partial T^\star}{\partial q_\beta} b_{\beta\nu} \, dt - \frac{\partial T}{\partial \dot q_\gamma} db_{\gamma\nu}$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\mu}}{\partial q_\nu} dq_\mu + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \frac{\partial b_{\gamma\mu}}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu} dq_\mu$$

$$- \frac{\partial U}{\partial q_\nu} dt - \frac{\partial U}{\partial q_\beta} b_{\beta\nu} dt = 0$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^\star}{\partial \dot{q}_\nu}\right) = \frac{\partial (T^\star + U)}{\partial q_\nu} + \frac{\partial (T^\star + U)}{\partial q_\beta} b_{\beta\nu}$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \left\{\frac{db_{\gamma\nu}}{dt} - \dot{q}_\mu \left(\frac{\partial b_{\gamma\mu}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial b_{\gamma\mu}}{\partial q_\beta} b_{\beta\mu}\right)\right\}$$

qui sont les équations de Voronec.

Références :

[1] POINCARE, "Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique", CR Acad. Sci. Paris 1901, vol. 132, pp. 369-71.

[2] L. LUR'E, "Mécanique analytique" (traduit du russe), Librairie universitaire, Louvain, tome 1.

[3] JU. I. NEIMARK et N.A. FUFAEV, "Dynamics of nonholonomic systems", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972, vol. 33.

[4] E. CARTAN, "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques", Hermann, Paris, 1945.

[5] E. CARTAN, "Leçons sur les invariants intégraux", Librairie scientifique A. Hermann et fils, Paris, 1922.

[6] J. KRAVTCHENKO, VIII^{ème} congrès de mathématique.

[7] A. LICHNEROWICZ, Bulletin des sciences mathématiques, tome LXX, 2ème série, 1946.

[8] F. GALLISSOT, Thèse : "Les formes extérieures en mécanique", Annales de l'Institut Fourier, tome 4.

[9] J. ROMANOV, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. I, 1976.

Table des matières :