

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Détermination de la trajectoire d'un satellite artificiel par les observations Doppler

Paul, Françoise; VANDEPUT, Etienne

Award date:
1975

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FTI B1/1975/4



FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX.

NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

DETERMINATION DE LA TRAJECTOIRE
D'UN SATELLITE ARTIFICIEL
PAR LES OBSERVATIONS DOPPLER.

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathématiques
par

Françoise
PAUL

Etienne
VANDEPUT



204969
MS 3435160

C O N T E N U

+++++

CHAPITRE 1

Principe et traitement de la mesure Doppler

- 1.1 Effet Doppler
- 1.2 Effet Doppler intégré
- 1.3 Courbes de fréquence
 - 1.3.1 Courbe des vitesses radiales
 - 1.3.2 Courbe des fréquences reçues
 - 1.3.3 Courbe des fréquences théoriques

CHAPITRE 2

Systèmes de coordonnées et unités

- 2.1 Généralités
- 2.2 Paramètres orbitaux
 - 2.2.1 Les paramètres classiques
 - 2.2.2 Le système $[a, C_e, S_e, U, V]_{t=t_0}$
 - 2.2.3 Considérations générales
- 2.3 Changement de repère
 - 2.3.1 Définitions des repères
 - 2.3.2 Angle de rotation et temps sidéral
- 2.4 Système d'unités

CHAPITRE 3

La méthode de correction différentielle dans la détermination d'une orbite

- 3.1 Situation du problème
- 3.2 Exposé de la méthode
- 3.3 Illustration de la méthode de correction différentielle suivant les méthodes d'observation
 - 3.3.1 Correction différentielle basée sur les observations de l'ascension droite et de la déclinaison du satellite
 - 3.3.2 Correction différentielle basée sur les observations mesurant la distance station-satellite

3.3.3 Correction différentielle basée sur les observations Doppler

CHAPITRE 4

Développement analytique de la méthode de correction différentielle dans le cas des vitesses radiales

CHAPITRE 5

Programme de condensation des données Doppler par simulation des observations

- 5.1 Principe de simulation
- 5.2 Fonctionnement global du programme
 - 5.2.1 Schéma général
 - 5.2.2 Détails d'utilisation du programme principal
- 5.3 Explication des sous-routines
 - 5.3.1 Sous-routine ELCAR
 - 5.3.2 " " ELEL
 - 5.3.3 " " POSVIT
 - 5.3.4 " " STAPOS
 - 5.3.5 " " HORIZ
 - 5.3.6 " " ELEVAT
 - 5.3.7 " " RANRAT
 - 5.3.8 " " DERPA
 - 5.3.9 " " COSY
 - 5.3.10 " " SYMMAT

CHAPITRE 6

Résultats numériques de la méthode de correction différentielle pour des observations Doppler

- 6.1 Introduction
- 6.2 Tableaux de convergence
 - 6.2.1 Convergence par composantes
 - 6.2.2 Influence du nombre d'équations
 - 6.2.3 Evolution du nombre d'itérations avec la perturbation
 - 6.2.4 Tableau général des perturbations maximum

- 6.3 Influence des perturbations sur la norme et la direction des vecteurs position et vitesse
- 6.4 Examen graphique des types de convergence

CHAPITRE 7

Généralisation de la méthode de correction différentielle dans le cas d'une orbite non keplerienne

- 7.1 Introduction
- 7.2 Possibilité d'applications de la méthode de correction différentielle
- 7.3 Principe de la méthode de Von Zeipel appliquée au cas des satellites artificiels
 - 7.3.1 Les équations du mouvement
 - 7.3.2 Principe de la méthode

APPENDICE 1

Résolution de l'équation de Kepler

APPENDICE 2

Passage des coordonnées elliptiques aux coordonnées cartésiennes

APPENDICE 3

Réduction d'un système surdéterminé à la forme normale.

I N T R O D U C T I O N

Depuis leur apparition il y a quelques années les satellites artificiels ont contribué largement à l'étude du globe terrestre . Les satellites sont utilisés notamment en géodésie pour déterminer la forme de la terre et les anomalies gravifiques , mais également en astronomie fondamentale pour déterminer des systèmes de référence dans l'espace et l'état de rotation de la terre.

La connaissance la plus précise possible de l'état de rotation de la terre (mouvement du pôle et vitesse de rotation) est une donnée fondamentale pour un grand nombre d'applications scientifiques et technologiques.

L'Observatoire Royal de Belgique fait à présent partie d'un réseau d'observation de satellites de navigation par effet Doppler. En collaboration avec le département de mathématique de Namur , il travaille à un projet qui vise à extraire des observations de ce réseau une détermination en continu de la position du pôle instantané.

Le principe de cette détermination est simple:
Si l'on connaît la position du satellite dans l'espace et si l'on observe la position relative du satellite et de plusieurs stations terrestres , on peut en déduire la position de ces stations et donc de la terre dans l'espace.

Dans la pratique un grand nombre de problèmes se pose. La détermination précise de la position du satellite et de la position relative satellite-station demande qu'un très grand nombre de données soient traitées , et que ces données (qui sont une mesure de

la vitesse radiale satellite-station) soient converties en termes de position dans l'espace.

En effet les données relatives à un passage du satellite au-dessus de la station pendant lequel on a effectué une vingtaine d'observations signifient l'emmagasinage de 120 données alors que la position et la vitesse du satellite à un instant donné représentent 6 paramètres . D'autre part la position et la vitesse sont des données géométriquement plus significatives.

Nous avons donc cherché dans quelles conditions il était possible d'ajuster à une série d'observations (qui pour les besoins de ce travail sont des observations simulées) une courbe théorique des vitesses radiales qui serait celle d'un satellite placé sur une trajectoire elliptique . Cet ajustement fournit alors les éléments elliptiques de la trajectoire, ce qui est équivalent à la connaissance de la position et vitesse du satellite à un instant donné .

Au chapitre 1, nous présentons une notion concise de l'effet Doppler affectant la fréquence d'une onde radioélectrique émise par un satellite géocentrique et reçue par une station unique . L'étude de l'effet Doppler intégré nous permet dans la suite d'obtenir une méthode pratique pour le calcul des différences de distance station-satellite en 2 instants quelconques .

Dans le chapitre 2, nous décrivons et conseillons le système d'unités et le système d'axes employés afin d'éviter des interprétations malheureuses ou difficiles des résultats.

Le chapitre 3 décrit essentiellement une méthode de correction différentielle quel que soit le type de mesures d'observation choisi (déclinaison, ascension droite, position relative dans le cas d'observation laser, vitesse radiale pour mesures Doppler).

Le principe est d'établir des équations d'observation dont les seconds membres sont les différences obtenues entre les valeurs calculées et les valeurs observées.

Le chapitre 4 met en application directe , et pour le cas particulier des vitesses radiales , la théorie établie au chapitre 3 . Nous nous sommes surtout référés à Escobal : "Methods of orbit Determination".

Le chapitre 5 est d'intérêt purement pratique . Il décrit la structure du programme et en détaille les instructions dans un souci d'utilisation rapide.

Dans un premier temps nous y exposons toute la partie simulation du programme , notamment la construction de pseudo-observations sur une orbite keplerienne et le calcul d'une approximation par perturbation de l'un ou l'autre des éléments de l'ellipse comprenant les observations . C'est à cet endroit que l'utilisateur devra insérer les résultats de ses mesures d'observation et la "bonne approximation" de trajectoire elliptique qu'il aura calculée.

Dans la suite , on y trouve , mis à part un ordinogramme détaillé , la structuration du programme principal et des routines accompagnées d'une explication sommaire des chaînes de calculs effectués.

C'est dans le chapitre 6 que sont rassemblées une partie significative des résultats numériques obtenus et les interprétations diverses que nous avons pu en tirer.

A ce propos il est curieux de constater que les premiers résultats obtenus paraissent pour le moins hétérogènes , notamment les perturbations acceptables des éléments elliptiques pour le calcul de la "bonne approximation". Une analyse plus profonde s'impose alors , par l'examen attentif des répercussions de ces perturbations au niveau des composantes positions et vitesses.

Nous en dégageons quelques conclusions générales sur les comportements respectifs des éléments elliptiques. D'autres considérations permettent également d'éclairer l'utilisateur quant à l'influence

du nombre d'équations à choisir pour améliorer la convergence et sur certaines dispositions à prendre pour économiser le temps de calcul.

Enfin le chapitre 7 ouvre des pistes futures en proposant la construction d'autres modèles que le modèle keplerien à des fins de comparaison , ce qui permettra d'éclairer plus encore le praticien sur les positions à prendre quant à la résolution du problème.

- - - - -

On distinguera deux parties dans le travail :

- une partie analytique d'examen de la méthode réalisée conjointement par confrontation des points de vue et mise en commun des lectures de base ,
- une partie plus technique de programmation de la méthode . La répartition du travail pour cette partie est signalée au chapitre 5 .

L'interprétation des résultats est aussi commune .

La distribution des chapitres pour la rédaction s'est faite de la façon suivante :

- pour Françoise Paul , les chapitres 3,4,5,7,
- pour Etienne Vandeput, les chapitres 1,2,5,6.

+ + + + +

CHAPITRE I
 PRINCIPE ET TRAITEMENT
 DE LA MESURE DOPPLER

1.1 Effet Doppler

Nous nous contenterons dans ce paragraphe de présenter une notion claire et simplifiée de la mesure Doppler et de son utilité, pour éclairer le lecteur sur la méthode de corrections différentielles employée.

Lorsqu'un satellite émet un signal du type

$$\sin \omega t$$

une station terrestre d'observation recevra ce signal avec un retard Δt , temps de propagation de l'onde dans l'espace.

Autrement dit, le signal qu'elle reçoit est

$$\sin \varphi = \sin \omega(t - \Delta t)$$

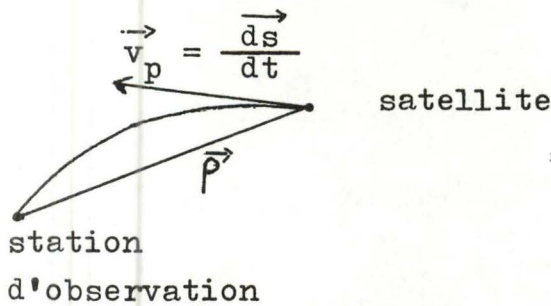
Or la vitesse d'une onde est fonction du milieu dispersif dans lequel elle se déplace. Si n est l'indice de réfraction de l'atmosphère, on aura donc

$$n = \frac{c}{v_p} \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière.}$$

Comme $v_p = \frac{ds}{dt}$, s étant l'abscisse curviligne le long du chemin parcouru L , on peut exprimer le retard sous la forme

$$\Delta t = \int_L \frac{ds}{v_p} = \frac{1}{c} \int_L n ds$$

Notons que selon le principe énoncé par Fermat, l'onde parcourt une trajectoire qui minimise le temps de propagation.



La station et le satellite étant tous deux en mouvement, φ est bien une fonction du temps.

Dès lors la fréquence reçue est en fonction de la fréquence émise :

$$\begin{aligned}
 f_r &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\omega(t - \Delta t) \right] \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} - \frac{\omega}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \int_L n ds \right) \\
 &= f_e - \frac{f_e}{c} \frac{d}{dt} \int_L n ds
 \end{aligned}$$

La différence de fréquence obtenue à la réception du signal est la fréquence Doppler, soit

$$f_d = f_r - f_e = - \frac{f_e}{c} \frac{d}{dt} \int_L n ds \quad (1)$$

Nous obtenons de cette façon l'expression mathématique de la fréquence Doppler.

Envisageons le cas simple d'une onde se propageant dans le vide.

$n = 1$, on en déduit

$$f_d = - \frac{f_e}{c} \frac{d\rho}{dt} = - \frac{f_e}{c} \dot{\rho} \quad (2)$$

D'où le lien entre la fréquence Doppler et la composante radiale de la vitesse du satellite.

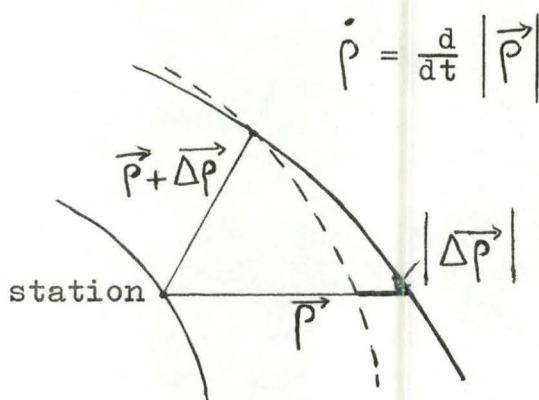


fig. 1.1

1.2 Effet Doppler intégré

L'expression (2) est fortement simplifiée pour les raisons suivantes :

- l'onde ne se propage pas dans le vide;
- il est impossible, du point de vue technique, de mesurer instantanément une fréquence, mais on peut sur un intervalle de temps petit mesurer un certain nombre de cycles;
- pour mesurer une variation de fréquence, il faut que l'observateur possède une référence de la fréquence émise et, dans le temps, ces fréquences peuvent varier faiblement.

Aussi, pour se ramener à un nombre de cycles, on est obligé d'intégrer l'effet Doppler.

Remarquons que (1) peut s'écrire

$$\dot{\rho} = \frac{c}{f_e} (f_e - f_r)$$

Si de plus f_e est la référence de l'observateur,

$$f_e = f_e + \Delta f \quad (3)$$

le récepteur enregistrera à sa sortie la fréquence

$$f = f_e - f_r$$

Intégrant cette relation entre deux instants t_1 et t_2 on obtient un nombre de cycles :

$$N = \int_{t_1}^{t_2} (f_e - f_r) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_e dt - \int_{t_1}^{t_2} f_r dt \quad (4)$$

Or on a par (1) et (3)

$$f_e - f_r = (f_e + \Delta f) - (f_e + f_d) = \Delta f - f_d$$

Et donc, comme le nombre de cycles transmis est le nombre de cycles reçus,

$$\int_{t_1}^{t_2} f_r dt = \int_{t_1 - \tau_1}^{t_2 - \tau_2} f_e dt$$

où $t_1 - \tau_1$, $t_2 - \tau_2$ représente l'intervalle d'émission des cycles.

Remarquons immédiatement que

$$\int_{t_i - \tau_i}^{t_i} f_r dt = \int_{r_s(t_i - \tau_i)}^{R(t_i)} dr/c = \frac{\rho_i}{c} \quad \text{car } f = \frac{c}{v}$$

où $r_s(t_i - \tau_i)$ représente la position du satellite au temps d'émission $t_i - \tau_i$ et $R(t_i)$ la position de la station au temps de réception t_i .

(4) devient donc

$$N = \int_{t_1}^{t_2} f_e dt - \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} f_e dt + \int_{t_1}^{t_2} f_e dt + \int_{t_2}^{t_2 - \tau_2} f_e dt$$

$$\text{soit } N = (f_e - f_e) (t_2 - t_1) - \frac{\rho_1 - \rho_2}{c} f_e$$

Finalement, si $\lambda = \frac{c}{f_e}$ est la longueur d'onde de la fréquence émise, on a :

$$\rho_2 - \rho_1 = \lambda N + \lambda (f_e - f_e')(t_2 - t_1)$$

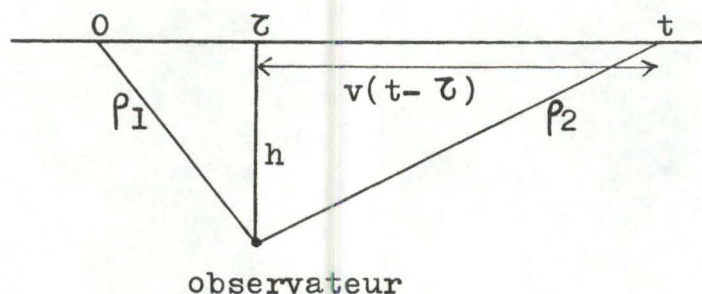
ce qui est l'expression de la différence de distance entre la station et deux positions successives du satellite.

Afin de situer plus clairement le problème du dépouillement des données, nous allons examiner l'allure générale des courbes Doppler telles qu'elles apparaissent après report des observations sur un graphique .

1.3 Courbes de fréquence

1.3.1 _ Courbe des vitesses radiales _

Ici aussi nous examinerons un cas simplifié, celui d'un satellite à trajectoire rectiligne uniforme voyageant à altitude constante par rapport à l'observateur.



L'expression des ρ dans le temps sera donnée par

$$\rho^2 = h^2 + [v(t - \tau)]^2$$

Ou encore

$$\rho^2 = h^2 + v^2 (t - \tau)^2$$

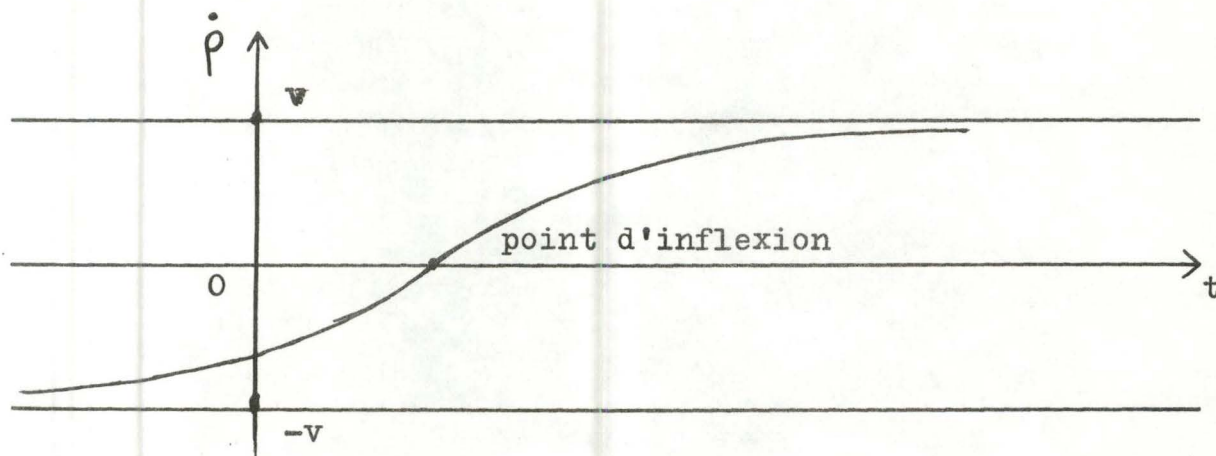
Dérivant cette équation par rapport à t on trouve :

$$2 p \dot{p} = 2 v^2 (t - \tau)$$

et donc

$$\dot{p} = \frac{v^2 (t - \tau)}{[h^2 + v^2 (t - \tau)^2]^{1/2}}$$

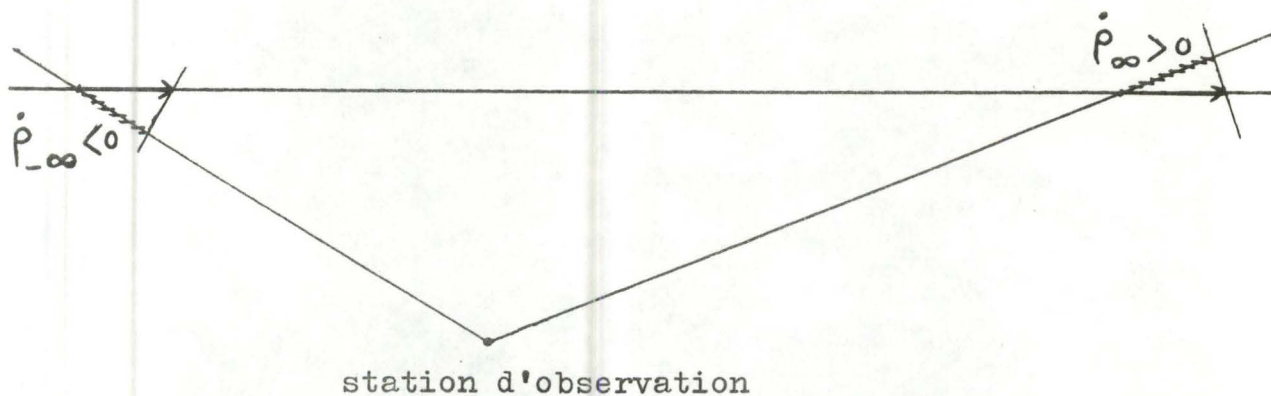
On remarque que $\dot{p}(\tau) = 0$ pour un passage du satellite au zénith de la station .



En $-\infty$, la vitesse radiale en valeur absolue est la vitesse relative du satellite par rapport à la station :

$$\dot{p} = -v$$

En $+\infty$, $\dot{p} = +v$



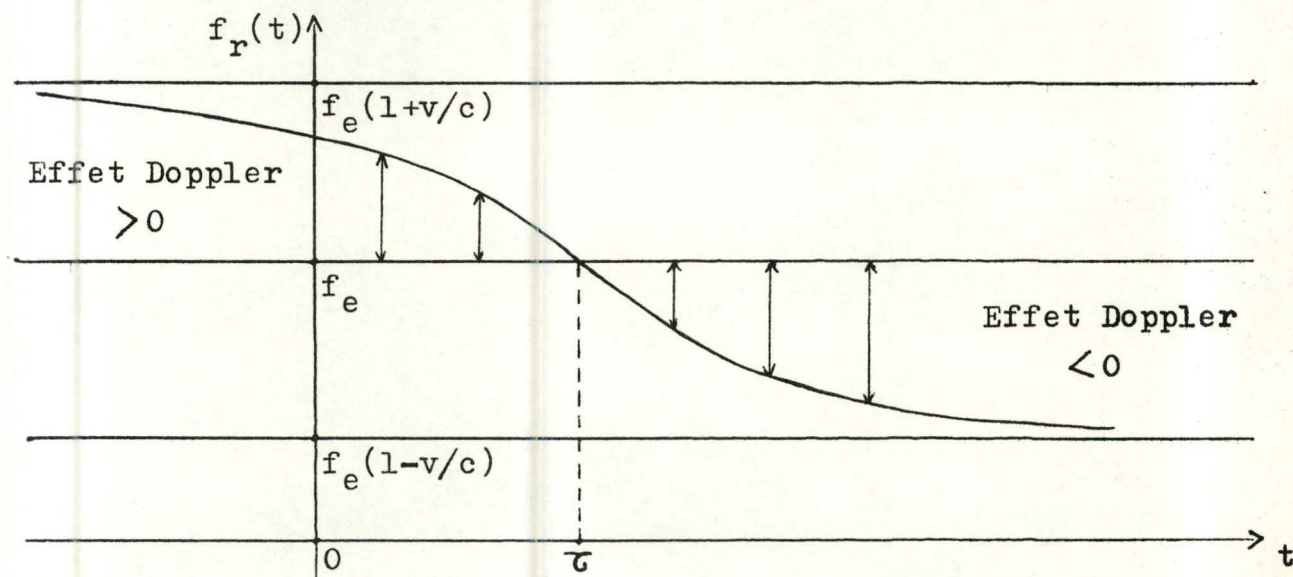
1.3.2 - Courbe des fréquences reçues:

Des relations (1) et (2) on déduit : $f_r(t) = f_e \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c} \right)$

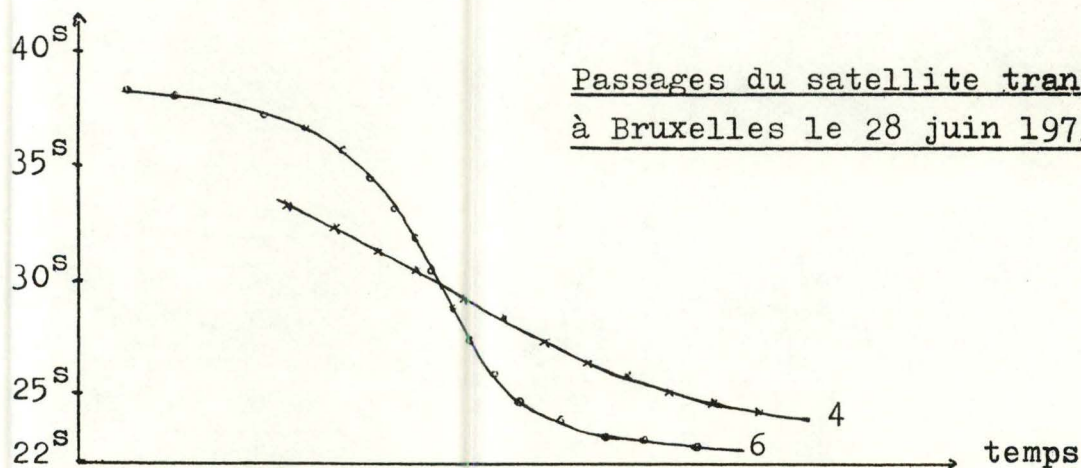
La fréquence reçue est effectivement fonction du temps puisqu'il y a mouvement relatif.

On voit qu'en $t = \tau$, $f_r(\tau) = f_e$

Exprimons tout cela sur un graphique.



Comme à l'infini $\dot{\rho} = \pm v$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} f_r(-\infty) = f_e \left(1 + \frac{v}{c} \right) \\ f_r(+\infty) = f_e \left(1 - \frac{v}{c} \right) \end{array} \right.$$


Passages du satellite transit 30140
à Bruxelles le 28 juin 1973. Jour 180

x Passage 4: 11h 39mn, Élévation 13° , Plus courte distance 2740 km
o " 6: 20h 53mn, " 71° , " 1138 km

1.3.3 - Courbe des fréquences théoriques

Faisons l'hypothèse d'une trajectoire elliptique.

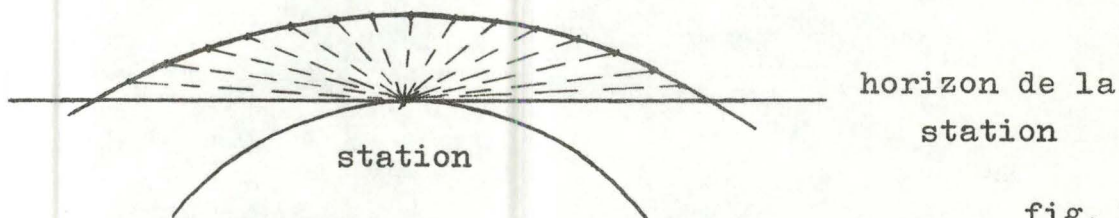


fig. 1.3

Si l'on connaît les paramètres de l'ellipse on peut, par résolution de l'équation de Kepler, calculer différentes positions du satellite, (voir appendice I), et par conséquent calculer des vitesses radiales théoriques.

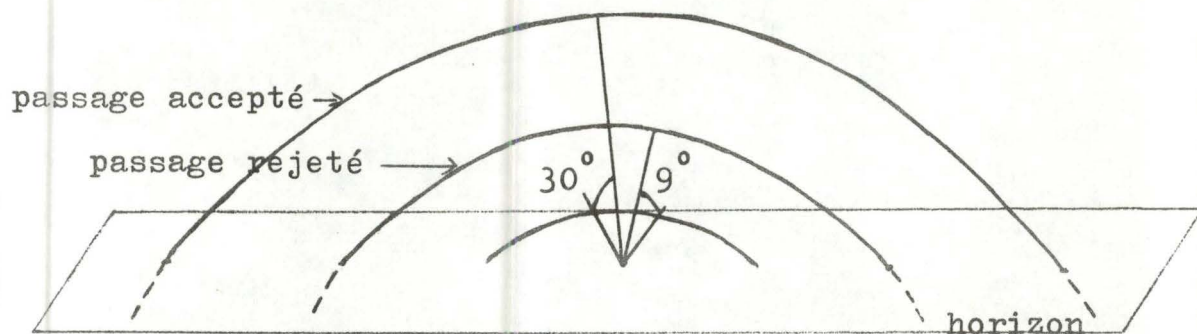
Par suite on peut tracer des courbes de fréquences théoriques.

Tout le problème consiste donc à déterminer si une trajectoire elliptique peut fournir une courbe théorique ajustable à la courbe des observations.

L'intérêt se trouve par le fait qu'on pourrait dans ce cas ramener à 6 paramètres (elliptiques ou cartésiens) une série de $6n$ paramètres, n étant le nombre d'observations effectuées sur le passage du satellite considéré.

Remarque générale

L'examen de la figure 1.2 nous montre que pour un passage à basse altitude du satellite les vitesses radiales varient relativement peu, d'où l'aplatissement considérable de la courbe d'observation. Ce sera dès lors plus difficile d'ajuster une courbe théorique à de telles valeurs, ce qui fait que dans la technique de dépouillement des données on rejettera systématiquement les passages pour lesquels l'élévation maximum du satellite ne dépasse pas 10° .



Dans le programme réalisé, une sous-routine calcule les évaluations successives du satellite s'il se trouve dans l'horizon de la station .

On effectue ensuite un test qui accepte ou rejette le passage .

CHAPITRE II

SYSTEMES DE COORDONNEES

ET UNITES

2.1 Généralités

Pour un maximum de précision dans les nombreux calculs intervenant au niveau des équations d'observation, il est nécessaire de choisir une série de paramètres orbitaux éliminant le plus grand nombre possible d'indéterminations.

D'autre part, le choix d'unités ramenant les valeurs des paramètres (positions, vitesses, éléments elliptiques) dans un même voisinage qui sera ici celui de l'unité, facilitera la détection d'erreurs graves dans l'examen des résultats numériques.

Enfin il s'avère nécessaire de fixer une fois pour toutes le repère dans lequel on travaille.

Ce sont ces différents choix qui sont développés dans ce chapitre.

2.2 Paramètres orbitaux

2.2.1 Les paramètres classiques

Une trajectoire keplerienne est généralement décrite dans l'espace au moyen des six paramètres $a, e, i, \Omega, \omega,$ et τ définis comme suit :

- a : demi-grand axe de l'ellipse

- e : excentricité de l'ellipse

On l'obtient par la relation $b^2 = a^2(1-e^2)$ où b est le demi-petit axe.

Remarquons à ce propos que si e est nul alors $b=a$ et la trajectoire est un cercle, si $e=1$, $b=0$ et la trajectoire est un segment de droite parcouru dans les deux sens.

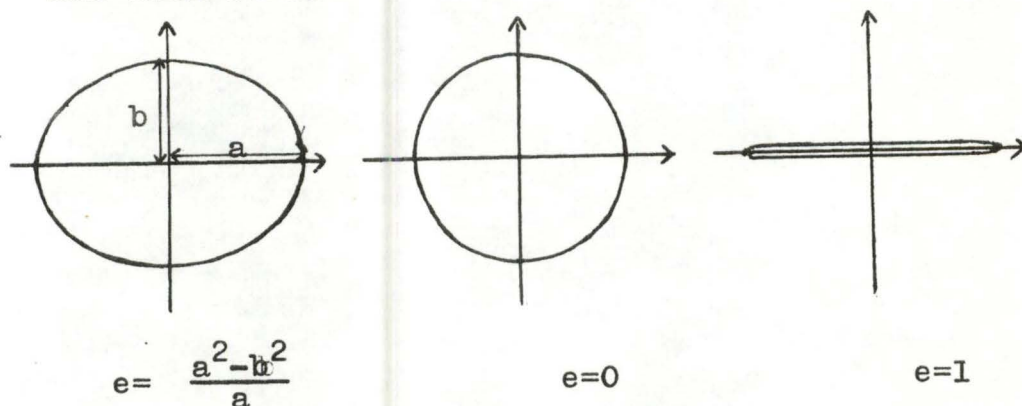


fig. 2.1

- i : inclinaison de l'ellipse
C'est l'angle entre l'orbite et un plan équatorial quelconque.

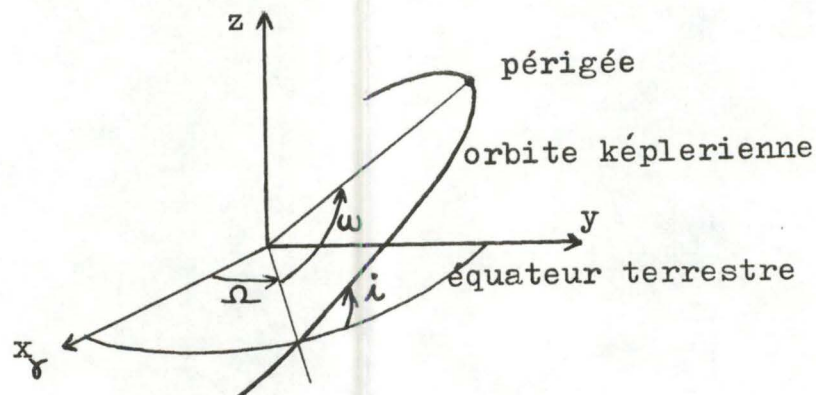


fig. 2.2

- Ω : longitude du noeud ascendant
C'est l'angle que fait l'axe vernal avec l'intersection du plan orbital et du plan équatorial (intersection prise dans le sens de passage des z négatifs aux z positifs).

- ω : argument du périigée
C'est un angle mesuré dans le plan orbital, entre la ligne qui définit le noeud ascendant et la ligne joignant l'origine des axes au périigée.
- τ : temps de passage au périigée.

Remarque :

- i, Ω et ω définissent complètement la position du plan orbital dans l'espace.
- a et e définissent la taille et la forme de l'ellipse.
- τ situe le parcours de l'ellipse dans le temps.

Alors que Ω et ω sont mesurés de 0 à 2π , i est toujours mesuré de 0 à π car il ne dépend pas du sens de parcours de l'ellipse.

Le système qui vient d'être défini est très descriptif du point de vue géométrique ; néanmoins il peut conduire à un certain nombre de singularités.

Par exemple, si i est nul, Ω n'est pas défini.

Il en est de même si i vaut π .

Si e est nul, le périigée n'est pas défini car l'orbite est circulaire et donc ω ne peut être connu.

Pour toutes ces raisons on est amené à définir un autre système de paramètres.

2.2.2 Le système $[a, C_e, S_e, U, V]_{t=t_0}$

Dans le premier système décrit, le temps apparaît dans la variable τ . Pour que le second lui soit équivalent, il faut que le temps y figure d'une façon ou d'une autre. C'est la raison pour laquelle on choisit un repère temporel $t=t_0$ qui caractérisera le

système dans le temps.

Les éléments du système sont décrits de la façon suivante:

- a : demi-grand axe.

- $C_e = (e \cos E)_{t=t_0}$ (1) où E représente l'anomalie excentrique.

- $S_e = (e \sin E)_{t=t_0}$ (2)

- U est un vecteur unitaire qui a la direction du rayon vecteur.

- V est un vecteur unitaire orthogonal à U (situé aussi dans le plan orbital) dans le sens des anomalies vraies croissantes.

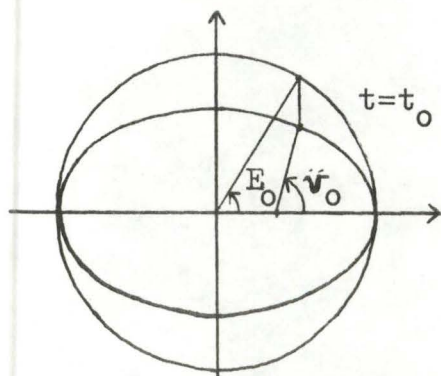


fig. 2.3

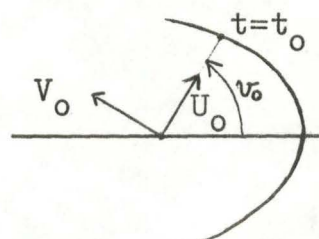


fig. 2.4

On le voit, ce système est, d'un point de vue géométrique, nettement moins descriptif que le premier. Cependant tous ses éléments sont toujours définis.

Quant à son équivalence au système classique, elle va de soi si l'on remarque que U et V fixent le plan orbital dans l'espace, que l'excentricité s'obtient par (1) et (2) et que E obtenu de la même façon traduit le parcours de la trajectoire dans le temps.

Formellement on a :

$$e = \left(S_e^2 + C_e^2 \right)^{1/2}$$

$$\sin i = \left(U_{z_0}^2 + V_{z_0}^2 \right)^{1/2}$$

$$\cos i = \left[\left(U_{x_0} + V_{y_0} \right)^2 + \left(U_{y_0} - V_{x_0} \right)^2 \right]^{1/2} - 1$$

$$\Omega = l_0 - u_0$$

$$\text{où} \quad \cos l_0 = \frac{U_{x_0} + V_{y_0}}{1 + \cos i}$$

$$\sin l_0 = \frac{U_{y_0} - V_{x_0}}{1 + \cos i}$$

$$\sin u_0 = \frac{U_{z_0}}{\sin i}$$

$$\cos u_0 = \frac{V_{z_0}}{\sin i}$$

$$\omega = u_0 - v_0$$

$$\text{où} \quad \cos v_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right)$$

$$\sin v_0 = \frac{\dot{r}_0}{e} \left(\frac{p}{\mu} \right)^{1/2}$$

$$E = \arctg \frac{S_e}{C_e}$$

M est calculé en fonction de E par une méthode de Newton-Raphson décrite au chapitre 5.3.3 (Référence [1])

2.2.3 _ Considérations générales _

Quel que soit celui des deux systèmes utilisé, il fixe de manière univoque la position d'un satellite sur son orbite keplerienne, de même que sa vitesse.

Nous avons finalement envisagé trois systèmes de six paramètres * qu'on utilisera tour à tour suivant l'intérêt qu'ils présentent dans le genre de calculs effectués.

Notons encore (1) le système décrit en 2.2.1 ,
 (2) le système décrit en 2.2.2 ,
 et (3) le système de coordonnées cartésiennes.

Nous avons explicité le passage de (2) à (1) , nous nous contenterons de donner les formules de transformation de (1) en (3) les relations de (2) à (3) s'obtenant par combinaison des précédentes.

Quant aux relations (1)→(2) , (3)→(1) et (3)→(2) , elles suivront par inversion des formules.

(*)

On peut se demander si le système (2) n'est pas un système à neuf paramètres puisque U et V ont trois composantes chacun.

Il n'en est rien car ils sont orthogonaux et normés.

Il y a donc 3 liaisons entre leurs 6 composantes :

$$U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 = 1$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = 1$$

$$U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z = 0$$

Ils sont donc entièrement déterminés par 3 paramètres.

Formules de passage de (1) à (3)

Elles s'obtiennent par examen de la figure 2.2 et par des considérations de trigonométrie sphérique.

$$x = (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) a (\cos E - e) \\ - (\sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega \cos i) b \sin E$$

$$y = (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) a (\cos E - e) \\ - (\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i) b \sin E$$

$$z = (\sin \omega \sin i) a (\cos E - e) + (\cos \omega \sin i) b \sin E$$

$$\dot{x} = - \frac{n a \sin E}{1 - e \cos E} (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) \\ - \frac{n b \cos E}{1 - e \cos E} (\sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega \cos i)$$

$$\dot{y} = - \frac{n a \sin E}{1 - e \cos E} (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \\ - \frac{n b \cos E}{1 - e \cos E} (\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i)$$

$$\dot{z} = - \frac{n a \sin E}{1 - e \cos E} \sin \omega \sin i + \frac{n b \cos E}{1 - e \cos E} \cos \omega \sin i$$

(cfr. Appendice II)

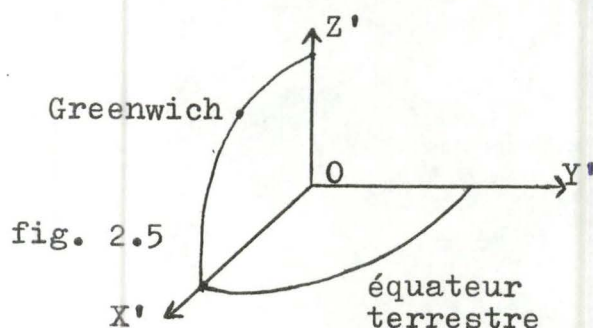
2.3 Changement de repère

Pour des raisons assez évidentes, les données et les observations à traiter sont exprimées dans un repère lié à la terre.

Or il est certain que les éléments elliptiques s'expriment dans un repère absolu. Il convient donc d'effectuer les transformations entre ces deux repères géocentriques.

2.3.1 Définitions des repères

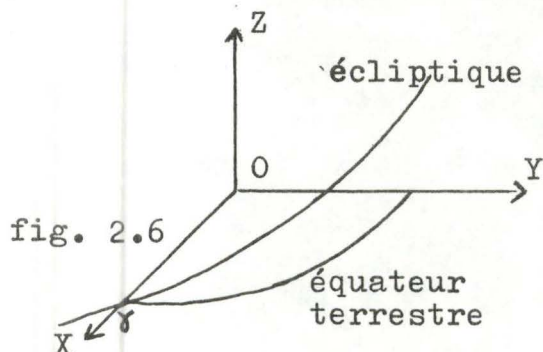
- Le repère d'axes tournants (O, X', Y', Z')



$X'OY'$ constitue le plan équatorial
 OX' est dans le plan méridien de Greenwich

OY' lui est perpendiculaire dans le plan équatorial et dans le sens de rotation de la terre
 OZ' est l'axe complétant le trièdre pour le rendre dextrogyre

- Le repère absolu (O, X, Y, Z)

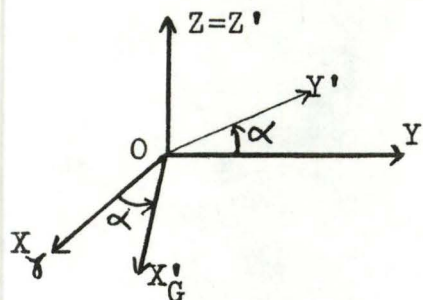


OX est dirigé vers le point vernal
 OY est perpendiculaire à OX dans le plan équatorial et dans le sens de rotation de la terre

OZ est confondu avec OZ'

Le passage d'un trièdre de référence à l'autre se fait donc au moyen d'une rotation dans le plan équatorial. Reste à déterminer cet angle de rotation.

2.3.2 _ Angle de rotation et temps sidéral _



L'angle séparant les deux trièdres n'est autre que le temps sidéral de Greenwich.

fig. 2.7

Soit donc un point de coordonnées (x_M, y_M, z_M) dans le système mobile. Ses coordonnées dans le repère fixe s'expriment donc par

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} x_F &= x_M \cos \alpha - y_M \sin \alpha \\ y_F &= x_M \sin \alpha + y_M \cos \alpha \\ z_F &= z_M \end{aligned}$$

Si ce point matériel possède, dans le repère tournant une vitesse $(\dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M)$, sa vitesse dans le repère absolu sera

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \\ \dot{z}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{z}_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

où $(0, 0, \omega)$ est la vitesse de rotation de la terre.

La deuxième partie du second membre est la vitesse d'entraînement. La vitesse ainsi exprimée est la vitesse observée dans le repère absolu mais exprimée dans le repère mobile.

$$\begin{aligned}\dot{x}'_F &= \dot{x}_M - \omega y_M \\ \dot{y}'_F &= \dot{y}_M + \omega x_M \\ \dot{z}'_F &= \dot{z}_M\end{aligned}$$

Il convient donc d'appliquer de nouveau au vecteur vitesse la même rotation que pour le vecteur position.

D'où finalement,

$$\begin{aligned}\dot{x}'_F &= (\dot{x}_M - \omega y_M)\cos \alpha - (\dot{y}_M + \omega x_M)\sin \alpha \\ \dot{y}'_F &= (\dot{x}_M - \omega y_M)\sin \alpha + (\dot{y}_M + \omega x_M)\cos \alpha \\ \dot{z}'_F &= \dot{z}_M\end{aligned}$$

où α est, rappelons le, le temps sidéral de Greenwich au moment considéré.

Remarque :

La connaissance du temps sidéral de Greenwich est donc indispensable pour effectuer le changement de repère. On n'en connaît en général que le temps universel.

Dans le programme que nous avons construit et dont l'explication détaillée suit au chapitre 5, nous avons utilisé une sous-routine de conversion du temps U.T. en temps sidéral.

(D. Van de Wynckel - UCL - 1974)

Le temps sidéral de Greenwich en des temps ultérieurs proches du temps initial peut être obtenu avec une assez bonne précision par la formule :

$$TS_i = TS_1 + \omega(t_i - t_1)$$

où $(t_i - t_1)$ représente le laps de temps écoulé entre le temps initial et le $i^{\text{ème}}$ temps considéré.

$\omega(t_i - t_1)$ est donc l'angle parcouru par le repère tournant pendant ce laps de temps.

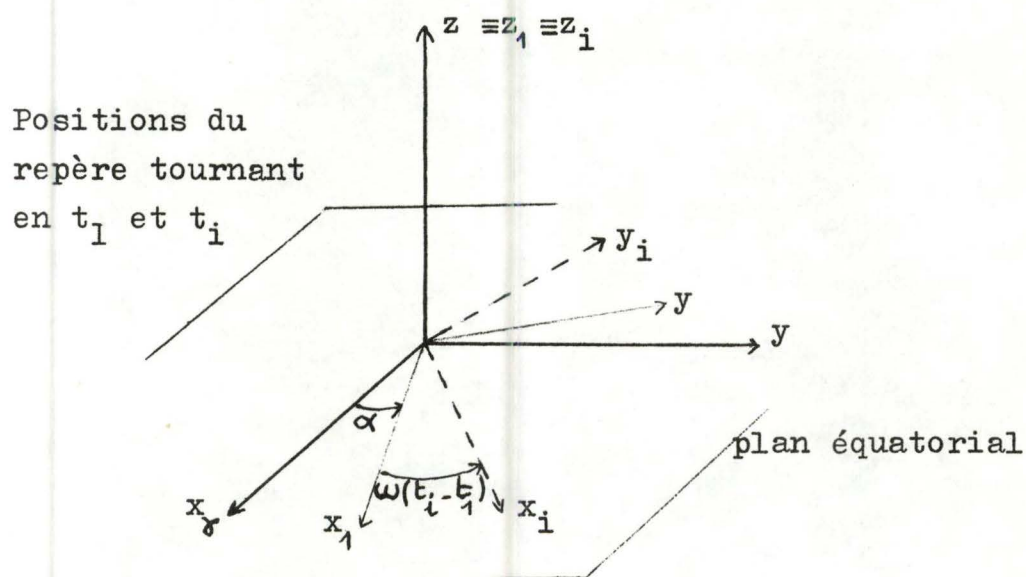


fig. 2.8

2.4 Système d'unités

Nous déciderons, une fois pour toutes, d'utiliser le système suivant :

unité de masse : la masse de la terre

$$\mu = 1 \quad (595 \cdot 10^{25} \text{ kg})$$

unité de longueur : le rayon terrestre moyen

$$R = 1 \quad (6265 \cdot 10^3 \text{ m})$$

unité de temps : la minute

Soulignons quand même que G et ω considérées comme des constantes du problème prendront dans ces unités les valeurs

$$G = 0.55309 \cdot 10^{-2} \text{ r}_T^3 / \text{min}^2 \cdot \text{m}_T$$

$$\omega = 0.437527 \cdot 10^{-2} \text{ rad/min.}$$

Par des considérations très rapides, on remarque que les paramètres s'éloignent très peu de 1.

C'est assez évident pour les variables angulaires et l'excentricité. Quant au grand axe, le fait d'étudier les satellites à basse altitude nous prouve bien qu'il a une valeur proche de 2.

$$a < 2R = 2$$

D'où les bonnes conditions de travail annoncées.

CHAPITRE 3

LA METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE
DANS LA DETERMINATION D'UNE ORBITE

3.1 Situation du problème

Considérons un satellite artificiel décrivant une orbite autour de la terre. Nous négligerons ici les effets provenant des autres planètes, ainsi que toute force perturbatrice. Bornons-nous donc au problème des deux corps : terre-satellite.

Supposons que nous disposons d'observations qui permettent de calculer une certaine quantité W qui dépend uniquement de la position et de la vitesse du satellite, tous les autres paramètres liés à l'observation ou à la théorie du mouvement étant connus par ailleurs. Nous avons donc que W est une fonction des éléments moyens et du temps.

Nous avons donc :

$$W = W(a, e, i, \Omega, \omega, M, t)$$

Si nous disposons de telles observations à des instants différents et d'une approximation initiale des éléments orbitaux, est-il possible de trouver un nouvel ensemble d'éléments représentant mieux l'orbite du satellite ?

La réponse est affirmative . C'est le but de la méthode de correction différentielle que nous allons développer ici dans le cas général.

Rappelons-nous que dans le problème des deux corps, les éléments elliptiques $[a, e, i, \Omega, \omega, \tau]$ sont constants dans le temps.

Nous verrons dans les paragraphes suivants la forme de la fonction W suivant les techniques d'observation .

Nous supposerons encore que la quantité observée est sans erreurs et nous n'entrerons pas dans la discussion des corrections instrumentales dans la réduction des observations.

3.2 Exposé de la méthode

Soit N le nombre d'observations.

Soit $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ l'ensemble nous donnant la première approximation de l'orbite à l'instant $t=t_0$.

Soit $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ les éléments exacts à l'instant $t=t_0$ que nous rechercherons.

Soit $(\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta i_0, \Delta \Omega_0, \Delta \omega_0, \Delta M_0)$ les corrections à ajouter à $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ pour avoir les éléments exacts $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$

Pour chaque instant t_i correspondant aux temps d'observation la quantité observée W_i s'écrit:

$$W_i = W(a_0 + \Delta a_0, e_0 + \Delta e_0, i_0 + \Delta i_0, \Omega_0 + \Delta \Omega_0, \omega_0 + \Delta \omega_0, M_0 + \Delta M_0, t_i)$$

Si nous supposons que les premières valeurs estimées $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ sont suffisamment bonnes, nous pouvons développer W_i en série de Taylor en négligeant les termes du second ordre.

On suppose donc que l'approximation initiale n'est pas trop mauvaise. C'est l'expérience qui indiquera ce que "pas trop mauvaise" signifie.

$$W_i = W(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i) + \frac{\partial W_i}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial W_i}{\partial e_0} \Delta e_0 +$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial i_0} \Delta i_0 + \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_0} \Delta \Omega_0 + \frac{\partial W_i}{\partial \omega_0} \Delta \omega_0 + \frac{\partial W_i}{\partial M_0} \Delta M_0$$

(3.2.1)

où les dérivées sont prises au temps $t=t_i$.

Nous avons remplacé les $da_0, de_0, di_0, d\Omega_0, d\omega_0, dM_0$ respectivement par les différences finies $\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta i_0, \Delta \Omega_0, \Delta \omega_0, \Delta M_0$.

$W(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i)$ est la valeur qu'aurait pris W_i si les éléments présumés avaient été exacts. On l'appelle valeur calculée de W et on la note W_{ci} par opposition à W_{oi} qui est la quantité observée.

Les W_{ci} sont calculés soit par intégration numérique à partir de la valeur approchée de W au temps $t=t_0$, soit analytiquement.

(3.2.1) donne :

$$(W_c - W_o)_i = \frac{\partial W_i}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial W_i}{\partial e_0} \Delta e_0 + \frac{\partial W_i}{\partial i_0} \Delta i_0 + \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_0} \Delta \Omega_0 +$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \omega_0} \Delta \omega_0 + \frac{\partial W_i}{\partial M_0} \Delta M_0 \quad i=1 \dots N$$

(3.2.2)

où les dérivées sont prises au temps t_i (les t_i étant les temps d'observation).

Les coefficients $\frac{\partial W_i}{\partial a_0}, \frac{\partial W_i}{\partial e_0}, \frac{\partial W_i}{\partial i_0}, \frac{\partial W_i}{\partial \Omega_0}, \frac{\partial W_i}{\partial \omega_0}, \frac{\partial W_i}{\partial M_0}$ seront calculés soit analytiquement (voir chapitre suivant) soit numériquement suivant le principe suivant.

Donnons à W un petit accroissement connu Δa et calculons les W avec les nouveaux éléments orbitaux $a_0 + \Delta a, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$.

Nous avons :

$$W_i(a_0 + \Delta a, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i) =$$

$$W_i(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i) + \Delta a \frac{\partial W_i}{\partial a_0}$$

ou encore :

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial a_0}\right) = \frac{W_i(a_0 + \Delta a, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i) - W_i(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0, t_i)}{\Delta a}$$

Par un même processus, on calcule les $\frac{\partial W_i}{\partial e_0}$, $\frac{\partial W_i}{\partial \Omega_0}$, $\frac{\partial W_i}{\partial \omega_0}$, $\frac{\partial W_i}{\partial i_0}$, $\frac{\partial W_i}{\partial M_0}$, pour chaque temps t_i .

Ce n'est pas cette méthode que nous avons exploité ici.

Le calcul analytique dans le cas particulier où la fonction W est la fonction "range rate" notée \dot{p} (et qui est la dérivée de la norme de la position relative du satellite par rapport à la station) est fait dans le chapitre suivant.

Nous supposons donc ici connaître les dérivées apparaissant dans les N équations (3.2.2).

(3.2.2) représente maintenant un système de N équations à 6 inconnues $\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta i_0, \Delta \Omega_0, \Delta \omega_0, \Delta M_0$ que l'on résoudra par moindres carrés. On obtiendra alors les 6 accroissements cherchés.

L'approximation faite en négligeant les termes du second ordre fait que l'on n'obtient pas du premier coup la solution.

On considérera alors le nouvel ensemble d'éléments $a_0 + \Delta a, e_0 + \Delta e_0, \Omega_0 + \Delta \Omega_0, \omega_0 + \Delta \omega_0, i_0 + \Delta i_0, M_0 + \Delta M_0$.

Il donnera le nouvel ensemble d'éléments orbitaux qui servira de valeur de départ pour l'itération suivante. On recommencera le processus toujours avec les mêmes observations ; changeront les valeurs calculées ; ainsi de suite jusqu'à ce que les résidus $(W_c - W_0)_i$ deviennent aussi petits que l'on veut.

Si la première approximation de départ avait été exacte, les résidus $(W_c - W_0)_i$ auraient été égaux à zéro. Mais en général ce n'est pas le cas!

Le processus utilisé corrige alors les valeurs initiales des éléments orbitaux $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ pour que les W_{ci} calculés à partir de ces éléments collent au mieux avec les valeurs observées W_{oi} .

Donc, si les valeurs de départ sont acceptables, nous devons nous attendre à une diminution des résidus au fur et à mesure des itérations. Toutefois ils ne s'annulent jamais puisque nous avons négligé des forces perturbatrices dans les calculs des W_{ci} et puisque nous avons arrêté les développements au 1^{ier} ordre.

Nous avons dans ce paragraphe exposé le principe de correction différentielle partant des éléments elliptiques. On peut de la même façon adopter une méthode corrigeant les éléments cartésiens. C'est ce que nous voyons dans les paragraphes suivants à partir d'exemples.

3.3 Illustration de la méthode de correction différentielle suivant les méthodes d'observation

3.3.1 - Correction différentielle basée sur les observations de l'ascension droite et de la déclinaison du satellite

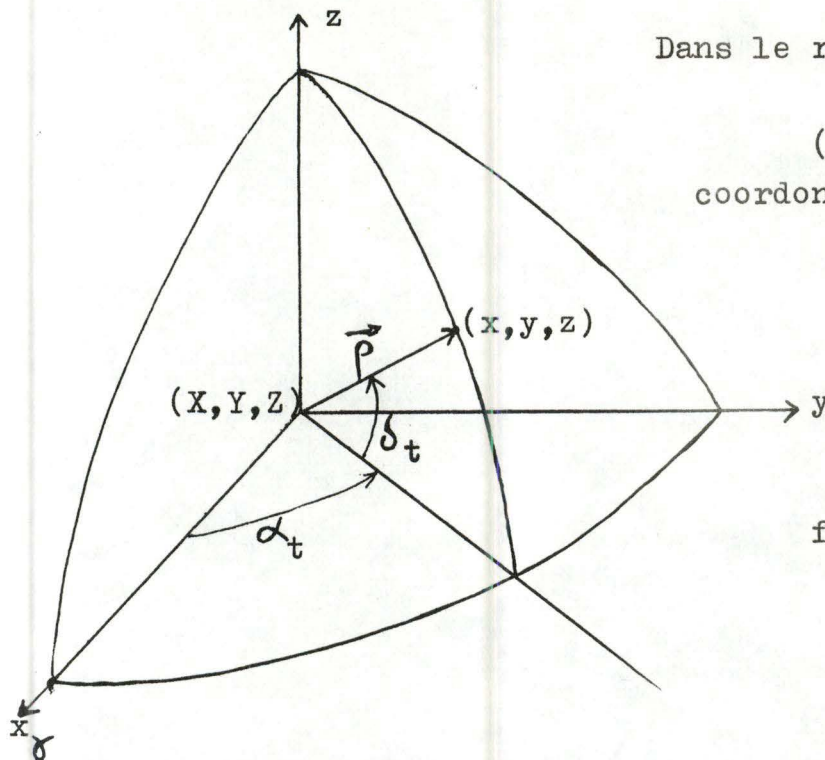
Soit une station relevant par observations photographiques à chaque passage d'un satellite déterminé, son ascension droite α et sa déclinaison δ par comparaison avec l'ascension droite et la déclinaison connues des étoiles.

Ces observations photographiques furent longtemps les plus utilisées ; la précision atteinte dans la mesure est de 0"01 .

Si nous fournissons N observations nous avons

$$(\alpha_{t_0})_i \quad \text{et} \quad (\delta_{t_0})_i \quad i = 1 \longrightarrow N$$

(indice 0 parce que correspondant aux observations).



Dans le référentiel absolu:

$(x, y, z) =$
coordonnées du satellite

figure 3.1

Attention : ici nous avons considéré la terre comme une masse ponctuelle.

D'autre part, par une méthode analytique ou d'intégration numérique, nous calculons la position et la vitesse du satellite à partir d'une première approximation initiale au temps $t=0$ soit $[\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0]$.

Nous aurons alors, aux N temps correspondant aux N temps d'observation, la position et la vitesse calculées du satellite

$$[\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i] \quad i = 1 \dots N$$

La figure 3.1 nous donne les relations suivantes :

(3.3.1)

$$\sin \alpha_{ct} = \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$$

$$\cos \alpha_{ct} = \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$$

$$\sin \delta_{ct} = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}$$

$$\cos \delta_{ct} = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}$$

où $\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}$ (ici $\vec{R} = 0$)

Donc, à partir des $2N$ vecteurs \vec{r}_i et $\dot{\vec{r}}_i$ et des relations (3.3.I), nous obtenons des valeurs calculées des α et δ en N temps.

$$\begin{array}{cc} (\alpha_{ct})_i & (\delta_{ct})_i \\ i = 1 \dots \dots \dots N \end{array}$$

En comparant les valeurs calculées et observées, et d'autre part, puisqu'au temps $t=t_0$:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

$$\alpha_t = \alpha_t(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

$$\delta_t = \delta_t(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

(3.3.3)

nous pouvons écrire l'équation aux différences :

$$\Delta \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \alpha_t}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \alpha_t}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial \alpha_t}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial \alpha_t}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial \alpha_t}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0$$

$$\Delta \delta_t = \frac{\partial \delta_t}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \delta_t}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \delta_t}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial \delta_t}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial \delta_t}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial \delta_t}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0$$

(3.3.4)

où les dérivées sont prises aux temps t_i , $i = 1 \dots \dots \dots N$

Remarquons que puisque les α_t et δ_t sont fonction de la position et de la vitesse initiales, les dérivées sont prises par rapport aux éléments cartésiens et on corrige ces éléments.

Après détermination des $\frac{\partial \alpha_t}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \delta_t}{\partial \xi}$ où ξ appartient à l'ensemble $\{x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$, on obtient un système de $2N$ équations à 6 inconnues que l'on résout par moindres carrés.

La solution nous donne alors une meilleure valeur des éléments cartésiens au temps $t=t_0$.

Les nouvelles valeurs sont réitérées jusqu'à ce que la correction ait la précision souhaitée.

3.3.2 - Correction différentielle basée sur les observations mesurant la distance station-satellite

Ces observations sont faites soit avec un laser lorsque le satellite est muni de réflecteurs cataphotes, soit avec un système s'apparentant au radar lorsque le satellite possède un répondeur à son bord.

Dans les deux systèmes d'observation, la quantité observée n'est pas la distance mais la durée entre l'émission de l'onde et sa réception. Ce sont les observations les plus précises pour le moment. La précision de ± 1 mètre peut être atteinte.

Malheureusement de telles mesures ne peuvent être effectuées que dans de bonnes conditions météorologiques et donc que pour certaines régions du globe. La précision gagnée donc dans la mesure sera malheureusement vite perdue puisque le réseau de stations ne recouvre pas le globe terrestre.

La fonction W correspondant à ces observations est :

ρ qui est la distance station-satellite.

Si c est la vitesse de la lumière dans le vide, nous avons:

$$T = \frac{\rho}{c}$$

$$\text{et } W = \sqrt{(x(t+T)-X(t+T))^2 + (y(t+T)-Y(t+T))^2 + (z(t+T)-Z(t+T))^2} \quad (3.3.5)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du satellite

(X, Y, Z) sont les coordonnées de la station.

En combinant de la même façon que précédemment les valeurs observées et calculées de ρ en N temps, nous obtenons un système semblable à (3.3.4) de N équations à 6 inconnues $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \dot{\Delta x}_0, \dot{\Delta y}_0, \dot{\Delta z}_0$

La résolution par moindres carrés donne une meilleure valeur des éléments cartésiens au temps $t=t_0$, valeur qui sera itérée jusqu'à ce que les résidus $\Delta(\rho_c - \rho)_i$ aient la précision souhaitée.

3.3.3 Correction différentielle basée sur les observations Doppler

La méthode Doppler procède par mesure de vitesses radiales à partir des variations de fréquence d'un émetteur embarqué. Pour plus de détails quant aux méthodes d'observation, il faut se référer au chapitre I ; quant à la méthode analytique, elle est développée au chapitre suivant. Cette méthode est la plus facile puisque les signaux peuvent être captés automatiquement et indépendamment des conditions météorologiques. On dispose donc plus facilement d'un bon réseau de stations d'observation. Les mesures de fréquence sont actuellement très précises et peuvent atteindre le centième de hertz.

La fonction W s'écrit ici :

$$\text{puisque } \vec{\rho} = \vec{r} + \vec{R}$$

\vec{r} = vecteur position du satellite = (x,y,z)

\vec{R} = vecteur position de la station = (X,Y,Z)

(repère absolu)

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z + x\dot{X} + \dot{x}X + y\dot{Y} + \dot{y}Y + z\dot{Z} + \dot{z}Z}{\rho} \quad (3.3.6)$$

En écrivant l'équation aux différences pour les N temps d'observation, on obtient un système à 6 inconnues , $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \dot{\Delta x}_0, \dot{\Delta y}_0, \dot{\Delta z}_0$, que l'on résout par moindres carrés.

On itère le processus jusqu'au moment où la différence $\dot{\rho}_{ci}$ (vitesses radiales calculées) - $\dot{\rho}_{oi}$ (vitesses radiales observées) ait la précision souhaitée pour chaque temps.

3.3.4 - Correction différentielle basée sur les différents types d'observation

Lorsque la station est en mesure d'observer pour un même satellite la déclinaison et l'ascension droite, la distance relative station-satellite ρ et la vitesse radiale $\dot{\rho}$, on considère alors un système d'équations où les W considérés sont respectivement la déclinaison et l'ascension droite, la distance relative ρ et la vitesse radiale $\dot{\rho}$.

Nous avons toujours à résoudre par moindres carrés un système de $p+q+\omega$ équations à 6 inconnues.

p =nombre d'observations de l'ascension droite et de la déclinaison

q =nombre d'observations donnant ρ

ω =nombre d'observations permettant de déduire $\dot{\rho}$.

Remarque : Nous n'avons fait aucune hypothèse sur le nombre de stations et le nombre de passages du satellite, ceux-ci étant quelconques.

CHAPITRE 4

DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE
DE LA METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE
DANS LE CAS DES VITESSES RADIALES.

Considérons une ou des stations pouvant effectuer des observations Doppler. Nous aurons donc, si on se réfère au chapitre I, N valeurs de $\dot{\rho}_{oi}$ correspondantes, $i = 1 \dots N$.

$\dot{\rho}_{oi}$ est la vitesse radiale observée (indice o)

N est le nombre total d'observations

Disposant de ces N observations, nous cherchons à améliorer au mieux la position \vec{r}_0 et la vitesse \vec{v}_0 du satellite à un instant $t=t_0$. Nous noterons:

$\vec{X}_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ vecteur position-vitesse du satellite au temps $t=t_0$

$\vec{X} = (\vec{r}, \vec{v})$ vecteur position-vitesse en un temps t quelconque.

La position et la vitesse du satellite et de la station sont exprimées dans le repère absolu défini au chapitre 2.

$$\begin{aligned} & \vec{r} (x, y, z) \\ & \vec{v} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \vec{R}_i &= (X_i, Y_i, Z_i) \text{ vecteur position et coordonnées} \\ & \text{de la station } i \end{aligned}$$

Nous ferons les calculs dans le cas d'une station (X,Y,Z) fournissant N observations pour simplifier les écritures.

Nous supposerons dans ce chapitre que l'orbite du satellite est parfaitement képlérienne.

Nous avons vu au chapitre 3 que nous devions résoudre un système de N équations du type (3.2.2) où la fonction W est, dans notre cas, la fonction "vitesse radiale", notée $\dot{\rho}$, en raison des observations.

Le système (3.2.2) est alors de la forme :

$$(\dot{\rho}_c - \dot{\rho}_o)_i = \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial x_o} \Delta x_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial y_o} \Delta y_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial z_o} \Delta z_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{x}_o} \Delta \dot{x}_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{y}_o} \Delta \dot{y}_o + \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{z}_o} \Delta \dot{z}_o \quad (4.I)$$

où les dérivées sont prises au temps $t=t_i$, $i=1, \dots, N$

où $\dot{\rho}_i = \dot{\rho}_i(x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o, X_o, Y_o, Z_o, \dot{X}_o, \dot{Y}_o, \dot{Z}_o)$

Nous supposons que les coordonnées de la station et sa vitesse sont connues exactement et que $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}$ sont nuls.

Avant de pouvoir résoudre le système à six inconnues $\Delta x_o, \Delta y_o, \Delta z_o, \Delta \dot{x}_o, \Delta \dot{y}_o, \Delta \dot{z}_o$, il nous faut connaître :

- les $\dot{\rho}_{ci}$: les range rate calculés aux N temps correspondant aux observations.
- les $\dot{\rho}_{oi}$: les range rate observés, fournis.
- Les coefficients $\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \xi}$ où $\xi \in \{x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o\}$

Calcul des $\dot{\rho}_{ci}$

Considérons les éléments cartésiens correspondant donc au problème des deux corps au temps t_o .

$$[x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o]_{t=t_o}$$

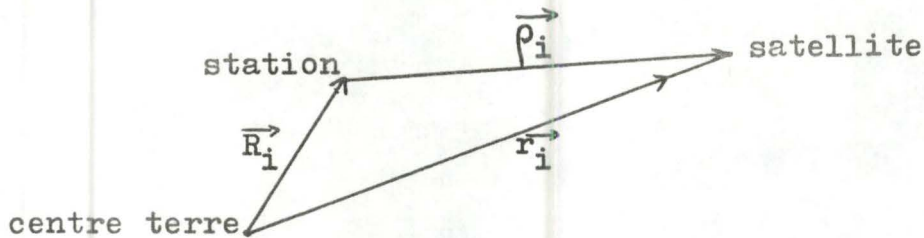
Le sextuplet de paramètres est une première approximation initiale de la position et de la vitesse.

Par une méthode analytique ou numérique (par exemple résolution de l'équation de Kepler) on calcule la position et la vitesse du satellite aux N temps correspondant aux observations.

Nous avons donc :

$$\left[x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i \right]_{t=t_i} \quad i=1 \dots N \quad (4.2a)$$

Considérons alors la figure suivante à l'instant t_i :



$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_i$$

en multipliant $\vec{\rho}_i$ scalairement par lui-même ,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_i &= \rho_i^2 = (\vec{r}_i - \vec{R}_i) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_i) \\ &= r_i^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{R}_i + R_i^2 \\ &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2x_i X_i - 2y_i Y_i - 2z_i Z_i + X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

En dérivant cette dernière équation par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\rho}_i = \dot{x}_i x_i + \dot{y}_i y_i + \dot{z}_i z_i + \dot{x}_i X_i + \dot{y}_i Y_i + \dot{z}_i Z_i \quad (4.4)$$

Après calcul des positions et vitesses des stations,

aux N temps, $\left[X_i, Y_i, Z_i, \dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{Z}_i \right]$ (4.2b)
 et (4.2b)
 remplaçons (4.2a) dans (4.4) , et nous avons les vitesses relatives cherchées $\dot{\rho}_{ci}$.

Calcul des $\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \xi}$ où $\xi \in \{x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$

Nous simplifierons les notations en supprimant l'indice i .

Dérivons (4.4) par rapport à ξ ; nous obtenons :

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} (L'_x - \frac{\dot{\rho}}{\rho} L_x) + \frac{\partial y}{\partial \xi} (L'_y - \frac{\dot{\rho}}{\rho} L_y) + \frac{\partial z}{\partial \xi} (L'_z - \frac{\dot{\rho}}{\rho} L_z) + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} L_x + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \xi} L_y + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \xi} L_z \quad (4.5)$$

$$\text{où } \begin{cases} L_x = \frac{x-X}{\rho} & L_y = \frac{y-Y}{\rho} & L_z = \frac{z-Z}{\rho} \\ L'_x = \frac{\dot{x}-\dot{X}}{\rho} & L'_y = \frac{\dot{y}-\dot{Y}}{\rho} & L'_z = \frac{\dot{z}-\dot{Z}}{\rho} \end{cases}$$

Remarquons que les $\frac{\partial X}{\partial \xi}$, $\frac{\partial Y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial Z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{X}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{Y}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{Z}}{\partial \xi}$ sont nuls .

Examinons (4.5) ; pour connaître les $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \xi}$ il nous faut :

- les $L_x, L_y, L_z, L'_x, L'_y, L'_z$, qui peuvent être facilement calculés à partir de (4.2a) et (4.2b).

Notons que $\dot{\rho}$ est calculé par (4.4) et ρ par (4.3)

- les $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{y}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \dot{z}}{\partial \xi}$ où ξ est un élément de l'ensemble $\{x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$. D'une façon plus concise nous devons connaître la matrice $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_0}$ où $\vec{X}_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ et $\vec{X} = (\vec{r}, \vec{v})$

Calcul de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_0}$

Nous prendrons comme éléments elliptiques l'ensemble $[a, S_e, C_e, U_0, S_0]$ définis au chapitre 2 . Rappelons :

a = demi-grand axe

$S_e = e \cos E_0$ où e = excentricité

E_0 = anomalie excentrique en $t=t_0$

$C_e = e \sin E_0$

\vec{U}_0 = vecteur unitaire de même direction que \vec{r}_0

\vec{S}_0 est un vecteur orthogonal à \vec{U}_0 dans le plan de l'orbite.

Si \vec{X}_0 est connu, les éléments elliptiques correspondants q_i sont facilement calculables. Comme un élément orbital, noté q , est fonction de \vec{X}_0 , on a $q = q(\vec{X}_0)$. (4.6)

Inversement, un vecteur \vec{X} est tel que $\vec{X} = \vec{X}(q_i)$. (4.7)

Différentiations totalement (4.6) et (4.7):

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial q}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial q}{\partial z_0} dz_0 + \frac{\partial q}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial q}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial q}{\partial z_0} dz_0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} d\vec{X} = & \frac{\partial \vec{X}}{\partial a} da + \frac{\partial \vec{X}}{\partial c_e} dc_e + \frac{\partial \vec{X}}{\partial S_e} dS_e + \frac{\partial \vec{X}}{\partial U_{x_0}} dU_{x_0} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial U_{y_0}} dU_{y_0} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial U_{z_0}} dU_{z_0} \\ & + \frac{\partial \vec{X}}{\partial S_{x_0}} dS_{x_0} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial S_{y_0}} dS_{y_0} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial S_{z_0}} dS_{z_0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{ce qui implique: } \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_0} = \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \vec{X}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \vec{X}_0} \quad (4.10)$$

Plus explicitement, par exemple, pour le premier élément de la matrice jacobienne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} = & \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial c_e} \frac{\partial c_e}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial S_e} \frac{\partial S_e}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial U_{x_0}} \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial U_{y_0}} \frac{\partial U_{y_0}}{\partial x_0} \\ & + \frac{\partial x}{\partial U_{z_0}} \frac{\partial U_{z_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial S_{x_0}} \frac{\partial S_{x_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial S_{y_0}} \frac{\partial S_{y_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial S_{z_0}} \frac{\partial S_{z_0}}{\partial x_0} \end{aligned}$$

$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_0}$ est donc le produit des matrices $\frac{\partial \vec{X}}{\partial q_i}$ (de dimension (6,9)) et

$\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_0}$ (de dimension (9,6)) que nous développons ci-après.

Calcul de la matrice $\frac{\partial q}{\partial \vec{x}_0}$

Nous obtenons les dérivées partielles des éléments q par rapport à \vec{X}_0 par différentiation des formules que nous supposons ici établies.

$$\frac{I}{a} = \frac{2}{r_0} + \frac{v_0^2}{\mu}$$

$$C_e = 1 - \frac{r_0}{a}$$

$$S_e = \frac{r_0 \dot{r}_0}{\mu a}$$

$$\vec{U}_0 = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{r_0} \\ \frac{y_0}{r_0} \\ \frac{z_0}{r_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{x_0} \\ U_{y_0} \\ U_{z_0} \end{bmatrix}$$

ou μ est la masse de la terre

$$\dot{r}_0 = \dot{r}_0 \cdot \vec{U}_0 \quad \vec{S}_0 = \sqrt{\mu p} \vec{V}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \dot{x}_0 - \dot{r}_0 x_0 \\ r_0 \dot{y}_0 - \dot{r}_0 y_0 \\ r_0 \dot{z}_0 - \dot{r}_0 z_0 \end{bmatrix}$$

$$v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2$$

Pour plus de détails, il faut se référer au chapitre 9 du livre "Determination of orbits." d'Escobal.

Nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_0} \\ \frac{\partial a}{\partial y_0} \\ \frac{\partial a}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a^2 x_0}{r_0^3} \\ \frac{2a^2 y_0}{r_0^3} \\ \frac{2a^2 z_0}{r_0^3} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial \dot{x}_0} \\ \frac{\partial a}{\partial \dot{y}_0} \\ \frac{\partial a}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a^2 \dot{x}_0}{\mu} \\ \frac{2a^2 \dot{y}_0}{\mu} \\ \frac{2a^2 \dot{z}_0}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_e}{\partial x_0} \\ \frac{\partial C_e}{\partial y_0} \\ \frac{\partial C_e}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_0^2 x_0}{\mu r_0} \\ \frac{v_0^2 y_0}{\mu r_0} \\ \frac{v_0^2 z_0}{\mu r_0} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_e}{\partial \dot{x}_0} \\ \frac{\partial C_e}{\partial \dot{y}_0} \\ \frac{\partial C_e}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r_0 \dot{x}_0}{\mu} \\ \frac{2r_0 \dot{y}_0}{\mu} \\ \frac{2r_0 \dot{z}_0}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_e}{\partial x_0} \\ \frac{\partial S_e}{\partial y_0} \\ \frac{\partial S_e}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e x_0}{r_0^3} \\ \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e y_0}{r_0^3} \\ \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e z_0}{r_0^3} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_e}{\partial \dot{x}_0} \\ \frac{\partial S_e}{\partial \dot{y}_0} \\ \frac{\partial S_e}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e \dot{x}_0}{\mu} \\ \frac{y_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e \dot{y}_0}{\mu} \\ \frac{z_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{a S_e \dot{z}_0}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial U_{x_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial U_{x_0}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial U_{y_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial U_{y_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial U_{y_0}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial U_{z_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial U_{z_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial U_{z_0}}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} - \frac{x_0^2}{r_0^3} & -\frac{x_0 y_0}{r_0^3} & -\frac{x_0 z_0}{r_0^3} \\ -\frac{x_0 y_0}{r_0^3} & \frac{1}{r_0} - \frac{y_0^2}{r_0^3} & -\frac{y_0 z_0}{r_0^3} \\ -\frac{x_0 z_0}{r_0^3} & -\frac{y_0 z_0}{r_0^3} & \frac{1}{r_0} - \frac{z_0^2}{r_0^3} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_{x_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial S_{y_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial S_{z_0}}{\partial x_0} & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial y_0} & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_0 \left(\frac{x_0^2}{r_0^2} - 1 \right) & \frac{y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0}{r_0} + \frac{x_0 y_0 \dot{r}_0}{r_0^2} & \frac{z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0}{r_0} + \frac{x_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2} \\ \frac{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0}{r_0} + \frac{x_0 y_0 \dot{r}_0}{r_0^2} & \dot{r}_0 \left(\frac{y_0^2}{r_0^2} - 1 \right) & \frac{z_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{z}_0}{r_0} + \frac{y_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2} \\ \frac{x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0}{r_0} + \frac{x_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2} & \frac{y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0}{r_0} + \frac{y_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2} & \dot{r}_0 \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 - \frac{x_0^2}{r_0} & -\frac{x_0 y_0}{r_0} & -\frac{x_0 z_0}{r_0} \\ -\frac{x_0 y_0}{r_0} & r_0 - \frac{y_0^2}{r_0} & -\frac{y_0 z_0}{r_0} \\ -\frac{x_0 z_0}{r_0} & -\frac{y_0 z_0}{r_0} & r_0 - \frac{z_0^2}{r_0} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Calcul des $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q}$ où q appartient à l'ensemble $\{a, S_e, C_e, \vec{U}_0, \vec{V}_0\}$

La matrice $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$ est obtenue en dérivant partiellement par rapport à q :

$$\vec{r} = x_\nu \vec{U}_0 + y_\nu \vec{V}_0 \quad \text{où } \begin{aligned} x_\nu &= r \cos(\nu - \nu_0) \\ y_\nu &= r \sin(\nu - \nu_0) \\ \nu &= \text{anomalie vraie au temps } t \\ \nu_0 &= \text{anomalie vraie au temps } t_0, \end{aligned}$$

et en exprimant les dérivées partielles en fonction de r , r_0 , $\sin(\nu - \nu_0)$, $\cos(\nu - \nu_0)$, S_e , C_e .

Nous donnons ensuite les $\frac{\partial r \dot{\vec{r}}}{\partial q}$, puisque les $\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q}$ en découlent. En effet :

$$\frac{\partial r \dot{\vec{r}}}{\partial q} = \dot{\vec{r}} \frac{\partial r}{\partial q} + r \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q}$$

$$\text{et donc } \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r \dot{\vec{r}}}{\partial q} - \dot{\vec{r}} \frac{\partial r}{\partial q} \right] \quad (4.20)$$

$$\text{où } \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial x}{\partial q} + y \frac{\partial y}{\partial q} + z \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

Pour trouver les $\frac{\partial r \dot{\vec{r}}}{\partial q}$, nous dérivons l'expression suivante :

$$r \dot{\vec{r}} = \sqrt{\mu a} D \vec{U} + \sqrt{\mu p} \vec{V}$$

$$\text{où } D = \frac{r \dot{\vec{r}}}{\sqrt{\mu a}}$$

$$\text{et } p = a (1 - S_e^2 - C_e^2) = a (1 - e^2)$$

Pour plus de détails dans ces calculs, il faut se référer à Escobal: "Methods of orbit determination".

Notons les résultats :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = A_1 \vec{U}_0 + A_2 \vec{S}_0 \quad (4.21)$$

$$\text{où } A_1 = \frac{r}{a} \cos(v-v_0) + \frac{3}{2}a (M-M_0) \left\{ \frac{1}{\sqrt{ap}} \left(\frac{p}{r_0} - c_e \right) \sin(v-v_0) \right. \\ \left. + S_e \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0} \right) \left[1 - \cos(v-v_0) \right] - \frac{S_e}{r} \right\}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{r}{2a} \sin(v-v_0) - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{ap}}{r_0} (M-M_0) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{p}} (M-M_0) \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_e} = C_1 \vec{U}_0 + C_2 \vec{S}_0 \quad (4.22)$$

$$\text{où } C_1 = -a + \frac{a^2 S_e \sin(v-v_0)}{\sqrt{ap}} + \left(\frac{r r_0 - a^2 S_e^2 + 2ar c_e}{p} \right) (1 - \cos(v-v_0))$$

$$+ ar \left(\frac{c_e}{p} - \frac{1}{r_0} \right) \sin^2(v-v_0) - \frac{ar}{r_0} (1 - \cos(v-v_0))$$

$$+ \frac{a^2 r S_e}{\sqrt{ap}} \left[\frac{2}{r_0} - \frac{1}{p} (1 + c_e) \right] \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \sin(v-v_0)$$

$$+ \frac{a^2 S_e^2 r}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0} \right) \left[1 - \cos(v-v_0) \right]^2$$

$$C_2 = \frac{ar}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{\sin(v-v_0)}{r_0} + \frac{1}{p} \sqrt{\frac{a}{p}} S_e \left[1 - \cos(v-v_0) \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{\sin(v-v_0)}{p} \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial S_e} = S_1 \vec{U}_0 + S_2 \vec{S}_0 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{où } S_1 &= \frac{ar}{\sqrt{ap}} \sin(v-v_0) \left\{ 1 + \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \left(1 - \frac{r_0}{p} C_e \right) \right\} \\ &+ S_e \frac{ar}{p} \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \cos(v-v_0) \\ &+ S_e \frac{ar_0}{p} \left[1 - \cos(v-v_0) \right] \left\{ \frac{r}{p} \left[1 - \cos(v-v_0) \right] - 1 \right\} \\ S_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{rr_0 \sqrt{ap}}{p^2} \left[1 - \cos(v-v_0) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial U_{x_0}} & \frac{\partial x}{\partial U_{y_0}} & \frac{\partial x}{\partial U_{z_0}} \\ \frac{\partial y}{\partial U_{x_0}} & \frac{\partial y}{\partial U_{y_0}} & \frac{\partial y}{\partial U_{z_0}} \\ \frac{\partial z}{\partial U_{x_0}} & \frac{\partial z}{\partial U_{y_0}} & \frac{\partial z}{\partial U_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\nu & 0 & 0 \\ 0 & x_\nu & 0 \\ 0 & 0 & x_\nu \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial S_{x_0}} & \frac{\partial y}{\partial S_{y_0}} & \frac{\partial z}{\partial S_{z_0}} \\ \frac{\partial y}{\partial S_{x_0}} & \frac{\partial y}{\partial S_{y_0}} & \frac{\partial y}{\partial S_{z_0}} \\ \frac{\partial z}{\partial S_{x_0}} & \frac{\partial z}{\partial S_{y_0}} & \frac{\partial z}{\partial S_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_\nu}{\sqrt{\mu p}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_\nu}{\sqrt{\mu p}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_\nu}{\sqrt{\mu p}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Les dérivées partielles de $\vec{r}\dot{r}$ sont :

$$\frac{\partial \vec{r}\dot{r}}{\partial a} = \tilde{A}_1 \vec{U}_0 + \tilde{A}_2 \vec{S}_0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \tilde{A}_1 &= \left\{ \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r} \sqrt{\mu p} a D \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu p}}{a} \right\} \sin(v-v_0) \\ &\quad - \left\{ \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r^2} \sqrt{\mu a} a D^2 + \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r r_0} \sqrt{\mu a} a D S_e \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (M-M_0) \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} D \right\} [1 - \cos(v-v_0)] \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{3}{2} (M-M_0) \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r r_0} p \sqrt{\mu a} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} D \right\} \right\} \\ \tilde{A}_2 &= \left\{ \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sqrt{\frac{a}{p}} + \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r^2} \sqrt{\frac{a}{p}} a D^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r r_0} \sqrt{ap} \right\} \sin(v-v_0) \\ &\quad + \left\{ \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r} \frac{a D}{p} - \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r r_0} a S_e - \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r^2} a D \right\} [1 - \cos(v-v_0)] \\ &\quad - \left\{ \frac{3}{2} \frac{(M-M_0)}{r r_0} a D \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{r}\dot{r}}{\partial C_e} = \tilde{C}_1 \vec{U}_0 + \tilde{C}_2 \vec{S}_0 \quad (4.27)$$

$$\text{où } \tilde{C}_1 = \left\{ a \sqrt{\mu a} \beta_1 \cos(v-v_0) + a \sqrt{\frac{\mu}{p}} C_e \sin(v-v_0) + D \sqrt{\mu a} \beta_3 - \sqrt{\mu p} \beta_4 \right\}$$

où les coefficients β sont définis :

$$\beta_1 = \frac{\sin(v-v_0)}{\sqrt{ap}} - \frac{S_e}{p} [1 - \cos(v-v_0)]$$

$$\beta_2 = a \left\{ \frac{Da}{r\sqrt{ap}} \sin(v-v_0) - \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{p} \left(\frac{r_0}{a} - \frac{DaS_e}{r} \right) [1 - \cos(v-v_0)] \right\}$$

$$\beta_3 = \left(\beta_2 + \frac{2aC_e}{p} \right) [1 - \cos(v-v_0)] - \frac{pa^2\beta_1^2}{r_0}$$

$$\beta_4 = - \left(\frac{aC_e}{p} + \beta_2 \right) \sin(v-v_0) - a\sqrt{\frac{a}{p}} \beta_1 [1 - \cos(v-v_0)]$$

$$\text{et } \tilde{c}_2 = \left\{ a\sqrt{\frac{a}{p}} \beta_1 \sin(v-v_0) + \frac{Da^2}{p\sqrt{ap}} C_e \sin(v-v_0) + \beta_3 + D\sqrt{\frac{a}{p}} \beta_4 \right\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial S_e} = \tilde{S}_1 \vec{U}_0 + \tilde{S}_2 \vec{V}_0 \quad (4.28)$$

$$\text{où } \tilde{S}_1 = \left\{ \gamma_1 \cos(v-v_0) + a\sqrt{\frac{\mu}{p}} S_e \sin(v-v_0) + \sqrt{\mu a} D \gamma_3 - \sqrt{\mu p} \gamma_4 \right\}$$

$$\tilde{S}_2 = \left\{ \frac{\gamma_1}{\sqrt{\mu p}} \sin(v-v_0) + \frac{a^2 S_e D}{p\sqrt{ap}} \sin(v-v_0) + \gamma_3 + D\sqrt{\frac{a}{p}} \gamma_4 \right\}$$

avec les coefficients **auxiliaires**

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu a} \left\{ 1 - \frac{r_0}{p} [1 - \cos(v-v_0)] \right\}$$

$$\gamma_2 = a \left\{ \beta_1 - \frac{r_0}{rp} D [1 - \cos(v-v_0)] \right\}$$

$$\gamma_3 = \left\{ \frac{2aS_e}{p} + \gamma_2 + a\beta_1 \right\} [1 - \cos(v-v_0)]$$

$$\gamma_4 = - \left\{ \frac{aS_e}{p} + \gamma_2 \right\} \sin(v-v_0) + \frac{r_0\sqrt{ap}}{p^2} [1 - \cos(v-v_0)]^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{U}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{U}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{U}_{z_0}} \\ \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{U}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{U}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{U}_{z_0}} \\ \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{U}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{U}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{U}_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{U} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{U} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où $\tilde{U} = \sqrt{\mu a} D \cos(v-v_0) - \sqrt{\mu p} \sin(v-v_0)$

et enfin

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{S}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{S}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_x}{\partial \dot{S}_{z_0}} \\ \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{S}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{S}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_y}{\partial \dot{S}_{z_0}} \\ \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{S}_{x_0}} & \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{S}_{y_0}} & \frac{\partial \dot{r}_z}{\partial \dot{S}_{z_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

où $\tilde{S} = \cos(v-v_0) + \sqrt{\frac{a}{p}} D \sin(v-v_0)$

Connaissant les $\frac{\partial \vec{X}_i}{\partial q}$ et $\frac{\partial q}{\partial \vec{X}_0}$, nous avons la matrice $\frac{\partial \vec{X}_i}{\partial \vec{X}_0}$ (par 4.10)

ce qui nous permet de déterminer les coefficients $\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \xi}$, par (4.5),

du système (4.1) qui peut être résolu par moindres carrés.

On obtient alors une nouvelle valeur des éléments cartésiens au temps $t=t_0$ qui sera itérée jusqu'à ce que les différences $(\dot{p}_c - \dot{p}_0)_i$ soient petites .

Remarque importante : Attention !

Toutes les équations de ce chapitre ont été établies pour l'équation de Newton suivante

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{k^2 \mu}{r^3} m \vec{r}$$

dans laquelle on a posé : $\tau = k(t-t_0)$

On a donc par suite :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = - \frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

où les dérivées sont prises par rapport à τ .

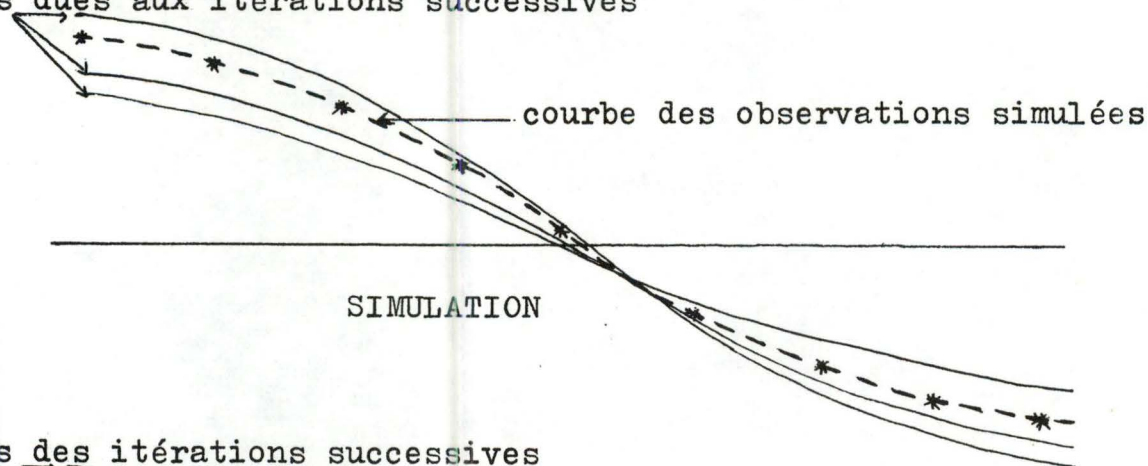
CHAPITRE 5

PROGRAMME DE CONDENSATION DES DONNEES DOPPLER
PAR SIMULATION DES OBSERVATIONS5.1 Principe de simulation

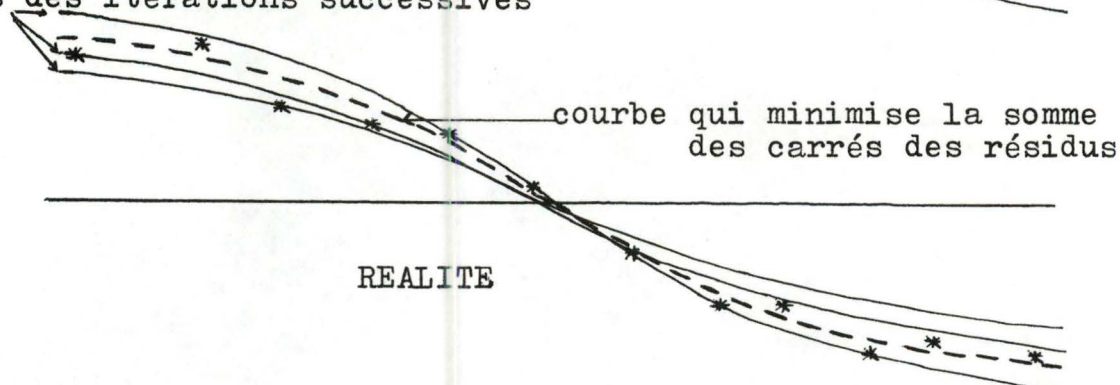
Nous avons décrit au chapitre 3 comment il est possible par correction différentielle d'ajuster à un certain nombre de données d'observation une courbe correspondant à une orbite keplerienne. On peut donc ramener une série de N observations d'un ou plusieurs passages de satellite à une série de 6 paramètres elliptiques.

La partie simulation du programme construit une série d'observations sur une courbe keplerienne à partir de la position et de la vitesse au temps t .

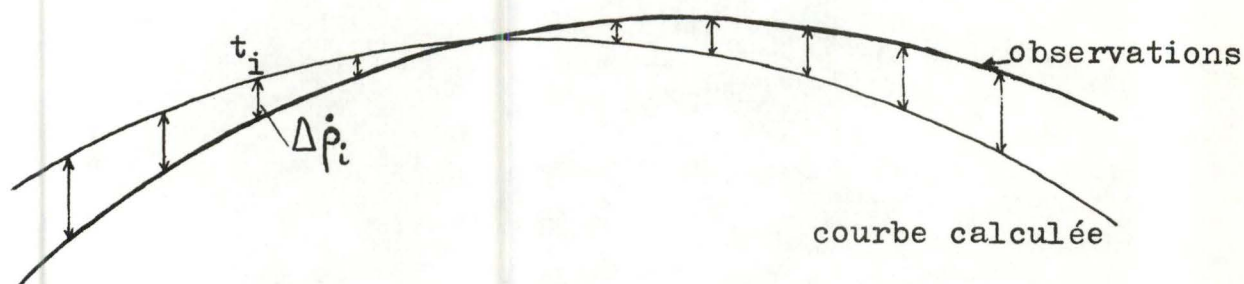
courbes dues aux itérations successives



courbes des itérations successives



Pour un ou plusieurs passages du satellite , et à partir d'une approximation relativement bonne de la position et de la vitesse X en un des temps , on cherche par itérations successives la position et la vitesse X_0 qui au même temps s'associe à une trajectoire elliptique qui minimise la somme des carrés des résidus Doppler sur les temps d'observation .



Dans notre cas , comme les observations se situent sur une courbe keplerienne , la somme des carrés des résidus doit tendre vers 0 (aux erreurs d'arrondis près) .

L'approximation de départ est simulée en perturbant un ou plusieurs éléments elliptiques de la trajectoire comprenant les observations (et en recalculant les éléments cartésiens issus de la nouvelle orbite obtenue) .

Rappel important :

La trajectoire que l'on modifie n'est keplerienne que pour les besoins de la simulation . Elle sert simplement à calculer des observations raisonnables.

CONSTANTES

PI = 3.1415926532
MINEL = PI/18
MU = 1
OMEGA = 0.437527 10⁻²
RK = 0.07437

INITIALISATIONS

E = 0
IC = 0
NA = 0
IP = 1
NI = 0
NOPT = 0 (OU 1)
NT = 0
T5(1) = 0

LECTURE

X , TOG, BETA , TO, POST

CHANGEMENT DE REPERE
POUR LA POSITION
VITESSE INITIALE

X

ELEL

CALCUL DES ELEMENTS
ELLIPTIQUES
CORRESPONDANT

A4, CE4, SE4, U4, V4, E4, M4,
R14, ROME4, W4, ROVO4,
RO4, GE4

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE KEPLERIEUNE
(DE 5 EN 5 MINUTES)

$T1 = T5(1)$

$T1 = T1 + 5$

$T2 = T1 - T5(1)$

CALCUL DES COORDONNEES DE LA
STATION ET DU SATELLITE EN T1

POS, VIT, X3

TEST D'OBSERVABILITE

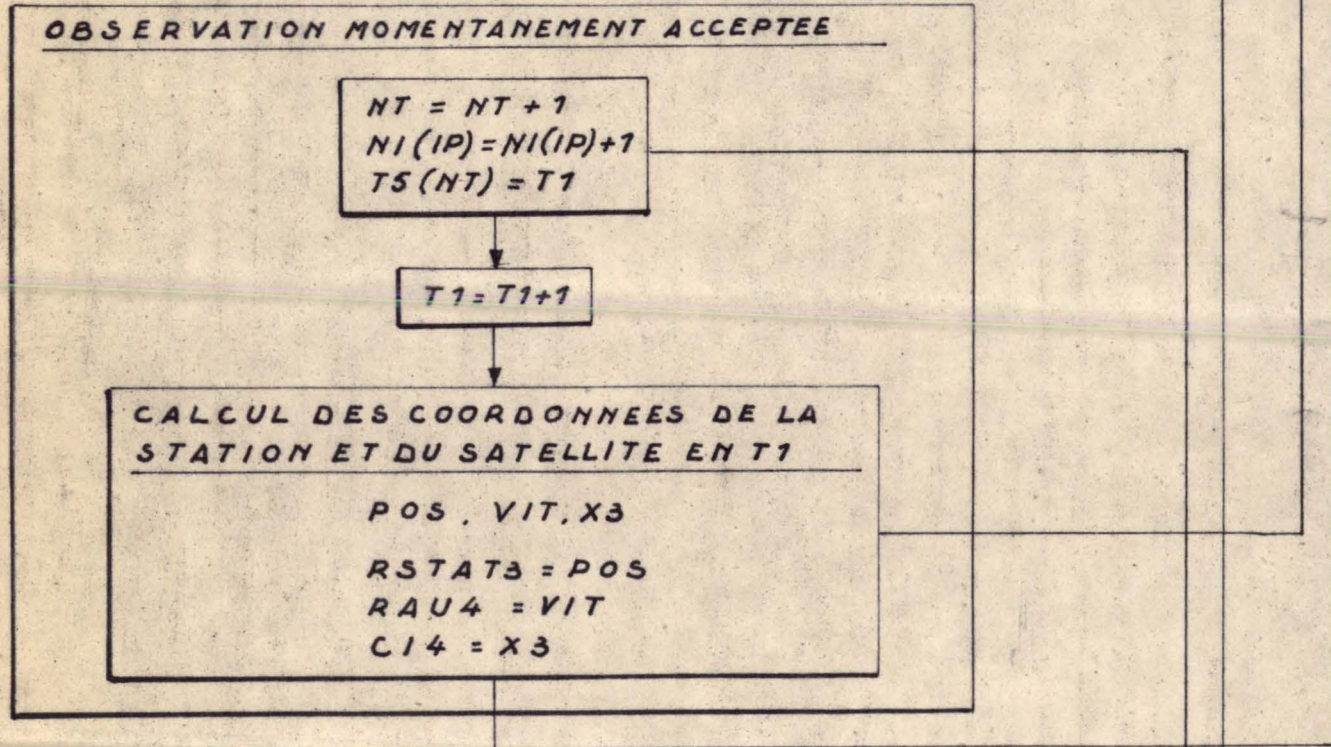
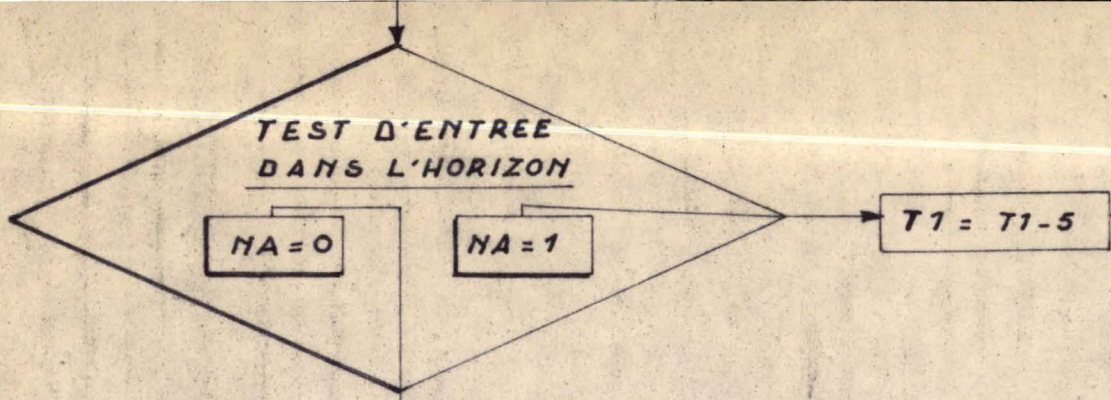
IH = 0

IH = 1

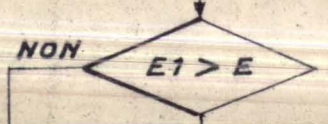
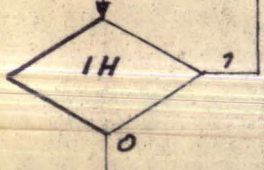
POSVIT

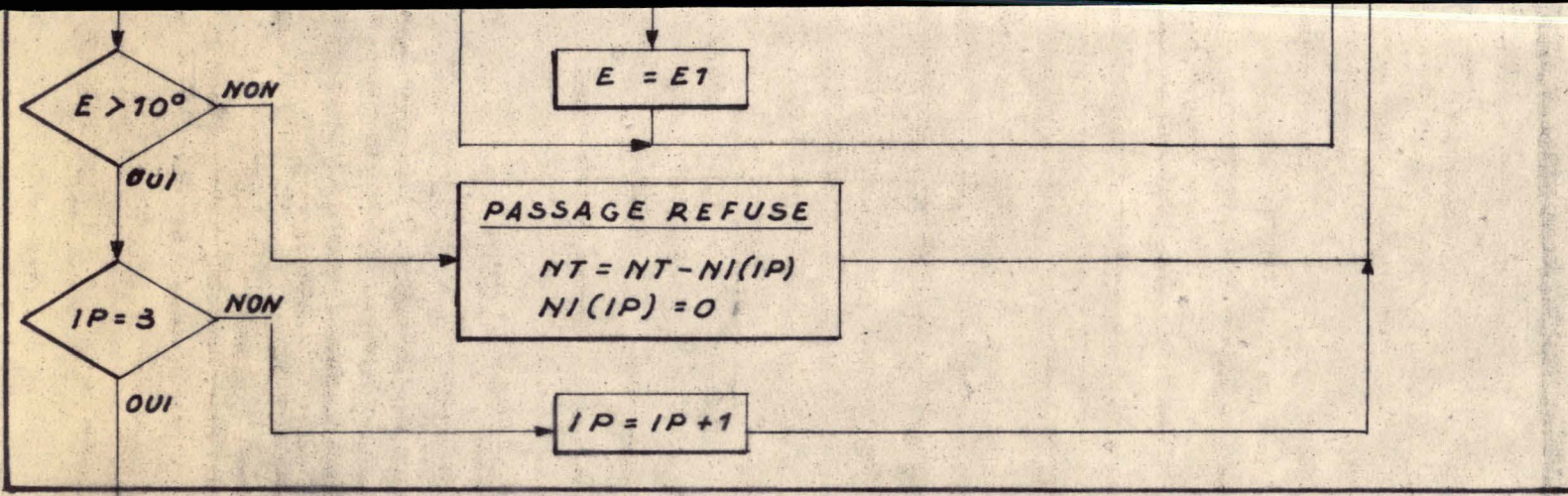
STAPOS

HORIZ



ELEVAT





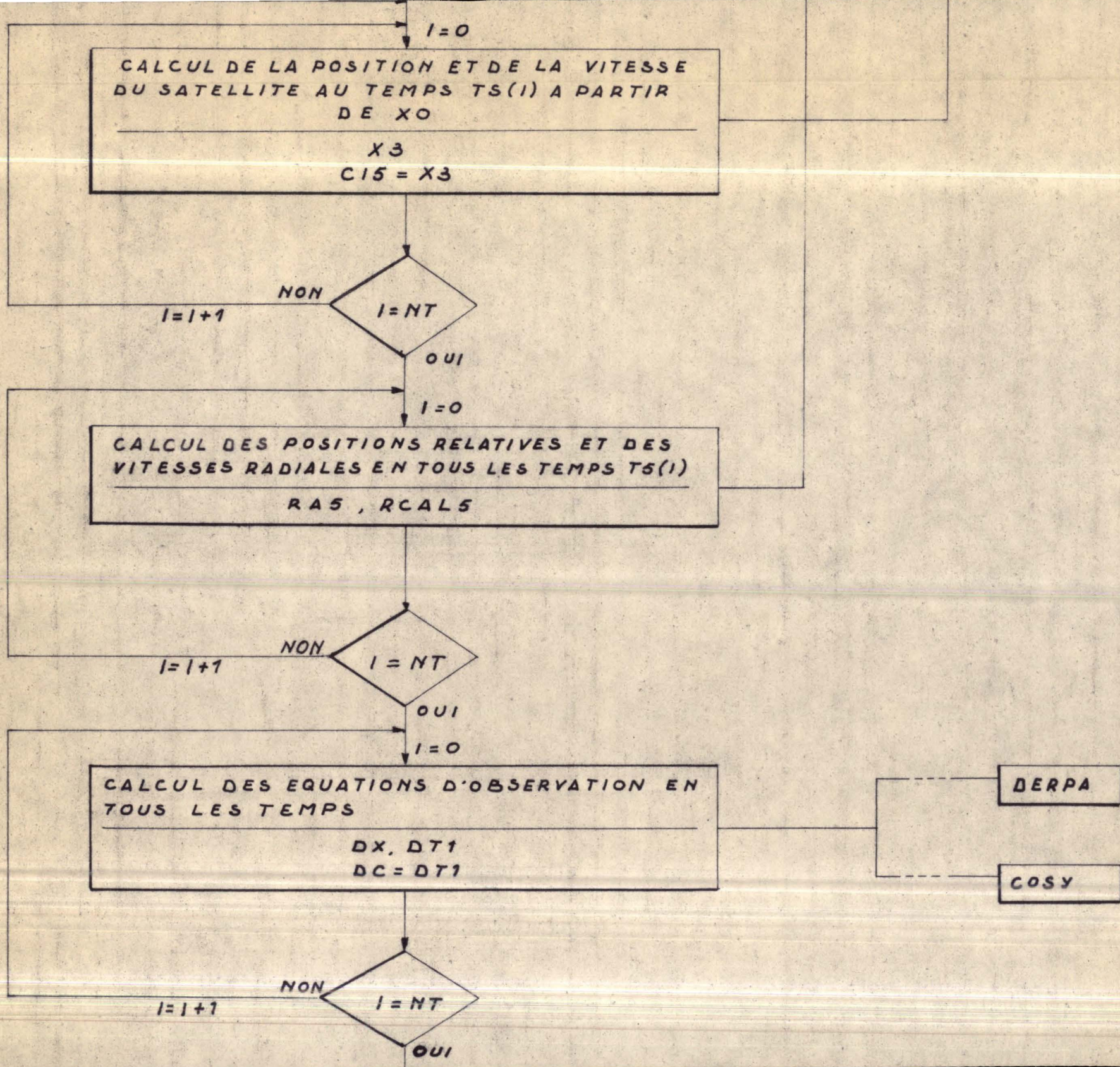
CALCUL DES POSITIONS RELATIVES ET
DES VITESSES RADIALES AUX TEMPS ACCEPTES
RA 4 , ROBS 4

RANRAT

PERTURBATION D'UN OU PLUSIEURS ELEMENTS
ELLIPTIQUES
(SIMULATION D'UNE APPROXIMATION)
EXEMPLE: $A5 = A4 * 1.001$

CALCUL DE L'APPROXIMATION
 $x \sigma$

ELCAR



REDUCTION DU SYSTEME D'EQUATIONS A LA FORME
NORMALE 6x6

DSN

RESOLUTION DU SYSTEME

DT

SYMMAT

CORRECTION DE L' APPROXIMATION

 $XO = XO + DT$

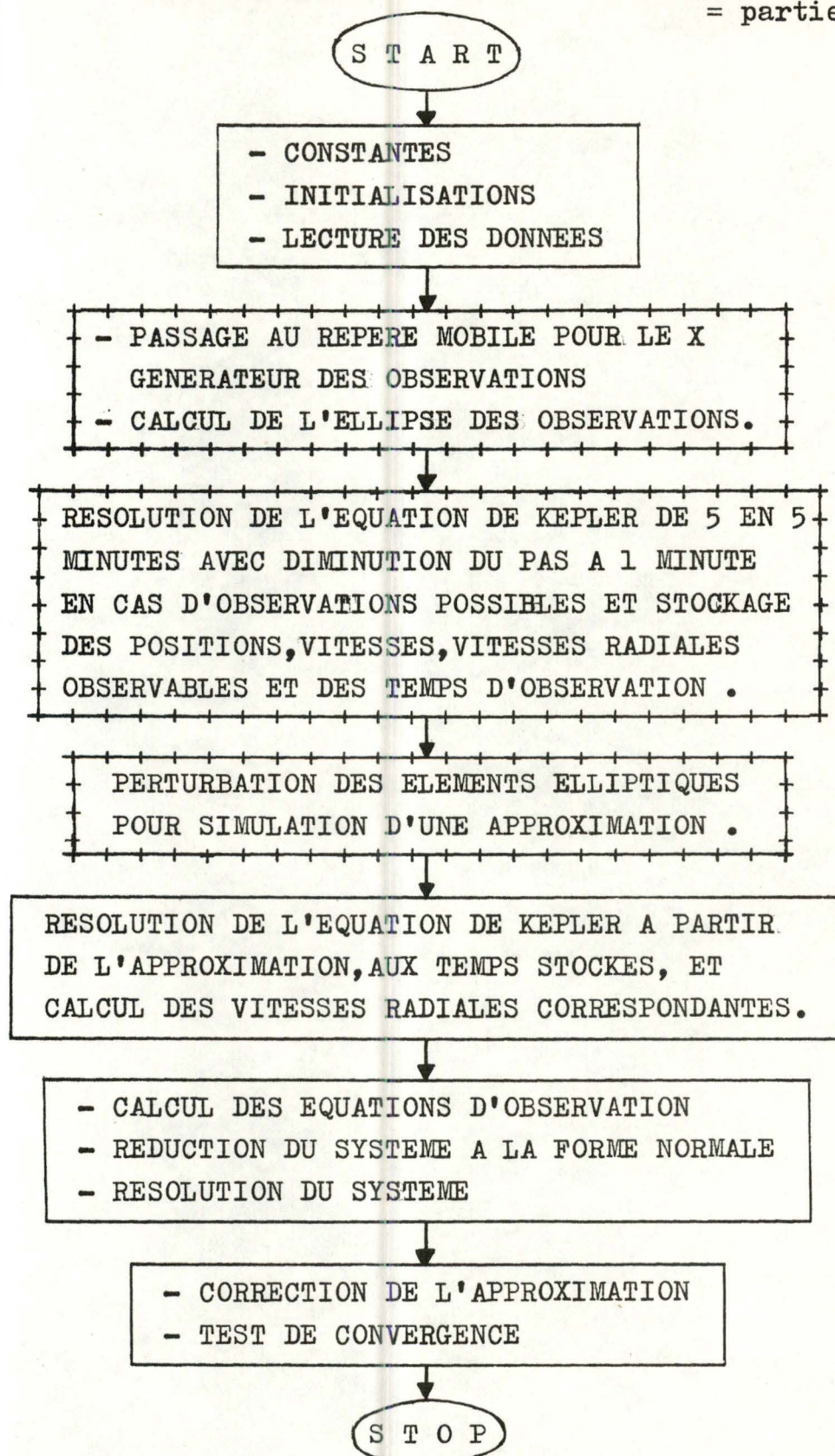
TEST DE CONVERGENCE
 $DT < 1.10^{-7}$

IC = IC + 1

STOP

5.2 Fonctionnement global du programme5.2.1 Schéma général

Légende : + + + + +
= partie simulation




```

151 C      CONSTANTES DU PROBLEME
152 C      -----
153 C
154         PI=3.141592653200
155         DERA=PI/180
156         EPSIL=1.D-13
157         MINEL=10*DERA
158         MU=1.00
159         OMEGA=C.437527D-02
160         RK=0.0743700
161 C
162 C      INITIALISATION
163 C      -----
164 C
165         E1=0.00
166         IC=0
167         NA=0
168         IP=1
169         DO 444 I=1,3
170 444     NI(I)=0
171         NOPT=0
172         NOPT1=1
173         NT=0
174         R=0.00
175         T5(1)=0.00

```

151 → 160 : les constantes du problème sont données par initialisation, dans les unités choisies.

161 → 175 : les variables-compteurs et les vecteurs à remplir sont initialisés également.

```

176 C
177 C      LECTURE DES DONNEES
178 C      -----
179 C
180         READ 1000,X
181         READ 1000,TOG
182         READ 1000,BETA,TC
183         READ 1000,(POST(I),I=1,3)

```

176 → 183 : toutes les données nécessaires au programme sont lues à cet endroit. Il s'agit de :

- X, vecteur générateur des observations simulées ;
- TOG, temps sidéral de Greenwich au moment initial ;
- BETA, latitude de la station d'observation.
- TO, temps sidéral de la station au moment initial (TOG + longitude de la station) ;
- POST, coordonnées de la station dans le repère mobile.

Remarque : ces données sont surabondantes ; en réalité , BETA peut être déterminée par POST de même que la longitude de la station . Et donc TO peut être connu également par TOG.

```

185 C      RECHERCHE DU RAYON TERRESTRE, DE LA LATITUDE, DE LA LONGITUDE POUR
186 C      LE CHANGEMENT DE REPERE
187 C      -----
188 C
189          DO 31 I=1,3
190      31 R=R+X(I)*X(I)
191          R=DSQRT(R)
192          ALPHA1=DATAN2(X(2),X(1))
193          X1=X(1)*X(1)+X(2)*X(2)
194          X1=DSQRT(X1)
195          BETA1=DATAN2(X(3),X1)
196          TOA=TOG+ALPHA1
197          XX(1)=R*DCOS(BETA1)*DCOS(TOA)
198          XX(2)=R*DCOS(BETA1)*DSIN(TOA)
199          XX(3)=X(3)
200          XX(4)=X(4)-OMEGA*X(2)
201          XX(5)=X(5)+OMEGA*X(1)
202          XX(6)=X(6)
203          XXX=XX(4)
204          XX(4)=XXX*DCCS(TOG)-XX(5)*DSIN(TOG)
205          XX(5)=XXX*DSIN(TOG)+XX(5)*DCOS(TOG)
206          DO 32 I=1,6
207          PRINT 1001,XX(I)
208      32 X(I)=XX(I)

```

184 → 208 : le X générateur des observations est donné dans les axes mobiles ; il faut donc lui faire subir le changement de repère décrit au paragraphe 2.3 après calcul de la latitude et de la longitude du satellite.

```

210 C      CALCUL DES ELEMENTS ELLIPTIQUES CORRESPONDANT AU VECTEUR OBSERVE
211 C      -----
212 C
213          CALL ELEL(X,A4,CE4,SE4,U4,V4,E4,M4,RI4,ROME4,h4,RCV04,RC4,GE4)
214          T1=T5(1)

```

209 → 213 : connaissant les coordonnées du X générateur dans le repère absolu , on peut calculer les éléments elliptiques de la trajectoire de simulation par appel de la sous-routine ELEL.

214 : on initialise alors la variable temps pour commencer la résolution de l'équation de Kepler.

```

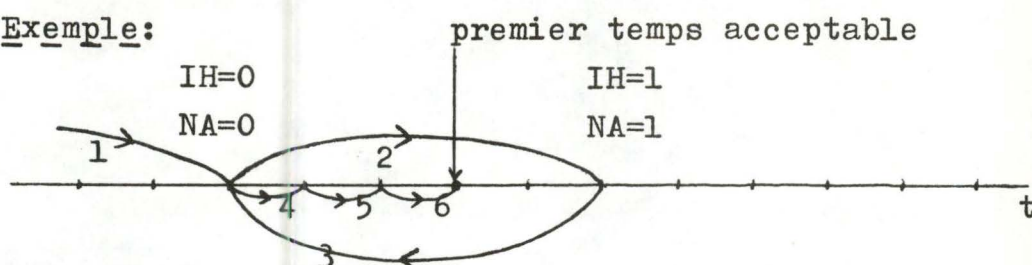
216 C      CALCUL DES POSITIONS SUR LA TRAJECTOIRE DE 5 EN 5 MINUTES PAR
217 C      RESOLUTION DE L'EQUATION DE KEPLER
218 C      -----
219 C
220 C
221 C      CALCUL DES COORDONNEES DU SATELLITE ET DE LA STATION AU TEMPS T1
222 C      EN DEDUIRE SI LE SATELLITE EST AU-DESSUS DE L'HORIZON - SI OUI
223 C      CHANGEMENT DANS LE PAS D'INTEGRATION (DE MINUTE EN MINUTE )
224 C      .....
225 C
226 C      40 T1=T1+5.D0
227 C      44 T2=T1-T5(1)
228 C      CALL POSVIT(X,X3,CE4,SE4,ROV04,RC4,E4,A4,M4,GE4,T2)
229 C      CALL STAPOS(FOST,T2,BETA,TO,POS,VIT)
230 C      DO 58 I=1,3
231 C      58 X4(I)=X3(I)
232 C      CALL HORIZ(POS,X4,IH)
233 C      IF(IH.EQ.1)GOTO 42
234 C      IF(NA.EQ.0)GOTO 40
235 C      T1=T1+1.D0
236 C      GOTO 44
237 C      42 IF(NA.EQ.1)GOTO 51
238 C      NA=1
239 C      T1=T1-5.D0
240 C      GOTO 44
241 C      51 CALL ELEVAT(POS,X4,E)
242 C      NA=0
243 C
244 C      OBSERVATION MOMENTANEMENT ACCEPTEE
245 C      .....
246 C
247 C      52 NI(IP)=NI(IP)+1
248 C      NT=NT+1
249 C      DO 45 I=1,6
250 C      45 CI4(NT,I)=X3(I)
251 C      DO 46 I=1,3
252 C      RSTAT3(NT,I)=FOS(I)
253 C      46 RAU4(NT,I)=VIT(I)
254 C      T5(NT)=T1
255 C      T1=T1+1.D0
256 C      T2=T1-T5(1)
257 C      CALL FOSVIT(X,X3,CE4,SE4,ROV04,RC4,E4,A4,M4,GE4,T2)
258 C      CALL STAPOS(FOST,T2,BETA,TO,POS,VIT)
259 C      DO 59 I=1,3
260 C      59 X4(I)=X3(I)
261 C      CALL HORIZ(POS,X4,IH)
262 C
263 C      CALCUL DE L'ELEVATION MAXIMUM - SI ELLE EST INFERIEURE A 10 DEGRES
264 C      LE PASSAGE EST REFUSE
265 C      .....
266 C
267 C      CALL ELEVAT(POS,X4,E1)
268 C      IF((E-E1).LT.C.D())E=E1
269 C      IF(IH.EQ.1)GOTO 52
270 C      IF(E.LT.MINEL)GOTO 50
271 C      PRINT 2007,IP,NI(IP)
272 C
273 C      TEST SUR LE NOMBRE DE PASSAGES
274 C      .....
275 C
276 C      IF(IP.EQ.3)GOTO 40
277 C      IP=IP+1
278 C      GOTO 40
279 C      50 NT=NT-NI(IP)
280 C      NI(IP)=0
281 C      GOTO 40

```

226 → 229 : calcul, 5 minutes plus tard, des coordonnées du satellite (POSVIT) et de la station (STAPOS).

230 → 240 : on vérifie au nouveau temps si le satellite est dans l'horizon de la station (HORIZ). Si non, on augmente de nouveau le temps de 5 minutes. Si oui, on regarde s'il l'était déjà au temps précédent (test sur NA). Dans l'affirmative, on augmente le temps d'une minute et on poursuit la résolution. Le cas échéant, on retourne au temps précédent (239) après avoir signalé qu'on était dans l'horizon (238).

Exemple:



241 - 242 : lorsqu'on a atteint la 1^{ère} observation valable on calcule l'élévation du satellite et on réinitialise l'indice NA qui ne servira plus avant le passage suivant.

243 → 271 : on poursuit maintenant sans problème le processus de résolution de minute en minute jusqu'à sortie de l'horizon (le test HORIZ étant appliqué à chaque temps successif). L'élévation est, elle aussi, calculée à chaque fois et retenue si elle est supérieure aux précédentes (267 — 270).

On retient également en cours de résolution le nombre total d'observations valables (248) et le nombre d'observations valables sur le passage considéré (247).

279 — 280 : si l'élévation maximum est inférieure à 10° , on refuse le passage. On réinitialise le nombre d'observations valables partiel et on ramène le nombre d'observations total à sa valeur au passage précédent.

276 → 278 : on décide ici de n'accepter que 3 passages convenables (on pourrait éventuellement augmenter ce nombre, ce qui

(on bouillit élementement élementer se propre^{se} dit
518 → 518 : on dectre tot de n, eccerter dit 3 beaséles couleuertes

signifierait par là-même une augmentation du nombre d'équations d'observations, mais l'intérêt n'est pas très grand lorsqu'on dispose déjà d'une cinquantaine d'équations).

```

283 C      CALCUL DES POSITIONS RELATIVES ET DES VITESSES RADIALES ( OBSERVATION )
284 C      -----
285 C
286      60 CALL RANRAT(CI4,RSTAT3,RA4,RA4,ROBS4,T5)
287      IF(NOPT.EQ.0)GOTO 8001
288      PRINT 2000
289      DO 61 I=1,NT
290      61 PRINT 2001,T5(I)
291      PRINT 2002
292      DO 62 I=1,NT
293      62 PRINT 2003,(CI4(I,J),J=1,6)
294      PRINT 2004
295      DO 2006 I=1,NT
296      PRINT 2005,(RSTAT3(I,J),J=1,3)
297      2006 PRINT 2005,(RAU4(I,J),J=1,?)
298      8001 CONTINUE

```

286 : on dispose maintenant des temps valables, des coordonnées du satellite et de la station en ces temps. On calcule alors systématiquement les vitesses radiales.

287 → 298 : impression à option.

```

299 C
300 C      PERTURBATION D'UN OU DE PLUSIEURS ELEMENTS ELLIPTIQUES
301 C      ( FOUR SIMULATION )
302 C      -----
303 C
304      E5 = E4 + 0.02
305      22 CALL ELCAR(XC,A4,E5,R14,RCME4,W4,M4)
306      1 IC=IC+1
307      IF(NOPT1.EQ.0)GOTO 8006
308      PRINT 8998,IC
309      8006 CONTINUE

```

304 — 305 : on perturbe un des éléments elliptiques au hasard et on calcule les éléments cartésiens correspondant à la nouvelle ellipse(ELCAR) pour simuler une approximation.

306 : comptage des itérations.

307 → 309 : impression à option.

```

311 C   CALCUL DES COORDONNEES DU SATELLITE , DES POSITIONS RELATIVES ET DES
312 C   VITESSES RADIALES POUR TOUTS LES TEMPS
313 C   -----
314 C
315     CALL ELFL(X0,A5,CE5,SE5,U5,V5,E5,M5,R15,ROME5,W5,RCV05,R05,GE5)
316     DO 53 I=1,NT
317       T2=T5(I)-T5(1)
318     CALL POSVIT(XC,X3,CE5,SE5,RCV05,R05,E5,A5,M5,GE5,T2)
319     DO 53 J=1,6
320     53 CI5(I,J)=X3(J)
321     CALL RANRAT(CI5,RSTAT3,RAU4,RA5,RCAL5,T5)

```

310 → 321 : tous les temps acceptables étant connus, il n'est plus nécessaire de réeffectuer les tests de validité. On peut donc, par un DO sur le nombre total d'observations, calculer les vitesses radiales modifiées par le même processus.

```

322     DO 2 I=1,NT
323     DO 3 J=1,6
324     3 XXC(J)=CI4(I,J)
325     RHO=RA4(I)
326     RHOP=ROBS4(I)
327     DO 21 J=1,3
328     POS(J)=RSTAT3(I,J)
329     21 VIT(J)=RAU4(I,J)
330     T1=T5(I)-T5(1)
331     CALL DERPA(XXC,XC,A5,CE5,SE5,U5,V5,DX,T1)
332 C
333 C   CALCUL DES EQUATIONS D'OBSERVATION
334 C   -----
335 C
336     CALL COSY(XXC,DX,POS,VIT,DT1,RHO,RHOP)
337     DO 1977 J1=1,6
338     1977 DC(I,J1)=DT1(J1)
339     DC(I,7)=RCAL5(I)-RHOP4(I)
340     2 CONTINUE
341     NF=NT

```

322 → 341 : on calcule alors les équations d'observation (DERPA) & (COSY) cfr. chapitre 4, de même que les seconds membres (339).

```

342 C
343 C   REDUCTION DU SYSTEME SOUS FORME NORMALE
344 C   -----
345 C
346     11 DO 10 I=1,6
347       N=6
348       K=7
349     DO 10 J=1,7
350     10 DSN(I,J)=0.DU

```

```

351      DO 30 I=1,6
352      DO 30 J=1,7
353      DO 20 L=1,NE
354      20 DSN(I,J)=DSN(I,J)+DC(L,I)*DC(L,J)
355      IF(I.NE.J.OR.J.NE.K)DSN(J,I)=DSN(I,J)
356      30 CONTINUE
357      DO 88 I=1,6
358      DO 88 J=1,6
359      88 X2(I,J)=DSN(I,J)
360      IF(NOPT.EQ.0)GOTO 8000
361      DO 63 I=1,NT
362      63 PRINT 2003,(C15(I,J),J=1,6)
363      PRINT 9994
364      DO 9995 I=1,NT
365      9995 PRINT 9996,(DC(I,J),J=1,7)
366      PRINT 8997
367      DO 1978 I=1,6
368      1978 PRINT 9004,(DSN(I,J),J=1,7)
369      8000 CONTINUE

```

342 → 356 : le système surdéterminé (NT 6) est alors réduit à la forme nouvelle (6 6) (Appendice III) afin d'être résolu par méthode directe.

356 → 359 : il est transféré dans une matrice auxiliaire.

360 → 369 : impressions à option.

```

371 C      INVERSION DE LA MATRICE ET CALCUL DU VECTEUR CORRECTION
372 C      -----
373 C
374      CALL SYMMAT(X2,N)
375      DO 89 I=1,6
376      DT(I)=0.00
377      DO 90 K=1,6
378      90 DT(I)=DT(I)+X2(I,K)*DSN(K,7)
379      89 CONTINUE

```

374 : la matrice est inversée.

375 → 379 : la solution est obtenue par produit du second membre et de la matrice inversée.

```

381 C      NOUVEAU VECTEUR (ALCULE
382 C      -----
383 C
384      47 DO 5 I=1,6
385      5 X0(I)=X0(I)-DT(I)
386      IF(NOPT1.EQ.0)GOTO 8005
387      12 PRINT 9993
388      PRINT 8999,(DT(I),I=1,6)
389      PRINT 8991
390      PRINT 8992,(X0(I),I=1,6)
391      8005 CONTINUE

```

```

392      NOPT=0
393      DT5=DABS(DT(1))
394      DO 400 I=2,6
395      IF(DABS(DT(I))-DT5.GE.0)DT5=DABS(DT(I))
396 400 CONTINUE
397      IF(DT5.LE.1.D-07)GOTO 4C1
398      IF(DT5.LT.5.D-1)GOTO 19
399      PRINT 9001
400 9001 FORMAT(1X,' LA METHODE NE CONVERGE PAS ')
401 401 IIC=IC/30
402      IC=30*(IIC+1)
403      GOTO 7
404 19 IIC=IC/30
405      IF((IC-30*IIC).NE.0)GOTO 1
406 7 IF(IC.LT.30)GOTO 13
407      IF(IC.LT.60)GOTO 14
408      IF(IC.LT.90)GOTO 15
409      IF(IC.LT.120)GOTO 16
410      IF(IC.LT.150)GOTO 17
411      IF(IC.EQ.150)STOP
412 13 E5=E4+0.0400
413      CALL ELCAR(XC,A4,E5,R14,RCME4,W4,M4)
414      GOTO 1
415 14 R15=R14+1.03DC
416      CALL ELCAR(XC,A4,E4,R15,RCME4,W4,M4)
417      GOTO 1
418 15 ROME5=ROME4+1.DC
419      CALL ELCAR(XC,A4,E4,R14,ROME5,W4,M4)
420      GOTO 1
421 16 M5=M4+1.03DC
422      CALL ELCAR(XC,A4,E4,R14,RCME4,W4,M5)
423      GOTO 1
424 17 A5=A4+1.005DC
425      CALL ELCAR(XC,A5,E4,R14,ROME4,W4,M4)
426      GOTO 1
427 1000 FORMAT(3D20.13)
428 1001 FORMAT(1X,' LE VECTEUR OBSERVE EST : ',1,1X,2(3(D20.13,3X)))
429 2000 FORMAT(1X,' LES TEMPS CONSIDERES SONT : ',//)
430 2001 FORMAT(1X,D20.13,/)
431 2007 FORMAT(1X,' AU ',I2,' PASSAGE CORRESPOND ',I3,' OBSERVATIONS ',//)
432 8991 FORMAT(1X,' LE NOUVEAU VECTEUR X0 EST : ',1,26(1H*),//)
433 8992 FORMAT(1X,6(D17.1C,1X),//)
434 8998 FORMAT(1X,3HIC=,I3,//)
435 8999 FORMAT(1X,2(3(D20.13,3X),//,1X),//)
436 9000 FORMAT(1X,4(D20.10))
437 9993 FORMAT(1X,' LE VECTEUR CORRECTION EST : ',1,1X,27(1H*),//)
438 2005 FORMAT(1X,6D20.1C,/)
439 2004 FORMAT(1X,' LES POSITIONS ET LES VITESSES DE LA STATION SONT : ',//)
440 2003 FORMAT(1X,6D20.13,/)
441 2002 FORMAT(1X,' LES POSITIONS DU SATELLITE SONT : ',//)
442 9994 FORMAT(1X,' LA MATRICE DU SYSTEME SURDETERMINE EST : ',1,1X,40(1H*))
443 9996 FORMAT(1X,7(D17.1C,1X),1X)
444 9004 FORMAT(1X,7(D17.1C,1X))
445 8997 FORMAT(1X,' LA MATRICE DU SYSTEME SOUS FORME NORMALE ',1,1X,4(1H*))
446 1//
447      END

```

384 - 385 : l'approximation est corrigée. Suivent alors les tests de convergence (on demande une précision de l'ordre du mètre pour chaque composante 1.10^{-7}) (393 — 398), les impressions à option et les formats d'impression.

5.3 Explication des sous-routines5.3.1 - Sous-routine ELCAR

SUBROUTINE ELCAR(X,A,E,RI,ROMEGA,W,M)

```

*****
*
*   SOUS-ROUTINE ELCAR                                PAUL FRANCOISE
*   *****
*
*   BUT : PASSAGE DES ELEMENTS ELLIPTIQUES AUX ELEMENTS CARTESIENS
*   ---
*
*   DESCRIPTION DES PARAMETRES
*   -----
*
*   PARAMETRES CARTESIENS :
*     X      = VECTEUR POSITION-VITESSE
*
*   PARAMETRES ELLIPTIQUES :
*     A      = DEMI-GRAND AXE
*     E      = EXCENTRICITE
*     RI     = INCLINAISON
*     ROMEGA = LONGITUDE DU NOEUD ASCENDANT
*     W      = ARGUMENT DU PERIGEE
*     M      = ANOMALIE MOYENNE ( AL TEMPS CONSIDERE )
*
*   ENTREES : A,E,RI,ROMEGA,W,M
*   SORTIE : X
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z,M)
52      DIMENSION X(6)
53      COMMON/ETI1/WK/ETI2/ML
54      COMMON/ETI10/NCPT
55      GE=M+E*DSIN(M)
56      300 GE1=GE
57      C
58      C      CALCUL DE L'ANOMALIE EXCENTRIQUE PAR NEWTON-RAPHSON
59      C
60      C
61      F=GE-E*DSIN(GE)-M
62      FP=1.-E*DCOS(GE)
63      GE=GE-F/FP
64      IF(DABS(GE1-GE)-1.D-10)301,300,300

```

```

66 C      CALCUL DES PARAMETRES CARTESIENS
67 C      -----
68 C
69      301 B=DSQRT(1.-E**2)*A
70      A14=DSQRT(MU/A)
71      RN=A14/A
72      X1=1.-E*DCOS(GE)
73      XB=A*(DCOS(GE)-E)
74      YB=B*DSIN(GE)
75      XPP=-RN*A*DSIN(GE)/X1
76      YBP=RN*B*DCOS(GE)/X1
77      A1=DCOS(W)*DCOS(R*OMEGA)-DSIN(W)*DSIN(R*OMEGA)*DCOS(RI)
78      B1=-DSIN(W)*DCOS(R*OMEGA)-DCOS(W)*DSIN(R*OMEGA)*DCOS(RI)
79      A2=DSIN(W)*DCOS(R*OMEGA)+DCOS(W)*DCOS(R*OMEGA)*DSIN(RI)
80      B2=-DSIN(W)*DSIN(R*OMEGA)+DCOS(W)*DCOS(R*OMEGA)*DCOS(RI)
81      A3=DSIN(W)*DSIN(RI)
82      B3=DCOS(W)*DSIN(RI)
83      X(1)=A1*XB+B1*YB
84      X(2)=A2*XB+B2*YB
85      X(3)=A3*XB+B3*YB
86      X(4)=A1*XBP+B1*YBP
87      X(5)=A2*XBP+B2*YBP
88      X(6)=A3*XBP+B3*YBP
89      PRINT 9000,(X(I),I=1,6)
90      9000 FORMAT(1X,1H1,1X,///,1X,2HX=,2(3(D20.13,3X),//,1X,2H )////)
91      RETLRN
92      END

```

Détails des instructions

- 51 —→ 55 : déclaration des variables et initialisations.
- 56 —→ 64 : calcul de l'anomalie excentrique à partir de l'anomalie moyenne par une méthode de Newton-Raphson .
- $$f(E) = E - M - e \sin E \quad (\text{carte 61})$$
- On a une bonne approximation de départ :
- $$E_0 = M + e \sin M$$
- (=développement en série de E en fonction de M arrêté au 1^{er} ordre)
- 65 —→ 88 : formules de passage des coordonnées elliptiques (a,e,i,Ω,ω,E) aux coordonnées cartésiennes.
- 69 —→ 82 : variables auxilliaires.
- 83 —→ 88 : coordonnées cartésiennes qui ont été explicitées au chapitre 2 .
- 89 : impression.

5.3.2 Sous-routine ELEL

SUBROUTINE ELEL(X0,A,CE,SE,U0,VC,E,M(,RI,ROMEGA,W,RCVO,RO,GE)

```

*****
*
* SOUS-ROUTINE ELEL                                FALL FRANCOISE
* *****
*
* PUT : PASSAGE DES ELEMENTS CARTESIENS AUX ELEMENTS ELLIPTIQUES
* ---
*
* DESCRIPTION DES PARAMETRES
* -----
*
* PARAMETRES CARTESIENS:
*   X0      = VECTEUR POSITION-VITESSE DU SATELLITE A UN INSTANT
*           PRECIS
*
* PARAMETRES ELLIPTIQUES CLASSIQUES:
*   A      = DEMI-GRAND AXE
*   E      = EXCENTRICITE
*   RI     = INCLINAISON
*   ROMECA = LONGITUDE DU NOEUD ASCENDANT
*   W      = ARGUMENT DU PERIGEE
*   MO     = ANOMALIE MOYENNE ( AU TEMPS CONSIDERE )
*   GE     = ANOMALIE EXCENTRIQUE ( AL TEMPS CONSIDERE )
*
* PARAMETRES ELLIPTIQUES PARTICULIERS:
*   CE     = E*COS(GE)
*   SE     = E*SIN(GE)
*   UC     = VECTEUR POSITION UNITAIRE DU SATELLITE
*   VC     = VECTEUR UNITAIRE CRYPTOAGONAL A UC DANS LE PLAN
*           ORBITAL DANS LE SENS DES ANOMALIES CROISSANTES
*
* PARAMETRES AUXILIAIRES:
*   RC     = DISTANCE CENTRE DE LA TERRE - SATELLITE
*   ROVO   = PRODUIT SCALAIRE POSITION * VITESSE DU SATELLITE
*
* ENTREE : X0
*
* SORTIES : A,CE,SE,U0,VC,E,MO,RI,ROMEGA,W,RCVO,RO,GE
*
* REFERENCE : "METHODS OF ORBIT DETERMINATION" ESCOBAL ( CHAPITRE 3 )
*****

```



```

51      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z,M)
52      COMMON/ETI2/MU
53      DIMENSION XO(6),UC(3),VO(3)
54      RC2=0.00
55      ROVO=0.00
56      GVO2=0.00
57      VO1=0.00
58      DO 1 I=1,3
59          J=I+3
60          RC2=RC2+XO(I)*XO(I)
61          ROVO=ROVO+XO(I)*XO(J)
62      1  GVO2=GVO2+XO(J)*XO(J)
63          RO=DSQRT(RC2)
64          GVO1=DSQRT(GVO2)
65 C
66 C      ELEMENTS ELLIPTIQUES NON CLASSIQUES
67 C      -----
68 C
69          A1=2./RO-GVO2/MU
70          A=1./A1
71          CE=1.-RO/A
72          SE=ROVO/DSQRT(MU*A)
73          E2=SE**2+CE**2
74          E=DSQRT(E2)
75          DO 2 I=1,3
76      2  UO(I)=XO(I)/RC
77          P=A*(1-E2)
78          DO 12 I=1,3
79              J=I+3
80      12  VO1=VO1+UO(I)*XO(J)
81          DO 3 I=1,3
82              J=I+3
83      3  VO(I)=(RO*XO(J)-VO1*XO(I))/DSQRT(MU*P)
84 C
85 C      ELEMENTS ELLIPTIQUES CLASSIQUES
86 C      -----
87 C
88          BSIN=DSQRT(UO(3)*UO(3)+VO(3)*VO(3))
89          X=(UO(1)+VO(2))*(LO(1)+VO(2))+(UO(2)-VO(1))*(UO(2)-VO(1))
90          BCOS=DSQRT(X)-1.
91          RI=DATAN2(BSIN,BCOS)
92          RUO=DATAN2(UO(3),VO(3))
93          X=UO(1)+VO(2)
94          Y=UO(2)-VO(1)
95          RLO=DATAN2(Y,X)
96          ROMEGA=RLO-RUC
97          IF(E-1.0-5)4,4,5
98      5  X=(VO1*DSQRT(P/MU))
99          Y=P/RO-1.
100         RVO=DATAN2(X,Y)
101         W=RUO-RVO
102      4  X=(A-RO)/(F+A)
103         GE=DARCOS(X)
104         IF(ROVO)10,10,11
105      10  GE=-GE
106      11  MC=GE-E*DSIN(GE)
107         IF(NOPT.EQ.0)GOTO 8000
108         PRINT 100,A,CE,SE,UO,VO
109         PRINT 9002,A,E,MC
110      9  PRINT 9005,RI,ROMEGA,W
111 8000 CONTINUE
112      100  FORMAT(1X,2HA=,D20.13,3X,3HCE=,D20.13,3X,3HSE=,D20.13,3X,///1X,3HU
113          10=,3(D20.13,3X),///,1X,3HVG=,3(D20.13,3X)///)
114 9002  FORMAT(1X,2HA=,D20.10,3X,2HE=,D20.10,3X,3HM(=,D20.10,///)
115 9005  FORMAT(1X,3HRI=,D20.10,3X,7HROMEGA=,D20.10,3X,2HW=,D20.10,///)
116      13  RETURN
117      END

```

Détails des instructions:

- 51 → 64 : déclaration des variables , initialisation et calcul de $\|\vec{r}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{r} \cdot \vec{v}$
- 65 → 83 : calcul des éléments elliptiques non classiques d'après les formules vues au chapitre 2 .
- 84 → 106 : calcul des éléments elliptiques classiques d'après les éléments d'Escobal ou les formules suivantes. (voir figure ci-après)

$$* \quad e^2 = S_e^2 + C_e^2$$

$$* \quad \sin i = + \sqrt{U_{z_0}^2 + V_{z_0}^2}$$

$$\cos i = + \sqrt{(U_{x_0} + V_{y_0})^2 + (U_{y_0} - V_{x_0})^2} - 1$$

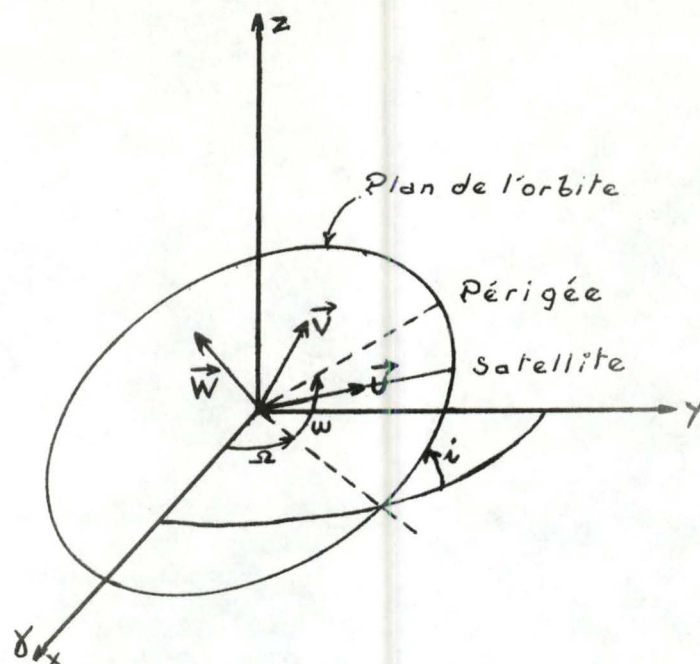
$$* \quad \text{si } \begin{cases} l = \Omega + \omega + v \\ u_0 = \omega + v_0 \end{cases} \quad v : \text{anomalie vraie}$$

$$\Rightarrow = l_0 - u_0$$

$$\text{où } \begin{cases} \cos l_0 = \frac{U_{x_0} + V_{y_0}}{1 + \cos i} & \sin l_0 = \frac{U_{y_0} - V_{x_0}}{1 + \cos i} \\ \sin u_0 = \frac{U_{z_0}}{\sin i} & \cos u_0 = \frac{V_{z_0}}{\sin i} \end{cases}$$

$$* \quad \omega = u_0 - v_0$$

$$\text{où } \begin{cases} \cos v_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) & p = a(1 - e^2) \\ \sin v_0 = \frac{\dot{r}_0}{e} \sqrt{\frac{a(1 - e^2)}{\mu}} & \dot{r}_0 = \vec{U}_0 \cdot \vec{V}_0 \end{cases}$$



5.3.3 _ Sous-routine_POSVIT

SUBROUTINE POSVIT(X10,X,CE,SE,ROVO,RO1,PE,SMA,RMO,EC,T)

```

*****
*
* SOUS-ROUTINE POSVIT                                VANDEPLY ETIENNE
* *****
*
* BUT : CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE DU SATELLITE EN UN TEMPS
* ---  DONNE A PARTIR DE LA POSITION ET DE LA VITESSE AL TEMPS INITIAL
*
* DESCRIPTION DES PARAMETRES
* -----
*
* X10  = VECTEUR POSITION - VITESSE DU SATELLITE AL TEMPS
*       INITIAL
* X    = VECTEUR POSITION - VITESSE DU SATELLITE AL TEMPS
*       VOULU
* PE   = EXCENTRICITE
* SMA  = DEMI-GRAND AXE
* RMO  = ANOMALIE MOYENNE AU TEMPS INITIAL
* EC   = ANOMALIE EXCENTRIQUE AL TEMPS INITIAL
* CE   = PE*COS(EC)
* SE   = PE*SIN(EC)
* RO1  = DISTANCE CENTRE DE LA TERRE - SATELLITE AU TEMPS
*       INITIAL
* ROVO = PRODUIT SCALAIRE DE LA POSITION PAR LA VITESSE AU
*       TEMPS INITIAL
* T    = DIFFERENCE TEMPS CONSIDERE - TEMPS INITIAL
*
* ENTREES : X10,CE,SE,ROVO,RO1,SMA,PE,RMO,EO,T
* SORTIE : X
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION X10(6),X(6)
53      COMMON/ETI1/RK
54      COMMON/ETI4/EPSIL
55      COMMON/ETI5/NT
56      RMU=1.00
57 C
58 C      CALCUL DE LA DEMI DIFFERENCE DES ANOMALIES EXCENTRIQUES
59 C      -----
60 C
61      DELTAM=T*RK*DSQRT(RMU)/(SMA**1.5)
62      RM=DELTAM+RMO
63 C
64 C      VALEUR DE DEMARRAGE
65 C      .....
66 C
67      E=RM+PE*DSIN(RM)+PE*PE*DSIN(2.*RM)/2.
68      RG=(E-EO)/2.
69      IC=1
70 C
71 C      NEWTON-RAPHSON MODIFIEE
72 C      .....
73 C
74      2 RG1=RG
75      IC=IC+1
76      R1=SE*DSIN(RG)**2.
77      R2=CE*DSIN(RG)*DCOS(RG)
78      R3=2.00*SE*DSIN(RG)*DCOS(RG)
79      R4=CE*(1.00-(2.00*DSIN(RG)**2.))
80      R6=RG-((RG+R1-R2-0.500*DELTAM)/(1.00+R3-R4))
81      DELTA=DABS(RG-R6)
82      IF(EPSIL-DELTA)2,3,3
83 C
84 C      NOUVELLE POSITION DU SATELLITE
85 C      -----
86 C
87      3 E=2.00*RG
88      C=SMA*(1.00-DCOS(E))
89      S=DSQRT(SMA)*DSIN(E)
90      RF=1.00-C/RO1
91      R6=(RO1*S+ROVO+C/DSQRT(RMU))/DSQRT(RMU)
92      DO 5 J=1,3
93      K=J+3
94      5 X(J)=RF*X10(J)+R6*X10(K)
95 C
96 C      NOUVELLE VITESSE DU SATELLITE
97 C      -----
98 C
99      R=RO1+(1.-RO1/SMA)*C+ROVO/DSQRT(RMU*SMA)
100     RF1=-DSQRT(RMU)*S/(R*RO1)
101     RG1=1.00-C/R
102     DO 7 J=4,6
103     K=J-3
104     7 X(J)=RF1*X10(K)+R61*X10(J)
105     RETURN
106     END

```

Détails des instructions

51 → 56 : déclaration des variables et initialisation.

57 → 82 : calcul par une méthode de Newton-Raphson modifiée de la demi-différence des anomalies excentriques aux temps t et t_0 en fonction de la différence des anomalies moyennes DELTAM (carte 61). La précision demandée EPSIL est ici égale à 10^{-3} .

83 → 94 : calcul de la position au temps considéré t .

$$r = r_0 f + \dot{r}_0 g \quad (1)$$

95 → 104 : calcul de la vitesse au temps considéré.

$$v = r_0 g' + \dot{r}_0 f' \quad (2)$$

Les détails des calculs donnant les formules (1) et (2) sont exposés dans l'Appendice.

Référence : Escobal , "Methods of orbit determination". Appendice II.

5.3.4 - Sous-routine STAPOS

SUBROUTINE STAPOS(RSTAT,T,BETA,TO,PO,VI)

```

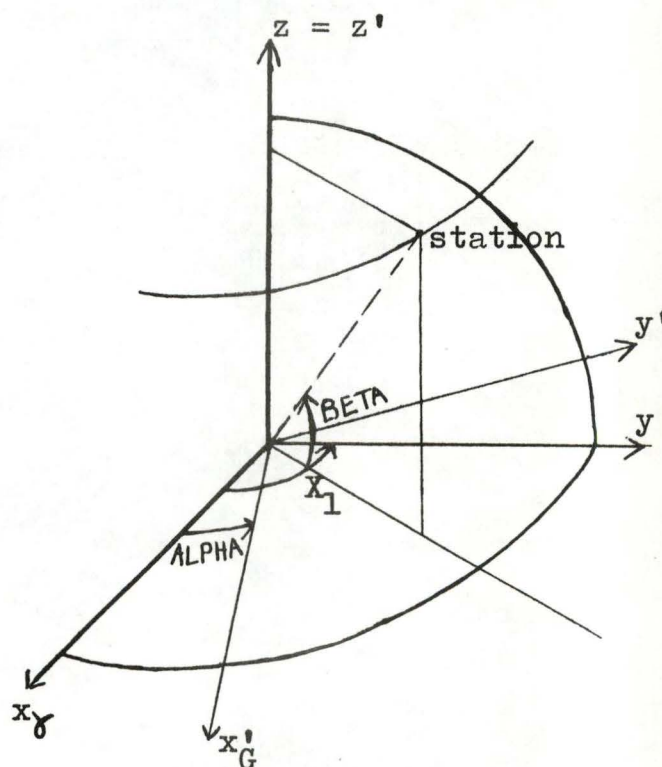
*****
*
*  SOUS-ROUTINE STAPOS                                VANDEPUT ETIENNE
*  *****
*
*
*  BUT : CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE DE LA STATION EN UN
*  --- TEMPS DONNE DANS LE REPERE ABSOLU, EN FONCTION DE LA POSITION
*  ET DE LA VITESSE AU TEMPS INITIAL DANS LE REPERE MOBILE
*
*
*  DESCRIPTION DES PARAMETRES
*  -----
*
*      RSTAT  = VECTEUR POSITION DE LA STATION AU TEMPS INITIAL
*      T      = TEMPS ECOULE DEPUIS LE TEMPS INITIAL
*      BETA   = LATITUDE DE LA STATION
*      TO     = TEMPS SIDERAL DE LA STATION AU MOMENT INITIAL
*      PO     = VECTEUR POSITION DE LA STATION
*      VI     = VECTEUR VITESSE DE LA STATION
*
*
*  ENTREES : RSTAT,T,BETA,TO
*
*  SORTIES : PO,VI
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION RSTAT(3),PO(3),VI(3)
53      COMMON/ETI3/CMEG/
54      COMMON/ETI7/TCG
55      R1=C.DO
56      DO 12 I=1,3
57 12    R1=R1+RSTAT(I)*RSTAT(I)
58 C
59 C      CHANGEMENT DE REFERE
60 C      -----
61 C
62      R=DSQRT(R1)
63      X1=TO+OMEGA*T
64      BECO=DCOS(BETA)
65 C
66 C      POSITIONS
67 C      .....
68 C
69      PO(1)=R*DCOS(X1)*BECO
70      PO(2)=R*DSIN(X1)*BECO
71      PO(3)=R*DSIN(BETA)
72 C
73 C      VITESSES
74 C      .....
75 C
76      VI(1)=-OMEGA*RSTAT(2)
77      VI(2)=OMEGA*RSTAT(1)
78      VI(3)=0.DO
79      VII=VI(1)
80      ALPHA=TOG+OMEGA*T
81      DCAL=DCOS(ALPHA)
82      DSAL=DSIN(ALPHA)
83      VI(1)=VII+DCAL*VI(2)+DSAL
84 1C    VI(2)=VII+DSAL*VI(2)+DCAL
85      RETURN
86      END

```



Détails des instructions

- 51 → 55 : déclaration des variables et initialisation.
56 → 57 : calcul de la distance centre de la terre-station.
58 → 71 : calcul des positions de la station dans le repère fixe au temps considéré.
72 → 84 : calcul des vitesses dans le repère fixe au temps considéré.

Pour plus de détails quant aux calculs il faut se référer au chapitre 2 .

1. The first part of the document is a list of names and addresses. The names are: John Doe, Jane Smith, and Robert Brown. The addresses are: 123 Main St, New York, NY; 456 Elm St, New York, NY; and 789 Oak St, New York, NY.

2. The second part of the document is a list of names and addresses. The names are: Alice Johnson, Bob White, and Charlie Black. The addresses are: 101 Pine St, New York, NY; 202 Cedar St, New York, NY; and 303 Birch St, New York, NY.

3. The third part of the document is a list of names and addresses. The names are: David Green, Eve Red, and Frank Blue. The addresses are: 404 Spruce St, New York, NY; 505 Fir St, New York, NY; and 606 Willow St, New York, NY.

5.3.5 _ Sous-routine _ HORIZ

SUBROUTINE HORIZ(X,Y,IO)

```

*****
*
*   SOUS-ROUTINE HORIZ                               VANDEPUT ETIENNE
*   *****
*
*   PUT : DETERMINEF SI LE SATELLITE EST DANS L'HORIZON DE LA STATION
*   ---  PAR L'EQLATION DU PLAN TANGENT
*
*   DESCRIPTION DES PARAMETRES
*   -----
*
*   X = VECTEUR POSITION DE LA STATION
*   Y = VECTEUR POSITION DU SATELLITE
*   IC : INCICE
*       = 0 SI LE SATELLITE EST EN-DESSOUS DE L'HORIZON
*       = 1 SI LE SATELLITE EST AU-DESSLS DE L'HORIZON DE LA STATION
*
*   ENTREES : X,Y
*
*   SORTIE : IC
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION X(3),Y(3)
53      FLEV=0.00
54      DO 1 I=1,3
55      1 FLEV=FLEV+X(I)*Y(I)-X(I)*X(I)
56      IF(FLEV)2,2,3
57      3 IO=1
58      RETURN
59      2 IO=0
60      RETURN
61      END

```

Détails des instructions

L'équation du plan tangent au globe terrestre en la station d'observation s'écrit :

$$xX + yY + zZ = R^2 \quad (x,y,z) = \text{coordonnées du satellite}$$

$$(X,Y,Z) = \text{coordonnées de la station.}$$

Les points situés au-dessus du plan tangent satisfont l'équation :

$$xX + yY + zZ - R^2 = 0$$

51 → 53 : déclaration des variables et initialisation.

54 - 55 : calcul du résidu $xX + yY + zZ - R^2$.

56 → 59 : test sur le résidu et détermination de IO.

2.3.2. Sous-programme HORIS

PROGRAMME DE CALCUL DES ANGLES DE VUE

DESCRIPTION DES PARAMETRES

X = COORDONNEE X DE LA STATION

Y = COORDONNEE Y DE LA STATION

Z = ALTITUDE DE LA STATION

IX = COORDONNEE X DE LA SATELLITE

IY = COORDONNEE Y DE LA SATELLITE

IZ = ALTITUDE DE LA SATELLITE

ENTREE : X, Y

SORTIE : IZ



1	REAL	4
2	REAL	4
3	REAL	4
4	REAL	4
5	REAL	4
6	REAL	4
7	REAL	4
8	REAL	4
9	REAL	4
10	REAL	4
11	REAL	4
12	REAL	4
13	REAL	4
14	REAL	4
15	REAL	4
16	REAL	4
17	REAL	4
18	REAL	4
19	REAL	4
20	REAL	4
21	REAL	4
22	REAL	4
23	REAL	4
24	REAL	4
25	REAL	4
26	REAL	4
27	REAL	4
28	REAL	4
29	REAL	4
30	REAL	4
31	REAL	4
32	REAL	4
33	REAL	4
34	REAL	4
35	REAL	4
36	REAL	4
37	REAL	4
38	REAL	4
39	REAL	4
40	REAL	4
41	REAL	4
42	REAL	4
43	REAL	4
44	REAL	4
45	REAL	4
46	REAL	4
47	REAL	4
48	REAL	4
49	REAL	4
50	REAL	4
51	REAL	4
52	REAL	4
53	REAL	4
54	REAL	4
55	REAL	4
56	REAL	4
57	REAL	4
58	REAL	4
59	REAL	4
60	REAL	4
61	REAL	4
62	REAL	4
63	REAL	4
64	REAL	4
65	REAL	4
66	REAL	4
67	REAL	4
68	REAL	4
69	REAL	4
70	REAL	4
71	REAL	4
72	REAL	4
73	REAL	4
74	REAL	4
75	REAL	4
76	REAL	4
77	REAL	4
78	REAL	4
79	REAL	4
80	REAL	4
81	REAL	4
82	REAL	4
83	REAL	4
84	REAL	4
85	REAL	4
86	REAL	4
87	REAL	4
88	REAL	4
89	REAL	4
90	REAL	4
91	REAL	4
92	REAL	4
93	REAL	4
94	REAL	4
95	REAL	4
96	REAL	4
97	REAL	4
98	REAL	4
99	REAL	4
100	REAL	4

Détails des instructions

L'équation du plan tangent au globe terrestre en la station d'observation s'écrit :

$$Xx + Yy + Zz = R^2$$

Les points situés au-dessus du plan tangent satisfont l'équation :

$$Xx + Yy + Zz = R^2$$

51 → 53 : déclaration des variables et initialisation.

54 - 55 : calcul du rayon $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

56 → 59 : test sur le résultat et détermination de IO.

5.3.6 _ Sous-routine ELEVAT

SUBROUTINE ELEVAT(X,Y,ELEV)

```

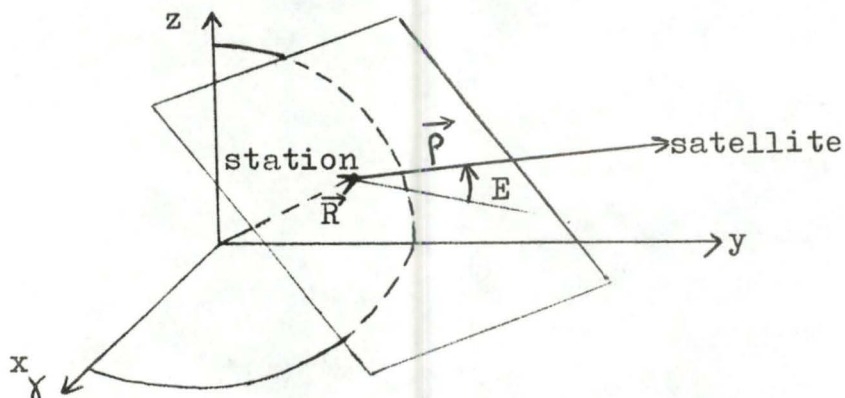
*****
*
*   SOUS-ROUTINE ELEVAT                                FAUL FRANCOISE
*   *****
*
*   BUT : CALCUL DE L'ELEVATION DU SATELLITE AU-DESSUS DE L'HORIZON
*   ---
*
*   DESCRIPTION DES PARAMETRES
*   -----
*
*   X   = VECTEUR POSITION DE LA STATION
*   Y   = VECTEUR POSITION DU SATELLITE
*   ELEV = ANGLE D'ELEVATION EXPRIME EN RADIAN
*
*   ENTREES : X,Y
*
*   SORTIE : ELEV
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION X(3),Y(3),Z(3)
53      DO 1 I=1,3
54      1  Z(I)=Y(I)-X(I)
55      D=0,D0
56      R=0,D0
57      DO 2 I=1,3
58      R=R+X(I)*X(I)
59      2  D=D+Z(I)*Z(I)
60      D=DSQRT(D)
61      R=DSQRT(R)
62      C
63      C   CALCUL DE L'ELEVATION
64      C   -----
65      C
66      ELEV=Z(1)*X(1)+Z(2)*X(2)+Z(3)*X(3)
67      ELEV=ELEV/(D*R)
68      ELEV=DARSIN(ELEV)
69      RETURN
70      END

```



$$\vec{p} \cdot \vec{R} = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{R}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - E\right)$$

$$= \rho R \sin E$$

$$E = \arcsin \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{\rho R}$$

Remarque : lorsque cette sous-routine est employée, l'élévation est toujours positive.

Détails des instructions

- 51 - 52 : déclaration des variables et initialisation.
 53 —→ 61 : calcul de R et de ρ .
 62 —→ 68 : calcul de l'élévation.

5.3.7 _ Sous-routine _ RANRAT

SUBROUTINE RANRAT(CI, PC, VI, RA, RCAL, T)

```

*****
*
* SOUS-ROUTINE RANRAT                                VANDEPUT ETIENNE
* *****
*
*
* BUT : CALCUL DES POSITIONS RELATIVES STATION - SATELLITE ET DES
* --- VITESSES RADIALES A PARTIR DES POSITIONS ET VITESSES DU
*      SATELLITE ET DE LA STATION
*
*
* DESCRIPTION DES PARAMETRES
* -----
*
* CI  = MATRICE DONT LA IEME LIGNE DONNE LA POSITION ET LA
*      VITESSE DU SATELLITE AU IEME TEMPS
* PC  = MATRICE DONT LA IEME LIGNE DONNE LA POSITION DE LA
*      STATION AU IEME TEMPS
* VI  = MATRICE DONT LA IEME LIGNE DONNE LA VITESSE DE LA
*      STATION AU IEME TEMPS
* T   = VECTEUR DES TEMPS CORRESPONDANT AUX OBSERVATIONS ACCEPTEES
* RA  = VECTEUR DONT LA IEME COMPOSANTE DONNE LA DISTANCE
*      STATION - SATELLITE AU IEME TEMPS
* RCAL = VECTEUR DONT LA IEME COMPOSANTE DONNE LA VITESSE RADIALE
*      AU IEME TEMPS
*
*
* ENTREES : CI, PC, VI, T
*
* SORTIES : RA, RCAL
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION CI(100,6),RCAL(100),T(100),RA(100),PO(100,3),VI(100,3)
53      DIMENSION X(6)
54      COMMON/ETI10/NGFT
55      COMMON/ET13/OMEGA
56      COMMON/ET15/NT
57      DO 91 I=1,NT
58 C
59 C      CALCUL DE LA DISTANCE STATION-SATELLITE
60 C
61 C
62      DO 92 J=1,6
63      92 X(J)=CI(I,J)
64      RA(I)=0.D0
65      DO 93 K=1,3
66      93 RA(I)=RA(I)+X(K)*X(K)+PO(I,K)*PO(I,K)-2.*X(K)*PO(I,K)
67      RA(I)=DSQRT(RA(I))
68      RCAL(I)=0.D0
69 C
70 C      CALCUL DE LA VITESSE RADIALE
71 C
72 C
73      DO 94 K=1,3
74      J=K+3
75      94 RCAL(I)=RCAL(I)+X(K)*X(J)-X(K)*VI(I,K)-X(J)*PO(I,K)
76      91 RCAL(I)=RCAL(I)/RA(I)
77      IF(NOPT.EQ.0)GOTO 8000
78      PRINT 2007
79      2007 FORMAT(1X,'LES POSITIONS RELATIVES ET LES RANGE RATE SONT:',/)
80      DO 2008 I=1,NT
81      2008 PRINT 2009,RA(I),RCAL(I)
82      2009 FORMAT(1X,D20.13,6X,D20.13,/)
83      8000 CONTINUE
84      RETLRN
85      END

```

Détails des instructions

- 51 —→ 56 : déclaration et initialisation .
- 57 —→ 67 : calcul des positions relatives pour tous les temps d'après la formule (4.3) du chapitre 4.
- 68 —→ 79 : calcul des vitesses radiales pour tous les temps d'après la formule (4.4) du chapitre 4.

5.3.8 - Sous-routine DERPA

SUBROUTINE DERPA(XO,A,CE,SE,UO,VO,DX,T)

```

*****
*
*   SOUS-ROUTINE DERPA                               FAUL FRANCOISE
*   *****
*
*   FMT : CALCUL DE LA MATRICE DES DERIVEES PARTIELLES DU VECTEUR
*   --- POSITION - VITESSE AU TEMPS CONSIDERE PAR RAPPORT AU VECTEUR
*   POSITION - VITESSE INITIAL
*
*   DESCRIPTION DES PARAMETRES
*   -----
*
*   U = VECTEUR POSITION - VITESSE DU SATELLITE AU TEMPS CONSIDERE
*   UO = VECTEUR POSITION - VITESSE DU SATELLITE AU TEMPS INITIAL
*   A = DEMI-GRAND AXE
*   CE = ECCENTRICITE
*   SE = SIN(CE)
*   UO = VECTEUR POSITION UNITAIRE DU SATELLITE AU TEMPS INITIAL
*   VO = VECTEUR UNITAIRE ORTHOGONAL A UO DANS LE PLAN DE L'ORbite
*   DV = MATRICE DES DERIVEES PARTIELLES
*   T = DIFFERENCE ENTRE LE TEMPS CONSIDERE ET LE TEMPS INITIAL
*   R = DISTANCE STATION - SATELLITE
*
*   ENTREES : X,XC,A,CE,SE,UO,VO,T
*
*   SORTIE : DX
*
*   REFERENCE : 'METHODS OF ORBIT DETERMINATION' ESCOBAL ( CHAPITRE 9 )
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(C-Z)
52      DOUBLE PRECISION M1,M0,MU,M
53      COMMON/ET11/RX/ET12/MU
54      DIMENSION XO(6),X(6),Z(9,9),Y(9,9),UC(3),SO(3),VO(3)
55      DIMENSION BZ(9,3),DX(6,6),O(9,9)
56 C
57 C      CALCUL DE LA MATRICE DERIVEE DE (A,CE,SE,UO,VO) PAR RAPPORT A XC
58 C      -----
59 C
60      M02=0.00
61      M=0.00
62      GM02=0.00
63      RTM1=0.00
64      VC1=0.00

```

```

65 C
66 C      VARIABLES AUXILIAIKES
67 C      .....
68 C
69 C      DO 50 I=1,3
70 C      J=I+3
71 C      R02=R02+X0(I)*XC(I)
72 C      R=R+X(I)*X(I)
73 C      GVC2=GVC2+X0(J)*X(J)
74 C      RTVT=RTVT+X(I)*X(J)
75 C 50  V01=V01+U0(I)*X0(J)
76 C      R=DSQRT(R)
77 C      RC=DSQRT(RC2)
78 C      GVC1=DSQRT(GVC2)
79 C      R03=R0**3
80 C      A2=2.*(A**2)/R03
81 C      A3=2.*(A**2)/MU
82 C      A4=GVC2/(MU*RC)
83 C      A5=2.*R0/MU
84 C      A6=DSQRT(MU*A)
85 C      A7=(A*SE)/R03
86 C      A8=(A*SE)/MU
87 C      A9=V01/R02
88 C
89 C      MATRICE DERIVEE DE A,CE,SE PAR RAPPORT A LA POSITION AU TEMPS
90 C      INITIAL
91 C      .....
92 C
93 C      DO 41 I=1,3
94 C      Y(I,1)=A2*X0(I)
95 C      Y(I,2)=A4*X0(I)
96 C      J=I+3
97 C 41  Y(I,3)=(X0(J)/A6)-(A7*XC(I))
98 C
99 C      MATRICE DERIVEE DE A,CE,SE PAR RAPPORT A LA VITESSE AL TEMPS
100 C      INITIAL
101 C      .....
102 C
103 C      DO 42 I=4,6
104 C      Y(I,1)=A3*X0(I)
105 C      Y(I,2)=A5*X0(I)
106 C      J=I-3
107 C 42  Y(I,3)=(X0(J)/A6)-A8*X0(I)
108 C
109 C      MATRICE DERIVEE DE U0 PAR RAPPORT A LA POSITION ET LA VITESSE AU
110 C      TEMPS INITIAL
111 C      .....
112 C
113 C      DO 7 I=1,3
114 C      DO 7 J=4,6
115 C      K=J-3
116 C      7  Y(I,J)=-((X0(I)*XC(K))/R03
117 C      DO 8 I=1,3
118 C      J=I+3
119 C      8  Y(I,J)=1./R0+Y(I,J)
120 C      DO 9 I=4,6
121 C      DO 9 J=4,6
122 C      9  Y(I,J)=0.00

```

```

123 C
124 C      MATRICE DERIVEE DE VO PAR RAPPORT A LA POSITION ET LA VITESSE AL
125 C      TEMPS INITIAL
126 C      .....
127 C
128      DO 10 I=1,3
129      DO 10 J=7,9
130          J1=J-6
131      10 Y(I,J)=A9*X0(I)+XC(J1)
132          Y(1,7)=Y(1,7)-V01
133          Y(1,8)=Y(1,8)+(-XC(2)*X0(4)+X0(1)*X0(5))/R0
134          Y(1,9)=Y(1,9)+(-X0(4)+X0(3)+XC(1)*X0(6))/R0
135          Y(2,7)=Y(2,7)+(XC(2)*X0(4)-X0(1)*XC(5))/R0
136          Y(2,8)=Y(2,8)-V01
137          Y(2,9)=Y(2,9)+(X0(2)*X0(6)-X0(3)*XC(5))/R0
138          Y(3,7)=Y(3,7)+(XC(3)*X0(4)-X0(1)*XC(6))/R0
139          Y(3,8)=Y(3,8)+(XC(3)*X0(5)-X0(2)*XC(6))/R0
140          Y(3,9)=Y(3,9)-V01
141      DO 11 I=4,6
142      DO 11 J=7,9
143          I1=I-3
144          J1=J-6
145      11 Y(I,J)=- (X0(J1)*X0(I1))/R0
146      DO 43 I=4,6
147          J=I+3
148      43 Y(I,J)=Y(I,J)+RC
149      DO 30 I=1,6
150      DO 30 J=1,9
151      30 O(I,J)=Y(I,J)
152      DO 31 I=1,9
153      DO 31 J=1,6
154      31 Y(I,J)=O(J,I)
155 C
156 C      CALCUL DE LA MATRICE DERIVEE DE X PAR RAPPORT A (A,CE,SE,UC,V0)
157 C      -----
158 C
159 C
160 C      VARIABLES AUXILIAIRES
161 C      .....
162 C
163      S=(X0(1)*X(2)-X(1)*X0(2))/CABS(X(1)*X(2)-X(1)*X(2))
164      X2=X(1)*X(5)-X(2)*X(4)
165      IF(X2.GT.C.DC)GOTO 995
166      S=-S
167      995 A14=DSQRT(MU/A)
168          RN=RK*A14/A
169          M1=RN*A7
170          E1=0.D0
171      DO 21 I=1,3
172      21 B1=R1+X(I)*X0(I)
173          BCO=B1/(R*R0)
174          IF(BCO.GE.1.DC)BCO=1.D0
175          BSI=S*DSQRT(1.-BCO**2)
176          XV=R*BCO
177          YV=R*BSI
178          D=R1VT/A6
179          P=A*(1.-CE**2-SE**2)
180          A12=DSQRT(MU*P)
181          A13=DSQRT(MU*F)
182          A15=1.5*M1
183          A16=DSQRT(A*P)
184          A19=DSQRT(A/P)
185          A20=1.-BCO
186      DO 18 I=1,3
187      18 SO(I)=A13*V0(I)

```

```

188 C
189 C      MATRICE DERIVEE DE LA POSITION AU TEMPS T PAR RAPPORT A A,CE,SE
190 C      .....
191 C
192      A1=(R/A)*BCO+A*A15*((P/RC-CE)*BSI/A16+SE*(1./P-1./RO)*A20-SE/R)
193      AA2=1./A13*(R/(2.*A)*BSI-A15*A16/RO+A15*A19*A20)
194      C1=-A+(A**2)*SE/A16*BSI
195      C1=C1+((R*RO-(A*SE)**2+2.*A*R*CE)/F-A*R/RO)*A20
196      C1=C1+A*R*(CE/P-1./RO)*(BSI**2)
197      C1=C1+(A**2)*R*SE/A16*(2./RO-(1.+CE)/F)*A20*BSI
198      C1=C1+(A*SE)**2*(R/F)*(1./P-1./RO)*A20**2
199      C2=A*R/A13*(BSI/RO+SE/P*A15*A20**2-BSI/F*A2C)
200      S1=A*(R/A16)*BSI*(1.+A20*(1.-RO/P)*CE)
201      S1=S1+SE*A*(R/F)*A20*BCO
202      S1=S1+SE*A*(RO/P)*A20*(R/F)*A20-1.)
203      S2=((R*RC*A16)/P**2*A20**2)/A13
204      DO 25 I=1,9
205      DO 25 J=1,6
206      25 Z(I,J)=0.00
207      DO 26 T=1,3
208      Z(1,I)=A1*UO(I)+AA2*SQ(I)
209      Z(2,I)=C1*UO(I)+C2*SQ(I)
210      24 Z(3,I)=S1*UO(I)+S2*SQ(I)
211 C
212 C      MATRICE DERIVEE DE LA POSITION AU TEMPS T PAR RAPPORT A UO ET VC
213 C      .....
214 C
215      DO 27 I=4,6
216      J=I-3
217      27 Z(I,J)=XV
218      DO 13 I=7,9
219      J=I-6
220      13 Z(I,J)=YV/A13
221      D=RTVT/A12
222 C
223 C      MATRICE DERIVEE DE ( R * VITESSE ) PAR RAPPORT A A,SE,CE
224 C      .....
225 C
226      AT1=(A15/R*A13*A*D*(1./RO-1./R)-.5*A13/A)*BSI
227      X1=(A15/(R**2)*A12*A*D**2+A15/(RC*R)*A12*A*D*SE+A15*A14+.5*A14*D)
228      AT1=AT1-X1*A2C+A15*A14*(1.-A/R)+A15/(R*RO)*P*A12+.5*A14*D
229      AT2=(A15/A*(1.-A/R)*A19+A15/(R**2)*A19*A*D**2+A15/(R*RO)*A16)*BSI
230      AT2=AT2+((A15/R)*A*(D/P)-A15/(R*RO)*A*SE-A15/(R**2)*A*D)*A2C
231      AT2=AT2-A15/(R*RC)*A*D
232      BE1=BSI/A16-SE/P*A20
233      BE2=A*(D*A/(R*A16)*BSI-(1./RO+1./R)+1./P*(RC/A-D*A*SE/R)*A2C)
234      BE3=(BE2+2.*A*CE/P)*A20-(P/RO)*(A*BE1)**2
235      BE4=-((A*CE/P+BE2)*BSI-A*A19*BE1*A20)
236      A18=DSQRT(MU/F)
237      CT1=A*A12*BE1*BCO+A*A18*CE*BSI+D*A12*EE3-A13*BE4
238      CT2=A*A19*BE1*BSI+D*(A**2)/(P*A16)*CE*BSI+BE3+D*A19*BE4
239      G1=A12*(1.-RO/P*A2C)
240      G2=A*(BE1-RO/(R*F)*D*A20)
241      G3=(2.*A*SE/P+G2+A*BE1)*A2C
242      G4=-((A*SE/P+G2)*BSI+RO*A16/(P**2)*A20)**2
243      ST1=G1*RCO+A*A18*SE*BSI+A12*D*G3-A13*G4
244      ST2=G1/A13*BSI+(A**2)*SE*D/(P*A16)*BSI+G3+D*A19*G4
245      UT=A12*D*RCO-A13*ESI
246      ST=RCO+A19*D*BSI
247      DO 14 J=1,3
248      BZ(1,J)=AT1*UC(J)+AT2*SQ(J)
249      BZ(2,J)=CT1*UC(J)+CT2*SQ(J)
250      14 BZ(3,J)=ST1*UO(J)+ST2*SQ(J)

```



```

251 C
252 C      MATRICE DERIVÉE DE ( R * VITESSE ) PAR RAPPORT A UC,VC
253 C      .....
254 C
255      DO 15 I=4,6
256          J=I-3
257      15 BZ(I,J)=UT
258          DC 16 I=7,9
259              J=I-6
260      16 BZ(I,J)=ST
261 C
262 C      MATRICE DERIVÉE DE LA VITESSE AU TEMPS T PAR RAPPORT A A,CE,SE,UC,VC
263 C      -----
264 C
265      DO 17 I=1,9
266          DO 17 J=4,6
267              J1=J-3
268      17 Z(I,J)=(BZ(I,J1)-X(J)*(X(1)*Z(I,1)+X(2)*Z(I,2)+X(3)*Z(I,3))/R)/R
269          DO 999 I=1,9
270              DO 999 J=1,6
271      999 O(I,J)=Z(I,J)
272          DO 998 I=1,6
273              DO 998 J=1,9
274      998 Z(I,J)=O(J,I)
275 C
276 C      MATRICE DES DERIVÉES PARTIELLES DU VECTEUR POSITION-VITESSE AU TEMPS
277 C      CONSIDERE PAR RAPPORT AU VECTEUR POSITION VITESSE INITIAL
278 C      -----
279 C
280      DO 22 I=1,6
281          DO 22 J=1,6
282              O1=0.00
283          DO 23 K=1,9
284      23 O1=O1+Z(I,K)*Y(K,J)
285      22 DX(I,J)=O1
286          RETURN
287          END

```

Détails des instructions:

- 51 → 88 : déclaration des variables , initialisation ,
et calcul de variables auxilliaires.
- 89 → 98 : matrice dérivée de a, C_e, S_e par rapport à la
position au temps initial.
formules (4.11) , (4.13) , (4.15)
- 99 → 108 : matrice dérivée de a, C_e, S_e par rapport à la
vitesse au temps initial.
formules (4.12) , (4.14) , (4.16)
- 109 → 123 : matrice dérivée de U_0 par rapport à la position
et la vitesse au temps initial. Formule (4.17)
- 124 → 149 : matrice dérivée de V_0 par rapport à la position
et la vitesse au temps initial.
formules (4.18) et (4.19)
- 150 → 155 : matrice dérivée de (a, S_e, C_e, U_0, V_0) par rapport
à la position et la vitesse au temps initial.
formule(4.8)
- 156 → 188 : variables auxilliaires.
- 189 → 211 : matrice dérivée de la position au temps t par
rapport à a, C_e, S_e .
formules(4.21) , (4.22) , (4.23)
- 212 → 222 : matrice dérivée de la position au temps t par
rapport à U_0 et V_0 .
formules (4.24) et (4.25)
- 223 → 251 : matrice dérivée de $(r \ r)$ par rapport à a, S_e, C_e .
formules (4.26) , (4.27) , (4.28)
- 252 → 261 : matrice dérivée de $(r \ r)$ par rapport à U_0, V_0 .
formules (4.29) , (4.30)
- 262 → 275 : matrice dérivée de la vitesse au temps t par
rapport à a, C_e, S_e, U_0, V_0 .
formules (4.20) et (4.9)
- 276 → 286 : calcul de la matrice des dérivées partielles du
vecteur position-vitesse au temps considéré par
rapport au vecteur position-vitesse initial.
Produit des matrices $(Z * Y)$.

5.3.9 _ Sous-routine COSY

SUBROUTINE COSY(XXC,DX,POS,VIT,DT1,RHC,RHCF)

```

*****
*
* SCUS-ROUTINE COSY                                VANDEPUT ETIENNE
* *****
*
* PUT : CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES DES VITESSES RADIALES PAR RAFFORT
*       AUX ELEMENTS CARTESIENS DE DEPART
*
* DESCRIPTION DES PARAMETRES
* -----
*
*   XXO = VECTEUR POSITION - VITESSE DU SATELLITE AU TEMPS CONSIDERE
*   DX  = JACOBIEENNE DX/DXXO ISSUE DE LA SOLS-ROUTINE DERPA
*   POS = VECTEUR POSITION DE LA STATION AU TEMPS CONSIDERE
*   VIT = VECTEUR VITESSE DE LA STATION AU TEMPS CONSIDERE
*   DT1 = COEFFICIENTS DE L'EQUATION D'OBSERVATION
*   RHO = DISTANCE STATION - SATELLITE AU TEMPS CONSIDERE
*   RHOP = VITESSE RADIALE AU TEMPS CONSIDERE
*
* ENTREES : XXC,DX,POS,VIT,RHO,RHOF
* SORTIE  : DT1
*
* REFERENCE : 'METHODS OF ORBIT DETERMINATION' ESCCBAL ( CHAPITRE 9 )
*
*****
51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION XXC(1),DX(6,6),POS(1),VIT(1),DT1(1),RL(6)
53      DO 64 L=1,3
54      RL(L)=(XXO(L)-POS(L))/RHO
55      L1=L+3
56      RL(L1)=(XXO(L1)-VIT(L1))/RHO
57      64 RL(L1)=RL(L1)-RHCF*RL(L)/RHO
58      DO 61 L=1,6
59      DT1(L)=C.C0
60      DO 60 J=1,3
61      J1=J+3
62 C
63 C      COEFFICIENTS DE L'EQUATION D'OBSERVATION
64 C      -----
65 C
66      60 DT1(L)=DT1(L)+RL(J)*DX(J1,L)+RL(J1)*DX(J,L)
67      61 CONTINUE
68      RETURN
69      END

```

Détails des instructions:

- 51 → 52 : déclaration des variables et initialisation.
 53 → 57 : calcul des $L_x, L_y, L_z, L'_x, L'_y, L'_z$. Formule (4.5)
 58 → 67 : calcul des dérivées des vitesses radiales par rapport aux éléments cartésiens au temps initial. formule (4.5).

5.3.10 Sous-routine SYMMAT

SUBROUTINE SYMMAT(A,N)

```

*****
*
* SOUS-ROUTINE SYMMAT
* *****
*
* BUT : INVERSION D'UNE MATRICE CARREE N*N PAR LA METHODE DU PIVOT
* ----
*          MAXIMUM
*
* DESCRIPTION DES VARIABLES ET DES CONSTANTES
* -----
*
*      A      = MATRICE A INVERSER      ( ENTREE )
*      A      = MATRICE INVERSEE       ( SORTIE )
*      N      = DIMENSION DU SYSTEME
*
* ENTrees : A,N
*
* SORTIE : A
*
*****

```

```

51      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
52      DIMENSION A(N,N),IREN(50),JACK(50),CLASS(50)
53      DO 1 I=1,N
54          IREN(I)=0
55      1   JACK(I)=0
56      DO 2 J=1,N
57          PIVCT=C,DO
58          MMU=J-1
59      DO 3 K=1,N
60          IF(J.EQ.1)GOTO 2C
61          DO 4 M=1,MMU
62              IF(K.EQ.IREN(M))GOTO 3
63      4   CONTINUE
64      2C  CONTINUE
65      DO 5 IJR=1,N
66          IF(J.EQ.1)GOTO 21
67          DO 6 MAR=1,MMU
68              IF(IJR.EQ.JACK(MAR))GOTO 5
69      6   CONTINUE
70      21  CONTINUE
71          IF(DABS(A(K,IJR)).LE.DABS(PIVOT))GOTO 5
72          PIVOT=A(K,IJR)
73          IREN(J)=K
74          JACK(J)=IJR
75      5   CONTINUE
76      3   CONTINUE
77          IND=IREN(J)
78          IPI=JACK(J)
79          DO 7 ICOL=1,N
80      7   A(IND,ICOL)=A(IND,ICOL)/PIVCT
81          R=1.0/PIVOT
82          DO 8 LIG=1,N
83              IF(LIG.NE.IND)GOTO 9
84              A(IND,IPI)=B
85              GOTO 8
86      9   C=A(LIG,IPI)
87              DO 10 ICCL=1,N
88      10  A(LIG,ICOL)=A(LIG,ICOL)-(C*A(IND,ICOL))
89              A(LIG,IPI)=- (B+C)
90      8   CONTINUE
91      2   CONTINUE

```

```
92      DO 11 I=1,N
93      DO 12 J=1,N
94      NAV=JACK(J)
95      IJK=IREN(J)
96      12 CLASS(IJK)=A(I,NAV)
97      DO 13 MN=1,N
98      13 A(I,MN)=CLASS(MN)
99      11 CONTINUE
100     DO 14 J=1,N
101     DO 15 I=1,N
102     IJK=IREN(I)
103     NAV=JACK(I)
104     15 CLASS(NAV)=A(IJK,J)
105     DO 16 I=1,N
106     16 A(I,J)=CLASS(I)
107     14 CONTINUE
108     RETURN
109     END
```

Détails des instructions:

- 51 —→ 55 : déclaration des variables et initialisation.
- 56 —→ 91 : recherche du pivot maximum et annulation de la ligne et la colonne correspondante avec permutation de lignes et colonnes.
- 92 —→ 109 : réarrangement des lignes et colonnes.

CHAPITRE 6

RESULTATS NUMERIQUES

DE LA METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE

POUR DES OBSERVATIONS DOPPLER.

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rassemblerons et commenterons les divers résultats obtenus en tâchant d'interpréter au mieux leurs portées relatives.

Nous donnerons également quelques conseils d'utilisation se basant, non sur des considérations théoriques, mais plutôt sur des questions d'intérêt pratique telles que le temps de calcul, la rapidité de convergence, propos recueillis de manière heuristique.

Nous examinerons successivement la vitesse de convergence suivant le nombre d'équations et la précision de l'approximation, la portée d'une perturbation des éléments elliptiques sur les éléments cartésiens, le type de convergence et les sensibilités comparées de divers paramètres.

6.2 Tableaux de convergence

Pour ne pas compliquer outre mesure les schémas de résultats nous travaillerons constamment sur la même ellipse des observations obtenue à partir de

Vecteur observé:	$x = - 0.245992$	
	$y = - 0.043491$	$r = 1.167606$
	$z = + 1.140571$	
	$\dot{x} = - 0.880037$	
	$\dot{y} = - 0.198355$	$v = 0.924367$
	$\dot{z} = - 0.201606$	

6.2.1 - Convergence par composantes (cas particulier du demi-grand axe)

$$a(\text{calculé}) = a(\text{observé}) \times 1.001$$

Dans les unités courantes : $a_c \approx a_o + 7 \text{ km.}$

$$a(\text{observé}) = 1.164888$$

Les éléments cartésiens correspondant aux éléments elliptiques perturbés sont :

$$x = - 0.246237$$

$$y = - 0.043534$$

$$z = + 1.114171$$

$$x = - 0.879596$$

$$y = - 0.198256$$

$$z = - 0.201505$$

$$r = 1.168773$$

$$v = 0.923905$$

Nombre de passages = 1

Nombre d'équations = 18

TABLEAU 1

n° de l'itération	position calculée x y z	vitesse calculée \dot{x} \dot{y} \dot{z}	ordre des $\Delta \dot{p}$	r	v
0	- 0.246237 - 0.043534 + 1.114171	-0.879596 -0.198256 -0.201505	10^{-3}	1.168773	0.923905
1	- 0.245689 - 0.045058 + 1.140544	-0.880502 -0.196337 -0.201641	10^{-6}	1.167576	0.924386
2	- 0.245997 - 0.043506 + 1.140578	-0.880048 -0.198281 -0.201616	$5 \cdot 10^{-7}$	1.167617	0.924363

3	-0.245996 -0.043450 +1.140569	-0.880022 -0.198424 -0.201601	10^{-7}	1.167604	0.924366
4	-0.245990 -0.043503 <u>+1.140571</u>	-0.880041 -0.198333 -0.201607	$5 \cdot 10^{-8}$	1.167606	0.924366
5	-0.245992 -0.043486 +1.140571	-0.880035 -0.198362 -0.201605	10^{-8}	1.167606	0.924366
6	<u>-0.245991</u> -0.043492 +1.140571	-0.880037 -0.198353 <u>-0.201606</u>	10^{-8}	1.167606	0.924366
7	-0.245992 <u>-0.043491</u> +1.140571	<u>-0.880036</u> -0.198356 -0.201606	$5 \cdot 10^{-9}$	1.167606	0.924366
8	-0.245992 -0.043491 +1.140571	-0.880036 <u>-0.198355</u> -0.201606	10^{-9}	1.167606	0.924367

On constate déjà à l'examen de l'ordre de grandeur des $\Delta \dot{p}$ que la première correction est importante, comparée aux suivantes.

1^{ière} itération : $10^{-3} \rightarrow 10^{-6}$

itérations 2 \rightarrow 8 : $10^{-6} \rightarrow 10^{-9}$

En norme, on a la bonne vitesse après 3 itérations et la bonne position après 4 itérations.

6.2.2 _ Influence du nombre d'équations (demi-grand axe)

$$a_c = a_0 \times 1.001 \quad (\sim 7 \text{ kms})$$

TABLEAU 2

nombre de passages	nombre d'équations	nombre d'itérations (précision 0,5 m)
1	6	12
1	18	8
3	49	7

$$a_c = a_0 \times 1.003 \quad (\sim 21 \text{ kms})$$

TABLEAU 3

nombre de passages	nombre d'équations	nombre d'itérations (précision 0,5 m)
1	6	divergence
1	18	pas de convergence
3	49	10

Le tableau 2 nous montre l'importance du nombre d'équations sur la vitesse de convergence, ce à quoi l'on doit normalement s'attendre, l'ajustement d'une courbe à un ensemble de points s'avérant plus exact lorsque le nombre de points augmente.

Remarquons encore, ce que le tableau ne peut montrer, que les corrections sur les composantes sont relativement plus homogènes pour un nombre d'équations croissant.

	$\Delta x/x$	$\Delta y/y$	$\Delta z/z$	$\Delta \dot{x}/\dot{x}$	$\Delta \dot{y}/\dot{y}$	$\Delta \dot{z}/\dot{z}$
6	10^{-3}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}
49	10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}

Le tableau 3 va plus loin, il indique que la convergence, avec 50 équations, peut être atteinte dans des cas où elle ne l'est pas pour un nombre inférieur.

Dans les tableaux suivants on demandera chaque fois pour la convergence la même précision de l'ordre du demi-mètre.

6.2.3 - Evolution du nombre d'itérations avec la perturbation
(cas particulier de l'excentricité)

$$e(\text{observé}) = 0.00505$$

TABLEAU 4

perturbation	vecteur position calculé	vecteur vitesse calculé	r v	3 passages 49 équat.	1 passage 18 équat.
$e_c = e_o + 0.001$	-0.244139 -0.043067 +1.141541	-0.879801 -0.198294 -0.200716	1.168150 0.923936	5	8
$e_c = e_o + 0.003$	-0.245991 -0.043491 +1.140571	-0.880037 -0.198355 -0.201606		6	21
$e_c = e_o + 0.005$	-0.236729 -0.041376 +1.145403	-0.878836 -0.198043 -0.197172	1.170342 0.922199	6	ne converge pas
$e_c = e_o + 0.009$	-0.229320 -0.039684 +1.149235	-0.877835 -0.197785 -0.193652	1.172562 0.920442	7	"
$e_c = e_o + 0.01$	-0.227468 -0.039262 +1.150188	-0.877579 -0.197719 -0.192775	1.173122 0.919999	7	"
$e_c = e_o + 0.02$	-0.208953 -0.035037 +1.159621	-0.874901 -0.197035 -0.184093	1.178817 0.915513	9	"

e + 0.03	-0.190451	-0.872010		11	ne converge pas
	-0.030816	-0.196304	1.184686		
	+1.168871	-0.175566	0.910911		
e + 0.04	-0.171964	-0.868913		ne converge pas	"
	-0.026601	-0.195529	1.190724		
	+1.177941	-0.167197	0.906199		

Les mêmes remarques sont à faire , si ce n'est que le gain du nombre d'itérations est accentué pour un choix de 3 passages du satellite et 49 équations , et que la convergence est obtenue pour des perturbations beaucoup plus importantes que pour le demi-grand axe.

6.2.4 - Tableau général des perturbations maximum

Ce tableau donnera une idée un peu plus précise de ce que l'on entendra par "bonne approximation de départ" dans le processus de convergence.

Paramètres de l'ellipse des observations :

$$\begin{aligned}
 a &= 1.164488 \\
 e &= 0.005053 \\
 i &= 1.561049 \\
 \Omega &= 0.219511 \\
 \omega &= 3.841459 \\
 M_0 &= - 2.046306
 \end{aligned}$$

Nous avons pour 3 passages , soit 49 observations :

TABLEAU 5

éléments elliptiques	perturbation	position	vitesse	r v	précision: 10^{-7} pour le vecteur correction
a	$a_c = a_o \times 1.003$	-0.246729 -0.043621 +1.114399	-0.878719 -0.198058 -0.201304	1.171106 0.922982	10
e	$e_c = e_o + 0.03$	-0.170451 -0.030816 +1.167871	-0.872010 -0.196304 -0.175566	1.184686 0.910911	11
i	$i_c = i_o \times 1.02$	-0.238238 -0.078245 +1.140362	-0.881407 -0.192212 -0.201569	1.167557 0.924366	11
Ω	$\Omega_c = \Omega_o \times 1.1$	-0.244978 -0.048879 +1.140571	-0.875471 -0.217624 -0.201606	1.167606 0.924366	7
ω	$\omega_c = \omega_o \times 1.009$	-0.284307 -0.052132 +1.131263	-0.872642 -0.197016 -0.232667	1.167606 0.924366	12
M	$M_c = M_o \times 1.02$	-0.200517 -0.033251 +1.149993	-0.887252 -0.199595 -0.164590	1.167817 0.924199	10

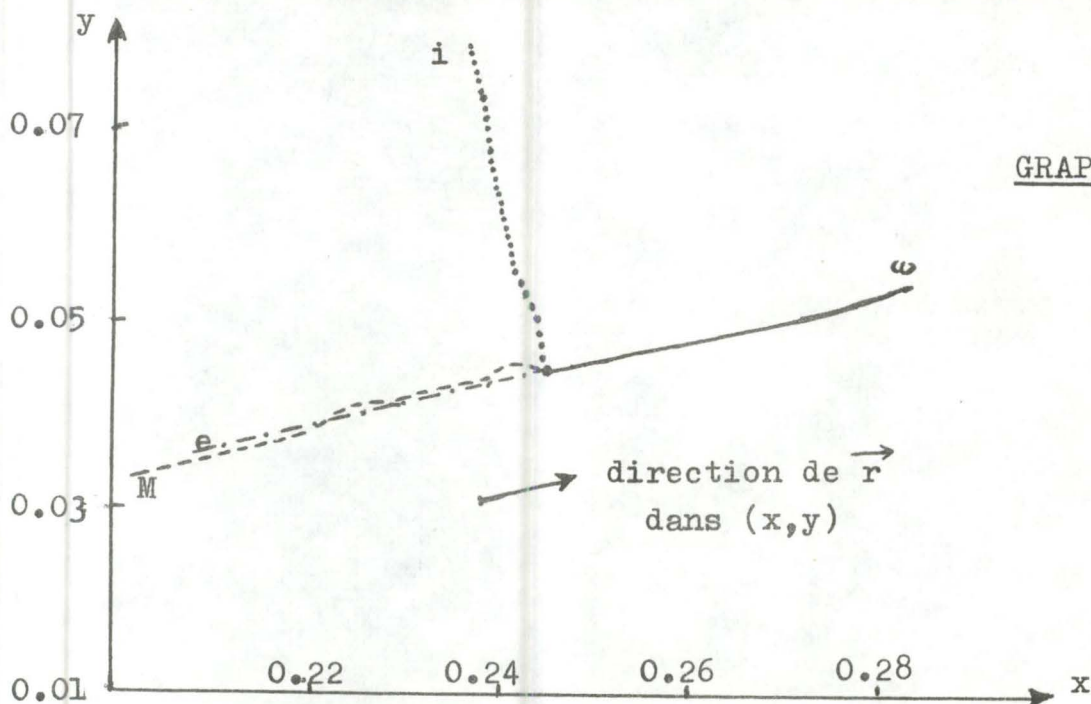
6.3 Influence des perturbations sur la norme et la direction des vecteurs position et vitesse

Nous avons indiqué dans les tableaux précédents les composantes des vecteurs position et vitesse perturbés ; il convient de les interpréter prudemment.

Par exemple, une variation sensible de la direction sans variation de norme peut se traduire dans les chiffres par une importante variation des composantes, alors qu'une variation de norme sans variation de direction est plus difficilement décelée à ce niveau.

Nous présenterons dans ce paragraphe quelques graphiques permettant au lecteur de mieux visualiser ces 2 types de variation (norme et direction).

Evolution de l'approximation dans les différents plans:



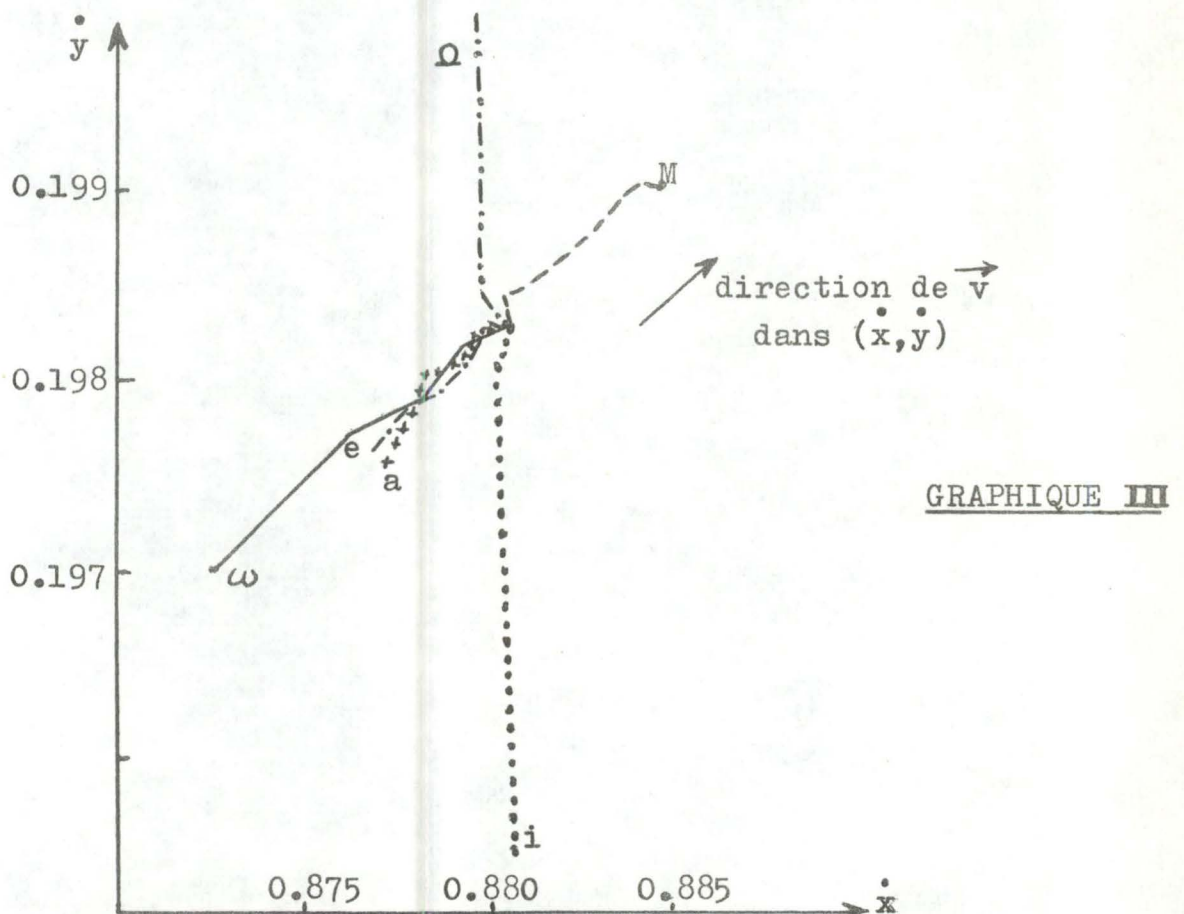
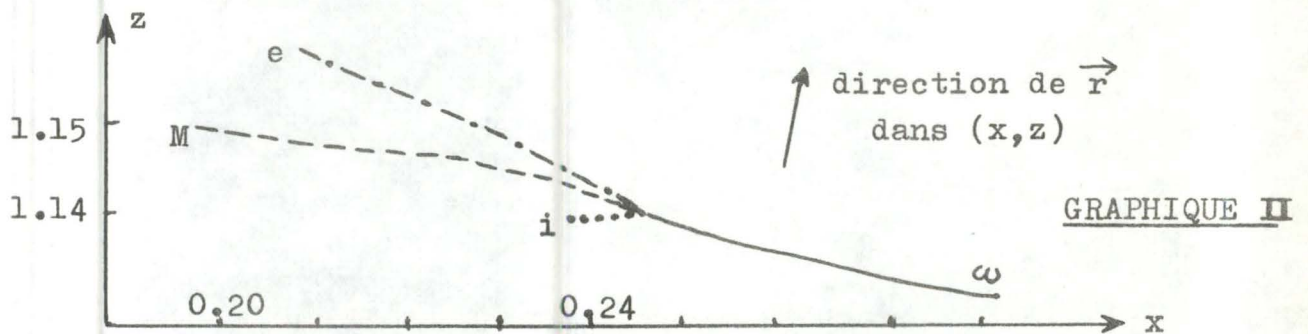
GRAPHIQUE I

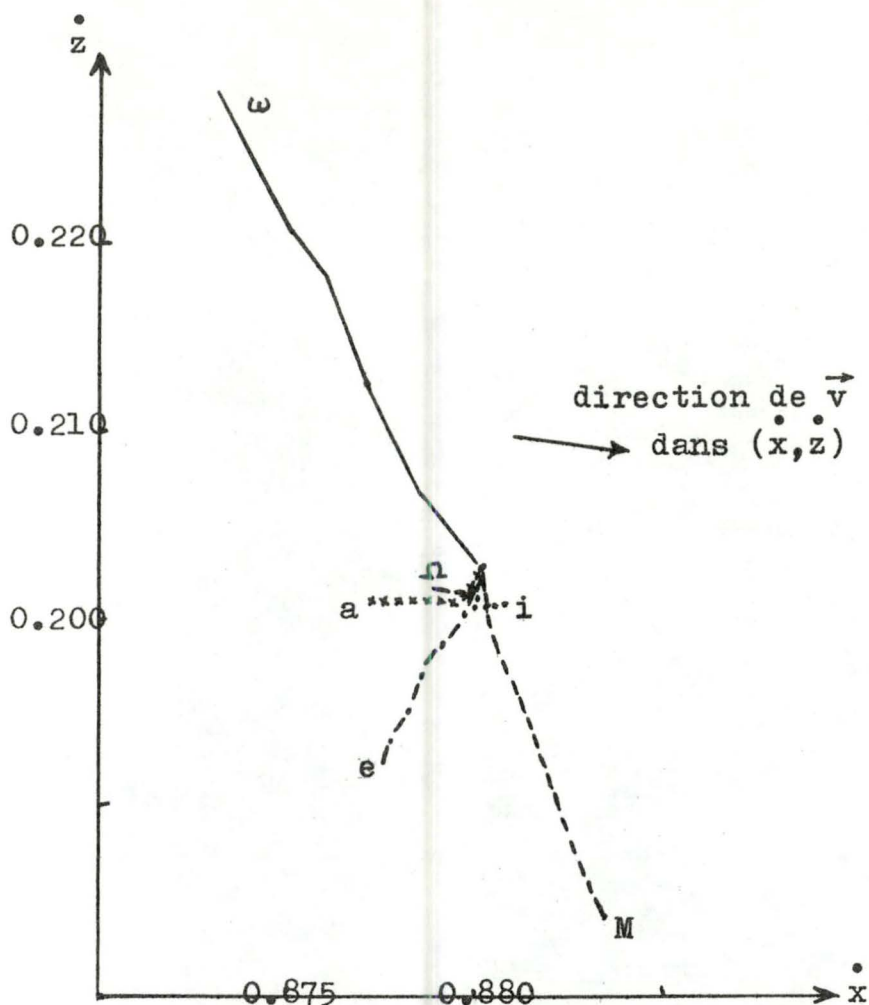
On voit que e , ω et M font évoluer la position dans le même sens et la direction opposée pour ω . Ils produisent essentiellement des variations de norme. D'autre part i provoque une modification de la direction sans affecter de manière importante la norme.

Remarque:

Il est possible que les courbes se rattachant à certains éléments elliptiques ne figurent pas sur certains graphiques. C'est que les perturbations en résultant sont faibles relativement aux autres. (Exemple: a et Ω dans le graphique I)

Les graphiques qui suivent sont à interpréter de la même façon. Ils peuvent éclairer le lecteur quant à l'importance de la perturbation sur les composantes vitesses et positions.

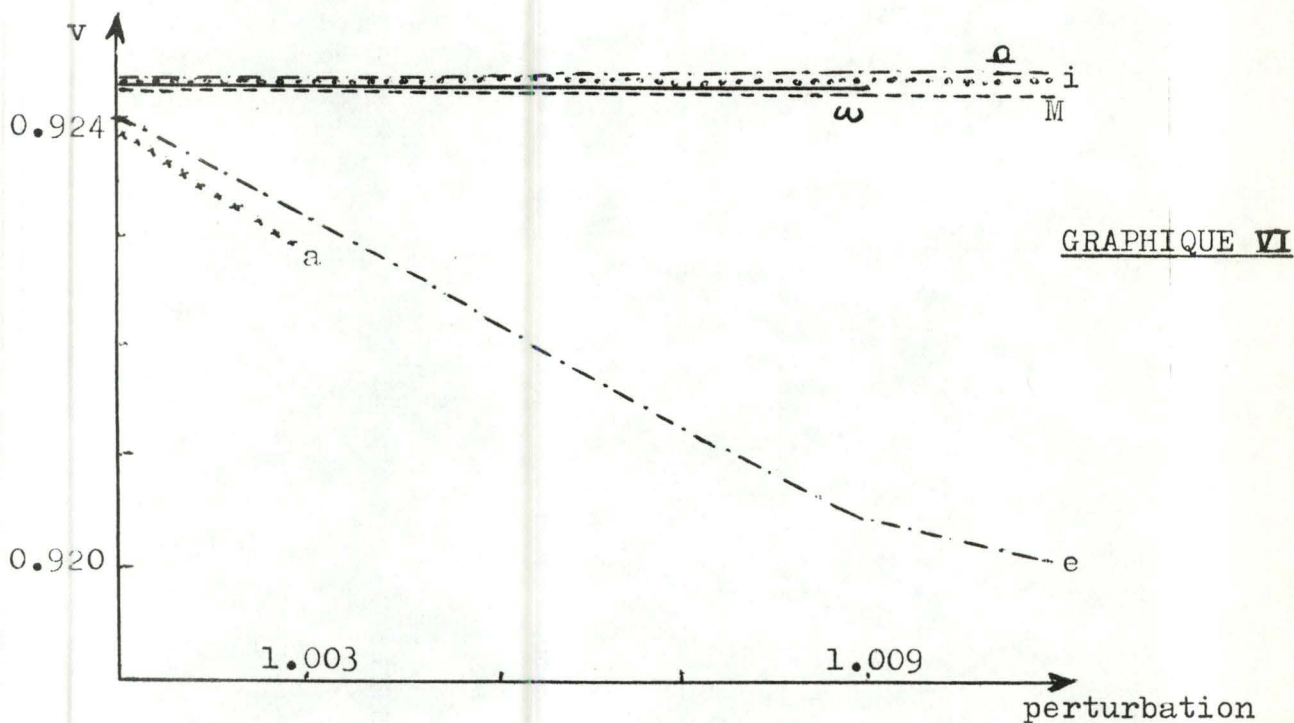
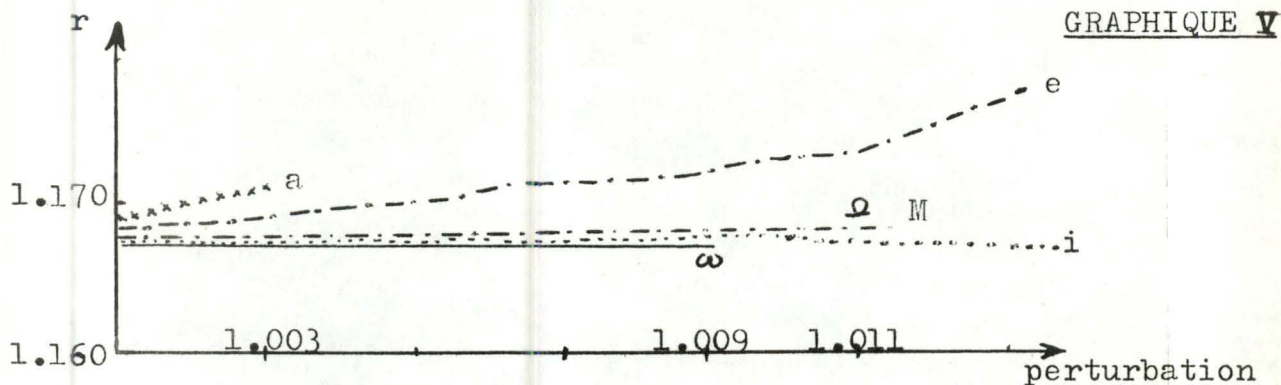




Quelques remarques encore à propos des graphiques précédents:

Les différentes perturbations sont examinées plan par plan . Dès lors , pour avoir une idée tout à fait générale de celles-ci , il faut grouper les graphiques deux par deux (I et II , III et IV) afin d'éviter toute surprise à l'interprétation.

Les graphiques qui suivent évoquent uniquement les variations en norme de la position et de la vitesse en vue de compléter l'information à ce sujet.



Le graphique V permet de constater que des modifications assez sensibles de i, ω, Ω et M n'affectent pas beaucoup la norme de la position alors que les mêmes perturbations sur a et e ont des effets différents. Cela permet d'expliquer en partie la raison pour laquelle la convergence disparaît plus vite pour des modifications de a (seulement 1.003).

Les mêmes constatations sont à faire en ce qui concerne le graphique VI pour la norme de la vitesse, ce qui appuie l'avis émis plus haut.

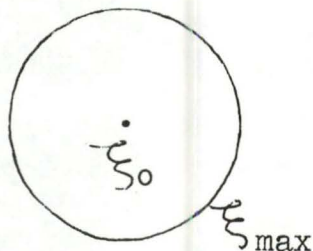
Conclusion provisoire

Rassemblant les résultats des différents tableaux du paragraphe 2 et les considérations issues de l'examen des graphiques précédents, il apparaît que la limite de la méthode se situe au même niveau dans l'espace pour chaque élément elliptique.

Cependant, comme les modifications de l'un ou l'autre de ces éléments ont des répercussions essentiellement différentes, la limite est plus faible pour les éléments à fortes répercussions (entendons a et e) que pour les quatre autres.

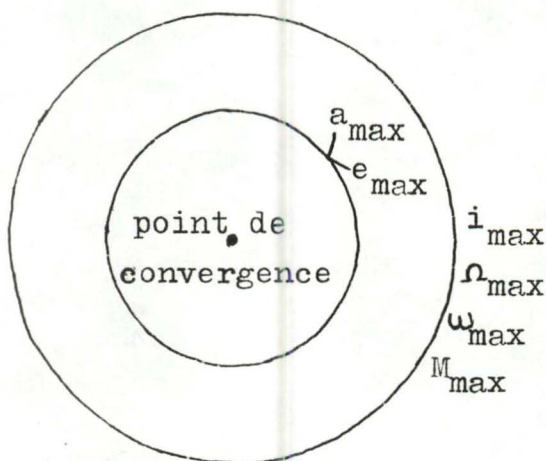
Concrétisons ces affirmations dans un diagramme.

- Voisinages de convergence pour les éléments cartésiens :



où ξ est un quelconque des éléments cartésiens

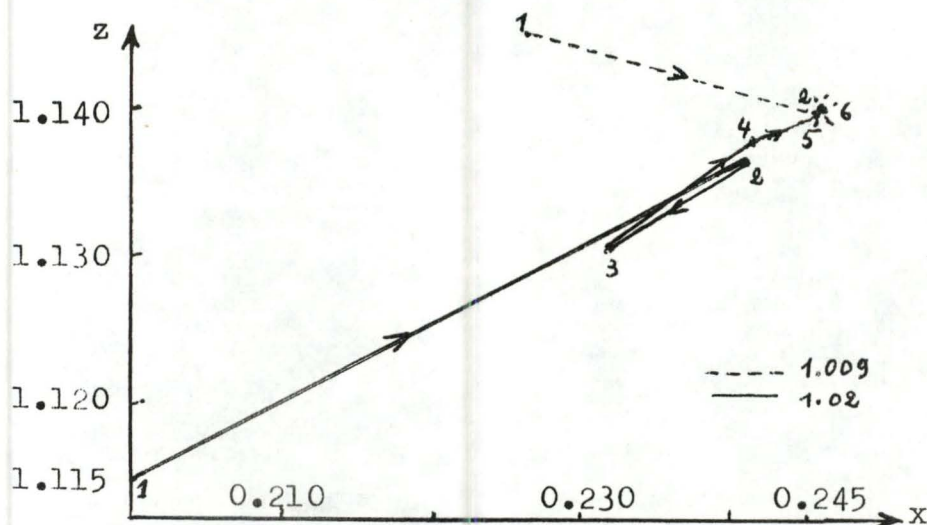
- Voisinages de convergence pour les éléments elliptiques :



6.4 Examen graphique des types de convergence

L'importance relative des itérations successives, la façon d'approcher la bonne valeur, sont des aspects que nous n'avons pas encore mis en évidence. C'est l'objet de ce paragraphe.

Bien sûr, nous n'examinerons pas le cas de chaque perturbation, d'autant plus qu'on arrive à des conclusions identiques.



GRAPHIQUE VII

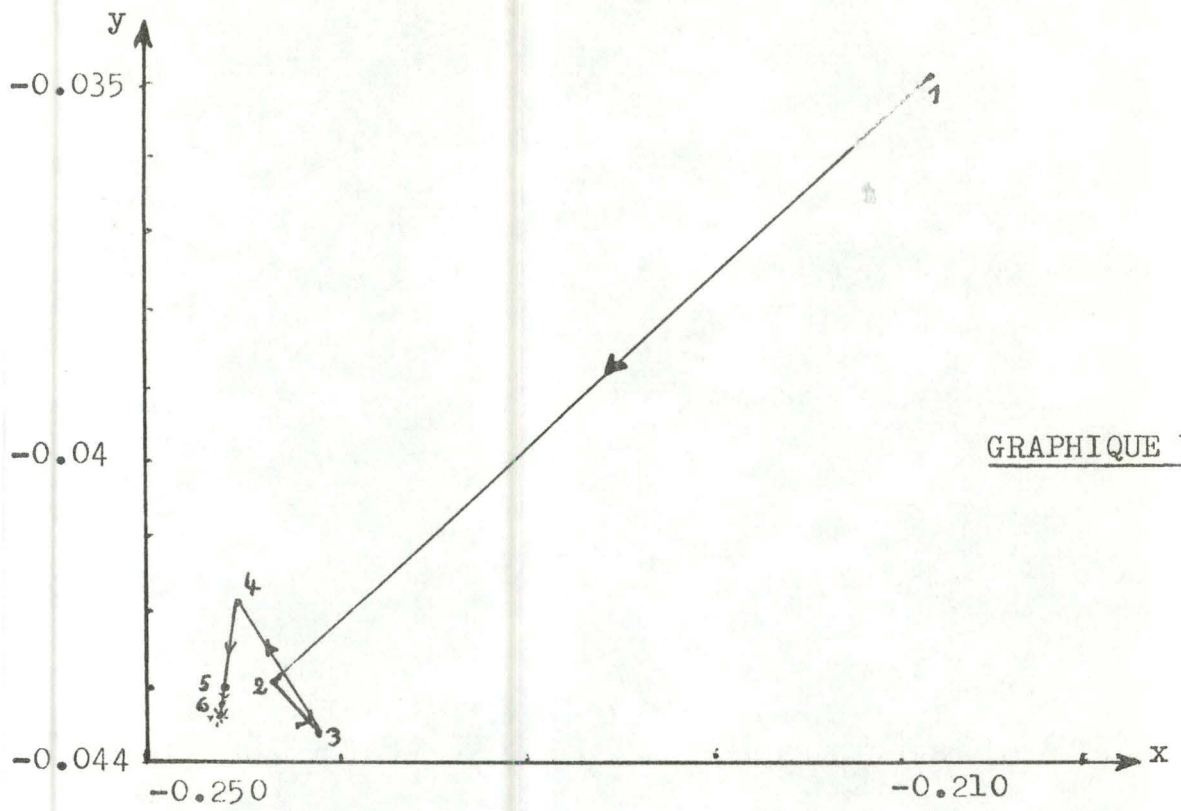
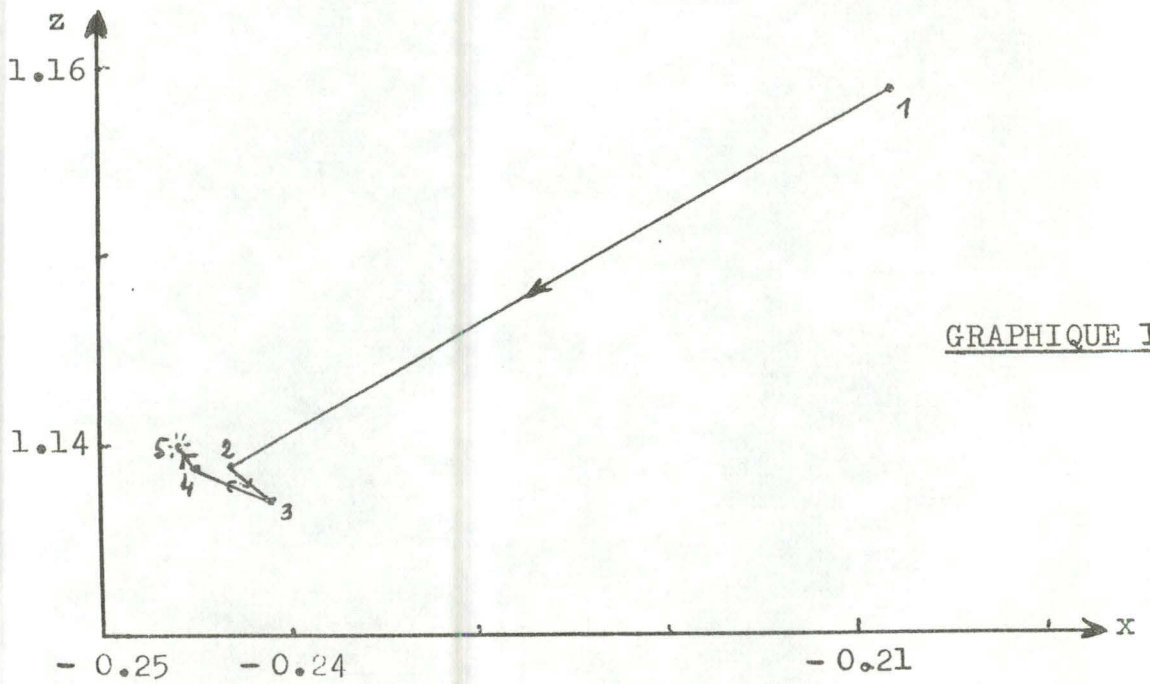
Nous avons envisagé, pour le graphique VII, deux perturbations de M , une faible de 9 ‰ et une plus importante de 2 ‰.

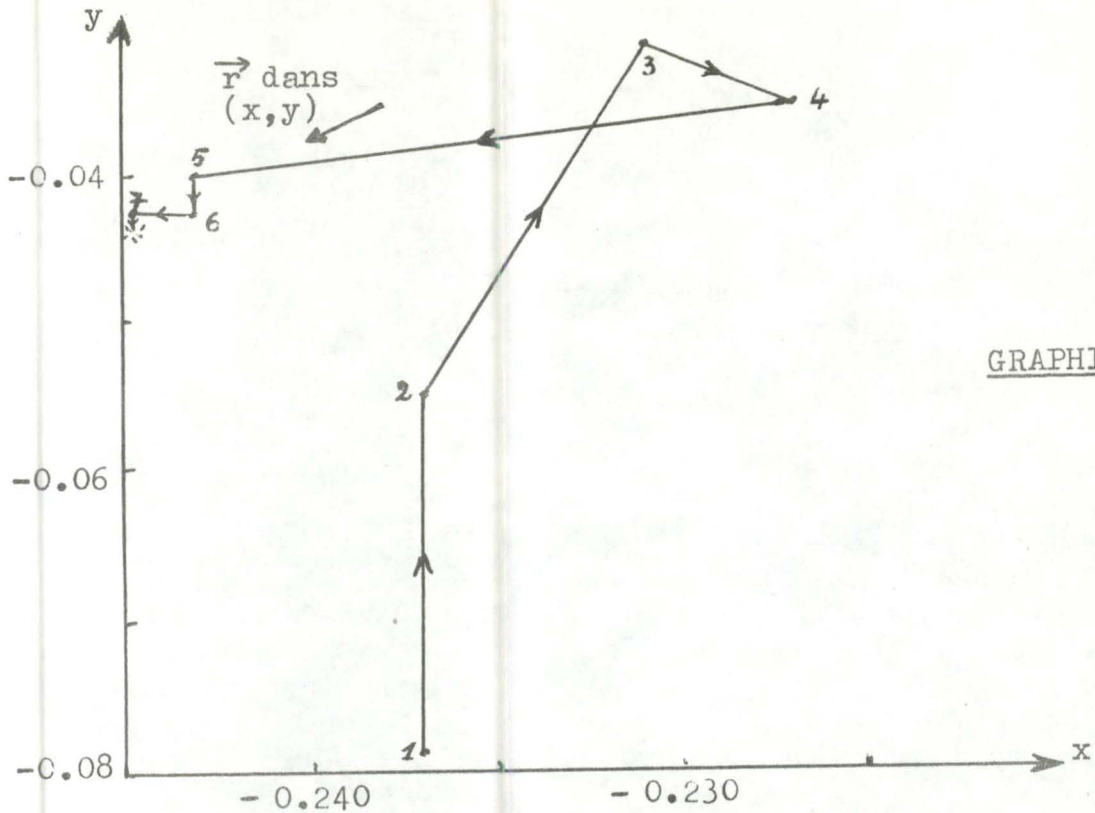
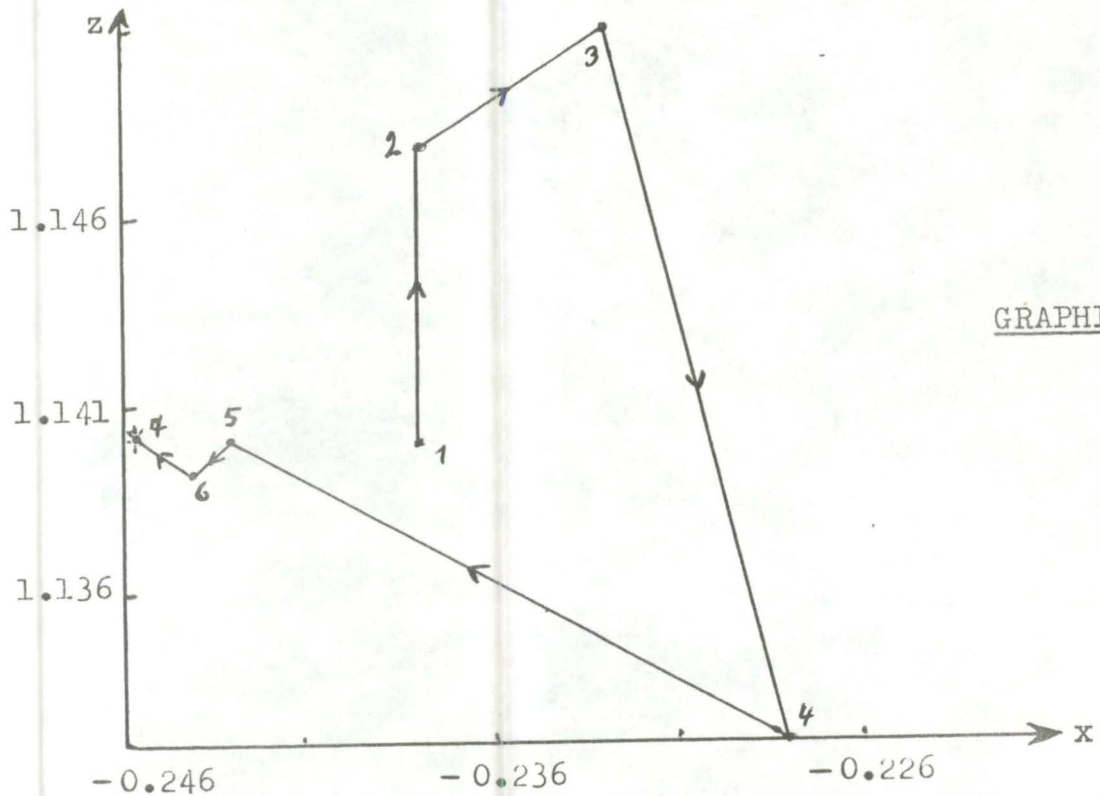
On constate que :

- dans les deux cas, la première itération est prédominante et conduit l'approximation dans un voisinage relativement étroit de la solution ;

- dans le cas d'une perturbation importante, la progression vers la solution marque un temps d'arrêt au voisinage de celle-ci.

Les mêmes constatations ont été faites pour les autres éléments. Nous présentons ces résultats pour une perturbation de l'inclinaison de 2 ‰ et pour une perturbation de 0.02 de l'excentricité respectivement dans les plans Oxy et Oxz .

GRAPHIQUE VIIIGRAPHIQUE IX

GRAPHIQUE XGRAPHIQUE XI

Notons encore , et cela paraît normal , que l'importance de la première itération décroît considérablement lorsqu'on atteint la limite de convergence (graphiques X et XI).

Remarque d'intérêt pratique:

La matrice des dérivées partielles subissant peu de changement (seuls les $\Delta \dot{\rho}_i$ varient considérablement), on peut la conserver dès la première itération et ne plus la calculer dans la suite. La qualité de la convergence n'en est pas affectée pour autant, mais il en résulte un gain considérable de temps machine.

A titre indicatif, le même exemple testé dans les deux cas a fourni les résultats suivants :

- matrice modifiée (12 itérations) 150.2 sec CPU
- matrice inchangée (22 itérations) 59.8 sec CPU

Conclusions générales

La convergence est caractérisée par un premier pas important. Elle est directe pour de petites perturbations, elle est soumise à de petites oscillations sans importance pour de plus grandes.

Les paramètres, hormis le demi-grand axe, ont des sensibilités semblables. L'excentricité est à traiter différemment puisqu'il s'agit d'une variable sans dimension. Visiblement c'est le plus sage des paramètres. Quant au demi-grand axe, c'est lui qui provoque les plus grandes variations de normes. Il conviendra donc d'avoir une bonne idée de sa valeur au départ (20 kms). Cela est tout à fait possible actuellement, des procédés ayant été mis au point, permettant à partir d'observations Doppler d'évaluer a avec environ 5 à 10 kms de précision.

CHAPITRE 7

GENERALISATION

DE LA METHODE DE CORRECTION DIFFERENTIELLE

DANS LE CAS D'UNE ORBITE NON KEPLERIEENNE

7.1 Introduction

Considérons maintenant l'aplatissement de la terre , ou les termes proportionnels à J_2 dans le potentiel du problème des deux corps terre-satellite .

Les éléments elliptiques $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ que nous avons supposés constants seront maintenant variables dans le temps . Nous ne pourrons plus intégrer l'équation de Kepler pour connaître la position et la vitesse du satellite. L'orbite sera déterminée par l'ensemble des paramètres $(a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), M(t), t)$

Nous aurons recours à la méthode de Von Zeipel appliquée au cas des satellites artificiels et développée par Brouwer dans "The Astronomical Journal" (64 - p.378) pour trouver les perturbations séculaires , de courte et de longue période des éléments elliptiques.

Dans les paragraphes suivants nous donnerons un bref aperçu de ce qui pourrait être exposé dans la méthode de correction différentielle explorée précédemment pour des observations Doppler si l'on tient compte des forces perturbatrices agissant sur le satellite.

Ensuite nous donnerons quelques éléments de la méthode de Von Zeipel programmée par Deprit et Polarchek.

7.2 Possibilité d'applications de la méthode de correction différentielle

La méthode de correction différentielle dans le cas d'observations Doppler a pour but de comparer les $\dot{\rho}$ observés et les $\dot{\rho}$ calculés

(à partir d'une première "bonne" approximation initiale de la trajectoire), pour avoir un meilleur ensemble de paramètres déterminant la trajectoire du satellite.

En pratique nous ne prendrons d'abord des \dot{p} calculés pour 2-3 passages correspondant à une orbite parfaitement keplerienne. Nous obtiendrons alors une "bonne" première approximation des paramètres elliptiques, pour un nouveau processus itératif tenant compte alors de toutes les forces de perturbation, et qui donnera les valeurs calculées des paramètres pour des observations sur plusieurs jours (2 ou 3).

Il serait également souhaitable d'envisager les problèmes suivants. Considérons les éléments moyens de l'orbite d'un satellite artificiel fourni par Von Zeipel, et soit e_m un de ces éléments quelconques.

A partir de ceux-ci, on peut calculer les éléments osculateurs e_o correspondant aux temps d'observation qui donneront la position et la vitesse du satellite.

Comparons les e_m aux éléments e_k de l'orbite parfaitement keplerienne

$$\text{Si } |e_m - e_k| < \text{erreur d'observation,}$$

nous concluerons que l'orbite keplerienne est un bon modèle dans la méthode de correction différentielle.

Dans le cas contraire, $|e_m - e_k| > \text{erreur d'observation}$, le modèle sera à améliorer. Au lieu d'employer une orbite keplerienne où $\dot{p} = R_{\text{Kepler}}(a, e, i, \omega, \Omega, M)$, il faudra considérer une expression de \dot{p} qui contienne des termes proportionnels à J_2 :

$$\dot{p} = R_{J_2}(a_m, e_m, i_m, \omega_m, \Omega_m, M_m)$$

De la même façon on devra comparer les éléments elliptiques correspondant aux modèles où l'on tient compte d'une part des termes proportionnels à J_2 , d'autre part de toutes les perturbations.

7.3 Principe de la méthode de Von Zeipel appliquée au cas des satellites artificiels

7.3.1 Les équations du mouvement:

Les équations du mouvement pour le problème des deux corps terre-satellite sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{où } U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \beta)$$

β étant la latitude.

Et la fonction perturbatrice peut s'écrire après quelques transformations:

$$R = \frac{\mu J_2}{a^3} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2\omega + 2\nu) \right]$$

Définissons les variables de Delaunay:

$$\begin{aligned} L &= (\mu a)^{1/2} & \ell &= \text{anomalie moyenne} \\ G &= L (1 - e^2)^{1/2} & g &= \text{argument du périégée} \\ H &= G \cos i & h &= \text{longitude du noeud ascendant.} \end{aligned}$$

Les équations deviennent:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \ell} \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial L} \qquad \frac{dg}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial G} \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial H}$$

$$\text{où } F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2}{L^6} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right]$$

et où les termes ne faisant pas intervenir les variables de Delaunay sont développés en série.

7.3.2 _ Principe de la méthode :

Le problème est de trouver une transformation canonique qui fasse passer des variables L, G, H, ℓ, g, h aux nouvelles variables $L', G', H', \ell', g', h'$ telle que le nouveau hamiltonien ne contienne plus les variables angulaires ℓ', g', h' .

Soit $S(L', G', H', \ell, g, h)$ telle que

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial S}{\partial \ell'} & G &= \frac{\partial S}{\partial g'} & H &= \frac{\partial S}{\partial h'} \\ \ell' &= \frac{\partial S}{\partial L'} & g' &= \frac{\partial S}{\partial G'} & h' &= \frac{\partial S}{\partial H'} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Les équations en les nouvelles variables sont:

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial \ell'} & \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial g'} & \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial h'} \\ \frac{d\ell}{dt} &= - \frac{\partial F^*}{\partial L'} & \frac{dg'}{dt} &= - \frac{\partial F^*}{\partial G'} & \frac{dh'}{dt} &= - \frac{\partial F^*}{\partial H'} \end{aligned}$$

où F^* est uniquement fonction de L', G', H' .

L', G', H' seront alors des constantes tandis que ℓ', g', h' seront fonction du temps.

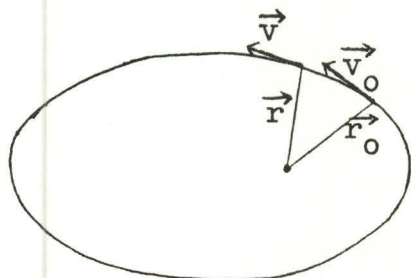
La méthode consiste donc essentiellement à trouver la fonction S . Pour ce , on développe F , S en puissance de J_2 .

Après avoir remplacé les variables L, G, H, ℓ, g, h par les expressions (7.1), on développera F en série de Taylor et par identification des termes de même puissance en J_2 dans F et F^* , on trouve S . On en déduit alors les perturbations de courte et longue période ainsi que les termes séculaires .

APPENDICE 1

RESOLUTION DE L'EQUATION DE KEPLER

Soit $\vec{r}_0 (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v}_0 (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ respectivement la position et la vitesse du satellite en t_0 .



Définissons comme au chapitre 2

$$C_e = e \cos E_0$$

$$S_e = e \sin E_0$$

L'équation de Kepler ,

$$M - M_0 = k \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0)$$

peut être résolue itérativement par une méthode de Newton-Raphson :

Posant $h = \frac{E - E_0}{2}$, où E est l'anomalie excentrique au temps t quelconque, la formule annoncée s'écrit :

$$h_{n+1} = h_n - \frac{h_n + S_e \sin h_n^2 - C_e \sin h_n \cos h_n - (M - M_0)}{1 + 2 S_e \sin h_n \cos h_n - C_e (1 - 2 \sin h_n^2)}$$

Cette formule et celles qui suivront sont établies dans "Methods of orbit determination". (réf.[1])

On peut cependant démontrer qu'elle a un sens lorsque la convergence est atteinte, c'est-à-dire pour un certain $\nu \in \mathbb{N}$ lorsque $h_{\nu+1} \sim h_\nu$.

Appliquant successivement les formules suivantes :

$$c = a(1 - \cos 2h)$$

$$s = \sqrt{a} \sin 2h$$

$$f = 1 - \frac{c}{r_0}$$

$$g = \left(r_0 s + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{\sqrt{\mu}} \cdot c \right) / \sqrt{\mu}$$

$$r = r_0 + (1 - r_0/a)c + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 / \sqrt{\mu} a$$

$$f' = -\sqrt{\mu} \cdot s / r \cdot r_0$$

$$g' = 1 - c/r$$

finalement on trouve :

$$\vec{r} = f \vec{r}_0 + g \vec{v}_0$$

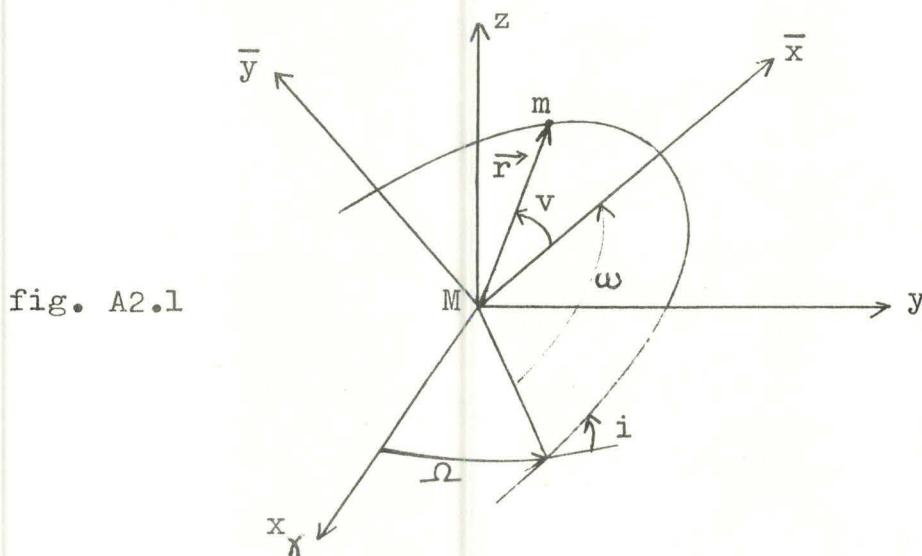
$$\vec{v} = f' \vec{r}_0 + g' \vec{v}_0$$

+ + + + + + +

APPENDICE II
PASSAGE DES COORDONNEES ELLIPTIQUES
AUX COORDONNEES CARTESIENNES.

Calcul des positions :

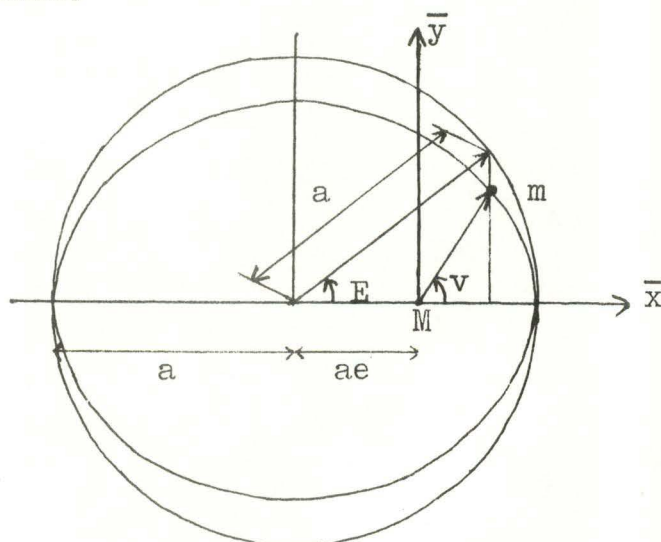
Soit \bar{x} et \bar{y} les axes dans le plan de l'orbite, \bar{x} étant orienté positivement vers le périégée et \bar{y} perpendiculaire à \bar{x} (dans le sens des anomalies croissantes).



Les coordonnées du satellite m sont:

$$\begin{cases} \bar{x} = a \cos E - ae \\ \bar{y} = b \sin E \end{cases} \quad (1)$$

fig. A2.2



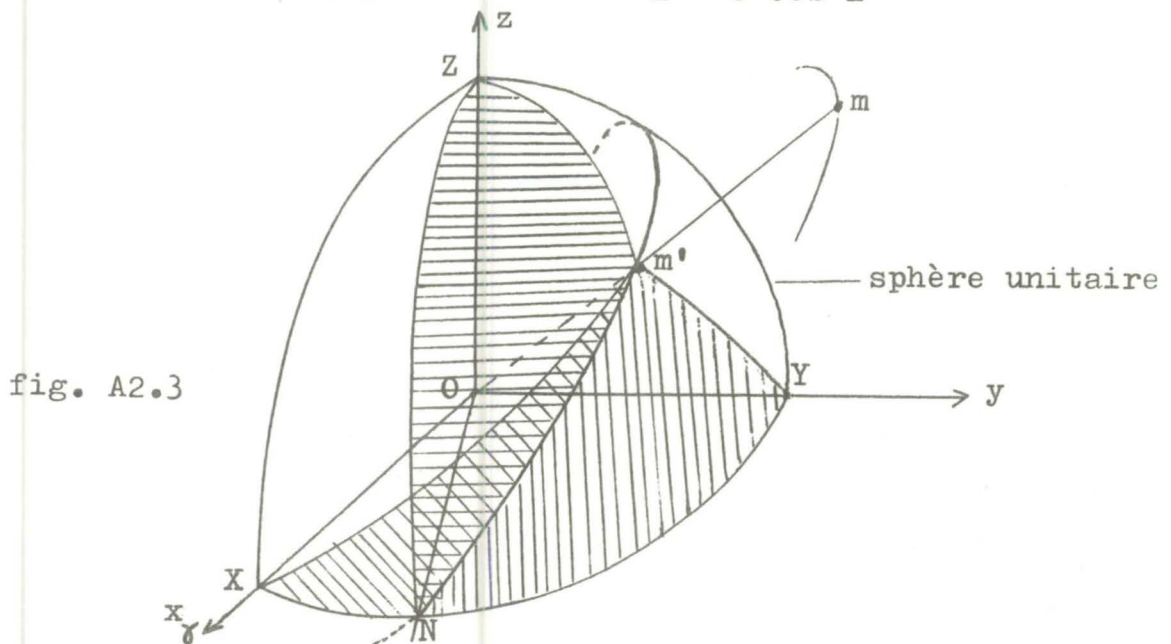
Dérivant les équations (1) par rapport au temps , il vient :

$$\begin{cases} \dot{x} = - a \sin E \cdot \dot{E} \\ \dot{y} = b \cos E \cdot \dot{E} \end{cases}$$

où \dot{E} peut être évalué par l'équation de Kepler dérivée par rapport au temps :

$$\begin{cases} E - e \sin E = M = nt \\ (1 - e \cos E) \dot{E} = n \end{cases}$$

$$\text{d'où } \dot{x} = - \frac{n a \sin E}{1 - e \cos E} \quad \dot{y} = \frac{n b \cos E}{1 - e \cos E}$$



- n , le moyen mouvement, est donné par :

$$n = k \sqrt{\mu/a^3}$$

- E est résolu à partir de M par Newton-Raphson (§ 5.3.1).

Examinant la figure A2.3 et les triangles sphériques XNm' , YNm' et ZNm' on trouve :

$$\begin{cases} x = r [\cos \Omega \cos(\omega + v) - \sin \Omega \sin(\omega + v) \cos i] \\ y = r [\sin \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \sin(\omega + v) \cos i] \\ z = r [\sin(\omega + v) \sin i] \end{cases}$$

où $r = a(1 - e \cos E)$

D'autre part , dans le plan de l'orbite,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= r \cos v \\ \bar{y} &= r \sin v\end{aligned}$$

et donc finalement ,

$$\begin{aligned}x &= A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y} \\ y &= A_2 \bar{x} + B_2 \bar{y} \\ z &= A_3 \bar{x} + B_3 \bar{y}\end{aligned} \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned}A_1 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ B_1 &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ A_2 &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ B_2 &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ A_3 &= \sin \omega \sin i \\ B_3 &= \cos \omega \sin i\end{aligned}$$

Calcul des vitesses :

Les composantes \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} de la vitesse sont données par les relations suivantes déduites de (2) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1 \dot{\bar{x}} + B_1 \dot{\bar{y}} \\ \dot{y} &= A_2 \dot{\bar{x}} + B_2 \dot{\bar{y}} \\ \dot{z} &= A_3 \dot{\bar{x}} + B_3 \dot{\bar{y}}\end{aligned} \quad (3)$$

Rassemblant (2) et (3) on a les formules de la page 2.7.

+ + + + +

APPENDICE III

 REDUCTION D'UN SYSTEME SURDETERMINE A LA FORME NORMALE

Nous envisageons la réduction d'un système $n \times 3$ pour des raisons de commodités.

Soit donc le système de n équations

$$\begin{aligned}
 a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
 a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
 - - - - - & \\
 a_nx + b_ny + c_nz &= d_n
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

aux 3 inconnues x, y et z ($n > 3$)

On appelle "équations normales" un système de 3 équations à 3 inconnues dont la solution (x_s, y_s, z_s) est telle que chaque équation de (1) donne un résidu

$$r_i = a_i x_s + b_i y_s + c_i z_s + d_i$$

avec , pour l'ensemble des résidus

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 \quad \text{minimum}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 0$$

Pour obtenir la solution (x_s, y_s, z_s) telle que (2) soit vérifié , on peut démontrer que les équations normales sont de la forme :

$$\begin{aligned}
 (\sum a_i^2)x + (\sum a_i b_i)y + (\sum a_i c_i)z &= \sum a_i d_i \\
 (\sum b_i a_i)x + (\sum b_i^2)y + (\sum b_i c_i)z &= \sum b_i d_i \\
 (\sum c_i a_i)x + (\sum c_i b_i)y + (\sum c_i^2)z &= \sum c_i d_i
 \end{aligned} \tag{3}$$

C'est un système symétrique .

En réalité , le système (1) pouvant s'écrire

$$A X = D$$

où $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x, y, z)$, $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}$,

le système (3) n'est rien d'autre que

$$A^T A X = A^T D$$

où $A^T A$ est une matrice carrée symétrique.

La solution du système (3) est donc

$$\begin{aligned}
 X &= (A^T A)^{-1} A^T D \\
 &= A^{-1} (A^T)^{-1} A^T D = A^{-1} D
 \end{aligned}$$

qui est la solution de (1).

+ + + + +

B I B L I O G R A P H I E

- ABRIOU "Détermination de l'orbite d'un satellite d'après les mesures de la fréquence Doppler". (non publié)
- BROUWER "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag". The Astronomical Journal - 64
- DEJAIFFE "The Transit Satellite System" ; Council of Europe .
24 th. Journées luxembourgeoises de géodynamique.
November 18-20 , 1974.
- ESCOBAL "Methods of orbit determination".
TRW Space Technology Laboratories
[1] John Wiley & Sons , New-York / London / Sydney .
- KAULA "Theory of Satellite Geodesy".
Blaisdell Publishing Company
Waltham , Massachusetts - Toronto - London .
- LEVALLOIS "Géodésie générale". Tome 4
et
KOVALEVSKY Collection scientifique de l'institut géographique national
Eyrolles - Paris .
- NEWTON "Geodetic measurements by analyses of the Doppler frequency received from a satellite".
Space Research - Kalmann. P.532.
- NOUEL "A propos du Doppler"
Groupe de Recherches de Géodésie spatiale . Avril 1972 .
- PAQUET "L'observation radioélectrique des satellites artificiels et son rôle en astronomie fondamentale".
O.R.B. Série géophysique n° 118 .
"Effet Doppler intégré - Correction des mesures".
Journées luxembourgeoises de géodynamique . Novembre 74 .

TATON "Détermination du mouvement du pôle à partir d'observations de satellite artificiels".
Journées luxembourgeoises de géodynamique
24-25 avril 1972 .

VANDEBORGHT "Détermination des orbites des satellites artificiels par la méthode de l'effet Doppler intégré".
Université Libre de Bruxelles
Année académique 1968 - 1969 .

NEWTON "The Navy Navigation Satellite System".
Space Research - Vol. II p. 735 .

