University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

En lisant les deux premiers chapitres de Markov processes : theorems and problems, E. Dynkin

Denil, Daniel

Award date:
1975

Awarding institution:
Universite de Namur

En lisant les deux premiers chapitres de

"Markov Processes : Theorems and Problems"

«E.Dynkin»

DENIL

Daniel

Malgré moi . . .

Embauché malgré moi dans l'usine à idées
j'ai refusé de pointer.
Mobilisé de même dans l'armée des idées
j'ai déserté.
Je n'ai jamais compris grand-chose
Il n'y a jamais grand-chose
ni petite chose.
Il y a autre chose

Autre chose
c'est ce que j'aime qui me plaît
et que je fais.

Jacques Prévert
(Choses et autres)

Je remercie Clément André, tant pour l'aide
qu'il m'apporta dans la réalisation de ce travail
que pour m'avoir permis de faire "autre chose".

H.H.

Avant-Propos.

L'objet de ce travail a été de résoudre dans le contexte de l'ouvrage* les problèmes laissés par les auteurs, à la discrétion du lecteur, à la fin des deux premiers chapitres+

Le but du travail est d'illustrer de façon simple et intuitive, la théorie développée dans le livre de référence; présentés sous forme relativement continue, ces problèmes à résoudre constituent un complément indispensable à la perception des

---

* Markov Processes

Theorems and Problems.

Eugenii B. Dynkin and Aleksandr A. Yushkevich.

Moscow University

Translated from Russian by James S. Wood.

Plenum Press . New York . 1969

+. A Criterion of Recurrence

. Probabilistic Solution of Certain Equations.

similitudes entre phénomènes "physiques" et phénomènes probabilistes dans une terminologie adaptée.

L'introduction du "Mouvement Brownien" par le biais de la promenade aléatoire sur un lattis, permet une vision claire et simple d'un phénomène à l'abord ardu lorsqu'il est présenté brutalement dans une terminologie abstraite.

Enfin cette "aventure" dans les processus markoviens vus par Dynkin et Yushkevich, à laquelle nous pouvons participer et collaborer à part entière est d'un attrait certain tant pour le mathématicien, soucieux avant tout de rigueur que pour le lecteur désireux de connaître un peu mieux le processus probabiliste, peut-être le plus répandu et encore tellement méconnu qu'est le processus markovien et, son dérivé le mouvement brownien.

Le lecteur de ce travail est invité à s'attarder plus sur la philosophie et le caractère explicatif de celui-ci que sur le côté purement technique des démonstrations qui jalonnent les pages qui suivent non parce qu'elles manquent de rigueur mais parce que leur richesse vient surtout de leur enchaînement.

Chapitre Ier

Ce chapitre introduit le lecteur aux notions de : potentiel, fonctions harmonique et excessive, comportement limite des trajectoires d'un processus.

Nous considérerons une chaine de Markov simple, illustrée par une promenade aléatoire symétrique sur un lattis.

Ces notions ont leurs équivalents en analyse dont elles constituent le plus souvent les antécédents.

Pour résoudre les exercices laissés par les auteurs à la discrétion du lecteur, nous utiliserons des procédés parfois plus puissants que nécessaire pour illustrer et particulariser le cours de processus stochastiques.

Nous travaillerons sur un espace d'état $Z^l \equiv H$ sur lequel nous disposons d'une matrice de transition markovienne symétrique $p(x,y)$ definie comme suit.

Si e_i est l'élément $(0,0,..0,1,0,..0)$ dont la i^e coordonnée est 1, nous appellerons points voisins du point $x \in Z^l$ les $2l$ points $x \pm e_i \quad (i=1,2,\dots,l)$

$$p(x,y) = 1/2l \quad \text{si } y \text{ est point voisin de } x.$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

Une chaine de Markov sur Z^l, dont la matrice de transition est $p(x,y)$ construite comme ci dessus est dite : Promenade aléatoire symétrique sur Z^l.

. Nous appellerons X_0 la position initiale de la particule effectuant la promenade et X_n la position après n étapes.

$p_n(x,y) = P_x\{X_n = y\}$ est la probabilité que la particule quittant le point x atteigne le point y après n étapes.

d'où $\sum_{y \in B} p_n(x,y) = P_x\{X_n \in B\}$ avec B ensemble inclus dans l'espace à l dimensions

. La promenade telle qu'elle est construite jouit d'une propriété intéressante à savoir que les $\xi_k = X_k - X_{k-1}$ sont indépend $\forall k$, sont indépendants de l'état initial de la particule et ont tous la même distribution.

Se basant sur cette propriété et moyennant quelques considérations non restrictives il sera possible d'obtenir une représentation intégrale de la fonction de transition $p_n(x,y)$ sous la forme :

$$p_n(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q e^{i\theta(x-y)}\, \Phi^n(\theta)\, d\theta \qquad (6)$$

avec $$\Phi(\theta) = \frac{1}{2l} \sum_{m=1}^{l} \left(e^{i\theta_m} + e^{-i\theta_m}\right) = \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{l} \cos\theta_m . \qquad (5)$$

et Q = ensemble des formes linéaires $\theta(z) = \theta_1 z_1 + \dots + \theta_l z_l$ avec les coeff. $\theta_l \dots \theta_1$ tq $|\theta_i| \leq \pi \ \forall i$

Si nous travaillons sur l'espace d'état Z^l $(l \geq 3)$

$U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)$ sera l'espérance mathématique du nombre de passages par le point y.

Nous verrons que $U(x,y) < \infty$ pour $l \geq 3$

d'où le nombre de passages par y est fini avec probabilité 1, de même la probabilité est 1 que tout ensemble borné de points du lattis soit quitté par la particule à un certain moment.

De plus

$$U(x,y) \sim \frac{c_l}{\|x-y\|^{l-2}} \quad \text{pour } \|x-y\| \to \infty .$$

•• Brossons maintenant un rappel sur l'introduction de fonctions harmoniques en probabilité :

Soit $f(x)$ une fonction des points du lattis Z^l.

$$\text{soit } Pf(x) = E_x f(X_1) = \sum_y p(x,y) f(y).$$

puisque $p(x, x+e_k) = 1/2l$.

$$Pf(x) = 1/2l \sum_{k=\pm 1}^{\pm l} f(x+e_k)$$

Ainsi l'opérateur $A = P - I$ (I opérateur identité)
est l'analogue discret de l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta$
où Δ est l'opérateur laplacien : $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$.

puisque $\Delta f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum f(x+he_k) - 2l f(x)}{h^2}$ pour des fonctions f suffisamment régulières

les auteurs orientent dès lors leur recherche vers la similitude des propriétés des équations différentielles et des concepts associés aux promenades aléatoires.

Les fonctions $f(x)$ sur le lattis Z^l sont dites harmoniques
si $Af(x) = 0\ (\forall x)$ et — surharmoniques
si $Af(x) \leq 0\ (\forall x)$.

D'où f est harmonique si $Pf = f$ et surharmonique si $Pf \leq f$.

Voyant que toute fonction constante est harmonique, les auteurs démontrent que, tout comme dans la théorie des équations différentielles, toute fonction harmonique bornée est constante.

Un exemple de fonction harmonique bornée est la probabilité $\Pi_B(x)$ de visiter l'ensemble B infiniment souvent partant de x, qui donc est constante, soit 1 si B est récurrent soit 0 sinon.

On peut donc en déduire une autre définition de la récurrence

Un ensemble B est récurrent si une particule partant d'un point quelconque du lattis visite B infiniment souvent avec probabilité 1.

Si la probabilité de cet évènement est inférieure à 1 pour un x, elle est égale à zéro $\forall x$ et B est transient.

Ayant constaté l'analogie entre laplacien "différentiel" et laplacien "probabiliste" et connaissant le rapport assez étroit entre laplacien et potentiel, envisageons l'étude du **POTENTIEL** d'une distribution.

Rappelons que pour une masse distribuée dans $\mathbb{R}^3$ avec une densité $\varphi(y)$;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(y)\, dy}{\|x-y\|}$$

est appelée potentiel de la distribution $\varphi(y)$.

Moyennant quelques contraintes sur φ; f est solution de l'équation de Poisson $\frac{1}{2} \Delta f(x) = -\varphi(x)$.

qui correspond à $A f(x) = -\varphi(x)$ dans le cas discret.

avec f et φ fonctions sur Z^l

Considérant l'opérateur G tq

$$G\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + \dots \qquad \text{où } \varphi \geq 0 \qquad (19)$$

nous voyons que G est analogue à l'opérateur intégral

Donc $G\varphi$ sera considéré comme potentiel de $\varphi(\geq 0)$.

Sachant que $P^n\varphi(x) = E_x\,\varphi(X_n)$

nous avons $\quad G\varphi(x) = E_x \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(X_n). \quad (22)$

qui donne à $G\varphi$ la valeur moyenne du gain obtenue par la particule en promenade, partant de x, si $\varphi(y)$ est le gain au point y.

On peut écrire le potentiel sous la forme

$$G\varphi(x) = \sum_y U(x,y)\,\varphi(y). \qquad (23)$$

et donc par l'estimation de la matrice potentiel $U(x,y)$

$$G\varphi(x) \sim c_\ell \sum \frac{f(y)}{\|x-y\|^{\ell-2}} \quad \text{pour } \|x\| \to \infty$$

ce qui rejoint la notion de potentiel "classique" newtonien lorsque $\|x\|$ est très grand.

Les auteurs montrent enfin que si $f = G\varphi$ et τ le temps de première visite de la particule à l'ensemble B alors.

$$f(x) - E_x\,f(X_\tau) = E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi(X_k).$$

Nous avons parlé de fonctions surharmoniques ($pf \leq f$)
Les fonctions surharmoniques non négatives jouent un rôle important en processus de Markov, elles sont appelées : **EXCESSIVES**

- Le potentiel d'une fonction non négative est excessif.
- Les auteurs démontrent également (l'analogue discret du théorème de RIESZ) que "Toute fonction excessive est égale à la somme d'une fonction harmonique non négative et du potentiel d'une fonction non négative."

. $\Pi_B(x)$: probabilité de visiter un ensemble B partant de x est une fonction excessive.

. Pour un ensemble B non récurrent : $\Pi_B(x) = G\varphi_B(x)$.
(avec φ_B non négative)

$$\varphi_B(x) = \Pi_B(x) - p\Pi_B(x) \qquad x \in B$$
$$\varphi_B(x) = 0 \qquad x \notin B.$$

Pour compléter l'analogie entre processus probabilistes et théorie classique et à partir de la théorie du potentiel nous introduisons l'étude de la

CAPACITÉ

En électrostatique, considérant une distribution de charges ≥ 0 sur B dont le potentiel en tout point de l'espace est ≤ 1, le potentiel maximum, qui existe, est dit potentiel d'équilibre et la distribution correspondante φ_B est dite distribution d'équilibre.

$C(B) = \int_B \varphi_B(y)\,dy$ est dite capacité de B.

De même, si B est non récurrent, nous savons que $\Pi_B = G\varphi_B$.

Π_B est donc potentiel d'équilibre, φ_B distribution d'équilibre.

$C(B) = \sum_y \varphi_B(y) \equiv$ Capacité de B n'existe que pour B non récurrent.

De plus $\forall \varphi$ nuls hors de B, tq $G\varphi \leq 1$: $\sum_y \varphi(y) \leq \sum_y \varphi_B(y) = C(B)$.

<u>Abordons maintenant les problèmes laissés par les auteurs</u> :

Montrons pour débuter, que dans les espaces d'états de dimension 1 ou 2 (nous le ferons pour $l=2$), tout état peut-être, et cela une infinité de fois, c-à-d $U(x,y)$ est infinie pour tout x et tout y, et donc qu'un <u>état quelconque est toujours récurrent</u>. contrairement aux espaces d'états de dimension 3 ou plus où un point quelconque est transcient.

- Comme première application, les auteurs suggèrent de montrer que pour une promenade symétrique à 2 dimensions sur un lattis :

  $U(x,x)$ est infinie, donc que partant de x, la trajectoire reviendra en ce point en moyenne une infinité de fois.

Sachant que $U(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x)$ et que

$$p_n(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q e^{i\theta(x-y)} \Phi^n(\theta)\, d\theta \qquad (p\,5,\ n^{os}\,5\text{-}6).$$

avec $\Phi(\theta) = \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{l} \cos\theta_m$.

Nous sommes dans le cas $x = y$; $l = 2$; $Q \equiv (-\pi,\pi)\times(-\pi,+\pi)$.

d'où

$$p_n(x,x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2^n}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)^n d\theta .$$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(x,x)$ car la proba. de revenir au point de départ en un nb. impair de sauts est nulle.

Donc

$$U(x,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{\left(\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2}{2}\right)^2\right\}^k d\theta_1\, d\theta_2 .$$

On peut permuter somme et intégrales en vertu de la positivité des intégrants donc par la somme de la progress. géométrique :

$$U(x,x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{4-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2}\, d\theta_1\, d\theta_2 .$$

Sachant que $\exists\ \theta_0 > 0$ tq. pour $\theta_0 > |\theta|$: $\cos\theta \geq 1 - \theta^2/2$. (*)

on décompose l'intégrale en 3 parties :

$$U(x,x) = \frac{1}{\pi^2}\left\{ \int_{-\pi}^{-\theta_0}\int_{-\pi}^{-\theta_0} \cdots + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cdots + \int_{\theta_0}^{+\pi}\int_{\theta_0}^{+\pi} \cdots \right\}.$$

dont les 2 extrêmes sont finies (soit K leur somme).

Examinons l'intégrale centrale en faisant la majoration (*)

d'où
$$U(x,x) = \frac{1}{\pi^2}\left\{ K + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{1}{4-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \right\}$$

$$\geq \frac{1}{\pi^2}\left\{ K + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{1}{4-\left(2-\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}\right)^2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \right\}$$

Donc $$U(x,x) \geq \frac{1}{\pi^2}\left[K + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta_1\, d\theta_2}{\left(2-\left(2-\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}\right)\right)\left(2+\left(2-\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}\right)\right)}\right].$$

$$\geq \frac{1}{\pi^2}\Big[K + \underbrace{\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta_1\, d\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2} + \int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta_1\, d\theta_2}{8-(\theta_1^2+\theta_2^2)}}_{I}\Big]$$

Faisons $\begin{cases}\theta_1 = r\cos\alpha \\ \theta_2 = r\sin\alpha\end{cases}$ d'où $d\theta_1\, d\theta_2 \rightsquigarrow r\, dr\, d\alpha$.

d'où $$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(\theta_0)} \frac{1}{r} + \frac{r}{8-r^2}\; dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{a(\theta_0)} \frac{1}{r}\, dr + 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}\log|8-r^2|\right)\Big]_0^{a(\theta_0)}$$

comme on avait le choix de θ_0, il suffisait de le prendre tel que $(a(\theta_0))^2 \neq 8$ de sorte que la seconde partie de I soit finie tandis que la première : $\int_0^{a(\theta_0)} \frac{1}{r}\, dr$ n'existe pas.

on a donc minoré $U(x,x)$ par une intégrale non convergente positive

d'où <u>$U(x,x)$ est infini</u>.

. Précisons maintenant la valeur de $U(x,x)$ en montrant que si $r(x)$ est la probabilité que la particule quittant l'état x, revienne à cet état, alors

$$U(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(x)$$

En effet : $$U(x,x) = \sum_{n\geq 0} p_n(x,x)$$ avec $p_n(x,x) = E_x[1_x(X_n)]$

$$= E_x[N_x]$$

avec $N_x = \sum_{n>0} 1_x(X_n) + 1$.

(nb. de passages en x)

Soient $\tau_x^1 = \inf\{n,\ n>0,\ X_n = x\}$
$\tau_x^2 = \inf\{n,\ n>\tau_x^1,\ X_n = x\}$

d'où

$$N_x = 1 + 1_{\{0<\tau_x^1<\infty\}} + 1_{\{0<\tau_x^2<\infty\}} + 1_{\{\cdots\}} + \cdots$$

d'où $U(x,x) = E_x[N_x] = 1 + P_x[\tau_x^1<\infty] + P_x[\tau_x^2<\infty] + \cdots$

or $P_x[\tau_x^1<\infty] = r(x)$

et $P_x[\tau_x^2<\infty] = P_x\{\tau_x^1<\infty \text{ et } \tau_x^2-\tau_x^1<\infty\}$

avec: τ_x^1 et $\tau_x^2-\tau_x^1$ indépend.

et $P_x\{\tau_x^2-\tau_x^1<\infty\} = P_x\{\tau_x^1<\infty\}$.

donc $P_x[\tau_x^2<\infty] = (P_x\{\tau_x^1<\infty\})^2 = r^2(x)$.

d'où $U(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(x)$.

• Ainsi nous pouvons démontrer qu'une promenade symétrique à 2 dimensions a un espace d'états composé de points récurrents.

Soit $\Pi_x(y)$ la probabilité d'atteindre x au départ de y (quelconque). Voyons que $\Pi_x(y) = 1\ \forall y$.

or on sait par le précédent que $U(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(x) = \infty$

$\Rightarrow r(x) = 1$.

Soit $s(x,y) \equiv$ proba d'atteindre y au départ de x. (avant de revenir en x).

d'où $1 - r(x) \geq s(x,y)\,(1-\Pi_x(y))$.

$1-r(x)$ ≡ proba de ne plus revenir en x ; $1-\Pi_x(y)$ ≡ proba de ne pas atteindre x au départ de y.

Donc $s(x,y)(1-\Pi_x(y)) \leq 0$ donc nul comme produit de probabilités.

et donc soit $s(x,y) = 0$

soit $\Pi_x(y) = 1$ donc x est récurrent.

• Nous nous intéresserons à présent aux fonctions harmoniques ; pour cela nous allons considérer préalablement l'étude des points extrémaux d'un ensemble convexe.

Faisons d'abord quelques rappels et mises au point, considérant un espace fini ou dénombrable H et un ensemble E de fonctions données sur H.

. $\{f_n\}$ converge vers f si $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in H$.

. E est fermé si $f_n \to f$ (avec $f_n \in E$) $\Rightarrow f \in E$.

. E est compact si E est fermé et si de toute suite $\{f_n\}$ ($f_n \in E$) on peut extraire une sous-suite convergente

. E est convexe si $f_1 \in E$ et $f_2 \in E \Rightarrow p f_1 + q f_2 \in E$
$\forall p > 0, q > 0, p + q = 1$.

Voyons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante à la compacité d'un ensemble E fermé.

E fermé est compact $\Leftrightarrow \exists$ fonction $c(x)$ t.q. $|f(x)| \leq c(x)$
$\forall f \in E$ et $\forall x \in H$.

$\Leftarrow$ La topologie sur E dérive de la topologie produit mise sur R^H (ens. des fonctions numériq. sur H)

d'où $E = E_{x_0} \times E_{x_1} \times E_{x_2} \times \ldots$

or $\forall f \in E$, $\forall x \in H$ $|f(x)| \leq c(x)$.

donc $E \subset \prod_{x \in H} [-c(x) \quad c(x)]$

or par le théorème de Tychonoff, un produit fini ou infini dénombrable de compacts est compact

d'où E fermé est inclus dans un compact, il est donc compact.

les E_{x_i} n'étant autres que des projections de E sont en effet compacts.

donc $\forall x_i \in H$ l'ensemble des $f \in E$ pris en x_i constitue un compact.

donc $\forall x_i \in H$ $\forall f \in E$ $\exists\, c(x_i)$ tq $|f(x_i)| \leq c(x_i)$.

. Etude des points et ensembles extrémaux d'un ensemble convexe.

Rappelons qu'un sous ensemble A compact, d'un ensemble E est dit extrémal si on peut déduire de: $f \in A$, $f = pf_1 + qf_2$, $f_1, f_2 \in E$ $p>0$, $q>0$, $p+q=1$, que f_1 et $f_2 \in A$.

. Voyons maintenant que si A est un ensemble extrémal, $f \in A$ et $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ avec $f_1, \dots f_n \in E$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ alors $f_1, \dots f_n \in A$.

Nous le démontrons par récurrence.

Pour $n = 1$ (trivial) pour $n = 2$ (immédiat par défin)

<u>Hypothèses de récurrence</u>: (supposées vraies pour $n-1$).

$$\left.\begin{array}{l} f \in A \\ f = \alpha'_1 f_1 + \dots + \alpha'_{n-1} f_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i = 1. \\ f_i \in E \end{array}\right\} \Rightarrow f_1, \dots f_{n-1} \in A$$

Thèse de récurrence pour n.

$$\left.\begin{array}{l} f \in A \\ f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1} + \alpha_n f_n \\ f_i \in E \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} f_1, \dots f_n \in A$$

Construisons $f' = \alpha_1/\beta\, f_1 + \dots + \alpha_{n-1}/\beta\, f_{n-1}$ avec $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$

d'où $f = \beta f' + \alpha_n f_n$. avec $\alpha_n = 1-\beta$.

On a donc $\left.\begin{array}{l} f \in A \\ f_n \in E \\ \alpha_n + \beta = 1 \\ \beta, \alpha_n > 0. \end{array}\right|$ d'où par définition de l'ens. extrémal on peut déduire $f_n \in A$

d'où $f_i \in A \quad \forall i = 1, \dots n.$

Nous dirons qu'une fonctionnelle $l(f)$ est linéaire si
$l(af_1 + bf_2) = al(f_1) + bl(f_2)$ $(\forall a \forall b \forall f_1 \forall f_2)$
et si on peut déduire de $f_n \to f$ que $l(f_n) \to l(f)$.

. Nous pouvons alors voir que si A est un ensemble extrémal,
l une fonctionnelle linéaire
et $M = \max_{f \in A} l(f)$.
alors l'ensemble A_1 de fonctions $f \in A$ telle que $l(f) = M$
est aussi un ensemble extrémal.

En effet : A ens extrémal $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f \in A \\ f_1, f_2 \in E \\ f = pf_1 + qf_2 \\ p, q > 0 \\ p + q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1, f_2 \in A$

l fonctionnelle linéaire $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} l(pf_1 + qf_2) = pl(f_1) + ql(f_2) \\ f_n \to f \Rightarrow l(f_n) \to l(f). \end{array}$

Nous devons voir que si $f \in A_1$ alors $f_1, f_2 \in A_1$.

or $f \in A_1 \Rightarrow l(f) = M$ (par constr de A_1)

en appliquant l à $f = pf_1 + qf_2$

$\Rightarrow l(f) = pl(f_1) + ql(f_2) = M$.

pour cela il faut $l(f_1) = l(f_2) = M$

car sinon on aurait par exemple $l(f_1) = M - \varepsilon \quad \varepsilon > 0$

et $l(f_2) \leq M$ (car $l(f_1)$ et $l(f_2) \leq M$.

d'où $p(M-\varepsilon) + q\,l(f_2) = M$

$\Rightarrow pM - p\varepsilon + q\,l(f_2) - M = 0.$

$\Rightarrow M(p-1) + q\,l(f_2) = p\varepsilon > 0$

$\Rightarrow q\,l(f_2) - qM = p\varepsilon > 0$

$\Rightarrow q\left[l(f_2) - M\right] > 0$ d'où $l(f_2) > M$ car $p, q, \varepsilon > 0$.

ce qui est contraire au fait que

$\forall f \in A$; $M = \max l(f)$.

Donc $l(f_1) = l(f_2) = M$ d'où f_1 et $f_2 \in A_1$.

Donc

A_1 est un ensemble extremal..

- Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots \supset A_n \supset \dots$ est une suite d'ensembles compacts extrêmaux

alors l'ensemble $A_\infty = \bigcap_n A_n$ est aussi extrêmal.

en effet. $A_1, A_2, A_3, \dots A_n \dots$ extrêmaux $\Longrightarrow$

$f \in A_1$ et $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_1 + \alpha_n f_n \Rightarrow f_1, \dots f_n \in A_1$

$\vdots$

$f \in A_m$ et $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \Rightarrow f_1, \dots f_n \in A_m$.

$\vdots$

$f \in A_\infty \Rightarrow f \in A_i \ \forall i$

d'où $f_1 \in A_i \ \forall i$

$\vdots$

$f_n \in A_i \ \forall i$

d'où $f_1, \dots f_n \in A_i \ \forall i$ d'où $f_1, f_2, \dots f_n \in A_\infty$

d'où A_∞ est extremal.

. Tout compact convexe E a un pt extrêmal (un "point" extrêmal étant un ensemble extrêmal réduit à un point).

Considérons une fonctionnelle linéaire $l_x f = f(x)$, elle atteint son maximum sur E (compact)

Choisissons un $x_0 \in E$ $\quad f \in E \Rightarrow M = \max l_{x_0} f$.

et A_1 tq $l_{x_0} f = M$ si $f \in A_1$

on choisit un $x_1 \in A_1$, on en déduit A_2, on prend un $x_2 \in A_2$, ...

engendrant des fonctionnelles $l_{x_1} f$, $l_{x_2} f$, ...

on voit que $E \supset A_1 \supset A_2 \supset ..$

prenant l'intersection $A_\infty = \bigcap\limits_n A_n$ on sait qu'elle est aussi extrêmale, qu'elle ne sera pas vide et se réduira à un "point", c-à-d la fonction f. désirée comme point extrêmal de E, compact, convexe.

. Voyons que si un ensemble E, compact convexe a seulement 1 point extrêmal g alors il est réduit à ce point c-à-d à la fonction g.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un $h \in E$ $\quad h \neq g$.

alors $\exists x_0 \in H$ tq (par exemple) $h(x_0) > g(x_0)$

introduisons la fonctionnelle linéaire l tq $l(f) = \pm f(x_0)$

($\pm$ suivant si $h > g$ ou $h < g$ en x_0)

alors $l(h) > l(g)$

soit $M = \max\limits_{f \in A} l(f)$ $\quad A_1$ l'ens. extrêmal considéré plus haut ne contiendra pas g puisque $l(h) > l(g)$

d'où A_1 aura un pt (extremal) $g_1 \neq g$.

donc $A_1 \subset A \subset E \Rightarrow E$ comporte g_1 comme pt extrêmal avec $g_1 \neq g$ ce qui est contraire à l'hypoth.

E a 1! pt extremal, donc $E \equiv \{g\}$.

Nous nous replaçons maintenant dans les hypothèses de l'introduction en étudiant des notions et des propriétés des fonctions harmoniques positives, existant en théorie classique du potentiel.

. Si une fonction harmonique non négative s'annule en un point, elle est nulle partout.

en effet $\quad P f(x) = f(x) \quad \forall x \in H.$

$f \geq 0$

Soit x_0 le point où la fonction s'annule

$$0 = f(x_0) = P f(x_0) = \sum_{y \in V_{x_0}} p(x_0, y) f(y)$$

V_{x_0} : ens. des pts voisins de x_0, les seuls où $p(x_0, \cdot)$ ne s'annule pas.

or $f(y) \geq 0$

$p(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in V_{x_0}$

d'où $\quad f(y) = 0 \quad \forall y \in V_{x_0}$

en réitérant le processus on voit que $f(y) = 0 \quad \forall y \in H$ fini ou dénomb.

Donc f sera nulle partout.

. La limite d'une suite de fonctions harmoniques est une fonction harmonique.

car soit $\quad f_1 \ldots f_n \xrightarrow{n \to \infty} f \quad$ avec $f_i = P f_i \quad \forall i \in N$

$$\forall x \quad f(x) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} P f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{y \in V_x} p(x,y) f_n(y)$$

$$\sum_{y \in V_x} p(x,y) \cdot \lim_{n \to \infty} f_n(y) = \sum_{y \in V_x} p(x,y) f(y) = P f(x)$$

d'où $P f(x) = f(x) \quad \forall x$ d'où la $\lim$ est une fonction harmonique.

Si f est une fonction harmonique positive alors $f(x \pm e_k) \leq 2l\, f(x)$ dans un espace $\mathbb{Z}^l$.

en effet $f(x) = \phi f(x) = \sum_{y \in V_x} \phi(x,y) f(y) = \sum_{k=\pm 1,\dots \pm l} \underbrace{\phi(x, x \pm e_k)}_{= 1/2l} f(x \pm e_k)$

$\geq 1/2l\, f(x \pm e_k)$

Donc $2l\, f(x) \geq f(x \pm e_k)$.

Dans la suite nous appellerons E la classe de fonctions harmoniques positives égales à 1 au point $x = 0$.

On peut démontrer que E est convexe et compact.

A_ Démontrons d'abord que E est convexe

Soient $\left.\begin{matrix} f_1 \in E \\ f_2 \in E \end{matrix}\right. \overset{?}{\Longrightarrow} t f_1 + q f_2 = f \in E$

$\forall t, q > 0$
$t + q = 1$

c-à-d avec $\begin{cases} f_i > 0 \\ f_i = \phi f_i \\ f_i(0) = 1 \end{cases}$ $(i = 1, 2)$ a-t-on $\begin{cases} f > 0 \\ f = \phi f \\ f(0) = 1. \end{cases}$

Dém

- $f(0) = (t f_1 + q f_2)(0) = t f_1(0) + q f_2(0) = t + q = 1$

- $\phi f(x) = \phi(t f_1 + q f_2)(x) = \sum_{y \in V_x} \phi(x,y)(t f_1 + q f_2)(y)$

$= \sum_{y \in V_x} \phi(x,y)\, t f_1(y) + \sum_{y \in V_x} \phi(x,y)\, q f_2(y)$

$= t f_1(x) + q f_2(x) = (t f_1 + q f_2)(x) = f(x)$.

- $\left.\begin{matrix} f_1 > 0, f_2 > 0 \\ t > 0,\ q > 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} t f_1 > 0 \\ q f_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow t f_1 + q f_2 > 0$

B - Démontrons que E est compact.

a - E est fermé car la C. d'une suite de fonctions harmoniques positives est positive.

b - E est t.q $\exists C$ ctq $|f(x)| \leq C(x)$ $\forall f \in E$ $\forall x \in H$.

car (ab absurdo)

Supposons qu' $\exists f$ ou $\exists x_0$ ctq $\forall C$ $|f(x_0)| \geq C(x_0)$

or $x_0 \equiv (x_1 + e_k)$ pour un certain k. par construction du processus.

d'où $2l\,|f(x_1)| \geq |f(x_1 + e_k)| = |f(x_0)| \geq C(x_0)$

$(2l)^2 |f(x_2)| \geq 2l\,|f(x_2 + e_k)|$ par la pr remarque $x_1 \equiv (x_2 + e_k)$ pour un certain k et par la majoration vue précédement.

en itérant le procédé on arrive à :

$(2l)^n |f(x_n)| \geq (2l)^{n-1} |f(x_n + e_k)| \geq \dots \geq f(x_0)$

avec $x_n \equiv 0$ car H est fini ou dénombrable

$f \in E \Rightarrow f(x_n) = f(0) = 1$

d'où pour ce f ou ce x_0.

$(2l)^n \geq |f(x_0)| \geq C(x_0)$ $\forall C$

ce qui est absurde. puisque C qcq serait en x_0 toujours borné.

Donc E est compact, puisque de plus fermé.

. Voyons à titre de lemme que si $f \in E$, alors pour tout vecteur "entier" a la fonction
$$g(x) = f(x+a)/f(a) \quad \text{appartient aussi à } E$$

En effet : . $g(x)$ est positif puisque quotient de 2 fonctions positives
. $\not{p}g(x) = g(x)$ puisque $\not{p}f(x) = f(x)$ et $f(a)$ const.
. $g(0) = f(a)/f(a) = 1$.

. Nous pouvons montrer maintenant que si g est un point extrêmal de E, alors
$$g(x \pm e_k) = g(e_k)^{\pm 1}\, g(x)$$

g étant harmonique (appartenant à E)
$$g(x) = \not{p}g(x)$$
$$= 1/2l \sum_{\pm k} g(x+e_k)$$
$$= \sum_k \frac{g(x+e_k)}{g(e_k)} \cdot \frac{g(e_k)}{2l} + \frac{g(x-e_k)}{g(-e_k)} \quad \frac{g(-e_k)}{2l}.$$

1 par le lemme $\dfrac{g(x \pm e_k)}{g(e_{\pm k})} \in E$ puisque $g \in E$

2 de plus $\sum_{\pm k} \dfrac{g(e_k)}{2l} = g(0) = 1$

Donc g (p^t extrêmal de E) s'écrit comme $\sum \alpha_i f_i$

avec $\alpha_i = \dfrac{g(e_i)}{2l}$ $\qquad \sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$

$f_i = \dfrac{g(x \pm e_i)}{g(\pm e_i)}$

d'où $\dfrac{g(x \pm e_k)}{g(\pm e_k)}$ est un point extrêmal et est égal à $g(x)$.

On voit donc que $g(x+e_k) = g(x)\, g(e_k)$ (1)
et $g(x-e_k) = g(x) . g(-e_k)$. (2)

en faisant $x = e_k$ dans (2) $g(0) = 1 = g(e_k)\, g(-e_k)$
donc $g(-e_k) = g(e_k)^{-1}$.

d'où la formule $\underline{g(x \pm e_k) = g(e_k)^{\pm 1}\, g(x)}$

• Sous les conditions du problème précédent, nous montrons que $g(x) = 1 \quad \forall x \in Z^l$.

g étant point extrémal de E : $g = pg$.
donc $g(x) = pg(x) = \frac{1}{2l} \sum_k^l [g(x+e_k) + g(x-e_k)]$
$= \frac{1}{2l} \sum_k^l [g(e_k) + g(e_k)^{-1}]\, g(x)$.

en $x = 0$; $g(0) = 1 = \frac{1}{2l} \sum_k^l [g(e_k) + g(e_k)^{-1}]$ *

remarquant que $(g(e_k) - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow g^2(e_k) - 2g(e_k) + 1 \geq 0$
d'où $g(e_k) + g(e_k)^{-1} \geq 2$.
d'où pour satisfaire *
il faut $g(e_k) + g(e_k)^{-1} = 2 \quad \forall k$.
ce qui équivaut à $g(e_k) = 1 \quad \forall k$. ($\forall x$ de départ)
donc $g(x) = 1 \quad \forall x \in Z^l$.

Grâce aux problèmes étudiés précédemment, nous sommes à même d'affirmer que :

. <u>toute fonction harmonique positive est constante</u>

car soit $h(x)$ une fonction harmonique positive

$h(0) = k \geq 0$ (si k est nulle on sait que h sera nulle).

en excluant ce cas déjà réglé on a $h(0) = k > 0$; $h(x) \geq 0 \; \forall x$

soit $r(x) = \dfrac{h(x)}{k}$; $r(x)$ sera $\geq 0 \; \forall x$ et $r(0) = 1$.

Donc $r(x) \in E$ qu'on sait ne contenir qu'une seule fonction égale à 1 d'où $r(x) = 1 \; \forall x$.

d'où $h(x) = k \; \forall x$.

. Nous pouvons maintenant montrer, que comme en analyse classique : toute fonction harmonique bornée supérieurement ou inférieurement est constante.

Considérons d'abord une fonction harmonique quelconque f bornée supérieurement par une constante k.

Soit $g(x) = k - f(x)$ ainsi g toujours harmonique est positive donc constante $= p$.

d'où $f(x) = k - p$. est constante $\forall x$.

si f bornée inférieurement par une constante k.

Soit $g(x) = f(x) - k$ est harmonique et positive donc constante donc f est constante. $\forall x$

Abordons maintenant le problème de Dirichlet.

Pour lequel nous constaterons, avec des notations adaptées, des similitudes certaines avec l'analyse non probabiliste.

<u>Soient</u>
- B un sous ensemble de points d'un lattis H.
- $x \notin B$ appelé <u>p^t frontière</u> de B si au moins un point du type $x \pm e_k$ appartient à B
- <u>∂B</u> ensemble des points frontière de B, appelé <u>frontière de B</u>
- B sera <u>connexe</u> si $\forall x, y \in B$, il existe une chaîne de points $x_1 = x, x_2, x_3, \ldots x_n = y$ tous dans B t.q la différence entre tous les p^{ts} du type $x_i - x_{i-1}$ coincide avec un vecteur $\pm e_k$.

Voyons que | si B est connexe
si f est surharmonique sur B
si f atteint sa valeur minimale sur $B \cup \partial B$ en un point x de B.

alors <u>f est constante sur $B \cup \partial B$</u>.

<u>En effet</u> : f surharmonique sur B $\Rightarrow \forall x \in B \quad \mathcal{P} f(x) \leq f(x)$

f atteint son minimum sur $(B \cup \partial B)$ en un p^t de B $\Rightarrow \forall x \in B \cup \partial B$ $\exists x_0 \in B \quad f(x_0) \leq f(x)$.

$$\mathcal{P} f(x_0) = 1/2l \sum_{k=\substack{+1\\-1}}^{\pm l} f(x_0 + e_k) \leq f(x_0)$$

avec $f(x_0) < f(x_0 + e_k)$

d'où $\mathcal{P} f(x_0) = f(x_0)$

Donc $\forall k \quad f(x_0 + e_k) = f(x_0)$

De plus tout $f(x + e_k)$ peut être considéré comme un $f(x_1)$ on peut refaire le même raisonnement et de proche en proche (puisque B est connexe) on arrivera à des $f(x_i + e_k)$ où $x_i + e_k \in \partial B$.

or x_0 est t.q $f(x_0) \leq f(x_i) \quad \forall x_i \in B \cup \partial B$.

d'où on aura aussi

$$f(x_i + e_k) = f(x_i) = f(x_0) \qquad \forall x_i$$

avec $x_i + e_k \in \partial B$; x_i et $x_0 \in B$.

d'où

$$f(x) \text{ est constante } \forall x \in B \cup \partial B.$$

On remarquera que ce résultat a son équivalent en analyse par probabiliste.

- On peut démontrer également que | si B est fini | si f_1, f_2, harmoniques sur B sont identiques sur ∂B

alors <u>f_1 et f_2</u> seront <u>identiques sur tout B</u> également.

Soient. $\begin{cases} g = f_1 - f_2 \\ h = f_2 - f_1 \end{cases} \Rightarrow g = -h \Rightarrow \begin{cases} g = f_1 - f_2 = pf_1 - pf_2 \geq p(f_1 - f_2) = pg \\ h = f_2 - f_1 = pf_2 - pf_1 \geq p(f_2 - f_1) = ph \end{cases}$

d'où g et h sont surharmoniques.

B étant fini et $g = h = 0$ sur ∂B.

il en résulte que soit g soit h

atteint son minimum sur $(B \cup \partial B)$ en un p^t x de B.

d'où en appelant k celui de h et de g qui atteint son minimum sur B.

$k \geq pk$, d'où étant dans les conditions du théorème précédent k est constante sur $B \cup \partial B$ or $k = 0$ sur ∂B

d'où $\forall x \in B \cup \partial B \quad k(x) = \pm(f_1 - f_2)(x) = 0$

Donc sur un lattis fini, deux fonctions harmoniques identiques sur la frontière sont identiques partout.

- Démontrons maintenant à titre de lemme que

  (Si τ désigne le temps (d'arrêt) de première visite à ∂B.)
  (Si φ désigne une fonction arbitraire sur ∂B.)

  Si B est connexe alors

  $E_x\, \varphi(X_\tau)$ existe ou n'existe pas simultanément $\forall x \in B$.

Pour ce faire voyons que si $x_0 \in B$ et $E_{x_0}\, \varphi(X_\tau) = \infty$
alors $\forall y \in B \quad E_y\, \varphi(X_\tau) = \infty$

$\tau(\omega)$ est donc : $\inf\left(n : X_n(\omega) \in \partial B\right)$.

Soit T_{x_0} le temps de premier passage par x_0.
Soit θ l'opérateur de déplacement

Sur $\{T_{x_0} < \tau\}$ $\quad \tau = T_{x_0} + \tau \circ \theta_{T_{x_0}}$
Sur $\{n \leq \tau\}$ $\quad \tau = n + \tau \circ \theta_n$.

car
$\tau(\omega)$ = premier j t.q $X_j(\omega) \in \partial B$
$\tau \circ \theta_n(\omega)$ = premier j t.q $X_{j+n}(\omega) \in \partial B$
$n + \tau \circ \theta_n(\omega)$ = premier entier $j \geq n$ t.q $X_j(\omega) \in \partial B$
= temps d'entrée de chaine dans ∂B
après l'instant n

d'où

$$E_y\, \varphi(X_\tau) \geq E_y\left[\varphi(X_\tau) \circ \theta_{T_{x_0}}\, 1_{\{T_{x_0} \leq \tau < \infty\}}\right]$$

$$\geq E_y\left[E^{\mathcal{B}_{T_{x_0}}}\left[\varphi(X_\tau \circ \theta_{T_{x_0}}\right]\, 1_{\{T_{x_0} \leq \tau < \infty\}}\right]$$

$$\geq E_y\left[E_{X_{T_{x_0}}}\, \varphi(X_\tau) \cdot 1_{\{T_{x_0} \leq \tau < \infty}\right]$$

par application du principe de markov fort

$$\geq E_{x_0}\left[\varphi(X_\tau)\right]\, P_y\left[T_{x_0} \leq \tau < \infty\right]$$

or ayant $E_{x_0}\left[\varphi(X_\tau)\right] = \infty$ par hypothèse on aura la thèse : $E_y\, \varphi(X_\tau) = \infty$
Si $P_y\left[T_{x_0} \leq \tau < \infty\right] > 0$.

ce qui est bien réalisé car :

B étant connexe ; considérons la chaîne

$y_0 = y, y_1, \dots y_n = x_0$ avec $y_i \in B$ $\forall i : 0, .. n$.

y_{j-1} voisin de y_j

et sur l'événement : $\{X_0 = y_0\} \cap \{X_1 = y_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_0\}$: $T_{x_0} < \tau$

Soit la chaîne $(z_0 = x_0, z_1, \dots, z_k = z)$ où $z \in \partial B$.

alors sur l'événement $\{X_0 = y_0\} \cap \dots \{X_{n-1} = y_{n-1}\} \cap \{X_n = x_0\} \cap \{X_{n+1} = z_1\} \cap \dots$

$\dots \cap \{X_{n+k} = z_k = z\}$

$T_{x_0} \leq \tau < \infty$

et la probabilité de cet événement est

$p(y, y_1) \dots p(y_n, x_0) p(x_0, z_1) \dots p(z_{k-1}, z) > 0$ par construction

Donc $P_y[T_{x_0} \leq \tau < \infty] > 0$.

- Avec les mêmes notations que précédemment voyons que

$f(x) = E_x\, \varphi(X_\tau)$ est harmonique sur B et coïncide avec φ sur ∂B (en supposant que cette espérance existe $\forall x \in B$: c-à-d pour un x_0 de B par théor. précéd.)

$$
\begin{aligned}
\forall x \in B : \quad f(x) = E_x\, \varphi(X_\tau) &= E_x\left[\varphi(X_\tau) \circ \theta \quad 1_{\{\tau \geq 1\}}\right] \\
&= E_x\left[E^{\mathcal{B}_{X_1}}[\varphi(X_\tau \circ \theta] \, 1_{\{\tau \geq 1\}}\right] \\
&= E_x\left[E_{X_1}\, \varphi(X_\tau)\, 1_{\{\tau \geq 1\}}\right] \\
&= E_x\left[E_{X_1}\, \varphi(X_\tau)\right] \\
&= E_x\, f(X_1) = p f(x)
\end{aligned}
$$

donc $f(x) = pf(x)$

de plus si $x \in \partial B$

$f(x) = E_x\, \varphi(X_\tau) = E_x\, \varphi(x) = \varphi(x)$ d'où $f(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in \partial B$.

A ce stade nous pouvons dire que, quel que soit l'ensemble B (différent du lattis tout entier) et pour toute fonction bornée φ sur ∂B, il existe une fonction f harmonique sur B et égale à φ sur ∂B (le problème de Dirichlet a donc une solution)

Nous pouvons ajouter que cette solution est unique dans le cas d'un ensemble B fini

.. Examinons maintenant une condition suffisant à l'unicité d'une solution bornée du problème de Dirichlet dans le cas où l'ensemble B serait infini.

Pour ce faire nous démontrons que

- Si ∂B, frontière de B, est récurrente et si la fonction φ est bornée, alors l'unique fonction qui soit : bornée, harmonique sur B et égale à φ sur ∂B est la fonction : $f(x) = E_x\, f(X_\tau)$.

Soit $g(x)$ fonction : bornée, harmonique sur B et telle que $g = \varphi$ sur ∂B.

Nous passerons par l'intermédiaire du cas fini envisagé précédemment.

Soit K un cube de dimension l (dimension de l'espace Z^l) de centre O (point initial de la chaine par rapport auquel est prise l'espérance) et de coté a.

Soit τ_a le temps de première visite a $\partial(B \cap K)$

Or ∂B étant récurrent, $\forall x \in B$, $\exists y \in \partial B$ tq $p(x,y)=1$
Donc partant de 0, centre du cube, on arrive sur ∂B avec probabilité 1, donc on passe par $\partial(B \cap K)$ avec probabilité 1 donc $\tau_a < \infty$

De plus par définition de la promenade aléatoire sur le lattis on peut dire que $\tau_a \geq a/2$

Par l'intermédiaire de ce cas fini on sait par le théorème précédente que $g(x) = E_x\, g(X_{\tau_a})$

Nous "élargissons" maintenant le cube en faisant $a \to \infty$ de manière à couvrir tout l'ensemble B
la récurrence de ∂B entraine que $\tau < \infty$.
Mais $\tau_a \geq a/2 \Rightarrow \tau_a$ croît avec $a \to \infty$
d'où $\exists$ un événement $\{\tau = \tau_a\}$

$\tau_a \to \tau$ d'où $g(X_{\tau_a}) \longrightarrow g(X_\tau) = \varphi(X_\tau)$
Donc
$$g(x) = E_x\, \varphi(X_\tau) = f(x)$$
et si x est sur ∂B: $E_x\, \varphi(X_\tau) = \varphi(x) = f(x)$

Nous avons donc aussi une solution unique au problème de Dirichlet pour un ensemble B infini sous ces hypothèses. Nous pouvons voir que sans l'hypothèse de récurrence de ∂B, le critère envisagé plus haut ne serait, en général, pas suffisant, en effet:

- Considérons 2 fonctions $f = 1$ et $g = \pi_{\partial B}(x)$
  Nous allons voir qu'elles sont harmoniques, bornées, égales à φ sur ∂B et pourtant différentes si ∂B est non récurrent.

α) $f = 1 \iff f(x) = 1 \quad \forall x \in B \cup \partial B$

Soit $\varphi = 1$ sur ∂B

alors $\left\{\begin{array}{l} f = \varphi \text{ sur } \partial B \\ f(x) = pf(x) \quad \forall x \in B. \\ f \text{ est bornée puisque constante} \end{array}\right\}$ d'où f est solution du problème

β) $g(x) = \pi_{\partial B}(x)$

alors $\left\{\begin{array}{l} g = \varphi = 1 \text{ sur } \partial B \\ pg(x) = g(x) \\ g \text{ est bornée car } \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g$ est solution du problème.

or $f(x) = 1 \quad \forall x \in B \cup \partial B$

$g(x) = \pi_{\partial B}(x)$ est < 1 pour au moins un x_0 car ∂B est récurrent.

Donc $f \neq g$ donc "la" solution du problème de Dirichlet n'est pas unique.

Etablissons maintenant une condition d'harmonicité de la fonction $f(x)$ à savoir :

Si $\forall x$ et $\forall B \ni x \quad f(x) = E_x f(X_{\tau^{\partial B}})$
alors f est harmonique

($X_{\tau^{\partial B}}$ = point de 1e entrée de la chaîne dans ∂B)

On sait : f harmonique $\iff f = pf \iff f(x) = E_x f(X_1)$

prenons $\forall x$ un ens $B = \{x\}$ d'où $\partial B = \partial x$

d'où $P_x\{\tau^{\partial B} = 1\} = 1$ d'où $f(x) = E_x f(X_1) \quad \forall x$

d'où f est harmonique.

.. Etude de la notion de potentiel

Rappelons que f est dit être un potentiel si il peut s'exprimer comme étant $f = G\varphi$ avec $\varphi \geq 0$ tel que $G\varphi = \varphi + p\varphi + p^2\varphi + \dots$
(un potent. étant, en général, fini)

. Montrons d'abord qu'il existe des points où le potentiel prend des valeurs arbitrairement proches de zéro.

Thèse : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \quad tq \quad G\varphi(x) < \varepsilon.$

par l'absurde supposons $\exists \varepsilon > 0 \quad tq \quad \forall x \quad G\varphi(x) \geq \varepsilon$
donc :

on a la serie converg : $G\varphi = \varphi + p\varphi + p^2\varphi + \dots p^n\varphi + p^{n+1}\varphi + \dots \geq \varepsilon$

$$p^n G\varphi = p^n\varphi + p^{n+1}\varphi + \dots \geq p^n\varepsilon = \varepsilon$$

en passant à la limite sur n on enleverait une infinité de termes à une serie convergente qui garderait une somme plus grande qu'une constante ce qui manifestement nie la convergence de la serie
d'où la thèse est réalisée.

. Si $\varphi(x) \geq \varepsilon$ sur un ensemble B récurrent alors le potentiel $G\varphi$ est infini (avec $\varepsilon > 0$).

en effet : $\forall x$ soit $G\varphi(x) = E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(X_n)\right] \geq E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(X_n) 1_{\{X_n \in B\}}\right]$
$\geq E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon\, 1_B(X_n)\right] \geq \varepsilon E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_B(X_n)\right] \geq \infty$
car B est recurrent d'où $G\varphi(x)$ infini $\forall x$.

- Établissons une condition suffisante pour qu'une fonction soit un potentiel à savoir :
  Si une fonction excessive n'excède pas un certain potentiel, c'est un potentiel elle-même.

Rappelons qu'une fonction excessive peut s'exprimer comme la somme d'un potentiel d'une fonction positive, et d'une fonction harmonique positive.

d'où $f = G\varphi + h$ $\quad \begin{cases} G\varphi \geq 0 \\ h \geq 0 \text{ harmonique} \\ \varphi \geq 0 \end{cases}$

de plus $f \leq G\xi$ $\quad \xi \geq 0$.

or on sait par ce qui précède que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0(\varepsilon)$
tq $f(x_0) \leq G\xi(x_0) < \varepsilon$.

d'où $\underset{\geq 0}{G\varphi(x_0)} + \underset{\geq 0}{h(x_0)} < \varepsilon \quad *$

or h étant harmonique et bornée (positive) par le bas est donc constante et donc nulle pour satisfaire *
d'où

$f = G\varphi$ donc est un potentiel.

- Principe de l'enveloppe : Pour une famille de potentiels $\{f_\alpha\}$, la fonction $f(x) = \inf_\alpha f_\alpha(x)$ est un potentiel

Sachant qu'un potentiel est aussi une fonction excessive :
$\forall \alpha \quad f_\alpha \geq P f_\alpha$

or $f_\alpha \geq f$ d'où $P f_\alpha \geq P f$ donc $f_\alpha \geq P f_\alpha \geq P f \quad \forall \alpha$.
or f est $\inf_\alpha f_\alpha$ d'où

$f \geq Pf$ d'où f est excessive.

or f est majorée par les f_α (potentiel) f est donc un potentiel

• • Nous définissons le DOMAINE du potentiel $G\varphi$ comme l'ensemble des points x où $\varphi(x)>0$

• Démontrons le principe de domination :

Si $G\varphi_1 \geq G\varphi_2$ sur le domaine de $G\varphi_2$, alors $G\varphi_1 \geq G\varphi_2$ partout.

Soient $f_1 \equiv G\varphi_1$ et $f_2 \equiv G\varphi_2$.
$B \equiv$ Domaine de $f_2 \equiv \{x \mid \varphi_2(x)>0\}$
On sait que $f_1(x) \geq f_2(x)$ si $x \in B$.

Soit τ le premier temps d'entrée de la promenade dans B.
On sait par les rappels théoriques sur le potentiel que :

$$f_1(x) - E_x f_1(X_\tau) = E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi_1(X_k).$$

Soit $x \notin B$: $G\varphi_2(x) = f_2(x) = E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi_2(X_k) + E_x f_2(X_\tau)$
$G\varphi_1(x) = f_1(x) = E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi_1(X_k) + E_x f_1(X_\tau)$.

Voyons que $\underline{G\varphi_1(x) - G\varphi_2(x) \geq 0}$.

$$G\varphi_1(x) - G\varphi_2(x) = E_x \underbrace{\sum_{k=0}^{\tau-1} \left[\varphi_1(X_k) - \varphi_2(X_k)\right]}_{(1)} + E_x \underbrace{\left[G\varphi_1(X_\tau) - G\varphi_2(X_\tau)\right]}_{(2)}.$$

(2) $X_\tau \in B$ d'où $G\varphi_1(X_\tau) - G\varphi_2(X_\tau) \equiv R \geq 0$ (par hypothèse)
(1) $\{X_k \mid k \leq \tau-1\} \not\subset B$
d'où $\varphi_2(X) \geq 0 \ \forall X \Rightarrow \varphi_2(X_k) = 0$ puisque pour $k \leq \tau-1$ $X_k \notin B$.

d'où

$$G\varphi_1(x) - G\varphi_2(x) = E_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi_1(X_k) + R\ (\geq 0).$$

$\varphi_1(X) \geq 0 \ \forall X$
$$\Rightarrow G\varphi_1(x) \geq G\varphi_2(x) \quad \forall x \in Z^l.$$

La fonction $f(x) = E_x G\varphi(X_\tau)$ où τ est le temps de première visite à un ensemble B a les propriétés suivantes :

a- f n'excède pas $G\varphi$.

b- f est un potentiel

c. f est égale à $G\varphi$ sur B.

Ces 3 conditions définissent univoquement la fonction f.

a- Par la formule précédemment utilisée, si g est un potentiel : $g(x) - E_x g(X_\tau) = E_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi(X_k)\right]$

($\varphi \geq 0$)

Soit $g = G\varphi$ $\quad G\varphi(x) - E_x G\varphi(X_\tau) = E_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi(X_k)\right]$

$$\text{d'où } \underline{f(x)} = \underline{E_x G\varphi(X_k)} = G\varphi(x) - E_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1}\varphi(X_k)\right] \underline{\leq G\varphi(x)}$$

b- Sachant f est donnée par un potentiel, il nous suffit de démontrer que f est excessive elle sera aussi un potentiel

f est ≥ 0 (comme espérance d'un potentiel ≥ 0)

Voyons que $\underline{pf(x) \leq f(x)}$.

$$f(x) = E_x\left[G\varphi(X_\tau)\right] = E_x\left[\varphi(X_\tau) + p\varphi(X_\tau) + \dots + p^n\varphi(X_\tau) + \dots\right.$$
$$= E_x\left[\varphi(X_\tau) + \varphi(X_{\tau+1}) + \dots\right. \qquad (p\ 103\ (n^\circ 7))$$

$$pf(x) = E_x f(X_1) = E_x E_{X_1}\left[\varphi(X_\tau) + \varphi(X_{\tau+1}) + \dots\right.$$
$$= E_x E^{\beta_1}\left[\varphi(X_\tau) + \varphi(X_{\tau+1})\right.$$
$$= E_x\left[\varphi(X_{\tau+1}) + \varphi(X_{\tau+2}) + \dots\right.$$

d'où $f(x) = pf(x) + E_x\varphi(X_\tau)$ $\quad$ d'où $\underline{f(x) \geq pf(x)}$ $\forall x$

c. Puisque $E_x\, G\varphi(X_\tau) = f(x)$ (avec τ t. entrée de B)

sur B : $X_\tau = x$ d'où $\underline{f(x)} = E_x\, G\varphi(x) = \underline{G\varphi(x)}$.

Pour clôturer cette étude du potentiel les auteurs suggèrent de trouver un contre exemple à l'assertion erronée : $G\varphi_1 \geq G\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 \geq \varphi_2$.

En effet : Soient φ_1 et φ_2 définies comme suit :

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(e_1) = 1 \quad ; \quad \varphi_1(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } e_1$$
$$\varphi_2(0) = 1+\varepsilon \quad ; \quad \varphi_2(x) = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

On va montrer que $\forall x$, et $\forall \varepsilon \in (0, 1/2) : G\varphi_1(x) > G\varphi_2(x)$
alors que pour $\varepsilon \neq 0$ $\varphi_1(0) < \varphi_2(0)$

en effet pour x grand l'estimation 23' du livre de référence donne

$$G\varphi_1(x) \sim c_l \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} \frac{\varphi_1(y)}{\|x-y\|^{l-2}} = \frac{1}{\|x\|^{l-2}} + \frac{1}{\|x-e_1\|^{l-2}}$$

$$G\varphi_2(x) \sim c_l \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} \frac{\varphi_2(y)}{\|x-y\|^{l-2}} = \frac{1+\varepsilon}{\|x\|^{l-2}}$$

on voit donc que pour $\varepsilon \in (0, 1/2)$ et pour x grand
$G\varphi_1(x) \geq G\varphi_2(x)$
et que $G\varphi_2$ dépend continûment de ε.

or pour $\varepsilon = 0$ $G\varphi_1 > G\varphi_2$

d'où $G\varphi_1(x) \geq G\varphi_2(x)$ $\forall x$ et $\forall \varepsilon \in (0, 1/2)$

or $\varphi_1(0) < \varphi_2(0)$ pour $\varepsilon \neq 0$.

• Voyons quelques propriétés des fonctions excessives.

Rappelons qu'une fonction surharmonique : (c-à-d. une fonction f t.q $f(x) \geq pf(x)$ $\forall x \in Z^l$.) et non négative est dite excessive.

• Nous savons qu'une fonction excessive peut se représenter comme une somme : d'un potentiel d'une fonction non négative et d'une fonction harmonique positive nous démontrons ici que cette représentation est unique

en effet : Soit $G\xi + h$ cette représentation de notre fonction excessive f

Soit $G\varphi + h'$ une autre représentation

f étant excessive $f - pf = \xi$, $f - pf = \varphi$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{puisque } h \text{ harmonique} \\ \text{positive est constante} \\ \text{de m. pour } h'. \end{array} \right.$

d'où $\forall x \in Z^l$ $\xi(x) = \varphi(x)$

Donc $G\xi(x) = G\varphi(x)$. $\forall x \in Z^l$.

$f(x) = G\xi(x) + h = G\varphi(x) + h'$ d'où $h = h'$.

rappelant que $h = \lim_{n \to \infty} p^n f = h'$.

• En une ou deux dimensions, toute fonction excessive est une fonction constante.

La récurrence de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Z}^2$ impose que dans la représentation $f = G\varphi + h$, φ soit nulle car sinon $G\varphi$ serait infini d'où $G\varphi$ est constante, h aussi puisque positive harmonique.

. Voyons maintenant une condition suffisante à l'existence d'une fonction excessive

Si $\forall x$ et $\forall B$ $\quad f(x) \geq E_x f(X_\tau)$ est satisfaite (avec τ, temps de première visite à B).

En effet si $\forall x$ on prend pour ensemble B, l'ensemble des points frontière de x.

on aura $f(x) \geq E_x f(X_\tau)$

et $P_x \{ \tau = 1 \} = 1$

d'où $f(x) \geq E_x f(X_1)$

or on sait que $E_x f(X_1) = p f(x)$.

d'où $f(x) \geq p f(x)$

De même si on prend pour B l'espace tout entier $f(x) \geq E_x f(X_\tau)$ avec $\{ \tau = \infty \}$.

Or $f(X_\tau)$ sur $\{ \tau = \infty \}$ est nul.

donc $\forall x : f(x) \geq 0$.

D'où $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \text{et } f(x) \geq p f(x) \end{array}\right. \Rightarrow f$ est excessive.

Etudions maintenant quelques propriétés des CAPACITÉS.

Tous les ensembles envisagés dans cette étude seront considérés comme non récurrents.

Rappelons que . K_B est l'ensemble des fonctions φ nulles hors de B tq $G\varphi \leq 1$

. B non récurrent $\Rightarrow \exists\, \varphi_B = \Pi_B - p\Pi_B \in K_B$ tq $\Pi_B = G\varphi_B$; φ_B = Distribution d'équilibre.

. $C(B)$ Capacité $= \sum_{y \in B} \varphi_B(y)$

. $\sum_{y \in B} \varphi(y) \leq C(B)$. $(*)$

. La capacité est une fonction croissante par inclusion c-à-d $A \subset B \Rightarrow C(A) \leq C(B)$.

Puisque $A \subset B$ $\quad \varphi_A \in K_A \Rightarrow \varphi_A \in K_B$.

d'où $\sum_{y \in B} \varphi_A(y) \leq C(B)$ par $(*)$

Mais $\sum_{y \in B} \varphi_A(y) = \sum_{y \in A} \varphi_A(y)$ (car φ_A nul sur $B \setminus A$.)

Donc $\sum_{y \in A} \varphi_A(y) = C(A) \leq C(B) = \sum_{y \in B} \varphi_B(y)$.

. La capacité de la réunion de 2 ensembles est inférieure à la somme des capacités de ces 2 ensembles.

Nous le démontrons d'abord pour 2 ensembles disjoints. $A \cap B = \phi$.

Nous introduisons la notation abrégée
$$(f_1, f_2) = \sum_{y \in B} f_1(y) f_2(y)$$

et par symétrie de la promenade aléatoire (Gf_1, f_2)
$$= (f_1, Gf_2)$$

ainsi
$$C(A \cup B) = (\varphi_{A\cup B}, 1) \leq (\varphi_{A\cup B}, \pi_{A\cup B}) \leq (\varphi_{A\cup B}, \pi_A + \pi_B)$$
$$= (\varphi_{A\cup B}, \pi_A) + (\varphi_{A\cup B}, \pi_B) = (\varphi_{A\cup B}, G\varphi_A) + (\varphi_{A\cup B}, G\varphi_B)$$
$$= (G\varphi_{A\cup B}, \varphi_A) + (G\varphi_{A\cup B}, \varphi_B) \leq (1, \varphi_A) + (1, \varphi_B)$$
$$\leq C(A) + C(B)$$

Si les 2 ensembles n'étaient pas disjoints $A \cap B \neq \phi$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \quad \text{avec } ((A\setminus B) \cap B) = \phi$$
Donc
$$C(A\cup B) \leq C(A\setminus B) + C(B) \leq C(B) + C(A) \quad (\text{car } A\setminus B \subset A)$$

• La Distribution d'équilibre de l'ensemble $B \cup \partial B$ est entièrement concentrée sur ∂B.

C-à-d. sachant que $\varphi_{B\cup\partial B}(x) = 0 \quad x \notin B\cup\partial B$.
on voit que $\varphi_{B\cup\partial B}(x) = 0$ pour $x \in B$.
en effet pour $x \in B$:
$$\varphi_{B\cup\partial B}(x) = \pi_{B\cup\partial B}(x) - P\pi_{B\cup\partial B}(x).$$
$$= \pi_{B\cup\partial B}(x) - 1/2\ell \sum_{\pm k} \pi_{B\cup\partial B}(x + e_k)$$

or pour $x \in B \Rightarrow x \pm e_k \in B \cup \partial B$ (par déf. de frontière)
d'où $\pi_{B\cup\partial B}(x) = \pi_{B\cup\partial B}(x + e_k) = 1$.

d'où

$\underline{\forall x \in B} \quad \underline{\varphi_{B\cup\partial B}(x)} = \pi_{B\cup\partial B}(x) - P\pi_{B\cup\partial B}(x) = \underline{0}$.

Donc $\underline{\varphi_{B\cup\partial B}(x) \neq 0}$ uniquement pour $\underline{x \in \partial B}$.

. On démontre de même que la distribution d'équilibre d'un ensemble uni à sa frontière coïncide avec celle de sa frontière et en particulier que:

$$C(B \cup \partial B) = C(\partial B).$$

Lorsque nous aurons remarqué que puisque l'ensemble B est non récurrent, $Z^\ell \setminus B$ l'est, et puisque les distributions d'équilibre : $\varphi_{B\cup\partial B}$ et $\varphi_{\partial B}$ de $B\cup\partial B$ et ∂B sont nulles hors de $B\cup\partial B$ et valent respectivement $\pi_{B\cup\partial B} - p\pi_{B\cup\partial B}$ et $\pi_{\partial B} - p\pi_{\partial B}$,

nous avons démontré ce qu'il fallait et donc en particulier que $C(B\cup\partial B) = C(\partial B)$ qui est encore un résultat suggéré par l'analogie physique du problème.

. On peut voir également que la capacité d'un ensemble réduit à un point : x, est égale à $1/U(x,x)$.

Puisque l'ensemble B du cas général se réduit à $\{x\}$

$$C(x) = \sum_{y\in B} \varphi_B(y) = \varphi_x(x).$$

rappelant que $G\varphi(x) = \sum_{y\in Z^\ell} U(x,y)\,\varphi(y)$.

nous avons $G\varphi_x(x) = U(x,x)\,\varphi_x(x)$ puisque $\varphi_x(y) = 0 \;\forall y \neq x$.

Donc $\varphi_x(x) = \dfrac{G\varphi_x(x)}{U(x,x)}$ or $G\varphi_x(x) = \Pi_x(x) = 1$.

d'où $C(x) = 1/U(x,x)$

. Nous pouvons montrer à présent que la capacité d'un ensemble composé de n points tend vers $n/U(0,0)$ lorsque la distance entre 2 points de cet ensemble croît sans limite.

Nous savons que $U(x,x) = \sum_n p_n(x,x) = \sum_n p_n(0,0)$ $\forall x$.

d'où $U(x,x) = U(0,0)$ $\forall x$

De plus $C(B) = \sum_{y \in B} \varphi_B(y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_B(x_i)$ $x_i \in B$.

or $G\varphi_B(x_i) = \Pi_B(x_i) = 1$ puisque $x_i \in B$.

et $G\varphi_B(x_i) = \sum_y U(x_i, y)\varphi_B(y) \sim U(x_i, x_i)\varphi_B(x_i) + \sum_{y \neq x_i} \dfrac{c\ell}{\|x_i - y\|} \varphi_B(y)$.

comme par hypothèse $\|x_i - y\| \to \infty$.

$1 = G\varphi_B(x_i) \sim U(0,0)\varphi_B(x_i) +$ somme tendant vers 0

d'où dans les conditions où nous sommes :

$\varphi_B(x_i) \longrightarrow 1/U(0,0)$

d'où $C(B) \rightarrow n/U(0,0)$.

Ainsi, on voit que la capacité d'un ensemble infini non récurrent est infini

---

Chapitre II^e

Préliminaires théoriques.

I Définition d'un Processus de Wiener.

Dans le chapitre précédent, les auteurs limitaient leurs investigations à une promenade aléatoire sur un lattis de dimension 1 à valeurs entières

Ils tentent ici de généraliser leur étude à un espace d'état continu, pour ce faire, on fera tendre les "maillons" du lattis vers 0.

On considérera donc un lattis dont 2 points adjacents ne sont plus distants de 1 mais d'une longueur δ qu'on fera ensuite tendre vers 0.

Nous ferons varier la fonction fréquence de transition en δ de sorte que la particule parcourt la même distance pendant le même laps de temps quel que soit δ.

On est en mesure d'espérer un mouvement continu pour $\delta \to 0$

Examinons les propriétés de ce "nouveau" mouvement:

La propriété essentielle de la promenade aléatoire étant l'indépendance des ξ_i $(X_i - X_{i-1})$, leur identique distribution la symétrie rend $E\xi_i = 0$ et leur moment du second ordre fini

Appliquant le théorème central limite.

$$(1) \quad \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \text{distribut. normale de moyenne 0 et de matrice de covariance des } \xi_i$$

La structure du problème donne $E\xi_i = 0$, $E X_i X_j = 0 \quad i \neq j$, $E X_i^2 = 1/\ell \ \forall \ell$

En n étapes la particule se déplace de $\delta(\xi_1 + \dots + \xi_n)$

Une distribution limite raisonnable porte à imposer

δ de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ pour satisfaire l'égalité entre (1) et (2)
Nous supposerons donc que l'intervalle de temps entre 2 sauts successifs est δ^2/l.

$$X_t - X_0 = \sqrt{\frac{lt}{n}}\,(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \qquad \text{avec } n = lt/\delta^2$$

Donc à la limite

$X_t - X_0$ a une distribution symétrique normale de variance $(1/l)(\sqrt{tl})^2 = t$ dans toutes les directions

La densité de la distribution sera $p(t,y) = p(t, y_1, \ldots y_l)$

$$= 1/(2\pi t)^{l/2}\, e^{-\frac{y_1^2 + \cdots + y_l^2}{2t}} = \frac{1}{(2\pi t)^{l/2}}\, e^{-y^2/2t} \qquad (3).$$

Remarques. - Les coordonnées de $X_t - X_0$ sont mutuellement indépendantes à la limite
- Les coordonnées des ξ_i sont dépendantes.
- La distribution limite de chaque coordonnée $X_t - X_0$ est normale $N(0, t)$.

Il est donc naturel de penser que la promenade aléatoire sur un treillis devient un processus continu tel que le déplacement aléatoire de la particule pendant le temps t ait la densité (3)

Après Brown (1828), Einstein et Smoluchowski (1906), Wiener (1923) formula assez correctement le processus stochastique relatif à l'agitation de fines particules suspendues dans un liquide.

Ce processus portera le nom de <u>Processus de Wiener</u> que nous allons tenter de formuler mathématiquement.

Pour ce faire nous considérons :

. Un espace X de fonctions $x(t)$ $t \geq 0$ à valeurs dans un espace vectoriel R (de dimension ℓ).

. Ces fonctions seront interprétées comme toutes les trajectoires possibles d'un mouvement Brownien.

. Soit une famille de distribution (mes. de proba) P_x donnée sur X, P_x est interprétée comme la distribution de la trajectoire aléatoire de particules initialisant leur mouvement en x au temps $t=0$.

. L'ensemble des mesures de probabilité P_x sur X définit un __processus de Wiener__ $X_t (t \geq 0)$ si les conditions suivantes sont satisfaites.

a - X contient seulement des fonctions continues

b - $P_x \{X_0 = x\} = 1$

c - Incrément aléatoire $X_{t+s} - X_s$ a une distribution normale symétrique de densité (3). pour $s \geq 0$, $t > 0$ et cet incrément ne dépend d'aucun évènement ni d'aucune v.a. définis en termes de trajectoires X_t pour $t < s$

$$\forall \Gamma \in R. \quad P_x \{X_t \in \Gamma\} = P_x \{X_t - X_0 \in \Gamma - x\}$$

$$= \int_{\Gamma - x} p(t, y)\, dy = \int_\Gamma p(t, z - x)\, dz \qquad (t > 0,\ x \in R)$$

$$\equiv P(t, x, \Gamma)$$ Proba transition d'un processus de Wiener.

II - Distribution du temps de sortie et temps moyen de sortie d'un cercle.

Dans le premier chapitre, nous nous sommes intéressés à des sous ensembles B de Z^l, atteints avec probabilité 1 et donc implicitement, à des sous ensembles $Z^l \setminus B$ dont on sort avec probabilité 1.

• Nous étudions un problème similaire dans le cadre d'un processus de Wiener en considérant :

. un domaine arbitraire G.

. le temps τ, de première sortie de ce domaine, d'une trajectoire de Wiener X_t $(t \geq 0)$.

Outre la distribution de la position X_τ de la particule au temps τ, nous examinerons :

. $P_x\{\tau < \infty\}$, $x \in G$

et . $E_x \tau$,

2 problèmes qui comme dans le cas d'une promenade aléatoire sur un lattis, mais avec plus de symétrie, se réduiront respectivement à des problèmes aux limites pour des équations : $\Delta u = 0$ (de Laplace)

et $\Delta u = -2$ (de Poisson).

• Les auteurs montrent que :

~ Partant du centre d'un cercle de rayon quelconque, la particule en sort avec probabilité 1.

~ Pour τ : temps de première sortie de ce cercle pour $(t \geq 0)$, X_τ est uniformément distribué sur la circonférence du cercle

~ $E_0 \tau$ est proportionnel au carré du rayon du cercle.

III) Propriétés de Markov et Markov forte

Pour une classe importante de processus probabilistes parmi lesquels le processus de Wiener, la propriété de Markov est respectée que ce soit pour un moment s fixé ou τ aléatoire. En effet on peut montrer que :

Si X_t est un Processus de Wiener sur un espace de dimension quelconque et si τ est le temps de première sortie de X_t d'un domaine arbitraire, alors, quel que soit la condition A sur la valeur de X_t avant le temps τ, le processus $y_t \equiv X_{\tau+t}$ $0 \leq t < \infty$, est un processus de Wiener de distribution initiale $\mu(\Gamma) = P_x\{A, X_\tau \in \Gamma\}$.

Cette propriété de Markov forte est non seulement valable pour le premier temps de sortie mais pour d'autres temps aléatoires ou non (Markov faible) ces temps étant appelés temps Markoviens.

IV Harmonicité de la probabilité de sortie.

Nous nous sommes déjà intéressés au temps τ lorsque le mouvement de la particule était initialisé au centre d'un domaine circulaire. Si le point initial n'est plus au centre, le domaine circulaire ne présente plus d'intérêt particulier et nous examinerons donc le cas d'un domaine G quelconque.

Nous appellerons L la frontière de G, Γ sera une partie de cette frontière, φ une fonction définie sur L, égale à 1 sur Γ et à 0 hors de Γ.

Si $f(x) = E_x\,\varphi(X_\tau)$ on voit que $f(x)$ est harmonique sur G c-à-d $\Delta f = 0$

V Points frontière réguliers et irréguliers

Nous étudions ici la valeur de la fonction harmonique

$$f(x) = E_x\, \varphi(X_\tau)$$

lorsque se tend vers un certain point a appartenant à la frontière L du domaine G.

Supposant que la fonction frontière φ est continue en a et bornée

Si $x \equiv a \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow X_\tau = a$ est $f(x) = \varphi(a)$

On démontre aisément que si la frontière L est "suffisamment régulière" au V_a alors.

$$\lim_{\substack{x \in G \\ x \to a}} f(x) = \varphi(a). \quad (13)$$

Certaines considérations mènent à la définition suivante :

Un point a appartenant à la frontière est dit régulier si $\forall h > 0$

$$P_x\{\tau > h\} \longrightarrow 0 \quad \text{si } x \to a.$$

On peut voir que (13) est satisfaite en tout point régulier ∎

Un autre critère de régularité peut être introduit, formulé en termes de trajectoires initialisées au point a lui-même. Pour cela au lieu du temps τ de première sortie de G on considérera le premier des temps positifs où la chaîne est située hors de G (σ)

Ainsi un point frontière a sera régulier si

$$P_a\{\sigma = 0\} = 1. \quad (19)$$

On démontrera dans les problèmes que la réciproque est vraie et nous déduirons, dans le chapitre suivant, de (19) un critère géométrique simple de régularité d'un point frontière

VI La loi du tout ou rien ; un critère suffisant de régularité

Les auteurs démontrent que la probabilité
$P_a \{\zeta > 0\}$ ne peut prendre d'autres valeurs que zéro ou un.

Ils en déduisent un critère suffisant de régularité :

Un point a de la frontière L du domaine G est régulier, si il est le sommet d'un triangle S situé hors du domaine.

• Ce critère reste valable pour une classe assez vaste de domaines, en particulier ceux délimités par des courbes, il se généralise à 3 dimensions en substituant "tétraèdre" à "triangle"

VII Problème de Dirichlet.

Nous avons montré jusqu'ici que si G est un domaine à frontière régulière et si φ est une fonction continue et bornée sur la frontière, alors la formule

$$f(x) = E_x\, \varphi(X_\zeta)$$

définit sur le domaine G une fonction harmonique qui s'identifie à φ sur la frontière

Nous avons donc prouvé l'existence d'une solution au problème de Dirichlet pour une classe importante de domaines.

Les auteurs tirent d'autres conséquences de leurs investigations précédentes à savoir :

■ Une trajectoire de Wiener sur un plan ou dans l'espace a une probabilité unité de ne jamais atteindre un point fixé distinct du point initial de la trajectoire.

■ Une particule de Wiener sur un plan a une probabilité unité de pénétrer dans n'importe quel domaine circulaire de rayon positif.

On voit que le passage de l'espace d'état discret concernant la promenade aléatoire sur un lattis au cas continu de la trajectoire de Wiener montre qu'un point dans le premier cas équivaut à un cercle dans le second en ce qui concerne du moins l'étude de la récurrence.

■ La trajectoire X_t de Wiener a une probabilité unité d'être partout dense dans le plan.

VIII Solution probabiliste de l'équation de Poisson.

On démontre que || Pour un domaine borné G à frontière régulière, $m(x) = E_x \tau$ est solution de l'équation de Poisson $\Delta m = -2$ et s'annule sur la frontière.

Nous savons de plus que cette solution est unique

Si le domaine G à frontière régulière n'était pas borné, on montrerait que $m(x)$ est le minimum des fonctions solutions positives de $\Delta m = -2$ sur G qui s'annulent à la frontière si de telles solutions existent

Nous pouvons à présent, après ce bref rappel théorique, nous attacher à résoudre les problèmes laissés par les auteurs à la discrétion du lecteur.

D'abord nous allons particulariser les notions de probabilité et de temps moyen de sortie au cas unidimensionnel.

Soient $p(a,x)$ et $q(a,x)$ les probabilités qu'une particule de Wiener, initialisant son mouvement en $x \in [0,a]$ sorte de l'intervalle $]0,a[$ respectivement par la gauche ou par la droite et soit $m(a,x)$ le temps moyen de sortie de $]0,a[$ pour cette particule initialisée en x.

• Montrons que sur le graphe de la fonction $p(a,x)$, les points correspondant à des abscisses équidistantes : $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = a$, sont en ligne droite.

En effet par la formule de probabilité totale et en vertu de l'équiprobabilité de transition du processus.

$$p(a,x_i) = 1/2\,[\,p(a,x_{i-1}) + p(a,x_{i+1})\,] \qquad \forall\, 0<i<n$$

d'où $p(a,x_{i+1}) - p(a,x_i) = p(a,x_i) - p(a,x_{i-1})$.

Donc $(x_i, p(a,x_i))$, $(x_{i-1}, p(a,x_{i-1}))$, $(x_{i+1}, p(a,x_{i+1}))$ sont colinéaires $i = 2,\dots,n-1$.

Donc quelque soit $i\,(1 \le i \le n)$: $(x_i, p(a,x_i))$ se placent sur une droite

. Voyons maintenant que $p(a,x)$ est monotone en x c-à-d $0 \leq x < y \leq a \Rightarrow p(a,x) \leq p(a,y)$

Soient : . $p(a,y)$: probabilité que, partant de y, la chaine sorte de $]0,a[$, la première fois par a.
. $p(y,x)$: probabilité que, partant de x la chaine sorte de $]0,y[$ la première fois par y.

Les évènements envisagés étant par hypothèse, indépendants ;
. $p(a,x)$: probabilité que partant de x, la chaine sorte de $]0,a[$ la première fois par a.
est donc telle que : $p(a,x) = p(a,y)\,p(y,x)$

Donc $p(a,x) \leq p(a,y)$ puisque $0 \leq p(y,x) \leq 1$.
Donc la fonction $p(a,x)$ est monotone en x.

. Introduisons un lemme technique d'application immédiate.

Montrons qu'une fonction $f(x)$ dont le graphe, correspondant à des abscisses équidistantes sur $(0,a)$ tq. $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a$. quelque soit le découpage, est en ligne droite, et tq $f(x)$ soit monotone sur $(0,a)$ est en fait linéaire sur $(0,a)$.

Prenons sans restriction $f(x) = x$ pour $x \in (0,a) \cap \mathbb{Q}$.
$f(x)$ monotone sur $(0,a)$.

et voyons que $f(x) = x$ sur $(0,a)$.

Sachant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. on sait qu'il existe $\forall x$ une suite $(q_i)_{i\in N}$ croissante convergeant vers x et une suite $(q_s)_{s\in N}$ décroissante convergeant vers x, les q_i et q_s étant rationnels.

Donc

f monotone $\Rightarrow \lim_{i\to\infty} f(q_i) \leq f(x) \leq \lim_{s\to\infty} f(q_s)$.

q_i, q_s rationnels $\Rightarrow \lim_{i\to\infty} q_i \leq f(x) \leq \lim_{s\to\infty} q_s$.

par déf. des q_i, q_s $\quad x \leq f(x) \leq x$.

$$\text{d'où } f(x) = x \qquad \forall x \in (0,a).$$

Nous voyons que $\phi(a,x)$ répond bien aux conditions de ce lemme puisque quelque soit le découpage sur $(0,a)$, le graphe correspondant aux points équidistants est sur une même droite. Donc le graphe correspondant aux rationnels.

On peut donc en déduire :

puisque par symétrie du mouvement :

$$\phi(a, a/2) = 1/2 \quad \text{et} \quad \phi(a, 1/4) = 1/4.$$

que

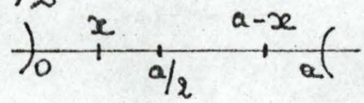
$$\phi(a,x) = x/a \quad \text{et} \; q(a,x) = 1 - \phi(a,x) = \frac{(a-x)}{a}$$

Calculons maintenant le temps moyen de sortie d'un intervalle $(0,a)$ pour une trajectoire partant d'un point quelconque de l'intervalle.

Donc montrons que $m(a,x) = c_1\, x(a-x)$.

sachant que $m(a, a/2) = c_1 (a/2)^2$ (voir § 2)

Soit un point $x \in (0,a)$ prenons le sans préjugés tq $x < a/2$.



nous voyons que
$$m(a, a/2) = m\big((x, a-x), a/2\big) + \tfrac{1}{2}\, m(a,x) + \tfrac{1}{2}\, m(a, a-x).$$

or on voit par la symétrie du problème que
$$m(a,x) = m(a, a-x)$$

donc
$$\begin{aligned} m(a,x) &= m(a, a/2) - m\big((x,a-x), a/2\big) \\ &= c_1 (a/2)^2 - c_1 (a/2 - x)^2 \\ &= c_1\, x(a-x). \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer maintenant que la probabilité qu'une particule partant de $x \neq 0$ arrive en 0 est égale à 1 et que le temps moyen d'arrivée est infini

Considérons pour cela un segment de droite $(0,a)$ et transformons le en une demi droite $(0,\infty($

d'où $q_0(x)$ proba d'atteindre 0 partant de x est
$$\lim_{a\to\infty} q(a,x) = \lim_{a\to\infty} 1 - x/a = 1.$$

et $m_0(x)$ temps moyen pour atteindre 0 partant de x est
$$\lim_{a\to\infty} m(a,x) = \lim_{a\to\infty} x(a-x) = \infty.$$

<u>Examinons un processus de Wiener unidimensionnel avec réflexion et absorption.</u>

- Lorsque les trajectoires d'un processus de Wiener X_t sur la droite sont réfléchies symétriquement en un p^t a lorsque $X_t < a$ et restent inchangées pour $X_t \geq a$, on obtient un processus de Wiener Y_t avec réflexion à gauche en a sur la demi droite $[a, +\infty($. On définit bien sur la réflexion à droite de manière analogue.

  On peut obtenir une réflexion à gauche en a combinée avec une réflexion à droite en b. $(a < b)$ menant ainsi à une infinité de réflexions pour des trajectoires initialisées en un point $x \in [a, b]$

  Le résultat final est alors un processus de Wiener Y_t sur l'intervalle $[a, b]$ avec réflexions en a et b.

- Si après la première visite de la trajectoire de Wiener en un point a, la particule y reste toujours, le résultat est un processus de Wiener Z_t avec absorption au point a

- Si une particule partant de x, arrive après un temps $t > 0$ dans un intervalle (ne contenant pas de points absorbants) Γ, avec une probabilité

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, dy$$

alors $p(t, x, y)$ est dit <u>densité de transition du processus.</u>

Pour un processus de Wiener sur la droite toute entière la densité de transition est donnée par

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \qquad (41)$$

. Montrons maintenant que la densité de transition d'un processus de Wiener avec réflexion gauche en 0 est égale à

$$p_{r_0}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} + e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}} \right]$$

$$(x, y \geq 0)$$

Remarquons d'abord que l'intervalle $\Gamma \in [0,+\infty]$

on a $\{y(t) \in \Gamma\} = \{x(t) \in \Gamma \cup \Gamma'\}$

où Γ' est l'intervalle réfléchi de Γ par rapport à 0.

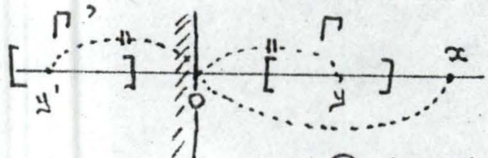
Donc partant de x on peut arriver en Γ de 2 façons

soit directement

soit par réflexion en 0, ce qui équivaut à franchir 0 pour arriver en Γ'

d'où $P_x\{y(t) \in \Gamma\} = P_x\{x(t) \in \Gamma\} + P_x\{x(t) \in \Gamma'\}$.

puisque Γ et Γ' sont disjoints p.s.



$$P_x\{y(t) \in \Gamma\} = P_{r_0}(t,x,\Gamma) = P(t,x,\Gamma) + P(t,x,\Gamma')$$

or $P(t,x,\Gamma') = P(t,-x,\Gamma)$ par symétrie

d'où $P_{r_0}(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma \left[p(t,x,y) + p(t,-x,y) \right] dy$.

$$= \int_\Gamma p_{r_0}(t,x,y)$$

d'où

$$p_{r_0}(t,x,y) = p(t,x,y) + p(t,-x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + e^{-\frac{(-x-y)^2}{2t}} \right]$$

c'est la densité du processus réfléchi en 0.

• Voyons maintenant que la densité de transition d'un processus de Wiener avec réflexion à gauche en 0 et à droite en a est :

$$p_{r_{0,a}}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} + e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}} \right]$$

$$(x, y \in [0,a])$$

Nous procédons comme au problème précédent.

en écrivant $P_x\{y(t)\in\Gamma\} = P_x\{x(t)\in \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots\}$

avec les Γ_i intervalles réfléchis par 0 et a une infinité de fois et bien sûr disjoints

$$P_x\{y(t)\in\Gamma\} = P_{r_{0,a}}(t,x,\Gamma) = P(t,x,\Gamma) + \overset{*}{P(t,x,\Gamma_1)} + \overset{*}{P(t,x,\Gamma_2)} + \dots$$

$$= P(t,x,\Gamma) + P(t,-x,\Gamma) + P(t,-x+2a,\Gamma) + P(t,x-2a,\Gamma) + \dots$$

* (ces relations sont immédiates par la symétrie du mouvement)

d'où $P_{r_{0,a}}(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma p_{r_{0,a}}(t,x,y)\,dy = \int_\Gamma p(t,x,y)\,dy + \int_\Gamma p(t,-x,y)\,dy$

$$+ \int_\Gamma p(t,-x+2a,y)\,dy + \int_\Gamma p(t,x-2a,y)\,dy + \dots$$

la positivité des intégrants nous permet de permuter somme et intégration

d'où $P_{r_{0,a}}(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma p_{r_{0,a}}(t,x,y)\,dy = \int_\Gamma [p(t,x,y) + p(t,-x,y) + p(t,-x+2a,y)$

$$+ p(t,x-2a,y) + \dots]\,dy.$$

d'où $$p_{r_{0,a}}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} + e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}} \right]$$

c'est la densité de transition d'un processus de Wiener, avec réflexion à gauche en 0 et à droite en a, initialisé en $x \in [0,a]$.

- Dans la suite nous aborderons des processus de Wiener avec absorption et pour ce faire nous nous servirons d'un résultat aussi immédiat qu'intuitif :

Si τ est un temps markovien tel que $X_\tau = x$, et μ la distribution du temps aléatoire τ, alors $\forall t > 0$, $\forall \Gamma$

$$P_x \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \} = \int_0^t P(t-s, x, \Gamma)\, \mu(ds) \quad (42)$$

résultat découlant de la propriété de Markov forte.

- Montrons à titre de lemme que si un point x et un intervalle Γ sont situés d'un même côté du point 0 et si τ est le temps de première arrivée en 0 alors

$$P_x \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \} = P(t, -x, \Gamma).$$

en effet en considérant $-x$ comme point initial

$$\{ X_t \in \Gamma \} = \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \}.$$

d'où

$$\underset{\displaystyle P(t,-x,\Gamma)}{\underset{\shortparallel}{P_{-x} \{ X_t \in \Gamma \}}} = \underset{\displaystyle \underset{\displaystyle P_x \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \}}{\underset{\shortparallel}{\int_0^t P(t-s, 0, \Gamma)\, \mu(ds) \ (\text{par } 42)}}}{\underset{\shortparallel}{P_{-x} \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \}}}$$

d'où $P(t, -x, \Gamma) = P_x \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \}$.

- Calculons la densité de transition d'un processus de Wiener Z_t sur la demi droite $[0, +\infty[$ avec absorption en 0 et voyons qu'elle est égale à

$$p_{a_0}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}} \right] \quad (x, y > 0)$$

On remarque que $P_x \{ Z_t \in \Gamma \} = P_x \{ \tau > t, X_t \in \Gamma \}$ (avec τ temps d'entrée en 0.) $\Gamma \not\ni 0$

or $P_x \{ X_t \in \Gamma \} = P_x \{ \tau > t, X_t \in \Gamma \} + P_x \{ \tau \leq t, X_t \in \Gamma \}$

d'où $P_x \{ Z_t \in \Gamma \} = P(t,x,\Gamma) - P(t,-x,\Gamma)$

d'où $P_x \{ Z_t \in \Gamma \} = \int_\Gamma \left(p(t,x,y) - p(t,-x,y) \right) dy = \int_\Gamma p_{a_0}(t,x,y)\, dy$

donc $p_{a_0}(t,x,y) = p(t,x,y) - p(t,-x,y)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}} \right]$$

- Nous pouvons voir également que pour un état initial $x > 0$ le temps τ de première arrivée en 0 est distribué avec la densité $p(x,t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-x^2/2t}$ $(t > 0)$

Nous savons grâce aux notations adoptées jusqu'ici que :

$$P_x \{ \tau \leq t \} = P_x \{ Z_t = 0 \} = 1 - \int_0^\infty p_{a_0}(t,x,y)$$

et que :

$$p(x,t) = \frac{d}{dt} \left(P_x \{ \tau \leq t \} \right)$$

Calculons $P_x\{\tau \leq t\} = 1 - \int_0^\infty p_{a_0}(t,x,y)$

$$P_x\{\tau \leq t\} = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right]$$

Nous décomposons l'intégrale en 2 parties, posant $y-x = \sqrt{2t}\,u$ dans la première et $y+x = \sqrt{2t}\,u$ dans la seconde

$$P_x\{\tau \leq t\} = 1 - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-u^2}\sqrt{2t}\,du + \int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-u^2}\sqrt{2t}\,du.$$

$$= 1 - \int_{-x/\sqrt{2t}}^{x/\sqrt{2t}} e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,du.$$

d'où $$p(x,t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{2t}}^{x/\sqrt{2t}} e^{-u^2}\,du\right)$$

or la formule de dérivation de Leibnitz applicable à ce cas donne $$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(u)\,du = \int_a^b \frac{d}{dt}f(u)\,du - f(a)\,a'(t) + f(b)\,b'(t)$$

Donc.

$$p(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{2}\right)t^{-3/2}e^{-x^2/2t}\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{2}\right)t^{-3/2}e^{-x^2/2t}\right)\right]$$

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\;x\;e^{-x^2/2t}$$

• Les auteurs suggèrent de voir à présent que si

τ_0 est le temps de première arrivée en 0 de la chaîne X_t
σ_1 " " " " " " en a après τ_0 " "
τ_1 " " " " " " en 0 après σ_1 " "
⋮
τ_i " " " " " " en 0 après σ_i " "
σ_{i+1} " " " " " " en a après τ_i " "

alors pour un temps initial $x > 0$, le temps τ_n est distribué comme le temps de première arrivée en 0 de la chaîne, partant du point $-2na-x$ et σ_n est distribué comme le temps de première arrivée en a de la chaîne partant du point $2na+x$.

Pour cela décomposons τ_n et σ_n en :

$$\begin{cases} \tau_n = \tau_0 + (\sigma_1 - \tau_0) + (\tau_1 - \sigma_1) + \cdots + (\tau_{n-1} - \sigma_{n-1}) + (\sigma_n - \tau_{n-1}) + (\tau_n - \sigma_n) \\ \sigma_n = \tau_0 + (\sigma_1 - \tau_0) + (\tau_1 - \sigma_1) + \cdots + (\tau_{n-1} - \sigma_{n-1}) + (\sigma_n - \tau_{n-1}) \end{cases}$$

On remarquera que les $(\sigma_i - \tau_{i-1})$ et les $(\tau_i - \sigma_i)$ ont tous mutuellement indépendants, ≥ 0, et ont même distribution que le temps nécessaire à parcourir le segment $(0,a)$ t'entier. De même τ_0 est ≥ 0, indépendant des différences ci-dessus et est distribué comme le temps nécessaire à aller de x en 0.

On a donc les 2 fois un vecteur à $2n$ composantes équidistrib. + 1 composante (τ_0), toutes positives et indépendantes
on peut donc développer la trajectoire parcourue de $-a$ en 0, de $-2a$ en $-a$, ... de $-2na-x$ en $-2na$ donc un chemin parcouru de $-2na-x$ jusqu'en 0 pour τ_n.
et de $2a$ en a, de $3a$ en $2a$, ... de $2na+x$ en $2na$ pour σ_n.
donc chemin parcouru de $2na+x$ jusqu'en a.

- A partir d'une idée semblable et à titre de lemme nous "montrons" maintenant que :

Considérant $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \ldots$ la suite de temps aléatoires du problème précédent et :

ρ_0 le temps de première arrivée en a

π_1 .. .. en 0 après ρ_0

ρ_1 .. .. en a après π_1.

$\vdots$

π_i .. .. en 0 après ρ_{i-1}

ρ_i .. .. en a après π_i

alors

$$\{\tau_n \leq t \text{ et } \rho_n \leq t\} = \{\sigma_{n+1} \leq t \text{ ou } \pi_{n+1} \leq t\}$$

et

$$\{\sigma_n \leq t \text{ et } \pi_n \leq t\} = \{\tau_n \leq t \text{ ou } \rho_n \leq t\}.$$

Il y a 2 façons d'atteindre les extrêmités au départ x

ou bien <u>on touche d'abord 0</u> alors $(1) \begin{cases} \rho_n \equiv \sigma_{n+1} \\ \tau_n \equiv \pi_n \end{cases} \forall n$

ou bien <u>on touche d'abord a</u> alors $(2) \begin{cases} \rho_n \equiv \sigma_n \\ \tau_n \equiv \pi_{n+1}. \end{cases} \forall n.$

d'autre part, par définition $(3) \begin{cases} \rho_n < \pi_{n+1} \\ \tau_n < \sigma_{n+1}. \end{cases}$

d'où on a $\underline{\sigma_{n+1} \leq t} \Rightarrow \rho_n \leq t$ p$((1))$

et $\Rightarrow \tau_n \leq t$ p.(3)

De même on a $\underline{\pi_{n+1} \leq t} \Rightarrow \tau_n \leq t$ p.(2)

et $\Rightarrow \rho_n \leq t$ p.(3)

d'où

$$\{\pi_{n+1} \leq t \text{ ou } \sigma_{n+1} \leq t\} \subseteq \{\rho_n \leq t \text{ et } \tau_n \leq t\}. (*)$$

$$\text{Si on a } \{\rho_n \le t \text{ et } \tau_n \le t\} \Rightarrow \underset{\overset{|||\,(1)}{\{\tau_{n+1} \le t \text{ et } \tau_n \le t\}}}{\overset{(1)}{\{\tau_{n+1} \le t \text{ et } \Pi_n \le t\}}} \text{ ou } \underset{\overset{|||\,(2)}{\{\rho_n \le t \text{ et } \Pi_{n+1} \le t\}}}{\overset{(2)}{\{\tau_n \le t \text{ et } \Pi_{n+1} \le t\}}}$$

Mais $\{\tau_{n+1} \le t \text{ et } \tau_n \le t\} \equiv \{\tau_{n+1} \le t\}$ par (3)

et

$\{\rho_n \le t \text{ et } \Pi_{n+1} \le t\} \equiv \{\Pi_{n+1} \le t\}$ par (3)

d'où $\{\rho_n \le t \text{ et } \tau_n \le t\} \subseteq \{\tau_{n+1} \le t \text{ ou } \Pi_{n+1} \le t\}$. (**)

d'où (*) et (**) $\Rightarrow \{\rho_n \le t \text{ et } \tau_n \le t\} \equiv \{\tau_{n+1} \le t \text{ ou } \Pi_{n+1} \le t\}$

l'autre résultat de la thèse se montre de la même manière.

. Grâce à ce lemme et dans les notations des problèmes précédents montrons que: $\forall$ événement A.

$$S = P_x\{A \text{ et } (\tau_0 \le t \text{ ou } \rho_0 \le t)\} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[P_x\{A \text{ et } \tau_n \le t\} + P_x\{A \text{ et } \rho_n \le t\} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_x\{A \text{ et } \tau_n \le t\} + P_x\{A \text{ et } \Pi_n \le t\} \right]$$

Pour cela nous utilisons le résultat précédent et le fait que. $P\{B \cup C\} = P\{B\} + P\{C\} - P\{B \cap C\}$.

d'où

$$S = P_x\{A \text{ et } (\tau_0 \le t \cup \rho_0 \le t)\} = P_x\{A \text{ et } \tau_0 \le t\} + P_x\{A \text{ et } \rho_0 \le t\}.$$
$$- P_x\{A \text{ et } (\tau_0 \le t \cap \rho_0 \le t)\}$$

avec $\{\tau_0 \le t \cap \rho_0 \le t\} = \{\tau_1 \le t \cup \Pi_1 \le t\}$

$$S = P_x\{A \text{ et } \tau_0 \le t\} + P_x\{A \text{ et } \rho_0 \le t\} - P_x\{A \text{ et } \tau_1 \le t\} - P_x\{A \text{ et } \Pi_1 \le t\} + P_x\{A \text{ et } (\tau_1 \le t \cup \rho_1 \le t)\}$$

avec $\{\tau_1 \le t \cup \rho_1 \le t\} = \{\tau_1 \le t \cap \Pi_1 \le t\}$.

on redécompose le dernier terme indéfiniment.

on voit donc apparaître la formule prévue, la convergence provenant du fait de l'autorisation de passer à la limite sur $n \to \infty$ par la continuité de la trajectoire de Wiener. et qu'en une période finie ($t < \infty$) on ne peut envisager qu'un nombre fini de transitions entre 0 et a d'où $P_x\{A, \tau_k \le t\} \longrightarrow 0$ pour $k \to \infty$

idem pour $P_x\{\bar{A}, \sigma_k \le t\} \longrightarrow 0$ pour $k \to \infty$.

. Montrons à présent que la densité de transition d'un processus de Wiener Z_t avec absorption en 0 et a est égale à

$$p_{a_{[0,a]}}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}} \right]$$

$x, y \in (0,a)$

Remarquons que $P_x\{Z_t \in \Gamma\} = \int_\Gamma p_{a_{[0,a]}}(t,x,y)\,dy$

(avec X_t processus de Wiener sur la droite entière) $= P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 > t \cap \rho_0 > t\}$

$= P_x\{X_t \in \Gamma\} - P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 \le t \cup \rho_0 \le t\}$.

par le précédent: $P_x\{Z_t \in \Gamma\} = P_x\{X_t \in \Gamma\} - P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 \le t\} - P_x\{X_t \in \Gamma, \rho_0 \le t\}$
$+ P_x\{X_t \in \Gamma, \sigma_1 \le t\} + P_x\{X_t \in \Gamma, \pi_1 \le t\} - \dots$

en remplaçant $P_x\{X_t \in \Gamma\}$ par $P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 \le t\} + P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 > t\}$,

on a $P_x\{Z_t \in \Gamma\} = P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 > t\} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[P_x\{X_t \in \Gamma, \sigma_n \le t\} + P_x\{X_t \in \Gamma, \pi_n \le t\}$
$- P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_n \le t\} - P_x\{X_t \in \Gamma, \rho_{n-1} \le t\} \Big]$

or on peut remarquer, comme dans un problème précédent, que:

$\forall n > 0$

σ_n est distribué comme le temps de première arrivée en a d'une particule de position initiale $2na + x$.

π_n est distribué comme le temps de première arrivée en 0 d'une particule de position initiale $-2na + x$.

τ_n est distribué comme le temps de première arrivée en 0 d'une particule de position initiale $-2na - x$.

ρ_{n-1} est distribué comme le temps de première arrivée en a d'une particule de position initiale $2na - x$.

remarquant que $P_x\{X_t \in \Gamma, \tau_0 > t\}$ a pour densité de transition

$$p_{a_0}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right]$$

on a

$$\int_\Gamma p_{a_{[0,a]}}(t,x,y)\,dy = \int_\Gamma p_{a_0}(t,x,y)\,dy + \int_\Gamma dy \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-2na-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y-2na+x)^2}{2t}} + e^{-\frac{(y+2na-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+2na+x)^2}{2t}}\right]$$

qui, par positivité des intégrants pris 2 à 2 et en regroupant les termes autrement, montre que :

$$p_{a_{[0,a]}}(t,x,y) = 1/\sqrt{2\pi t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}}\right]$$

- Pour un état initial $x \in]0,a[$, le temps τ de première sortie de l'intervalle $]0,a[$ est distribué avec densité :

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(x+2na)\,e^{-\frac{(x+2na)^2}{2t}} + (2na+a-x)\,e^{-\frac{(2na+a-x)^2}{2t}}\right]$$

en particulier $p(a/2, t) = \dfrac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)\, e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2}{8t}}.$

Nous procèderons comme précédemment pour la densité à 1 point d'absorption (zéro).

$$P_x[\tau \le t] = 1 - \int_0^a p_{a_{(0,a)}}(t,x,y)\,dy.$$

et $p(x,t) = \dfrac{d}{dt} P_x[\tau \le t]$

$$P_x[\tau \le t] = 1 - \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}}\right]dy.$$

la permutation somme-intégrale étant permise par positivité de l'intégrand.

$$P_x[\tau \le t] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a \left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}}\right]dy.$$

En intégrant terme à terme on pose $y - x + 2na = \sqrt{2t}\,u$ dans le premier terme et $y + x + 2na = \sqrt{2t}\,u$ dans le second.

d'où $P_x[\tau \leq t] = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\frac{2na-x}{\sqrt{2t}}}^{\frac{(2n+1)a-x}{\sqrt{2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du - \int_{\frac{2na+x}{\sqrt{2t}}}^{\frac{(2n+1)a+x}{\sqrt{2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \right]$

pour trouver $p(x,t) = \frac{d}{dt} P_x[\tau \leq t]$ on applique Leibnitz sous le signe somme. et on trouve

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \Big[(x+2na) e^{-\frac{(2na+x)^2}{2t}} + (2na+a-x) e^{-\frac{(2na+a-x)^2}{2t}}$$
$$- (2na-x) e^{-\frac{(2na-x)^2}{2t}} - (2na+a+x) e^{-\frac{(2na+a+x)^2}{2t}} \Big]$$

qui produit donne $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(x+2na) e^{-\frac{(2na+x)^2}{2t}} + (2na+a-x) e^{-\frac{(2na+a-x)^2}{2t}} \right]$

• pour la suite nous calculons cette densité pour un état initial situé au milieu du segment $]0,a[$

$$p(a/2, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left((2na + a/2) e^{-\frac{(2na+a/2)^2}{2t}} + (2na + a/2) e^{-\frac{(2na+a/2)^2}{2t}} \right)$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (4n+1) e^{-\frac{a^2(4n+1)^2}{8t}}$$

on voit que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (4n+1) = 1+5-3+9-7 \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)$

d'où $p(a/2, t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{-\frac{(2n+1)^2 a^2}{8t}}$

• • Dans le rappel théorique nous avons vu que les auteurs caractérisaient le temps moyen de sortie d'un domaine à une constante multiplicative près c_l dépendant de la dimension de l'espace (l).
Dans ce qui va suivre nous allons calculer cette constante en commençant par c_1 puis c_2 nous extrapolerons les résultats à c_l.

Détermination de la constante c_l.

Grâce à la connaissance de $p(a/2, t)$ vue précédemment nous pourrions procéder au calcul direct du temps moyen de sortie de l'intervalle $]0,a[$ d'une particule de Wiener initialisée en $a/2$ puisque

$$m(a, a/2) = \int_0^\infty t\, p(a/2, t)\, dt$$

Hélas cette intégrale est inévaluable par des procédés directs nous allons donc calculer

$$\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t}\, p(a/2, t)\, dt$$ et faire tendre ensuite λ vers 0.

• Calculons tout d'abord $\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t} p(a/2, t)\, dt$.(1)

$$\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t}\, p(a/2, t)\, dt = \int_0^\infty dt\, t\, e^{-\lambda t} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2}{8t}}$$

posant $x = (2k+1)a$ $(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\lambda t}\, t\, e^{-(x^2/8)/t}\, dt$

posant $t = y^2$ $(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y^6}} e^{-\lambda y^2} y^2\, 2y\, e^{-(x^2/8)/y^2} dy.$

$$(1) = 2\, {}^1\!/\!\sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x \int_0^\infty e^{-\lambda y^2 - (\frac{x^2}{8})/y^2}\, dy.$$

en utilisant l'égalité $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2-\beta/x^2}\,dx = 1/2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-2\sqrt{\alpha\beta}}$

(donnée par G.M Fikhtengol'ts Course in Differential and integral calculus - Gostekhizdat Moscou)

$$(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x \sqrt{\pi/\lambda}\; e^{-2\sqrt{\frac{\lambda x^2}{8}}}.$$

$$(1) = 1/\sqrt{2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)\, e^{-2ka\sqrt{\lambda/2}}\; e^{-a\sqrt{\lambda/2}}.$$

$$(1) = \left(\frac{a\, e^{-a\sqrt{\lambda/2}}}{\sqrt{2\lambda}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)\, e^{-ak\sqrt{2\lambda}}$$

posant $e^{-a\sqrt{2\lambda}} = Z$; $\displaystyle (1) = \left(\frac{a\,e^{-a\sqrt{\lambda/2}}}{\sqrt{2\lambda}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)Z^k$

$$(1) = \frac{a\,e^{-a\sqrt{\lambda/2}}}{\sqrt{2\lambda}} \cdot \frac{1-Z}{(1+Z)^2} = \frac{\left(a\,e^{-a\sqrt{\lambda/2}}\right)\left(1-e^{-a\sqrt{2\lambda}}\right)}{\sqrt{2\lambda}\left(1+e^{-a\sqrt{2\lambda}}\right)^2}.$$

- Calculons maintenant le temps moyen de sortie d'un intervalle $]0,a[$ pour une particule de Wiener initialisée en $a/2$. (on sait déjà que $m(a, a/2) = c_1\, a^2/4$).

$$m(a, a/2) = \int_0^\infty t\, p(a/2, t)\, dt = \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty t\, e^{-\lambda t} p(a/2, t)\, dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{a\, e^{-a\sqrt{\lambda/2}}\left(1-e^{-a\sqrt{2\lambda}}\right)}{\sqrt{2\lambda}\left(1+e^{-a\sqrt{2\lambda}}\right)^2}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{a\,e^{-a\sqrt{\lambda/2}}}{\left(1+e^{-a\sqrt{2\lambda}}\right)^2} \cdot \lim_{\lambda\to 0} \frac{1-e^{-a\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\lambda}}$$

$$= a/4 \lim_{\lambda\to 0} \frac{1-e^{-a\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\lambda}}$$

posant $x = \sqrt{2\lambda}$.

on applique l'Hospital (avec $'$ = dérivée par rapport à x.)

d'où $\displaystyle m(a, a/2) = a/4 \frac{\lim_{x\to 0}(1-e^{-ax})'}{\lim_{x\to 0} x'} = a/4 \cdot a = a^2/4.$

d'où $c_1 = 1$.

Calculons à présent la constante C_2 pour cela :

. Voyons que le temps moyen de sortie d'une particule de Wiener sur le plan, partant du centre d'un cercle de rayon r, (sortie hors de ce cercle), est égale à $r^2/2$, et donc que $C_2 = 1/2$.

. Soit τ_1, le temps de première visite de X_t au cercle $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ et

. Soit τ_2, le temps de première visite de X_t à une des 2 droites $x_1 = \pm r$.

alors $E_0 \tau_1 = E_0 \tau_2 - E_0(\tau_2 - \tau_1) = E_0 \tau_2 - E_\mu \tau_2$.

avec μ distribution uniforme sur le cercle $x_1^2 + x_2^2 = r^2$

On peut ramener ainsi l'étude de la trajectoire plane à l'étude de sa projection sur l'axe x_1.

car $\{\tau$ est temps d'atteinte de la trajectoire plane à la droite $\pm r = x_1\} \equiv \{\tau$ est temps de sortie de la projection de la trajectoire sur x_1, du segment de droite $]-r, +r[\}$

donc $E_0 \tau_2 = 2 \cdot \frac{r^2}{2} = r^2$.

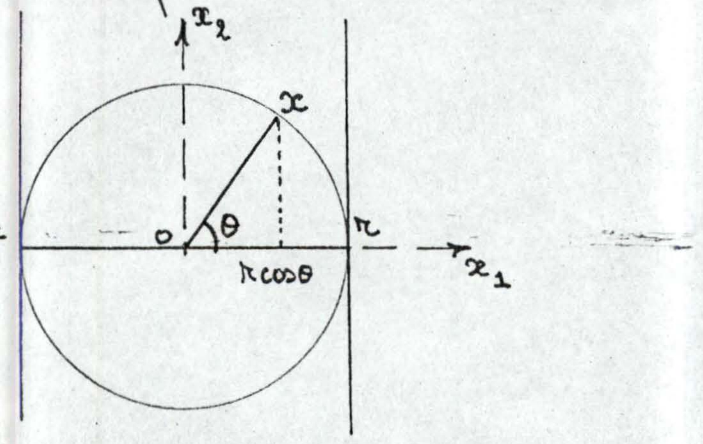
Calculons maintenant : $E_\mu \tau_2$.

Or, nous savons (formule 5 page 42 du livre de référence) que :

$$E_\mu \tau_2 = \int_C E_x \tau_2 \, \mu(dx)$$

$E_x \tau_2$ est donc le temps moyen, partant de x point du cercle pour arriver sur $x_1 = \pm r$, est équivalent au temps moyen, partant de la projection de x sur la droite x_1, d'arrivée aux extrémités $\pm r$ du segment supporté par x_1.

On peut donc utiliser la formule unidimensionnelle en l'adaptant



puisque $E_x \tau = x(a-x)$ dans le cas d'un segment $(0,a)$

donc ici

$E_x \tau = (r + r\cos\theta)(r - r\cos\theta)$

Donc $$E_\mu \tau_2 = \int_0^{2\pi} (r + r\cos\theta)(r - r\cos\theta) \frac{1}{2\pi} \, d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = r^2/2.$$

d'où $$E_0 \tau_1 = r^2 - r^2/2 = r^2/2 = c_2 r^2$$

donc $c_2 = 1/2$.

On démontrerait de même que $c_\ell = 1/\ell$.

. Intéressons nous maintenant à la non dérivabilité de la trajectoire de Wiener.

Nous nous limiterons à la discussion de processus de Wiener sur une droite.

. Lemme préliminaire: Faisons correspondre à chaque $t \in]0,T[$ $(T>0)$, un intervalle Γ_t sur l'axe des x.

Si

$$P_0 \{ X_t \in \Gamma_t \} \geq \varepsilon > 0 \quad (*) \quad \text{pour} \quad 0<t<T.$$

alors pour une trajectoire X_t partant de zéro, la probabilité est un qu'il existe des temps t arbitrairement proches de zéro tels que $X_t \in \Gamma_t$.

On doit donc démontrer que $R \equiv P_0 [\forall n, \exists\ 0<t<1/n, X_t \in \Gamma_t] = 1$

Si on avait pas $R=1$ la loi du tout ou rien donnerait $R=0$.

Soit. $A_i \equiv \{ \exists t, 0<t \leq 1/i, X_t \in \Gamma_t \}$

d'où

on aurait : $R = P_0 [A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots] = P_0 (\bigcap_i A_i) = 0$

donc $P_0(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

d'où alors $P_0 [\exists t, 0<t \leq 1/n. X_t \in \Gamma_t] \longrightarrow 0.$

Donc

$$\forall \varepsilon>0\ \exists p \text{ tq } P_0 [\exists t, 0<t<1/p, X_t \in \Gamma_t] < \varepsilon.$$

Ce qui nierait l'hypothèse $*$

Donc la thèse est vraie.

. Nous pouvons montrer maintenant que le rapport $\frac{X_t - X_0}{t}$ à une probabilité 1 de prendre toutes les valeurs réelles dans tout intervalle $0 < t < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Nous en déduirons que $\lim_{t \to 0} \frac{X_t - X_0}{t}$ n'existe pas.

Pour ce faire, appliquons le lemme aux intervalles $\Gamma_t =]\sqrt{t}, +\infty[$ et $\Gamma_t =]-\infty, -\sqrt{t}[$.

Remarquons d'abord que $P_0\left[\frac{X_t - X_0}{t}\right] = P_0\left[\frac{X_t}{t}\right]$

Les hypothèses du lemme précédent étant satisfaites on en déduit que

$$P_0\left[\forall \delta, \exists t \in (0, \delta), \frac{X_t}{t} > \frac{\sqrt{t}}{t}\right] = 1$$

et $$P_0\left[\forall \delta, \exists t' \in (0, \delta), \frac{X_{t'}}{t'} < -\frac{\sqrt{t'}}{t'}\right] = 1$$

On voit donc qu'avec probabilité 1.

$\forall \delta$ $\quad \frac{X_t}{t} > \frac{\sqrt{t}}{t}$ c-à-d $\frac{X_t - X_0}{t} > \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $0 < t < \delta$

$\forall \delta$ et $\frac{X_t}{t} < -\frac{\sqrt{t}}{t}$ c-à-d $\frac{X_t - X_0}{t} < -\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $0 < t < \delta$

Donc $\frac{X_t - X_0}{t}$ a une probabilité 1 de prendre toutes les valeurs réelles dans tout intervalle $0 < t < \delta$

Condition nécessaire et suffisante de régularité d'un point frontière

Nous avons vu dans les rappels théoriques que

$P_a\{\tau = 0\} = 1$ (47) est une condition suffisante de régularité du point frontière a.

Et que

$\lim\limits_{\substack{x \in G \\ x \to a}} E_x\, \varphi(X_\tau) = \varphi(a)$. (48) est une

condition nécessaire de régularité du point frontière a.
$\forall$ fonction φ bornée, continue en a et définie sur la frontière du domaine.

Nous allons démontrer que ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes, pour cela nous démontrerons que $(48) \Rightarrow (47)$.

Nous considérerons l'espace à 2 dimensions dans le cadre de nos démonstrations mais elles peuvent aisément s'étendre à des espaces de dimension quelconque.

Le schéma adopté sera la démonstration par l'absurde, supposant que $P_a\{\tau = 0\} < 1$ nous verrons que (48) peut être mis en défaut.

- Une trajectoire X_t, partant d'un point a, a une probabilité unité de ne jamais revenir en a (pour $t>0$)

Soit un domaine circulaire K circonscrivant a, de circonférence C (τ : temps d'entrée dans C.)

$\forall t \neq 0$ par propriété de Markov.
$> t_0$

$$(1) = P_a \{X_t = a\} = P_a \{X_\tau \in C\} P_\mu \{X_s = a\}$$

puisque $\exists t_0$ tq la trajectoire sorte de K avant t_0.

$$(1) = P_a \{X_\tau \in C\} \int_C P_x \{X_s = a\} \mu(ds).$$

Or on sait par la théorie que $P_x \{X_s = a\} = 0 ; x \neq a$
d'où

$\forall t > t_0 \quad P_a \{X_t = a\} = 0$ on a donc une probabilité 1 de ne pas revenir en a.

- Si $P_a \{\tau = 0\} = 0$, on peut trouver un domaine circulaire K de rayon >0, centré en a tel que
$$P_a \{X_\tau \in K\} < 1/2.$$

$P_a \{X_\tau \in K\}$ est a priori qcq >0 soit égale à d.
Faisons tendre le rayon de K vers 0, en passant à la limite le domaine K se réduit au point a.

d'où $P_a \{X_\tau \in K\} \longrightarrow P_a \{X_\tau = a\} = 0$ (par précédent)

D'où en diminuant continuement le rayon
$$\exists r_0 > 0 \text{ tel que } \quad P_a \{X_\tau \in K_{r_0}\} < 1/2.$$

· Dans les conditions du problème précédent, on montre que sur toute circonférence C inscrite dans le domaine K et circonscrivant le point a, il existe un point x tel que

$$P_x \{X_\zeta \in K\} < 1/2 .$$

Remarquons que l'évènement

$\{$Partant de a, sortir de G par K pour la 1ère fois après $0\}$

inclut $\{$Partant de a, toucher $C\} \cap \{$repartant de C sortir de G par K pour la 1ère fois$\}$.

D'où par propriété de Markov.

$$P_a \{X_\zeta \in K\} \geq \int_C P_x \{X_\zeta \in K\} \mu(dx).$$

Donc $1/2 > P_a \{X_\zeta \in K\} \geq \int_C P_x \{X_\zeta \in K\} \mu(dx)$.

μ étant une distribution uniforme. et $P_x \{X_\zeta \in K\} \geq 0$

$$\exists x_0 \in C \text{ tq } P_{x_0} \{X_\zeta \in K\} < 1/2 .$$

· Nous terminons la démonstration en montrant que si $P_a \{\zeta = 0\} < 1$, alors il existe une fonction continue et bornée φ telle que (48) soit violée.

Puisque $P_a \{\zeta = 0\} < 1 \Rightarrow P_a \{\zeta = 0\} = 0$ (tout ou rien)

D'où $\exists K$ cercle de rayon r circonscrivant a t.q $\forall C$ inclus dans K circonscrivant a, $\exists x \in C$ tq $P_x \{X_\zeta \in K\} < 1/2$.

Choisissons une fonction φ
telle que $\varphi = 0$ hors de K
$\varphi \leq 1$ dans K
$\varphi = 1$ sur a
cette fonction étant continue, elle est de plus bornée.
et $\varphi(a) = 1$.

Voyons que $\lim_{\substack{x \in G \\ x \to a}} E_x \varphi(X_\tau) \neq \varphi(a) = 1$

Quelle que soit C $\exists x \in C$ tq $P_x \{X_\tau \in K\} < 1/2$.
choisissons ce x
$E_x \varphi(X_\tau) = E_x \varphi(X_\tau) 1_K (X_\tau) \leq P_x \{X_\tau \in K\} < 1/2$.

Aussi petite que soit la circonférence C circonscrivant a et incluse dans K, $\exists x \in C$ tq $E_x \varphi(X_\tau) < 1/2$.
d'où $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} E_x \varphi(X_\tau) < 1/2$ donc $\neq \varphi(a)$.

d'où $P_a \{\tau = 0\} < 1 \iff \neg P_a \{\tau = 0\} = 1$
$\Rightarrow \neg\left(\lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} E_x \varphi(X_\tau) = \varphi(a)\right)$.

d'où $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} E_x \varphi(X_\tau) = \varphi(a) \Rightarrow P_a \{\tau = 0\} = 1$
III III

C.N. régularité de a $\Rightarrow$ C.S. régularité de a

Donc ces 2 conditions sont nécessaires et suffisantes à la régularité du point frontière a du domaine G

. Pour terminer, nous aborderons le problème du temps moyen de sortie hors d'un domaine

$m(x)$ sera le temps moyen de sortie hors d'un domaine plan G d'une trajectoire initialisée en un point x de ce domaine

a sera un point frontière régulier de ce domaine G.

. Voyons que si G est borné, la fonction $m(x)$ le sera aussi.

Il suffit pour cela de centrer en x, un cercle circonscrivant entièrement G et qui sera de rayon ρ_x fini.

G borné $\Rightarrow \forall x,\ \rho_x \leq \sup\limits_{\substack{x \in G \\ y \in G}} |x-y| = \delta$

en vertu de la valeur du temps moyen de sortie d'un cercle en partant de son centre $m(x) \leq \rho_x^2/2$ puisque le cercle inclut G.

d'où $m(x) \leq \rho_x^2/2 \leq \delta^2/2 < \infty \quad \forall x$

Donc $m(x)$ est aussi borné.

. Montrons maintenant que si G est borné, alors $m(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$

Soit τ le premier temps de sortie de G.

On sait que $\forall x \in G$ et $\forall \varepsilon > 0$, $P_x\{\tau > \varepsilon\} \underset{\text{si } x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$

De plus $m(x)$ est borné puisque G l'est

Or $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x$: $m(x) \leq \varepsilon + P_x\{\tau > \varepsilon\} \sup\limits_x m(x)$

et comme $\sup\limits_x m(x)\ \exists$

$\forall \varepsilon \quad m(x) \leq \varepsilon$ lorsque $x \rightarrow 0$ d'où $m(x) \underset{\text{si } x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$

I. Le temps moyen de sortie d'un domaine circulaire K est égal au demi produit de la distance minimum par la distance maximum du point initial $x \in K$ à la circonférence du cercle K de rayon r.

Soit un point x qcq $\in K$.

Soit $m(0,r)$ le temps moyen de sortie du cercle de rayon r d'une particule initialisée en 0

Soit $m(0,x)$ le temps moyen de sortie du cercle de rayon x d'une particule initialisée en 0.

alors $m(0,r) = r^2/2$; $m(0,x) = x^2/2$.

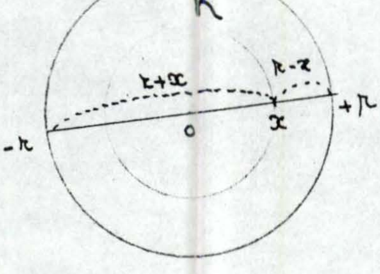
On voit que $m(0,r) = m(0,x) + \int_C m(x)\mu(d\theta)$

$$= m(0,x) + 1/2\pi \int_0^{2\pi} m(x)\, d\theta.$$

car la distribution de la position de la particule sur la circonférence au temps de sortie de celle-ci est uniforme

d'où $m(0,r) = m(0,x) + m(x)$.

d'où $m(x) = \dfrac{r^2 - x^2}{2} = 1/2\,(r-x)(r+x)$.



Namur, juin 1975