THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Quelques questions d'arrêt optimal rencontrées dans les jeux séquentiels

Relecom, Charles

Award date:
1975

Awarding institution:
Universite de Namur

Quelques questions d'arrêt optimal rencontrées dans les jeux séquentiels

Relecom Charles

Je remercie monsieur André pour la formation générale dont j'ai bénéficié grâce à ce travail.

Contenu

Introduction générale

- Un jeu est une suite de parties qui dure aussi longtemps qu'on le désire. Un certain volume d'information est disponible à chaque instant. Au cours des temps, cette information s'accroît et c'est sur cette base que les joueurs prennent leur décision d'arrêter ou de continuer le jeu.

- Il y a d'abord le jeu concernant un joueur pouvant le stopper lorsqu'il le désire. Le problème pour lui est de se retirer d'une façon optimale, c'est à dire avec une espérance de gain maximale.

- Ensuite se présente le jeu où deux joueurs sont opposés. Le payement s'effectuera d'un joueur à l'autre. Dans ce cas, le jeu s'arrête au moment où l'un des deux joueurs décide de se retirer avec éventuellement un résultat différent suivant le joueur qui est responsable de l'arrêt. Ils doivent donc tous deux se trouver une règle d'arrêt optimale.

Est-ce possible !

- Le jeu à un joueur en se limitant aux stratégies (ou temps d'arrêt) finies est un problème bien connu sous le nom de " problème de Snell ". Ce problème est traité principalement par J. L. Snell (REF. N° 1 voir bibliographie en fin de texte), par E. B. Dynkin (REF. N° 2) et plus largement ainsi que pour les applications par Y. S. Chow et H. Robbins.

se trouvant en référence numéro 3.

- Il apparaîtra ici sous une forme modifiée, c'est à dire en tenant compte des temps d'arrêt infinis comme un cas particulier du problème à deuse joueurs.

- Au sujet du problème à deuse joueurs, les résultats sont principalement réunis dans les ouvrages des auteurs suivant: E. B. Dynkin (REF. N° 4), E. B. FRID (REF. N° 5), S. M. Gusein - Zade (REF. N° 6), C. André (REF. N^{os} 7 et 8).

- Les travause effectués dans ce mémoire développent certaines questions laissées en suspend dans la référence n° 8, clarifient certaines démonstrations et précisent quelques situations.

Quelques définitions

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{B}_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_\infty$ étant la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les $\mathcal{B}_n$ pour n fini.

- Une suite $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sera dite adaptée relativement à la suite de sous-tribus $(\mathcal{B}_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ si et seulement si
$\forall n, \; n \in \overline{\mathbb{N}} \qquad X_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable

- Nous noterons $E^{\mathcal{B}}(X)$ toute variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable qui serait une espérance conditionnelle de la variable aléatoire X par rapport à la sous-tribu $\mathcal{B}$.

- Chaque sous-tribu $\mathcal{B}_n$ est la collection de tous les événements observables à l'instant n. L'observation de tous ces événements constitue l'information commune aux deux joueurs sur base de laquelle, ils peuvent à chaque instant n décider d'arrêter ou de continuer le jeu. Les joueurs gardent à chaque moment en mémoire toutes les informations antérieures, ce qui se traduit mathématiquement en prenant la suite $(\mathcal{B}_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ croissante. Ces considérations nous amènent à définir une règle d'arrêt ou temps d'arrêt. Soit donc σ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, nous dirons qu'elle est un temps d'arrêt si et seulement si l'événement $\{\sigma = n\} \in \mathcal{B}_n \quad \forall n, \; n \in \mathbb{N}$.

– Cette définition montre bien qu'un temps d'arrêt est réellement une politique de jeu. Nous dirons aussi stratégie au lieu de temps d'arrêt.

– Nous définirons également une variable aléatoire Y_σ relativement à un temps d'arrêt σ et à une suite adaptée $(Y_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ de la manière suivante

$$Y_\sigma(w) = Y_n(w) \text{ sur } \{\sigma = n\} \qquad \forall n,\ n \in \overline{\mathbb{N}}$$

ou ce qui est équivalent

$$Y_\sigma(w) = Y_{\sigma(w)}(w)$$

on peut donc écrire

$$Y_\sigma = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} Y_n 1_{\{\sigma = n\}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n 1_{\{\sigma = n\}} + Y_\infty 1_{\{\sigma = \infty\}}$$

Enoncé du problème

– Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et deux processus adaptés $(U_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ et $(V_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ que nous noterons respectivement U et V. Considérons également une suite croissante $(\mathcal{B}_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Nous nous occupons uniquement ici du problème à deux joueurs, nous conviendrons de numéroter les joueurs, soient donc le joueur I et le joueur II.

– Supposons que le joueur I ait choisi la stratégie σ et le joueur II la stratégie τ et si l'évolution du jeu (w) est telle que le temps d'arrêt $\sigma(w)$ du joueur I est antérieur au temps d'arrêt du joueur II, alors le joueur I payera à II la somme $U_\sigma(w)$.

Au contraire, si pour l'évolution du jeu (w), la stra-
-tégie $\sigma(w)$ est strictement postérieure à la stratégie $\tau(w)$ du second joueur, le joueur I versera au joueur II la somme $V_\tau(w)$.

La FONCTION DE PAYEMENT du joueur I vers le joueur II associée à la stratégie σ du joueur I et à la stra-
-tégie τ du joueur II est donc entièrement décrite par la variable aléatoire notée $R(\sigma,\tau)$ et définie de la manière suivante :

$$R(\sigma,\tau) = U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\sigma > \tau\}} \qquad \text{a.1}$$

La fonction de payement du second joueur vers le pre-
-mier est évidemment $-R(\sigma,\tau)$. La variable aléatoire V_∞ n'intervenant pas dans la définition de $R(\sigma,\tau)$, je la prendrai égale à la variable aléatoire U_∞.

Je ferai aussi remarquer au lecteur qu'aucune hypo-
-thèse n'est faite à propos du signe des processus U et V. Nous supposerons que la variable U_∞ est inté-
-grable, que le processus U est minoré par une martingale uniformément intégrable et que V est majoré par une telle martingale de la manière suivante :

$$U_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(Z') \quad \text{p.s. avec } Z' \in L^1(\Omega)$$

$$V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(Z) \quad \text{p.s. avec } Z \in L^1(\Omega) \qquad \text{a.2}$$

Nous supposerons également que Z et Z' sont $\mathcal{B}_\infty$ mesurable.

Je prendrai comme hypothèse de travail dans les développements ultérieurs que le processus U majore le processus V, c'est à dire que

$$U_n \geq V_n \qquad p.s. \qquad \forall n, \ n \in \mathbb{N}$$

Cette hypothèse ne <u>nuit en rien à la généralité</u> du problème. Nous montrerons au moment indiqué que l'on peut se ramener au cas général.

– Mettons-nous momentanément dans la position du joueur I. Pour tout déroulement aléatoire w du jeu, son but est de gagner le jeu, c'est à dire dans notre contexte de payer le moins possible au joueur II. Comment minimiser la fonction de payement $R(\sigma, \tau)(w)$. La politique de jeu τ étant choisie par le joueur II, il ne lui reste plus que le choix de sa propre technique σ pour atteindre son but. (en général il ne connait pas la stratégie choisie par le joueur II). Le problème posé en ces termes risque de l'amener à prendre comme politique de jeu une variable aléatoire σ qui ne serait pas un temps d'arrêt. C'est la raison pour laquelle il vaut mieux considérer le problème en moyenne. Nous prendrons donc l'espérance mathématique de la fonction de payement, soit $E(R(\sigma, \tau))$. Pour des raisons de commodité, appelons A^{I} l'ensemble des temps d'arrêt σ pour lesquels il existe au moins un temps d'arrêt τ pour que la variable $R(\sigma, \tau)$ soit quasi-intégrable et A^{II} l'ensemble des temps d'arrêt τ pour lesquels il existe au moins un temps d'arrêt σ tel que $R(\sigma, \tau)$ soit quasi-intégrable.

Supposons que le joueur I se fixe une stratégie σ_F ($\sigma_F \in A^I$), la quantité $\sup_{\tau \in A^{II}} E(R(\sigma_F, \tau))$ représente ce qui peut lui arriver de pire en ayant fait le choix σ_F. Un choix prudent consisterait à choisir comme stratégie celle qui minimiserait toutes ces quantités. Ceci nous amène à prendre en considération la valeur

$$\inf_{\sigma \in A^I} \sup_{\tau \in A^{II}} E(R(\sigma, \tau))$$

Rien à priori, nous indique que le joueur I soit en possession d'une règle d'arrêt σ telle que pour toute autre stratégie τ du second joueur, la quantité $E(R(\sigma, \tau))$ ne soit égale à la valeur ci-dessus, ni même ne s'en rapproche. Notre problème sera justement de désigner de telles stratégies.

- Examinons maintenant le point de vue du joueur II. Etant donné que les jeux que nous considérons ont comme caractéristique que les payements s'effectuent uniquement entre les joueurs, il est équivalent pour le joueur II de maximiser ce qu'il pourrait recevoir du joueur I ou de minimiser ses payements envers le joueur I. Supposons que le joueur II se fixe une stratégie τ_F appartenant à A^{II}. La quantité $\inf_{\sigma \in A^I} E(R(\sigma, \tau_F))$ représente la borne inférieure de ce qu'il pourrait encaisser. Un choix intelligent tiendrait à prendre une stratégie qui maximise ces quantités.

La valeur intéressante est donc ici :

$$\sup_{\tau \in A^{II}} \inf_{\sigma \in A^{I}} E(R(\sigma,\tau))$$

Un raisonnement similaire à celui effectué dans le point de vue du joueur I nous aurait amener à considérer la valeur intéressante suivante

$$-\inf_{\tau \in A^{II}} \sup_{\sigma \in A^{I}} E(-R(\sigma,\tau)) \quad \text{qui est}$$

évidemment égale à $\sup_{\tau \in A^{II}} \inf_{\sigma \in A^{I}} E(R(\sigma,\tau))$.

- Nous nous trouvons donc en face de deux valeurs intéressantes l'une pour le joueur I $\left(\inf_{\sigma \in A^{I}} \sup_{\tau \in A^{II}} E(R(\sigma,\tau))\right)$ appelée valeur supérieure du jeu et l'autre pour le joueur II $\left(\sup_{\tau \in A^{II}} \inf_{\sigma \in A^{I}} E(R(\sigma,\tau))\right)$ appelée valeur inférieure du jeu. Les deux valeurs représentent, si les joueurs sont prudents, ce qu'ils peuvent réaliser de mieux dans le jeu. Une inégalité entre ces deux valeurs traduirait dès le départ une situation défavorable pour les joueurs. Si il y a égalité, on appelle cette valeur la "VALEUR DU JEU". Un jeu où cette égalité est vérifiée est intéressant pour les deux joueurs.

Nous montrerons que les jeux tels que nous les envisageons font partie de la classe des jeux ayant une valeur et nous calculerons cette valeur, nous noterons la valeur d'un jeu W.

Il reste encore le problème des stratégies intéressantes pour les deux joueurs (dans les jeux où il existe une valeur du jeu). Nous tâcherons de trouver des stratégies ε- PRUDENTES c'est à dire ; une stratégie σ_ε ($\sigma_\varepsilon \in A^I$) et une stratégie τ_ε ($\tau_\varepsilon \in A^{II}$) telles que pour toutes autres stratégies $\sigma \in A^I$ et $\tau \in A^{II}$, on ait :

$$E(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon \leq W \leq E(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon$$

quand ε est strictement positif.
Dans le cas où ε est nul, on parle de stratégies prudentes.
L'analyse et la solution du problème reposent sur l'introduction de deux processus retraduisant toutes ces considérations à chaque instant n du jeu.

Section 1

Les deux processus annoncés et notés $\overline{W}$ et $\underline{W}$ sont définis par

$$\overline{W}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_n^{I}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau)) \right] \qquad a.3$$

$$\underline{W}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} \left[\operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_n^{I}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau)) \right] \qquad a.4$$

où $\forall n, n \in \mathbb{N}$ les bornes "inf" et "sup" sont prises sur les ensembles définis de la manière suivante : Λ_n^{I} est l'ensemble des temps d'arrêt σ presque sûrement plus grand ou égal à n pour lesquels il existe au moins un temps d'arrêt τ presque sûrement plus grand ou égal à n et tels que pour ces temps d'arrêt $R(\sigma, \tau)$ soit quasi-intégrable. De même Λ_n^{II} est l'ensemble des temps d'arrêt τ tels que $\tau \geq n$ presque sûrement et pour lesquels il existe au moins un temps d'arrêt σ ($\sigma \geq n$. p.s.) de telle manière que $R(\sigma, \tau)$ soit quasi-intégrable.

En général les Λ_n^{I} et Λ_n^{II} ne sont pas dénombrables et les bornes précédentes doivent donc être prises au sens de l'inégalité presque sûre. Le lemme ci-dessous explicite ce qu'il faut entendre par là. Avant cela, notons la signification intuitive de ces processus.

Analysons par exemple $\overline{W}_n$, $\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau))$ représente la borne supérieure des espérances conditionnelles que le joueur I pourrait payer au joueur II en ayant choisi la stratégie σ. Le joueur I doit donc tendre à minimiser toutes ces bornes inférieures. $\overline{W_n}$ est donc à l'instant n un "point de vue" prudent pour le joueur I (chaque joueur ayant décidé de jouer au moins jusqu'à l'instant n). Un raisonnement analogue peut s'appliquer pour $\underline{W_n}$ en ce qui concerne le joueur II. Venons-en au lemme annoncé :

Lemme 1

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ notre espace de probabilité, soit F une famille de fonctions réelles mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Je dis qu'il existe une et à une équivalence près une seule fonction mesurable $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

A) $g \geq f$ p.s. $\forall f$, $f \in F$

B) si h est une fonction mesurable telle que $h \geq f$ p.s. $\forall f \in F$ alors $h \geq g$ p.s.

Cette fonction qui est la borne supérieure de la famille F au sens de l'inégalité p.s. est notée $\operatorname{essup}(F)$.
- En outre il existe au moins une suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$ extraite de F telle que $\operatorname{essup}(F) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ p.s.
- Si la famille F est filtrante croissante, alors la suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$ peut être prise presque sûrement croissante et $\operatorname{essup}(F) = \lim_{n \to \infty} \uparrow f_n$ p.s.

Démonstration :

On a sur $\overline{\mathbb{R}}$ une structure d'ordre, comme ici seule cette structure nous intéresse, nous ramènerons les fonc-tions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ à des fonctions à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ par une bijection croissante φ : $\overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ (nous conservons donc le caractère de mesu-rabilité de nos fonctions)

- Soit J, la classe des sous-familles dénombrables de F. $\forall G$; $G \in J$ on prend la fonction $f_G = \sup_{f \in G} f$ qui est mesurable. Considérons $\alpha = \sup E(f_G)$ (1)

Cette borne est atteinte car si $(G_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite dans J telle que $E(f_{G_n}) \to \alpha$, alors $G^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \in J$ et $E(f_{G^*}) = E(\sup_{f \in G^*} f)$.

on a également

$$0 \leqslant \sup_{f \in G_n} f \leqslant \sup_{f \in G^*} f \Rightarrow E(\sup_{f \in G_n} f) \leqslant E(\sup_{f \in G^*} f).$$

$$E(f_{G_n}) \leqslant \sup_{f \in G_n} E(f_{G_n}) \leqslant E(\sup_{f \in G_n} f) \leqslant E(\sup_{f \in G^*} f) \leqslant \alpha$$

En passant à la limite on obtient $E(f_{G^*}) = \alpha$.

- Montrons que $g = f_{G^*}$ vérifie A et B. $\forall f \in F$, la fonction f_G correspondant à la sous famille dénombra-ble $G = G^* \cup \{f\}$ est égale à max (g, f). On a donc $\alpha = E(g) \leqslant E(g \vee f) \leqslant \alpha$. Or ceci n'est possible, puisque α est fini, que si $g = g \vee f$ p.s. $\Rightarrow$

$$f \leqslant g \quad \text{p.s.} \iff A.$$

- La condition B est évidente car on a $g = f_{G^*}$, soit h une fonction mesurable telle que $h \geqslant f$ p.s. $\forall f \in F$

$$\Rightarrow h \geqslant \sup_{f \in G^*} f = f_{G^*} = g$$

- Ordonnons G^* en une suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$

$$\text{esssup}(F) = f_{G^*} = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{p.s.}$$

- Si la famille F est filtrante croissante, c'est à dire si $\forall (f_1, f_2)$ couple de fonctions de F, il existe une troisième fonction f_3 de F majorant presque-sûrement les deux autres, alors il est possible de construire une suite presque-sûrement croissante $(f'_n, n \in \mathbb{N})$ dans F telle que $\lim_{n\to\infty} \uparrow f'_n = \text{ess sup}(F)$. En effet, prenons $f'_0 = f_0$ et prenons f'_{n+1} la fonction qui majore presque-sûrement les fonctions f'_n et f_{n+1}. On a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \lim_{n\to\infty} \uparrow f'_n$ mais comme $f'_n \leq \text{ess sup}(F)$ p.s. on arrive à

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \lim_{n\to\infty} \uparrow f'_n \leq \text{ess sup}(F) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

$$\Rightarrow \qquad \text{ess sup}(F) = \lim_{n\to\infty} \uparrow f'_n \quad \text{avec } \forall n, n \in \mathbb{N} \; f'_n \in F$$

C.Q.F.D.

Remarque 1

Bien que la borne essentielle corresponde à la borne supérieure (sauf sur les ensembles négligeables) pour les familles dénombrables de fonctions, il n'en est plus de même pour certaines familles non dénombrables.

Un lemme équivalent se démontre à propos d'un $\text{ess inf}(F)$, la démonstration est similaire.

Nous allons voir que les processus $\overline{W}$ et $\underline{W}$ ne sont en fait qu'un seul processus que nous noterons W et que nous caractériserons. Pour cela, il nous faut découvrir quelques propriétés relatives à $\overline{W}_n$ et à $\underline{W}_n$ toujours en supposant

$$U_n \geq V_n \quad \text{p.s.} \quad \forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Propriété 1.1 :

$$\overline{W}_n \leq U_n \quad p.s. \quad \forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Démonstration :

$$\overline{W}_n = \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} \left[\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \right] \leq \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(n,\tau)) \; p.s.$$

en employant la définition de $R(\sigma,\tau)$ a.1

$$= \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(U_n 1_{\{n \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\tau < n\}}) \quad (2)$$

- Étant donné que l'essentiel sup. ne porte que sur les temps d'arrêt τ plus grand ou égal à n p.s., on a $1_{\{\tau < n\}} = 0$ p.s. et $1_{\{\tau \geq n\}} = 1$ p.s. pour $\tau \in \Lambda_n^{II}$.
- Comme $(U_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est un processus adapté, U_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable, ce qui permet d'écrire :

$$(2) = \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(U_n) = U_n \quad p.s.$$

C. Q. F. D.

Propriété 1.2

$$\underline{W}_n \geq V_n \quad p.s. \quad \forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Démonstration :

$$\underline{W}_n = \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} \left[\underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \right] \geq \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,n)) \; p.s.$$

en développant $R(\sigma,\tau)$ suivant a.1

$$= \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq n\}} + V_n 1_{\{n < \sigma\}}) =$$

$$\underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma 1_{\{\sigma < n\}} + U_n 1_{\{\sigma = n\}} + V_n 1_{\{n < \sigma\}}) \quad (3)$$

or $U_n \geq V_n$ p.s. $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ $(U_\infty = V_\infty)$.

$\sigma \in \Lambda_n^{I} \Rightarrow 1_{\{\sigma < n\}} = 0$ p.s. De tout cela on tire que

$$(3) \geq \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(V_n 1_{\{\sigma = n\}} + V_n 1_{\{\sigma > n\}}) = \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(V_n)$$

mais $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ V_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable, on a

$$\underline{W_n} \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(V_n) = V_n$$

c.Q.F.D.

Propriété 1.3 :

$$\overline{W_n} \geqslant \underline{W_n} \quad p.s. \quad \forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$$

Démonstration :

$\overline{W_n} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} \left[\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau)) \right]$. Fixons-nous un temps d'arrêt $\sigma' \in \Lambda_n^{I}$ et soit $A_{\sigma'} = \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma', \tau))$

$$A_{\sigma'} \geqslant \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} \left[\underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau)) \right] = \underline{W_n}$$

Or $\overline{W_n} = \underset{\sigma' \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} A_{\sigma'}$ et donc par la propriété de la borne inférieure, on obtient

$$\overline{W_n} \geqslant \underline{W_n} \quad p.s. \qquad \overline{W_\infty} = \underline{W_\infty} = V_\infty$$

- En réunissant les propriétés 1.1, 1.2, 1.3

$$\boxed{U_n \geqslant \overline{W_n} \geqslant \underline{W_n} \geqslant V_n \quad p.s. \quad \forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}}$$

Pour pouvoir employer le lemme 1 dans le but de transformer les écritures de $\overline{W_n}$ et $\underline{W_n}$, nous allons montrer quelques propriétés.

Propriété 1.4 :

$\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$, $\forall \sigma, \sigma \in \Lambda_n^{I}$, la famille $\left(E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau))\right)_{\tau \in \Lambda_n^{II}}$ est filtrante croissante.

Démonstration :

Soit $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau_1))$ et $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau_2))$ $\sigma \in \Lambda_n^{I}$, $\tau_2 \in \Lambda_n^{II}$, $\tau_1 \in \Lambda_n^{II}$

deux variables aléatoires quelconques de la famille, il faut voir qu'il existe un τ_3 appartenant à Λ_n^{II} et tel que $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_3)) \geq E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_i))$ p.s. $i \in \{1,2\}$

Prenons $\tau_3 = \tau_1 1_B + \tau_2 1_{B^c}$ en posant

$$B = \{ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_2)) > E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_1)) \}$$

Les $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_i))$, $i\in\{1,2\}$ sont évidemment $\mathcal{B}_n$-mesurables ce qui entraîne que $B \in \mathcal{B}_n$. De plus τ_3 est un temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{II}. En effet, le fait que $\tau_3 \geq n$ presque sûrement est évident vu que $\tau_i \geq n$ p.s. pour $i \in \{1,2\}$. τ_3 est un temps d'arrêt. Pour voir cela il faut que τ_3 soit une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ et qu'en plus $\forall n, n \in \mathbb{N}$, on ait $\{\tau_3 = n\} \in \mathcal{B}_n$. Étant donné la définition de τ_3, on voit que τ_3 est à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ et est une somme de fonctions me-surables donc mesurable. De plus

$$\{\tau_3 = n\} = (\{\tau_3=n\} \cap B) \cup (\{\tau_3=n\}\cap B^c) = (5)$$

$(5) = (\{\tau_2 = n\}\cap B) \cup (\{\tau_1=n\}\cap B^c)$. Or puisque τ_i, $i\in\{1,2\}$ sont deux temps d'arrêt, on a que $\{\tau_i = n\} \in \mathcal{B}_n$ pour $i\in\{1,2\}$ et comme $B \in \mathcal{B}_n$

$$\Rightarrow \{\tau_3 = n\} \in \mathcal{B}_n$$

- $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_3)) = E^{\mathcal{B}_n}(1_B R(\sigma,\tau_3) + 1_{B^c} R(\sigma,\tau_3)) = (6)$

grâce à la définition de τ_3, on a

$$(6) = E^{\mathcal{B}_n}(1_B R(\sigma,\tau_2) + 1_{B^c} R(\sigma,\tau_1))$$

B étant $\mathcal{B}_n$-mesurable et par linéarité de l'espérance conditionnelle

$$E^{\mathcal{B}_n}(1_B R(\sigma,\tau_2) + 1_{B^c} R(\sigma,\tau_1)) = 1_B E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_2)) + 1_{B^c} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_1))$$

En considérant la définition de B, on obtient :

$$1_B E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_2)) + 1_{B^c} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_1)) = \sup\left[E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_2)), E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_1))\right]$$

En rassemblant toutes ces égalités, on peut écrire que
$$E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_3)) = \sup\left[E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_2)), E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_1))\right]$$

C.Q.F.D.

Remarque 2

En appliquant le lemme 1, je peuse dire qu'il existe une suite $(\tau_k, k \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{II}, de telle sorte que $\forall \sigma$ fixé d'une manière quelconque dans Λ_n^{I} on ait :
$$\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\; E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) = \lim_{k\to\infty}\nearrow E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau_k))$$

Propriété 1.5 :

$\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$, la famille $\left(\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\; E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right)_{\sigma \in \Lambda_n^{I}}$ est filtrante décroissante.

Démonstration :

- Une famille de fonctions est filtrante décroissante si et seulement si à chaque choix de deux fonctions appartenant à la famille, il existe une troisième fonction également membre de la famille et minorant presque-sûrement les deux autres.
- Soient σ_1 et σ_2 deux temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{I}, posons $B = \left\{\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\; E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_1,\tau)) < \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\; E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_2,\tau))\right\}$.

$E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$, $\sigma \in \Lambda_n^{I}$, $\tau \in \Lambda_n^{II}$ étant une variable aléatoire $\mathcal{B}_n$-mesurable, on en déduit que $B \in \mathcal{B}_n$. Définissons σ_3 de la manière suivante :
$$\sigma_3 = \sigma_1 1_B + \sigma_2 1_{B^c}$$
Par le même raisonnement effectué dans la propriété 1.4

on voit que σ_3 est un temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{I}

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_3,\tau)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_3,\tau)\,1_B + R(\sigma_3,\tau)\,1_{B^c}) =$$

par la définition de σ_3,

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_1,\tau)\,1_B + R(\sigma_2,\tau)\,1_{B^c}) = (7)$$

B étant $\mathcal{B}_n$-mesurable et par linéarité de l'espérance conditionnelle

$$(7) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} \left[1_B\, E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_1,\tau)) + 1_{B^c}\, E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_2,\tau)) \right]$$

$$(7) \leq 1_B \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_1,\tau)) + 1_{B^c} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_2,\tau))$$

D'après la définition de B, le membre de droite est encore égal au

$$\min\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_1,\tau)),\ \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_2,\tau))\right]$$

Nous avons donc montré

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_3,\tau)) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_i,\tau)) \qquad i\in\{1,2\}.$$

C. Q. F. D.

Remarque 3 :

Nous venons de voir que la famille $\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right)_{\sigma\in\Lambda_n^{I}}$ était filtrante décroissante.

En appliquant le lemme 1, on peut affirmer qu'il existe une suite $(\sigma_p,\ p\in\mathbb{N})$ de temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{I} telle que l'on puisse écrire $\overline{W}_n$ sous la forme suivante

$$\overline{W}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\Lambda_n^{I}}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right] = \lim_{p\to\infty}\downarrow \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_p,\tau))$$

- En tenant compte simultanément de la remarque 2 et de la remarque 3, on obtient l'existence de deux suites $(\sigma_p,\ p\in\mathbb{N})$ et $(\tau_k,\ k\in\mathbb{N})$ avec $\forall p,\ p\in\mathbb{N}\ \ \sigma_p\in\Lambda_n^{I}$
avec $\forall k,\ k\in\mathbb{N}\ \ \tau_k\in\Lambda_n^{II}$

telles que :

$$\overline{W}_n = \lim_{p\to\infty} \searrow \left[\lim_{k\to\infty} \nearrow E^{\mathcal{B}_n}\left(R(\sigma_p, \tau_k)\right)\right] \quad a.5$$

- A l'aide des mêmes techniques, on démontre également les propriétés suivantes ;

Propriété 1.6 :

La famille de variables aléatoires $\left[E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right]_{\sigma\in\Lambda_n^{I}}$ est filtrante décroissante $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ et $\forall \tau, \tau \in \Lambda_n^{II}$

Propriété 1.7 :

La famille de variables aléatoires $\left[\operatorname{ess\,inf}_{\sigma\in\Lambda_n^{I}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right]_{\tau\in\Lambda_n^{II}}$ est filtrante croissante $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$

- En appliquant à deux reprises le lemme 1 et en faisant usage des propriétés 1.6 et 1.7, on voit qu'il existe deux suites $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$ et $(\tau_p, p \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt appartenant respectivement à Λ_n^{I} et Λ_n^{II} qui permettent d'écrire le processus $\underline{W}$ sous la forme

$$\underline{W}_n = \lim_{p\to\infty} \nearrow \left[\lim_{n\to\infty} \searrow E^{\mathcal{B}_n}\left(R(\sigma_n, \tau_p)\right)\right] \quad a.6$$

Remarque 4 :

Les relations a.5. et a.6 nous permettrons d'employer le théorème de convergence monotone pour les espérances conditionnelles.

Section 2

Nous allons dans cette seconde section énoncer quelques théorèmes et lemmes préparatoires au théorème fondamental de la section 3.
Je rappelle que nous avons pris comme hypothèse de travail que le processus U majore le processus V mais que cette hypothèse est momentanée.

Théorème 2.1 :

$$\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}, \ \overline{W}_n = \max\left[V_n, \min\left(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right)\right] \quad b.1$$

Démonstration :

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord montrer grâce à deux lemmes l'équivalence de l'égalité b.1 avec d'autres relations. Finalement nous démontrerons une de ces équivalences.

Lemme 2

$$\overline{W}_n = \max\left[V_n, \min\left(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right)\right] \quad p.s.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{W}_n \geqslant \min\left[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right] & p.s. \quad b.2 \\ \overline{W}_n \leqslant \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right] & p.s. \quad b.3 \end{cases}$$

Démonstration

$\Rightarrow)$ $\overline{W}_n = \max\left[V_n, \min\left(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right)\right]$, or

$\min(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})) \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$ donc
$\overline{W_n} \leq \max[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})]$. D'autre part, nous avons que : $\overline{W_n} = \max[V_n, \min(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}}))] \geq \min(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}}))$

$\Leftarrow$) Pour montrer la relation b. 1, nous allons diviser la démonstration sur deux événements différents

premier cas : $V_n \leq \min[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})]$ b.4

et l'aide de la relation b. 2, on a que

$$V_n \leq \min[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})] \leq \overline{W_n} \text{ p.s.}$$

Par b.4 on obtient $V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$, b.3 nous permet de conclure : $\overline{W_n} \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$ p.s. b.5

Examinons maintenant deux situations complémentaires:

a) si $U_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$, dans ce cas par b.2 on obtient $\overline{W_n} \geq U_n$ p.s. Or par la propriété 1.1 on sait que $\overline{W_n} \leq U_n$ p.s. De tout ceci, on tire $\overline{W_n} = U_n$ p.s.

b) si $U_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$, en vertu de b.2 on obtient $\overline{W_n} \geq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$. Or nous avons la relation b. 5, on en déduit donc $\overline{W_n} = E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$

second cas : $V_n > \min[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})]$ b.6

Ici aussi nous allons envisager deux situations complémentaires.

a) si $U_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$, par b. 6 on conclut $V_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$ de b. 3, on tire que $\overline{W_n} \leq V_n$, or grâce à la propriété 1. 2 et à la propriété 1.3, on obtient $\overline{W_n} = V_n$

b) si $U_n < E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})$, l'inégalité b. 2, nous indique

que $\overline{W}_n \geqslant U_n$. Par suite de ce résultat et de la propriété 1.1, on a $\overline{W}_n = U_n$ p.s.

- Dans tous les cas, la relation b.1 est donc vérifiée.

C.Q.F.D.

Lemme 3

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{W}_n \geqslant \min\left[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right] & \text{p.s.} & b.2 \\ \overline{W}_n \leqslant \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right] & \text{p.s.} & b.3 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \text{sur } \{\overline{W}_n > V_n\} \Rightarrow \overline{W}_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1}) & \text{p.s.} & b.7 \\ \text{sur } \{\overline{W}_n < U_n\} \Rightarrow \overline{W}_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1}) & \text{p.s.} & b.8 \end{array}\right.$$

Démonstration :

Nous allons montrer qu'en fait b.2 $\Leftrightarrow$ b.8 et b.3 $\Leftrightarrow$ b.7

- Commensons par l'équivalence b.2 $\Leftrightarrow$ b.8

$\Leftarrow$) Sur l'événement $\{\overline{W}_n < U_n\}$, on a $\overline{W}_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ et donc $U_n > \overline{W}_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1}) \Rightarrow U_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ p.s.

Sur l'événement complémentaire : $\{\overline{W}_n \geqslant U_n\}$, on a par la propriété 1.1 que $\overline{W}_n = U_n$. Donc la relation b.2 est vérifiée presque-sûrement sur Ω.

$\Rightarrow$) si $U_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ p.s., b.2 indique que $\overline{W}_n \geqslant U_n$ or nous nous intéressons à l'événement $\{\overline{W}_n < U_n\}$. Il reste donc le cas où $U_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ p.s. Dans cette situation, b.2 nous dit que $\overline{W}_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$.

Montrons maintenant l'équivalence <u>b. 3 $\Leftrightarrow$ b. 7</u>

$\Leftarrow$) Sur l'événement $\{\overline{W}_n > V_n\}$, b. 7 dit que $\overline{W}_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ donc on a $V_n < E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ p.s.

Sur l'événement $\{\overline{W}_n \leq V_n\}$, la propriété 1. 2 nous permet d'écrire que $\overline{W}_n = V_n$.
Donc sur Ω, l'inégalité b. 3 est vérifiée presque partout.

$\Rightarrow$) Séparons en deux cas complémentaires, le premier étant celui où l'on a $V_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$, sur l'événement $\{V_n > E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\}$ de b. 3 on tire que $\overline{W}_n \leq V_n$ p.s. Or nous nous intéressons à l'événement $\{\overline{W}_n > V_n\}$. Il reste donc à considérer seulement l'événement $\{V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(W_{n+1})\}$
Il est clair que sur cet événement $\overline{W}_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})$ p.s.

C.Q.F.D.

Notre but étant de démontrer l'égalité b. 1, il nous suffit pour faire cela de démontrer les deux inégalités b. 2 et b. 3. Je démontrerai ici seulement la relation b. 3 (lemme 4); la démonstration de b. 2 étant totalement analogue à celle de b. 3.

Lemme 4

$$\overline{W}_n \leq \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1})\right] \quad \text{p.s.} \quad b.3$$

<u>Démonstration</u>

$\overline{W_n} = \operatorname{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_n^{I}} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \right]$. Nous avons vu (propriété 5) que pour n ($n \in \overline{\mathbb{N}}$) la famille $\left(\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \right)_{\sigma \in \Lambda_n^{I}}$

était filtrante décroissante, donc par la remarque 3 $\exists$ (σ_k, $k \in \mathbb{N}$) $\sigma_k \in \Lambda_{n+1}^{I}$, $\forall k$, $k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\overline{W_{n+1}} = \lim_{k\to\infty} \searrow \left[\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\tau)) \right] .$$

Soit τ un temps d'arrêt avec $\tau \in \Lambda_n^{II}$, on construit τ' à partir de τ de la manière suivante ;

$$\tau' = \tau \, 1_{\{\tau > n\}} + \infty \, 1_{\{\tau = n\}} \quad b.9$$

Il faut remarquer que τ' est un temps d'arrêt. En effet, en vertu de sa contruction, τ' est une variable aléatoire à valeur dans $\overline{\mathbb{N}}$. Examinons maintenant pour un entier p fixé ($p \in \mathbb{N}$) l'événement $\{\tau' = p\}$. Nous pouvons décomposer cet événement car vu que $\tau \in \Lambda_n^{II}$: $\{\tau' = p\} = \left(\{\tau'=p\} \cap \{\tau > n\}\right) \cup \left(\{\tau'=p\} \cap \{\tau = n\}\right) =$

En considérant b.9

$= \left(\{\tau = p\} \cap \{\tau > n\}\right) \cup \emptyset$. En se souvenant que $\tau \in \Lambda_n^{II}$, on obtient pour les entiers $p \leq n$ que $\{\tau' = p\} = \emptyset \in \mathcal{B}_p$ et pour les entiers $p > n$ que $\{\tau' = p\} \in \mathcal{B}_p$. Il faut aussi remarquer que $\tau' \in \Lambda_{n+1}^{II}$

- Soit ν un temps d'arrêt appartenant à Λ_{n+1}^{I} et détaillons $R(\nu, \tau)$ avec τ le temps d'arrêt considéré ci-dessus.

$$R(\nu,\tau) = U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}} = 1_{\{\tau > n\}} \left[U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}} \right] + 1_{\{\tau = n\}} \left[U_\nu 1_{\{\nu \leq n\}} + V_\tau 1_{\{\nu > n\}} \right] = (1)$$

$$(1) = 1_{\{\tau > n\}}\left[U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}}\right] + 1_{\{\tau = n\}}\left[V_n 1_{\{\nu \geq n+1\}}\right]$$

vu que $1_{\{\nu \leq n\}} = 0$ p.p.

- Examinons maintenant l'espérance conditionnelle de $R(\nu, \tau)$ relative à la sous-tribu $\mathcal{B}_n$.

$E^{\mathcal{B}_n}(R(\nu,\tau)) = E^{\mathcal{B}_n}\{1_{\{\tau > n\}}[U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}}] + 1_{\{\tau = n\}}[V_n 1_{\{\nu \geq n+1\}}]\}$.

L'événement $\{\tau > n\}$ appartient à $\mathcal{B}_n$ car cet événement est égal à l'événement $\{\tau \leq n\}^c$, or τ est un temps d'arrêt, ce qui entraîne que $\{\tau = i\} \in \mathcal{B}_i$ pour $0 \leq i \leq n$. En vertu de la croissance des $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_n$ pour $0 \leq i \leq n$. En considérant ce dernier fait ainsi que la linéarité de l'espérance conditionnelle, on peut écrire :

$E^{\mathcal{B}_n}(R(\nu,\tau)) = 1_{\{\tau > n\}} E^{\mathcal{B}_n}[U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}}] + 1_{\{\tau = n\}} E^{\mathcal{B}_n}(V_n)$.

V_n étant $\mathcal{B}_n$-mesurable $\forall n$, $(n \in \overline{\mathbb{N}})$ on obtient

$$E^{\mathcal{B}_n}(R(\nu,\tau)) = 1_{\{\tau > n\}} E^{\mathcal{B}_n}[U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\nu > \tau\}}] + 1_{\{\tau = n\}} V_n \qquad \text{b. 10}$$

Considérons maintenant $R(\nu, \tau')$.

$R(\nu,\tau') = U_\nu 1_{\{\nu \leq \tau'\}} + V_{\tau'} 1_{\{\nu > \tau'\}}$. Vu que $\tau \in \Lambda_n^{II}$ on a que $\{\tau = n\} \cup \{\tau > n\} = \Omega$, ce qui nous permet de décomposer $R(\nu,\tau')$ de la manière suivante :

$R(\nu,\tau') = 1_{\{\tau = n\}} R(\nu,\tau') + 1_{\{\tau > n\}} R(\nu,\tau')$.

En tenant compte de la relation b. 9, on peut encore écrire que :

$$R(\gamma,\tau') = 1_{\{\tau=n\}}\left[1_{\{\gamma\leq\infty\}}U_\gamma\right] + 1_{\{\tau>n\}}\left[1_{\{\gamma\leq\tau\}}U_\gamma + 1_{\{\gamma>\tau\}}V_\tau\right] \quad b.11.$$

D'autre part, en nous souvenant de la croissance de la suite $(\mathcal{B}_n, n\in\overline{\mathbb{N}})$, on peut affirmer que :

$$E^{\mathcal{B}_n}\left[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma,\tau))\right] = E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \quad \forall\sigma,\tau \quad \sigma\in\Lambda_n^{I},\ \tau\in\Lambda_n^{II}$$

à l'aide de cette égalité, de b.11, de la linéarité de l'espérance conditionnelle et de la $\mathcal{B}_n$-mesurabilité des événements $\{\tau=n\}$ et $\{\tau>n\}$, on peut déduire que :

$$E^{\mathcal{B}_n}\left[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\gamma,\tau'))\right] = 1_{\{\tau=n\}}E^{\mathcal{B}_n}\left[1_{\{\gamma\leq\infty\}}U_\gamma\right] + 1_{\{\tau>n\}}A$$

$$\text{avec } A = E^{\mathcal{B}_n}\left[1_{\{\gamma\leq\tau\}}U_\gamma + 1_{\{\gamma>\tau\}}V_\tau\right] \quad b.13$$

en comparant b.13 à b.10, on peut aisément conclure

$$\boxed{\begin{aligned} E^{\mathcal{B}_n}(R(\gamma,\tau)) &= E^{\mathcal{B}_n}\left[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\gamma,\tau'))\right] \quad \text{sur } \{\tau>n\} \\ (b.14) \qquad &= V_n \qquad\qquad \text{sur } \{\tau=n\}\end{aligned}}$$

- Cette conclusion est valable pour tous les temps d'arrêt γ et τ choisis respectivement dans Λ_{n+1}^{I} et Λ_n^{II} et pour un temps d'arrêt τ' défini par la relation b.9

- Choisissons comme temps d'arrêt γ une des temps d'arrêt σ_k de la suite $(\sigma_k, k\in\mathbb{N})$ cités au début de cette démonstration, τ étant fixé au hazard dans Λ_n^{II}

En vertu du résultat b.14, on obtient l'inégalité

$$E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_k,\tau)) \leq \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}\left[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\tau'))\right]\right] \quad b.15$$

Grâce à la propriété de la borne essentielle supérieure démontrée dans le lemme 1, on déduit que :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_k,\tau)) \leq \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\tau'))]\right]$$

Or par la définition (a.3) de $\overline{W_n}$, on a que $\forall \sigma, (\sigma \in \Lambda_n^{I})$ $\overline{W_n} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$. Cette inégalité est donc vraie en particulier en prenant comme temps d'arrêt σ le temps d'arrêt σ_k car $\Lambda_{n+1}^{I} \subset \Lambda_n^{I}$

$$\Rightarrow \overline{W_n} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_k,\tau)) \qquad b.16$$

D'autre part vu que $E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\tau')) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\sigma))$ car $\tau' \in \Lambda_{n+1}^{II}$ et par le caractère de positivité de l'espérance conditionnelle, on peut écrire :

$$E^{\mathcal{B}_n}\left[E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\tau'))\right] \leq E^{\mathcal{B}_n}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\sigma))\right] \quad b.17$$

En tenant compte simultanément des relations b.15, b.16, b.17 on peut écrire :

$$\overline{W_n} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_k,\tau)) \leq \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\sigma))\right]\right] \quad b.18$$

Vu que $\overline{W_{n+1}} = \lim_{k\to\infty} \downarrow \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\sigma))\right]$

et par la continuité monotone des espérances conditionnelles, on peut dire que

$$E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}}) = \lim_{k\to\infty} \downarrow E^{\mathcal{B}_n}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_{n+1}^{II}} E^{\mathcal{B}_{n+1}}(R(\sigma_k,\sigma))\right] \quad b.19$$

La relation b.18 étant valable pour tout temps d'arrêt σ_k appartenant à la suite $(\sigma_k \; k \in \mathbb{N})$, en passant à la limite quand k tend vers l'infini et en se servant de b.19, on peut enfin conclure :

$$\overline{W_n} \leq \max\left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})\right]$$

C.Q.F.D.

Lemme 5

$$\overline{W_n} \geq \min\left[U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W_{n+1}})\right]$$

Démonstration :

similaire à celle du lemme 4.

Le théorème 2.1 est donc démontré.

et l'aide d'une démonstration analogue à celle du théorème 2.1 on montre également le

Théorème 2.2.

$$\forall n \; (n \in \overline{\mathbb{N}}) : \underline{W_n} = \max\left[V_n, \min\left(U_n, E^{\mathcal{B}_n}(\underline{W_{n+1}})\right)\right]$$

Par le théorème 2.1 et le théorème 2.2, nous voyons que les deux processus $\overline{W}$ et $\underline{W}$ vérifient la même équation implicite.

Rappelons-nous que le processus V est majoré par une martingale uniformément intégrable $\left(E^{\mathcal{B}_n}(Z), n \in \mathbb{N}\right)$ $Z \in L^1(\Omega)$ et $\mathcal{B}_\infty$-mesurable.

- Examinons un nouveau processus noté $\tilde{V}$ et défini comme suit

$$\forall n,\ n \in \overline{\mathbb{N}} \qquad \tilde{V}_n = \underset{\tau \in \Lambda_n^{\mathrm{II}}}{\operatorname{ess\,sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau) \qquad b.20$$

Nous allons comparer les processus $\overline{W}$, V et $\tilde{V}$.
Le processus $\tilde{V}$, nous le verrons ultérieurement joue un grand rôle dans les jeux à un joueur. Nous le nommerons l'"enveloppe de Snell" du processus V

Théorème 2.3

Soit $\tilde{V}$ défini par b.20 :

$$\limsup \tilde{V}_n \leq \max\left(\limsup V_n, V_\infty\right) \qquad b.21$$

<u>Démonstration</u> :

- Avant de commencer cette démonstration, je rappelerai au lecteur une proposition que nous utiliserons.
Soit p un réel de $[1, \infty[$, pour tout $F \in L^p$, la suite $\left(F_n = E^{\mathcal{B}_n}(F), n \in \mathbb{N}\right)$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans L^p vers la variable aléatoire $F_\infty = E^{\mathcal{B}_\infty}(F)$.

- Considérons donc $\tilde{V}_n = \underset{\tau \in \Lambda_n^{\mathrm{II}}}{\operatorname{ess\,sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau)$. On a $V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(Z)$, $Z \in L^1(\Omega)$ et Z est $\mathcal{B}_\infty$-mesurable. par hypothèse.
- Démontrons d'abord le théorème dans le cas où

<u>Z est une constante a $(a \in \mathbb{R})$</u>

Dans ce cas Z vérifie évidemment les deux hypothèses faites à son sujet. La définition de V_σ et le fait que σ soit un temps d'arrêt appartenant à Λ_n^{II} entraînent que

$$V_\sigma \leq \max\left(\sup_{k \geq n} V_k , V_\infty\right)$$

Par le caractère de positivité de l'espérance-conditionnelle, nous obtenons

$$E^{\mathcal{B}_n}(V_\sigma) \leq E^{\mathcal{B}_n}\left[\max\left(\sup_{k \geq n} V_k , V_\infty\right)\right]$$ d'où nous tirons que

$$\tilde{V}_n = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(V_\sigma) \leq E^{\mathcal{B}_n}\left[\max\left(\sup_{k \geq n} V_k , V_\infty\right)\right].$$

Il est clair également que pour tout entier m inférieur ou égal à n :

$$E^{\mathcal{B}_n}\left[\max\left(\sup_{k \geq n} V_k , V_\infty\right)\right] \leq E^{\mathcal{B}_n}\left[\max\left(\sup_{k \geq m} V_k , V_\infty\right)\right]$$

De tout ceci, on déduit

$$\limsup \tilde{V}_n \leq E^{\mathcal{B}_\infty}\left[\max\left(\sup_{k \geq m} V_k , V_\infty\right)\right]$$

et grâce à la $\mathcal{B}_\infty$-mesurabilité

$$\limsup \tilde{V}_n \leq \max\left(\sup_{k \geq m} V_k , V_\infty\right) \qquad b.\,22$$

Passons à la limite quand m tend vers l'infini dans la relation $b.\,22$ (ce qui peut se faire) et nous obtenons

$$\limsup \tilde{V}_n \leq \max\left(\limsup V_n , V_\infty\right) \qquad b.\,21$$

<u>Z quelconque</u>

Pour repasser au cas général, nous allons considérer le processus V' défini par $V'_n = V_n - E^{\mathcal{B}_n}(Z)$ $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$

En vertu de la $\mathcal{B}_\infty$-mesurabilité de Z, on a $V'_\infty = V_\infty - Z$

Nous pouvons grâce à ce nouveau processus nous ramener dans les conditions de la première partie.

En effet, premièrement, vu que $V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(Z)$ on a $V'_n \leq 0$ presque sûrement pour tout n ($n \in \overline{\mathbb{N}}$). Deuxièmement, Z étant intégrable, V'_∞ l'est aussi.

Notons $\widetilde{V}'_n$ la variable aléatoire $\operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(V'_\sigma)$

On a

$$\widetilde{V}'_n = \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(V'_\sigma) = \widetilde{V}_n - E^{\mathcal{B}_n}(Z) \qquad b.23$$

D'autre part, grâce à la première partie

$$\limsup \widetilde{V}'_n \leq \max\left[\limsup V'_n, V'_\infty\right] \qquad b.24$$

Or par la proposition rappelée au début de cette démonstra-tion et par la relation b.23, on tire que

$$\limsup \widetilde{V}'_n = \limsup \widetilde{V}_n - Z \qquad b.25$$

Par la définition de V' et par b.25 on peut écrire

$\max\left[\limsup V'_n, V'_\infty\right] = \max\left[\limsup (V_n - E^{\mathcal{B}_n}(Z)), V'_\infty\right]$
$= \max\left[\limsup V_n - Z, V_\infty - Z\right] = \max\left[\limsup V_n, V_\infty\right] - Z$

et donc

$$\limsup \widetilde{V}_n \leq \max(\limsup V_n, V_\infty) \quad p.s.$$

C.Q.F.D.

Nous nous sommes penchés sur le cas du processus V, nous pouvons évidemment tirer des conclusions similaires au sujet du processus U. En effet, nous savons par hypothèse que $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ $U_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(Z')$ p.s. avec Z' intégrable et $\mathcal{B}_\infty$-mesurable.

Donc $-U_n$ est majoré presque partout par $E^{\mathcal{B}_n}(-Z')$.

Nous nous trouvons donc dans les mêmes conditions que dans le théorème 2.3 en remplaçant les variables aléatoires V_n par $-U_n$. Regardons ce que devient le processus $\tilde{V}_n$ du théorème 2.3 dans ces conditions.

$\widetilde{(-U_n)} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess sup}} (-U_\sigma) = - \underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma)$. Le théorème 2.3 nous dit :

$$\limsup \widetilde{(-U_n)} \leq \max \left[\limsup -U_n , -U_\infty \right]$$

$$\Leftrightarrow \limsup \left[- \underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma) \right] \leq \max \left[- \liminf U_n , -U_\infty \right]$$

$$\Leftrightarrow - \liminf \left[\underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma) \right] \leq - \min \left[\liminf U_n , U_\infty \right]$$

$$\Leftrightarrow \liminf \left[\underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma) \right] \geq \min \left[\liminf U_n , U_\infty \right]$$

Nous noterons $\underset{\sim}{U_n} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma)$. Ces variables aléatoires joueront un rôle analogue à celui des variables $\tilde{V}_n$ mais cette fois-ci en rapport avec les variables U_n. Nous avons donc par notre développement un résultat similaire au théorème 2.3, ce qui constitue le

Théorème 2.4

Soit $\underset{\sim}{U_n} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^I}{\text{ess inf}} (U_\sigma)$ b.26

$$\liminf \underset{\sim}{U_n} \geq \min \left[\liminf U_n , U_\infty \right] \quad \text{b.27}$$

<u>Démonstration</u> :

théorème 2.3 + développement ci-dessus.

Comparons les processus $\overline{W}$, $\underline{W}$ avec respectivement $\tilde{V}$ et $\underset{\sim}{U}$

Théorème 2.5

$$\forall n,\ n \in \overline{\mathbb{N}} \qquad \overline{W_n} \leq \widetilde{V}_n$$

Démonstration :

$\overline{W_n} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}} \left[\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right]$, ce qui entraîne que pour

tout temps d'arrêt σ appartenant à Λ_n^{I}, on ait l'inégalité

$$\overline{W_n} \leq \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau)) \qquad b.27$$

En écrivant la relation b.27 pour le temps d'arrêt parti-culier $\sigma = \infty$ p.s. et en tenant compte que

$$R(\infty,\tau) = 1_{\{\infty \leq \tau\}} U_\infty + 1_{\{\infty > \tau\}} V_\tau = 1_{\{\infty \leq \tau\}} V_\infty + 1_{\{\infty > \tau\}} V_\tau$$
$$= V_\tau$$

on a donc : $\overline{W_n} \leq \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau) = \widetilde{V}_n$

C.Q.F.D.

Théorème 2.6

$$\forall n,\ n \in \overline{\mathbb{N}} \qquad \underline{W_n} \geq \underset{\sim}{U_n}$$

Démonstration :

$\underline{W_n} = \underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\text{ess sup}} \left[\underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}}\ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))\right]$, donc $\forall \tau\ (\tau \in \Lambda_n^{II})$

$\underline{W_n} \geq \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}}\ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$. En particulier en prenant

$\tau = \infty$ p.s. et en considérant que $\forall \sigma\ (\sigma \in \Lambda_n^{I})$: $R(\sigma,\infty) = U_\sigma$ on obtient

$$\underline{W_n} \geq \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\text{ess inf}}\ E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma) = \underset{\sim}{U_n}$$

Si nous rassemblons <u>toutes les propriétés</u> satisfaites par les deux processus $\overline{W}$ et $\underline{W}$, nous avons

$$\forall n,\ n \in \overline{\mathbb{N}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{propriété } 1.1\\ \text{propriété } 1.2\\ \text{propriété } 1.3\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{I} \qquad U_n \geq \overline{W}_n \geq \underline{W}_n \geq V_n \quad p.s.$$

La relation b.1 est équivalente par le lemme 3 aux relations b.7 et b.8. Or par le théorème 2.2. la relation b.1 est satisfaite en remplaçant dans l'égalité $\overline{W}_n$ par $\underline{W}_n$. Donc nous avons

$$\mathbf{II} \left[\begin{array}{lll}\text{sur } \{\overline{W}_n > V_n\} & \Rightarrow & \overline{W}_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1}) \quad p.s.\\ \text{sur } \{\overline{W}_n < U_n\} & \Rightarrow & \overline{W}_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(\overline{W}_{n+1}) \quad p.s.\\ \text{sur } \{\underline{W}_n > V_n\} & \Rightarrow & \underline{W}_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(\underline{W}_{n+1}) \quad p.s.\\ \text{sur } \{\underline{W}_n < U_n\} & \Rightarrow & \underline{W}_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(\underline{W}_{n+1}) \quad p.s.\end{array}\right.$$

Les théorèmes 2.5 et 2.6 nous donnent le résultat

$$\underset{\sim}{U}_n \leq \underline{W}_n \leq \overline{W}_n \leq \tilde{V}_n$$

($\underset{\sim}{U}_n$ et $\tilde{V}_n$ définis par b.26, b.20)

De ces résultats, on tire immédiatement

$$\left\{\begin{array}{l}\limsup \overline{W}_n \leq \limsup \tilde{V}_n\\ \limsup \underline{W}_n \leq \limsup \tilde{V}_n\end{array}\right. \qquad \text{et}$$

$$\begin{cases} \liminf \underset{\sim}{U_n} \leq \liminf \overline{W}_n \\ \liminf \underset{\approx}{U_n} \leq \liminf \underline{W_n} \end{cases}$$

A l'aide de ces résultats et des deux théorèmes 2.3 et 2.4 on déduit que :

$$\mathrm{III} \begin{cases} \limsup \overline{W_n} \leq \max(\limsup V_n, V_\infty) \\ \limsup \underline{W_n} \leq \max(\limsup V_n, V_\infty) \\ \liminf \overline{W_n} \geq \min(\liminf U_n, U_\infty) \\ \liminf \underline{W_n} \geq \min(\liminf U_n, U_\infty) \end{cases}$$

Conclusions de la deuxième section

Nous nous trouvons en face de deux processus vérifiant les propriétés I, II, III.

Nous allons considérer dans la section suivante la classe des processus satisfaisant ces trois clauses. C'est par ce biais que nous montrerons l'unicité des deux processus $\overline{W}$ et $\underline{W}$.

Section 3

- Dans cette section, nous démontrerons que les jeux à deux processus U et V ont une valeur et nous la calculerons.
- Pour cela, nous allons considérer une classe particulière de processus. Nous noterons X le processus $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$.

Soit $\mathbf{C}$ la classe des processus X qui satisfont aux clauses suivantes : $\forall n, n \in \overline{\mathbb{N}}$

I $$V_n \leq X_n \leq U_n \quad \text{p.s.}$$

II $$\begin{cases} \text{sur l'événement } \{X_n > V_n\} \Rightarrow X_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \text{ p.s.} \\ \text{sur l'événement } \{X_n < U_n\} \Rightarrow X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \text{ p.s.} \end{cases}$$

III $$\begin{cases} \limsup X_n \leq \max(\limsup V_n, V_\infty) \quad \text{p.s.} \\ \liminf X_n \geq \min(\liminf U_n, U_\infty) \quad \text{p.s.} \end{cases}$$

Nous savons donc par la section 2 que

$$\overline{W} \in \mathbf{C} \qquad \text{c.1}$$

$$\underline{W} \in \mathbf{C} \qquad \text{c.2}$$

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le théorème fondamental.

Théorème 3.1 FONDAMENTAL

La classe des processus uniformément intégrables vérifiant les propriétés de la classe C contient un et un seul processus appelé "processus de valeur du jeu"

Démonstration

- Nous allons montrer que si X est un processus uniformément intégrable appartenant à la classe C, alors X majore $\overline{W}$ et minore $\underline{W}$. Ceci nous donnera l'égalité entre les deux processus $\overline{W}$ et $\underline{W}$ (car $\overline{W}$ et $\underline{W}$ sont uniformément intégrables et appartiennent à C) et l'unicité.

Le lemme 6 démontrera que X majore $\overline{W}$ et le lemme 7 que X minore $\underline{W}$.

Lemme 6

$$X \geq \overline{W} \quad p.s. \qquad C.3$$

Démonstration

- Il suffit que nous comparions X_n et $\overline{W}_n$ pour n fini (propriété I de la classe C)
- La démonstration ci-dessous envisage le cas $n = 0$, ce qui suffit. Il nous reste donc à démontrer $X_0 \geq \overline{W}_0$.

Définissons le temps d'arrêt

$$\sigma_\varepsilon = \left.\begin{array}{l} \inf \{ k : X_k \geq U_k - \varepsilon \} \\ = \infty \quad \text{sinon} \end{array}\right\} \underline{\text{pour}}\ \varepsilon > 0$$

Soit $(Y_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ définie par $\begin{cases} Y_n = X_{\sigma_\varepsilon \wedge n} & \forall n, n \in \mathbb{N} \\ Y_\infty = \limsup Y_n \end{cases}$

$(a \wedge b = \min(a, b))$

A) $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une surmartingale, pour voir cela il faut que $E^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) \leq Y_n$ p.s. quelque soit n $(n \in \mathbb{N})$

$$E^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) = E^{\mathcal{B}_n}(X_{\sigma_\varepsilon \wedge n+1}) = E^{\mathcal{B}_n}\big(X_{\sigma_\varepsilon \wedge n+1} 1_{\{\sigma_\varepsilon \leq n\}} +$$

$$+ X_{\sigma_\varepsilon \wedge n+1} 1_{\{\sigma_\varepsilon > n\}}\big) = E^{\mathcal{B}_n}\big(X_{\sigma_\varepsilon} 1_{\{\sigma_\varepsilon \leq n\}}\big) + E^{\mathcal{B}_n}\big(X_{n+1} 1_{\{\sigma_\varepsilon > n\}}\big)$$

- $X_{\sigma_\varepsilon} 1_{\{\sigma_\varepsilon \leq n\}}$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable.
- En vertu de la définition du temps d'arrêt σ_ε sur l'événement $\{\sigma_\varepsilon > n\}$, on a presque sûrement $X_k < U_k$ $\forall k, k \leq n$
Comme X appartient à la classe $\mathcal{C}$, il vérifie la propriété $\underline{II}$. On peut donc conclure que :

$$X_n 1_{\{\sigma_\varepsilon \geq n\}} \geq 1_{\{\sigma_\varepsilon \geq n\}} E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \text{ p.s.}$$

De ces deux remarques, on peut écrire que
$$E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1} 1_{\{\sigma_\varepsilon > n\}}) + E^{\mathcal{B}_n}(X_{\sigma_\varepsilon} 1_{\{\sigma_\varepsilon \leq n\}}) \leq$$

$$X_n 1_{\{\sigma_\varepsilon > n\}} + X_{\sigma_\varepsilon} 1_{\{\sigma_\varepsilon \leq n\}} = X_{\sigma_\varepsilon \wedge n} = Y_n$$

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable car X l'est.
Donc sur l'événement $\{\sigma_\varepsilon < \infty\}$, quand $n \to \infty$, on a $Y_n \to X_{\sigma_\varepsilon}$. Sur $\{\sigma_\varepsilon = \infty\}$, on a $\liminf X_n = \lim X_n$ (car X_n unif. int.)
Y_∞ désigne la limite des Y_n qui vaut X_{σ_ε} sur $\{\sigma_\varepsilon < \infty\}$ et $\lim X_n$ sur $\{\sigma_\varepsilon = \infty\}$.
Je note $X'_\infty = \lim X_n$

B) On veut $X_0 \geq \overline{W_0}$. Or $\overline{W_0} = \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_0^{I}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_0^{II}} E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma,\tau)) \right]$

On veut $X_0 \geqslant \overline{W_0}$, si l'on démontre

$$X_0 \geqslant E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon \qquad \forall \tau \in \Lambda_0^{II} \qquad c.4$$

nous aurons le résultat souhaité, en effet

$$c_4 \Rightarrow \quad X_0 \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_0^{II}} E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon$$

et donc

$$X_0 \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_0^{I}} \left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_0^{II}} E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma, \tau)) \right] - \varepsilon \qquad c.5$$

Comme c.5 est vérifiée $\forall \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, en passant à la limite quand ε tend vers zéro on a

$$X_0 \geqslant \overline{W_0}$$

C) En vertu de la définition du temps d'arrêt σ_ε on peut dire que sur l'événement $\{\sigma_\varepsilon = \infty\}$ $X_n < U_n - \varepsilon$. Ceci entraîne que :

$$\lim X_n \leqslant \liminf U_n - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$$

d'où :

$$X'_\infty = \lim X_n < \liminf U_n \qquad c.6$$

Or $\quad X'_\infty \geqslant \min(\liminf U_n, U_\infty) \qquad c.7$

Si $\liminf U_n < U_\infty$, par c.7 on pourrait conclure que $X'_\infty \geqslant \liminf U_n$, ce qui est impossible étant donné c.6

Il nous reste donc le cas $\liminf U_n \geqslant U_\infty$ et par c.7, on déduit

$$\lim X_n \geqslant U_\infty \qquad \text{sur } \{\sigma_\varepsilon = \infty\} \qquad c.8$$

D) Il nous reste à prouver c.4

L'inégalité des surmartingale est encore vraie car $(Y_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est uniformément intégrable

$$Y_0 = X_0 \geqslant E^{\mathcal{B}_0}(Y_\tau) = E^{\mathcal{B}_0}\left(1_{\{\tau=\infty\}} Y_\infty + 1_{\{\tau<\infty\}} Y_\tau\right) =$$

$$E^{\mathcal{B}_0}\left(1_{\{\tau=\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon<\infty\}} X_{\sigma_\varepsilon} + 1_{\{\tau=\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon=\infty\}} X'_\infty + 1_{\{\tau<\infty\}} X_{\sigma_\varepsilon \wedge \tau}\right) = (1)$$

$$(1) \geq E^{\mathcal{B}_0}\Big(\underbrace{1_{\{\tau=\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon<\infty\}}(U_{\sigma_\varepsilon}-\varepsilon) + 1_{\{\tau=\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon=\infty\}}U_\infty} + 1_{\{\tau<\infty\}}X_{\sigma_\varepsilon\wedge\tau}\Big)$$

$$= E^{\mathcal{B}_0}(I) + E^{\mathcal{B}_0}(1_{\{\tau<\infty\}}X_{\sigma_\varepsilon\wedge\tau}) \qquad c.9$$

on a pour le moment

$$Y_0 \geq E^{\mathcal{B}_0}(I) + E^{\mathcal{B}_0}(1_{\{\tau<\infty\}}X_{\sigma_\varepsilon\wedge\tau}).$$

Détaillons le membre de droite de cette inégalité :

$$E^{\mathcal{B}_0}(I) + E^{\mathcal{B}_0}(1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon\leq\tau\}}X_{\sigma_\varepsilon} + 1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon>\tau\}}X_\tau) \geq$$

$$E^{\mathcal{B}_0}(I) + E^{\mathcal{B}_0}\Big(1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon\leq\tau\}\cap\{\sigma_\varepsilon=\infty\}}X_{\sigma_\varepsilon} + 1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon\leq\tau\}\cap\{\sigma_\varepsilon<\infty\}}X_{\sigma_\varepsilon}$$

$$+ 1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon>\tau\}}V_\tau\Big)$$

En tenant compte du point c et en regroupant les termes, on a :

$$Y_0 \geq E^{\mathcal{B}_0}\Big(1_{\{\tau=\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon\leq\tau\}}U_{\sigma_\varepsilon} + 1_{\{\tau<\infty\}\cap\{\sigma_\varepsilon\leq\tau\}}U_{\sigma_\varepsilon} + 1_{\{\sigma_\varepsilon>\tau\}}V_\tau\Big) - \varepsilon$$

et donc

$$\forall\tau \quad \tau\in\Lambda_0^{II} \;;\quad X_0 \geq E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma_\varepsilon,\tau)) - \varepsilon \qquad c.10$$

C.Q.F.D.

Lemme 7

$$X \leq \underline{W}$$

Démonstration

Pour cette démonstration, nous allons employer le temps d'arrêt :

$$\tau_\varepsilon(\omega) = \left.\begin{array}{l} \inf\{k : X_k(\omega) \leq V_k(\omega) + \varepsilon\} \\ = \infty \quad \text{sinon} \end{array}\right\} \underline{\text{pour}}\ \varepsilon>0$$

Cette démonstration se fait par une méthode duale de celle du lemme 6. Je vais simplement souligner les grands points.

A) Soit $(Y_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ définie par $\begin{cases} Y_n = X_{\tau_\varepsilon \wedge n} \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \\ Y_\infty = \limsup Y_n . \end{cases}$

$(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une sous-martingale uniformément intégrable.

Donc sur l'événement $\{\tau_\varepsilon < \infty\}$, quand n tend vers l'infini, Y_n tend vers X_{τ_ε} et sur $\{\tau_\varepsilon = \infty\}$, Y_n tend vers $\lim X_n$.
Donc Y_∞ coïncide sur $\{\tau_\varepsilon < \infty\}$ avec X_{τ_ε} et sur $\{\tau_\varepsilon = \infty\}$ avec $X'_\infty = \lim X_n$

B) On veut ici $X_0 \leq \underline{W_0}$, il est suffisant de montrer que

$$X_0 \leq E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon \qquad \forall \sigma, \sigma \in \Lambda_0^I$$

C) Sur $\{\tau_\varepsilon = \infty\}$, on a $X_n > V_n + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$
De ceci on tire $\quad \lim X_n \geq \limsup V_n + \varepsilon$
d'où $\quad \lim X_n > \limsup V_n$
Or comme $X \in C$, on a

$$\lim X_n \leq \max(\limsup V_n, V_\infty)$$

Ceci entraîne que $\limsup V_n \leq V_\infty$ et donc que

sur $\{\tau_\varepsilon = \infty\}$: $\quad X'_\infty = \lim X_n \leq V_\infty$

D) Comme $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une sous-martingale uniformément intégrable, on a $\forall \sigma$, $\sigma \in \Lambda_0^I$

$$Y_0 = X_0 \leq E^{\mathcal{B}_0}(Y_\sigma) = E^{\mathcal{B}_0}\left(X_{\sigma \wedge \tau_\varepsilon} 1_{\{\tau_\varepsilon \wedge \sigma < \infty\}} + \lim X_n 1_{\{\tau_\varepsilon \wedge \sigma = \infty\}}\right)$$

En employant le point C et le fait que $X \leq U$, on obtient le résultat recherché

$$\forall \sigma, \sigma \in \Lambda_0^{I}, \quad X_0 \leq E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon \qquad \text{C. 11}$$

C.Q.F.D.

Appelons $W = (W_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ l'unique processus de la classe C.

Nous étions à la recherche, dans un jeu ayant une valeur, de stratégies ε-prudentes.

En remplaçant X par W dans les définitions de σ_ε et τ_ε et en rassemblant les relations C.10 et C.11 on a que :

$\forall \sigma \in \Lambda_0^{I}$ et $\forall \tau \in \Lambda_0^{II}$

$$E(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon \leq E(W_0) \leq E(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon$$

Nous venons donc de trouver <u>la valeur du jeu</u> qui est $E(W_0)$ et nous avons $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0$ trouvé une stratégie <u>ε-prudente σ_ε</u> pour le joueur I et une stratégie <u>ε-prudente τ_ε</u> pour le joueur <u>II</u>.

Il reste encore le problème des <u>stratégies prudentes</u>. Nous avions dit dans l'introduction qu'un temps d'arrêt σ_0 (pour le joueur I) et un temps d'arrêt τ_0 (pour le joueur II) étaient des temps d'arrêt prudents si et seulement si $\forall \sigma, \sigma \in \Lambda_0^{I}$ et $\forall \tau, \tau \in \Lambda_0^{II}$ on avait :

$$E(R(\sigma_0,\tau)) \leq E(W_0) \leq E(R(\sigma,\tau_0))$$

Définissons le temps d'arrêt σ_0 de la manière suivante

$$\sigma_0(w) = \begin{cases} \inf\{k\,;\ W_k(w) \geq U_k(w)\} \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{c.12}$$

et montrons qu'il répond à la question sous certaines conditions.

Lemme 8

Si l'événement $\{\sigma_0 = \infty\}$ est négligeable ou si sur cet événement $\liminf U_n \geq U_\infty$ p.s., alors
$\forall \tau \in \Lambda_0^{II}$ on a $W_0 \geq E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma_0,\tau))$ p.s.

Démonstration

Cette démonstration se base en grande partie sur celle du lemme 6.

Soient σ_0 défini par la relation c.12 et $(Y_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ définie par
$$\begin{cases} Y_n = W_{n\wedge\sigma_0} & \forall n,\ n \in \mathbb{N} \\ Y_\infty = \limsup Y_n \end{cases}$$
W est l'unique processus de la classe C et est uniformément intégrable ($W = \overline{W} = \underline{W}$).

A] $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une surmartingale
même démonstration que le point A du lemme 6.

B] La thèse suivrait immédiatement du point D du lemme 6 (en prenant $\sigma_\varepsilon = \sigma_0$ et $\varepsilon = 0$) si on pouvait se baser sur les conclusions du point C de ce même lemme.

c) Il nous reste donc à voir si nos hypothèses à déclarer que

$$\lim W_n \geq U_\infty \quad \text{sur } \{\sigma_0 = \infty\}$$

1°) si $\{\sigma_0 = \infty\}$ est négligeable, c'est évident.

2°) si sur $\{\sigma_0 = \infty\}$ on a $\liminf U_n \geq U_\infty$ alors vu que $\lim W_n \geq \min(\liminf U_n, U_\infty)$, on obtient le résultat.

C.Q.F.D.

– Définissons maintenant un temps d'arrêt τ_0 qui sous certaines conditions servira de stratégie prudente pour le joueur II.

$$\tau_0(w) = \begin{cases} \inf\{k : W_k(w) \leq V_k(w)\} \\ \infty \qquad \text{sinon} \end{cases} \qquad c.13$$

Lemme 9

Si l'événement $\{\tau_0 = \infty\}$ est négligeable ou si sur cet événement $\limsup V_n \leq V_\infty$ p.s., alors $\forall \sigma, \sigma \in \Lambda_0^I$ on a $W_0 \leq E^{\mathcal{B}_0}(R(\sigma, \tau_0))$.

Démonstration

La démonstration est analogue à celle du lemme 8 mais cette fois-ci en se basant sur celle du lemme 7. On voit en effet que nos hypothèses sont suffisantes pour tirer la conclusion du point c de ce lemme 7.

En considérant le lemme 8, on voit donc que le joueur I dispose d'un temps d'arrêt σ_0 qui est prudent dès qu'il est presque sûrement fini ou que l'inégalité

$\liminf V_n \geq V_\infty$ est réalisée presque sûrement sur $\{\sigma_0 = \infty\}$

De même pour le joueur II, dès que le temps d'arrêt $\underline{\tau_0}$ est presque-sûrement fini ou que l'inégalité $\limsup V_n \leq V_\infty$ est vérifiée sur l'événement $\{\tau_0 = \infty\}$, il dispose d'une <u>stratégie prudente</u>

Ces conditions sont suffisantes pour avoir un temps d'arrêt prudent, elle ne sont pas nécessaires.

Des exemples montrent également que le minimum de deux stratégies prudentes n'est pas toujours une stratégie prudente.

Nous avons répondu aux questions de l'introduction, il nous reste à lever l'hypothèse de majoration de V par U.

... Et si U ne majore pas V ?

$$U_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(Z') \quad p.s.$$
$$V_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(Z) \quad p.s.$$

Prenons donc un jeu composé des deux processus U et V. Nous allons lui associer un autre jeu (U', V') qui vérifie la condition de majoration. Nous savons qu'un tel jeu admet un processus de valeur du jeu et qu'il existe des stratégies ε-prudentes.
Nous allons montrer que le jeu (U, V) admet lui aussi un tel processus qui en plus est égal au processus de valeur du jeu (U', V').
Les stratégies ε-prudentes pour le jeu (U, V) se déduirons facilement des stratégies ε-prudentes du jeu (U', V').

Nous noterons toutes les notions du jeu (U', V') avec un prime.

Prenons $\quad U' = U \quad$ et $\quad V' = \min(U, V)$

On a évidemment $\begin{cases} U' \geqslant V' \\ U'_n \geqslant E^{\mathcal{B}_n}(Z') \\ V'_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(Z) \end{cases}$

Le jeu (U', V') vérifie toutes les hypothèses que nous avions prises jusqu'à présent.

Pour chaque n, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, définissons le temps d'arrêt

$$\rho_n(w) = \begin{cases} \inf\{ k \ ;\ k \geq n \text{ et } U_k(w) \leq V_k(w)\} \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 10

$\forall n,\ n \in \mathbb{N}$

$$1°)\ E^{\mathcal{B}_n}(R'(\sigma,\tau)) \leq E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$$

$$2°)\ E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma \wedge \rho_n, \tau)) = E^{\mathcal{B}_n}(R'(\sigma, \tau \wedge \rho_n))$$

c. 14

Démonstration :

1°) $E^{\mathcal{B}_n}(R'(\sigma,\tau)) = E^{\mathcal{B}_n}(U'_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\}} + V'_\tau 1_{\{\sigma > \tau\}})$
en vertu de la définition de U' et V', le membre de gauche est inférieur à $E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\sigma > \tau\}}) = E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$

2°) $E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma \wedge \rho_n, \tau)) = E^{\mathcal{B}_n}(U_{\sigma\wedge\rho_n} 1_{\{\sigma\wedge\rho_n \leq \tau\}} + V_\tau 1_{\{\sigma\wedge\rho_n > \tau\}})$

$= E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\}\cap\{\sigma < \rho_n\}} + U_{\rho_n} 1_{\{\rho_n \leq \tau\}\cap\{\sigma \geq \rho_n\}} + V_\tau 1_{\{\sigma\wedge\rho_n > \tau\}})$

c. 15

$E^{\mathcal{B}_n}(R'(\sigma, \tau\wedge\rho_n)) = E^{\mathcal{B}_n}(U'_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\wedge\rho_n\}} + V'_{\tau\wedge\rho_n} 1_{\{\sigma > \tau\wedge\rho_n\}}) =$
en remplaçant U' et V' par leur valeur, on obtient

$= E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\wedge\rho_n\}} + \min(U_{\tau\wedge\rho_n}, V_{\tau\wedge\rho_n}) 1_{\{\sigma > \tau\wedge\rho_n\}}) =$

$E^{\mathcal{B}_n}\big(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau\wedge\rho_n\}} + \min(U_\tau, V_\tau) 1_{\{\sigma > \tau\}\cap\{\tau < \rho_n\}} +$

$+ \min(U_{\rho_n}, V_{\rho_n}) 1_{\{\sigma > \rho_n\}\cap\{\tau \geq \rho_n\}}\big) =$

par la définition de ρ_n, on peut encore égaler à

$$E^{\mathcal{B}_m}\left(R'(\sigma, \tau \wedge \rho_m)\right) = E^{\mathcal{B}_m}\left(U_\sigma 1_{\{\sigma \leq \tau \wedge \rho_m\}} + V_\tau 1_{\{\tau < \sigma \wedge \rho_m\}}\right.$$

$$\left. + U_{\rho_m} 1_{\{\rho_m \leq \tau\} \cap \{\sigma \geq \rho_m\}}\right) \qquad e.16$$

En comparant e.16 et e.15, on a la thèse

C.Q.F.D.

Tous nos résultats précédents sont valables, en particulier nous avons vu qu'il était possible de trouver des temps d'arrêt σ_ε' et τ_ε' $(\varepsilon > 0)$ tel que $\forall \sigma \in \Lambda'^{I}_m$ et $\forall \tau$, $\tau \in \Lambda'^{II}_m$, on ait

$$E^{\mathcal{B}_m}\left(R'(\sigma_\varepsilon', \tau)\right) - \varepsilon \leq W_m' \leq E^{\mathcal{B}_m}\left(R'(\sigma, \tau_\varepsilon')\right) + \varepsilon \qquad e.17$$

Nous voulons prouver l'existence du processus W et trouver des stratégies ε-prudentes c'est à dire telle que $\forall \sigma, \tau$

$$E(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon \leq E(W_0) \leq E(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon$$

Lemme 11 :

$$\overline{W}_m \leq W_m'$$

Démonstration

Par e.17, nous savons qu'il existe un σ_ε' tel que $\forall \tau \in \Lambda^{II}_m$

$$E^{\mathcal{B}_m}\left(R'(\sigma_\varepsilon', \tau)\right) - \varepsilon \leq W_m' \qquad e.18 \quad (\varepsilon > 0)$$

Prenons le temps d'arrêt $\sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon' \wedge \rho_m$, par le secondo du lemme 10, et à l'aide de e.18, on peut écrire

$$E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon = E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma'_\varepsilon, \tau \wedge \ell(n))) - \varepsilon \leqslant W'_n \qquad \text{c.19}$$

Ceci est vrai $\forall \tau$, $\tau \in \Lambda_n^{II}$ d'où

$$\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\operatorname{ess\,sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon \leqslant W'_n . \qquad \text{c.20}$$

et donc vu que

$$\overline{W_n} = \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\operatorname{ess\,inf}} \left[\underset{\tau \in \Lambda_n^{II}}{\operatorname{ess\,sup}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau)) \right]$$

on obtient :

$$\overline{W_n} - \varepsilon \leqslant W'_n$$

en passant à la limite : $\overline{W_n} \leqslant W'_n$.

C.Q.F.D.

Lemme 12

$$\underline{W_n} \geqslant W'_n$$

Démonstration

De la relation c.17, on peut dire qu'il existe un temps d'arrêt τ'_ε tel que $\forall \sigma$, $\sigma \in \Lambda_n^{I}$

$$W'_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(R'(\sigma, \tau'_\varepsilon)) + \varepsilon \qquad \text{c.20}$$

Considérons le temps d'arrêt $\tau_\varepsilon = \tau'_\varepsilon$, on a donc par le primo du lemme 10 que

$$W'_n \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon$$

D'où l'on tire que

$$W'_n \leqslant \underset{\sigma \in \Lambda_n^{I}}{\operatorname{ess\,inf}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma, \tau_\varepsilon)) + \varepsilon$$

et par la définition de $\underline{W_n}$, on obtient

$$W'_n \leqslant \underline{W_n} + \varepsilon$$

En passant à la limite quand ε tend vers zéro, on obtient le résultat.

C.Q.F.D.

En rassemblant les lemmes 11 et 12, et en se souvenant que $\overline{W}_n \geq \underline{W}_n$ (vrai même si U ne majore pas V) on obtient

$$\boxed{\overline{W}_n = \underline{W}_n = W'_n}$$

Dans le jeu (U, V), on a donc un processus de valeur $W = \overline{W} = \underline{W}$ qui est le même que celui du jeu (U', V') associé.

Nous voyons également que si $\sigma_{\varepsilon'}$ et $\tau_{\varepsilon'}$ sont des stratégies prudentes pour le jeu (U', V') les stratégies
$\sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon'} \wedge \rho_0$ et $\tau_\varepsilon = \tau_{\varepsilon'}$
sont des stratégies ε-prudentes pour le jeu (U, V).
Pour voir cela, il suffit de rassembler c.19 et c.20

Section 4

- Nous allons dans cette section d'abord considérer le jeu à un joueur.
- Puis nous examinerons une version markovienne du jeu à deux joueurs.
- J'ai voulu ensuite introduire dans la fonction de paiement du jeu à deux joueurs un troisième processus visant à éliminer la légère dissymétrie existant dans cette fonction. Ce léger changement ne donne hélas pas les résultats espérés.

I^ère^ Partie Jeu à un joueur

Enoncé du problème

- Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite croissante de sous-tribus $(\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N})$, $\mathcal{B}_\infty$ étant la sous-tribu engendrée par les $\mathcal{B}_n$ pour n fini.
- $(V_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est un processus adapté dominé par une martingale uniformément intégrable, c'est à dire

$$V_n \leq E^{\mathcal{B}_n}(Z) \quad \text{où } Z \in L^1(\Omega).$$

Nous supposerons en outre que Z est $\mathcal{B}_\infty$-mesurable et que $V_\infty \in L^1(\Omega)$.

- La suite $(V_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ représente les gains aléatoires d'un joueur aux instants successifs n $(n \in \overline{\mathbb{N}})$
Pour tout temps d'arrêt ν, $E(V_\nu)$ représente

l'espérance du gain du joueur qui déciderait de quitter le jeu à l'instant aléatoire ν.

En tenant compte de tout cela, on voit que la quantité interessante pour le joueur est

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda} E[V_\tau]$$

où Λ est la classe des temps d'arrêt τ tels que la variable aléatoire V_τ soit quasi-intégrable.

La résolution du problème repose sur le processus

$$X_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n} E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau) \qquad d.1$$

où Λ_n est la classe des temps d'arrêt τ presque sûrement plus grand ou égal à n et tel que V_τ soit quasi intégrable.

- Ce problème est un <u>cas particulier du problème à deux joueurs</u>. Pour le voir il suffit de considérer le processus adapté $(U_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ défini de la manière suivante
$$\begin{cases} U_n = \infty & \forall n,\ n \in \mathbb{N} \\ U_\infty = V_\infty & \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

Les hypothèses faites dans la section 1 admettent ce cas particulier.

En considérant le processus $\overline{W_n}$, on voit que la borne inférieure des $\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(R(\sigma,\tau))$ pour tous les $\sigma \in \Lambda_n^I$ est atteinte pour le temps d'arrêt $\sigma = \infty$ p.s. Nous avions déjà rencontré le processus X_n dans la section II et nous l'avions noté $\tilde{V}_n$

J'avais montré (théorème 2.5) que $\overline{W_n} \leq \tilde{V}_n$. Dans ce cas-ci, nous avons l'égalité et donc $\overline{W_n} = \underline{W_n} = \tilde{V}_n$

Nous pouvons donc reprendre tous les résultats que nous avions démontrés en tenant compte que

$$U_n = \infty \quad \forall n,\ n \in \mathbb{N}.$$

propriété 1.2 $\Rightarrow$ $X_n \geq V_n$ p.s. $\forall n (n \in \overline{\mathbb{N}})$ d.2

Théorème 2.1 $\Rightarrow$ $X_n = \max \left[V_n, E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \right] \forall n (n \in \overline{\mathbb{N}})$ d.3

Lemme 13

$$1°)\ X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(V_\infty) \qquad \text{d.4}$$

$$2°)\ \lim X_n \geq V_\infty \qquad \text{d.5}$$

<u>Démonstration</u> :

1°) Par la définition des X_n, on a $\forall \tau (\tau \in \Lambda_n^{\mathrm{II}})$

$$X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau)$$

En particulier pour le temps d'arrêt $\tau = \infty$ appartenant à Λ_n, on a le premier résultat

2°) V_∞ appartenant à $L^1(\Omega)$, $\left(E^{\mathcal{B}_n}(V_\infty), n \in \mathbb{N}\right)$ est une martingale uniformément intégrable. Quand n tend vers l'infini, cette martingale converge presque sûrement vers la variable aléatoire $E^{\mathcal{B}_\infty}(V_\infty)$ qui vu la $\mathcal{B}_\infty$-mesurabilité de V_∞ est égale à V_∞.

$(X_n, n \in \mathbb{N})$ étant uniformément intégrable, et en tenant compte de ce qui précède, on peut passer à la limite dans la relation d. 4 et on obtient

$$\lim X_n \geq V_\infty$$

C. Q. F. D.

- Dans la propriété III de la section III, on avait

$$\lim\sup \overline{W}_n \leq \max\left[\lim\sup V_n, V_\infty\right]$$

nous avons donc ici

$$\lim X_n \leq \max\left[\lim\sup V_n, V_\infty\right] \qquad d.6$$

Mais dans ce cas-ci, nous avons également

$$d.2 \Rightarrow \lim X_n \geq \lim\sup V_n$$
$$d.5 \Rightarrow \lim X_n \geq V_\infty$$

Donc $\quad \lim X_n \geq \max\left[\lim\sup V_n, V_\infty\right] \qquad d.7$

Les relations d.6 et d.7 impliquent

$$\lim X_n = \max\left[\lim\sup V_n, V_\infty\right] \qquad d.8$$

- Les propriétés de la classe C de la section 3 sont dans ce cas équivalentes aux deux propriétés suivantes

I $\quad X_n = \max\left(V_n, E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1})\right) \qquad d.9$

II $\quad \lim\sup X_n = \max\left(\lim\sup V_n, V_\infty\right) \qquad d.10$

- Par le théorème 3. 1, nous pouvons conclure que la classe des processus uniformément intégrables et vérifiant ces deux clauses (d. 9 et d. 10) ne contient qu'un et un seul processus soit

$$X = \left(\underset{\sigma \in \Lambda_n}{\text{ess sup}}\ E^{\mathcal{B}_n}(V_\sigma) \right)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$$

Dans notre cas, une stratégie est ε- prudente si et seulement si

$$E(V_{\tau_\varepsilon}) + \varepsilon \geqslant \sup_{\tau \in \Lambda} E(V_\tau)$$

Nous pouvons donc affirmer l'<u>existence de stratégies ε- prudentes</u> τ_ε données par

$$\tau_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \inf \{ k \ ; \ X_k(\omega) \leqslant V_k(\omega) + \varepsilon \} \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

En ce qui concerne l'existence d'une stratégie prudente, par le lemme 9 (section 3) on peut dire que le temps d'arrêt

$$\tau_0(\omega) = \begin{cases} \inf \{ k : X_k(\omega) \leqslant V_k(\omega) \} \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est <u>un temps d'arrêt prudent</u> si $\{ \tau_0 = \infty \}$ est un événement négligeable <u>ou</u> si sur cet événement

$$\limsup V_n \leqslant V_\infty \quad p.s.$$

Pour ce temps d'arrêt prudent, on a évidemment

$$E(X_0) = E(X_{\tau_0}) = \sup_{\tau \in \Lambda} E(V_\tau)$$

II$^{\text{ème}}$ Partie — Application aux chaînes de Markov

Enoncé du problème

- Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable (dont les points seront les états de la chaîne) et $P(.,.)$ une probabilité de transition sur cet espace. P désigne aussi le noyau markovien qui en découle. P^k désigne son k. ième itéré et P^0 l'opérateur identité.
- Pour chaque n ($n \in \mathbb{N}$) Y_n est la n-ième application coordonnée de $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ dans E. Dans Ω, $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par les applications $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$. Nous avons donc une suite croissante de sous-tribus.

$\mathcal{B}_\infty$ est la tribu engendrée par les $\mathcal{B}_n$ pour n fini.

Pour tout x appartenant à E, il existe une et une seule probabilité P_x sur $(\Omega, \mathcal{B}_\infty)$ telle que $\forall A$ ($A \in \mathcal{E}$)

$$P_x(Y_0 = x) = 1$$

$$P_x(Y_{n+1} \in A \mid \mathcal{B}_n) = P_x(Y_{n+1} \in A \mid Y_n) = P(Y_n, A) \quad P_x.\ p.s$$

Pour cette probabilité P_x, la suite $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov homogène de transition P et d'état initial x.

Considérons la chaîne de Markov canonique $(\Omega, \mathcal{B}_\infty, P_x, Y_n)$ d'état initial x et définissons maintenant notre jeu (U, V). $(\Omega = E^{\mathbb{N}})$.

Soient u et v deux fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, u étant bornée inférieurement, v étant bornée supérieurement et majorée par u. C'est à dire $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$

$$u \geqslant a \quad p.s$$
$$v \leqslant b \quad p.s$$
$$u \geqslant v. \quad p.s.$$

Nous avons déjà vu que la condition de majoration de v par u n'était pas indispensable.

Prenons les processus
$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} U_n = u(Y_n) \\ V_n = v(Y_n) \end{array}\right] \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ U_\infty = V_\infty = 0 \end{array}\right. \qquad d.11$$

- Cette dernière clause préserve le caractère markovien du problème.
- Définissons Y_∞ comme étant le paradis de la chaîne.
  conventions : $u(Y_\infty) = v(Y_\infty) = U_\infty = V_\infty = 0$

Nous nous posons les questions

1) Quel est le processus de valeur du jeu (U, V) ?

2) Quels sont les temps d'arrêt prudents et ε-prudents ?

Solution du problème

Nous allons montrer un théorème qui nous sera utile par la suite.

Théorème 4.1

Etant donné la chaîne de Markov $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ de noyau de transition P sur l'espace d'état E, toute fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ majorée par une constante a $(a \in \mathbb{R})$ admet une plus petite majorante surharmonique positive, soit f^*. Cette fonction f^* peut être construite comme la limite de la suite croissante $(f_k, k \in \mathbb{N})$ de fonctions définies par récurrence par $f_0 = \max(f, 0)$ $\quad f_{k+1} = \max(f, Pf_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ et elle vérifie l'égalité

$$f^* = \max(f, Pf^*) \qquad \text{d. 12}$$

Démonstration

La suite $(f_k, k \in \mathbb{N})$ est croissante, en effet $f_1 = \max(f, Pf_0)$ et $Pf_0 \geq 0 \Rightarrow f_1 \geq 0 \Rightarrow f_1 \geq f_0$ et en procédant par récurrence si $f_k \geq f_{k-1}$ alors

$$f_{k+1} = \max(f, Pf_k) \geq \max(f, Pf_{k-1}) = f_k$$

La limite $f^* = \lim\limits_{k \to \infty} \uparrow f_k$ vérifie donc l'égalité d. 12 obtenue en passant à la limite dans l'équation de définition des f_k.

$f^* \geq Pf^*$ et $f^* \geq f_0$ entraînent que la suite $(f^*(Y_n), n \in \mathbb{N})$ est une surmartingale positive majorant la suite $(f(Y_n), n \in \mathbb{N})$.

- Toute fonction surharmonique positive g $(g \geq Pg)$ majorant f, majore encore f^*, en effet les inégalités $g \geq Pg$ et $g \geq f_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé entraînent que $g \geq Pf_k$ et donc on obtient $g \geq f_{k+1}$. Le résultat s'obtient par récurrence sur k.

C.Q.F.D.

Remarque

PLUS GENERALEMENT, toute surmartingale positive $(X_n, n \in \mathbb{N})$ majorant la suite $(f(Y_n), n \in \mathbb{N})$ majore nécessairement la surmartingale $(f^*(Y_n), n \in \mathbb{N})$

en effet les inégalités

$$X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \qquad \forall n \; (n \in \mathbb{N})$$

$$X_n \geq f_k(Y_n)$$

entraînent que :

$$X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \geq E^{\mathcal{B}_n}(f_k(Y_{n+1})) = P f_k(Y_n)$$

et donc vu que $X_n \geq f(Y_n)$

$$X_n \geq f_{k+1}(Y_n) \qquad n \in \in \mathbb{N}$$

Le résultat s'obtient donc encore par récurrence sur k et en passant à la limite quand k tend vers l'infini.

- Considérons la fonction v qui est majorée par la constante b, appelons $\bar{v}$ la plus petite majorante surharmonique positive de v.

- D'autre part dans notre jeu (U, V) défini par d.11 examinons le processus déjà rencontré d.1 et en b.20

$$X_n = \tilde{V}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(V_\sigma)$$

Nous allons voir que pour la chaîne de Markov $(Y_n, n \in \mathbb{N})$

$$\bar{v}(Y_n) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Lambda_n^{II}} E^{\mathcal{B}_n}(V_\tau) \qquad \text{d.13}$$

convention $\bar{v}(Y_\infty) = V_\infty = v(Y_\infty) = 0$

Nous savons déjà par la remarque du théorème 4.1 que $(\bar{v}(Y_n), n \in \mathbb{N})$ est la plus petite surmartingale positive majorant le processus $V = (v(Y_n), n \in \bar{\mathbb{N}})$.

Pour avoir l'égalité d. 13 il suffit donc de montrer que $\tilde{V}_n$ est également la plus petite surmartingale positive qui majore V.

D'après les relations d. 3 et d. 4 et en tenant compte que $V_\infty = 0$, on peut déjà dire que $\tilde{V} = (\tilde{V}_n, n \in \mathbb{N})$ est une surmartingale positive majorant V $(\tilde{V}_\infty = V_\infty = 0)$

Il reste à voir que c'est la plus petite ; soit donc $(X'_n, n \in \bar{\mathbb{N}})$ défini par $(X'_n, n \in \mathbb{N})$ une surmartingale positive majorant V $\quad (X'_\infty = V_\infty = 0)$

Nous avons donc

$$X'_n \geq E^{\mathcal{B}_n}(X'_\nu) \geq E^{\mathcal{B}_n}(V_\nu) \qquad \forall \nu, \nu \in \Lambda_n^{II}$$

donc

$$X'_n \geq \tilde{V}_n \quad p.s. \qquad \forall n, n \in \mathbb{N}$$

et

$$X'_\infty = V_\infty$$

C. Q. F. D.

Un théorème dual au théorème 4. 1 peut être démontré

Théorème 4.2

Etant donné la chaîne de markov $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ de noyau de transition P sur l'espace d'état E, toute fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ minorée par une constante admet une plus grande minorante sousharmonique négative f_*. Cette fonction f_* peut être construite comme la limite de la suite décroissante $(f_k,\ k \in \mathbb{N})$ de fonctions définies par récurrence par $f_0 = \min(f, 0)$, $f_{k+1} = \min(f, Pf_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ et elle vérifie l'égalité

$$f_* = \min(f, Pf_*)$$

Démonstration

similaire à celle du théorème 4.1

C.Q.F.D.

Si on appelle $\underline{u}$ la plus grande minorante sousharmonique négative de la fonction u et que l'on considère d'autre part le processus rencontré en b. 26

$$\underset{\sim}{U}_n = \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_n^I} E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma) \qquad n \in \overline{\mathbb{N}}$$

pour notre jeu (U, V), on peut conclure que

$(\underset{\sim}{U}_n, n \in \mathbb{N})$ est la plus grande sous-martingale négative minorant le processus U $(U_\infty = \underset{\sim}{U}_\infty = 0)$.

Cette sous-martingale est égale presque-sûrement à la sous-martingale $(\underline{u}(Y_n), n \in \mathbb{N})$

$$\boxed{\underline{u}(Y_n) = \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \Lambda_n^I} E^{\mathcal{B}_n}(U_\sigma) \qquad n \in \mathbb{N} \quad \text{d.14}}$$

convention $\underline{u}(Y_\infty) = U_\infty = V_\infty = 0$

Le résultat découle d'un raisonnement dual à celui effectué pour le résultat d.13

Pour répondre à nos questions, nous allons résoudre une <u>équation fonctionnelle</u>

Si $\bar{v}$ est la plus petite fonction surharmonique positive qui majore v et si $\underline{u}$ est la plus grande fonction sousharmonique négative qui minore u.

– Existe-t-il une fonction W de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ mesurable qui satisfait à

$$\begin{cases} v \leqslant W \leqslant u & \text{d. } 15 \\ \underline{u} \leqslant W \leqslant \bar{v} & \text{d. } 16 \\ W = \max(v, \min(u, PW)) & \text{d. } 17 \end{cases}$$

Nous allons construire une solution à l'aide d'une suite de fonctions définies par récurrence.

$W_0 = \max(v, \underline{u})$, $W_{k+1} = \max(v, \min(u, PW_k))$

$(u \geqslant v)$

<u>Cette suite est croissante</u>

$W_0 = \max(v, \underline{u})$

sur $\{v \geqslant \underline{u}\}$ $\Rightarrow$ $W_0 = v$ donc $W_1 \geqslant W_0$

sur $\{v \leqslant \underline{u}\}$ $\Rightarrow$ $W_0 = \underline{u}$ on a également

$$W_1 \geqslant \min(u, PW) = \min(u, P\underline{u})$$

or $\underline{u}$ est sousharmonique donc

$$W_1 \geqslant \min(u, P\underline{u}) \geqslant \min(u, \underline{u}) = \underline{u} = W_0$$

par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}$) si $W_k \geqslant W_{k-1}$, alors

sur $\{v \geqslant \min(u, PW_{k-1})\}$ $W_k = v$ donc $W_{k+1} \geqslant W_k$

sur $\{v \leqslant \min(u, PW_{k-1})\}$ $v \leqslant \min(u, PW_{k-1}) \leqslant (1)$

$$(1) \leqslant \min(u, PW_k) \Rightarrow W_k \leqslant W_{k+1}$$

chaque W_k est mesurable.

En faisant tendre k vers l'infini dans les équations définis-
-sant les W_k par récurrence, on obtient d.17

Appelons $W = \lim_{k\to\infty} W_k$ W est donc mesurable.

et montrons

$W \leq \bar{v}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} \geq v \\ \bar{v} \geq \underline{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v} \geq \max(v, \underline{u}) = W_0$$

par récurrence

si $W_k \leq \bar{v}$ alors

- sur $\{v \geq \min(u, PW_k)\}$ on a $W_{k+1} = v \leq \bar{v}$
- sur $\{v \leq \min(u, PW_k)\}$ on a $W_{k+1} = \min(u, PW_k)$

$$\leq \min(u, P\bar{v}) \leq \min(u, \bar{v}) \leq \bar{v}$$

$W \geq \underline{u}$

se montre de la même manière.

$W \geq v$

évident car $W_0 \geq v$ et $(W_k, k \in \mathbb{N})$ est une suite croissante.

$W \leq u$

idem.

Nous avons donc construit une fonction mesurable $W = \lim_{k\to\infty}\uparrow W_k$ qui vérifie les relations d.15, d.16, d.17

La relation d.17 est équivalente aux relations sur $\{W < u\} \Rightarrow W \geq PW$ d. 18

sur $\{W > v\} \Rightarrow W \leq PW$ d. 19

Le processus de valeur du jeu

- Soit $W = (W_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ le processus de valeur du jeu (U, V)
- Choisissons une solution w satisfaisant au relation d. 15, d. 16, d. 17 (il en existe au moins une)

Théorème 4. 3

$\forall n, n \in \mathbb{N}$, $\quad W_n = w(Y_n)$ P_x - p.s.

(convention : $W_\infty = w(Y_\infty) = V_\infty = 0$)

Démonstration

$w(Y_n)$ vérifie les relations d. 15, d. 16, d. 17 car w est solution c'est à dire

□ $v(Y_n) \leq w(Y_n) \leq u(Y_n) \iff V_n \leq w(Y_n) \leq U_n$

□ $w(Y_n) = \max\left(v(Y_n), \min[u(Y_n), Pw(Y_n)]\right)$

$$\Updownarrow$$

$$w(Y_n) = \max\left(V_n, \min[U_n, Pw(Y_n)]\right)$$

□ $\underline{u}(Y_n) \leq w(Y_n) \leq \overline{v}(Y_n)$

$$\iff \underset{\sim}{U_n} \leq w(Y_n) \leq \widetilde{V}_n$$

De ceci on déduit que $(w(Y_n), n \in \overline{\mathbb{N}})$ est un processus uniformément intégrable appartenant à la classe C de la section 3.

. Or $W = (W_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est le seul processus de cette classe (théorème 3.1)

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant montrer l'unicité de la fonction vérifiant d.15, d.16, d.17 à l'aide du théorème suivant.

Théorème 4.4

Il existe une et une seule solution aux relations d.15, d.16, d.17

Démonstration

- L'existence a déjà été prouvée, il reste l'unicité.

- Supposons qu'il existe deux solutions w_1 et w_2, ces deux fonctions : $E \to \overline{\mathbb{R}}$ pour être égales doivent avoir la même valeur en chaque point x de E.
- Choisissons un point x quelconque de E et considérons la chaîne de Markov canonique d'état initial x, soit $(\Omega, \mathcal{B}_\infty, Y_n, P_x)$.

En appliquant le théorème 4.3 pour $n=0$, on a donc

$$W_0 = w_1(Y_0) = w_1(x)$$

$$W_0 = w_2(Y_0) = w_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad w_1(x) = w_2(x) \qquad P_x.\ p.s.$$

Appelons w la solution unique, on a également

$W_0 = w(x)$ P_x p.s.

Stratégies ε- prudentes des joueurs

- En tenant compte des résultats de la section 3 et des théorèmes 4.3 et 4.4, si W est la solution unique satisfaisant d. 15, d. 16, d.17, le temps d'entrée τ_ε de la chaîne $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ dans l'ensemble

$$\{x : W(x) \leq V(x) + \varepsilon\} \quad \text{pour } \varepsilon > 0$$

est une stratégie ε- prudente du second joueur

- De même pour le joueur I, le temps d'entrée σ_ε de la chaîne dans l'ensemble

$$\{x : W(x) \geq U(x) - \varepsilon\}$$ est un temps d'arrêt ε- prudent

- Le temps d'entrée σ_0 de la chaîne de Markov dans l'ensemble $\{x : W(x) = u(x)\}$ est un temps d'arrêt prudent pour le joueur I si l'événement $\{\sigma_0 = \infty\}$ est négligeable

- Pour le joueur II, le temps d'entrée τ_0 de la chaîne canonique dans l'ensemble

$$\{x : W(x) = v(x)\}$$ est un temps d'arrêt prudent si $\{\tau_0 = \infty\}$ est un événement négli- -geable.

Lorsque l'espace d'état E est un ensemble fini . . .

---

et lors σ_0 et τ_0 sont des stratégies prudentes respective-
-ment pour le joueur I et II, en effet pour le joueur I par exemple :

σ_ε = le premier n tel que $Y_n \in \{x : w(x) \geq u(x) - \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$

La chaîne ayant un nombre fini d'état, l'ensemble $\{x : w(x) = u(x)\}$ se confond avec $\{x : w(x) \geq u(x) - \varepsilon\}$ pour ε à partir d'un certain rang ε'.

On a donc $W_0 \geq E^{\beta_0}(R(\sigma_\varepsilon, \tau)) - \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon,\ \varepsilon < \varepsilon'$ et $\forall\, \tau \in \Lambda^{II}$

$\Rightarrow\ W_0 \geq E^{\beta_0}(\sigma_0, \tau)\ \Rightarrow\ \sigma_0$ est prudent

---

III$^{\text{ème}}$ Partie

3 processus jeu (U, E, V)

- J'ai voulu adjoindre à la fonction de payement $R(\sigma,\tau)$ un troisième processus qui donnait le payement des joueurs dans le cas où ils arrêtent le jeu en même temps.

- Soit 3 processus adaptés

$$U = (U_n,\ n \in \overline{\mathbb{N}})$$
$$V = (V_n,\ n \in \overline{\mathbb{N}})$$
$$E = (E_n,\ n \in \overline{\mathbb{N}})$$

avec la condition $E_\infty = V_\infty = U_\infty$ intégrables

La <u>nouvelle fonction de payement</u> sera définie par

$$R(\sigma,\tau) = 1_{\{\sigma<\tau\}} U_\sigma + 1_{\{\sigma=\tau\}} E_\sigma + 1_{\{\sigma>\tau\}} V_\tau \quad \text{d.20}$$

Nous prenons comme hypothèses que

$$\max(U_n, E_n) \geq E^{\mathcal{B}_n}(Z') \quad \text{p.s.} \quad Z' \in L^1(\Omega)$$

$$\min(V_n, E_n) \leq E^{\mathcal{B}_n}(Z) \quad \text{p.s.} \quad Z \in L^1(\Omega)$$

Les processus $\overline{W_n}$ et $\underline{W_n}$ sont défini de la même manière que dans le jeu (U, V).

Malheureusement, l'égalité des processus $\overline{W_n}$ et $\underline{W_n}$ n'est pas réalisée en général. Parmis les quelques cas particuliers qui autorisent l'existence d'une valeur du jeu (U, E, V) , on retrouve le cas évident où $E \leq U$ et $E \geq V$.

Bibliographie

1. J. L. **SNELL** : Applications of martingale system theorems
Trans. AMS 73 (1952) pp 293 - 312

2. E. B. **DYNKIN** : The optimum choice of the instant for stopping a Markov process.
Soviet. Math. 4 [1963], pp 627 - 629

3. Y. S. **CHOW** et H. **ROBBINS** : Great expectations : the theory of optimal stopping.
Houghton Mifflin Company, Boston, 1970

4. E. B. **DYNKIN** : Game variant of a problem on optimal stopping
Soviet. Math. 10 [1969], pp 270 - 274

5. E. B. **FRID** : The optimal stopping rule for a two person Markov chain with opposing interests
Theor. Proba. Appl. 14 [1969] pp 713 - 715

6. S. M. **GUSEIN-ZADE** On a game connected with the Wiener process.
Ther. Proba. Appl. 14 [1969] pp. 701 - 703

7. CL. ANDRE : Jeux stochastiques et temps d'arrêt
ε-optimaux
Ann. Soc. Scient. de Bruxelles T 85, II,
pp. 155-162 [1971]

8. CL. ANDRE : Un jeu séquentiel, le problème de Dynkin
Dissertation doctorale à l'U.C.L.
(juin 1972)