



THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Minimisation avec contraintes: méthode des directions admissibles: algorithmes conceptuels et implémentables

Sine, Michèle

Award date:
1975

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Minimisation avec contraintes :
Méthode des directions admissibles :
Algorithmes conceptuels et
implémentables

FMB1/1975/3.
Michèle Sine.

MATH

204971
166402
H619545 SAN

11/11/11

Nous présentons, ici, les algorithmes de Polak et Zoutén
dixé qui traitent la résolution de programmes mathé-
matiques du type :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } f(x) \\ & \text{sous les conditions } f^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

où les fonctions numériques, f^0 et f^i , définies dans \mathbb{R}^n , sont continuellement différentiables.

De plus, nous supposons qu'il existe un point z^0
de \mathbb{R}^n tel que $f^i(z^0) < 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$

La méthode des directions admissibles ([21], [22],
[P]), à partir d'un point z^i réalisable (c'est-à-
dire, qui vérifie les contraintes), construit une direc-
tion, qui est de descente pour f^0 , et, en même temps,
définit la plus large zone possible de points
réalisables (à partir de z^i), et en prend le mini-
-mum réalisable.

Cette direction est obtenue comme solution d'un
programme linéaire, dont les contraintes sont les
linéarisations des fonctions f^0 et $f^i (i \in \{1, \dots, m\})$

Une suite théoriquement infinie, mais qui, pratique-
-ment, ne peut être que finie, de programmes liné-
-aires analogues, est ainsi construite.

De plus, les fonctions affines parmi les contraintes,



qui interviennent dans un programme linéaire, ont leurs expressions inchangées; ces algorithmes essaient donc de tirer avantage des contraintes "linéaires" (affines).

La convergence de cet algorithme a été obtenue, à partir de modèles abstraits, vérifiant des hypothèses très générales, décrits dans le premier chapitre. Ces modèles, dits conceptuels, ne conduisent pas directement à des méthodes adaptables sur ordinateur. Mais, par des considérations pratiques (par exemple, remplacer des minimisations unidirectionnelles exactes par une procédure implémentable), on peut les modifier et les rendre ainsi implémentables, tout en étant assuré de leur convergence vers un point stationnaire, sinon optimum.

Les modèles conceptuels, et leur dérivé, adapté au calcul sur ordinateur, de Polak et Zoutendijk sont décrits dans le troisième chapitre.

Le deuxième chapitre rappelle la condition nécessaire d'optimalité de Fizz John, et en donne des théorèmes dérivés. Les algorithmes construisent un point qui vérifie les hypothèses de ces théorèmes.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons le programme qui a testé la convergence pratique d'un algorithme dérivé de Polak et Ribkendorf [P].

— Chapitre 1 —

les modèles décrits ici vont donc servir pour construire des algorithmes et en démontrer la convergence.

les deux premiers modèles et leur démonstration se trouvent dans [P]. De là nous avons tiré un troisième modèle qui va démontrer la convergence de l'algorithme, conceptuel, provenant du croisement Zoutendijk - Polak

Soit le problème abstrait suivant:

T étant un fermé d'un Banach B , et P une propriété, construis les points de T , jouissent de la propriété P .

Dans le cas de la programmation non linéaire, $B = \mathbb{R}^n$, en contrôle optimal $B = L^2$ ou L^∞ .

En général, avoir la propriété P , c'est être optimal, ou, plus souvent, vérifier une condition nécessaire d'optimalité (Par exemple pour un problème de minimisation d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continuellement différentiable: $P(z) \Leftrightarrow \nabla f(z) = 0$)

Un point z vérifiant la propriété P est dit désirable.

Δ désignera l'ensemble des points désirables d'un problème.

Modèle d'algorithme 1

Soit B : espace de Banach

$T \subseteq B$ fermé

$A: T \rightarrow 2^T$: fonction multivoque, qui va permettre de définir la construction d'un point de l'algorithme (pour un problème de minimisation : donner des points de descente)

$c: T \rightarrow \mathbb{R}$: fonction qui définit le test d'arrêt

On a le modèle (1), suivant :

Etape 0 : soit $z_0 \in T$

Etape 1 : $i = 0$

Etape 2 : construire $y \in A(z_i)$

Etape 3 : $z_{i+1} = y$

Etape 4 : si $c(z_{i+1}) \geq c(z_i)$, stop
sinon $i = i + 1$, et aller à l'étape 2

(2) Théorème de convergence associé :

(i) c est soit continue sur l'ensemble des points non-désinables de T , soit bornée inférieurement sur T

(ii) $\forall z \in T$, z non désinable, $\exists \delta(z) > 0$, $\exists \epsilon(z) < 0$
tels que $c(z'') - c(z') \leq \delta(z) < 0$, $\forall z' \in T$, $\forall z'' \in A(z')$
tels que $\|z' - z\|_B \leq \epsilon(z)$

Alors : si $\{z_i\}$ est une suite construite par (1) :
 elle est soit finie et son dernier point est désirable,
 soit infinie, et, tous ses points d'accumulation
 sont désirables.

Démonstration :

Remarquons d'abord que (1) entraîne :

$$(3) \quad z \notin \Delta \Rightarrow \exists \delta(z) \quad \forall z' \in A(z) \quad c(z') - c(z) \leq \delta(z) < 0$$

et la négation de (3) donne

$$(4) \quad \exists z' \in A(z) \quad c(z') - c(z) > 0 \Rightarrow z \in \Delta$$

1^{er} cas : $\{z_i\}$ est finie

Soit $\{z_1, \dots, z_k\}$ la suite construite.

La seule possibilité d'arrêt est donnée par l'éta-

-le \forall z , uniquement si : $c(z_{k+1}) - c(z_k) \geq 0$.

Par construction : $z_{k+1} \in A(z_k)$

Et donc (4) $\Rightarrow z_k \in \Delta$ c. q. f. d.

2^{er} cas : $\{z_i\}$ est infinie et a un point d'accumulation

Soit \hat{z} un point d'accumulation.

Nous avons que $\hat{z} \in \Delta$.

\hat{z} : point d'accumulation de $\{z_i\}$ \Leftrightarrow

$$(5) \quad \exists K \subset \mathbb{N}, \forall i \in K \quad \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = \hat{z}$$

Supposons que $\hat{z} \notin D$ et montrons que cela mène à une contradiction.

$$(4) \Rightarrow \exists \hat{\epsilon} > 0, \exists \hat{\delta} < 0, \forall z' \in B(\hat{z}, \hat{\epsilon}), \forall z'' \in A(z') \\ c(z'') - c(z') \leq \hat{\delta} < 0$$

$$(5) \Rightarrow \exists k \in K, \forall i \geq k, i \in K, z_i \in B(\hat{z}, \hat{\epsilon})$$

Par construction, $z_{i+1} \in A(z_i)$

On a donc :

$$(6) \quad \exists k \in K, \forall i \in K, i \geq k \quad c(z_{i+1}) - c(z_i) \leq \hat{\delta} < 0$$

Et donc, pour 2 indices consécutifs i et $i+j \in K$, on a :

$$\begin{aligned} & c(z_{i+j}) - c(z_i) \\ &= \underbrace{[c(z_{i+j}) - c(z_{i+j-1})]}_{< 0, \text{ par construction}} + \underbrace{[c(z_{i+j-1}) - c(z_{i+j-2})]}_{< 0, \text{ par construction}} + \dots \\ & \quad + \underbrace{[c(z_{i+1}) - c(z_i)]}_{< \hat{\delta} \text{ par (6)}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(7) \quad c(z_{i+j}) - c(z_i) < \hat{\delta}, \forall i, i+j, 2 \text{ indices de } K \text{ consécutifs}$$

Or $\{c(z_i)\}$ est, par construction, décroissante.
 $c(\cdot)$ est, soit continue sur un compact, }
 soit bornée inférieurement

Donc :

$$(8) \quad \{c(z_i)\} \text{ est convergente.}$$

Or (7) construit une sous-suite divergente de $\{c(z_i)\}$, ce qui

contredit (8), c.q.f.d.

Remarque : Les conditions (i) et (ii) assurent que la suite ne converge pas vers un point non désirable; la condition (ii) permet une erreur sur z_i :

si z_i est non désirable, à partir d'un point d'un voisinage de z_i , il y a moyen de construire un point z'' tel que $c(z'')$ soit inférieur à $c(z')$.

Le modèle décrit convient pour des algorithmes où, le calcul exact d'un point $z_{i+1} \in A(z_i)$ est supposé possible.

Une première extension du modèle, pour tenir compte de l'imprécision sur $A(z_i)$ est de poser

$$A_\varepsilon(z) = \{ y \in T \mid \|y - a(z)\| \leq \varepsilon \}, \text{ où}$$

$$a : T \rightarrow T \text{ est une fonction univoque.}$$

On peut montrer que, en remplaçant dans le théorème (2), (i) par (i') c est uniformément continue sur T , et, dans (ii) $z'' \in A(z')$ par $z'' = a(z')$, les conclusions du théorème (2) restent valables.

Une deuxième extension est de remplacer A par

$$A : \mathbb{R}^+ \times T \rightarrow 2^T$$

$$(\varepsilon, z) \mapsto y$$

Il faut alors étudier la manière dont varie l'erreur;

il faudra $\{\varepsilon; \gamma \rightarrow 0$

le modèle (1) est dit autonome : quelle que soit l'itération, z_{i+1} est uniquement fonction de z_i .

Dans le modèle suivant z_{i+1} dépendra, non seulement de z_i , mais aussi de ϵ_i . (Remarquons que, s'il est possible de définir ϵ_i , comme fonction de z_i , on est ramené à un modèle autonome : ce sera le cas du modèle de Polak.)

De plus, très souvent, les algorithmes d'optimisation déterminent, d'abord une direction de descente, et, ensuite, choisissent un point sur cette direction : pour englober ces modèles, A va être remplacé par 2 fonctions multivoques :

$H : \mathbb{R}^+ \times T \rightarrow S \subset B$: va déterminer la direction de descente (à partir de z)
$(\epsilon, z) \mapsto h$	
$M : T \times B \rightarrow S^T$	qui choisira le point sur la direction de descente.
$(z, h) \mapsto y$	

Un élément supplémentaire interviendra aussi : le test " $c(y) \geq c(z)$?" va être remplacé par un autre, plus facile à calculer : ce sera le rôle de la fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \times T \rightarrow \mathbb{R}^-$. Soit donc :

(9). Modèle d'algorithme.

Soit ψ, H, M, ψ et c définis comme ci-dessus.
 $\{ \epsilon_0 > 0, \epsilon' \in]0, \epsilon_0[, \alpha > 0, \beta \in]0, 1[\}$ des paramètres fixés

- Étape 0 : construire $z_0 \in T$
- Étape 1 : $i = 0$
- Étape 2 : $\epsilon = \epsilon_0$

- Etape 3 : construire $h \in H(\varepsilon, z, 1)$
 Etape 4 : construire $\varphi(\varepsilon, z, 1)$
 Etape 5 : Si $\varphi(\varepsilon, z, 1) \leq -\alpha\varepsilon$, aller en 8
 Sinon : aller en 6
 Etape 6 : Si $\varepsilon \leq \varepsilon'$, construire $\varphi(0, z, 1)$ et aller en 7,
 Sinon : $\varepsilon' = \beta\varepsilon$ et aller en 3
 Etape 7 : Si $\varphi(0, z, 1) = 0$; $z_{i+1} = z_i$, stop.
 Sinon $\varepsilon = \beta\varepsilon$ et aller en 3.
 Etape 8 : Construire $\varphi \in H(z_i, h)$ et aller en 9.
 Etape 9 : $z_{i+1} = \varphi$, $h_i = h$, $\varepsilon_i = \varepsilon$
 $i = i+1$ et aller en 3

(10) théorème de convergence associé :

Hypothèses :

(i) $\varphi(0, z) = 0 \Rightarrow z \in \Delta$

(ii) T et S sont compacts

(iii) $c(z)$ bornée inférieurement $\forall z \in T$

(iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall z \in T$, $\varphi(\varepsilon, z) \leq -\mu \Rightarrow \exists \delta(\mu) > 0$.

(v) $c(z + th) - c(z) \leq -\frac{t\mu}{2} \quad \forall t \in [0, \delta(\mu)], \forall h \in H(\varepsilon, z)$

(vi) $\forall z \in T$, $\forall \delta > 0$, $\exists \varepsilon(z, \delta) > 0$ tel que

(12) $\varphi(\varepsilon, z') \leq \varphi(0, z) + \delta$, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon(z, \delta)], \forall z' \in B(z, \delta)$

(où $B(z, \varepsilon(z, \delta)) = \{z' \in T \mid \|z - z'\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon(z, \delta)\}$)

(\Leftrightarrow) $\varphi(\dots)$ semi continue supérieurement sur $\{0, \varepsilon, \pi\}$

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\varphi(\varepsilon, z) \leq -\alpha \varepsilon, \Rightarrow$
 (13) $c(y) - c(z) \leq -\delta(\varepsilon) \varepsilon, \forall z \in T, \forall h \in H(\varepsilon, z), \forall y \in H(z, h)$

(ii) $\forall z \in T, \forall h \in B,$

$$M(z, h) = \{ (z + \lambda h) \in T \mid c(z + \lambda h) = \min_{\lambda > 0} \{ c(z + \lambda h) \mid z + \lambda h \in T, \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}) \} \}$$

Thèse

Si $\{z_k\}$ est une suite construite par (9).

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } \{z_k\} \text{ est finie et son dernier point est} \\ \text{désirable;} \\ \text{soit } \{z_k\} \text{ est infinie, et tous ses points d'accumulation} \\ \text{sont désirables.} \end{array} \right.$

Démonstration

1) Algorithme (9) est bien défini

(c'est à dire z_k défini $\Rightarrow z_{k+1}$ défini)

Supposons que (9) reste bloqué à l'itération k .

\Leftrightarrow l'algorithme construit une suite infinie de

$$h \in H(\varepsilon_{k-1} \beta^d, z_k) \text{ tel que } \varphi(\varepsilon_{k-1} \beta^d, z_k) \leq -\alpha \beta^d \varepsilon_{k-1}$$

C'est impossible, en effet:

a) si $\varphi(0, z_k) = 0, \Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}$ tq $\beta^d \varepsilon_{k-1} \leq \varepsilon_j, \Rightarrow \text{pas 7,}$
 $\Rightarrow \text{stop}$

(tq abréviation pour tel que)

b) si $\varphi(0, z_k) < 0$

On applique (v) avec $\delta = -\frac{\varphi(0, z_k)}{2}$.

On a donc: $\exists \varepsilon'' > 0$, $\varphi(\varepsilon, z_k) \leq \frac{\varphi(0, z_k)}{2} < 0$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'')$
 Soit $j \in \mathbb{N}$ tq $\beta^j \varepsilon_{k-1} \leq \min\{\varepsilon'', -\frac{\varphi(0, z_k)}{2\alpha}\}$,
 On a donc:

$$\varphi(\beta^j \varepsilon_{k-1}, z_k) \leq \frac{\varphi(0, z_k)}{2} \leq -\alpha \beta^j \varepsilon_{k-1}$$

|
(def de j)

Donc, à l'étape 5, l'algorithme est branché vers l'étape 8 pour construire un nouveau point, z_{k+1} , ce qui contredit l'hypothèse de départ.

2) Si la suite est finie, son dernier point $\in \Delta$

(le seul test d'arrêt se fait au pas 7, en un point désirable).

3) $\{\varepsilon_i\}$ est une suite infinie.

a) La suite associée $\{\varepsilon_i\} \rightarrow 0$

$\{\varepsilon_i\}$ suite décroissante, positive, est donc convergente: soit ε^* tq $\{\varepsilon_i\} \rightarrow \varepsilon^*$

Supposons que $\varepsilon^* \neq 0$

Par construction: $\varepsilon_i = \beta^{j(i)} \varepsilon_0$, avec $j(i) \in \mathbb{N}$,

Donc $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall i \geq k$, $\varepsilon_i = \varepsilon^*$, (\Leftarrow)

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ tq } \forall i \geq k \quad \beta^{d(i)} \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon^*$$

$$\text{Donc: } \quad \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) = \varphi(\varepsilon^*, z_i) \leq -\alpha \varepsilon^*, \forall i \geq k+1$$

(seule façon pour avoir une valeur constante de ε_i , à partir d'une certaine itération).

$$\text{Avec (13), on a: } \exists \delta^* > 0 \text{ tq } c(z_{i+1}) - c(z_i) \leq -\delta^* \varepsilon^* < 0$$

$\Rightarrow \{c(z_i)\} \rightarrow -\infty, i \rightarrow \infty$, ce qui contredit l'hypothèse (11.1), $\Rightarrow \varepsilon^* = 0$.

$$b) \quad \underline{\{z_i\} \text{ converge vers } \hat{z}, \Rightarrow \hat{z} \in \Delta.}$$

$$\text{Par a) : } \{\varepsilon_i\} \rightarrow 0, \quad \text{où } \varepsilon_i = \beta^{d(i)} \varepsilon_0$$

ε_i a donc été diminué une infinité de fois ; cette diminution ne peut être obtenue qu'au pas 5, si et seulement si.

$$(14) \quad \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) > -\alpha \varepsilon_{i-1} \quad \forall i \in K$$

Par l'hypothèse (v), on a

$$\forall \delta > 0 \exists k(\delta) \text{ tq } \forall i \in K, i \geq k(\delta) \quad \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) \leq \varphi(0, \hat{z}) + \delta$$

$$\text{et donc: } \quad \overline{\lim}_{i \in K} \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) \leq \varphi(0, \hat{z}) \leq 0$$

$$\text{Or (14) } \Rightarrow \quad \overline{\lim}_{i \in K} \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) \geq \lim_{i \in K} (-\alpha \varepsilon_{i-1}) = 0 \quad \left. \vphantom{\overline{\lim}_{i \in K} \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i)} \right\} \Rightarrow$$

$$0 \leq \overline{\lim}_{i \in K} \varphi(\varepsilon_{i-1}, z_i) \leq \varphi(0, \hat{z}) \leq 0, \Rightarrow$$

$$\varphi(0, \hat{z}) = 0, \Leftrightarrow \hat{z} \in \Delta$$

c) $\{z_n\}$ divergente, \Rightarrow les points d'accumulation
 $\in \Delta$

$z_i \in T, \forall i$
 T compact $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \{z_n\} \text{ a, au moins, 2 points d'accumulation } \hat{z} \text{ et } z^* \end{array} \right.$

Montrons, par l'absurde, que $z^* \in \Delta$

$z^* \notin \Delta \Leftrightarrow \exists \mu > 0 \quad + (0, z^* | < -2\mu < 0$

En choisissant, dans $(0, \mu)$, $\delta = \mu$:

$\exists \delta_1, \forall \varepsilon \in [0, \delta_1], \forall z \in B(z^*, \delta_1), +(\varepsilon, z) \leq \mu$

$z^* \neq \hat{z}$, donc $\exists \delta_2 \in [0, \delta_1/2]$, tel que

$$(15) \quad B(z^*, 2\delta_2) \cap B(\hat{z}, 2\delta_2) = \emptyset$$

z^* et \hat{z} sont des points d'accumulation, \Rightarrow

$B(z^*, 2\delta_2)$ et $B(\hat{z}, 2\delta_2)$ contiennent une infinité de points de $\{z_n\}$.

Soit donc $z_j \in B(z^*, \delta_2)$.

$$\exists \bar{\eta}(j) \in \mathbb{N}$$

$$\exists \eta(j) \in \mathbb{N}$$

$$z_j + \eta(j)$$

$$\hat{z}^*$$

$$z_j + \eta(j)$$

$$z^*$$

$$z_j + \bar{\eta}(j) \in B(\hat{z}, 2\delta_2)$$

$$0 < \eta(j) \leq \bar{\eta}(j)$$

$$z_j + \eta(j) \notin B(z^*, 2\delta_2)$$

$$\text{et } z_j + \eta(j) - 1 \in B(z^*, 2\delta_2)$$

On a donc

$$\delta_2 \leq \|z_j + \eta(j) - z_j\| = \sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \|z_j + p\eta(j) - z_j + \eta(j)\|$$

(Puisque $z_j \in B(z^*, \delta_2)$

et $z_j + \eta(j) \notin B(z^*, 2\delta_2)$)

Et donc

$$(16) \quad \delta_2 \leq \sum_{p=0}^{\eta(j)-2} \lambda_{j+p} \|h_{j+p}\|$$

(Avec λ_{j+p} et h_{j+p} , construits par le cas 8).

S est un compact $\Rightarrow m = \max \{ \|h\| \text{ tq } h \in S \} < \infty$

$$\text{Et donc (16)} \Rightarrow \sum_{p=0}^{\eta(j)-2} \lambda_{j+p} \geq \frac{\delta_2}{m} > 0, \forall j \text{ tq } z_j \in B(z_j^*, \delta_2)$$

Soit $s(\mathcal{M})$ défini par l'hypothèse (iv), (puisque l'on a $\forall \varepsilon, z) \leq -\mathcal{M}$, $\forall \varepsilon \in [0, \delta_1]$, $\forall z \in B(z^*, \delta_1)$)

Posons

$$(17) \quad \eta_i = \min \{ \lambda_i, s(\mathcal{M}) \}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Par définition de z_{i+1} (voir def. de $H(z, h)$ en (vi)),

$$\text{et de } s(\mathcal{M}) : c(z_{i+1}) - c(z_i) \leq c(z_i + \eta_i h_i) - c(z_i) \leq -\frac{\eta_i \mathcal{M}}{2}$$

Donc $\forall z_0 \in B(z_0^*, \delta_2)$,

$$\begin{aligned} c(z_0 + \eta(j)) - c(z_0) &= \sum_{p=0}^{\eta(j)-1} [c(z_0 + p+1) - c(z_0 + p)] \\ &\leq \sum_{p=0}^{\eta(j)-1} [c(z_0 + p+1 + \eta_{j+p} h_{j+p}) - c(z_0 + p)] \end{aligned}$$

$$(18) \quad \leq -\frac{\mathcal{M}}{2} \sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \eta_{j+p}$$

Par définition de η_i (en (17))

Par (16)

$$\sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \eta_{j+p} \geq \min \left\{ \sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \lambda_{j+p}, \eta(j) s(\mathcal{M}) \right\} \geq \min \left\{ \frac{\delta_2}{m}, s(\mathcal{M}) \right\},$$

$$(s(\mathcal{M}) > 0$$

$$\eta(j) > 0$$

$$(16) \quad)$$

$$\sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \eta_{j+p} \geq \min \left\{ \frac{\delta_2}{m}, s(\mu) \right\}$$

Ainsi on obtient une borne supérieure sur $-\sum_{p=0}^{\eta(j)-1} \eta_{j+p}$ et donc, (par (18)) sur $c(z_{j+\eta(j)}) - c(z_j)$ indépendamment de l'itération j .

$$(20) \quad c(z_{j+\eta(j)}) - c(z_j) \leq -\frac{\eta}{2} \min \left\{ \frac{\delta_2}{m}, s(\mu) \right\},$$

$$\forall z_j \in B(z^*, 2\delta_2)$$

Or z^* est point d'accumulation de $\{z_j\} \Rightarrow$
 \exists sous-suite $\{z_{i_j}\}_{j=0}^{\infty}$ tq

$$\forall j \in \mathbb{N}, z_{i_j} \in B(z^*, \delta_2), i_{j+1} \geq i_j + \eta(i_j)$$

Par construction, $\{c(z_{i_j})\}$ est décroissante, donc

$$\forall j \in \mathbb{N}, c(z_{i_{j+1}}) - c(z_{i_j}) \leq c(z_{i_j + \eta(i_j)}) - c(z_{i_j}), \text{ et donc}$$

$$(21) \quad c(z_{i_{j+2}}) - c(z_{i_j}) \leq -\frac{\eta}{2} \min \left\{ \frac{\delta_2}{m}, s(\mu) \right\}, \forall j \in \mathbb{N}$$

(20)

$$(21) \Rightarrow \{c(z_{i_j})\}_{j=0}^{\infty} \rightarrow -\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse (iii). Et donc $z^* \in \Delta$

De la même façon, on montre que $\hat{j} \in \Delta$. Comme

\hat{z} et z^* étaient deux points d'accumulation quelconques, tout point d'accumulation de $\{z_n\}$ est désirable, c.q.f.d.

Remarque

Dans les modèles que nous voyons, le principe de la démonstration est toujours le même : construire une sous-suite de $\{c(z_n)\}$ décroissant d'une façon monotone. Les hypothèses assurent alors la convergence, et sa convergence vers un minimum.

L'hypothèse (vii) assure que pour une suite $\{z_n\}$ convergente, la suite associée $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$, ce qui démontrera que le point limite est désirable.

Quant au cas d'une suite divergente : la démonstration consiste à construire une sous-suite de $\{c(z_n)\}$ diminuant d'une façon uniformément monotone.

Pour le premier modèle, l'hypothèse (ii) du théorème (2) permet à l'algorithme de construire une sous-suite de $\{c(z_n)\}$ décroissant d'une façon uniformément monotone.

(22) Modèle d'algorithme.

Le modèle ne diffère du modèle (9) que dans la façon de construire la suite $\{ \varepsilon_i \}$.

Toutes les k itérations, ε_i sera remis à sa valeur initiale, ε_0 .

Pour cela il suffit d'ajouter l'étape 10 suivant à l'étape 9 et de remplacer dans l'étape 9 aller en 3 par aller en 10. Soit k un nombre entier.

Etape 10 : Si $i/k = 0$ modulo k : aller en 1
sinon : aller en 2.

(23) Théorème de convergence associé :

Exactement le même que le théorème (10) associé au modèle 9, c'est à dire :

Hypothèses : (i) \rightarrow (viii) du théorème 10

Théorème : Soit $\{ z_i \}$ suite construite par (22)

\Rightarrow Si $\{ z_i \}$ est finie, son dernier élément $\in \Delta$

Si $\{ z_i \}$ est infinie, tout point d'accumulation $\in \Delta$

Démonstration.

On peut reprendre la démonstration du théorème

(10) sauf pour le cas où la suite $\{z_i\}$ est supposée convergente, car la suite $\{\varepsilon_i\}$ associée n'est pas nécessairement convergente (le reste de la démonstration ne tient pas compte du comportement de $\{\varepsilon_i\}$).
 Supposons donc que $\{z_i\}$ converge vers z ,
 Montrons que $z \in \Delta$.

Montrons qu'il existe une sous-suite de $\{\varepsilon_i\}$, soit $\{\varepsilon_{i_j}\}$, qui converge vers zéro d'une façon monotone. Pour cette sous-suite, on pourra appliquer le raisonnement de la partie (3b) du théorème (10), et on aura, ainsi, la thèse. Il suffit donc de montrer :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \exists j > i \quad \varepsilon_j < \varepsilon_i.$$

Démonstration par l'absurde :

$$\exists i \in \mathbb{N} \quad \forall j > i \quad \varepsilon_j \geq \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \forall j > i \quad c(\varepsilon_j, z_j) \leq -\alpha \varepsilon_j \leq -\alpha \varepsilon_i \quad (\text{par construction})$$

$$\Rightarrow \exists \delta(\varepsilon_i) > 0, \quad c(z_{j+1}) - c(z_j) \leq -\delta(\varepsilon_i) \varepsilon_i < 0, \quad \forall j > i$$

↓

$$\Rightarrow \{c(z_i)\} \rightarrow -\infty, \text{ ce qui contredit (i.i) : c.q.f.d.}$$

— Chapitre 2 —

Condition nécessaire d'optimalité.

Soit (P1) le problème suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \min f^0(z) \\ \text{sous contraintes } f^i(z) \leq 0, i \in \bar{m} \end{cases}$$

où $f^0, f^i, i \in \bar{m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continuellement différentiables
 $\bar{m} = \{1, \dots, m\}$

Définitions et notations :

$z \in \mathbb{R}^n$ est réalisable $\stackrel{\text{def}}{\iff} f^i(z) \leq 0, \forall i \in \bar{m}$

$i \in \bar{m}$ est actif en z $\stackrel{\text{def}}{\iff} f^i(z) = 0$

Si z est un point réalisable : $J_\varepsilon(z) = \{i \mid i \in \bar{m}, f^i(z) > -\varepsilon\} \cup \{0, \varepsilon > 0\}$

(En particulier $J_0(z)$ = ensemble des indices actifs en $z \cup \{0\}$)

$\nabla f(x)$: valeur du gradient de f , calculé en x

$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: origine de \mathbb{R}^n

$h \in \mathbb{R}^n$, h^i : i ème composante de h ($i = 1, \dots, n$)

La programmation non linéaire ne peut donner, dans le cas général, que des conditions nécessaires d'optimalité.

Le théorème de Karush, le théorème de John, peut s'énoncer, dans le cas du problème P_1 , comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \exists \hat{z}, f^i(\hat{z}) < 0, i \in \bar{m} \\ \hat{z} \text{ optimal pour } (P_1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(2.1) \quad \exists \mu^0 \geq 0, \mu^1 \geq 0, \dots, \mu^m \geq 0, \text{ non tous nuls, tq:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^m \mu^i \nabla f^i(\hat{z}) = 0 \\ \mu^i f^i(\hat{z}) = 0, \forall i \in \bar{m} \end{array} \right.$$

(La démonstration de ce théorème, et sa forme plus générale pour le cas où il y a des contraintes d'égalité, se trouve, par exemple, dans [C] 1.)

Nous utiliserons le corollaire suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{z} \text{ optimal pour } (P_1) \\ \exists \hat{z}, f^i(\hat{z}) < 0, i \in \bar{m} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(4) \quad \min_{h \in S} \max_{i \in \mathcal{I}_0(\hat{z})} \langle \nabla f^i(\hat{z}), h \rangle = 0,$$

où S : compact de \mathbb{R}^n contenant l'origine en son intérieur.

Démonstration:

Par l'absurde:

Supposons: $\exists h \in S$, $\langle \nabla f^i(\hat{z}), h \rangle \leq \delta < 0, \forall i \in \mathcal{I}_0(\hat{z})$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^m \mu^i \langle \nabla f^i(\hat{z}), h \rangle < 0, \forall \mu^i > 0, i \in \mathcal{I}_0(\hat{z}),$$

(puisque $i \notin \mathcal{I}_0(\hat{z}) \Rightarrow \mu^i = 0$
par (3))

ce qui contredit (2).

(En fait, si on n'a pas (4)).

$$\Leftrightarrow \exists h \in S \quad \langle \nabla f^0(\hat{z}), h \rangle < 0$$

$$\langle \nabla f^i(\hat{z}), h \rangle < 0, i \in \bar{m}, f^i(\hat{z}) = 0,$$

et, par continuité des fonctions, $\exists \varepsilon > 0$ tq

$$f^0(\hat{z} + \varepsilon h) < f^0(\hat{z})$$

$$\text{et } f^i(\hat{z} + \varepsilon h) < 0, \forall i \in \bar{m},$$

et donc \hat{z} n'est pas optimal.)

Ce corollaire peut être énoncé sous une autre forme:

\hat{z} optimal \Rightarrow

$$(5) \min_{h \in S} \max \{ \langle \nabla f^0(\hat{z}), h \rangle, \langle \nabla f^i(\hat{z}), h \rangle + f^i(\hat{z}), i \in \bar{m} \} = 0$$

où S compact contenant l'origine en son intérieur.

Démonstration:

(4) => (5)

Soit $y \in S$ tq $\min_{x \in S} f(x) = f(y) < \gamma = \max_{x \in S} f(x)$

Pour les indices actifs:

trivialement, on a: $\max_{x \in S} f(x) > \gamma$

$= \max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle, f(x) + \langle \lambda, y \rangle \} = \max_{x \in S} f(x)$

Pour les indices non actifs:

En prenant y tq $\|y\| = 1$ soit suffisamment petit on a: $\langle \nabla f(x), y \rangle + \langle \lambda, y \rangle < 0$

et donc:

(6) $\max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle, f(x) + \langle \lambda, y \rangle \} = f(x)$

Par définition de y :

$\langle \nabla f(x), y \rangle > \max_{x \in S} f(x) \geq \max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle \} = \langle \nabla f(x), y \rangle$

(7)

$\forall x \in S$

$\max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle \} > 0$

Or $\max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle \} = \max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle + \langle \lambda, y \rangle \} > \max_{x \in S} f(x)$

$\leq \max_{x \in S} \{ \langle \nabla f(x), y \rangle + \langle \lambda, y \rangle \} = \max_{x \in S} f(x)$

Avec (7), on a: $\forall h \in S$

$$(8) \quad \max \{ \langle \nabla f^0(\hat{z}), h \rangle, f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), h \rangle, i \in \bar{m} \} \geq 0$$

$$(8) \quad \left. \begin{array}{l} (8) \\ (6) \end{array} \right\} \Rightarrow \min_{h \in S} \max \{ \langle \nabla f^0(\hat{z}), h \rangle, f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), h \rangle, i \in \bar{m} \} = 0,$$

c. q. f. d.

$$(5) \Rightarrow (4)$$

Soit \hat{h} solution de (5):

$$\max \{ \langle \nabla f^0(\hat{z}), \hat{h} \rangle, f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), \hat{h} \rangle, i \in \bar{m} \} = 0$$

et pour $\|\hat{h}\|$ suffisamment petit

$$\forall i, i \notin J_0(\hat{z}) : f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), \hat{h} \rangle < 0,$$

\Rightarrow

$$(9) \quad \max \{ \langle \nabla f'(\hat{z}), \hat{h} \rangle, i \in J_0(\hat{z}) \} = 0.$$

Il reste à voir: $\min_{h \in S} \max_{i \in J_0(\hat{z})} \{ \langle \nabla f'(\hat{z}), h \rangle \} = 0$

Or puisque \hat{h} est solution de (5), on a:

$$(10) \quad \forall h \in S \quad \max \{ \langle \nabla f^0(\hat{z}), h \rangle, f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), h \rangle \} \geq 0$$

En venant h tq $\|h\|$ suffisamment petite:

$$\exists S' \subset S \quad \forall i \notin J_0(\hat{z}), \forall h \in S' : f'(\hat{z}) + \langle \nabla f'(\hat{z}), h \rangle < 0,$$

D'où:

$$\left. \begin{aligned} & -h_0 + f(\beta_1) + \langle \nu, \beta_1 \rangle \leq 0, \forall \beta_1 \in M \\ & -h_0 + \langle \nu, \beta_1 \rangle \leq 0, \forall \beta_1 \in M \\ & |h_0| \leq \nu, \nu = 2-n \end{aligned} \right\}$$

min h_0
 PL A β_1 , suivant
 (h_0, β_1, ν) , solution du programme linéaire,

(\Rightarrow)

(11). Théorème

$$\min_{h_0} \{ \langle \nu, \beta_1 \rangle + \langle \nu, \beta_1 \rangle \mid \beta_1 \in M, \nu \in \mathbb{R}^n \}$$

On a donc, h_0 est optimum pour (11): $h_0^* = 0$
 On a aussi:

définissons $h_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h_0(\beta_1) = \min_{\nu \in S^*} \{ \langle \nu, \beta_1 \rangle + \langle \nu, \beta_1 \rangle \mid \beta_1 \in M, \nu \in S^* \}$$

Pour mettre (5) sous forme d'un programme linéaire, choisissons comme compact:

Avec (9) cette dernière inégalité donne:

$$\min_{\nu \in S^*} \{ \langle \nu, \beta_1 \rangle + \langle \nu, \beta_1 \rangle \mid \beta_1 \in M, \nu \in S^* \}$$

$$\Rightarrow \forall h \in S \quad \max_{\nu \in S^*} \{ \langle \nu, \beta_1 \rangle + \langle \nu, \beta_1 \rangle \} \geq 0$$

$$\forall h \in S \quad \max_{\nu \in S^*} \{ \langle \nu, \beta_1 \rangle + \langle \nu, \beta_1 \rangle \} \geq 0, \forall \beta_1 \in M$$

Démonstration :

(h^0, h) solution de $PL1(z)$,

$$\Leftrightarrow h^0 \geq \max_{\text{et } h \in S^*} \{ \langle \nabla f^i(z), h \rangle + f^i(z), i \in \bar{m}, \langle \nabla f^0(z), h \rangle \}$$

$$\Leftrightarrow h^0 = \min_{h \in S^*} \max \{ \langle \nabla f^i(z), h \rangle + f^i(z), i \in \bar{m}, \langle \nabla f^0(z), h \rangle \}$$

$$= h^0(z), \text{ (par définition de } h^0(\cdot) \text{).}$$

En fait la fonction économique de $PL1(z)$ est la linéarisation de f^0 (puis que minimiser, pour z fixé, $f^0(z) + \langle \nabla f^0(z), h \rangle \Leftrightarrow$ minimiser $\langle \nabla f^0(z), h \rangle$), et les contraintes de $PL1(z)$ sont les contraintes linéarisées, en z , du problème non linéaire (P1).

Mais ce programme linéaire tient compte de toutes les contraintes de (P1), alors qu'à l'optimum, seules les contraintes actives interviennent dans la condition nécessaire d'optimalité (4).

Zoutendijk a inventé un algorithme qui diminue le nombre de contraintes du programme linéaire en ne faisant pas intervenir les contraintes f^i telles que $f^i(z)$ soient "suffisamment < 0 ". Et l'on peut montrer, par un raisonnement analogue à celui du théorème (11) que :

Si $(h_0^z, \beta, \epsilon) \geq 0$ est solution du P1o = programme linéaire, P2 (ϵ, β), suivant:

$$P2(\epsilon, \beta) \left\{ \begin{array}{l} \min h_0^z \\ -h_0^z + \langle \Delta f, (z, h) \rangle \leq \epsilon, \forall z \in \Sigma^H(\beta) \\ \|h\| \leq \alpha, \quad r = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Si β est optimum pour (P2) Alors

$$h_0^z(\beta) = 0$$

P2 (ϵ, β) a déjà moins de contraintes que P2 (β)

On peut simplifier les contraintes de P2 (ϵ, β), en tenant compte des propriétés des fonctions affines: soit P2* (ϵ, β), le programme linéaire suivant

$$P2^*(\epsilon, \beta) \left\{ \begin{array}{l} \min h_0^z \\ -h_0^z + \langle \Delta f, (z, h) \rangle \leq \epsilon, \forall z \in \Sigma^H(\beta) \\ \langle \Delta f, (z, h) \rangle \leq \alpha, \forall z \in \Sigma^H(\beta) \\ \|h\| \leq \alpha, \quad r = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

$$\text{ou } \Sigma^H(\beta) = \{ (z, h) \mid \langle \Delta f, (z, h) \rangle \leq \epsilon, \text{ non affines} \}$$

$$\Sigma^H(\beta) - \Sigma^H(\beta) = \Sigma^H(\beta)$$

Soit $h_0^z(\beta) : C \rightarrow \mathbb{R}, h_0^z(\beta)$

$$\min_{h \in S^*} h_0^z(\beta) = \max_{z \in \Sigma^H(\beta)} \langle \Delta f, (z, h) \rangle, \forall z \in \Sigma^H(\beta)$$

La définition de $\hat{h}_\epsilon^0(z)$ est équivalente à :

$$\exists \tilde{h}_\epsilon(z) \in S^* \quad \tilde{h}_\epsilon^0(z) = \max \{ \langle \nabla f^i(z), h \rangle, i \in J_\epsilon^N(z) \mid \langle \nabla f^j(z), h \rangle \leq 0, j \in J_\epsilon^A(z) \}$$

$\Leftrightarrow (\hat{h}_\epsilon^0(z), \tilde{h}_\epsilon(z))$ solution de $PL2^*(\epsilon, z)$

les contraintes de $PL2^*(\epsilon, z)$ sont moins sévères que celles de $PL2(\epsilon, z)$: pour les contraintes affines, ϵ -actives, f^i , il n'y a plus couplage entre f^i et f^0 .

Voyons maintenant quelques propriétés de $\hat{h}_\epsilon^0(\cdot)$ qui vont servir dans la suite :

Propriétés

$$(12) \quad \hat{h}_\epsilon^0(z) \leq 0$$

$$\hat{h}_\epsilon^0(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{h \in S^*} \max \{ \langle \nabla f^i(z), h \rangle \mid \langle \nabla f^j(z), h \rangle \leq 0, j \in J_\epsilon^A(z) \}$$

Or $\theta \in S^*$ (où $\theta =$ vecteur nul de \mathbb{R}^n)

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \nabla f^0(z), \theta \rangle \leq 0 \\ \max_{i \in J_\epsilon^N(z)} \{ \langle \nabla f^i(z), \theta \rangle \mid \langle \nabla f^j(z), \theta \rangle \leq 0, j \in J_\epsilon^A(z) \} = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\hat{h}_\epsilon^0(z) \leq 0$

$$(13) \quad \varepsilon > \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} J_{\varepsilon}^N(z) > J_{\varepsilon'}^N(z) \\ J_{\varepsilon}^A(z) > J_{\varepsilon'}^A(z) \end{cases}$$

(Par définition de $J_{\varepsilon}^N(z)$ et $J_{\varepsilon}^A(z)$.)

$$(14) \quad \varepsilon > \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \tilde{h}_{\varepsilon}^0(z) \geq \tilde{h}_{\varepsilon'}^0(z)$$

(conséquence directe de (13))

$$(15) \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad \forall z \in C, \exists \eta > 0 \quad \text{tq} \quad \left. \begin{cases} J_{\varepsilon'}^N(z) = J_{\varepsilon}^N(z) \\ J_{\varepsilon'}^A(z) = J_{\varepsilon}^A(z) \end{cases} \right\} \forall \varepsilon' \in [\varepsilon, \varepsilon + \eta]$$

$$(12) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} J_{\varepsilon'}^N(z) > J_{\varepsilon}^N(z) \\ J_{\varepsilon'}^A(z) > J_{\varepsilon}^A(z) \end{cases}$$

$$\text{Pourtant} \quad J_{\varepsilon'}^A(z) \leq J_{\varepsilon}^A(z)$$

(le même raisonnement démontre $J_{\varepsilon'}^N(z) \leq J_{\varepsilon}^N(z)$)

Soit i tq f^i est affine, et $i \notin J_{\varepsilon}^A(z)$.
montrons: $\exists \varepsilon', i \notin J_{\varepsilon'}^A(z), \forall \varepsilon' \in [\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^i]$

$$i \notin J_{\varepsilon}^A(z) \Leftrightarrow f^i(z) + \varepsilon < 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda^i > 0 \quad f^i(z) + \varepsilon = -\lambda^i$$

Avec $\varepsilon^i = \frac{\lambda^i}{2}$, on a

$$\forall \varepsilon' \in [\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^i] \quad f^i(z) + \varepsilon' \leq f^i(z) + \varepsilon + \frac{\lambda^i}{2}$$

$$\leq -\frac{\lambda^i}{2} < 0, \text{ c.q.f.d. })$$

$$(16) \quad \forall \varepsilon \geq 0, \forall z \in C, \exists \rho > 0 \text{ tq}$$

$$\forall z' \in B(z, \rho) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\varepsilon}^N(z') \subset J_{\varepsilon}^N(z) \\ J_{\varepsilon}^A(z') \subset J_{\varepsilon}^A(z) \end{array} \right.$$

(Montrons, par exemple $J_{\varepsilon}^N(z) \subset J_{\varepsilon}^A(z), \forall z' \in B(z, \rho)$

Montrons: $\forall i, \exists \rho^i > 0, i \notin J_{\varepsilon}^A(z) \Rightarrow i \notin J_{\varepsilon}^A(z'),$
 $\forall z' \in B(z, \rho^i)$

$$i \notin J_{\varepsilon}^A(z) \Leftrightarrow \exists \delta < \varepsilon, f^i(z) + \varepsilon \leq \delta < 0$$

Par continuité de $f^i: \exists \rho^i \forall z' \in B(z, \rho^i), \|f^i(z) - f^i(z')\| \leq \frac{\delta}{2}$

$$\Rightarrow f^i(z') \leq f^i(z) - \frac{\delta}{2}, \quad \forall z' \in B(z, \rho^i)$$

$$\Rightarrow f^i(z') + \varepsilon \leq \frac{\delta}{2} < 0, \Leftrightarrow i \notin J_{\varepsilon}^A(z')$$

Et, en venant $\rho = \min_{i \in J_{\varepsilon}^A(z)} \rho^i$, on a:

$$\forall z' \in B(z, \rho) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\varepsilon}^N(z') \subset J_{\varepsilon}^N(z) \\ J_{\varepsilon}^A(z') \subset J_{\varepsilon}^A(z) \end{array} \right. \text{ (c. q. f. d.)}$$

Théorème :

$$\text{Si } h_{\varepsilon}^0(z) = \min_{h \in S^*} \max_{i \in J_{\varepsilon}(z)} \langle \nabla f^i(z), h \rangle$$

$$\Rightarrow \tilde{h}_{\varepsilon}^0(z) \leq h_{\varepsilon}^0(z)$$

Démonstration :

Supposons $h_\varepsilon^0(z) < \tilde{h}_\varepsilon^0(z) \leq 0$ et montrons que cela mène à une contradiction.

Soit $h_\varepsilon(z) \in S^*$ tq. $h_\varepsilon^0(z) = \max_{i \in J_\varepsilon^N(z)} \{ \langle \nabla f^i(z), h_\varepsilon(z) \rangle \}$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \nabla f^i(z), h_\varepsilon(z) \rangle = h_\varepsilon^0(z) \quad , i \in J_\varepsilon^N(z) \\ \langle \nabla f^i(z), h_\varepsilon(z) \rangle \leq h_\varepsilon^0(z) \leq 0 \quad , i \in J_\varepsilon^A(z) \end{array} \right.$$

Et donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \nabla f^i(z), h_\varepsilon(z) \rangle \leq h_\varepsilon^0(z) \quad , i \in J_\varepsilon^N(z) \\ \langle \nabla f^i(z), h_\varepsilon(z) \rangle \leq 0 \quad , i \in J_\varepsilon^A(z) \\ (h_\varepsilon(z) \in S^*) \end{array} \right.$$

Et, par définition de $\tilde{h}_\varepsilon^0(z)$: $\tilde{h}_\varepsilon^0(z) \in h_\varepsilon^0(z)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ, c.q.f.d..

Théorème : \hat{z} optimal pour (P_1) $\Rightarrow \tilde{h}_0^0(\hat{z}) = 0$

Démonstration : (par l'absurde)

Supposons $\tilde{h}_0^0(\hat{z}) = \max_{i \in J_0^N(\hat{z})} \langle \nabla f^i(\hat{z}), \tilde{h}_0^0(\hat{z}) \rangle = \eta < 0$

où $\tilde{h}_0^0(\hat{z}) \in S^*$

et est tq $\langle \nabla f^j(\hat{z}), \tilde{h}_0^0(\hat{z}) \rangle \leq 0, j \in J_0^A(\hat{z})$

Par continuité différentiable des f^i , $i \in J_0^N(\hat{z})$, on peut utiliser le théorème A2 (où $\delta = -\eta/2$), et on a :

$$(7) \exists \bar{\lambda} > 0 \quad \max_{i \in J_0^N(\hat{z})} \langle \nabla f^i(\hat{z} + \lambda \tilde{h}_0^0(\hat{z})), \tilde{h}_0^0(\hat{z}) \rangle \leq \frac{\eta}{2}, \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$

Par continuité de f , $\exists \delta_0(\epsilon)$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}(f)$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta_0$.

Posons $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, et, appliquons le

théorème des accroissements finis:

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \exists \xi_0 \text{ tq } f(x) - f(x_0) = x - x_0 f'(\xi_0) = x - x_0 f'(\xi_0) > \frac{\epsilon}{2} x - x_0 \leq \delta \frac{\epsilon}{2}$$

De même, on a $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$f(x) - f(x_0) = x - x_0 f'(\xi_1) - f(x_0) = x - x_0 f'(\xi_1) < -\frac{\epsilon}{2} \text{ si } x - x_0 \leq \delta \text{ et } A' \in \mathcal{I}_0^N(x_0) \setminus \{x_0\}$$

$$\text{Ainsi: } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) - f(x_0) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } f(x) - f(x_0) > \frac{\epsilon}{2} \text{ si } x - x_0 \leq \delta \text{ et } A' \in \mathcal{I}_0^N(x_0)$$

δ n'est donc pas optimum: ce qui contredit l'hypothèse

Remarque: en appliquant le raisonnement de cette démonstration, pour un point x_0 non optimal, en supposant que $(h_0, h_0(x_0))$ soit une solution de $PL^*(\epsilon, \delta)$, on a que $h_0(x_0)$ est une direction de descente pour f_0 , à partir de x_0 .

Chapitre 3

La première partie va décrire des modèles conceptuels d'algorithmes (les minimisations unidimensionnelles sont supposées exactes).

La deuxième partie démontrera la convergence de ces modèles dans le cas où la minimisation exacte est remplacée par une procédure finie (celle de Armijo).

La démonstration de la convergence des méthodes de Polak et Zoutendijk, avec minimisation exacte, et sans traiter différemment les contraintes affines se trouve dans [P].

Nous allons adapter ces démonstrations au cas où les contraintes du programme linéaire correspondent aux contraintes affines sont simplifiées, et ensuite, où la minimisation exacte est remplacée par la procédure d'Armijo.

Les algorithmes construisent un point qui vérifie les conditions de John, en choisissant, à partir d'un point réalisable, z_i , un point $z_{i+1} \in A(z_i)$

où $A(z, i) = \{z \mid z_i + \mu h_i, \mu \geq 0\}$ et tel que
 $f^0(z_{i+1}) \leq f^0(z_i)$

où h_i est une direction de \mathbb{R}^n déterminée d'après z_i . (Le choix de cette direction est très important, pour assurer la convergence de l'algorithme vers un point désirable).

Pour être assuré de l'existence, d'au moins, un point qui vérifie les conditions de Fizz / plus et ensuite de la convergence des méthodes des directions admissibles vers un de ces points, nous devons imposer les deux hypothèses générales suivantes :

(0) $\exists z^0 \in C$ tq $C'(z^0) = \{z \mid f^0(z) - f^0(z^0) \leq 0, f^i(z) \leq 0, i \in \bar{m}\}$

est un compact et a un intérieur non vide.

(0') a) C a un intérieur et $\bar{C} = C \neq \emptyset$

b) $\forall z \in \overset{\circ}{C}, f^i(z) < 0, \forall i \in \bar{m}$

les algorithmes de Polak et Zoutendijk sont très voisins : tous deux construisent une suite de solutions de programmes linéaires $PL2^*(\varepsilon_j, z_j)$ (définis au chapitre 2); ils diffèrent dans la façon de construire $\{\varepsilon_j\}$.

(2) Modèle de Polak.

Étape 0 : construire $z_0 \in C$ (voir (3) ci-après)
choisir $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon')$, $\beta \in (0, 1)$, $\alpha \in]0, 1[$
 $i = 0$

Étape 1 : $z = z_i$

Étape 2 : $\varepsilon_0 = \varepsilon'$, $j = 0$

Étape 3 : construire $h_{\varepsilon_j}(z) \equiv (\tilde{h}_{\varepsilon_j}^0(z), \tilde{h}_{\varepsilon_j}(z))$, solution de $PL2^*(\varepsilon_j, z)$

Étape 4 : Si $\tilde{h}_{\varepsilon_j}^0(z) \leq -\alpha \varepsilon_j$, poser $\varepsilon(z) = \varepsilon_j$
 $h(z) = \tilde{h}_{\varepsilon_j}(z)$ et aller en 7.

Sinon aller en 5

Étape 5 : Si $\varepsilon_j \leq \varepsilon''$, construire $\tilde{h}_0^0(z)$, solution de $PL2^*(0, z)$ et aller en 6.

Sinon poser $\varepsilon_{j+1} = \beta \varepsilon_j$, $j = j+1$, aller en 3

Étape 6 : Si $\tilde{h}_0^0(z) = 0$, poser $z_{i+1} = z_i$ et stop;

Sinon : $\varepsilon_{j+1} = \beta \varepsilon_j$, $j = j+1$, aller en 3

Étape 7 : construire $\lambda(z) > 0$, tel que :

$$\lambda(z) = \max \{ \lambda \geq 0 \mid f^i(z + \lambda h(z)) \leq 0, \forall i \in \bar{m} \}$$

Étape 8 : construire $\mu(z) \in [0, \lambda(z)]$ tel que :

$$f^0(z + \mu(z)h(z)) = \min \{ f^0(z + \mu h(z)) \mid \mu \in [0, \lambda(z)] \}$$

Étape 9 : $z_{i+1} = z + \mu(z)h(z)$

$$i = i + 1$$

aller en 1.

(3) Construction d'un point z_0 réalisable.

Rechercher la solution, - par exemple en appliquant les étapes 1 à 9 du modèle de Polak -, du problème PN2 suivant (dans \mathbb{R}^{n+1})

PN2

$$\begin{cases} \min z_{n+1} \\ f^i(z) = z_{n+1} \leq 0, \quad i \in \bar{m} \end{cases}$$

Ce problème est du type (P1) (voir (1), chapitre 2),

puisqu'il peut s'écrire :

$$\min g^0(z')$$

$$\begin{cases} g^i(z') \leq 0, \quad i \in \bar{m} \end{cases}$$

où $g^i: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, continuellement différentiable $\forall i \in \bar{m} \cup \{0\}$

$$g^0(z'_1, \dots, z'_{n+1}) = z'_{n+1}$$

$$g^i(z'_1, \dots, z'_{n+1}) = f^i(z'_1, \dots, z'_n) - z'_{n+1}, \quad i \in \bar{m}$$

En fait : $g^0(z') = \max \{ f^i(z'_1, \dots, z'_n) \mid i \in \bar{m} \}$, où l'opt. de PN2

les étapes 1 à 9 vont construire une suite de points

$$\{z^i\} \quad \text{tg} \quad z^i \in \mathbb{R}^n$$

et $\{g^0(z^i)\}$ est une suite décroissante.

On a un point admissible (z'_1, \dots, z'_n) dès que $z'_{n+1} \leq 0$

Avant, il faut voir que (PN2) vérifie les hypothèses (0) et (0'):

1) ? $\exists z^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $g^i(z^0) \leq 0, i \in \bar{m}$

et $C'(z^0) = \{(z'_1, \dots, z'_{n+1}) \mid z'_{n+1} - z^0_{n+1} \leq 0, f^i(z'_1, \dots, z'_n) \leq z'_{n+1}, i \in \bar{m}\}$
est un compact et a un intérieur ?

Par hypothèse (P1) vérifie cette propriété, \Leftrightarrow

$\exists z^0 \in C \mid C'(z^0) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f^i(z) \leq 0, i \in \bar{m}, f^0(z) \leq f^0(z^0)\}$
est un compact et a un intérieur

En venant $z^0 = (z^0_1, \dots, z^0_n, \max_{i \in \bar{m}} f^i(z^0))$, z^0 vérifie (0).

$C'(z^0)$ compact car fermé d'un compact).

2) ? $C' = \{(z'_1, \dots, z'_{n+1}) \mid f^i(z') \leq z'_{n+1}, i \in \bar{m}\}$ (où $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$)
a un intérieur ?

C' a un intérieur $\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in C', \exists \varepsilon > 0 \quad B(\bar{z}, \varepsilon) \subset C'$

$C^0 \neq \emptyset \Rightarrow$ soit $z \in C^0, \Leftrightarrow \exists \varepsilon \quad B(z, \varepsilon) \subset \dot{C}$
soit $z_{n+1} = \max_{i \in \bar{m}} \{f^i(z)\} \Rightarrow (z, z_{n+1}) \in C'$

$M(z) = \max_{i \in \bar{m}} \{f^i(z)\}$ est continue car f^i continue, $\forall i \in \bar{m}$ (voir A4)

Par continuité de $M(\cdot)$ sur $B(z, \varepsilon)$, on a :

$$\exists \delta \quad \forall z' \in B(z, \varepsilon) \quad |M(z') - M(z)| \leq \delta$$

Donc : $B(z, \varepsilon) \times]z^{n+1} - \delta, z^{n+1} + \delta[\subset C'$

Convergence du modèle de Polak.

Lemme : L'algorithme (2) est bien défini.

c'est-à-dire que, étant donné un point z^k d'une itération de (2), (2) construit un point z^{k+1} .

Démonstration

Soit $z^i \in C$

1^{er} cas $\hat{h}_0^0(z^i) = 0$

par (2.12) $\hat{h}_\varepsilon^0(z) \leq 0, \forall \varepsilon > 0, \forall z \in C$

(2.13) $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow \hat{h}_{\varepsilon_1}^0(z) \leq \hat{h}_{\varepsilon_2}^0(z), \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \} \Rightarrow$

$\forall \varepsilon_j > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) \geq \hat{h}_0^0(z^i) = 0 \\ \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon_j > 0 \quad \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) = 0$

Et donc, $\forall \varepsilon_j > 0 \quad \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) > -\alpha \varepsilon_j$.

Au pas 4, l'algorithme se branche donc sur 5, qui ré-
=duit ε_j ainsi, à chaque passage en 4, jusqu'au
moment où $\varepsilon_j \leq \varepsilon''$. Alors, branchement en 6, mis au ré-

2^e cas : $\hat{h}_0^0(z^i) < 0$

par (2.15) : $\exists \beta > 0, \forall \varepsilon_j \in [0, \beta] \quad J_{\varepsilon_j}(z^i) = J_0(z^i)$

Et donc, $\exists \beta > 0, \forall \varepsilon_j \in [0, \beta] \quad \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) = \hat{h}_0^0(z^i)$

Soit j' le plus petit entier ≥ 0 , tq $\beta \delta^j \varepsilon' \leq \min\{\beta, -\frac{\hat{h}_0^0(z^i)}{\alpha}\}$

$\Rightarrow \hat{h}_{\varepsilon_j}^0(z^i) = \hat{h}_0^0(z^i) \leq -\alpha \varepsilon_j$

(def de $\varepsilon_j' = \beta \delta^j \varepsilon'$)

Au pas 4, l'algorithme construira donc un nouveau point z^{i+1} .

Remarquons que l'algorithme de Polak est "invariant dans le temps".

A chaque itération, i , la valeur ε_i , est construite de la même façon, à partir de la même valeur initiale ε' .

A chaque itération, i , la réduction de ε , dépend uniquement du point z^i , en nous (ce qui ne sera pas le cas pour le modèle de Zoutendijk).

Montrons que (2) est du modèle (1.1)

Définition de $A : T \rightarrow \mathbb{R}^T$, où $T = C = \{z \mid f^i(z) \leq 0, i \in \bar{m}\}$

$$(4a) \quad \text{Si } \tilde{h}_0^0(z) = 0, \Rightarrow A(z) \stackrel{\text{dét}}{=} \{z\}$$

$$\text{Si } \tilde{h}_0^0(z) < 0 :$$

$$(2) \text{ définit alors } j' \in \{1, \dots, q\} \left. \begin{array}{l} \tilde{h}_{\beta^{j'} \varepsilon'}^0(z) \leq -\beta^{j'} \varepsilon' \\ \tilde{h}_{\beta^{j'} \varepsilon'}^0(z) > -\beta^{j'} \varepsilon', \forall j < j' \end{array} \right\}$$

$$\text{Posons } \varepsilon(z) = \beta^{j'} \varepsilon'$$

($\varepsilon(z)$ est complètement déterminé par z)

$$\text{Posons } S^*(z) = \{h \in S^* \mid \tilde{h}_{\varepsilon(z)}^0(z) = \max_{i \in J_{\varepsilon}^A(z)} \langle \nabla f^i(z), h \rangle,$$

$$\text{avec } \langle \nabla f^i(z), h \rangle \leq 0, i \in J_{\varepsilon}^A(z)\}$$

Définissons maintenant $A(z)$, si $\tilde{h}_0^0(z) < 0$:

$$(4b) \quad A(z) \stackrel{\text{dét}}{=} \{z' = z + \mu' h' \in C \mid h' \in S^*(z), \mu' \geq 0,$$

$$\text{et } f^0(z') = \min_{\mu \geq 0} \{f^0(z + \mu h') \mid z + \mu h' \in C\}$$

(4a) et (4b) définissent $A(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Définition de Δ : $\Delta = \{z \mid \tilde{h}_0^0(z) = 0\}$

Définition de c : $c = f^0$ (fonction à minimiser)

5. Théorème de convergence associé au modèle de Polak

Si $A(z)$ construit par (4a) et (4b) est bien défini, $\forall z \in \mathbb{C}$

Soit $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite construite par (2), pour le problème (P.1) (2.1), avec les hypothèses (0) et (0'),

\Rightarrow

soit $\{z^k\}$ est finie et son dernier élément, soit $z^k \in \Delta$

soit $\{z^k\}$ est infinie, et tout point d'accumulation, z , de cette suite, $\in \Delta$.

Démonstration

1^{er} cas : $\{z^k\}$ est finie.

La thèse est triviale, puisque l'algorithme ne s'arrête qu'en un point z^k , tel que $\tilde{h}_0^0(z^k) = 0$, c' est à-dire, $z^k \in \Delta$.

2^e cas : $\{z^k\}$ est infinie

Montrons que l'algorithme de Polak vérifie les hypothèses du théorème (1.2)

(i) vérifiée puisque f^0 continuellement différentiable.

(ii) soit $z \in C$ tq $\hat{h}^0(z) < 0$

1^{er} étape. Montrons $\exists \varepsilon' > 0$ tq $\forall z' \in B(z, \varepsilon')$, $\varepsilon(z') \geq \varepsilon(z) \beta$

Par la propriété (2.16), on a :

$$(6) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \left. \begin{array}{l} J_{\varepsilon(z)}^N(z') \subset J_{\varepsilon(z)}^N(z) \\ J_{\varepsilon(z)}^A(z') \subset J_{\varepsilon(z)}^A(z) \end{array} \right\} \forall z' \in B(z, \varepsilon)$$

Définissons $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$\theta(z') = \min_{h \in S^*} \max \{ \langle \nabla f^i(z'), h \rangle, i \in J_{\varepsilon}^N(z') \};$$

avec $\langle \nabla f^j(z'), h \rangle \leq 0, j \in J_{\varepsilon}^A(z')$

Par (A3 = appendice 3) : $\theta(\cdot)$ est une fonction continue, et donc :

$$(8) \quad \exists \varepsilon' \in]0, \varepsilon] \text{ tq } |\theta(z') - \hat{h}_{\varepsilon(z)}^0(z)| \leq \varepsilon(z)(1-A), \forall z' \in B(z, \varepsilon')$$

Par def. de θ : $\theta(z) = \hat{h}_{\varepsilon(z)}^0(z)$

Par (6) : (9) : $\theta(z') \geq \hat{h}_{\varepsilon(z)}^0(z')$

$$(8) \Rightarrow \theta(z') \leq \varepsilon(z)(1-A) + \hat{h}_{\varepsilon(z)}^0(z)$$

Et donc, par définition de $\varepsilon(z)$:

$$(10) \quad \theta(z') \leq -\beta \varepsilon(z)$$

(9)

(10)

$$\Rightarrow \hat{h}_{\varepsilon(z) \beta}^0(z') \leq -\beta \varepsilon(z), \forall z' \in B(z, \varepsilon')$$

Et donc : $\forall z' \in B(z, \varepsilon')$, $\varepsilon(z') \geq \varepsilon(z) \beta$ (par def. de $\varepsilon(z')$).

2^e étape: L' hypothèse (ii) du théorème (1.2) est vérifiée
c'est-à-dire:

$$\exists \varepsilon'' > 0, \forall z' \in B(z, \varepsilon'') \forall z'' \in A(z'), \exists \delta(z) > 0 \quad |f^0(z'') - f^0(z')| \leq \delta(z) < \varepsilon''$$

$$f^i \in C_{S^*}^0, \quad \forall i \in \bar{m}$$

$$S^* = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h^i\| < 1, i=1, \dots, n\} \text{ est un compact} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow f^i \text{ unif.}^t, \text{ continue} \\ \text{sur } S^*, \forall i \in \bar{m} \end{array} \right\}$$

Et donc, par (A1) :

$$(H1) \quad \exists \varepsilon' \in [0, \varepsilon''] , \exists t' > 0, |f^i(z'+th) - f^i(z')| \leq \varepsilon(z) \beta, \\ \forall z' \in B(z, \varepsilon'') , \forall h \in S^* , \forall t \in [0, t']$$

Et, par (A2) :

$$\exists \tilde{\varepsilon} \in [0, \varepsilon''] , \exists t'' \in [0, t'] , \forall i \in \bar{m}, \forall z' \in B(z, \tilde{\varepsilon}), \forall h \in S^* , \forall t \in [0, t''] \\ | \langle \nabla f^i(z'+th), h \rangle - \langle \nabla f^i(z'), h \rangle | \leq \frac{\varepsilon(z) \beta}{2}$$

Et donc, avec le résultat de la première étape :

$$(12a) \quad \left. \begin{array}{l} \forall i \in J_{\varepsilon(z')}^N(z') \quad \langle \nabla f^i(z'+th), h \rangle \leq -\frac{\varepsilon(z) \beta}{2} \\ \forall i \in J_{\varepsilon(z')}^A(z') \quad \langle \nabla f^i(z'), h \rangle \leq 0 \end{array} \right\} \\ \forall z' \in B(z, \tilde{\varepsilon}), \forall h(z') \in S^*(z'), \forall t \in [0, t'']$$

Avec (12a) et le théorème des accroissements finis, on a:

$$\forall h \in S^*(z'), \forall z' \in B(z, \tilde{\varepsilon}) :$$

$$(12b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in J_{\varepsilon(z')}^N(z') \quad f^i(z'+th(z')) - f^i(z') \leq -\frac{\varepsilon(z) \beta t}{2}, \quad \forall t \in [0, t''] \\ \forall i \in J_{\varepsilon(z')}^A(z') \quad f^i(z'+th(z')) - f^i(z') = t \langle \nabla f^i(z'), h(z') \rangle \leq 0 \end{array} \right.$$

(14) Algorithme de Zoumandik

La seule différence avec le modèle de Potok, est que la valeur de ϵ n'est pas constante à partir de ϵ'_{r-1} : de la même valeur initiale, ϵ' , nous, à partir de l'étape q devient !

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pos} \\ 3r+2 = 3 + 2^{r-1}h(r) \\ r = r+1 \end{array} \right. \text{ aller en } 2$$

ET donc les conditions (1.1) du théorème (1.2) est vérifiée

Par (1.1) et l'étape 2 de (2) :

$$f_0(z' + 2^r h(r)) - f_0(z') \leq \epsilon(z') \leq \frac{\epsilon(z')}{2}$$

$$A_3 \in B(z', \epsilon) \cdot A(z' + 2^r h(r)) \in A(z')$$

ET donc $\chi(z')$ constant par le fait de (2) est tel que :

(1) Pour $\epsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$f^r(z' + 2^r h(r)) \leq -\epsilon(z') \quad (1.1)$$

AR $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ $A_3 \in B(z', \epsilon) \cdot A(z' + 2^r h(r)) \in A(z')$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.2) \\ f^r(z' + 2^r h(r)) \leq -\epsilon(z') \\ r \in \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ so}$$

On a donc $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists A_3 \in B(z', \epsilon) \forall h \in S^*(z')$:

(15) Théorème de convergence associé au modèle de Zouten dijk

$$C'(z_0) = \{z \in C \mid f^0(z) \leq f^0(z_0)\} \text{ compact}$$

\Rightarrow

si $\{z_i\}$ est une suite construite par (14) :

Soit $\{z_i\}$ est finie et son dernier élément, soit $z_k \in \Delta$

Soit $\{z_i\}$ est infinie et tous ses points d'accumulation,

$$z_i \in \Delta$$

Démonstration :

Montrons que (14) est du type (1.9), où :

$$S = S^* = \{h \in \mathbb{R}^n \mid |h^i| \leq 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$C(z) = f^0(z)$$

$$\Psi(\varepsilon, z) = \tilde{h}_\varepsilon^0(z)$$

$$H(\varepsilon, z) = \{h \in S^* \mid \tilde{h}_\varepsilon^0(z) = \max_{i \in J_\varepsilon^N(z)} \langle \nabla f^i(z), h \rangle, \text{ et } \langle \nabla f^j(z), h \rangle \leq 0 \text{ si } j \in J_\varepsilon^A(z)\}$$

$$M(\varepsilon, z) = \{z + \mu h \in C \mid h \in H(\varepsilon, z), \text{ et}$$

$$f^0(z + \mu h) = \min\{f^0(z + t h) \mid t \in [0, \lambda(z, h)]\}$$

$$\text{ou } \lambda(z, h) = \max\{\lambda \geq 0 \mid z + t h \in C, \forall t \in [0, \lambda]\}$$

$$T = C'(z_0)$$

(16) Lemme 1 :

$$A \mu > 0, A \varepsilon \geq 0, A \zeta \in C(\mathbb{R}^0) \text{ tq } \lim_{\mu \rightarrow 0} \zeta = \mu$$

\Rightarrow

$$A \mu \in \mathbb{R}_+^N(\mathbb{R}^0), \exists \mu(\mu) > 0 \text{ tq } f'(\zeta + \mu) - f'(\zeta) \leq -\frac{\mu^2}{\mu}, A \mu \in [0, \mu(\mu)]$$

$$A \mu \in \mathbb{R}_+^H(\mathbb{R}^0), f'(\zeta + \mu) - f'(\zeta) \leq 0, A \mu > 0$$

Démonstration :

a) $A \mu \in \mathbb{R}_+^H(\mathbb{R}^0), f'(\zeta + \mu) - f'(\zeta) \leq 0, A \mu > 0$

b) $\mu \leq -\mu \Rightarrow$

Ruiz Théorème (H 2) : $\mu \leq \frac{\mu^2}{\mu}$;

$$A \mu \in \mathbb{R}_+^N(\mathbb{R}^0), \langle \mu, f'(\zeta) - \mu \rangle \leq -\mu, A \mu \in H(\mathbb{R}^0)$$

$$A \mu \in \mathbb{R}_+^N(\mathbb{R}^0), \exists \mu(\mu), \mu \in [0, \mu(\mu)] \text{ tq } \langle \mu, \mu \rangle = \mu(\mu) - (\mu + \mu) = \mu(\mu) - \mu > 0$$

Et donc, on pose : $\mu(\mu) = \mu(\mu)$

On a : $A \mu \in \mathbb{R}_+^N(\mathbb{R}^0), \exists \mu(\mu) \text{ tq}$

$$f'(\mu + \mu) - f'(\mu) \leq -\frac{\mu^2}{\mu}, A \mu \in [0, \mu(\mu)], A \mu \in H(\mathbb{R}^0)$$

$$A \mu \in \mathbb{R}_+^H(\mathbb{R}^0), f'(\mu) - f'(\mu + \mu) \leq 0, A \mu > 0, \text{ q.d.}$$

(17) Lemme 2 :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha \in \bar{m}, \exists r^i(\varepsilon) > 0 \text{ tq}$$

$$f^i(z + th) \leq 0, \forall z \in \{z \mid f^i(z) < -\varepsilon\}, \forall h \in S^*, \forall t \in [0, r^i(\varepsilon)]$$

$C'(z_0)$ est compact, par hypothèse \Rightarrow
 f^i uniformément continue sur $C'(z_0)$

$$\forall \delta \exists \varepsilon'' \quad \|f^i(z_1) - f^i(z_2)\| \leq \delta, \forall z_1, z_2 \in C'(z_0), \|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon''$$

Choisissons : $\delta = \varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \varepsilon \\ \lambda^i = \frac{\varepsilon''}{M} \end{array} \right. \text{, où } M = \max \{ \|h\| \mid h \in S^* \}$$

Donc :

$$\forall z \in C'(z_0), \forall \lambda \in [0, \lambda^i] : \|f^i(z) - f^i(z + \lambda h)\| \leq \varepsilon, \forall h \in S^*$$

$$\left(\text{puisque } \|z - z - \lambda h\| = \|\lambda h\| \leq \frac{\varepsilon'' M}{M} \right)$$

Et, si, en plus : z est tel que $f^i(z) < -\varepsilon$:

$$\forall z \in \{z \mid z \in C'(z_0) \text{ et } f^i(z) < -\varepsilon\}$$

$$\forall \lambda \in [0, \lambda^i] : f^i(z + \lambda h) \leq 0, \text{ c.q.f.d.}$$

Nous pouvons maintenant montrer que les hypothèses du Théorème (1.10) sont vérifiées :

(i) Par définition de $\tau(0, z) = \tilde{h}_0^0(z)$

(ii) S^* et $C'(z_0)$: compacts, par hypothèse

(iii) $c = f^0$: continue sur un compact \Rightarrow bornée inférieurement

(iv) lemme 1, où $i = 0 \in J_\varepsilon^N(z')$

(vii) par définition de $M(z, h)$

(v) il faut montrer :

$\forall z \in C'(z_0), \forall \delta > 0, \exists \varepsilon(z, \delta) > 0$ tq

$$h_\varepsilon^0(z') \leq h_0^0(z) + \delta, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon(z, \delta)], \forall z' \in B(z, \varepsilon(z, \delta))$$

Démonstration :

Soit $h_0^0(z) < 0$

Soit $\delta > 0$, tq $h_0^0(z) + \delta < 0$

1) Posons : $\eta(z, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \beta + \varepsilon_0$

où j le plus petit entier tq $h_{\beta + \varepsilon_0}^0(z) \leq h_0^0(z) + \delta$

(Un tel $\eta(z, \delta) \exists$, car (2.15))

$$\Rightarrow \exists \bar{\eta}(z) \forall \varepsilon \in [0, \bar{\eta}] \quad h_\varepsilon^0(z) = h_0^0(z),$$

$$\text{et donc } h_\varepsilon^0(z) \leq h_0^0(z) + \delta$$

(2.16) $\Rightarrow \exists \rho_1(z, \delta) \forall z' \in B(z, \rho_1(z, \delta))$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\eta(z, \delta)}^N(z') \subset J_{\eta(z, \delta)}^N(z) \\ J_{\eta(z, \delta)}^A(z') \subset J_{\eta(z, \delta)}^A(z) \end{array} \right.$$

Et donc $\exists \rho_1(z, \delta), \forall z' \in B(z, \rho_1(z, \delta))$,

$$(18) \quad h_{\eta(z, \delta)}^0(z') \leq h_{\eta(z, \delta)}^0(z)$$

On a : $h_{\eta(z, \delta)}^0(z) \leq h_0^0(z) + \delta$ (par définition de $\eta(z, \delta)$)

$$(2.14) \Rightarrow h_\varepsilon^0(z) \leq h_{\eta(z, \delta)}^0(z'), \forall \varepsilon \in [0, \eta(z, \delta)],$$

$$\forall z' \in B(z, \rho_1(z, \delta))$$

(18)

Et donc, en posant $\varepsilon(z, \delta) = \min\{\eta(z, \delta), \rho_2(z, \delta)\}$:
 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon(z, \delta)]$, $\forall z' \in B(z, \varepsilon(z, \delta))$, $h_\varepsilon^0(z') \leq h_\varepsilon^0(z) + \delta$,
 c.q.f.d..

(vi) Il faut montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tq}$$

$$h_\varepsilon^0(z) \leq -\delta \Rightarrow f^0(y) - f^0(z) \leq -\delta(\varepsilon)\varepsilon, \forall h \in H(\varepsilon, z), \forall y \in M(z, h)$$

Lemme 1 \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \forall \lambda \in J_\varepsilon^N(z) \exists \lambda^i(\varepsilon) \forall s \in [0, \lambda^i(\varepsilon)] f^i(z + sh) - f^i(z) \leq \frac{-\lambda s \varepsilon}{2} \\ \forall \lambda \in J_\varepsilon^A(z) \forall s > 0 f^i(z + sh) \leq 0 \end{array} \right\} \forall h \in H(\varepsilon, z)$$

Lemme 2 \Rightarrow

$$(19) \quad \forall \lambda \notin J_\varepsilon^-(z) \exists \lambda^i(\varepsilon) \forall t \in [0, \lambda^i(\varepsilon)] f^i(z + th) \leq 0$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} r(\varepsilon) = \min \{ \lambda^i(\varepsilon) \mid i \notin J_\varepsilon^-(z) \} \\ s(\varepsilon) = \min \{ \lambda^i(\varepsilon) \mid i \in J_\varepsilon^-(z) \} \\ t'(\varepsilon) = \min \{ s(\varepsilon), r(\varepsilon) \} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall \lambda \in [0, t'(\varepsilon)], \forall h \in H(\varepsilon, z) \left\{ \begin{array}{l} f^0(z + sh) - f^0(z) \leq -\delta(\varepsilon)\varepsilon \\ f^i(z + sh) \leq 0, i \in \bar{m} \end{array} \right.$$

Par définition de $M(z, h)$: $\lambda(z) > t'(\varepsilon)$

Et donc :

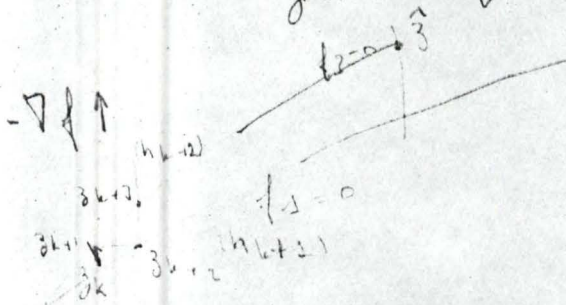
$$\forall y \in M(z, h) \quad f^0(y) - f^0(z) \leq -\delta(\varepsilon)\varepsilon, \text{ c.q.f.d..}$$

Algorithme noisé de Polak-Zoutendijk.

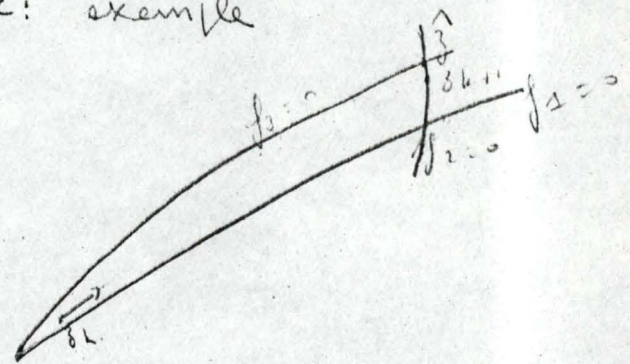
Nous appelons ainsi, l'algorithme obtenu en remettant ε à ε' , sa valeur initiale, toutes les k itérations, où k est un nombre entier (compris entre 5 et 10) : ceci pour essayer de tirer parti des avantages des deux algorithmes, et d'éviter leurs inconvénients, du moins de les diminuer.

La méthode de Polak est beaucoup plus prudente, mais, au voisinage du minimum, risque de rendre beaucoup de temps (si z' appartient à un voisinage du minimum, $h_\varepsilon^\circ(z') \geq -\beta'\varepsilon$, $\beta' \in]0, 2[$, pour une valeur très petite de ε).

Quant à la méthode de Zoutendijk, elle risque de ralentir la convergence, si ε est déjà petit, en un point z , loin de \hat{z} , et tel que $h_\varepsilon^\circ(z) = 0$, et qu'il existe des contraintes non ε -actives, mais dont la valeur, en z , est proche de $-\varepsilon$: exemple



①



②

En ①, h_k , direction de descente obtenue à partir de z_k ,

ne tient compte que de la contrainte f_1 ce qui rend $\|h_k\|$ petit.

En z_{k+1} , la même chose se passe, en ne tenant compte que de f_2 . L'approche du minimum \hat{z} , se fait, ainsi, en zigzaguant.

En ② : h_k tient compte de f_1 et f_2 .

L'algorithme croisé espère donc que la remise de ε à ε' toutes les k itérations va éviter les inconvénients du type de la méthode de Zoutendijk, tout en gardant ses avantages au voisinage du minimum (pour cela, le choix de k entre 5 et 10 semble convenir : un nombre plus grand que 10 correspondrait quasi à la méthode de Zoutendijk, et, un nombre plus petit que 5, à celle de Polak).

Modèle croisé

Modèle de Polak où l'étape 9 remplace "aller en 1" par "aller en 10" et l'étape 10 est elle-même :

Etape 10 : Si $i/k = 0 \text{ modulo } k$ aller en 1
Sinon aller en 2.

Convergence : on a démontré que Zoutendijk vérifiait les hypothèses du théorème 1.10 et donc l'algorithme croisé vérifie celles du théorème 1.22, ce qui démontre sa convergence.

Nous envisageons maintenant les mêmes modèles, où les pas 7 et 8 de minimisation exacte sont remplacés par une méthode fine de minimisation: celle de Armijo, pas 7' et 8', suivants:

Pas 7' : construire le plus petit entier $k \geq 0$ tq:

$$f^0(z + \bar{\beta}^k \ell h(z)) - f^0(z) - \bar{\beta} \ell \bar{\alpha} < \nabla f^0(z), h(z) > \leq 0$$

$$f^1(z + \bar{\beta}^k \ell h(z)) \leq 0, \forall i \in \bar{m}$$

où $\bar{\beta} \in]0, 1[$, $\ell > 0$, $\bar{\alpha} \in \frac{1}{2}, 1[$: paramètres fixés

Pas 8' : $\mu(z) = \bar{\beta}^k \ell$

Théorème de convergence (Polak - Armijo)

Soit (2^*) l'algorithme obtenu à partir de (2) en remplaçant les pas 7 et 8 par les pas 7' et 8'.

Montrons que le théorème (5) reste valable pour (2^*) .

1) (2^*) bien défini : même démonstration que pour (2)

2) Identifier l'algorithme (2^*) avec le modèle (1.1)

Définissons $A : C \rightarrow 2^C$ par

$$A(z) = \{z\}, \text{ si } h^0(z) = 0$$

$$A(z) = \{z' = z + \bar{\beta}^{k(z)} \ell h(z) \mid h(z) \in S^*(z),$$

$\mu \geq 0, k(z)$ construit par le pas 7' }

3) (2^*) vérifie les hypothèses du théorème (1.1).

Tout comme dans le théorème (5), on obtient :

$$(20) \quad \exists \varepsilon' > 0 \forall z' \in B(z, \varepsilon') \quad \varepsilon(z') \geq \varepsilon(z) \beta.$$

et, par continuité différentiable des f^i , $i \in \bar{m}$:

$$\exists \varepsilon_1 \in]0, \varepsilon'[, \exists t''' > 0, \forall i \in \bar{m}, \forall h \in S^*(z'), \forall z \in B(z, \varepsilon_1)$$

$$(21) \quad | \langle \nabla f^i(z' + th), h \rangle - \langle \nabla f^i(z'), h \rangle | \leq \frac{\varepsilon(z) \beta (1 - \bar{\alpha})}{2}$$

Et donc, $\forall z' \in B(z, \varepsilon_1), \forall t \in [0, t''']$, $\forall h(z') \in S^*(z')$,

(par le théorème des accroissements finis)

$\exists \delta \in]0, t[$ tq

$$\begin{aligned} & f^0(z' + th(z')) - f^0(z') - t\bar{\alpha} \langle \nabla f^0(z'), h(z') \rangle \\ &= t [\langle \nabla f^0(z' + \delta h(z')), h(z') \rangle - \langle \nabla f^0(z'), h(z') \rangle] \\ &\quad + t(1 - \bar{\alpha}) \langle \nabla f^0(z'), h(z') \rangle \\ &\leq t \left[\frac{\varepsilon(z) \beta (1 - \bar{\alpha})}{2} - (1 - \bar{\alpha}) \varepsilon(z) \beta \right] = - \frac{t \varepsilon(z) \beta (1 - \bar{\alpha})}{2} \end{aligned}$$

(22)

On a aussi (13), et donc :

$\forall z' \in B(z, \varepsilon_1), \forall t \in [0, t''']$, $\forall h(z') \in S^*(z')$

$$f^0(z' + th(z')) - f^0(z') - t\bar{\alpha} \langle \nabla f^0(z'), h(z') \rangle \leq - \frac{t \varepsilon(z) \beta (1 - \bar{\alpha})}{2}$$

$$f^i(z' + th(z')) \leq 0, \quad i \in \bar{m}$$

Soit $\bar{k}(z)$, le petit entier positif tq :

$$\begin{cases} \bar{\beta}^{\bar{k}(z)} \varepsilon \leq t''' \\ \bar{\beta} t''' \leq \bar{\beta}^{\bar{k}(z)} \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{\beta}^{\bar{k}(z)} \varepsilon}{\bar{\beta}} \geq t'''$$

On a donc :

$$(22) \quad \bar{\beta} t''' \leq \bar{\beta} \bar{k}(z') \rho \leq t'''$$

Soit $k(z')$ construit par 7' $\Rightarrow k(z') \leq \bar{k}(z')$, \Rightarrow

$$(23) \quad \bar{\beta} \bar{k}(z') \geq \bar{\beta} k(z')$$

Et, par définition de $k(z')$:

$$\begin{aligned} f^0(z' + \rho \bar{\beta} k(z') h(z')) - f^0(z') &\leq \bar{\beta} k(z') \rho \bar{\alpha} \langle \nabla f^0(z'), h(z') \rangle \\ &\leq - \bar{\beta} k(z') \rho \bar{\alpha} \varepsilon(z) \beta \\ &\stackrel{(23) \text{ et } (20)}{\leq} - \bar{\beta} t''' \bar{\alpha} \varepsilon(z) \beta \\ &\stackrel{(22)}{\leq} - \bar{\beta} t''' \bar{\alpha} \varepsilon(z) \beta \end{aligned}$$

Posant $\delta(z) = -\bar{\beta} t''' \bar{\alpha} \varepsilon(z) \beta$, on a bien :

$\forall z' \in B(z, \rho_1)$, $\forall h(z') \in S^*(z')$:

$$f^0(z' + \bar{\beta} k(z') h(z')) - f^0(z') \leq \delta(z) < 0$$

$$f^i(z' + \bar{\beta} k(z') h(z')) \leq 0, \quad i \in \bar{m}$$

$(\Rightarrow) \forall z \notin \Delta, \exists \rho_1(z) > 0, \delta(z) < 0$ tq. $\forall z' \in B(z, \rho_1(z))$

$\forall z'' \in A(z) \quad f^0(z'') - f^0(z') \leq \delta(z), \text{ c.q.f.d.}$

Faisons la même modification pour l'algorithme de Zoutendijk :
remplaçons les pas 7 et 8 par les pas 7' et 8'.

Montrons que les conclusions du théorème (1.10) restent encore valables si l'on remplace les hypothèses (v) et (vii) par les hypothèses (v') et (vii') suivantes :

$$(10'') \quad \forall \varepsilon \geq 0, \forall z \in T \\ \Psi(\varepsilon, z) \leq -\mu, \mu \geq 0 \quad \left\{ \Rightarrow \forall h \in H(\varepsilon, z), \langle \nabla c(z), h \rangle \leq -\mu \right.$$

$$(11'') \quad \forall z \in T, \forall h \in H(\varepsilon, z) \\ m(z, h) = \left\{ z + \lambda h \in T \mid \lambda = \bar{\beta}^k \ell \right. \\ \text{où } k \text{ est le plus petit entier } \geq 0, \text{ tq.} \\ \left. \begin{array}{l} c(z + \bar{\beta}^k \ell h) - c(z) \leq \bar{\beta}^k \ell \bar{\alpha} \langle \nabla c(z), h \rangle \\ z + \bar{\beta} \ell h \in T \end{array} \right. \\ \text{où } \ell > 0, \bar{\alpha} \in \left[\frac{1}{2}, 1[\text{ et } \bar{\beta} \in]0, 1[\text{ sont des para-} \\ \text{mètres fixés.} \right.$$

Nous montrerons ensuite que le modèle Zoutendijk - Armijo vérifie ces hypothèses.

(14) Théorème (1.10) modifié :

Soient les hypothèses du théorème (1.10), où (10) et (11) sont remplacées respectivement par (10'') et (11'').

Alors

soit $\{z_i\}$ suite construite par (1.9)

est finie et son dernier élément est désirable.

soit est infinie et ses points d'accumulation sont désirables

Démonstration :

Pour montrer que l'algorithme (1.9) est bien défini, sous

ces nouvelles hypothèses, et que, si $\{z_i\}$ converge vers z , z est un point désirable, la démonstration de (1.9) convient, car elle n'utilise pas les hypothèses (v) et (vii).
Soit donc $\{z_i\}$ divergente, et, montrons que, tout point d'accumulation $\in \Delta$.

La démonstration de (1.10) reste la même jusqu'en (1.16), ensuite :

$$c(z_{i+1}) - c(z_i) = c(z_i + \lambda_i h_i) - c(z_i) \leq \lambda_i \alpha \langle \nabla c(z_i), h \rangle$$

(λ_i construit par (viii)) $\forall z_i \in B(z^*, \delta_2)$

$h_i \in H(E_{i-1}, z_{i-1})$)

En particulier : $\forall z_j \in B(z^*, \delta_2)$, $c(z_{j+n(j)}) - c(z_j) = \sum_{p=0}^{n(j)-1} [c(z_{j+p+1}) - c(z_{j+p})]$

Et donc : $\forall z_j \in B(z^*, \delta_2)$, $c(z_{j+n(j)}) - c(z_j) \leq - \sum_{p=0}^{n(j)-1} \lambda_{j+p} \alpha \mu$ } \Rightarrow

Avec (1.19) : $\sum_{p=0}^{n(j)-1} \lambda_{j+p} \geq \frac{\delta_2}{m} > 0$

$$c(z_{j+n(j)}) - c(z_j) \leq - \alpha \frac{\mu \delta_2}{m}, \quad \forall z_j \in B(z^*, \delta_2)$$

On peut maintenant reprendre la démonstration de (1.10) :

on construit une sous-suite de $\{c(z_i)\}$ divergente, dans un voisinage d'un point d'accumulation de $\{z_i\}$, ce qui conduit à une contradiction puisque $\{c(z_i)\}$, étant décroissante et bornée inférieurement, est convergente.

Théorème de convergence (Zoultendijk - Armijo)

Prouvons que le modèle Zoultendijk - Armijo vérifie les hypothèses du théorème (24).
 Les modifications (v') et (v'') n'entraînent aucune conséquence sur (i1), (i2), (f1), (f2), (v) ; ces hypothèses sont donc encore vérifiées.

Il reste à vérifier (v'), (v1) et (v'') :

$$(v') \quad \forall \varepsilon > 0, \forall z \in T, \exists (\varepsilon, z) \leq -\mu \Rightarrow \langle \nabla c(z), h \rangle \leq -\mu, \forall h \in H(\varepsilon, z)$$

Par définition de $H(\varepsilon, z)$:

$$h \in H(\varepsilon, z) \Leftrightarrow \exists \tilde{h} \in \mathbb{R}^n(z) = \max_{i \in J_\varepsilon^H(z)} \langle \nabla f^i(z), h \rangle, \text{ avec } \langle \nabla f^i(z), h \rangle \leq 0, \\ \text{si } j \in J_\varepsilon^H(z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$\text{Et donc } \langle \nabla f^0(z), h \rangle \leq -\mu, \text{ puisque } c = f^0 \\ \exists (\varepsilon, z) = \tilde{h}^0(z),$$

$$(v1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \exists (\varepsilon, z) \leq -\alpha \varepsilon, \Rightarrow$$

$$c(y) - c(z) \leq -\delta(\varepsilon) \varepsilon, \forall z \in T, \forall h \in H(\varepsilon, z), \forall y \in M(z, h)$$

$$\tilde{h}^0(z) \leq \alpha \varepsilon \Rightarrow \text{(respectivement, par (16) et (17))}$$

$$(28) \quad \left. \begin{array}{l} \forall i \in J_\varepsilon^M(z), \exists \alpha \varepsilon^i(z), \exists \delta(z + \delta h) - f^i(z) \leq \alpha \varepsilon^i, \forall h \in H(\varepsilon, z) \\ \forall i \in J_\varepsilon^H(z), \forall \alpha > 0, \exists \delta^i(z + \delta h) \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$(29) \quad \forall i \notin J_\varepsilon(z), \exists \varepsilon^i(z) > 0, \exists \delta^i(z + \delta h) \leq 0, \forall \delta \in [0, \varepsilon^i(z)]$$

Posons $s^*(\varepsilon) = \min \{ \min \{ s^i(\varepsilon) \mid i \in J_\varepsilon^N(z) \}, \min \{ s^i(\varepsilon) \mid i \notin J_\varepsilon(z) \} \}$

$$\left. \begin{array}{l} (28) \\ (29) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall s \in [0, s^*(\varepsilon)] \left\{ \begin{array}{l} f^0(z + sh) - f^0(z) \leq -\frac{s \alpha \varepsilon}{2}, \forall h \in H(\varepsilon, z) \\ f^i(z + sh) \leq 0, \forall i \in \bar{m}, \forall h \in H(\varepsilon, z) \end{array} \right.$$

Soit $y = z + \lambda h$ tq $y \in m(z, h)$; on a donc: $\lambda \geq s^*(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} f^0(z + \lambda h) &\leq \lambda \langle \nabla f^0(z), h \rangle \\ &\leq -\lambda \alpha \varepsilon \\ &\leq -\sigma(\varepsilon) \varepsilon \quad \text{ou} \quad \sigma(\varepsilon) = \alpha s^*(\varepsilon), \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

(vii') est vérifiée par construction.

Algorithme croisé Polak - Zoutendijk, avec procédure d'Armijo

On reprend le raisonnement utilisé pour démontrer la convergence du modèle Zoutendijk - Armijo.

Dans le modèle (1.22), on remplace, au [ast, $M(z_i, h)$ par $m(z_i, h)$: soit (2.2*), ce modèle.

Dans le théorème (1.23) du même chapitre, on remplace les hypothèses (iv) et (vii), respectivement, par (iv') et (vii') (rencontrées dans (2.4)).

On reprend la démonstration de (1.22) pour montrer que:

l'algorithme (2.2*) est bien défini,

si $\{z_i\}$ est une suite finie construite par (2.2*), son dernier élément est désirable;

si c'est une suite convergente, sa limite est un point désirable;

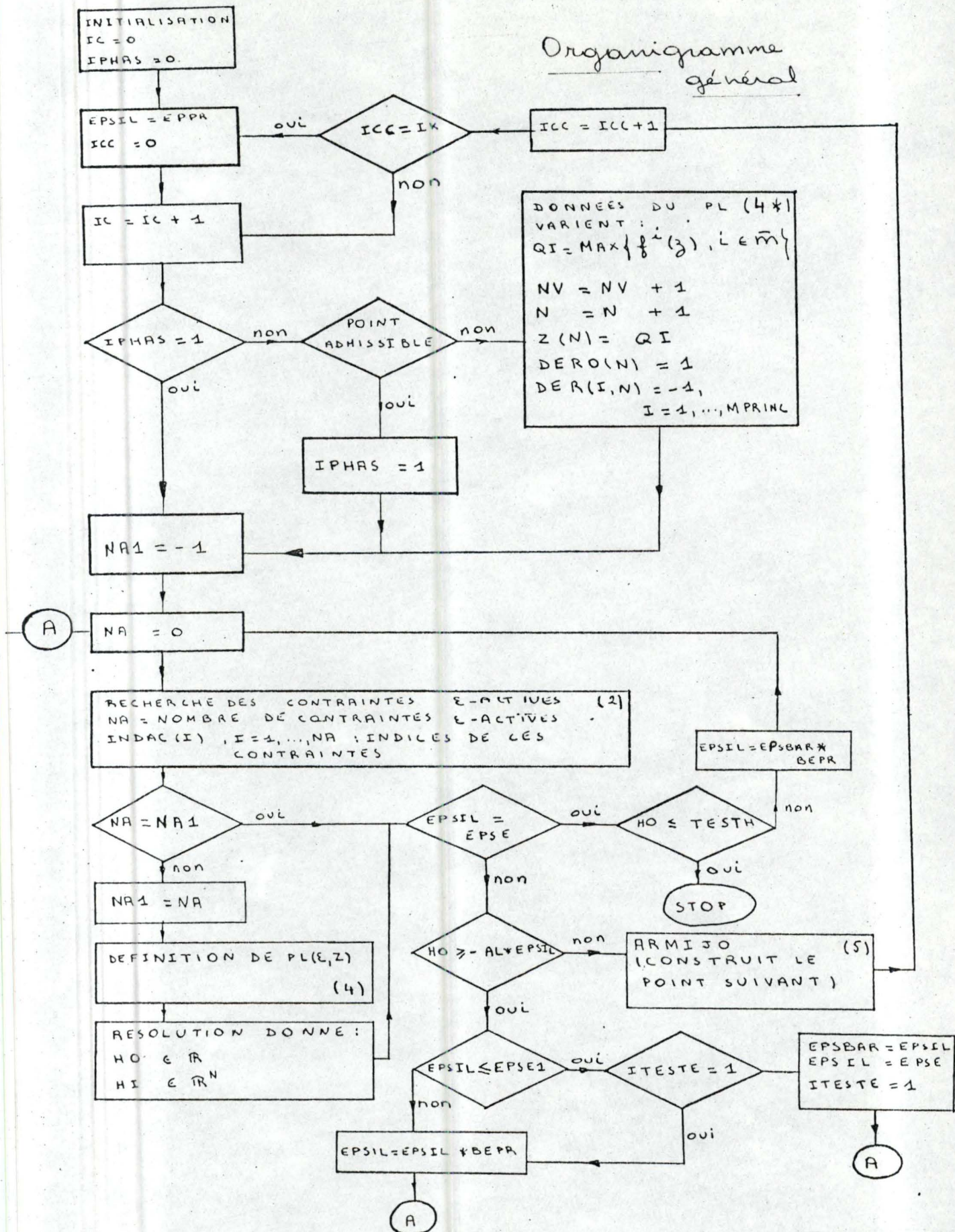
On reprend la démonstration de (24). Pour montrer que tout point d'accumulation d'une suite $\{z_i\}$ divergente, construite par (22*), est désirable

L'algorithme croisé, avec procédure d'Armijo vérifie les hypothèses (i) (ii) (iii), (v') (vi) (vii) et (viii) de (24), (démonstration faite pour Zoutendijk - Armijo), et donc, par le théorème ci-dessus, la convergence de cet algorithme est démontrée.

— Chapitre 4 —

Nous présentons ici le programme qui a testé la convergence pratique de l'algorithme croisé de Zoutendijk. Polak et traitons un exemple.

Organigramme général



(1) Initialisation et données :

Paramètres :

$\varepsilon = \text{EPSIL}$ (valeur courante de ε)

$\beta' = \text{BEPRA} \in]0,1[$: pas de décroissance de ε

$\beta'' = \text{BSEC} \in [0.5, 0.8]$: pas de décroissance dans la méthode d'Armijo.

$\varepsilon_1 = \text{EPSE1}$: valeur test de ε pour brancher vers $PL(\varepsilon'', z)$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

$\varepsilon'' = \text{EPSE}$: valeur minimum de ε (sert de 0).

$\varepsilon' = \text{EPPR}$: valeur de ε initiale.

$k = \text{IK}$: remise de ε à ε' toutes les k itérations

TESTH : test d'arrêt (si $h_{\varepsilon''}^0(z) \gg -\text{TESTH}$, stop)

$\alpha = \text{AL} \in]0,1]$: décroissance dans le test sur $h_{\varepsilon}^0(z)$ (On teste si $h_{\varepsilon}^0(z) \gg -\alpha\varepsilon$)

BORDIR : bornes sur la direction de descente
(si $h \in \mathbb{R}^n$: direction de descente,

on impose $|h_i| \leq \text{BORDIR}, i = 1 \rightarrow n$)

Données du programme non linéaire à résoudre :

$m = \text{MPRINC}$ = Nombre de contraintes

$n = N$ = Nombre de variables

NAF = Nombre de contraintes affines

$\text{IAF}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$: contient les indices des contraintes affines

Donnée de la fonction objectif et des contraintes.

Sous forme de sous-routines

a) SUBROUTINE VALF (I, J, Z, HI, FO, F, FH)

(valeur des fonctions objectif et contraintes en un point Z)

$$\begin{cases} I, J \in \mathbb{N} \\ HI, Z, F \in \mathbb{R}^n \\ FO, FH \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Arguments $\left\{ \begin{array}{l} \text{entrée : } I, J, Z \\ \text{sortie : } HI, FO, F, FH \end{array} \right.$

Sous-routine longue aim :

$I=1, J=0$: calcul de $f^0(z)$ en FO

$$I=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} FO = f^0(z) \\ FH = \langle \nabla f^0(z), HI \rangle \end{array} \right.$$

$J \in \{1, \dots, m\}$: $F(J) = f^j(z)$

$$J = m+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} FO = f^0(z) \\ F(1) = f^1(z) \\ \vdots \\ F(m) = f^m(z) \end{array} \right.$$

S'il y a des contraintes affines, ($\Leftrightarrow NAF \neq \emptyset$), leurs indices doivent être les NAF premiers ($\Leftrightarrow \{1, \dots, NAF\}$ = ensemble des indices des contraintes affines).

b) SUBROUTINE GRAD (I, Z, DERO, DER)

(valeur des gradients des fonctions objectif et contraintes en un point Z donné : ces valeurs sont né.

= nécessaires pour établir les programmes linéaires).

$$\left\{ \begin{array}{l} I \in \mathbb{N} \\ Z, DERO \in \mathbb{R}^n \\ DER(,) : \text{matrice } m \times n \end{array} \right.$$

Arguments $\left\{ \begin{array}{l} \text{entrée : } I, Z \\ \text{sortie : } DERO, DER \end{array} \right.$

Sous-routine conçue ainsi:

$I = K$: calcul de $\nabla f^k(z) = (\nabla f_1^k(z), \dots, \nabla f_n^k(z))^T$
 si $K=0$: $DERO(L) = \nabla f_L^0(z)$, $L=1, \dots, n$
 si $K \neq 0$: $DER(K, L) = \nabla f_L^k(z)$, $L=1, \dots, n$

Point initial à donner

Paramètres d'impression:

$IPAR = 1$: impression des étapes de Armijo (sinon $IPAR = 0$)
 $ISIM = 1$: impression des étapes du simplexe (sinon $ISIM = 0$)

Initialisation et signification de quelques variables:

$IPHAS = 0$: on est dans la recherche d'un point admissible
 (sinon $IPHAS = 1$)

$ITESTE = 0$: $PL(E'', z)$ n'a pas été résolu (E'' : valeur minimale de E ; si $h_L^0(z) \geq -\alpha E$, $E \leq E_1$,
 alors on résout $PL(E'', z)$, E'' = approximation de zéro)
 (sinon $ITESTE = 1$)

INDAC1

Si $PL(\varepsilon, z)$ vient d'être résolu, et, $h^\circ_\varepsilon(z) \geq -\alpha\varepsilon$,
on doit calculer $PL(\beta\varepsilon, z)$.

INDAC1(L) : est un vecteur contenant les indices des contraintes ε -actives, ce qui permettra de tester si elles sont les mêmes que les contraintes $\beta\varepsilon$ -actives, et, ainsi, d'éviter, éventuellement, de calculer deux fois, un même programme linéaire.

NV = Nombre de variables du programme linéaire (toujours $= N+1$;

où $N = n+1$ dans la recherche d'un point admissible ;

$N = n$ sinon)

IC = compteur d'itérations (\Rightarrow initialisation : IC = 0)

ICC = IC modulo (IK)

(et donc si ICC = 0 : remise de ε à ε')

(2) Recherche des contraintes ε -actives en un point z .

Si z est un point admissible.

Dans ce cas, la valeur de $QI = 0$

Et donc : tester $f^i(z) \geq -\varepsilon$, $\forall i \in \bar{m}$
 \Leftrightarrow tester $f^i(z) - QI \geq -\varepsilon$, $\forall i \in \bar{m}$

Si z n'est pas admissible.

Dans ce cas, les contraintes $g^i(\cdot)$ sont :

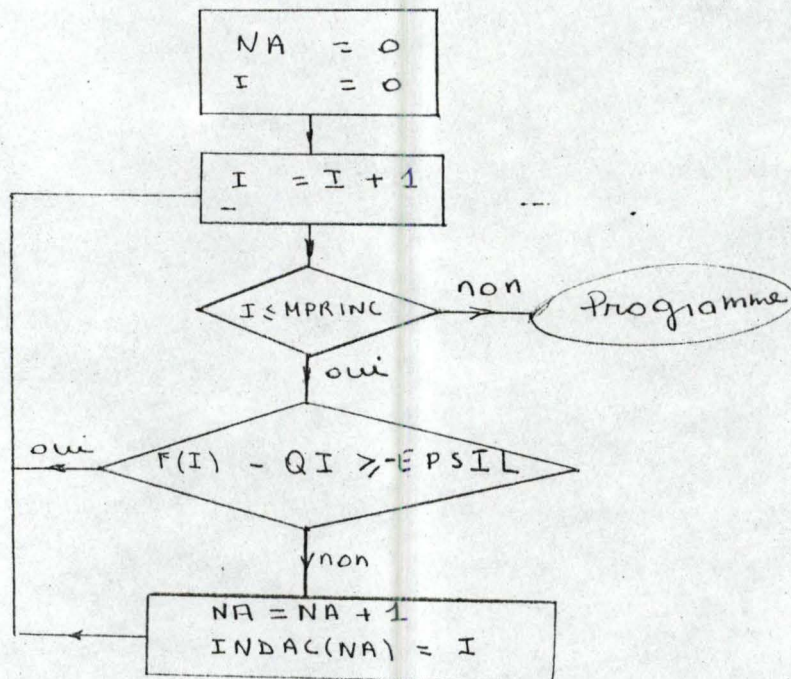
$$g^i(z_1, \dots, z_{n+1}) = f^i(z_1, \dots, z_n) - z_{n+1}, \quad \forall i \in \bar{m}$$

et $z_{n+1} = \max \{ f^i(z_1, \dots, z_n) \mid i \in \bar{m} \}$

Et, dans ce cas : $QI = \max \{ f^i(z_1, \dots, z_n) \mid i \in \bar{m} \}$

Et donc : tester $g^i(z_1, \dots, z_{n+1}) \geq -\varepsilon, \quad \forall i \in \bar{m}$
 \Leftrightarrow tester $f^i(z_1, \dots, z_n) - QI \geq -\varepsilon, \quad \forall i \in \bar{m}$

Le programme est donc le même, dans les 2 cas :



Ainsi, $INDAC(I), I = 1, \dots, NA$ contient les indices des contraintes ε -actives, à la sortie.

$$(3) \quad NA = NA1$$

Au départ, $NA = -1$

NA donne le nombre de contraintes ε -actives (tandis que $INDAC(I)$, $I=1, \dots, NA$ en stocke les indices)

Après la recherche des contraintes ε -actives, on a donc:

Si $NA = -1$; pas de contrainte ε -active, passer à la définition de $PL(\varepsilon, z)$

Sinon, poser $NA1 = NA$.

Ainsi, si au tour suivant, on a : $NA = NA1$;

cela signifie que pour ces contraintes ε -actives, en ce point z , le programme linéaire a déjà été résolu; on branche donc directement sur les tests concernant ε et $h^0_\varepsilon(z)$.

$$(4) \quad NA \neq NA1$$

Définition de $PL(\varepsilon, z)$, si z admissible.

$$PL(\varepsilon, z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min h^0 \\ -h^0 + \langle \nabla f^i(z), h \rangle \leq 0, \quad i \in J^N_\varepsilon(z) \\ \langle \nabla f^i(z), h \rangle \leq 0, \quad i \in J^A_\varepsilon(z) \\ |h^i| \leq a, \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

(Dans le programme $a = BORDIR$)

Changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -h^0 \\ x_{i+1} = -h^i + a, \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

PL(ε, z) devient donc :

$$\begin{aligned} & \min -x_1 \\ & \left. \begin{aligned} x_1 + \langle \nabla f^i(z), (x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle &\leq a \sum_{j=1}^n \nabla f_j^i(z), \quad i \in J_\varepsilon^N(z) \\ \langle \nabla f^i(z), (x_2, \dots, x_{n+1}) \rangle &\leq a \sum_{j=1}^n \nabla f_j^i(z), \quad i \in J_\varepsilon^A(z) \\ x_i &\leq 2a, \quad i=2, \dots, n+1 \\ x_i &\geq 0, \quad i=2, \dots, n+1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Soit A_1 la matrice correspondant à PL(ε, z),

A_2 : le 2^e membre.

PL(ε, z) peut être donnée comme ceci :

	$A_1(\dots)$	$A_2(\dots)$
(1) {	1 $\nabla f_1^0(z)$... $\nabla f_n^0(z)$	$a \sum_{j=1}^n \nabla f_j^0(z)$
0	$\nabla f_1^{i_1}(z)$... $\nabla f_n^{i_1}(z)$	$a \sum_{j=1}^n \nabla f_j^{i_1}(z)$
0	$\nabla f_1^{i_2}(z)$... $\nabla f_n^{i_2}(z)$	
(2) {	1 $\nabla f_1^{i_{l+1}}(z)$... $\nabla f_n^{i_{l+1}}(z)$	
1	$\nabla f_1^{i_{na}}(z)$... $\nabla f_n^{i_{na}}(z)$	$a \sum_{j=1}^n \nabla f_j^{i_{na}}(z)$
(3) -1	0 ... 0	0

(où l = nombre de contraintes affines actives)

Bloc (1) correspond aux contraintes affines actives.

Bloc (2) correspond aux autres contraintes actives.

ligne (3) correspond à la fonction objectif

(4*) Définition de $PL(\epsilon, z)$, si z est non admissible.

Dans ce cas $PL(\epsilon, z)$ a $n+1$ variables
 $\left\{ \begin{array}{l} n+1 \text{ variables} \\ m \text{ contraintes} \end{array} \right.$

Posons : $z = (z_1, \dots, z_n)$

On a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \min g^0(z, z_{n+1}) \\ g^i(z, z_{n+1}) \leq a, \quad i=1, \dots, m \end{array} \right.$$

où
$$\left\{ \begin{array}{l} g^0(z, z_{n+1}) = z_{n+1} \\ g^i(z, z_{n+1}) = f^i(z) - z_{n+1} \end{array} \right.$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \nabla g^0(z, z_{n+1}) &= (0, \dots, 1)^T \quad (\leftarrow \text{transposée}) \\ \nabla g^i(z, z_{n+1}) &= (\nabla f^i(z), -1)^T \end{aligned}$$

et en posant $h \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$PL(\epsilon, z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min h^0 \\ -h^0 + \langle \nabla f^i(z), h \rangle - h^{n+1} \leq 0, \quad i \in J_E^N(z, z_{n+1}) \\ \langle \nabla f^i(z), h \rangle - h^{n+1} \leq 0, \quad i \in J_E^A(z, z_{n+1}) \\ |h^i| \leq a, \quad i=1, \dots, n+1 \end{array} \right.$$

Avec le même changement de variables, $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -h^0 \\ x_{i+1} = h^i + a, \quad i=1 \rightarrow n+1 \end{array} \right.$

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min -x_1 \\ x_1 + \nabla f_1^i(z) x_2 + \dots + \nabla f_n^i(z) x_{n+1} - x_{n+2} \leq 0, \quad i \in J_E^N(z, z_{n+1}) \\ \nabla f_1^i(z) x_2 + \dots + \nabla f_n^i(z) x_{n+1} - x_{n+2} \leq 0, \quad i \in J_E^A(z, z_{n+1}) \\ x_i \leq 2a, \quad i=2, \dots, n+2 \end{array} \right.$$

Que z soit admissible, ou non, on peut donc utiliser le même programme. En ayant donné, au réalisable,

dans le cas où z n'est pas admissible :

le nombre de variables du PL : $N = N + 1$

la dérivée de $g^0(\cdot)$ et $g^i(\cdot)$ par rapport à z_{n+1} : $DERO(N) = 1$

($I \in \bar{m}$) $DER(I, N) = -1$

$Z(N) = QI$

(où QI donne le $\max \{ f^i(z) \mid i \in \bar{m} \}$)

Remarque pour la sous-routine SIMPLE

La première partie rend le deuxième membre des contraintes du programme linéaire, positif, et applique, ensuite, l'algorithme primal du simplexe.

INITIALISATION:
 $AS(I, 1) = 0, I = 1, 15, J = 1, 60$
 $A2(I, 1) = 0, I = 1, 15$
 $G = 0$
 $L = 0$

CALL GRAD(0, Z, DER0, DER)

Contraintes du P.L. correspon
 = claut à FO:
 $AS(1, J+1) = DER0(J), J = 1, \dots, N$
 $A2(1) = 2 \cdot DER0(J), J = 1, \dots, N$

Contraintes du P.L. cours pendant aux
 contraintes ϵ -actives
 $I = 0$
 $IND = 0$

$I = I + 1$

$I \leq NA$

OUI
 $IND = IND + 1$
 $ISA = INDAC(I)$

$NAF = 0$

OUI
 $AS(IND, 1) = 1$

NON
 $L = 0$

$L = L + 1$

$L \leq NAF$

CALL GRAD($ISA, Z, DER0, DER$)
 $AS(IND, K+1) = DER(ISA, K),$
 $A2(IND) = \sum_K DER(ISA, K),$
 $K = 1, \dots, N$

OUI
 $ISA = L$

NON
 $AS(IND, 1) = 1$

BORNES SUR DIRECTION
 DE DESCENTE:
 $I = 0$
 $I = I + 1$
 $I \leq N$
 OUI
 $IND = IND + 1$
 $AS(IND, I+1) = 1,$
 $A2(IND) = 2 * BORDIR$
 NON

LIGNE CORRESPONDANT A LA
 FONCTION ECONOMIQUE:
 $AS(L+1, 1) = -1$

RESOLUTION DE PL(E, Z):
 CALL SIMPLE($AS; HO, HI, A2$)

Retour au programme

(5) ARMISJO

CALL VALF(2,0,Z,HI,FO,F,FH)
(CALCUL DE $f^0(z) = F^0$)

$Z1(I) = Z(I), I = 1, \dots, N$

BE = BSEC
IQ = 1

$Z(I) = Z1(I) + BE * HI(I), I = 1, \dots, N$

IPHAS = 1

VALF CALCULÉ :
 $F1 = f^0(z)$

$OL = F1 - FO - BE * FH$

J = 0
QI = 0

OL ≤ 0

J = J + 1

BE = BE * BSEC

J ≤ MPRINC

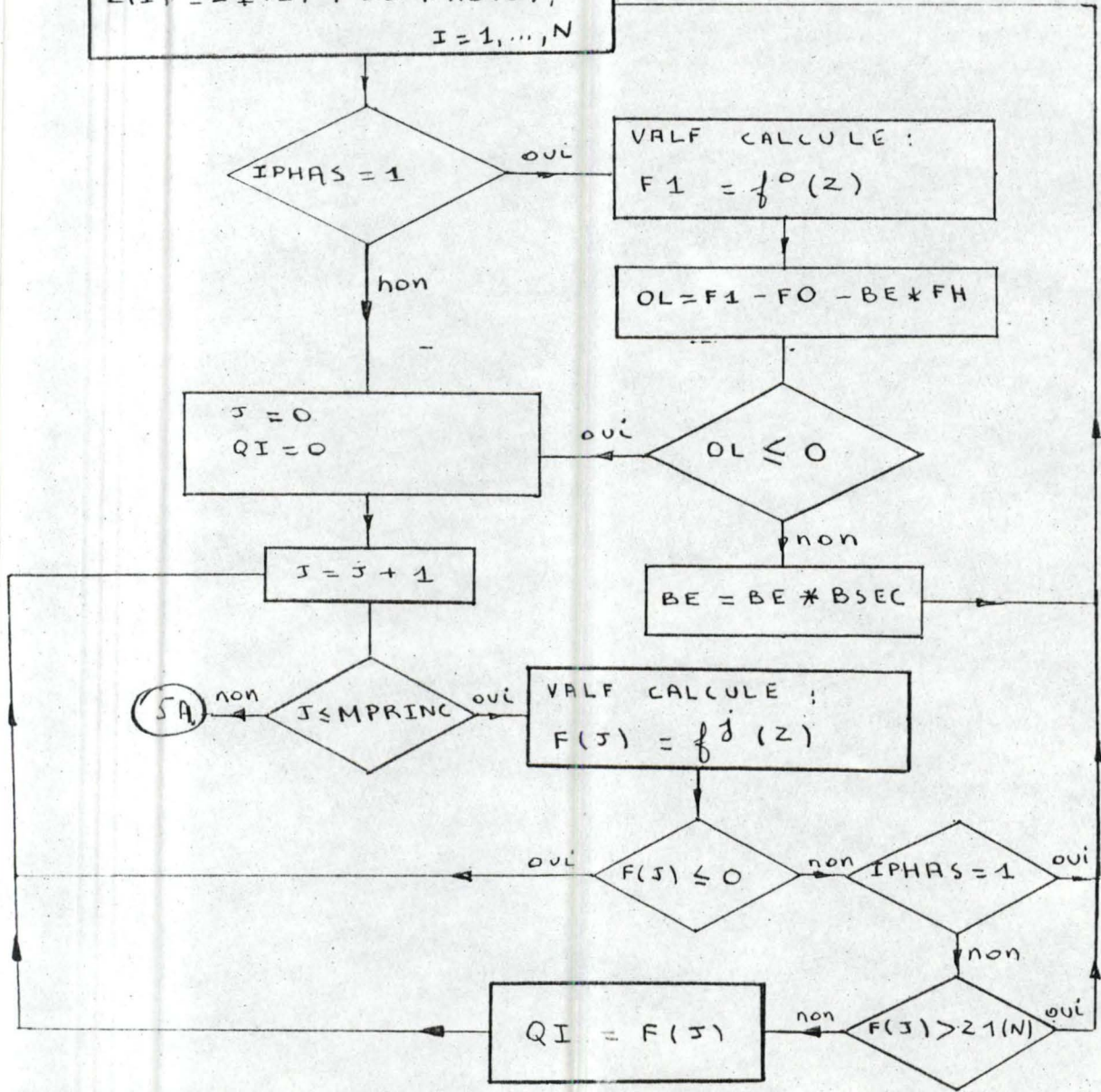
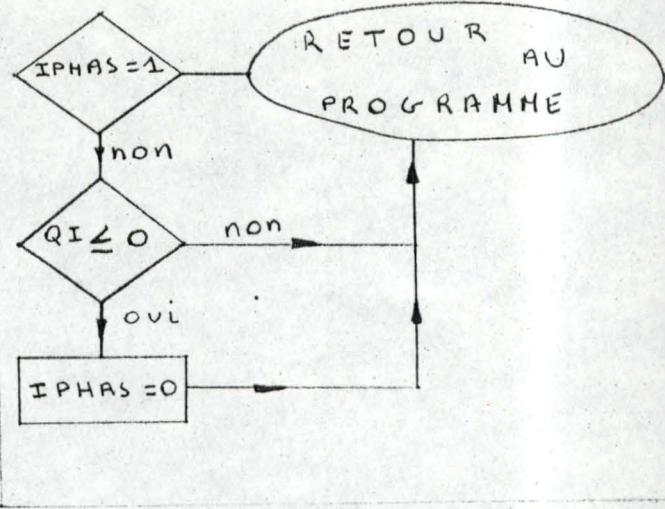
VALF CALCULÉ :
 $F(J) = f^j(z)$

F(J) ≤ 0

IPHAS = 1

F(J) > Z1(N)

QI = F(J)



(5) Méthode de Armijo.

Soit z_i (point obtenu à l'itération i)

$(\tilde{h}_\varepsilon^0(z_i), \tilde{h}_\varepsilon(z_i))$ solution du PL2* (ε_i, z_i)

$\beta'' \in]0, 1[$: paramètre prédéterminé

1) Si z_i est admissible (\Leftrightarrow IPHAS = 1)

$$z_{i+1} = z_i + \beta''^q \tilde{h}_\varepsilon(z_i)$$

où q est le plus petit entier ≥ 0 tel que :

$$f^0(z_i + \beta''^q \tilde{h}_\varepsilon(z_i)) - f^0(z_i) - \frac{\langle \nabla f^0(z_i), \tilde{h}_\varepsilon(z_i) \rangle \beta''^q}{2} \leq 0$$

et $f^j(z_i + \beta''^q h) \leq 0$, $j \in \bar{m}$

2) Si z_i n'est pas admissible (\Leftrightarrow IPHAS = 0)

$$z_{i+1} = z_i + \beta''^q \tilde{h}_\varepsilon(z_i)$$

où q est le plus petit entier ≥ 0 tel que :

$$\max_{j \in \bar{m}} \{f^j(z_i + \beta''^q \tilde{h}_\varepsilon(z_i))\} \leq \max_{j \in \bar{m}} \{f^j(z_i)\}$$

Notations :

$$\text{BSEC} = \beta''$$

$$\text{HI} = \tilde{h}_\varepsilon(z_i) \text{ et } \text{HO} = \tilde{h}_\varepsilon^0(z_i)$$

$$z = z_i$$

$$\text{IQ} = q$$

$$\text{FO} = f^0(z_i)$$

$$\text{F1} = f^0(z_i + (\beta''^q) \tilde{h}_\varepsilon(z_i))$$

$$\text{FH} = \langle \nabla f^0(z_i), \tilde{h}_\varepsilon(z_i) \rangle$$

(5A) Si $IPHAS = 0$: on est dans la recherche d'un point admissible : on s'arrête si

$$\max \{ f^j(z_{i+1}) \mid j \in \bar{m} \} < \max \{ f^j(z_i) \mid j \in \bar{m} \}$$

On teste donc : $F(J) > z_1(N)$

$$\text{(où } F(J) = f^J(z_{i+1})$$

$$z_1(N) = \max \{ f^j(z_i) \mid j \in \bar{m} \}$$

si $F(J) > z_1(N)$, on continue la procédure d'

Armijo

sinon, on teste $f^{J+1}(z_{i+1}) = F(J+1)$, si $J+1 \leq m$

Soit le problème suivant: [P]

$$\min \exp \left\{ (z_1^2 + 5z_2^2) + z_1^2 + p_0 z_2^2 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 + 2z_2 - 1 \leq 0 \\ z_1^2 + z_2^2 - 4z_1 + 1 \leq 0 \\ z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

Si le test d'arrêt est : $\|h_c^0(z_i)\| \geq -10^{-6}$, stop.
avec $\varepsilon'' = 10^{-5}$

1. Choix du point initial.

Si le point est non admissible, un point admissible a été trouvé, en général, en 2 itérations.

2 points initiaux différents peuvent donner des vitesses de convergence très différentes.

Exemple. Pour les mêmes paramètres $\alpha = 0.3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta' = 0.3 \\ \varepsilon' = 10^{-3} \\ IK = 7 \end{array} \right.$$

Soit $z^{i0} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.95 \end{pmatrix}$ et $z^{ii0} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

Nombre d'itérations obtenus avec z^{i0} , comme point initial.

47 (temps de calcul : 38.1 sec.) et avec z^{ii0} comme point initial 64 (temps de calcul 46.9 sec.)

La différence entre les 2 nombres d'itérations est de 17.

Avec les mêmes points, mais les paramètres suivants:

$$\alpha = 0.3, \quad \beta' = 0.8, \quad \varepsilon' = 10^{-3}, \quad IK = 10$$

Avec $\beta_1 = 0.7$: Nombre d'itérations est de 56 (temps calcul: 46.084)
 Avec $\beta_2 = 0.35$: Nombre d'itérations est de 68 (temps calcul: 55.071)

→ différence entre les 2 nombre d'itérations est de 12.

2. Variation de $k (= IK)$

Pour l'exemple traité, quand seul le paramètre k varie, les résultats les plus rapides ont été obtenus par la méthode de Zoutendijk et les moins rapides par la méthode de Polak.

Ceci est dû au fait que quand f_2 est ε -active, elle l'est aussi bien pour ε' que $\varepsilon' \beta'^5$ (dans notre cas), ce qui fait qu'une remise de ε à sa valeur initiale fait perdre du temps (il faut faire décroître ε jusque, par exemple, $\varepsilon' \beta'^5$, avant de passer à l'itération suivante).

Polak perd énormément de temps dans les 10 dernières itérations (si $\beta' = 0.8$, $\beta'^{10} = 0.92 \cdot 10^{-5}$, et donc à la dernière itérations 21 valeurs de ε sont testées).

Exemple:

	k	temps de calcul (+ impressions)	Nb. d'itérations
$\beta_1 = 0.7$	Polak	44.03	54
	Zoutendijk	41.51	54
$\beta_2 = 0.35$	5	48.9	54
	10	46.08	54

$\alpha = 0.3, \beta' = 0.8$
 $\varepsilon' = 10^{-3}$

3. Choix de ϵ' , valeur initiale de ϵ

est le plus important :

Pour $\epsilon'_1 = 10^{-2}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon'_2 = 10^{-3} \end{array} \right.$, tous les autres paramètres étant égaux, les nombres d'itérations pour atteindre le minimum peuvent différer énormément (dans les exemples de 18 et 33)

En fait pour ϵ'_1 , on fait parfois intervenir des contraintes pas suffisamment < 0 , et f_2 intervient beaucoup plus tôt dans les programmes linéaires, ce qui donne une direction de moins forte pente pour f_0 .

Exemple: Soient z_0'' (dans 1.) le point initial.

Si $\alpha = 0.3$, $\beta' = 0.8$, $k = 10$.

Pour $\epsilon' = 10^{-1}$ - Nombre d'itérations: 102 Temps de calcul (+impressions) 73.4

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon' = 10^{-2} \end{array} \right.$ - Nombre d'itérations: 68 Temps de calcul (+impressions) 55.07

Si $\alpha = 0.3$, $\beta' = 0.3$, $k = 7$

Pour $\epsilon' = 10^{-1}$: 82 itérations Temps: 58.6s

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon' = 10^{-3} \end{array} \right.$: 64 itérations Temps: 46.9s.

La différence entre les nombres d'itérations est ici de 18; dans le 1^{er} cas, elle est de 33.

Le choix de β' influence aussi la vitesse des calculs.

Pour $\beta' = 0.3$ le temps de calcul est beaucoup moins grand que pour $\beta' = 0.8$.

Dans le 1^{er} cas la suite $\{z_i\}$ décroît plus rapidement et le nombre de programmes linéaires à tester diminue.

Quant à α (décroissance sur test de \hat{h}_ε^0)

pour $\alpha = 0.3$ le temps de calcul (et impression) était légèrement diminué (4 secondes) par rapport à la valeur $\alpha = 0.8$.

4. Choix de la précision exigée.

Le choix de ε'' semble être très important.

Soit $\varepsilon'' = 10^{-5}$

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{testh} = 10^{-6} \\ \text{ou } \varepsilon'', \text{ testh tel que l'algorithme} \\ \text{arrête...} \end{array} \right. \Leftrightarrow \hat{h}_{\varepsilon''}^0 (z_1 \geq \text{testh})$

(ε'' valeur approximée de $\varepsilon = 0$)

testh : approximation de z_{10} dans test : $\hat{h}_\varepsilon^0 (z_1 = 0?)$

Soit $\varepsilon'' = 10^{-4}$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{testh} = 10^{-4} \end{array} \right.$

Tous les autres paramètres étant égaux

le test (a) nécessite 54 itérations

le test (b) en nécessite 35.

Et la différence de précision au niveau de z_0 se situe à la 5^{ème} décimale.

les 20 dernières itérations progressent extrêmement lentement : elles sont une investigation au voisinage

du minimum dépendant de $\nabla f^0(z_i)$ et $\nabla f^2(z_i)$
 (f^2 est la seule contrainte active au minimum)

Itérations	$\tilde{h}_\varepsilon(z_i)$	∇f^0	∇f^2
38	$\begin{pmatrix} 10^{-3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.6 \\ -2.9 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.5 \\ -5 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$
54	$\begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1 \\ -3 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.5 \\ -5 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$

On voit donc que la différence entre $\nabla f^0(z_{38})$ et $\nabla f^0(z_{54})$ et la différence entre $\nabla f^2(z_{38})$ et $\nabla f^2(z_{54})$ se situe au niveau de la 1^{ère} composante:

selon la 2^e composante la progression donnée par le programme linéaire est maximale (= 1, or on a:

$|h_i| \leq 1, i \in \{1, \dots, n\}$, car $\nabla f^0(z_i)$ et $\nabla f^2(z_i)$ ont la deuxième composante de même signe, tandis que les premières composantes sont de signes différents, ce qui exige des valeurs infinitésimales pour $\tilde{h}_\varepsilon(z_i)$)

Point optimal $\|h_\varepsilon\| = 10^{-5}$ et $\|esth\| = 10^{-6}$

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 0.26795 \\ 0.71876 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$f^0(\hat{z}) = 1.14623$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1(\hat{z}) = -0.73204 \\ f^2(\hat{z}) = -0.35630 \\ f^3(\hat{z}) = -0.19615 \end{array} \right.$$

Un autre exemple a aussi été testé :

$$\min f^0 = x_1^2 + x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ f^2(x) = x_1 + x_2 + 1 \end{array} \right.$$

L'optimum $(0, -3)$ était vite atteint; in, aussi, toutes
dijk l'atteignant plus rapidement; in, aussi une valeur
plus grande de ε' , faisait perdre du temps.

Les plus grands écarts entre les nombres d'itérations
pour atteindre l'optimum dépendaient du choix du
point initial.

(Tous les paramètres étant égaux :

Avec le point initial $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, l'optimum est atteint en 13 itér.

Avec le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, en 9 itérations.

Avec le point $\begin{pmatrix} -2.9 \\ 0 \end{pmatrix}$ en 24 itérations.

Conclusion

La vitesse de convergence des méthodes de directions admissibles avec "ε - procédure" est surtout guidée par la suite $\{\epsilon_i\}$, principalement par sa valeur initiale. Du point de vue des calculs, le choix des paramètres de précision est très important.

Les exemples considérés ne rencontraient pas l'inconvénient de la méthode de Zoutendijk : ils n'ont donc montré, ni l'avantage de Polak, ni du contraire Zoutendijk - Polak.

Nous avons adapté la méthode des directions admissibles en essayant de tirer parti des contraintes affines. Mais, nous n'avons pas eu le temps de voir son efficacité, en pratique : par exemple, en contrôle optimal où souvent de nombreuses contraintes sont affines (principalement : des bornes sur les variables).

Nous avons montré la convergence de la méthode avec une procédure unidimensionnelle : celle de Armijo : les résultats auraient-ils été fortement différents avec une autre méthode ?

Nous avons étudié la méthode avec des approximations linéaires, il serait peut-être intéressant de voir dans quelle mesure la convergence est modifiée avec des approximations quadratiques.

C SINE
 C *****
 C *****
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C **
 C *****
 C *****

MINIMISATION D'UNE FONCTION NON LINEAIRE
 AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

ZOUTENDIJK - POLAK

P.N.L. :

MINIMISER $F_0(Z_1, \dots, Z_N)$
 AVEC $F_i(Z_1, \dots, Z_N) < 0$, $i=1, \dots, MPRINC$

 * DONNEES *

ALPHA : PAS DE DECROISSANCE SUR TEST DE HO
 EPRR : PAS DE DECROISSANCE DE EPSILON
 BSEC : PAS DE ARMIJO
 EPRR : EPSILON DE DEPART
 EPSE : VALEUR MINIMALE DE EPSILON
 IK : REMISE DE EPSILON A EPRR TOUTES LES IK ITERATIONS
 (EN PARTICULIER : IK = 1 : POLAK
 IK < 0 : ZOUTENDIJK)
 TESTH : SI $H_0(EPSE, Z) > -TESTH$: Z ACCEPTE
 MPRINC : NOMBRE DE CONTRAINTES
 NAF : NOMBRE DE CONTRAINTES AFFINES
 NAF : NOMBRE DE CONTRAINTES AFFINES
 IAF(I) : INDICE DE LA IEME CONTRAINTE AFFINE
 IPAR = 1 : IMPRESSION DES ETAPES DE ARMIJO
 ISIM = 1 : IMPRESSION DES ETAPES DU SIMPLEXE
 POINT INITIAL :
 BORDIR : BORNES SUR LES VARIABLES DU P.L. : $H_i(I) < BORDIR$


```
INTEGER G,W,E
IMPLICIT REAL*8(A,D,F,O,P,Q,S,T,U,V,X,Y,Z)
REAL*8 EPSE1
REAL*8 EPPR,EPSE,EPSEBAR,BEPR,BSEC,EPSIL,HI,BE
REAL*8 F1,BORDIR
DIMENSION INDAC(5),INDAC1(5)
DIMENSION AS(15,60),A2(15),F(5),Z(5),HI(5),Z1(5),IAF(5)
DIMENSION DER0(5),DER(3,5)
COMMON BORDIR,E,G,W,M,NV
COMMON/ETIS/ISIM
EPSE1=1.D-04
DATA IC/0/
DATA EPPR,EPSE,IK/1.D-03,1.D-05,1/
MPRINC=2
DO 55 L=1,MPRINC
55 IAF(L)=0
NAF=3
IAF(1)=1
IAF(2)=2
IAF(3)=3
AL=3.D-01
IK=0
IPHAS=0
BORDIR=1.D0
Z(1)=0.D0
Z(2)=0.D0
Z(3)=0.D0
L=MPRINC+1
F(L)=-1.D-08
BEPR=0.3D0
IPAR=1
ISIM=1
BSEC=5.D-1
TESTH=1.D-06
PRINT 9000
PRINT 9999
PRINT 9001
PRINT 9002
PRINT 9999
PRINT 9003
PRINT 9999
PRINT 9004
IF(IK.LE.0)PRINT 7000
IF(IK.EQ.1)PRINT 7001
IF(IK.GT.1)PRINT 7002,IK
PRINT 9007,EPPR,EPSE
PRINT 9011,AL,TESTH
PRINT 9010,BEPR,BSEC
```



```

C
C   E=0      : NOMBRE DE CONTRAINTES D'EGALITE DU P.L.
C
C   E=0
20  ICC=0
    EPSIL=EPPR
    IEPS=0
    1  KL=0
      PRINT 3001,IC,ICC
C
C   N        : NOMBRE DE VARIABLES DU P.N.L.
C   (A DONNER ICI )
C
C   N=3
    DO 21 I=1,N
    PRINT 2002,I,Z(I)
21  Z1(I)=Z(I)
C
C   *****
C   NV=N+1   : NOMBRES DE VARIABLES DU P.L.
C   *****
C
C   NV=N+1
    IF(IPHAS.EQ.1)GOTO27
    KX=MPRINC+1
    CALL VALF(KL,KX,Z,HI,FO,F,FH)
C
C   *****
C   PT EN COURS EST-IL ADMISSIBLE ?
C   *****
C
C   QI=0.DO
    KL=0
    DO 18 I=1,MPRINC
    CALL VALF(KL,I,Z,HI,FO,F,FH)
    IF(F(I).GT.QI)QI=F(I)
18  CONTINUE
    IF(QI.GT.0.DO)GOTO24
    PRINT 3010
    IPHAS=1
C
C   *****
C   IPHAS = 1: RECHERCHE D'UN POINT STATIONNAIRE
C   IPHAS = 0: RECHERCHE D'UN POINT ADMISSIBLE
C   *****

```



```

27 KL=0
DO 101 L=1,N
DERO(L)=0.DO
DO 101 I=1,MPRINC
101 DER(I,L)=0.DO
CALL GRAD(KL,Z,DERO,DER)

```

```

C
C *****
C
C DEFINITION DU P.L. :
C -----
C
C CHANGEMENT DE VARIABLES SUIVANT :
C x1 = -H0
C XI = HI(I-1)+BORDIR
C ISA : INDICE D'UNE CONTRAINTE AFFINE :
C COEFFICIENT DE x1 =0
C -BORDIR < HI(I) < BORDIR
C OU :
C 0 < X(I+1) < 2*BORDIR
C
C INDAC EVITE DE CALCULER PLUSIEURS FOIS LA SOLUTION D'UN MEME
C PROGRAMME LINEAIRE
C
C *****

```

```

5 DO 73 I=1,MPRINC
INDAC(I)=0
73 INDAC1(I)=0
NA1=-1
NF=0
72 NA=0
PRINT 8000
PRINT 3003, EPSIL
PRINT 3012, EPPR, IEPS
PRINT 5002, F0
IND=1
DO 7 I=1,MPRINC
IF(NB.EQ.0)PRINT 2005,I,F(I)
OX=F(I)-QI+EPSIL
IF(OX)7,3,3
3 NA=NA+1
INDAC(NA)=I
7 CONTINUE
PRINT 6000

```

C


```

C *****
C
C NR = NA1      :
C MEMES CONTRAINTES EPSILON ACTIVES QUE POR LE P.L.PRECEDENT :
C
C DONC  : MEME HO, MEME H .
C NA = 0  : PAS DE CONTRAINTE EPSILON ACTIVE .
C
C G=0.    : NOMBRE DE CONTRAINTES > DU P.L.
C
C *****
C IF(NA.EQ.NA1)GOTO107
C NA1=NA
C G=0
C DO 2 I=1,15
C A2(I)=0.D0
C DO 2 J=1,60
2 AS(I,J)=0.D0
C
C *****
C
C CONTRAINTE CORRESPONDANT A FO
C
C *****
C
C AS(1,1)=1.D0
C IND=1
C DO 4 J=1,N
C JT=J+1
C AS(1,JT)=DERO(J)
4 A2(1)=A2(1)+AS(1,JT)*BORDIR
C
C *****
C
C CONT. DU P.L. CORRESPONDANT AUX CONT. EPSILON ACTIVES
C
C *****
C
C IF(NA.EQ.0)GOTO100
C DO 6 I=1,NA
C IND=IND+1
C ISA=INDAC(I)
C PRINT3004,ISA
C IF(NAF.EQ.0)GOTO56
C DO 54 K=1,NAF
54 IF(IAF(K).EQ.ISA)GOTO53
56 AS(IND,1)=1.D0
53 CALL GRAD(ISA,Z,DERO,DER)
C DO 6 J=1,N
C IS=J+1
C AS(IND,IS)=DER(ISA,J)
6 A2(IND)=A2(IND)+AS(IND,IS)*BORDIR

```


W11

```

C
C *****
C FORNES SUR DIRECTION DE DESCENTE
C *****
C
100 DO 28 I=1,N
    IND=IND+1
    IS=I+1
    AS(IND,IS)=1.D0
28  A2(IND)=2.D0*BORDIR
    IF(NA.EQ.0)PRINT6001
    L=IND
    M=L
C
C *****:
C M=L      : NOMBRE DE CONTRAINTES DU P.L. (TOUTES < )
C FONCTION ECONOMIQUE
C *****:
C
    IND=L+1
    AS(IND,1)=-1.D0
    PRINT 6004
    CALL SIMPLE(AS,L,HO,HI,A2)
    DO 60 I=1,N
60  PPINT 5000,I,HI(I)
C
C *****:
C TEST SUR HO(EPSILON)
C *****:
C
107  OC=AL*EPSIL
    IF(NB.EQ.1)PRINT 7003
    NE=1
    PRINT 6003,HO
    IF(EPSIL.EQ.EPSE)GOTO15
    OX=HO+OC
    PRINT 2003,OC,OX
    IF(HO+OC)8,8,9
8  PE=FSEC

```


(111)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

METHODE D'ARMIJO

```

ITESTE=0
IQ=1
FH=0.00
DO 99 I=1,N
99 FH=FH+DERO(I)*HI(I)
PRINT 2004,FH
PRINT 2000
11 IF(IPAR.EQ.1)PRINT2001,IQ,BE
DO 10 I=1,N
IF(IPAR.EQ.0)GOTO10
PRINT 2002,I,Z(I)
10 Z(I)=Z1(I)+BE*HI(I)
IF(IQ.GE.60)STOP
IF(IPHAS.EQ.0)GOTO12
KL=1
KX=0
CALL VALF(KL,KX,Z,HI,F1,F,FH)
IF(OX)52,19,19
52 OL=F1-F0-BE*FH/2.00
IF(IPAR.EQ.0)GOTO80
PRINT 3006,F1
PRINT 3002,OL
80 IF(OL)12,12,19
12 QI=0.
KL=0
DO 13 I=1,MPRINC
CALL VALF(KL,I,Z,HI,F0,F,FH)
IF(IPAR.EQ.1)PRINT 1000,I,F(I)
IF(F(I).LE.0.00)GOTO13
IF(IPHAS.EQ.1)GOTO19

```

C
C
C
C
C
C
C

IARM=1 : TESTER SI MAX DES CONTRAINTES POSITIVES A DIMINUE

```

IF(F(I).GE.Z1(N))GOTO19
QI=F(I)
13 CONTINUE
IF(IPHAS.EQ.0)GOTO23
GOTO 14
23 IF(QI)70,70,14
19 BE=BE*BSEC
IQ=IQ+1
GOTO 11
14 ICC=ICC+1
PRINT 6002,IQ

```


PRINT 6005

FO=F1

IC=IC+1

C
C
C
C
C
C
C

ITERATION TERMINEE

IF(ICC.EQ.IK)GOTO20

GOTO 1

9 IF(EPSIL-EPSE1)16,16,17

16 IF(ITESTE.EQ.1)GOTO17

EPSBAR=EPSIL

EPSIL=EPSE

171 DO 175 I=1,NA

175 INDAC1(I)=INDAC(I)

NA1=NA

GOTO 72

15 IF(-HO.LE.TESTH)GOTO50

EPSIL=BEPR*EPSBAR

IEPS=IEPS+1

ITESTF=1

C
C
C
C
C
C
C

ITESTE =1 : P.L.(EPSE,Z) A DEJA ETE CALCULE

SINON ITESTE = 0

GOTO 171

17 EPSIL=BEPR*EPSIL

IEPS=IEPS+1

GOTO 171

70 PRINT 3010

GOTO 14

C
C
C
C
C
C

POINT NON ADMISSIBLE : DIMENSION DU P.L. VARIE

24 NV=NV+1

N=N+1

Z1(N)=QI

Z(N)=QI

DERO(N)=1.DO

DO 31 I=1,MPRINC

31 DER(I,N)=-1.DO

PRINT 2006

PRINT 2007,QI

GOTO 5

50 PRINT 3009,TESTH

PRINT 3013

PRINT 3014

PRINT 3011

PRINT 3014

PRINT 3013


```

1000 FORMAT(30X,'F',I2,'=' ,D20.10)
2000 FORMAT(/1X,'ARMIJO'/1X,6(1H-)/)
2001 FORMAT(/1X,'BETA**',I2,'=' ,D20.10/)
2002 FORMAT(1X,'* 7(' ,I2,') = ' ,D20.10)
2003 FORMAT(/1X,'AL * EPSIL      = ' ,D20.10/1X,'HO + AL * EPSIL = '
1D20.10//)
2004 FORMAT(1X,'<GRAD.F(Z),H> = ' ,D20.10/1X,15(1H-)/)
2005 FORMAT(1X,'* F ' ,I2,'=' ,D20.10)
2006 FORMAT(/1X,'POINT NON ADMISSIBLE')
2007 FORMAT(1X,'MAX DES CONTRAINTES >0' ,D20.10)
3001 FORMAT(1H1,'I T E R A T I O N : ' ,I2,///1X,
123(1H=),///1X,'ICC = ' ,I2/)
3002 FORMAT(/1X,'F1-F0-BE*FH/2 = ' ,D20.10)
3003 FORMAT(/1X,'EPSIL = ' ,D20.10)
3004 FORMAT(/1X,'F ' ,I2)
3006 FORMAT(30X,'F0 = ' ,D20.10)
3009 FORMAT(/1X,'HO A ATTEINT LA PRECISION VOULUE : ' ,D20.10//)
3010 FORMAT(1X,'LE DERNIER POINT CITE EST UN PT DE DEPART ADMISSIBLE')
3011 FORMAT(1X,1H*,5X,'LE DERNIER POINT CITE EST STATIONNAIRE *')
3012 FORMAT(1H+,40X,'(EPSIL = ' ,D20.10,' *(BEPR** ' ,I2,'))')
3013 FORMAT(1X,50(1H*))
3014 FORMAT(1X,1H*,48X,1H*)
5000 FORMAT(1X,'H',I2,'=' ,D20.10)
5002 FORMAT(/1X,'* F 0=' ,D20.10)
6000 FORMAT(/1X,'CONTRAINTES EPSILON ACTIVES : ' ,/1X,29(1H-))
6001 FORMAT(30X,'AUCUNE'//)
6002 FORMAT(1X,'NOMBRE D'ITERATIONS : ' ,I2)
6004 FORMAT(/1X,'RESULTATS DU SIMPLEXE : ' /1X,23(1H-)/)
6003 FORMAT(/1X,'H 0 = ' ,D20.10)
6005 FORMAT(1X,128(1H*))
7000 FORMAT(/1X,'*PAS DE REMISE A EPSILON ZERO : ' //41X,'ZOUTENDIJK'//
141X,10(1H=)//)
7001 FORMAT(/1X,'*REMISE A EPSILON ZERO TOUTES LES ITERATIONS : ' ,//41
1X,'POLAK'//41X,5(1H=)//)
7002 FORMAT(/1X,'*REMISE A EPSILON ZERO TOUTES LES ' ,I2,' ITERATIONS *
1'//)
7003 FORMAT(31X,'LES MEMES QUE POUR LA VALEUR DE EPSILON PRECEDENT'//)
8000 FORMAT(/21X,4(5H====,4X)//)
9000 FORMAT(1H1,70(1H*)/1X,2H**,66X,2H**)
9001 FORMAT(1X,2H**,20X,'MINIMISATION NON LINEAIRE',21X,2H**)
9002 FORMAT(1X,2H**,20X,'SOUS CONTRAINTES NON LINEAIRES',16X,2H**)
9003 FORMAT(1X,2H**,20X,'ZOUTENDIJK-POLAK',30X,2H**)
9004 FORMAT(1X,70(1H*)//)
9007 FORMAT(1X,'*EPSILON ZERO = ' ,D20.10/
11X,'*EPSILON MINIMUM = ' ,D20.10)
9999 FORMAT(1X,2H**,66X,2H**)
9010 FORMAT(/1X,'*PAS DE DECROISSANCE DE EPSILON : ' ,D20.10/
11X,'*PAS DE ARMIJO : ' ,D20.10)
9011 FORMAT(1X,'*PAS DE DECROISSANCE SUR TEST DE H0 : ' ,D20.10/
11X,'*VALEUR TEST DE H0 A ATTEINDRE : ' ,D20.10//)
STOP
END

```


SIMPLEX E

(X)

```

SUBROUTINE SIMPLE(A,L,HC,HI,A2)
INTEGER B,C,H,R,W
INTEGER E,G
REAL*8A,D,HO,HI,BORDIR,A2
DIMENSION A(10,1),HI(1),A2(1),IA(7)
COMMON BORDIR,E,G,W,M,N
COMMON/ETIS/ISIM
G=99999.

```

```

IF(ISIM.EQ.1)PRINT 1014
H=0

```

```

DO 1 I=1,M

```

```

IA(I)=0

```

```

IF(ISIM.NE.1)GOTO60

```

```

PRINT 1002,(A(I,J),J=1,N)

```

```

PRINT 1017,A2(I)

```

```

1 CONTINUE

```

```

60 W=1+1

```

```

C *****
C DEUXIEME MEMBRE RENDU >0
C *****

```

```

IF(L.EQ.0)GOTO129

```

```

DO 125 I=1,L

```

```

126 IF(A2(I).GE.0.D0)GOTO125

```

```

LTR=L+E

```

```

ALT=A2(L)

```

```

AIT=A2(I)

```

```

A2(L)=A2(LTR)

```

```

A2(I)=ALT

```

```

A2(LTR)=-AIT

```

```

DO 123 J=1,5

```

```

ALT=A(I,J)

```

```

AIT=A(I,J)

```

```

A(L,J)=A(LTR,J)

```

```

A(I,J)=ALT

```

```

123 A(LTR,J)=-AIT

```

```

L=L-1

```

```

G=G+1

```

```

GOTO 126

```

```

125 CONTINUE

```

```

129 IF(E.EQ.0)GOTO40

```

```

IL=L+1

```

```

IE=E+L

```

```

DO 127 I=IL,IE

```

```

IF(A2(I).GE.0.D0)GOTO127

```

```

DO 128 J=1,5

```

```

128 A(I,J)=-A(I,J)

```

```

A2(I)=-A2(I)

```

```

127 CONTINUE

```

```

40 B=N+G+1+1

```

```

DO 2 I=1,M

```



```

2 A(I,B)=A2(I)
  IF(G)500,501,5
C *****
C INTRODUCTION DES VARIABLES D'ECARTS ET ARTIFICIELLES
C *****
5 IT=L+E+1
  DO 6 K=IT,M
  KB=K-L-E+N
6 A(K,KB)=-1.
C *****
C METHODE DES 2 PHASES
C *****
7 DO 4 K=1,M
  IBI=N+G+K
  IA(K)=N+G+K
4 A(K,IBI)=1.
  IF((E+G).EQ.0)GOTO1230
  W=W+1
  Q=0.
  IM=L+1
  IT=N+G
  DO 10 J=1,IT
  S=0.
  DO 8 I=IM,M
8 S=S+A(I,J)
  A(W,J)=-S
C *****
C RECHERCHE DU MINIMUM DES COEF. DE LA FONCTION INTERMEDIAIRE
C *****
  IF(A(W,J)-Q)9,9,10
9 G=A(W,J)
  C=J
10 CONTINUE
  S=0.
  DO 11 I=IM,M
11 S=S+A(I,B)
  A(W,B)=-S
12 IF(ISIM.NE.1)GOTO61
  PRINT 1009
  PRINT 1004,M,N,L,E,G
  PRINT 1003
  DO 13 I=1,W
13 PRINT 1002,(A(I,J),J=1,B)
61 IF(Q.EQ.0.0)GOTO1230
900 IF(Q)1410,1330,1410
920 H=H+1
9000 FORMAT(/1X,'ITERATION : ',I2,/1X,14(1H*))
  Q=1E8
  R=-1

```



```

DO 14 I=1,M
IF(A(I,C))14,14,15
15 D=A(I,B)/A(I,C)
IF(D-Q)17,17,14
17 Q=D
R=I
14 CONTINUE
IF(R+1)18,18,19
18 PRINT 1005
RETURN
19 P=A(R,C)
IA(R)=C
2006 FORMAT(1X,'PIVOT : ',D20.8,4X,'LIGNE : ',I2,3X,'COL. : ',I2,')
DO 20 J=1,B
20 A(R,J)=A(R,J)/P
DO 21 I=1,W
IF(I-R)22,21,22
22 DO 555 J=1,B
IF(J-C)23,555,23
23 A(I,J)=A(I,J)-A(R,J)*A(I,C)
IF(DABS(A(I,J)).LE.1.D-05)A(I,J)=0.D0
555 CONTINUE
21 CONTINUE
DO 24 I=1,W
24 A(I,C)=0.
A(R,C)=1.
C *****
C RECHERCHE COL. PIVOT
C *****
1230 Q=0.
IS=N+G+L
DO 25 J=1,IS
IF(A(W,J)-Q)26,26,25
26 Q=A(W,J)
C=J
25 CONTINUE
GOTO 900
1330 IF(W-M-1)1340,1410,1340
1340 IW=W
IF(DABS(A(IW,B)).LE.1.D-06)GOTO1353
PRINT 1008
STOP
1353 DO 42 I=1,M
IN=N+G+L
IF(IA(I)-IN)42,42,43
43 DO 44 J=1,B
44 A(I,J)=0.
42 CONTINUE

```



```
2005 FORMAT(1X,'FIN DE LA METHODE DES 2 PHASES'//)
W=W-1
GOTO1230
1410 IF(ISIM.EQ.0)GOTO404
PRINT 9000,H
PRINT 2006,P,R,C
DO 666 I=1,M
666 PRINT 2001,IA(I),(A(I,J),J=1,B)
2001 FORMAT(3X,I2,8D15.4,/1X,4D15.4)
IF(W.EQ.M+1)GOTO402
IW=W-1
PRINT 2003,(A(IW,J),J=1,B)
PRINT 2002,(A(W,J),J=1,B)
IF(Q.NE.0.)GOTO920
PRINT 2005
W=W-1
GOTO 1230
402 PRINT 2003,(A(W,J),J=1,B)
404 IF(Q.NE.0)GOTO920
HO=-A(W,B)
IER1=0
IER2=0
IER3=0
DO 667 I=1,M
JTR=IA(I)-1
IF(JTR.EQ.0)GOTO667
IF(JTR.LE.N)GOTO670
GOTO 667
670 GOTO(665,668,669),JTR
665 HI(1)=A(I,B)-BORDIR
IER1=1
GOTO 667
668 HI(2)=A(I,B)-BORDIR
IER2=1
GOTO 667
669 HI(3)=A(I,B)-BORDIR
IER3=1
667 CONTINUE
IF(IER1.EQ.0)HI(1)=-BORDIR
IF(IER2.EQ.0)HI(2)=-BORDIR
IF(IER3.EQ.0)HI(3)=-BORDIR
IF(ISIM.NE.1)RETURN
PRINT 1013
RETURN
500 PRINT 4000
RETURN
501 IF(E)502,7,7
502 PRINT 4001
RETURN
2003 FORMAT(3X,'-Z',8D15.4,/1X,4D15.4)
```



```
2002 FORMAT(3X,'-W',8D15.4,/1X,4D15.4)
1002 FORMAT(1X,8D15.4,/1X,4D15.4)
1003 FORMAT(1X,'MATRICE DE DEPART',/1X,17(1H*)//)
1004 FORMAT(1X,'M = ',I2,'      N = ',I2,'      L = ',I2,'      E = ',I2,
1'      G = ',I2,//)
1005 FORMAT(1X,'SOLUTION NON BORNEE')
1020 FORMAT(1X,'VARIABLE      VALEUR')
1007 FORMAT(5X,I2,5X,D20.8)
1008 FORMAT(1X,'SYSTEME NON COMPATIBLE')
1009 FORMAT(/1X,'METHODE DES 2 PHASES')
1013 FORMAT(///1X,'LE DERNIER POINT CITE EST LE MINIMUM')
1014 FORMAT(/21X,'SIMPLEXE'/21X,8(1H*)/1X,'DONNEES'//)
1017 FORMAT(1H+,80X,D20.8)
4000 FORMAT(1X,'ERREUR : G < 0')
4001 FORMAT(1X,'ERREUR : E < 0')
1030 FORMAT(1X,'VARIABLES DUALES')
END
```



```

SUBROUTINE VALF(I,J,Z,HI,FO,F,FH)
DIMENSION Z(2),F(5),HI(5)
REAL*8 Z,HI,FO,F,FH
REAL*8 D

```

```

C *****
C I = 1 : FO
C I=2 : FO,FH
C J=K : FK
C J=4 : F1,F2,F3
C *****
IF((I.EQ.1).OR.(I.EQ.2))GOTO1
GOTO(11,12,13,1),J
1 D=DEXP(Z(1)*Z(1)+5*Z(2)*Z(2))
FO=D+Z(1)*Z(1)+80.DO*Z(2)*Z(2)
IF(I.EQ.2)GOTO4
IF(J.EQ.0)RETURN
GOTO(11,12,13,11),J
11 F(1)=Z(1)+2.DO*Z(2)-1.DO
IF(J.EQ.1)RETURN
12 F(2)=Z(1)*Z(1)+Z(2)*Z(2)-4.DO*Z(1)+1.DO
IF(J.EQ.2)RETURN
13 F(3)=Z(1)*Z(1)+Z(2)*Z(2)-Z(1)-Z(2)
IF(J.EQ.3)RETURN
4 FH=(D+1.DO)*2*Z(1)*HI(1)+10.*Z(2)*(D+16.DO)*HI(2)
RETURN
END

```



```

SUBROUTINE GRAD(I,Z,DERO,DER)
DIMENSION DERO(1),Z(1),DER(3,5)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

C
C *****
C
C I=K : GRADFK
C
C DERO(1) : DERIVEE DE F0 PAR RAPPORT A LA IEME VARIABLE
C DER(I,J) : DERIVEE DE F1 PAR RAPPORT A LA IEME VARIABLE
C
C *****
C
I=I+1
GO TO (1,2,3,4,1),J
1 ZT=Z(1)*Z(1)+5.*Z(2)*Z(2)
ZT=DEXP(ZT)
DERO(1)=2.*Z(1)*(ZT+1.)
DER(2)=15.*Z(2)*(ZT+16.)
K=0
PRINT 1000,K,DERO(1),DERO(2)
IF(J.EQ.1)RETURN
2 DER(1,1)=1.
DER(1,2)=2.
K=1
IF(J.EQ.2)RETURN
3 DER(2,1)=2.*Z(1)-4.
DER(2,2)=2.*Z(2)
IF(J.EQ.3)RETURN
4 DER(3,1)=2.*Z(1)-1.
DER(3,2)=2.*Z(2)-1.
1000 FORMAT(1X,'GRADIENT DE F',I2,(2D20.10/16X))
RETURN
END

```


A rendre: théorèmes sur les fonctions continues.

(A1) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et S un compact de \mathbb{R}^n .
Si f est continue,

Alors: $\forall z' \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0, \exists \varepsilon' > 0, \exists \lambda^m > 0$ tq.

$$\forall z \in B(z', \varepsilon'), |f(z + \lambda h) - f(z)| \leq \delta, \forall \lambda \in [0, \lambda^m]$$

(A2) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et S un compact de \mathbb{R}^n .
Si f est continûment différentiable,

Alors: $\forall z' \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \exists \lambda^m > 0$ tq.

$$\forall z \in B(z', \varepsilon), |\nabla f(z + \lambda h) - \nabla f(z)| \leq \delta, \forall \lambda \in [0, \lambda^m]$$

(A3) Soit $\psi: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ et S un compact de \mathbb{R}^q .
Si ψ est continue,

Alors: $\theta: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$z \mapsto \theta(z) = \min \{ \psi(z, h) \mid h \in S \} \text{ est continue}$$

(A4) Soit $f^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, m$: fonctions continues

Alors la fonction $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$z \mapsto H(z) = \max \{ f^i(z) \mid i \in \{1, \dots, m\} \}$$

est continue.

(Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans [P]).

References.

- [C] M. D. Canon, C. D. Cullum and E. Polak.
"Theory of Optimal Control and Mathematical Programming".
Mac Graw Hill, New York, 1970.
- [F] M. Frank and Wolfe
"An Algorithmic for quadratic programming".
Naval Research Logistics Quart. 3, 195-1101. 1956
- [H] David Himmelblau
"Applied Nonlinear Programming".
Mac Graw Hill. 1972.
- [P] E. Polak
"Computational Methods in Optimization.
A unified approach".
Academic Press, New York. 1971.
- [Z1] Willard I. Zangwill.
"Nonlinear Programming (A unified approach)".
1969
- [Z2] Zoutendijk
"Methods of feasible directions".
Elsevier. Amsterdam. 1960.