Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

# Etude de la symétrie dans la méthode de Hale-Cesari: systèmes de Lyapunov. Systèmes proches des systèmes de Lyapunov

Cantineau, Arlette

*Award date:*
1975

*Awarding institution:*
Universite de Namur

Link to publication

**General rights**
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

**Take down policy**
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 28. Apr. 2024

# ETUDE DE LA SYMETRIE DANS LA METHODE DE HALE-CESARI.

## SYSTEMES DE LYAPUNOV.

## SYSTEMES PROCHES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

Année académique 1974-1975.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Directeur de mémoire:
Mr Jacques HENRARD.

CANTINEAU Arlette.

FMB1/1975/9.
MATH

BIBLIOTHEQUE
NAMUR
F.N.D.P.
204959
LBS 3434858

# INTRODUCTION.

Pour beaucoup de phénomènes physiques, le modèle mathématique d'un système linéaire d'équations différentielles est seulement une image grossière de la réalité car il ne tient pas compte des diverses forces pouvant agir sur le système physique. Bien que ces forces soient parfois faibles, elles ne sont cependant généralement pas négligeables. Ainsi s'est avérée utile l'étude des systèmes presque linéaires.

Divers mathématiciens se sont intéressés à de tels systèmes (existence des solutions, calcul de ces dernières lorsqu'elles existent). Citons parmi d'autres: POINCARE, KRYLOV, BOGOLUBOV, METROPOLSKY, MALKIN, CESARI, HALE,...

Dans son livre "Ordinary Differential Equations", J.K.HALE s'intéresse notamment aux systèmes périodiques presque linéaires et en recherche les solutions périodiques en appliquant la théorie de CESARI. De plus, il aborde le cas où ces systèmes possèdent une certaine symétrie ou admettent des intégrales premières et recherche l'influence de ces propriétés sur les solutions.

C'est de ces deux derniers sujets que traite le présent mémoire. La première partie est consacrée à l'étude de la symétrie dans la méthode de HALE-CESARI, la seconde consiste en l'étude des systèmes de LYAPUNOV et des systèmes proches de ceux-ci qui admettent une intégrale première.

Dans la première partie de ce travail, au chapitre I, nous présenterons brièvement les résultats de HALE concernant la recherche des solutions périodiques des systèmes périodiques faiblement non linéaires.
Dans le chapitre 2, nous étudierons un type de symétrie de systèmes d'équations différentielles: la propriété (E) par rapport à une matrice S. Nous en considérerons l'incidence sur les solutions de ces systèmes. A ce niveau nous serons amenés à expliciter la méthode itérative de résolution de systèmes périodiques faiblement non linéaires indiquée par HALE. Ensuite nous définirons ce qu'est une fonction symétrique par rapport à une matrice S et démontrerons diverses propriétés de ces fonctions. Enfin nous étudierons l'incidence de cette symétrie sur les équations de bifurcation.

Au chapitre 3, nous illustrerons la méthode de HALE-CESARI et nos résultats, en appliquant cette méthode à une équation particulière.
Au chapitre 4, après avoir vu comment un système périodique faiblement non linéaire peut être ramené à un système faiblement non linéaire à coefficients constants, nous nous demanderons si la propriété (E) du système est altérée par cette transformation.
Enfin au chapitre 5, nous présenterons les résultats de HALE concernant les systèmes faiblement non linéaires qui admettent des intégrales premières. HALE propose alors un exercice dont nous reproduirons l'énoncé, il s'agit de l'étude d'un système de LYAPUNOV.
La résolution de cet exercice sera l'un des objets de la deuxième partie de ce travail.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous définirons d'abord ce qu'est un système de LYAPUNOV, puis nous étudierons les solutions périodiques de ces systèmes, ensuite nous indiquerons comment construire pratiquement ces solutions et nous illustrerons par un exemple. Enfin, nous démontrerons quelques propriétés de ces solutions périodiques.

Dans le second chapitre, nous nous intéresserons aux systèmes proches des systèmes de LYAPUNOV. Nous étudierons successivement: les solutions génératrices de ces systèmes, la solution périodique correspondant à la solution génératrice triviale, les solutions résonnantes et les solutions périodiques correspondant aux solutions périodiques génératrices non triviales.

---

Remarque:
Une notation couramment employée dans ce travail demande à être précisée.
Nous noterons $\phi(.), f(., x(.), \varepsilon)$ au lieu de $\phi(t), f(t, x(t), \varepsilon)$ lorsqu'il est important de ne pas confondre des fonctions dépendant d'une variable t avec leurs valeurs pour une valeur fixée de la variable.

---

# PREMIERE PARTIE.

## ETUDE DE LA SYMETRIE

## DANS LA METHODE DE HALE-CESARI.

CHAPITRE I.

## METHODE DE HALE-CESARI

Hale présente une méthode pour déterminer des solutions périodiques du système

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon f(t,x) \qquad (I.1)$$

où $f(t,x)$ et $x$ sont des n-vecteurs appartenant à $\mathbb{C}^n$

et où $B(t + T) = B(t) \quad \forall t$

$f(t + T, x) = f(t,x) \quad \forall t$

$\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$, $f(t,x)$ continues $\forall t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{C}^n$

$B$ est une matrice $n \times n$

Quelques définitions:

$\phi(t)$ est une matrice $n \times p$ ( $p \leq n$) telle que les colonnes de cette matrice forment une base pour les solutions T- périodiques du système

$$\dot{x} = B(t)x \qquad (I.2)$$

$\psi(t)$ est une matrice $p \times n$ ($p \leq n$) telle que les lignes de cette matrice forment une base pour les solutions T- périodiques du système adjoint

$$\dot{y} = -yB(t) \qquad (I.3)$$

A partir de $\phi$ et $\psi$, deux autres matrices $p \times p$ sont définies:

$$C \overset{\text{déf}}{=} \int_0^T \phi'(t) \; \phi(t)\, dt \qquad (I.4)$$

$$D \overset{\text{déf}}{=} \int_0^T \psi(t) \; \psi'(t)\, dt$$

où ' signifie transposée.

Ces deux matrices sont non singulières, constantes.

$\mathcal{P}_T$ désigne l'espace des fonctions n- vectorielles, T- périodiques continues

On peut définir deux opérateurs de projection P, Q sur $\mathcal{P}_T$ comme suit:

$$P f \overset{\text{déf}}{\equiv} \phi(.) \; C^{-1} \int_0^T \phi'(t)\, f(t)\, dt \qquad (I.5)$$

$$Q f \overset{\text{déf}}{\equiv} \psi'(.) \; D^{-1} \int_0^T \psi(t)\, f(t)\, dt$$

Notons que P envoie $\mathcal{P}_T$ sur le sous-espace de $\mathcal{P}_T$ engendré par les solutions T-périodiques de (I.2) et Q envoie $\mathcal{P}_T$ sur le sous-espace de $\mathcal{P}_T$ engendré par les transposées des solutions T- périodiques de (I.3).

Nous allons maintenant énoncer sans en donner les démonstrations, les lemmes, corollaire, théorème indiqués par Hale.
Le lecteur désireux de prendre connaissance de ces démonstrations les trouvera dans le livre "Ordinary Differential Equations" de Hale.

Lemme I:

- Si f est un élément donné de $\mathcal{P}_T$,

  alors une condition nécessaire et suffisante pour que le système

  $$\dot{x} = B(t)\,x + f(t) \tag{I.6}$$

  ait une solution T- périodique est que Qf = o.

- Si Qf = 0 , alors il y a une unique solution T- périodique $\mathcal{K}f$ telle que $P\mathcal{K}f = 0$.

- $\mathcal{K}(I - Q)$ est un opérateur linéaire continu envoyant $\mathcal{P}_T$ dans $\mathcal{P}_T$.

---

Corollaire I.

Si $f \in \mathcal{P}_T$

et a est un p- vecteur donné,

alors l'unique solution de

$$\dot{x} = B(t)\,x + (I-Q)\,f$$

avec $Px = \phi(.)\,a$

est donnée par $\phi a + \mathcal{K}(I - Q)\,f.$

---

Lemme 2:

Si les opérateurs P ,Q et $\mathcal{K}$ sont définis comme en (I.5) et dans le lemme I alors le système (I.I) a une solution T- périodique x si et seulement si x satisfait le système d'équations:

$$\text{(a)}\quad x = P\,x + \varepsilon\,\mathcal{K}(I-Q)\,f(\cdot,x)$$

$$\text{(b)}\quad \varepsilon\,Q\,f(.,x) = 0 \tag{I.7}$$

---

Lemme 3.

- Pour tout réel $\alpha$ positif, il existe un réel $\varepsilon_0$ positif tel que pour tout p- vecteur a constant $|a| \leq \alpha$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ,
il existe une et une seule fonction $x^* = x^*(a,\varepsilon)$ qui satisfait

$$x^* = \phi a + \varepsilon\,\mathcal{K}(I-Q)\,f(.,x^*) \tag{I.8}$$

-

- $x^*(a,\varepsilon)$ a une dérivée première continue par rapport à $a, \varepsilon$

  $x^*(a,o) = a$

- S'il existe un p-vecteur $a = a(\varepsilon)$ avec $/a(\varepsilon)/ \leq \alpha \quad 0 \leq /\varepsilon/ \leq \varepsilon_0$

$$\text{et } G(a,\varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{\equiv} Qf(\cdot, x^*(a,\varepsilon)) = 0 \qquad (I.9)$$

  alors $x^*(a,\varepsilon)$ est une solution T- périodique de (I.I)

- Inversément, si (I.I) a une solution T- périodique $\bar{x}(\varepsilon)$ qui est continue en $\varepsilon$ et est telle que $P\,\bar{x}(\varepsilon) = \phi a(\varepsilon)$

  $/a(\varepsilon)/ \leq \alpha, \ 0 \leq /\varepsilon/ \leq \varepsilon_0$

  alors $\bar{x}(\varepsilon) = x^*(a(\varepsilon),\varepsilon)$ où $x^*(a,\varepsilon)$ est la fonction définie plus haut

  $a(\varepsilon)$ satisfait (I.9) pour $0 < /\varepsilon/ \leq \varepsilon_0$

---

Pour les applications, il convient d'observer que d'après I.5

$$G(a,\varepsilon) = 0$$

est équivalent à

$$F(a,\varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{\equiv} \int_0^T \varphi(t)\, f(t, x^*(a,\varepsilon)(t))\, dt = 0. \qquad (I.IO)$$

Les équations (I.9) ou (I.IO) sont appelées les <u>équations de détermination</u> ou les <u>équations de bifurcation</u> de (I.I).

---

<u>Théorème I.</u>

Supposons
- $x^*(a,\varepsilon)$ défini comme dans le lemme 3 (I.8)
- $F(a,\varepsilon) = \int_0^T \varphi(t)\, f(t, x^*(a,\varepsilon)(t))\, dt$

S'il existe un p- vecteur $a_0$ tel que

$$F(a_0, 0) = 0$$

$$\text{dét}\left[\frac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\right]_{\substack{a = a_0 \\ \varepsilon = \varepsilon_0}} \neq 0 \qquad (I.II)$$

alors il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour $0 \leq /\varepsilon/ \leq \varepsilon_1$

il existe une solution T- périodique $x^*(\varepsilon)$ de I.I

avec $x^*(0) = \phi a$

$x^*(\varepsilon)$ est continûment différentiable en $\varepsilon$ .

---

Ce théorème est une application du théorème des fonctions implicites. S'il existe un p- vecteur $a_o$ qui vérifie les conditions (I.II) alors on peut trouver un p- vecteur $a = \overset{o}{a}(\varepsilon)$ avec $a(0) = a_o$ qui vérifie la condition (I.9) ou (I.IO) c'est-à-dire $F(a,\varepsilon) = o$ et donc d'après le lemme 3 le système (I.I) admet une solution T- périodique de la forme (I.8).

CHAPITRE 2.

## ETUDE DE LA SYMETRIE DANS LA METHODE DE HALE-CESARI

Hale considère le cas où le système d'équations différentielles possède une certaine symétrie et regarde l'incidence de cette propriété sur la méthode de recherche des solutions périodiques qu'il a développée ainsi que sur les solutions elles-mêmes. A sa suite nous nous sommes intéressés à ce problème. Dans le présent chapitre, nous étendrons certains résultats de Hale à un cas plus général et démontrerons de nouvelles propriétés.

La définition et le lemme I (Ière partie) du paragraphe II sont directement issus du travail de Hale.

### I. UNE PROPRIETE DE SYMETRIE DE SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Définition:

Le système $\dot{x} = g(t,x)$ où $x$ et $g(t,x)$ sont des n-vecteurs a la propriété (E) par rapport à une matrice S

$\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$

il existe une matrice S, n x n, constante, symétrique telle que: $S^2 = I$

$$Sg(-t,Sx(t)) = -g\big(t,x(t)\big) \quad \text{pour tout } t \text{ et } x \tag{2.I}$$

### II. PROPRIETES DES SOLUTIONS PERIODIQUES D'UN SYSTEME AYANT LA PROPRIETE (E) PAR RAPPORT A UNE MATRICE S .

Lemme I.

Si $x(t)$ est une solution d'un système

$$\dot{x} = g(t,x)$$

où $x$ et $g(t,x)$ sont des n-vecteurs (2.2)

et qui a la propriété (E) par rapport à une matrice S alors $S\,x(-t)$ en est également une solution.

Inversément si $S\,x(-t)$ est solution de ce système, $x(t)$ en est également solution.

Démonstration:

$x(t)$ est solution $\Leftrightarrow \dot{x}(t) = g(t,x(t))$

$\Leftrightarrow -\dot{x}(-t) = g(-t,x(-t))$ par le changement de variable $t \rightsquigarrow -t$

$\Leftrightarrow S\,\dot{x}(-t) = -S\,g(-t,x(-t))$ en multipliant à gauche par la matrice $-S$

$\Leftrightarrow S\,\dot{x}(-t) = g(t,Sx(-t))$ par la propriété (E)

$\Leftrightarrow [S\,\dot{x}(-t)] = g(t,S\,x(-t))$ où $[\,\dot{}\,]$ indique que la dérivée porte sur le produit

$\Leftrightarrow S\,x(-t)$ est solution du système (2.2).

cqfd

Corollaire I.

Si $x(t)$ est une solution T-périodique d'un système

$$\dot{x} = g(t,x)$$

où $x$ et $g(t,x)$ sont des n-vecteurs

et qui a la propriété (E) par rapport à une matrice $S$
alors $Sx(-t)$ en est une solution T-périodique.

Inversément si $Sx(-t)$ est une solution T-périodique de ce système, $x(t)$ en est également une solution T-périodique.

Démonstration:

Il suffit de voir que

$$x(t) = x(t+T) \Leftrightarrow x(-t) = x(-(t+T))$$
$$\Leftrightarrow Sx(-t) = Sx(-(t+T))$$

et d'appliquer le lemme I.

cqfd

On peut résumer le lemme I et le corollaire I en disant:

$x(t)$ est une solution (T-périodique) d'un système

$$\dot{x} = g(t,x)$$

où $x$ et $g(t,x)$ sont des n-vecteurs

et qui a la propriété (E) par rapport à une matrice $S$

si et seulement si

"sa symétrique par rapport à la matrice S" $Sx(-t)$ en est également une solution (T-périodique).

Considérons à présent le système

$$\dot{x} = B(t)\,x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$$

où • x est un n-vecteur appartenant à $\mathbb{C}^n$ $\quad x = x(t)$ (2.3)

• $f: \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est continue $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x$ $\mathbb{C}^n$
T-périodique en t: $f(t,x) = f(t+T,x)$

• $\varepsilon$ un petit paramètre

• $B(t) = B(t+T)$ matrice n x n

• $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ continue $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$

Ce système est bien de la forme $\dot{x} = g(t,x)$ avec x et g(t,x) n-vecteurs aussi pouvons-nous exprimer la définition précédente pour ce système-ci. (même si on n'a ni la continuité ni la périodicité de B et f).

Le système $\quad \dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$
a la propriété (E) par rapport à une matrice S

$\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ il existe une matrice S n x n , constante, symétrique
telle que $S^2 = I$

$$S\left[B(-t)S\,x(t) + \varepsilon f(-t,Sx(t),\varepsilon)\right] = -\left[B(t)x(t) + \varepsilon f(t,x(t),\varepsilon)\right] \quad \forall t \text{ et } \forall x$$

c.à.d. telle que $\begin{cases} S^2 = I \\ SB(-t)Sx(t) = -B(t)x(t) \\ Sf(-t,S\,x\,(t),\varepsilon) = -f(t,x(t),\varepsilon) \end{cases}$

Nous en déduisons:

<u>Lemme 2.</u>

Le système $\quad \dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$
a la propriété (E) par rapport à une matrice S .

$\Longleftrightarrow$

le système $\dot{x} = B(t)x$

et le système $\dot{x} = \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$

ont la propriété (E) par rapport à cette matrice S.

Considérons pour l'instant la partie linéaire du système (2.3)

$$\dot{x} = B(t)x \qquad (2.4)$$

Soient $\phi(t)$, $\psi(t)$ les matrices définies dans la méthode de Hale-Césari c'est-à-dire

$\phi(t)$: une matrice n x p ($p \leq n$) dont les colonnes forment une base de l'ensemble des solutions T-périodiques de (2.4)

$\psi(t)$: une matrice $p \times n$ ( $p \leq n$) dont les lignes forment une base de l'ensemble des solutions T-périodiques du système adjoint de (2.4) $\dot{y} = -yB(t)$

(Si nous supposons que (2.4) et son adjoitt admettent des solutions T-périodiques autres que la solution triviale sinon ces matrices n'existent pas).

Le système (2.4) ayant également la propriété (E) par rapport à la matrice S (lemme 2), nous pouvons lui appliquer le corollaire I.

Et donc nous pouvons en déduire que

$S\,\phi(-t)$ est une matrice dont les colonnes sont des solutions T-périodiques de (2.4).

Savons-nous que $S\,\phi(-t)$ est une base des solutions T-périodiques de (2.4) ?

(Rem.: nous nous permettrons l'abus de langage suivant:
nous dirons " $\phi(t)$ est une base des solutions T-périodiques de (2.4)" au lieu de " $\phi(t)$ est une matrice dont les colonnes forment une base pour l'espace des solutions T-périodiques de (2.4)"; ceci afin de ne pas alourdir le texte.)

Lemme 3.

> Si $\dot{x} = B(t)x$ a la propriété (E) par rapport à une matrice S
> alors $\phi(t)$ est une base des solutions T-périodiques de ce système
> $\Leftrightarrow S\,\phi(-t)$ est une bade des solutions T-périodiques de ce système.

Démonstration:

Une base d'un espace vectoriel étant une partie libre et génératrice de cet espace, montrons que

- $\phi(t)$ partie libre $\Leftrightarrow S\,\phi(-t)$ partie libre (nouvel abus de langage)

$$\phi(t) \text{ partie libre} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \phi_i(t) = 0 \;\forall t \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\forall i = 1,\dots,p\right]$$

$$\phi_i(t) = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } \phi(t)$$

$$\text{or } \sum_i \alpha_i\, \phi_i(t) = 0 \;\forall t \Leftrightarrow \sum_i \alpha_i\, \phi_i(-t) = 0 \;\forall t$$

$$\Leftrightarrow S \sum_i \alpha_i\, \phi_i(-t) = 0 \;\forall t$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \alpha_i\, S\,\phi_i(-t) = 0 \;\forall t$$

$$\text{donc } \phi(t) \text{ partie libre} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, S\,\phi_i(-t) = 0 \;\forall t \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\forall i = 1,\dots,p\right]$$

$$\Leftrightarrow S\,\phi(-t) \text{ partie libre.}$$

- En nous servant des théorèmes d'algèbre des espaces vectoriels
  - Si un espace vectoriel a une base de dimension p alors toute autre base est de dimension p.
  - Si une partie de p éléments d'un e.v. de dimension p est libre, elle est aussi génératrice,

nous pouvons en déduire la thèse.

cqfd.

---

Donc si $\phi(t)$ est une base, $S\phi(-t)$ est une autre base dont les colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes de $\phi(t)$. Par conséquent:

$$\boxed{S\phi(-t) = \phi(t)\, N}$$

où $\underline{N}$ est une matrice <u>constante</u>, <u>p x p</u>, <u>non singulière</u>.

---

Nous avons l'analogue de tout ceci pour le système adjoint c'est-à-dire pour le système

$$\dot{y} = -yB(t) \tag{2.6}$$

En effet:

<u>Lemme I'</u>

> Si $\dot{x} = B(t)x$ a la propriété (E) par rapport à S
> alors $y(t)$ est solution du système (2.6)
> $\Longleftrightarrow$ $y(-t)S$ est solution du système (2.6)

<u>Démonstration</u>:

$y(t)$ est un vecteur ligne

$y(t)$ est solution de (2.6) $\Longleftrightarrow \dot{y}(t) = -y(t)\,B(t)$

$\Longleftrightarrow -\dot{y}(-t) = -\,y(-t)\,B(-t)$ en changeant de variable $t \rightsquigarrow -t$

$\Longleftrightarrow \dot{y}(-t)S = y(-t)\,B(-t)S$ en multipliant à droite par la matrice $-S$

$\Longleftrightarrow \dot{y}(-t)S = -\,y(-t)\,SB(t)$ par la propriété (E)

$\Longleftrightarrow \left[y(\dot{-t})S\right] = -\,y(-t)\;S\;B(t)$ où $[\dot{\ }]$ indique que la dérivée porte sur le produit.

$\Longleftrightarrow y(-t)S$ est solution de (2.6)

Corollaire I'

| |
|---|
| Si $\dot{x} = B(t)x$ à la propriété (E) par rapport à la matrice S |
| alors y(t) est solution T-périodique du système (2.6) |
| $\Leftrightarrow$ y(-t)S est solution T-périodique du système (2.6). |

Démonstration analogue à celle du corollaire I.

Lemme 3'

| |
|---|
| Si $\dot{x} = B(t)x$ a la propriété (E) par rapport à S |
| $\Psi(t)$ est une base des solutions T-périodiques de (2.6) |
| $\Leftrightarrow$ $\Psi(-t)S$ est une base des solutions T-périodiques de (2.6) |

Démonstration analogue à celle du lemme 3 mais ici les $\Psi_i(t)$ désigneront les lignes de $\Psi(t)$.

Par conséquent:

$$\boxed{\Psi(-t)S = M\Psi(t)} \tag{2.7}$$

où M est une matrice constante, p x p, non singulière.

---

Nous allons continuer à exploiter les définitions de J.K. Hale reprises au chapitre I. Rappelons-les:

$$C \overset{\text{déf}}{=\!=} \int_0^T \Phi'(u)\ \Phi(u)\ du \tag{2.8}$$

$$D \overset{\text{déf}}{=\!=} \int_0^T \Psi(u)\ \Psi'(u)\ du \tag{2.9}$$

('signifie transposée)

sont des matrices p x p , constantes, non singulières.

Sur l'espace des fonctions n-vectorielles, T-périodiques en t, continues, nous définissons les opérateurs P, Q

$$P\,f \overset{\text{déf}}{=\!=} \Phi(.)\ C^{-1}\int_0^T \Phi'(u)\ f\ (u)\ du \tag{2.10}$$

$$Q\,f \overset{\text{déf}}{=\!=} \Psi'(.)\ D^{-1}\int_0^T \Psi(u)\ f\ (u)\ du \tag{2.11}$$

Démontrons à présent quelques égalités qui nous seront utiles par la suite.

- $S\phi(-t) = \phi(t)N \iff S\phi(-t)\,N = \phi(t)\,N^2$ car N est non singulière

$\iff S^2\phi(t) = \phi(t)\,N^2$ par (2.5)

$\iff \phi(t) = \phi(t)\,N^2$ car $S^2 = I$

$$\iff \boxed{\phi(t)N^{-1} = \phi(t)\,N} \qquad (2.I2)$$

- $\psi(-t)S = M\psi(t) \iff M\psi(-t)S = M^2\,\psi(t)$ car M non singulière

$\iff \psi(t) = M^2\,\psi(t)$ car(2.7) et $S^2 = I$

$$\iff \boxed{M^{-1}\psi(t) = M\psi(t)} \qquad (2.I3)$$

- $N'^{-1}C\,N^{-1} = \int_0^T N'^{-1}\phi'(u)\phi(u)\,N^{-1}\,du$ car (2.8) et $N^{-1}$ matrice constante

$= \int_0^T (\phi(u)\,N^{-1})'\,\phi(u)\,N^{-1}du$

$= \int_0^T (S\,\phi(-u))'\,S\phi(-u)\,du$ par (2.5) et (2.I2)

$= \int_0^T \phi'(-u)\,\phi(-u)\,du$ car S symétrique et $S^2 = I$

$= -\int_0^{-T} \phi'(s)\,\phi(s)\,ds$ $s = -u$

$= \int_{-T}^0 \phi'(s)\,\phi(s)\,ds$

$= \int_0^T \phi'(s)\,\phi(s)\,ds$ car $\phi'(s)$ et $\phi(s)$ T-périodique en s

$= C$

$\Rightarrow$ en multipliant à gauche les 2 membres par N' et en inversant:

$$\boxed{NC^{-1} = C^{-1}N'^{-1}} \qquad (2.I4)$$

- De manière analogue partant de $M^{-1}DM'^{-1}$ en employant (2.9),(2.7),(2.I3) au lieu de (2.8),(2.5),(2.I2) nous trouvons:

$$\boxed{M'D^{-1} = D^{-1}M^{-1}} \qquad (2.I5)$$

<u>Lemme 4.</u>

> Si $\dot{x} = B(t)\,x + \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ avec les conditions indiquées en (2.3)
> a la propriété (E) par rapport à une matrice S
> alors $S\left[Q\,f(\cdot, x(\cdot), \varepsilon)\right](-t) = -\left[Q\,f(\cdot, S\,x(-\cdot), \varepsilon)\right](t)$

Démonstration:

$$S\left[Q\, f(.,x(.),\varepsilon)\right](-t) = S\psi'(-t)\, D^{-1}\int_0^T \psi(u)\, f(u,\, x(u),\varepsilon)\, du \qquad \text{par } (2.11)$$

$$= \psi'(t)\, M'\, D^{-1}\int_0^T \psi(u)\, f(u,x(u),\varepsilon)\, du$$

parce que . S est symétrique ($S = S'$)

. A et B étant 2 matrices on a $(A.B)' = B'.A'$

. lemme 2, (2.7)

et donc $S\psi'(-t) = S'\psi'(-t) = (\psi(-t)\, S)' = (M\psi(t))' = \psi'(t)\, M'$

$$= \psi'(t)\, D^{-1}\int_0^T \psi(-u)\, S\, f(u,x(u),\varepsilon)\, du$$

par (2.15), (2.13),, (2.7)

$$= -\psi'(t)\, D^{-1}\int_0^T \psi(-u)\, f(-u,S\,x(u),\varepsilon)\, du \qquad \text{par le lemme 2}$$

$$= \psi'(t)\, D^{-1}\int_0^{-T} \psi(s)\, f(s,\, S\,x(-s),\varepsilon)\, ds \qquad s = -u$$

$$= -\psi'(t)\, D^{-1}\int_0^T \psi(s)\, f(s,\, S\,x(-s),\varepsilon)\, ds \qquad \text{car } \psi, f \text{ T-périodiques en s}$$

$$= -\left[Q\, f(.,Sx(-.),\varepsilon)\right](t) \qquad \text{par } (2.11)$$

cqfd.

Remarque:

Une démonstration analogue à celle-ci est donnée par Hale dans [3] mais f y est considérée comme une fonction de t uniquement, c'est-à-dire que l'on ne considère pas le système faiblement non linéaire (2.3) mais le système linéaire non homogène

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon\, f(t)$$

Méthode itérative de Hale-Cesari.

Avant de poursuivre la démonstration d'autres lemmes, il est indispensable d'expliciter la méthode de Hale-Cesari. Pour cela nous allons exprimer la signification de l'opérateur $\mathcal{H}$ et indiquer le mécanisme de cet algorithme de résolution de systèmes différentiels périodiques presque linéaires.

Il ressort de la théorie de J.K. Hale brièvement exposée au chapitre I qu'une solution T-périodique du système

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon) \quad \text{avec les conditions (2.3)} \tag{2.I6}$$

peut s'écrire sous la forme:

$$x = \phi a + \varepsilon \mathcal{H}(I-Q)\, f(.,x,\varepsilon) = x(a,\varepsilon) \tag{2.I7}$$

sous la condition $$G(a,\varepsilon) \overset{\text{déf}}{=\!=} Qf(.,x(a,\varepsilon),\varepsilon) = o \tag{2.I8}$$

ou encore $$F(a,\varepsilon) \overset{\text{déf}}{=\!=} \int_0^T \psi(t) f(t,x(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)\, dt = o \tag{2.I9}$$

condition équivalente à (2.I8)

et où a est un p-vecteur colonne constant , $a = a(\varepsilon)$

qui vérifie les conditions

$$\bullet\ F(a,\varepsilon)\Big|_{\substack{\varepsilon = o \\ a = a(o) = a_o}} = o \tag{2.20}$$

$$\bullet\ \text{dét}\left[\frac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\Bigg|_{\substack{\varepsilon = o \\ a = a(o) = a_o}}\right] \neq o \tag{2.2I}$$

<u>Remarque</u>: $F(a,\varepsilon) = o$ o = le p-vecteur nul.

Signification de l'opérateur $\mathcal{H}$ .

Hale affirme que si $Qg = o$, le système linéaire non homogène

$$\dot{x} = B(t)\, x + g(t) \tag{2.22}$$

admet une solution T-périodique $\mathcal{H}g$ telle que $P\mathcal{H}g = o$

Mais comment trouver $\mathcal{H}g$ ?

$\mathcal{H}g$ = l'image par (I-P) d'une solution $x^*$ T-périodique de (2.22) que nous pourrions indiquer $x^*(g)$

celle-ci sera de la forme:

$$x^*(t) = \phi(t)\, b + X(t,0)\, x_o + \int_0^t X(t,s)\, g(s)\, ds \tag{2.23}$$

où $\phi(t)$ est la matrice définie au chapitre I

$X(t,s)$ est une matrice principale de (2.22)

$x_o^*$ est solution de $(X^{-1}(T,0) - I)\, x_o = \int_0^T X^{-1}(s,o) g(s)\, ds$

afin que (2.23) soit T-périodique.

Quand on veut calculer la solution (2.I7) du système (2.I6), deux questions se posent:

- Comment trouver l'expression $\mathcal{H}(I - Q)\, f(\cdot,x,\varepsilon)$ qui figure dans (2.I7) et qui est une solution T-périodique du système presque linéaire (et non plus linéaire non homogène comme ci-dessus) :

$$\dot{x} = B(t)x + \varepsilon(I-Q)\, f\,(\cdot,x,\varepsilon) \quad ?$$

- Comment trouver le p-vecteur constant $a = a(\varepsilon)$ qui vérifie les conditions (2.20), (2.2I) et (2.I9) ?

La méthode de Hale-Cesari est une méthode itérative. On cherche le vecteur $a = a\,(\varepsilon)$ sous la forme d'une série de puissances de $\varepsilon$

$$a = a_o + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots\ldots$$

où les $a_i$ $i = o, 1, \ldots\ldots$ sont des p-vecteurs constants.

<u>$0^{e}$ itération:</u> $\overset{o}{x} = \phi(\cdot)\, a_o$ est une solution T-périodique du système linéaire

$$\dot{x} = B(t)\, x$$

$a_o$ doit satisfaire $\begin{cases} F\,(a_o, o) = o \\ \text{dét} \left[\dfrac{\partial F\,(a_o, o)}{\partial a_o}\right] \neq o \end{cases}$

<u>Ie itération:</u> $x^1 = \phi\,(\cdot)\,(a_o + \varepsilon a_1) + \varepsilon \mathcal{H}(I-Q)\, f(\cdot,x^o(\cdot),\varepsilon)$

où $a_1$ est à déterminer.

- on calcule d'abord:

$$\mathcal{H}\,(I-Q)\, f\,(\cdot,x^o(\cdot),\varepsilon) = (I-P)\, x^*\,((I-Q)f(\cdot,x^0,\varepsilon))$$

c'est-à-dire l'image par l'opérateur (I-Q) de la solution T-périodique.

$$x^{1*} = \phi(t)\, b_1 + X(t,o)\, x_o^{1*} + \int_o^t X\,(t,s)\left[(I-Q)\, f\,(\cdot,x^o,\varepsilon)\right](s)\, ds \qquad (2.24)$$

où $x_o^{1*}$ est tel que $(X^{-1}(T,0)-I)x_o^{1*} = \int_o^T X^{-1}(s,o)\left[(I-Q)f(\cdot,x^o,\varepsilon)\right](s)\, ds$ (2.25)

du système linéaire non homogène:

$$\dot{x} = B(t)x + \varepsilon(I-Q)f(\cdot,x^o(\cdot),\varepsilon)$$

- on cherche alors $a_1$ tel que

$$F\,(a_o + \varepsilon a_1, \varepsilon) = \int_o^T \psi\,(t) f(t,x^1,\varepsilon) = o$$

<u>2e itération:</u> $x^2 = \phi(\cdot)\,(a_o + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2) + \varepsilon \mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x^1(\cdot),\varepsilon)$

$\vdots$

<u>$k^{\text{ième}}$ itération:</u> $x^k = \phi(\cdot)(a_o + \varepsilon a_1 + \ldots\ldots \varepsilon^k a_k) + \varepsilon \mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x^{k-1}(\cdot),\varepsilon)$ (2.26)

où $\mathcal{H}(I-Q)f(.,x^{k-1}(.),\varepsilon)$ = l'image par (I-P) d'une solution T-périodique $x^{k*}$ du système linéaire non homogène

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon\,(I-Q)f(.,x^{k-1}(.),\varepsilon) \qquad (2.27)$$

et $a_k$ doit être tel que

$$F(a_o + \varepsilon a_1 + \dots + \varepsilon^k\, a_k) = \int_0^T \varphi(t) f(t,x^{k-1}(t),\varepsilon)dt = o \qquad (2.28)$$

On trouve donc finalement la solution x que l'on cherche sous la forme d'une série de puissances de $\varepsilon$: $x = x\,(\varepsilon)$

$$x = x_{(o)} + \varepsilon\, x_{(1)} + \varepsilon^2\, x_{(2)} + \dots\dots$$

$$x^o = x_{(o)}$$

$$x^1 = x_{(o)} + \varepsilon\, x_{(1)} + \varepsilon^2\, \tilde{x}_{(2)} + \dots\dots$$

$$x^2 = x_{(o)} + \varepsilon\, x_{(1)} + \varepsilon^2\, x_{(2)} + \varepsilon^3\, \tilde{x}_{(3)} + \dots\dots$$

$$x^3 = x_{(o)} + \varepsilon\, x_{(1)} + \varepsilon^2\, x_{(2)} + \varepsilon^3\, x_{(3)} + \varepsilon^4\, \tilde{x}_{(4)} + \dots\dots$$

.

.

.

Hale affirme que la méthode est convergente (V. [3] p 255 et 266).

<u>Une autre façon de procéder:</u>

On calcule d'abord $x^o = \phi(t)\, a_o$

où $a_o$ satisfait:

$$F\,(a_o, o) = o$$

$$\text{dét} \left[\frac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\right]_{\substack{a = a_o \\ \varepsilon = o}} \neq o$$

On exprime ensuite x sous la forme d'une série:

$$x = x_{(o)} + \varepsilon\, x_{(1)} + \varepsilon^2\, x_{(2)} + \varepsilon^3\, x_{(3)} \qquad (2.29)$$

où $x_{(o)} = x^o$

$x_{(k)}$ $k > o$ est à déterminer.

On détermine les coefficients $x_{(k)}$ en reportant la série (2.9) dans le système

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon\, f(t,x,\varepsilon)$$

et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de $\varepsilon$ qui apparaissent dans chacun des membres.

Après cette mise au point importante sur la signification de l'opérateur $\mathcal{H}$ et sur la méthode itérative de Hale, nous revenons au problème de la symétrie.

Mais avant d'aborder le lemme 5 nous pouvons encore signaler une propriété du système linéaire $\dot{x} = B(t)x$

Propriété:

Si $X(t,0)$ est une matrice fondamentale de $\dot{x} = B(t)x$ (2.30)

alors $\dot{X}(t,o) = B(t)\ X(t,o)$ par définition de matrice fondamentale

et donc $\left[X(t,o)S\right]^{\bullet} = B(t)\ X(t,o)S$ pour toute matrice S constante, $[\ \dot{}\ ]$ indiquant que la dérivée porte sur le produit.

Par conséquent:

$X(t,o)$ est une matrice fondamentale de (2.30)
$\Rightarrow$ $X(t,o)S$ est une matrice fondamentale de (2.30) pour toute matrice S constante.
L'implication est dans les deux sens si S est non singulière.

on en déduit:

- Si le système $\dot{x} = B(t)x$ a la propriété (E) par rapport à une matrice S alors
  - $X(t,0)$ est une matrice fondamentale de ce système.
    $\Leftrightarrow$ $X(t,0)S$ en est une mat. fondamentale
    $\overset{\text{et}}{\Leftrightarrow}$ $SX(-t,o)$ " " " " " (lemme I)
  - $X(t,0)$ est une matrice principale de ce système
    $\Leftrightarrow$ $X(t,0)S = SX(-t,0)$ = mat. fondamentale de ce système
    (car en $t= 0$, ces mat. sont égales).

Nous pouvons maintenant passer au lemme 5.

Lemme 5.

Si $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ avec les conditions indiquées en (2.3) a la propriété (E) par rapport à une matrice S

alors $S\left[\mathcal{H}(I-Q)\ f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)\right](-t) = \left[\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)\right](t)$ (2.31)

Démonstration:

I) Nous savons que

$Sf(-t,x(-t),\varepsilon) \quad = \quad -f(t,Sx(-t),\varepsilon)$ par la définition de la propriété (E)

$SQf(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)(-t) \quad = \quad -Qf(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)(t)$ par le lemme 4

nous en déduisons que

$$S(I-Q)f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)(-t) = -(I-Q)f(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)\,(t)$$

en soustrayant membre à membre.

2) Si $\dot{y} = B(t)y+\varepsilon f(t,Sx(-t),\varepsilon)$ admet une solution $x^*(t)$
alors $Sx^*(-t)$ est solution de $\dot{y} = B(t)y+\varepsilon f(t,x(t),\varepsilon)$ (2.32)

en effet:

$x^*(t)$ est solution de $\dot{y} = B(t)y+\varepsilon f(t,Sx(-t),\varepsilon)$

$\iff \dot{x}^*(t) = B(t)x^*(t)+\varepsilon f(t,Sx(-t),\varepsilon)$

$\iff -S\dot{x}^*(-t) = SB(-t)x^*(-t)+\varepsilon Sf(-t,Sx(t),\varepsilon)$

cela en changeant t en -t et en multipliant à gauche par S

$\iff -S\dot{x}^*(-t) = -B(t)Sx^*(-t) - \varepsilon f(t,x(t),\varepsilon)$ en appliquant la propriété(E)

$\iff S\dot{x}^*(-t) = B(t)Sx^*(-t) + \varepsilon f(t,x(t),\varepsilon)$

$\iff Sx^*(-t)$ est solution de $\dot{y} = B(t)y + \varepsilon f(t,x(t),\varepsilon)$ car S matrice constante.

Si nous désignons par $x^*$ la fonction:

$$x^*(t)=\phi(t)b+X(t,o)x_o^* + \int_o^t X(t,s)\,(I-Q)f(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)\,(s)\,ds \qquad (2.33)$$

analogue à (2.23) mais dans le cas du système (2.3)

avec $x_o^*$ solution de

$$(X^{-1}(T,0)-I)\,x_o = \int_0^T X^{-1}(s,o)\,(I-Q)f(s,Sx(-\cdot),\varepsilon)\,(s)\,ds$$

nous savons que:

$$\left[\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)\right](t) = \left[(I-P)\,x^*(\cdot)\right](t) \qquad (2.34)$$

$$\left[\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)\right](t) = \left[(I-P)\,Sx^*(-\cdot)\right](t) \qquad (2.35)$$

d'après propriété (2.32)

Nous en déduisons que:

$$S\left[\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)\right](-t)$$

$$= S\left[(I-P)\,Sx^*(-\cdot)\right](-t) \qquad \text{par (2.35)}$$

$$= S\left\{S\phi(t)b + SX(t,0)\, x_0^{*} + S\int_0^t X(t,s)\,(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)\,(s)\,ds\right.$$
$$\left. -\phi(-t)\,C^{-1}\int_0^T \phi'(u)\left[S\phi(-u)b + SX(-u,o)x_0^{*} + S\int_0^{-u} X(-u,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)\,(s)\,ds\right] du\right\}$$

en remplaçant $x^{*}$ par (2.33)

$$=\phi(t)b + X(t,o)\, x_0^{*} + \int_0^t X(t,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)\,(s)\,ds$$
$$- S\phi(-t)C^{-1}\int_0^T \phi'(u)S\left[\phi(-u)b + X(-u,o)x_0^{*} + \int_0^{-u} X(-u,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)\,(s)\,ds\right] du$$

en distribuant S et du fait $S^2 = I$

puis tenant compte de (2.5), (2.I2)

nous avons $\phi(u)S = [S\phi(u)]' = [\phi(-u)N^{-1}]' = N^{-1'}\phi'(-u)$

et donc par (2.I4):

$$= \phi(t)b + X(t,0)\, x_0^{*} + \int_0^t X(t,s)\,(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)\,(s)\,ds$$
$$- S\phi(-t)NC^{-1}\left[\int_0^T \phi'(-u)\,\left[\phi(-u)b + X(-u,o)x_0^{*} + \int_0^{-u} X(-u,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)(s)\,ds\right] du\right]$$

en appliquant de nouveau (2.5) et en tenant compte du fait $S^2 = I$ nous obtenons:

$$=\phi(t)b + X(t,0)x_0^{*} + \int_0^t X(t,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)(s)ds$$
$$-\phi(t)\,C^{-1}\int_0^T \phi'(-u)\,\left[\phi(-u)b + X(-u,0)x_0^{*} + \int_0^{-u} X(-u,s)\,(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)(s)ds\right] du$$

posons $v = -u$

mais comme l'intégrand est T-périodique en $u$ ($x^{*}$ est T-périodique)

et qu'on intègre sur une période, il suffit de remplacer

$-u$ par $v$ et du par dv.

$$=\phi(t)b + X(t,o)x_0^{*} + \int_0^t X(t,s)\,(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)(s)\,ds$$
$$-\phi(t)\,C^{-1}\int_0^T \phi'(v)\left[\phi(v)b + X(v,o)\, x_0^{*} + \int_0^v X(v,s)(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)(s)ds\right] du$$

$= [(I-P)\, x^{*}(.)]\,(t)$ par (2.33)

$= [\mathcal{K}(I-Q)f(.,Sx(-.),\varepsilon)]\,(t)$ par (2.34)

cqfd.

Remarque:

Un résultat analogue à celui-ci est donné par Hale dans [3] p. 268 mais f y est considérée comme une fonction de t uniquement c'est-à-dire que, comme dans le cas du lemme 4, Hale considère non pas le système faiblement non linéaire (2.3) mais le système linéaire non homogène $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t)$

---

Nous allons maintenant rassembler en deux théorèmes tous les résultats que nous avons trouvés jusqu'ici.

Théorème I.

Si le système $\dot{x} = B(t)x$ (2.36)

a la propriété (E) par rapport à une matrice S alors:

- $x(t)$ est une solution (périodique) de (2.36)
  $\iff$ $Sx(-t)$ est une solution (périodique) de (2.36)(lemme I,corollaire I)
- $\phi(t)$ est une base des solutions T-périodiques de (2.36)
  $\iff S\phi(-t)$ est une base des solutions T-périodiques de (2.36)(lemme 3)
- $S\phi(-t)=\phi(t)N$ où N est une matrice constante, p x p,non singulière.
- $y(t)$ est une solution(périodique) du système $\dot{y} = yB(t)$
  $\iff Sy(-t)$ est une solution (périodique) de ce système.(lemmeI',
  corollaire I')
- $\psi(t)$ est une base des solutions T-périodiques de $\dot{y} = -yB(t)$
  $\iff S\psi(-t)$ est une base des solutions T-périodiques de ce système
  (lemme 3')
- $\psi(-t)S = M\psi(t)$ où M est une matrice constante, p x p,non singulière.
- on a les égalités suivantes: $\phi(t)N^{-1} = \phi(t)N$

  $M^{-1}\psi(t) = M\psi(t)$

  $NC^{-1}=C^{-1}N'^{-1}$ où C défini en (2.8)

  $M'D^{-1}= D^{-1} M^{-1}$ où D défini en (2.9)
- $X(t,o)$ est une matrice fondamentale de (2.36).
  $\iff X(t,o)S$ est une matrice fondamentale de (2.36)
  et
  $\iff SX(-t,o)$ est une matrice fondamentale de (2.36)
- $X(t,o)$ est une matrice principale de (2.36)
  $\iff X(t,o)S = SX(-t,o)=$ une matrice fondamentale de (2.36).

Théorème 2.

Le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ (2.37)

a la propriété (E) par rapport à une matrice S

$\Longleftrightarrow$ le système $\dot{x} = B(t)x$

et le système $\dot{x} = \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$

ont la propriété (E) par rapport à cette matrice S

et donc nous avons tous les résultats du théorème I.

Si de plus (2.37) vérifie les conditions de (2.3) alors:

- $S\,[Qf(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)]\,(-t) = -\,[Qf(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon)]\,(t)$ (lemme 4)
- $S\,[\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon]\,(-t) = [\,\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,Sx(-\cdot),\varepsilon\,)]\,(t)$ (lemme 5)

Nous allons à présent revenir à une notation judicieuse employée par Hale et que nous avons précédemment négligée pour alléger les écritures, bien que nous l'ayons mentionnée au chapitre I et dans les relations (2.I7) à (2.I9).Hale désigne par $x(a,\varepsilon)$ la fonction

$$x = \phi\, a + \varepsilon\,\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x(\cdot),\varepsilon\,)$$

qui est une solution T-périodique de (2.3) moyennant la condition

$$Qf(\cdot,x(a,\varepsilon)(\cdot),\varepsilon) = o$$

qui est équivalente à $F(a,\varepsilon\,) = \int_o^T \psi\,(s)f(s,x(a,\varepsilon)(s),\varepsilon)ds = o$

et en supposant que a vérifie (2.20) et (2.2I).

Lemme 6.

Si le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ avec les conditions (2.3)

a la propriété (E) par rapport à une matrice S

et admet la solution T-périodique $x(a,\varepsilon)$

alors $x(a,\varepsilon)(t) = Sx(a,\varepsilon)(-t)\ \forall t \Longleftrightarrow a = Na$ (2.38)

Démonstration:

$\Longrightarrow$ $x(a,\varepsilon)(t) = \phi(t)a + \varepsilon\,\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x(a,\varepsilon)(\cdot),\varepsilon)(t)$

$\Rightarrow Sx(a,\varepsilon)(-t) = S\phi(-t)a + \varepsilon S\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,x(a,\varepsilon)(\cdot),\varepsilon)(-t)$

en remplaçant t par -t et en multipliant à gauche par la matrice S

$\Rightarrow Sx(a,\varepsilon)(-t) = \phi\,(t)Na + \varepsilon\,\mathcal{H}(I-Q)f(\cdot,Sx(a,\varepsilon)(-\cdot),\varepsilon)(t)$

en appliquant (2.5) et (2.3I)

donc: $x(a,\varepsilon)(t) = Sx(a,\varepsilon)(-t)$ $\forall t$ implique les termes indépendants d'$\varepsilon$

sont égaux et donc que $\phi(t)a = \phi(t)Na \quad \forall t$ (2.39)

c'est-à-dire $a = Na$ (*)

(Rem.: N a donc au moins une valeur propre égale à 1 )

(*) : $\phi(t)$ est une matrice n x p dont les colonnes forment une base pour l'espace des solutions T-périodiques de (2.3).

a est un p-vecteur constant.
Nous pouvons donc trouver dans $\phi(t)$ une sous matrice $\phi^*$, p x p, non singulière et par (2.39) nous avons que

$$\phi^*(t)a = \phi^*(t)Na \quad \forall t$$

et donc $a = Na$ vu $\phi^*(t)$ non singulière.

$\Leftarrow$ $a = Na \Rightarrow \phi(o)\ a = \phi(o)Na = S\phi(o)a$ par(2.5)

$\Rightarrow (I-S)\phi(o)a = o$

$\Rightarrow x(a,\varepsilon)(t) = Sx(a,\varepsilon)(-t)$ $\forall t$ par le théorème 2.2 [3] p.269.

cqfd.

---

Lemme 7.

> Si le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ avec les conditions (2.3)
> a la propriété (E) par rapport à une matrice S
> et admet une solution T-périodique $x(a,\varepsilon)$ (2.40)
> alors $Sx(a,\varepsilon)(-t) = x(Na,\varepsilon)(t)$ $\forall t$

Démonstration:

Considérons les deux systèmes suivants:

$$x^1(t) = \phi(t)a + \varepsilon\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,y(\cdot),\varepsilon)(t) \qquad (2.4I)$$

$$x^2(t) = \phi(t)Na + \varepsilon\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,Sy(-\cdot),\varepsilon)(t) \qquad (2.42)$$

Nous voyons que (2.4I), (2.42) définissent 2 opérateurs $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ respectivement

$$y \rightsquigarrow \phi(\cdot)a + \varepsilon\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,y(\cdot),\varepsilon)(\cdot) = \mathcal{O}_1(y) \qquad (2.43)$$

$$\text{et } z \rightsquigarrow \phi(\cdot)Na + \varepsilon\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,z(\cdot),\varepsilon)(\cdot) = \mathcal{O}_2(z) \qquad (2.44)$$

de points fixes respectivement $x(a,\varepsilon)(\cdot)$ et $x(Na,\varepsilon)(\cdot)$
(l'existence de ces points fixes nous est assurée par Hale.)

Si nous remplaçons chaque fois y et z par leurs images $\mathcal{O}_1(y)$ et $\mathcal{O}_2(z)$, nous générons une méthode itérative pour trouver les points fixes.
Nous remarquons que dans (2.41), (2.42) nous avons pris y et z symétriques c'est-à-dire $z(\cdot) = Sy(-\cdot)$

Si donc nous prouvons que $x^2(.) = Sx^1(-.)$, alors nous pourrons affirmer que les opérateurs $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ conservent la symétrie et que les points fixes sont donc symétriques, c.à.d.

$$x(Na,\varepsilon)(.) = Sx(a,\varepsilon)(-.)$$

Il suffit donc de prouver:

$$x^2(t) = Sx^1(-t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Or d'une part $x^2(t) = \phi(t)Na + \varepsilon\mathcal{H}(I-Q)f(.,Sy(-.),\varepsilon)(t)$

d'autre part $x^1(t) = \phi(t)a + \varepsilon\mathcal{H}(I-Q)f(.,y(.),\varepsilon)(t)$

d'où $Sx^1(-t) = S\phi(-t)a + \varepsilon S\mathcal{H}(I-Q)f(.,y(.),\varepsilon)(-t)$

appliquons (2.5) et (2.31)

$$Sx^1(-t) = \phi(t)Na + \varepsilon\mathcal{H}(I-Q)f(.,Sy(-.),\varepsilon)(t)$$

et donc $Sx^1(-t) = x^2(t)$

cqfd.

---

Lemme 8.

> Si le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x\varepsilon)$ avec les conditions (2.3)
> a la propriété (E) par rapport à une matrice S
> et admet la solution T-périodique $x(a,\varepsilon)$
> alors
> • $F(Na,\varepsilon) = -MF(a,\varepsilon)$ (2.45)
> • $F(a,\varepsilon) = 0 \Longrightarrow F(Na,\varepsilon) = 0$ (2.46)

Démonstration:

$$F(Na,\varepsilon) = \int_0^T \psi(u)f(u,x(Na,\varepsilon)(u),\varepsilon)\,du$$

$$= \int_0^T \psi(u)f(u,Sx(a,\varepsilon)(-u),\varepsilon)\,du \quad \text{par lemme 7.}$$

$$= -\int_0^T \psi(u)Sf(-u,x(a,\varepsilon)(-u),\varepsilon)\,du \quad \text{en appliquant la propriété (E).}$$

$$= -M\int_0^T \psi(-u)f(-u,x(a,\varepsilon)(-u),\varepsilon)\,du \quad \text{par (2.7) et du fait M constante.}$$

$$= -M\int_0^T \psi(w)f(w,x(a,\varepsilon)(w),\varepsilon)\,dw \quad \text{par les changements de variables } v = -u,\ w = v + T$$

$$= -MF(a,\varepsilon)$$

de là on tire la thèse.

cqfd.

---

Corollaire 8.

Si le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ avec les conditions (2.3)
a la propriété (E) par rapport à une matrice S
et admet une solution T-périodique $x(a,\varepsilon)$
alors $(I + M)F(a,\varepsilon) = o$ si $a = Na$ (2.47)
où $F(a,\varepsilon) = \int_0^T \psi(t)\, x(a,\varepsilon)(t)dt$

Nous pouvons rassembler ces trois lemmes en un théorème.

Théorème 3.

Si le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ avec les conditions (2.3)
a la propriété (E) par rapport à une matrice S
et admet la solution T-périodique $x(a,\varepsilon)$ définie en (2.I7)
alors
- $x(a,\varepsilon)(t) = Sx(a,\varepsilon)(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = Na$ (lemme 6)
- $Sx(a,\varepsilon)(-t) = x(Na,\varepsilon)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (lemme 7)
- $F(Na,\varepsilon) = -MF(a,\varepsilon)$
- $F(a,\varepsilon) = o \Longrightarrow F(Na,\varepsilon) = o$ (lemme 8)
- $a = Na \Rightarrow (I + M)F(a,\varepsilon) = o$ (corollaire 8)

Nous venons de redémontrer le théorème suivant de Hale d'une autre façon et dans le cas où $x^*(a,\varepsilon)$ est solution de (2.3).

Théorème 4 [3] p.269

Soient
- $\phi$ une matrice n x p dont les colonnes sont une base pour les solutions T-périodiques de $\dot{x} = B(t)x$
- $\psi$ une matrice p x n dont les lignes sont une base pour les solutions T-périodiques de $\dot{y} = -yB(t)$
- $x^*(a,\varepsilon)$ la fonction définie en (I.8) lemme 3 du chapitre I.

Supposons que le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x)$ a la propriété (E) par rapport à S
alors
- $Sx^*(a,\varepsilon)(-t) = x^*(a,\varepsilon)(t) \quad \forall t$ si $(I-S)\phi(o)a = o$
- si $F(a,\varepsilon) = \int_0^T \psi(t) f(t,x^*(a,\varepsilon)(t))dt$
  alors $(I+M)F(a,\varepsilon) = o$ où M est la matrice définie en (2.7).

# III. FONCTIONS SYMETRIQUES PAR RAPPORT A UNE MATRICE CONSTANTE S - PROPRIETES.

## I. Définitions.

Nous convenons d'adopter la terminologie suivante.
Soient a une fonction complexe n-vectorielle d'une variable réelle t
et S une matrice constante, complexe, n x n,
Nous dirons que:

- La fonction a est "symétrique par rapport à S"

$$\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad a(t) = Sa(-t) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}$$

- La "symétrie de a par rapport à S" $\overset{\text{déf}}{=\!=}$ la fonction Sa(-.)

Cependant nous omettrons souvent la locution "par rapport à S" quand il ne pourra y avoir de confusion et nous dirons: Sa(-.) est la symétrique de a(.)

## 2. Propriétés.

Supposons que a et b sont des fonctions complexes, n-vectorielles, d'une même variable réelle t et que S est une matrice complexe constante, n x n.

**A.**

> Si a est symétrique par rapport à S
> b est symétrique par rapport à S
> alors $\alpha a + \beta b$ est symétrique par rapport à S
> pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Démonstration:

$$\begin{aligned} S(\alpha a + \beta b)(-t) &= \alpha Sa(-t) + \beta Sb(-t) && \forall t \in \mathbb{R} \\ &= \alpha a(t) + \beta b(t) && \forall t \in \mathbb{R} && \text{vu les hypothèses} \\ &= (\alpha a + \beta b)(t) && \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

cqfd.

**B.**

> Si a est symétrique par rapport à S
> b n'est pas symétrique par rapport à S
> alors $\alpha a + \beta b$ n'est pas symétrique par rapport à S
> pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$

Démonstration:

b n'est pas symétrique par rapport à S $\Leftrightarrow \exists t^{*}: b(t^{*}) \neq Sb(-t^{*})$
par conséquent:

$$\begin{aligned} S(\alpha a + \beta b)(-t^{*}) &= \alpha Sa(-t^{*}) + \beta Sb(-t^{*}) \\ &= \alpha a(t^{*}) + \beta Sb(-t^{*}) && \text{vu la première hypothèse} \\ &\neq \alpha a(t^{*}) + \beta b(t^{*}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(\alpha a + \beta b)(-t^{*}) \neq (\alpha a + \beta b)(t^{*})$$

cqfd.

C. Si a n'est pas symétrique par rapport à S

b n'est pas symétrique par rapport à S

alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha a + \beta b$ peut être ou ne pas être symétrique par rapport à S.

Démonstration:

- Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ ou $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ alors évidemment $\alpha a + \beta b$ n'est pas symétrique par rapport à S.
- si $\alpha$ et $\beta \neq 0$

on sait $S(\alpha a + \beta b)(-t) = \alpha S a(-t) + \beta S b(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (2.48)

$(\alpha a + \beta b)(t) = \alpha a(t) + \beta b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (2.49)

donc $(\alpha a + \beta b)$ est symétrique par rapport à S

$\Leftrightarrow \alpha [Sa(-t) - a(t)] + \beta [Sb(-t) - b(t)] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

en soustrayant (2.49) et (2.48) et en annulant cette différence.

$\Leftrightarrow \quad Sa(-t) - a(t) = -\dfrac{\beta}{\alpha}[Sb(-t) - b(t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}$

or cette égalité n'est pas nécessairement vérifiée, aussi ne peut-on rien affirmer quant à la symétrie éventuelle de $\alpha a + \beta b$

c.qfd.

Exemple: Soient a symétrique par rapport à S
b pas symétrique par rapport à S

alors par la propriété B., $c = \alpha a + \beta b$ $\beta \neq 0$ n'est pas symétrique par rapport à S.

Si nous considérons des combinaisons linéaires de b et $c$ qui toutes deux ne sont pas symétriques par rapport à S, nous avons:

d'une part que $\gamma . c - \gamma \beta b$ est symétrique par rapport à S

en effet: $\gamma c - \gamma \beta b = \gamma(\alpha a + \beta b) - \gamma \beta b = \gamma \alpha a$

mais d'autre part que $\gamma c - 2\gamma \beta b$ $(\gamma \neq 0)$ n'est pas symétrique par rapport à S,

en effet: $\gamma c - 2\gamma\beta b = \gamma(\alpha a + \beta b) - 2\gamma\beta b = \gamma \alpha a - \gamma \beta b$ qui d'après la propriété B. n'est pas symétrique par rapport à S.

Théorème 4.

Soients
- x une fonction n-vectorielle d'une variable réelle t
- S une matrice constante, n x n et telle que $S^2 = I$

alors la somme de x et de sa symétrique par rapport à S est une fonction symétrique par rapport à S.

Démonstration:

soit s la fonction telle que $s(t) = x(t) + Sx(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

c.à.d. $\quad s(.) = x(.) + Sx(-.)$

$$\begin{aligned} S[s(-t)] &= S\,[x(-t) + Sx(t)] \\ &= Sx(-t) + x(t) \qquad \text{vu } S^2 = I \\ &= s(t) \end{aligned}$$

cqfd.

donc pour toute fonction x n-vectorielle d'une variable réelle t et pour toute matrice S constante, n x n, telle que $S^2 = I$ on peut exprimer la symétrique de x comme suit:

$$\boxed{\begin{array}{l} Sx(-t) = -x(t) + s(t) \quad \text{pour tout } t \text{ réel} \\ \qquad\qquad \text{où } s \text{ est une fonction symétrique par rapport à } S \end{array}} \tag{2.50}$$

## IV. INCIDENCE DE LA SYMETRIE SUR LES EQUATIONS DE BIFURCATION.

Par $\psi(t)$ nous avons désigné une matrice p x n dont les lignes forment une base de l'espace des solutions T-périodiques de $\dot{y} = -\,yB(t)$. (2.5I)

Nous supposons que le système $\dot{x} = B(t)x$ (2.52)
possède la propriété (E) par rapport à une matrice S .

D'après le corollaire I', nous savons que la symétrique par rapport à S de toute solution T-périodique de (2.5I) est une solution T-périodique de (2.5I). Cependant, parmi toutes ces solutions, il se peut que certaines soient symétriques et d'autres pas.

Les solutions T-périodiques de (2.5I) forment un espace vectoriel (propriété A. du paragraphe III) de dimension k $\quad 0 \leq k \leq p$ où p est la dimension de l'espace vectoriel des solutions T-périodiques de (2.5I).

Aussi pouvons-nous trouver la base que forment les lignes de $\psi(t)$ en complètant la base du sous-espace vectoriel des solutions T-périodiques symétriques. Nous écrirons donc $\psi$ sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \\ \psi_{k+1} \\ \vdots \\ \psi_p \end{pmatrix}$$

où $\psi_i$ $\;1 \leq i \leq k$ est une solution T-périodique, symétrique, de (2.5I)(*)

$\psi_i$ $\;k+1 \leq i \leq p$ " " " non symétrique de (2.5I)

(rem. si k = o nous n'avons pas (*))

et les $\psi_i$ $\;1 \leq i \leq p$ sont linéairement indépendants.

On a donc $\psi_i(t) = \psi_i(-t)S$ pour tout t réel, $1 \leq i \leq k$

Cependant par (2.50) nous savons que

$$\varphi_{k+i}(-t)S = -\varphi_{k+i}(t) + \text{une fonction de } t \text{ symétrique par rapport à } S \text{ pour tout } t \text{ réel,}$$

$$1 \leq i \leq p-k$$
$$0 \leq k \leq p-1$$

D'autre part, d'après (2.7) $M\varphi(t) = \varphi(-t)S$

Par conséquent, la matrice M est de la forme:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & \\ m_{k+1,1} & \cdots & & m_{k+1,k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{p,1} & \cdots & & m_{p,k} & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{k \qquad\qquad p-k} \begin{matrix} \updownarrow k \\ \\ \updownarrow p-k \end{matrix}$$

où les $m_{ij}$ indiqués ne sont pas nécessairement nuls.

(2.47) s'écrit donc:

$$(I+M)\,F(a,\varepsilon) = \begin{matrix} \updownarrow k \\ \\ \updownarrow p-k \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & & \\ * & \cdots & & * & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ * & \cdots & & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{k \qquad\qquad p-k} \begin{pmatrix} F_1(a,\varepsilon) \\ \vdots \\ F_p(a,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ représentent les $m_{ij}$ notés ci-dessus.

c.à.d. nous avons le système d'équations

$$\begin{cases} 2\,F_1(a,\varepsilon) = 0 \\ \vdots \\ 2\,F_k(a,\varepsilon) = 0 \\ m_{k+1,1}\,F_1(a,\varepsilon) + \cdots\cdots + m_{k+1,k}\,F_k(a,\varepsilon) = 0 \\ \vdots \\ m_{p,1}\,F_1(a,\varepsilon) + \cdots\cdots + m_{p,k}\,F_k(a,\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent au système:

$$\begin{cases} F_1(a,\varepsilon) = 0 \\ \vdots \\ F_k(a,\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

Théorème 5.

Soit le système $\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x\,\varepsilon)$ vérifiant la propriété (E) par rapport à S.

Si
- $x^*(a,\varepsilon)$ désigne la fonction définie en (I.8)(lemme3du chap.I).
- $(I-S)\phi(0)a = 0$ (équivalent à $a = Na$ par (2.5) ).
- $\psi$ est la matrice définie et construite comme ci-dessus.
- $F(a,\varepsilon) = \int_0^T \psi(t)\, f(t,x^*(a,\varepsilon),\varepsilon)\, dt$

alors les k premières équations de bifurcation $F_1(a,\varepsilon)=0.,\ldots,F_k(a,\varepsilon)= 0$ sont automatiquement vérifiées

où k est la dimension de l'espace vectoriel des solutions T-périodiques symétriques par rapport à S.

Que nous indique ce dernier résultat ?

Pour trouver les solutions périodiques de (2.3) nous devons chercher les a qui ont pour image 0 par l'application:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ a &\rightsquigarrow F(a,\varepsilon) \end{aligned}$$

Cependant si le système est symétrique et que nous désirons seulement connaître les solutions T-périodiques et symétriques, alors nous recherchons les a tels que $a = Na$ et $(I+M)F(a,\varepsilon) = 0$. Autrement dit, nous recherchons les p-vecteurs envoyés sur 0 par l'application:

$$\begin{array}{ccc} V = \{a:\ Na = a\} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\text{p-uplets dont les k premières com-}\\ \text{posantes sont nulles}\end{array}\right\} \\ a & \rightsquigarrow & (I+M)\,F(a,\varepsilon) \\ \text{espace de dimension } l \leq p & & \text{espace de dimension } p-k \end{array}$$

Dans le cas général (c'est-à-dire si nous ne nous limitons pas aux a tels que a = Na) le jacobien qui est de dimension p x p peut s'annuler mais en fait, nous ne nous intéressons qu'à la résolution des (p-k) dernières équations car les k premières sont vérifiées automatiquement, c'ést pourquoi il suffit de vérifier que le jacobien de ce système réduit est égal à zéro.

Théorème 6.

L'espace des solutions T-périodiques, symétriques du système linéaire

$$\dot{x} = B(t)x \tag{2.53}$$

ayant la propriété (E) par rapport à une matrice S est de dimension k si et seulement si l'espace des solutions T-périodiques symétriques du système linéaire

$$\dot{y} = -B^T(t)\,y \tag{2.54}$$

est aussi de dimension k.

Démonstration:

Soit $V$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini comme suit:

$$V = \{ b \in \mathbb{R}^n : Sb = b \}$$

Soient $x(t,b)$ la solution de (2.53) de condition initiale

$$x(o,b)=b$$

$y(t,b)$ la solution de (2.54) de condition initiale

$$y(o,b)=b$$

Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension $k$ de $V$ qui donne lieu à des trajectoires périodiques, symétriques de (2.53), soit $W$ ce sous-espace vectoriel.

On a toujours que:

$$\forall b,b' \quad (x(t,b) \mid y(t,b')) = \text{constante}$$

par conséquent:

$$\forall w \in W, \ \forall b \in V, \ (x(t,w) \ \ y(t,b)) = d \quad \forall t$$

où d est une constante

en particulier: en $t = 0$ $(w \mid b) = d$

en $t = T$ $(w \mid y(T,b)) = d$

nous avons donc: $(w \mid y(T,b)-b) = o$

Considérons l'application linéaire:

$$K : V \longrightarrow V$$
$$b \rightsquigarrow y(T,b)-b$$

nous avons que:

$\operatorname{Im} K \subseteq V \setminus W$ car $y(T,b)-b$ est orthogonal à $w$, $\forall w \in W$, $\forall b \in V$

$\Longrightarrow \dim(\operatorname{Im} K) \leq \dim V - k$

car les sous-espaces $W$ et $V \setminus W$ de $V$ sont supplémentaires

$\Longrightarrow \dim(\operatorname{Ker} K) \geq k$ (2.55)

d'après une propriété des homomorphismes d'espaces vectoriels:
"soit $H$ un homomorphisme $M \longrightarrow N$ où $M,N$ sont des espaces vectoriels alors $\dim \operatorname{Ker} H + \dim \operatorname{Im} H = \dim M$ "

$\Longrightarrow$ l'espace des solutions T-périodiques symétriques de $\dot{y} = -B^T(t)y$ est au moins de dimension k.

donc si l'espace des solutions T-périodiques symétriques du système $\dot{x} = B(t)x$ est de dimension k alors l'espace des solutions T-périodiques symétriques du système $\dot{y} = -B^T(t)y$ est au moins de dimension k.

De façon analogue, nous pouvons donc montrer que si l'espace des solutions T-périodiques symétriques du système $\dot{y} = -B^T(t)y$ est de dimension 1 alors l'espace des solutions T-périodiques symétriques du système $\dot{x} = B(t)x$ est au moins de dimension 1.
Et nous en déduisons notre théorème. cqfd.

Par conséquent, nous pouvons donner à la matrice $\phi(t)$ une forme analogue à celle de $\psi(t)$.

En effet, nous pouvons trouver une base de l'espace des solutions T-périodiques de (2.52) que forment les colonnes de $\phi(t)$ en complétant la base du sous-espace des solutions T-périodiques symétriques. Nous écrirons donc $\phi$ sous la forme:

$$(\phi_1 \ \phi_2 \ \ldots\ldots\ldots \ \phi_k \ \phi_{k+1} \ \ldots\ldots \ \phi_p) \tag{2.56}$$

où $\phi_i$ $1 \leq i \leq k$ est une solution T-périodique, symétrique de (2.52) (*)

$\phi_i$ $k+1 \leq i \leq p$ est une solution T-périodique, non symétrique de (2.52)

(remarque: si $k = 0$ nous n'avons pas (*))

et les $\phi_i$ $1 \leq i \leq p$ sont linéairement indépendants.

On a donc:

$S\,\phi_i(-t) = \phi_i(t)$ pour tout $t$ $\quad 1 \leq i \leq k$

$S\,\phi_i(-t) = -\phi_i(t)$ + une fonction de $t$ symétrique par rapport à $S$

pour tout $t$ $\quad k < i \leq p$ (d'après (2.50))

D'autre part d'après (2.5) $\quad S\phi(-t) = \phi(t)\,N$

Par conséquent, la matrice $N$ est de la forme:

$$N = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & n_{1,k+1} & \cdots & \cdots & n_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & n_{k,k+1} & \cdots & \cdots & n_{k,p} \\ \hline \vdots & & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\ \vdots\\0\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\ \vdots\\0\end{array}}\right\} p-k \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0\ }}_{k}\ \underbrace{\hphantom{n_{1,k+1}\ \cdots\ \cdots\ n_{1,p}}}_{p-k} \end{array} \tag{2.57}$$

où les $n_{ij}$ indiqués ne sont pas nécessairement nuls.

Les vecteurs $a$ tels que $a = Na$ ont dont leurs $p - k$ dernières composantes nulles

$$a = Na \Longrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } a_1, \ldots, a_k \text{ sont quelconques}$$

Ce qui nous permet de préciser ce que nous indiquait le théorème 5.

Si le système est symétrique et que nous désirons seulement connaître les solutions T-périodiques et symétriques alors nous devons rechercher les éléments du noyau de l'application:

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^p : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq k \leq p \right\} \longrightarrow \left\{ b \in \mathbb{R}^p : b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad 0 \leq k \leq p \right\}$$

$$\text{dimension } k \qquad\qquad\qquad \text{dimension } p - k$$

$$a \rightsquigarrow (I+M)\, F(a,\varepsilon)$$

autrement dit, nous devons résoudre une système de $p - k$ équations à $k$ inconnues.

CHAPITRE 3.

## APPLICATION DE LA METHODE DE HALE-CESARI A UNE EQUATION PARTICULIERE.

Considérons l'équation:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left[ (\sigma + \alpha \cos 2t)x + b\, x^3 + c\, \dot{x}^2 \right] \tag{3.I}$$

où $\sigma, \alpha$, b,c sont des constantes

$\alpha \neq 0$

Quelles conditions faut-il imposer à ces constantes pour (3.I) admettent des solutions périodiques?

Nous pouvons écrire cette équation du second ordre sous la forme d'un système de 2 équations du premier ordre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - x_1 + \varepsilon \left[ (\sigma + \alpha \cos 2t)\, x_1 + b\, x_1^3 + c\, x_2^2 \right] \end{cases} \tag{3.2}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma + \alpha \cos 2t(x_1 + b\, x_1^3 + c\, x_2^2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Considérons ce système pour $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_{01} = x_{02} \\ \dot{x}_{02} = -x_{01} \end{cases} \tag{3.4}$$

Il admet des solutions $2\pi$-périodiques du type

$$x_{01} = A_0 \cos t + B_0 \sin t$$

$$x_{02} = -A_0 \sin t + B_0 \cos t \tag{3.5}$$

c'est-à-dire la matrice $\phi(t)$ est ici une matrice $2 \times 2$ $n = p = 2$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Considérons le système adjoint du système (3.4)

$$(\dot{y}_{01} \quad \dot{y}_{02}) = - (y_{01} \quad y_{02}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{y}_{o1} = y_{o2} \\ \dot{y}_{o2} = - y_{o1} \end{cases}$$

qui admet également des solutions $2\pi$-périodiques du type:

$$y_{o1} = A_o \cos t + B_o \sin t$$
$$y_{o2} = - A_o \sin t + B_o \cos t$$

c'est-à-dire la matrice $\varphi(t)$ devient ici

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Remarque: Dans ce qui suit nous indiquerons par x le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

x n'aura donc plus le même sens que dans l'équation (3.I)

§ I. Explicitons l'expression $\mathcal{H}(I-Q)f(.,x(.))(t)$

Pour cela nous devons d'abord calculer les matrices C,D et le terme $Q\, f(.,x(.))(s)$

$$C = \int_0^{2\pi} \phi'(t)\, \phi(t)\, dt = \int_0^{2\pi} I_2\, dt = 2\pi\, I_2 \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \varphi'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} I_2\, dt = 2\pi\, I_2$$

$$[Q\, f(.,x(.))]\,(s) = \varphi'(s)\, D^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(u) f(u,x(u))\,du$$

où $f(u,x(u)) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma + \alpha\cos 2t)x_1(u) + b\, x_1^3(u) + c\, x_2^2(u) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ - \sin s & \cos s \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin u \left[(\sigma+\alpha\cos 2u)x_1(u) + b\, x_1^3(u) + c\, x_2^2(u)\right] \\ \cos u \left[(\sigma+\alpha\cos 2u)\, x_1(u) + b\, x_1^3(u) + c\, x_2^2(u)\right] \end{pmatrix} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(s-u)\, \left[(\sigma+\alpha\cos 2u)\, x_1(u) + b\, x_1^3(u) + c\, x_2^2(u)\right] \\ \cos(s-u)\left[(\sigma+\alpha\cos 2u)\, x_1(u) + b\, x_1^3(u) + c\, x_2^2(u)\right] \end{pmatrix} du \qquad (3.8)$$

$$\left[\mathcal{K}(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](t)$$
$$= (I-P)\left[\phi(v)b + X(v,o)\tilde{x}_o + \int_o^v X(v,s)\left[(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](s)\,ds\right](t)$$

mais ici la matrice fondamentale $X(v,o)$ est la matrice $\phi\,(v)$ et est même principale. De même $X\,(v,s) = \phi\,(v-s)$ car (3.4) n'admet que des solutions $2\pi$-périodiques.

$$= \phi(t)b + \phi(t)\,\tilde{x}_o + \int_o^t \phi(t-s)\left[(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](s)\,ds$$
$$-\phi(t)C^{-1}\int_o^{2\pi} \phi'(v)\phi(v)\;b\,dv - \phi(t)\,C^{-1}\int_o^{2\pi}\phi'(v)\phi(v)\,\tilde{x}_o\,dv$$
$$-\phi(t)C^{-1}\int_o^{2\pi}\phi'(v)\int_o^v \phi\,(v-s)\left[(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](s)\,ds$$

$$=\int_o^t \phi(t-s)\left[(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\phi(t)\int_o^{2\pi}\phi'(v)\int_o^v \phi\,(v-s)\left[(I-Q)f(\cdot,x(\cdot))\right](s)\,ds$$

en remplaçant $\phi\,(t-s)$, $\phi(t)$, $\phi'(v)$, $\phi(v-s)$ par leurs expressions matricielles d'après (3.6) et $\left[Q\,f(\cdot,x(\cdot))\right](s)$ par (3.8) on obtient après calculs:

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi}\,t\int_o^{2\pi}\sin(t-u)\,(\overset{u}{\ldots})\,du + \int_o^t \sin(t-s)\,(\overset{s}{\ldots})\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\int_o^v \sin\,(t-s)(\overset{s}{\ldots}) \\ ds\,dv + \frac{1}{2}\int_o^{2\pi}\sin(t-u)\,(\overset{u}{\ldots})\,du \\ -\frac{1}{2\pi}\,t\int_o^{2\pi}\cos(t-u)\,(\overset{u}{\ldots})\,du + \int_o^t \cos(t-s)(\overset{s}{\ldots})\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\int_o^v \cos\,(t-s)(\overset{s}{\ldots}) \\ ds\,dv + \frac{1}{2}\int_o^{2\pi}\cos(t-u)\,(\overset{u}{\ldots})\,du \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Nous voyons apparaître un terme séculaire: $-\dfrac{1}{2\pi}\,t\displaystyle\int_o^{2\pi}\sin(t-u)(\overset{u}{\ldots})\,du$

mais il sera détruit par le terme séculaire que contient l'intégrale

$$\int_o^t \sin(t-s)(\overset{s}{\ldots})\,ds.$$

Il en sera de même pour le terme séculaire $-\dfrac{1}{2\pi}\,t\displaystyle\int_o^{2\pi}\cos(t-u)(\overset{u}{\ldots})du$

qui sera détruit par le terme séculaire contenu dans $\displaystyle\int_o^t \cos(t-s)(\overset{s}{\ldots})ds$

<u>remarque</u>: Nous avons abrégé l'écriture de (3.9) en indiquant par $(\overset{u}{\ldots})$ l'expression

$$(\sigma + \alpha\cos 2\,u)\;x_1(u) + b\;x_1^3(u) + c\;x_2^3\,(u)$$

§ 2. Exprimons à présent les équations: $F(a,\varepsilon) = 0$

$$F(a,\varepsilon)= \int_0^{2\pi} \psi(t) f(t,x(a,\varepsilon)(t))\, dt$$

où . $\psi(t)$ nous est donné en (3.7)

. $f(t,x(a,\varepsilon)(t)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma+\alpha\cos 2t)x_1 + b\, x_1^3 + c\, x_2^2 \end{pmatrix}$

où $x_1 = x_1(a,\varepsilon)$ et $x_2 = x_2\,(a,\varepsilon)$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} -\sin t\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1(t) + b\, x_1^3\,(t) + c\, x_2^3\,(t)\right] dt \\ \int_0^{2\pi} \cos t\,\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1(t) + b\, x_1^3\,(t) + c\, x_2^3\,(t)\right] dt \end{pmatrix}$$

$$F(a,\varepsilon) = 0$$

$$\equiv \begin{cases} -\int_0^{2\pi} \sin t\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1(a,\varepsilon)(t)+b\, x_1^3\,(a,\varepsilon)(t)+ c\, x_2^2(a,\varepsilon)(t)\, dt=0 \\ \int_0^{2\pi} \cos t\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1(a,\varepsilon)(t)+b\, x_1^3(a,\varepsilon)(t) + c\, x_2^2(a,\varepsilon)(t)\, dt = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

§ 3. Recherche des solutions:

Avant d'entamer les calculs nous savions déjà que l'équation (3.I) était vérifiée par la solution $x = 0$ et donc que le système (3.2) admettait la solution nulle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0^{\text{ième}}$ itération.

$$x^0 = \emptyset(t)\, a_0 = \begin{pmatrix} A_0\cos t + B_0 \sin t \\ -A_0\sin t + B_0\cos t \end{pmatrix} = x(a_0, 0)$$

où $a_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ doit vérifier $\begin{cases} F(a_0, 0) = 0 & (3.\mathrm{II}) \\ \text{dét}\left(\dfrac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\right)_{\substack{a = a_0 \\ \varepsilon = 0}} \neq 0 & (3.\mathrm{I2}) \end{cases}$

A. Considérons l'équation (3.II)

$F(a_o,o)=o$ s'écrit :

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_o^{2\pi} \sin t\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1(a_o,o)(t)+ b\, x_1^3(a_o,o)(t)+ c\, x_2^2(a_o,o)(t)\right] dt = o \\ \displaystyle\int_o^{2\pi} \cos t\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)\, x_1(a_o,o)(t)+ b\, x_1^3(a_o,o)(t)+ c\, x_2^2(a_o,o)(t)\right] dt = o \end{cases}$$

$$\text{où}\quad x_1(a_o,o)(t) = A_o \cos t + B_o \sin t$$

$$x_2(a_o,o)(t) = -A_o \sin t + B_o \cos t$$

après calculs nous obtenons les 2 équations:

$$\begin{cases} -\sigma B_o\pi + \alpha B_o \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{4} b B_o^3 \pi - \dfrac{3b}{4} A_o^2 B_o \pi = o \\ \sigma A_o \pi + \alpha A_o \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{4} b A_o^3 \pi + \dfrac{3}{4} b A_o B_o^2 \pi = o \end{cases}$$

équivalentes à

$$\begin{cases} -B_o \left[ (\sigma - \dfrac{\alpha}{2}) + \dfrac{3}{4} b\, (A_o^2 + B_o^2)\right] = o \\ A_o \left[ (\sigma + \dfrac{\alpha}{2}) + \dfrac{3}{4} b\, (A_o^2 + B_o^2)\right] = o \end{cases} \qquad (3.I3)$$

Quelles sont les valeurs de $A_o$, $B_o$ qui vérifient ces équations ?

a) $\boxed{\text{si } b = o}$ alors (3.I3) se réduit à

$$\begin{cases} -B_o\, (\sigma - \dfrac{\alpha}{2}) = o \\ A_o\, (\sigma + \dfrac{\alpha}{2}) = o \end{cases}$$

$F(a_o,o) = F(A_o,B_o,o) = o \iff$

$A_o = o$ et $B_o = o$

ou $A_o = o$ et $B_o$ quelconque si $\sigma = \dfrac{\alpha}{2}$

ou $B_o = o$ et $A_o$ quelconque si $\sigma = -\dfrac{\alpha}{2}$

Remarque: $F(a_o,o)= F(A_o,B_o,o)$ est un abus de notation

il faudrait écrire $F(a_o,o)= F\left(\begin{pmatrix} A_o \\ B_o \end{pmatrix}, o\right)$

b) $\boxed{\text{si } b \neq o}$

$$F_1(a_o,o) = F_1(A_o,B_o,0) = -B_o\left[\left(\sigma - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}b(A_o^2 + B_o^2)\right] = o$$

$$\Leftrightarrow B_o = o \quad \text{ou} \quad \frac{3b}{4}(A_o^2 + B_o^2) = \frac{\alpha}{2} - \sigma \tag{3.I4}$$

$$F_2(a_o,0) = F_2(A_o,B_o,0) = A_o\left[\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}b(A_o^2 + B_o^2)\right] = o$$

$$\Leftrightarrow A_o = o \quad \text{ou} \quad \frac{3b}{4}(A_o^2 + B_o^2) = -\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.I5}$$

Nous avons donc quatre possibilités:

$$A_o = o \quad \text{et } B_o = o \tag{3.I6}$$

$$A_o = o \quad \text{et} \quad B_o^2 = \frac{4}{3b}\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) \tag{3.I7}$$

$$B_o = o \quad \text{et} \quad A_o^2 = -\frac{4}{3b}\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.I8}$$

$$\left(A_o^2 + B_o^2\right) = \frac{4}{3b}\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) \quad \text{et} \quad \left(A_o^2 + B_o^2\right) = -\frac{4}{3b}\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.I9}$$

Pour avoir la possibilité (3.I7) il faut $b\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) \geq o$ (3.20)

(3.I8) " $b\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) \leq o$ (3.2I)

(3.I9) " $b\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) > o$ et $b\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) < o$ (3.22)

Lorsque nous avons l'égalité dans (3.20) alors (3.I7) est équivalent à (3.I6)
" (3.2I) " (3.I8) " (3.I6)

Exprimons graphiquement les conditions (3.20), (3.2I),(3.22) :

<u>si b > o</u>

(3.22) ≡ $\alpha > 2\sigma$ et $\alpha < -2\sigma$

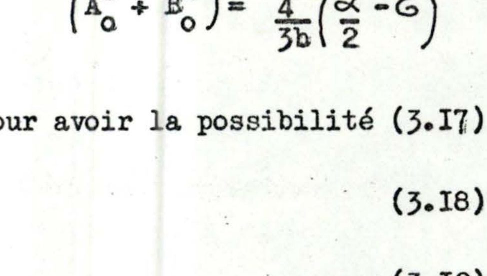


fig.I

<u>si b < o</u>

(3.22) ≡ $\alpha < 2\sigma$ et $\alpha > -2\sigma$

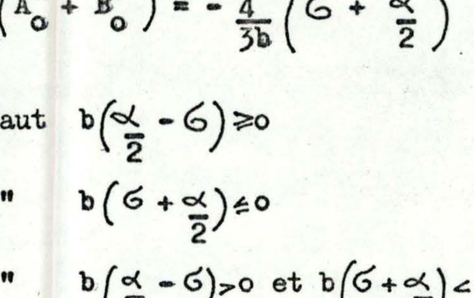


fig.2

la région hachurée sans les demi-droites frontières et sans l'axe $\alpha = o$ (vu hypothèse) étant la région permise par (3.22).

(3.20)$\equiv \alpha \geq 2\sigma$ : demi plan fermé à gauche de la droite $\alpha = 2\sigma$

(3.2I)$\equiv \alpha \leq -2\sigma$ : demi plan fermé à gauche de la droite $\alpha = -2\sigma$

Recherche graphique des solutions:

$$A_o^2 + B_o^2 = \frac{4}{3b}\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right)$$

circonférence de rayon $R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\alpha - 2\sigma}{b}}$

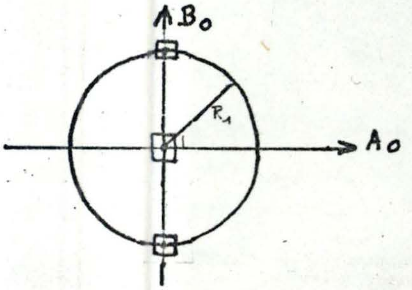


fig.3

si $\alpha = 2\sigma$ : cette circonférence se réduit à l'origine

les équations (3.I6) et (3.I7) nous donnent pour (3.I3) les trois solutions encadrées $\boxed{\cdot}$

la région hachurée sans les demi-droites frontières et sans l'axe $\alpha = o$ (vu hypothèse) étant la région permise par (3.22).

(3.20)$\equiv \alpha \leq 2\sigma$ : demi plan fermé à droite de la droite $\alpha = 2\sigma$

(3.2I)$\equiv \alpha \geq -2\sigma$ : demi plan fermé à droite de la droite $\alpha = -2\sigma$

$$A_o^2 + B_o^2 = -\frac{4}{3b}\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right)$$

circonférence de rayon $R_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}}$

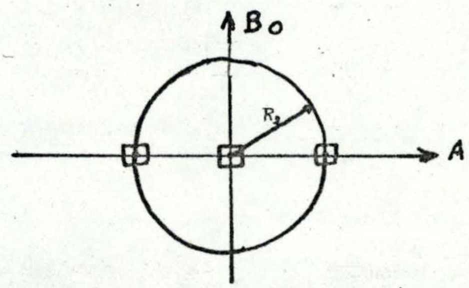


fig.4

si $\alpha = -2\sigma$ : cette circonférence se réduit à l'origine

les équations (3.I6) et (3.I8) nous donnent pour (3.I3) les trois solutions encadrées $\boxed{\cdot}$

L'équation (3.I9) nous donne également la solution $A_o = B_o = 0$

elle nous donnerait aussi tous les points de la circonférence:

$$A_o^2 + B_o^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-2\sigma}{b}}$$

si nous pouvions avoir $\alpha = 0$ mais ce cas est exclu par hypothèse.

En conséquence les solutions de l'équation $F(a_o, 0) = F(A_o, B_o, 0) = 0$ sont

si $b = o$    $A_o = o$ et $B_o = o$ pour toutes les valeurs de $\alpha, \sigma$, c ($\alpha \neq o$)

$A_o = o$ et $B_o$ réel quelconque si $\alpha = 2\sigma$ et pour tout c

$B_o = o$ et $A_o$ réel quelconque si $\alpha = -2\sigma$ et pour tout c si $b \neq o$ $\quad A_o = o$ et $B_o = o$ $\quad$ pour toutes valeurs de $\alpha, \sigma$, $b, c (\alpha \neq o, b \neq o)$

$A_o = o$ et $B_o = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\alpha - 2\sigma}{b}}$ si $\begin{cases} \cdot (\alpha, \sigma) \in \text{demi-plan ouvert à gauche de } \alpha = 2\sigma \\ \cdot \alpha \neq o \text{ et } b > o \end{cases}$

ou si $\begin{cases} (\alpha, \sigma) \in \text{demi-plan ouvert à droite de } \alpha = 2\sigma \\ \alpha \neq o \text{ et } b < o \end{cases}$

$B_o = o$ et $A_o = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}}$

si $\begin{cases} (\alpha, \sigma) \in \text{demi-plan ouvert à gauche de } \alpha = -2\sigma \\ \alpha \neq o \text{ et } b > o \end{cases}$

ou si $\begin{cases} (\alpha, \sigma) \in \text{demi-plan ouvert à droite de } \alpha = -2\sigma \\ \alpha \neq o \text{ et } b < o \end{cases}$

B. Considérons la condition (3.I2).

Pour que les solutions ci-dessus soient acceptées comme vecteur $a_o$ elles ne peuvent annuler le jacobien $\left|\frac{\partial F(a, \varepsilon)}{\partial a}\right|_{\substack{a = a_o \\ \varepsilon = o}}$

a) $\boxed{\text{si } b = o}$

$$\left|\frac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\right|_{\substack{a = a_o \\ \varepsilon = o}} = \begin{vmatrix} 0 & -(\sigma - \frac{\alpha}{2}) \\ \sigma + \frac{\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} = -(\sigma + \frac{\alpha}{2})(\sigma - \frac{\alpha}{2})$$

Ce jacobien est $\neq o \iff \sigma \neq \pm \frac{\alpha}{2}$

Donc si $b = o$ et $\sigma = \pm \frac{\alpha}{2}$ nous ne pouvons trouver $A_o$ et $B_o$

si $b = o$ et $\sigma \neq \pm\frac{\alpha}{2}$ nous avons seulement $A_o = o, B_o = o$

b) $\boxed{\text{si } b \neq o}$

$$\left|\frac{\partial F(a,\varepsilon)}{\partial a}\right|_{\substack{a = a_o \\ \varepsilon = o}} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} b A_o B_o & -(\sigma - \frac{\alpha}{2}) - \frac{3b}{4}(A_o^2 + B_o^2) - \frac{3}{2} b B_o^2 \\ (\sigma + \frac{\alpha}{2}) + \frac{3}{4}(A_o^2 + B_o^2) + \frac{3}{2} b A_o^2 & \frac{3}{2} b A_o B_o \end{vmatrix}$$

$$= \frac{27}{16} b^2 (A_o^2 + B_o^2)^2 + 3 b \sigma (A_o^2 + B_o^2) - \frac{3}{4} \alpha b (A_o^2 - B_o^2) + (\sigma + \frac{\alpha}{2})(\sigma - \frac{\alpha}{2}) = J$$

$A_o = 0$ et $B_o = 0$ n'annule pas le jacobien si $\alpha \neq \pm 2\sigma$

$A_o = 0$ et $B_o = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\alpha - 2\sigma}{b}}$ après calcul on trouve:

$$J = 2\alpha\left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) = \alpha(\alpha - 2\sigma)$$

J ne s'annule pas si $\alpha \neq 2\sigma$

$A_o = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}}$ et $B_o = 0$ après calcul on trouve:

$$J = \left(\frac{\alpha}{2} + \sigma\right)\left[-\alpha - 6\sigma\right] = -\frac{1}{2}(\alpha + 2\sigma)(\alpha + 6\sigma)$$

J ne s'annule pas si $\alpha \neq -2\sigma$ et $\alpha \neq -6\sigma$

<u>Conclusion:</u>

si $b = o$ aucun $a_o$ ne satisfait à la fois (3.II) et (3.I2)

si $b \neq o$ $\quad a_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2) sauf si $\alpha = \pm 2\sigma$ $\quad (\alpha \neq 0)$

si $b > o$

$a_o = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\alpha - 2\sigma}{b}} \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2) si $(\alpha,\sigma) \in$ au demi plan ouvert $\alpha > 2\sigma$ $\quad (\alpha \neq o)$ (c'est-à-dire à gauche de la droite $\alpha = 2\sigma$ )

$a_o = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2) si $(\alpha,\sigma) \in$ au demi-plan ouvert $\alpha < -2\sigma (\alpha \neq 0)$ et si $\alpha \neq -6\sigma$ (c'est-à-dire à gauche de la droite $\alpha = -2\sigma$ )

si $b < o$

$a_o = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\alpha - \sigma}{b}} \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2) si $(\alpha,\sigma) \in$ au demi-plan ouvert $\alpha < 2\sigma$ $\quad (\alpha \neq o)$

$a_o = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2) si $(\alpha,\sigma) \in$ au demi-plan ouvert $\alpha > -2\sigma$ $(\alpha \neq 0)$ et si $\alpha \neq -6\sigma$

Supposons que les paramètres figurant dans (3.I) soient tels que:

$a_o = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha - 2\sigma}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait (3.II) et (3.I2)

Nous allons poursuivre notre méthode itérative:

<u>Ière itération.</u>

$$x^1(t) = \emptyset(t)\ (a_o + \varepsilon a_1) + \varepsilon\left[\mathcal{K}(I-Q)f(.,x^o(.))\right](t)$$

il nous faut donc calculer $\left[\mathcal{K}(I-Q)f(.,x^o(.))\right](t)$

où $x^o = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha-2\sigma}{b}}\cos t \\ \mp\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{-\alpha-2\sigma}{b}}\sin t \end{pmatrix}$

Après calcul, nous arrivons à un résultat très compliqué que nous avons préféré ne pas retranscrire.
La longueur des calculs et le caractère compliqué de l'expression $[\mathcal{H}(I-Q)f(.,x^o(.))](t)$ sont dus à la complexité de la fonction f dans l'exemple traité.

Le vecteur $a_1$ est alors déterminé en résolvant les équations

$$F(a_1,\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)f(t,x^1)\,dt$$

....... et la procédure se poursuit.

## § 4. Le système (3.2) a-t-il la propriété (E) par rapport à une matrice S?

Nous devons s'il existe une matrice S constante, 2 x 2, symétrique telle que:

$$S^2 = I \tag{3.23}$$

$$SA = -AS \tag{3.24}$$

$$S\,f(t,x(t)) = -f(-t,S\,x(t)) \tag{3.25}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(t,x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma + \alpha\cos 2t)x_1(t) + b\,x_1^3(t) + c\,x_2^2(t) \end{pmatrix}$$

I. $SA = -AS$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow s_{22} = -s_{11} \tag{3.26}$$

2. $S^2 = I$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & -s_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & -s_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow s_{11}^2 + s_{12}^2 = s \tag{3.27}$$

S doit donc avoir la forme: $\begin{pmatrix} s_{II} & [1-s_{II}]^{\frac{1}{2}} \\ [1-s_{II}]^{\frac{1}{2}} & -s_{II} \end{pmatrix}$

3. $S\, f(t,x(t)) = -f(-t, S\, x(t))$

$$\begin{pmatrix} s_{II} & [1-s_{II}^2]^{\frac{1}{2}} \\ [1-s_{II}]^{\frac{1}{2}} & -s_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma+\alpha\cos 2t)x_1 + b\,x_1^3 + c\,x_2^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

Sans même écrire le terme que remplacent les petits points, nous voyons que $[1-s_{II}^2]^{\frac{1}{2}}$ doit être nul.

Par conséquent si S existe, S est soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voyons si ces matrices vérifient la troisième propriété (3.25)

$$S\, x(t) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\, x_1(t) \\ \mp\, x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$S\, f(t,x(t)) = -f(-t, S\, x(t))$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 \\ \mp f_2(t,x(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_2(-t, S\, x(t)) \end{pmatrix}$$

ou $f_2$ désigne la deuxième composante de f.

$$\iff \mp\left[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1 + b\,x_1^3 + c\,x_2^2\right] = -\left[\pm(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1 \pm b\,x_1^3 + c\,x_2^2\right]$$

$$\iff \mp\, c\,x_2^2 = -c\,x_2^2$$

Donc si c= o $\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

si $c \neq o$ $\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Nous pouvons donc en conclure que quels que soient les paramètres, le système (3.2) a la propriété (E) par rapport à la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

## § 5. Incidence de la symétrie sur la recherche des solutions périodiques.

Recherche des matrices M et N.

$S\phi(t) = \phi(-t)N$

$\Rightarrow S\phi(0) = \phi(0)N$

$\Rightarrow S\,I = I\,N$ d'après (3.6)

$\Rightarrow S = N$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\psi(t)S = M\psi(-t)$

$\Rightarrow \psi(0)S = M\,\psi(0)$

$\Rightarrow S = M$ d'après (3.7)

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On en déduit:

$a = Na \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_2 = o$

$I + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et donc $(I + M)F(a,\varepsilon) = o \Leftrightarrow F_1(a,\varepsilon) = o$

où $F_1(a,\varepsilon) = o$ est la première équation du système $F(a,\varepsilon) = o$

Nous savons donc d'après le théorème 5 que:

si $a = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $F_1(a,\varepsilon) = o$

Si nous désirons seulement trouver les solutions $2\pi$-périodiques, au lieu de résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues $F(a,\varepsilon) = o$, que nous pouvons noter (avec un abus d'écriture)

$$\begin{cases} F_1(A,B,\varepsilon) = o \\ F_2(A,B,\varepsilon) = o \end{cases}$$

nous avons seulement à résoudre l'équation à I inconnue

$$F_2(A,0,\varepsilon) = o$$

Reprenons notre méthode itérative.

$0^{\text{ième}}$ itération:

$x^o = \phi(0)\,a_o$ où $a_o = \begin{pmatrix} A_o \\ 0 \end{pmatrix}$ vu $a = Na$

Nous voyons bien d'après (3.I3) que l'équation $F_1(a_o,0) = 0$ est immédiatement vérifiée comme le prévoyait la théorie.

Il suffit donc de vérifier:

$$F_2(a_o,0) = 0$$

$$\text{dét}\left|\frac{\partial F_2(a,\varepsilon)}{\partial A}\right|_{\substack{\varepsilon = 0\\ a = a_o}} \neq 0$$

$$F_2(a_o,0) = 0 \iff A_o = 0 \text{ ou } \frac{3b}{4} A_o^2 = -\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{d'après (3.I5)}$$

(cette dernière égalité a lieu moyennant la condition (3.2I) )

$$\left|\frac{\partial F_2(a,\varepsilon)}{\partial A}\right|_{\substack{\varepsilon = 0\\ a = a_o}} = \left|\frac{\partial F_2(a,\varepsilon)}{\partial A}\right|_{\left.\substack{\varepsilon = 0\\ A = A_o\\ B = 0}\right\}} = \left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4} b A_o^2 + \frac{3}{2} b A_o^2$$

$$= \left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{9}{4} b A_o^2$$

$$= J$$

$$\text{si } b = 0 \qquad J \neq 0 \iff \alpha \neq -2\sigma$$

$$\text{si } b \neq 0 \qquad J \neq 0 \iff A_o^2 \neq -\frac{4}{9b}\left(\sigma + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\iff \begin{cases} A_o = 0 \text{ et } \alpha \neq -2\sigma \\ \text{ou } A_o \neq \pm \frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2(-\alpha - 2\sigma)}{b}} \end{cases}$$

Nous trouvons donc des solutions que nous n'avions pas obtenues auparavant.

---

CHAPITRE 4.

## CONSERVATION DE LA PROPRIETE (E) PAR RAPPORT A UNE MATRICE S PAR PASSAGE A UN SYSTEME A COEFFICIENTS CONSTANTS.

### I. PASSAGE D'UN SYSTEME A COEFFICIENTS PERIODIQUES A UN SYSTEME A COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CAS NON LINEAIRE.

Considérons le système:

$$\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon) \tag{4.I}$$

où
- $x$ est un n-vecteur $\in \mathbb{C}^n$, $x = x(t)$
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est continue $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{C}^n$ et T-périodique en t: $f(t + T,x,\varepsilon)=f(t,x,\varepsilon)$
- $B(t + T) = B(t)$, B est une matrice n x n
- $\varepsilon$ est un petit paramètre.

Nous voudrions le ramener à un système à coefficients constants

$$\dot{y} = A\,y + \varepsilon' g(t,y,\varepsilon') \tag{4.2}$$

où
- $y$ est un n-vecteur $\in \mathbb{C}^n$, $y = y(t)$
- $g: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est continue $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{C}^n$ et T-périodique en t : $g(t + T,x,\varepsilon)= g(t,x,\varepsilon)$
- A est une matrice constante n x n
- $\varepsilon'$ est un petit paramètre.

Or nous savons par le théorème de Floquet que nous pouvons ramener un système linéaire à coefficients périodiques

$$\dot{x} = B(t)x \tag{4.3}$$

à un système à coefficients constants

$$\dot{y} = A\,y \tag{4.4}$$

moyennant la tranformation:

$$x(t) = P(t)y(t) \tag{4.5}$$

où $P(t)$ est une matrice régulière, T-périodique: $P(t + T) = P(t)$.

Les matrices P et A proviennent d'une décomposition (non unique) d'une matrice fondamentale $X(t)$ du système (4.3) sous la forme

$$X(t) = P(t)\, e^{At} \tag{4.6}$$

Nous allons appliquer la transformation (4.5) à notre système non linéaire (3.I):

$$\dot{x} = B\,x + \varepsilon\, f(t,x,\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow [\dot{Py}] = B\,P\,y + \varepsilon\, f(t,\ Py,\varepsilon) \qquad \text{par (4.5)}$$

$[\dot{\ }]$ indique que la dérivée porte sur le produit.

$$\Leftrightarrow \dot{P}y + P\dot{y} = B\,P\,y + \varepsilon\, f(t,\ P\,y,\varepsilon) \tag{4.7}$$

or $\dot{P} = B\,P - P\,A$ (cfr [σ]

en remplaçant dans (4.7) nous obtenons le système

$$P\,\dot{y} = P\,A\,y + \varepsilon f(t,\ P\,y,\varepsilon)$$

et en simplifiant par P qui est une matrice inversible, nous obtenons

$$\dot{y} = A\,y + \varepsilon\, P^{-1}(t)\, f\,(t,\ P(t)\,y,\varepsilon) \tag{4.8}$$

qui est donc un système à coefficients constants équivalent au système (4.I ).

Posons $g(t,y,\varepsilon) = P^{-1}(t)\ f\ (t,P\ (t)\ y,\varepsilon)$

Nous avons bien un système du type (4.2):

$$\dot{y} = A\ y + \varepsilon\ g(t,\ y,\varepsilon)$$

qui possède les propriétés demandées.

---

II. <u>QUE DEVIENT LA PROPRIETE (E) PAR RAPPORT A UNE MATRICE S LORS DU PASSAGE A UN SYSTEME A COEFFICIENTS CONSTANTS ?</u>

Supposons que le système

$$\dot{x} = B(t)\ x + \varepsilon\, f(t,x,\varepsilon) \tag{4.9}$$

a la propriété (E) par rapport à une matrice S.

Nous voudrions que le système

$$\dot{y} = A\ y + \varepsilon\, g(t,y,\varepsilon) \tag{4.10}$$

auquel nous pouvons ramener (4.9), ait aussi la propriété (E) par rapport à S.

Est-ce possible ? Si oui, comment devons-nous définir la matrice A, et par conséquent la matrice P qui vérifient la relation (4.6) ?

Autrement dit:

au départ nous savons: $S^2 = I$ (a)

$S\ B(-t)S\ x(t) = -\ B(t)x(t)$ (b)

$S\ f(-t,\ S\ x(t),\varepsilon) = -\ f(t,x(t),\varepsilon)$ (c)

$X(t) = P(t)\ e^{At}$ où $X(t)$ est une matrice fondamentale de (3.3), cette décomposition n'étant pas unique.

$$g(t,y(t),\varepsilon) = P^{-1}(t)f(t,P(t)y(t),\varepsilon)$$

et nous nous demandons si nous pouvons trouver une matrice A, et donc une matrice P, qui vérifie (3.6) et telle que:

$$S\,A\,S\,y\,(t) = -\,A\,y\,(t) \qquad (b')$$

$$S\,g(-t,S\,y\,(t),\varepsilon) = -\,g(t,y(t),\varepsilon) \qquad (c')$$

Recherche de (b').

Si nous parvenons à trouver une matrice A telle que S A = - A S, nous aurons la propriété (b').

Soit X(t) une matrice principale de (4.3) qui par hypothèse ((a) et (b)) a la propriété (E) par rapport à la matrice S

alors d'après le théorème I du chapitre 2, nous savons que:

$$S\,X(-t) = X(t)S$$

c'est-à-dire $S\,P(-t)\,e^{-At} = P(t)\,e^{At}\,S$ d'après (4.6)

multiplions les deux membres à gauche par $P^{-1}(t)$

à droite par $e^{At}$

$$\Longleftrightarrow P^{-1}(t)\,S\,P(-t) = e^{At}\,S\,e^{At} \qquad (4.II)$$

$$\Longrightarrow P^{-1}(T)S\,P(-T) = e^{AT}\,S\,e^{AT} \quad \text{en prenant l'égalité en } t = T$$

or $P(T) = P\,(o) = \phi\,(o)\,e^{-Ao} = I$

car P est T-périodique, (4.6) et $e^{O} = I$ où O = matrice nulle $n \times n$

I = matrice unité $n \times n$

$$\Longleftrightarrow S = e^{AT}\,S\,e^{AT}$$

$$\Longleftrightarrow S\,e^{AT}\,S = e^{-AT} \quad \text{en multipliant chaque membre à gauche par } S \text{, à droite par } e^{-AT}$$

$$\Longleftrightarrow e^{SAST} = e^{-AT} \quad \text{car pour toute matrice Q régulière } Q\,e^{A}\,Q^{-1} = e^{QAQ^{-1}}$$

(cfr appendice)

$$\Longleftrightarrow SAST = -\,AT + CT \text{ avec } e^{CT} = I \text{ et } AC = CA$$

$$\Longleftrightarrow SAS = -A + C \quad \text{avec } e^{CT} = I \text{ et } AC = CA \qquad (4.I2)$$

C n'est donc pas nécessairement nul car $e^{CT} = O \not\Rightarrow CT = O$

Le A trouvé dans la décomposition (4.6) ne nous convient donc pas nécessairement, il vérifie SAS = -A + C mais peut-être pas SAS = -A

Cherchons une matrice $A^*$ telle que

$$\begin{cases} A^* = A + K \\ SA^*S = -A^* \end{cases} \qquad (4.I3)$$

autrement dit, cherchons une matrice K telle que:

$$S\,(A + K)\,S = -(A + K)$$

$$\Longleftrightarrow SAS + SKS = -A-K$$

$$\Longleftrightarrow -A + C + SKS = -A -K \qquad \text{par (4.I2)}$$

$$\Longleftrightarrow C + SKS = -K$$

en multipliant à gauche chaque membre par S

nous voyons que la matrice K doit satisfaire

$$K S + S K = - S C \tag{4.I4}$$

cependant $C = S A S + A$ (4.I5)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C S = S A + A S & \text{en multipliant à droite par S} \\ S C = A S + S A & \text{en multipliant à gauche par S} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S C + C S \tag{4.I6}$$

Soit $K = - \frac{1}{2} C$ (4.I7)

cette matrice vérifie bien la relation (4.I4) d'après (4.I6).

Nous avons donc trouvé une matrice $A^*$ satisfaisant (4.I3)

$$A^* = A - \frac{1}{2} C = A - \frac{1}{2} (S A S + A) = \frac{1}{2} (A - S A S)$$

par(4.I7), (4.I5)

Il faut encore nous assurer des propriétés de la matrice $P^*$ correspondant à $A^*$ par (4.6) (3.6) $\Longrightarrow X(t) = P^*(t)\, e^{A^* t}$

$$\Longrightarrow P^*(t) = X(t)\, e^{-A^* t} \tag{4.I8}$$

$P^*$ régulière car $P^*$ est le produit de 2 matrices régulières

$P^*$ périodique ?

$$P^*(t) = P(t)\, e^{At}\quad e^{-A^* t} \qquad \text{par (3.I8) et (3.6)}$$

$$= P(t)\, e^{\frac{+Ct}{2}} \quad (4.I9) \text{ car } AC= CA, (3.I7) \text{ et } (3.I3)$$

$$\Longrightarrow e^{At} . e^{-\frac{Ct}{2}} = e^{(A-\frac{C}{2})t} = e^{A^* t}$$

$$P^*(t+T)=P(t+T)\, e^{\frac{C}{2}(t+T)}$$

$$= P^*(t)\, e^{\frac{CT}{2}} \qquad \text{car P est T-périodique et (4.I9)}$$

or $e^{CT} = I$ n'entraine pas que $e^{\frac{CT}{2}} = I$

$P^*(t)$ n'est donc pas nécessairement T-périodique

elle est cependant 2 T-périodique:

$$P^*(t + 2 T) = P(t + 2 T)\, e^{\frac{C}{2}(t+2T)}$$

$$= P^*(t)\, e^{CT}$$

$$= P^*(t)$$

Recherche de (c').

La propriété (c) peut s'écrire d'après (4.5) et en multipliant chaque membre à gauche par $P^{-1}(t)$

$$P^{-1}(t)S\, f(-t,\ SP(t)y(t),\varepsilon) = -\, P^{-1}(t)\ f\ (t,P(t)y(t),\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow S\ P^{-1}(-t)f(-t,P(-t)S\ y(t),\varepsilon) = -\ P^{-1}(t)f(t,P(t)y(t),\varepsilon)$$

car $P^{-1}(t)\ SP\ (-t) = e^{At}\ S\ e^{At}$ d'après (3.II)

$= S$ car nous avons vu que nous pouvions prendre A telle que $AS = -SA$

$$\Rightarrow P^{-1}(t)S = S\ P^{-1}(-t) \text{ et } S\ P(-t) = P(t)S \tag{4.20}$$

$$\Leftrightarrow S\ g(-t,S\ y(t),\varepsilon) = -\ g(t,y(t),\varepsilon)$$

ce qui nous donne la thèse (c') .

---

Conclusion:

Si nous avons un système non linéaire

$$\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon) \tag{4.2I}$$

à coefficients T-périodiques en t, qui possède la propriété (E) par rapport à une matrice S, alors nous pouvons le ramener à un système linéaire

$$\dot{y} = A\ y + \varepsilon\, g(t,x,\varepsilon) \tag{4.22}$$

à coefficients constants qui possède aussi la propriété (E) par rapport à S.

Cependant nous ne sommes pas certains que la solution y(t) de (4.22) correspondant à la solution x(t) de (4.2I) par la transformation (4.5) est encore T-périodique. Nous pouvons seulement affirmer qu'il nous est possible de trouver une matrice A telle que la solution y(t) de (4.22) correspondant à la solution T-périodique x(t) de (4.2I) soit 2 T-périodique.

En effet, si pour A nous prenons la matrice $A^*$ rencontrée plus haut et à laquelle était associée par (3.6) une matrice $P^*$ 2T-périodique nous avons

$$y(t) = P^{*-1}(t)\ x(t)$$

qui est bien 2 T-périodique.

CHAPITRE 5.

# INTEGRALES PREMIERES

Hale a considéré ensuite le cas où le système admet une ou plusieurs intégrales premières.

Nous allons d'abord rappeler ses résultats.

Définition:

Une intégrale première d'un système

$$\dot{x} = g(t,x) \tag{5.1}$$

est une fonction $u: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

qui a des dérivées partielles premières continues,

qui est telle que

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \cdot g(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 0 \qquad \forall t,\ x \tag{5.2}$$

Lemme I.

> Si $x(t,t_o,x_o)$ est une solution de $\dot{x} = g(t,x)$
>
> $x(t_o,t_o,x_o) = x_o$
>
> $u$ est une intégrale première de $\dot{x} = g(t,x)$
>
> alors $u(t,x(t,t_o,x_o)) = u(t_o,x_o)$ $\forall t$ pour lequel $x(t,t_o,x_o)$ est défini.

Lemme 2.

> Si $u$ est une intégrale première de $\dot{x} = g(t,x)$
>
> qui a des dérivées partielles secondes continues
>
> alors $u_x(t,x_o) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial u(t,x(t,x_o))}{\partial x}$ est une solution de l'équation
>
> $$\dot{w} = -w\,G \quad \text{où } G = G(t,x_o) = \frac{\partial g(t,x(t,x_o))}{\partial x} \tag{5.3}$$

Lemme 3.

Si • $u(t + T,x,\varepsilon) = u(t,x,\varepsilon)$ est une intégrale première de

$$\dot{x} = B(t)x + \varepsilon f(t,x)$$

qui a des dérivées partielles secondes continues par rapport à t et x

• $x^*(a,\varepsilon)$ est la fonction T-périodique définie en (I.8)

alors $\int_0^T \left[u_x\, Q\, f\right]_{x = x^*(a,\varepsilon)} (t)\, dt$ pour $\varepsilon \neq 0$ (5.4)

Si • $u(t,x,\varepsilon) = u(t + T,x,\varepsilon)$ est une intégrale première de

$$\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon f(t,x)$$

avec $u_x(t,o,o) \neq o$

• $x^*(a,\varepsilon)$ est la fonction T-périodique définie au lemme 3 du chapitre I

alors $u_x(t,o,o)$ est une solution T-périodique non triviale de

$$\dot{\omega} = - \omega B\, (t) \tag{5.5}$$

Par conséquent il existe un p-vecteur h non nul tel que

$$u_x(t,o,o) = h\, \varphi(t) \tag{5.6}$$

Il existe une fonction continue $\mu(t,a,\varepsilon) = \mu(t + T,\, a,\varepsilon)$ telle que

$$\mu(t,\, o,o) = o \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} u_x(t,x^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon) &= u_x(t,o,o) + \mu(t,a,\varepsilon) \\ &= h\varphi(t) + \mu(t,a,\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.8}$$

La thèse (5.4) peut s'écrire:

$$\int_0^T u_x(t,x^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)\, \varphi'(t)\, D^{-1}\, dt \quad F(a,\varepsilon) \quad \text{d'après (I.5), (I.10)}$$

ou encore:

$$\left[h + \int_0^T \mu(t,a,\varepsilon)\varphi'(t)\, D^{-1}\, dt\right] F(a,\varepsilon) = o \qquad \text{d'après (5.8), (I.4)}$$

Vu que h est un vecteur non nul et $\mu(t,o,o) = o$ il s'en suit que:

$$\exists\, \alpha_1 \neq o \quad \varepsilon_1 \neq o \quad \text{tels que} \quad h + \int_0^T \mu(t,a,\varepsilon)\, \varphi'(t) D^{-1}\, dt \neq o \quad \text{pour } |a| \leq \alpha_1,\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$$

Il existe donc une relation linéaire entre les composantes de F c'est-à-dire entre les fonctions de bifurcations de $\dot{x} = B(t)\, x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$

> S'il y a une intégrale première $u(t,x,\varepsilon) = u(t+T,x,\varepsilon)$ de
> $$\dot{x} = B(t)\,x + \varepsilon\, f(t,x,\varepsilon)$$
> avec $u_x(t,o,o) \neq o$
> alors une des fonctions de bifurcation est superflue.

<u>Définition:</u>

Si $u_1,\ldots, u_k$ sont des intégrales premières de $\dot{x} = B(t)\,x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$ nous disons qu'elles sont <u>linéairement indépendantes</u> si la matrice $u_x(t,o,o) = \dfrac{\partial u(t,o,o)}{\partial x}$ où $u = (u_1,\ldots,u_k)$ a un rang k.

<u>Théorème.</u>

> Soient
> - $u = (u_1,\ldots\ldots,u_k)$ $k \leq p$ k intégrales premières linéairement indépendantes de $\dot{x} = B(t)\,x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon)$
> - $u(t+T,x,\varepsilon) = u(t,x,\varepsilon)$ continues et ayant des dérivées partielles secondes continues par rapport à $t,x$
>
> alors il existe $\alpha_1 > o$ , $\varepsilon_1 > o$
>
> il existe une matrice H, k x p de rang k telle que
> $$H\,F(a,\varepsilon) = o \quad \text{pour } |a| \leq \alpha_1 \,, |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$$
> Si k = p, alors il existe une famille p-paramétrique de solutions T-périodiques $x^*(a,\varepsilon)$ $|a| \leq \alpha_1, |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ où $x^*(a,\varepsilon)$ donné en (I.8)

Si k = p alors H est une matrice non singulière et donc
$$H\,F(a,\varepsilon) = o \Longrightarrow F(a,\varepsilon) = o \quad \text{pour } |a| \leq \alpha_1, |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$$
c'est-à-dire les équations de bifurcation sont automatiquement vérifiées.

Dans son livre "Ordinary Differential Equations" Hale propose l'exercice suivant:

Soit le système:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma x_2 + f_1(x_1, x_2, y) \\ \dot{x}_2 &= -\sigma x_1 + f_2(x_1, x_2, y) \\ \dot{y} &= C y + g(x_1, x_2, y) \end{aligned} \qquad (5)$$

où $\sigma$ est positif

$x_1$, $x_2$ sont des scalaires

$y$ est un m-vecteur

$f_1$; $f_2$, $g$ sont analytiques dans un voisinage de $x_1 = x_2 = o, y = o$, avec les séries de puissances commençant avec des termes de degré au moins deux.

Supposons
- que ce système ait une intégrale première $W(x_1, x_2, y)$ qui a des dérivées secondes continues par rapport à $x_1, x_2, y$
- et que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m$ de la matrice constante C, satisfont $\lambda_k \neq i\sigma n$ pour $k = 1, 2, \ldots m$ et $\forall n$ entier.

Prouvez que ce système à une famille à deux paramètres de solutions périodiques.

Indication:

Introduisez dans (5) les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \sigma\theta \\ x_2 = -\rho \sin \sigma\theta \end{cases}$$

et éliminez t dans l'équation résultante pour obtenir des équations differentielles pour $\rho$, y comme fonctions de $\theta$.

Nous proposons de résoudre cet exercice dans le chapitre I de la deuxième partie de ce travail.

# DEUXIEME PARTIE.

## SYSTEMES DE LYAPUNOV

## ET

## SYSTEMES PROCHES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

CHAPITRE I.

# SYSTEME DE LYAPUNOV

## I. POSITION DU PROBLEME.

Considérons le système d'équations différentielles d'ordre n

$$\frac{d\,x_s}{dt} = a_{s1}\,x_1 + \ldots\ldots a_{sn}\,x_n + X_s^*(x_1,\ldots,x_n) \qquad s = 1,\ldots,n \tag{I.I}$$

où • les $a_{sj}$ sont des constantes réelles

• les $X_s^*$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1,\ldots,x_n$ dont le développement commence par des termes au moins du second ordre en $x_1,\ldots,x_n$ .

Le système (I.I) est un système de Lyapunov s'il satisfait les trois hypothèses fondamentales que nous allons indiquer ci-après en dégageant chaque fois les conséquences qu'elles entraînent pour le système (I.I).

I°) Première hypothèse.

Supposons que l'équation caractéristique:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{I.2}$$

admet au moins une paire de racines $\pm\lambda i$ ( $\lambda$ réel) .

En conséquence, le système (I.I) peut se ramener au système:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y \\ \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1}x_1 + \ldots\ldots + b_{sm}\,x_m + a_s\,x + b_s\,y + X_s \qquad (s = 1,\ldots\ldots,m) \end{aligned} \tag{I.3}$$

$$m = n - 2$$

où • $b_{sj}$, $a_s$, $b_s$ sont des constantes réelles

• $X$, $Y$, $X_s$ sont des fonctions analytiques des variables $x, y, x_1, \dots x_m$ dont les développements commencent par des termes au moins du second ordre en $x_1, \dots, x_m$, $x$, $y$.

Démonstration.

I. L'équation caractéristique du système adjoint a également les racines $\pm \lambda i$ auxquelles correspondent les solutions de composantes

$$(A_s + i\, B_s)\, e^{-i\lambda t} \quad \text{et} \quad (A_s - i\, B_s)\, e^{i\lambda t} \qquad s = 1, \dots, n \qquad (I.4)$$

où $A_s$ et $B_s$ sont des constantes réelles.

En effet, si nous exprimons que $\left[(A_1 + i\, B_1), \dots, (A_n + i\, B_n)\right] e^{-i\lambda t}$ est solution du système adjoint

$$\dot{y} = - y \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nous obtenons le système de n équations

$$a_{1s}(A_1 + i\, B_1) + \dots + a_{ns}(A_n + i\, B_n) = i\lambda\, (A_s + i\, B_s) \quad s = 1 \dots n$$

en posant $A_s + i\, B_s = C_s$, nous obtenons le système homogène de n équations à n inconnues:

$$a_{1s}\, C_1 + a_{2s}\, C_2 + \dots + (a_{ss} - i\lambda) C_s + \dots + a_{ns}\, C_n = 0 \qquad (I.5)$$

dont le déterminant est nul vu que (I.2) admet la racine $\lambda i$ et donc (I.5) admet une solution non triviale $C_1, \dots, C_n$.

Nous pouvons, par conséquent, trouver les constantes $A_s$ et $B_s$.

Si nous avions considéré l'expression $(A_s - i\, B_s)\, e^{i\lambda t}$, nous aurions obtenus

$$a_{1s}\,(A_1 - i\, B_1) + \dots + a_{ns}(A_n - i\, B_n) = - i\lambda\, (A_s - i\, B_s) \quad s = 1, \dots n$$

c'est-à-dire: $a_{1s}\, D_1 + \dots + (a_{ss} + i\lambda) D_s + \dots + a_{ns}\, D_n = 0 \quad s = 1, \dots, n$

où $D_s = A_s - i\, B_s$, et comme (I.2) admet la racine $-\lambda i$, nous arrivons au même résultat.

2. La partie linéaire du système (I.I) admet les intégrales premières:

$$(x + i\, y)\, e^{-i\lambda t} \qquad \text{et} \quad (x - i\, y)\, e^{i\lambda t} \qquad (I.6)$$

$$\text{où } x = \sum_{s=1}^{n} A_s x_s \text{ et } y = \sum_{s=1}^{n} B_s x_s \tag{I.7}$$

$A_s$, $B_s$ étant les constantes de ci-dessus.

En effet, $(x + i\,y)\, e^{-i\lambda t}$ est une intégrale première de la partie linéaire de (I.I)

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}(x + i\,y)\, e^{-i\lambda t} = o$

$\Leftrightarrow \dot{x} + i\,\dot{y} - i\,\lambda(x + i\,y) = o$ par dérivation et simplification par $e^{-i\lambda t}$

$\Leftrightarrow (\dot{x} + \lambda y) + i(\dot{y} - \lambda x) = o$

$$\Leftrightarrow \dot{x} + \lambda y = o \text{ et } \dot{y} - \lambda x = o \tag{I.8}$$

De même $(x - i\,y)\, e^{i\lambda t}$ est une intégrale première $\Leftrightarrow$ (I.8)

Nous devons donc démontrer:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda x \end{cases} \tag{I.9}$$

Considérons la partie linéaire de (I.I) et multiplions, la s-ième équation ($s = 1, \ldots n$) successivement par $A_s$ et $B_s$

$$A_s \frac{dx_s}{dt} = (a_{s1} x_1 + \ldots . a_{sn} x_n)\, A_s \qquad s = 1, \ldots, n$$

$$B_s \frac{d\,x_s}{dt} = (a_{s1} x_1 + \ldots . + a_{sn} x_n)\, B_s \qquad s = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} A_s x_s\right) = x_1\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{s1} A_s\right) + \ldots\ldots + x_n\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{sn} A_s\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} B_s x_s\right) = x_1\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{s1} B_s\right) + \ldots\ldots + x_n\left(\displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{sn} B_s\right) \end{cases}$$

or nous voulons (I.9), donc nous devons voir d'après (I.7) si:

$$\begin{cases} x_1 \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{s1} A_s + \ldots\ldots + x_n \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{sn} A_s = -\lambda \displaystyle\sum_{s=1}^{n} B_s x_s \\ x_1 \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{s1} B_s + \ldots\ldots + x_n \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{sn} B_s = \lambda \displaystyle\sum_{s=1}^{n} A_s x_s \end{cases}$$

c'est-à-dire si en égalant les coefficients de $x_i$ ($i = 1 \ldots n$) dans les deux membres nous avons:

$$a_{1i} A_1 + a_{2i} A_2 + \ldots\ldots + a_{ni} A_n = -\lambda B_i \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$$

$$a_{1i} B_1 + a_{2i} B_2 + \ldots\ldots + a_{ni} B_n = \lambda A_i \qquad i = 1, \ldots\ldots, n \tag{I.IO}$$

or en posant $C_s = A_s + i\, B_s$ et en additionnant $(I.IO)_1 + i\,(I.IO)_2$, nous retrouvons (I.5) qui est bien satisfaite pour $C_s = A_s + i\, B_s$.
Par conséquent (I.9) est bien satisfait pour x et y définis comme en (I.7).

3. Alors par le changement de variables $x_n \rightsquigarrow y$, $x_{n-1} \rightsquigarrow x$, nous obtenons le système (I.3) équivalent au système (I.I) moyennant notre première hypothèse.

2°) Deuxième hypothèse.

Supposons que
- les racines $\pm \lambda i$ de (I.2) sont simples
- leurs multiples entiers ne sont pas racines
- (I.2) n'a pas de racines nulles.

Or (I.2) doit coincider avec l'équation caractéristique de (I.3) (c'est-à-dire avoir même racines). Cette équation peut alors s'écrire:

$$\rho^2 + \lambda^2 = 0 \qquad \text{(I.II)}$$

$$\text{et } D(\rho) = \begin{vmatrix} b_{II} - \rho & b_{I2} & \cdots\cdots & b_{Im} \\ b_{2I} & b_{22} - \rho & \cdots\cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{mI} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & b_{mm} - \rho \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(I.I2)} \qquad (m = n - 2)$$

Notre supposition entraîne que (I.I2) n'a pas de racine zéro ni $\pm\, p\lambda i$ où p entier.
Nous allons voir que par conséquent on peut écrire (I.3) de façon que $a_s$ et $b_s$ soient annulés.

Démonstration:

Pour ce, faisons la substitution:

$$\bar{x}_s = x_s + \alpha_s\, x + \beta_s\, y \qquad (s = 1, \ldots, m) \qquad \text{(I.I3)}$$

où $\alpha_s$, $\beta_s$, sont des constantes à déterminer.

$$\Rightarrow \frac{d\,\bar{x}_s}{dt} = \frac{d\,x_s}{dt} + \alpha_s \frac{dx}{dt} + \beta_s \frac{dy}{dt} \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_{si} (\bar{x}_i - \alpha_i x - \beta_i y) + a_s x + b_s y - \lambda \alpha_s y + \lambda \beta_s x$$

$$+ X_s(x,y,x_1,\ldots\ldots,x_m) + \alpha_s X(x,y,x_1,\ldots\ldots,x_m) + \beta_s Y(x,y,x_1,\ldots\ldots,a_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_{si} \bar{x}_i - \left(\sum_{i=1}^{m} b_{si} \alpha_i - \lambda \beta_s - a_s\right) x - \left(\sum_{i=1}^{m} b_{si} \beta_i + \lambda \alpha_s - b_s\right) y + \alpha_s X$$

$$+ \beta_s Y + X_s \tag{I.I4}$$

Nous voudrions que $\alpha_s, \beta_s$ soient tels que les coefficients de $x$ et $y$ dans (I.I4) soient nuls. Pour cela il faut que $\alpha_s, \beta_s$ satisfassent:

$$b_{s1}\alpha_1 + \ldots\ldots + b_{sm}\alpha_m - \lambda\beta_s = a_s \qquad s = 1 \ldots\ldots m$$

$$b_{s1}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{sm}\beta_m + \lambda\alpha_s = b_s \qquad s = 1 \ldots\ldots m \tag{I.I5}$$

Posons $\gamma_s = \alpha_s + i\beta_s$ et écrivons $(I.I5)_1 + i\,(I.I5)_2$, nous obtenons:

$$b_{s1}\gamma_1 + \ldots\ldots + (b_{ss} + i\lambda)\gamma_s + \ldots\ldots + b_{sm}\gamma_m = a_s + i\, b_s \qquad s = 1 \ldots\ldots m \tag{I.I6}$$

Le déterminant de ce système non homogène en $\gamma_s$ est non nul car $D(-i\lambda) \neq 0$ vu que (I.I2) n'a pas de racine $\pm\, p\lambda i$ $\;p$ entier.
Nous pouvons donc résoudre (I.I6) et trouver les inconnues $\gamma_1$ , autrement dit, nous pouvons déterminer les constantes $\alpha_s$ et $\beta_s$ apparaissant dans (I.I3) et annulant les coefficients de $x$ et $y$ dans (I.I4).

Par le changement de variables (I.I3) nous obtenons donc le système:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + \bar{X}(x,y,\bar{x}_1,\ldots\ldots,\bar{x}_m) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda x + \bar{Y}(x,y,\bar{x}_1,\ldots\ldots,\bar{x}_m) \\ \dfrac{d\bar{x}_s}{dt} = b_{s1}\bar{x}_1 + \ldots\ldots + b_{sm}\bar{x}_m + \bar{X}_s(x,y,\bar{x}_1,\ldots\ldots,\bar{x}_m) \quad s = 1,\ldots m \end{cases}$$

Si nous réadaptons nos notations antérieures en sachant qu'elles ne désignent plus exactement les mêmes variables et fonctions, nous écrirons le système précédent (équivalent à I.3) sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x,y,x_1,\ldots,x_m) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x,y,x_1,\ldots,x_m) \\ \dfrac{dx_s}{dt} = b_{s1}x_1 + \ldots\ldots b_{sm}x_m + X_s(x,y,x_1,\ldots\ldots,x_m) \quad s = 1,\ldots,m \end{cases} \tag{I.I7}$$

où $X, Y, X_s$ sont des fonctions analytiques de $x, y, x_1, \dots, {}_m$ dont les développements commencent par des termes du second ordre.

3°) Troisième hypothèse.

Supposons que le système (I.17) admet l'intégrale première:

$$H(x, y, x_1, \dots, x_m) = \text{constante} \tag{I.18}$$

où H est une fonction analytique des variables $x, y, x_1, \dots, x_m$ qui contient des termes du second ordre et qui ne s'annulent pas pour

$$x = y = x_1 = \dots = x_m = 0$$

Alors le développement de H commence par les termes du second ordre.

Démonstration:

D'après notre hypothèse, nous savons que H a la forme suivante:

$$\begin{aligned} H &= A\,x + B\,y + \sum_{s=1}^{m} A_s\, x_s \\ &+ C\,x^2 + D\,x\,y + E\,y^2 + \sum_{s=1}^{m} C_s x\, x_s + \sum_{s=}^{m} D_s y\, x_s + W(x_1, \dots, x_m) \\ &+ S(x, y, x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \tag{I.19}$$

où W est une forme quadratique des variables $x_1, \dots, x_m$

S est une fonction analytique de $x, y, x_1, \dots, x_m$ dont le développement commence par des termes du troisième ordre.

(Rem.: les $A_s, C_s$ n'ont rien à voir avec ce que ces notations signifiaient en 1°) et 2°)).

H est une intégrale première de (I.17)

$$\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x}(-\lambda y + X) + \frac{\partial H}{\partial y}(\lambda \quad + Y) + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial x_s}(b_{s1} x_1 + \dots + b_{sm} x_m + X_s) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \left(A + 2\,C\,x + D\,y + \sum_{s=1}^{m} C_s\, x_s + \frac{\partial S}{\partial x}\right)(-\lambda y + X) \\ &+ \left(B + 2\,E\,y + D\,x + \sum_{s=1}^{m} D_s\, x_s + \frac{\partial S}{\partial y}\right)(\lambda x + Y) \\ &+ \sum_{s=1}^{m}\left(A_s + C_s\, x + D_s\, y + \frac{\partial W}{\partial x_s} + \frac{\partial S}{\partial x_s}\right)(b_{s1}\, x_1 + \dots + b_s\, x_m + X_s) = 0 \end{aligned}$$

Égalons terme à terme les coefficients des termes de même puissance en $x, y, x_s$ autrement dit annulons ces coefficients vu que le membre de droite est identiquement nul.

- <u>termes du premier ordre</u>, c'est-à-dire termes en $x$, en $y$ et en $x_s$.

  - en $x$ : $\lambda B = o \Leftrightarrow B = o$ vu $\lambda \neq$ par hypothèse
  - en $y$ : $-\lambda A = o \Leftrightarrow A = o$ idem
  - en $x_s$: $b_{1s} A_1 + b_{2s} A_2 + \ldots + b_{ms} A_m = o$ $s = 1, \ldots, m$

  Le déterminant de ce système = $D(o)$ qui est $\neq o$ car (I.12) n'a pas de racine nulle. Ce système n'admet donc que la solution triviale:

  $$A_1 = A_2 = \ldots = A_m = o$$

  Nous en concluons que $H$ est une fonction analytique de $x, y, x_1, \ldots x_m$ dont le développement commence par des termes du second ordre.

- <u>termes du second ordre,</u> c'est-à-dire termes en $x^2, y^2, xy, x_s^2, x\, x_s, y\, x_s$

  - en $x^2$ : $\lambda D = o \Leftrightarrow D = o$ vu $\lambda \neq o$ par hypothèse
  - en $y^2$ : $\lambda D = o$
  - en $xy$ : $2\lambda(E-C) = o \Leftrightarrow E = C$ idem
  - en $x\,x_s$: $b_{1s} C_1 + \ldots\ldots + b_{ms} C_m + \lambda D_s = o$
  - en $y\,x_s$: $b_{1s} D_1 + \ldots\ldots + b_{ms} D_m - \lambda C_s = o$ (I.20)

  Posons $E_s = C_s + i\, D_s$ et écrivons $(I.20)_1 + i\, (I.20)_2$

  $$b_{s1} E_1 + \ldots\ldots + (b_{ss} + i\lambda) E_s + \ldots\ldots + b_{ms} E_m = o$$

  Le déterminant de ce système homogène est $D(-i\lambda) \neq o$ vu que (I.12) n'a pas de racines $\pm\, p\lambda i$ où $p$ entier; aussi ce système n'admet-il que la solution triviale $E_1 = E_2 = \ldots = E_m = o$ et donc $C_s = D_s = o$ $s = 1 \ldots m$.

  Si, de plus, nous prenons $C = 1$ (en divisant (I.19) par $C$ si nécessaire $C \neq o$ vu que par hypothèse $H$ contient des termes du second ordre) nous voyons que l'intégrale première $H$ de (I.16) est de la forme:

$$H = x^2 + y^2 + W(x_1, \ldots, x_m) + S(x, y, x_1, \ldots, x_m) \qquad (I.21)$$

où $W$ est une forme quadratique en $x_1, \ldots, x_m$

$S$ est une fonction analytique de $x, y, x_1, \ldots, x_m$ dont le développement commence par des termes du troisième ordre au moins en $x, y, x_s$

Rappelons:

Le système (I.1) muni des trois hypothèses indiquées est appelé:
<u>système de Lyapunov.</u>

## 2. SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

Si dans le système (I.I7) nous effectuons le changement de variables:

$$x, y, x_s \rightsquigarrow \rho, \theta, z_s \qquad \text{où} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ x_s = \rho\, z_s \qquad s = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{2.I}$$

nous obtenons alors le système:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho^2 \mathcal{R}(\rho, z_j, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \rho \Theta(\rho, z_j, \theta) \\ \frac{dz_s}{dt} &= b_{s1} z_1 + \ldots + b_{sm} z_m + \rho Z_s(\rho, z_j, \theta) \quad s = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\mathcal{R}$, $\Theta$, $Z_s$ sont des fonctions analytiques des variables $\rho, z_1, \ldots, z_m$ les coefficients de leurs développements sont des fonctions $2\pi$-périodiques en $\theta$ et sont des polynômes par rapport à $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Démonstration:

$\rho = \pm\left[x^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}$ prenons $\rho$ positif

$$\begin{aligned} \bullet\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{2\rho}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\left(x(-\lambda y + X) + y(\lambda x + Y)\right) \\ &= \cos\theta\, X(x, y, x_1, \ldots, x_m) + \sin\theta\, Y(x, y, x_1, \ldots, x_m) \\ &= \cos\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho z_j) + \sin\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho z_j) \end{aligned}$$

or les développements de X, Y commencent par des termes du second ordre au moins en $x, y, x_s$ aussi pouvons-nous écrire:

$$= \rho^2 \mathcal{R}(\rho, z_j, \theta)$$

où $\mathcal{R}$ vérifie les conditions indiquées ci-dessus.

$$\bullet\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \left[-\lambda y + X - \cos\theta\,\rho^2 \mathcal{R}(\rho, z_j, \theta)\right] \Big/ -\rho\sin\theta \\ &= \lambda - \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho z_j) - \rho^2\cos\theta\, \mathcal{R}(\rho, z_j, \theta)\right. \\ &= \lambda + \rho\,\Theta(\rho, z_j, \theta) \end{aligned}$$

où Ⓗ vérifie les conditions indiquées plus haut étant donné la forme des fonctions X et $R$ .

- $$\frac{d\,x_s}{dt} = b_{s1}\,x_1 + \dots\dots + b_{sm} + X_s(x,y,x_j) \qquad s = 1,\dots,m$$

$$\Rightarrow \frac{d\,z_s}{dt} = b_{s1}\,z_1 + \dots\dots + b_{sm}\,z_m + \frac{1}{\rho} X_s\,(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\,z_j)$$

$$= b_{s1}\,z_1 + \dots\dots + b_{sm}\,z_m + \rho\,Z_s(\rho,\ z_j, \theta) \quad s = 1,\dots,m$$

où $Z_s$ vérifie les conditions indiquées plus haut.

cqfd.

En éliminant t de (2.2) et en utilisant l'intégrale(I.2I), nous pouvons ramener le système (2.2) d'ordre $m + 2$ à un système d'ordre m.

<u>Démonstration.</u>

- $$\frac{d\,z_s}{dt} = \frac{d\,z_s}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\,z_s}{d\theta} = \frac{d\,z_s}{dt} \Big/ \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,z_s}{d\theta} = \frac{b_{s1}\,z_1 + \dots\dots + b_{sm}\,z_m + \rho\,Z_s\,(\rho,\ z_j, \theta)}{\lambda + \rho Ⓗ (\rho,\ z_j, \theta)}$$

$$= \frac{c_{s1} z_1 + \dots\dots + c_{sm}\,z_m + \frac{\rho}{\lambda} Z_s\,(\rho, z_j, \theta)}{1 + \frac{\rho}{\lambda} Ⓗ (\rho, z_j, \theta)} \qquad [\cdot]$$

$$\text{où} \quad c_{sj} = \frac{b_{sj}}{\lambda} \qquad (2.3)$$

$$= c_{s1}\,z_1 + \dots\dots + c_{sm}\,z_m + \rho\,Z_s^*\,(\rho, z_j, \theta) \qquad (2.4)$$

où $Z_s^*$ est du même type que $Z_s$ c'est-à-dire est une fonction analitique des variables $\rho$, $z_1, \dots\dots, z_m$ dont les coefficients de développement sont des fonctions $2\pi$-périodiques en $\theta$ qui sont des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ .

- On passe aux nouvelles variables: $\rho, z_s, \theta$ dans l'intégrale (I.2I)

$$H = x^2 + y^2 + W(x_1,\dots\dots,x_m) + S\,(x,y,x_1,\dots,x_m) = \mu^2$$

$$= \rho^2 + \rho^2 \sum_{ij=1}^{m} a_{ij}\,z_i\,z_j + S\,(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\,z_j) = \mu^2$$

or le développement de S commence par des termes au moins du troisième ordre en $x, y, x_1, \dots, x_m$

$$= \rho^2 \left[1 + F(\rho, z_j, \theta)\right] = \mu^2$$

où F fonction analytique des variables $\rho$, $z_1, \dots, z_m$ qui s'annule quand $\rho = z_1 = \dots = z_m = 0$ et dont les coefficients du développement sont des polynômes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$

On peut résoudre (2.5) par rapport à $\rho$ pour ce nous devons prendre la racine carrée. $\mu$ étant une constante arbitraire, prenons $\mu = \sqrt{\mu^2}$

$$(2.5) \Rightarrow \rho\left[1 + F^*(\rho, z_j, \theta)\right] = \mu \qquad (2.6)$$

où $F^*$ est une fonction du même type que F

$$\Rightarrow \rho = \mu \left[1 + G^*(\rho, z_j, \theta)\right.$$

où $G^*$ est une fonction du même type que F et $F^*$

$$\Rightarrow \rho = \mu \left[1 + G(\mu, z_j, \theta)\right. \qquad (2.7)$$

où G est une fonction analytique des variables $\mu, z_j, \theta$ du même type que $G^*$

En portant la valeur de $\rho$ exprimée en (2.7) dans l'équation (2.4) nous obtenons:

$$\frac{d z_s}{d\theta} = c_{s1} z_1 + \dots + c_{sm} z_m + \mu U_s(\mu, z_j, \theta) \quad s = 1, \dots, m \qquad (2.8)$$

où $z_s$ est fonction de $\theta$
$U_s$ est une fonction de même type que G
analytique par rapport à $\mu$, $z_1, \dots, z_m$
$2\pi$-périodique en $\theta$.

Nous avons donc ramené le système (2.2) d'ordre m+2 à un système d'ordre m par changement de variable indépendante.

cqfd.

Or (I.I2) n'a pas de racine zéro ni $\pm p\lambda i$ où p entier par conséquent:

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & c_{2m} \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mm}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.9)$$

n'a pas de racine o ni $\pm pi$ où p entier.

en effet $\Delta(\rho) = \text{dét} \begin{pmatrix} c_{11}-\rho & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} = \text{dét } \lambda^{-1} \begin{pmatrix} b_{11}-\rho\lambda & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}-\rho\lambda \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\lambda^m} D(\rho\lambda)$$

$$D(\rho\lambda) = 0 \Leftrightarrow \Delta(\rho) = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$$

$$D(\pm p\lambda i) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta(\pm p i) \neq 0$$

$$D(0) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta(0) \neq 0$$

Le système (2.8) est donc un système non résonnant.

Il admet donc une seule solution périodique qui devient la solution génératrice pour $\mu = 0$.

Pour $\mu = 0$ (2.8) devient:

$$\frac{d z_s^0}{d\theta} = c_{s1} z_1^0 + \cdots + c_{sm} z_m^0 \tag{2.10}$$

Ce système a un déterminant non nul vu que (2.9) n'a pas de racine nulle, il admet donc pour seule solution, la solution triviale:

$$z_1^0 = z_2^0 = \cdots\cdots z_m^0 = 0 \tag{2.11}$$

La solution périodique du système non linéaire (2.6) sera par conséquent de la forme:

$$z_s(\theta) = \mu z_s^{(1)}(\theta) + \mu^2 z_s^{(2)}(\theta) + \cdots \qquad s = 1,\dots,m \tag{2.12}$$

où $z_s^{(k)}$ est une fonction $2\pi$-périodique en $\theta$.

Les coefficients $z_s^{(k)}(\theta)$ peuvent être trouvés en reportant la série (2.12) dans l'équation (2.8).

Nous avons ainsi démontré l'existence d'une solution périodique de (2.2) si $\theta$ est pris comme variable indépendante et cette solution dépend analytiquement de la constante $\mu$ que vaut l'intégrale première.

D'après (2.7) nous savons que:

$$\rho = \mu + \mu\, G(\mu, z_j, \theta)$$

où G est analytique par rapport à $\mu$, $z_1,\dots,z_m$ s'annule en $\mu = 0$ et dont les coefficients du développement sont des polynômes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ ; aussi pouvons-nous écrire $\rho$ sous la forme:

$$\rho = \mu + \mu^2 \rho^{(2)}(\theta) + \mu^3 \rho^{(3)}(\theta) + \dots \qquad (2.13)$$

où $\rho^{(k)}$ est une fonction $2\pi$-périodique en $\theta$

les coeffcients $\rho^{(k)}(\theta)$ peuvent être trouvés en remplaçant $\rho$ par la série (2.13) dans l'équation (2.7).

Si dans les égalités (2.1) nous exprimons $\rho$ et $z_s$ respectivement par les séries (2.12) et (2.13) nous obtenons:

$$\begin{aligned} x &= \mu\cos\theta + \mu^2 \rho^{(2)}(\theta)\cos\theta + \mu^3 \rho^{(3)}(\theta)\cos\theta + \dots \\ y &= \mu\sin\theta + \mu^2 \rho^{(2)}(\theta)\sin\theta + \mu^3 \rho^{(3)}(\theta)\sin\theta + \dots \qquad (2.14) \\ x_s &= \mu^2 z_s^{(1)}(\theta) + \mu^3 (z_s^{(2)}(\theta) + z_s^{(1)}(\theta)\rho^{(2)}(\theta)) \\ &\quad + \mu^4 (z_s^{(3)}(\theta) + \rho^{(2)}(\theta) z_s^{(2)}(\theta) + \rho^{(3)}(\theta) z_s^{(3)}(\theta)) + \dots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trouvé une solution particulière du système (1.17) où $x, y, x_s$ sont des fonctions analytiques par rapport à $\mu$ et $2\pi$-périodiques en $\theta$.

Or nous désirons connaître $x, y, z_s$ en fonction de la variable $t$.

Revenons donc à la variable indépendante $t$ et exprimons la en fonction de $\theta$.

De la seconde équation du système (2.2) nous déduisons que:

$$t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\lambda + \rho\,\Theta(\rho, z_s, \theta)} + \text{constante}$$

Choisissons la constante d'intégration telle que $\theta(t = 0) = 0$.

Sachant que $\Theta$ est une fonction analytique de $\rho, z_1, \dots, z_m$ dont les coefficients du développement sont des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et que $\rho$ et $z_s$ $(s = 1, \dots, m)$ s'expriment comme l'indiquent les séries (2.13) et (2.12), nous pouvons écrire:

$$t = \frac{1}{\lambda}\int_0^\theta [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \Theta_2(\theta)\mu^2 + \dots]\, d\theta \qquad (2.15)$$

où $\Theta_k$ est une fonction $2\pi$-périodique de $\theta$.

$$\begin{aligned} t(\theta + 2\pi) - t(\theta) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\theta+2\pi} [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \dots]\, d\theta - \frac{1}{\lambda}\int_0^\theta [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \dots]\, d\theta \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\theta+2\pi} [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \Theta_2(\theta)\mu^2 + \dots]\, d\theta \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \Theta_2(\theta)\mu^2 + \dots]\, d\theta \end{aligned}$$

car l'intégrand est $2\pi$-périodique en $\theta$ et on intègre sur une période.

Cette différence est indépendante de $\theta$, c'est une constante T.

$$T = \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi} [1 + \Theta_1(\theta)\mu + \Theta_2(\theta)\mu^2 + \ldots\ldots]\ d\theta$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\int_0^{2\pi} d\theta + \mu\int_0^{2\pi} \Theta_1(\theta)\ d\theta + \mu^2 \int_0^{2\pi} \Theta_2(\theta)\ d\theta + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[1 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \alpha_3\mu^3 + \ldots\ldots\right] \qquad (2.16)$$

où la constante $\alpha_k$ vaut $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta_k(\theta)\ d\theta\ (k = 1, 2, \ldots.)$ (2.17)

Par conséquent toute valeur qui est une fonction $2\pi$-périodique en $\theta$, est en même temps T-périodique en t. En particulier les valeurs $x, y, x_s$ sont aussi des fonctions T-périodiques en t.

Mais T est une fonction analytique de $\mu$ comme l'indique (2.16) et $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ pour $\mu = o$.

On peut montrer que les valeurs $x, y, x_s$ exprimées en fonction de t sont des fonctions analytiques de $\mu$.

En effet: les fonctions $x, y, x_s$ dans la solution périodique considérée (comme dans toute solution d'ailleurs) sont des fonctions analytiques des conditions initiales. Ces conditions initiales sont elles-mêmes des fonctions analytiques de $\mu$. Pour le voir, il suffit d'égaler $\theta$ à o dans (2.1), (2.12) et (2.13) vu que $\theta$ (t= o) = o.

Soit c la condition initiale de $\rho$, c'est-à-dire d'après (2.13)

$$c = \mu + \mu^2 \rho^{(2)}(o) + \mu^3 \rho^3 (o) + \ldots\ldots \qquad (2.18)$$

c'est donc une fonction analytique de $\mu$ qui s'annule quand $\mu = o$. Mais on peut résoudre (2.18) par rapport à $\mu$. De là nous voyons que $\mu$ est une fonction analytique de c qui s'annule pour c = o.

Dans la solution périodique trouvée, nous pouvons remplacer $\mu$ par son expression en fonction de c et alors cette solution ainsi que sa période sont des fonctions analytiques par rapport à c.

Pour $t = o, \theta$ s'annule:

$$\Rightarrow x(t = o) = x(\theta = o) = \rho(\theta = o) \cos o = \rho(\theta = o) = c$$

$$y(t = o) = y(\theta = o) = \rho(\theta = o) \sin o = o$$

c'est-à-dire pour $t = o$,

la valeur initiale de x coïncide avec la valeur c

la valeur initale de y est nulle

Si $c = o$ alors $x, y, x_s = o$ et $T = \frac{2\pi}{\lambda}$

En effet: $c = o \Rightarrow \mu = o$

$\Rightarrow \rho = o$ (par (2.I3)

$\Rightarrow x, y, x_s = o$ par (2.I)

$c = o \Rightarrow \mu = o \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda}$ par (2.I6)

Le système (I.I7) étant autonome, nous pouvons dans la solution périodique changer t en t + h où h est une constante arbitraire. Aussi la solution dépendra de ce paramètre arbitraire.

<u>Théorème.</u>

Le système de Lyapunov

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_m) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_m) \\ \dfrac{d x_s}{dt} = b_{s1} x_1 + \ldots + b_{sm} x_m + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_m) \quad s = 1, \ldots, m \end{cases}$$

où $X, Y, X_s$ sont des fonctions analytiques de $x, y, x_1, \ldots, x_m$ dont les développements commencent par des termes du second ordre,

a une solution périodique qui dépend de 2 paramètres arbitraires dans le petit voisinage de l'origine.

L'un de ces paramètres est la condition initiale c de la variable x qui est supposée petite, la valeur initiale de y est nulle et les valeurs initiales des $x_s$ sont des fonctions analytiques de cette valeur c.

La période de la solution est également une fonction analytique de c qui est égale à $\frac{2\pi}{\lambda}$ quand $c = o$.

La solution périodique en question est analytique par rapport à c, et pour $c = o$, $x = y = x_1 = \ldots = x_m = o$.

Le second paramètre est la constante arbitraire h qui est la valeur initiale du temps.

## III. LA CONSTRUCTION PRATIQUE DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

Soit:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots.) \tag{3.I}$$

la période de la solution cherchée où les $h_j$ sont des constantes indéterminées.

Dans (I.I7), au lieu de la variable indépendante t, on prend la variable $\tau$ définie comme suit:

$$t = \frac{\tau}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\ldots) \tag{3.2}$$

on en déduit:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 \ldots.)$$

et donc (I.I7) peut s'écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = (-\lambda y + X) \cdot \dfrac{1}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\ldots) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = (\lambda x + Y) \cdot \dfrac{1}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots.) \\ \dfrac{dz}{dt} = (b_{s1} x_1 + \ldots. + b_{sm} x_m + X_s)\,\dfrac{1}{\lambda}\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots)\ s = 1 \ldots. m \end{cases}$$

ou encore:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = (-y + \dfrac{1}{\lambda} X)\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\ldots) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = (x + \dfrac{1}{\lambda} Y)\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\ldots) \\ \dfrac{dz}{d\tau} = (c_{s1} x_1 + \ldots\ldots + c_{sm} b_m + \dfrac{1}{\lambda} X_s)\,(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots.) \quad s = 1 \ldots m \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{où } c_{sj} = \frac{b_{sj}}{\lambda} \tag{3.4}$$

A la solution T-périodique de (I.I7) correspond une solution $2\pi$-périodique de (3.3). Cette solution sera également analytique par rapport à c.

En effet: Cette solution est une fonction analytique des conditions initiales. Or les conditions initiales de la solution périodique sont les mêmes avant et après la transformation car t et $\tau$ s'annulent en même temps. D'autre part, nous avons déjà vu que les conditions initiales sont pour x : c, pour y : o, pour $x_s$ : les fonctions analytiques de c. La solution est donc analytique par rapport à c.

De plus, nous savons que $x, y, x_s = o$ quand $c = o$.

Nous pouvons donc écrire la solution périodique sous la forme:

$$
\begin{aligned}
x &= c\, x^{(1)}(\tau) + c^2 x^{(2)}(\tau) + \dots\dots\dots \\
y &= c\, y^{(1)}(\tau) + c^2 y^{(2)}(\tau) + \dots\dots \\
x_s &= c\, x_s^{(1)}(\tau) + c^2 x_s^{(2)}(\tau) + \dots\dots
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

où $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_s^{(k)}$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques de $\tau$.

Les conditions initiales nous permettent d'affirmer que:

$$
\begin{aligned}
& x^{(1)}(o) = 1 \quad , \quad x^{(2)}(o) = x^{(3)}(o) = \dots\dots = o \\
& y^{(1)}(o) = y^{(2)}(o) = \dots\dots = o
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Dans le système (3.3) remplaçons $x, y, x_s$ par les séries (3.5):

$$
\left\{
\begin{aligned}
& c\,\frac{dx^{(1)}(\tau)}{d\tau} + c^2\,\frac{dx^{(2)}(\tau)}{d\tau} + \dots\dots = \left(-c\, y^{(1)}(\tau) - \dots + \frac{1}{\lambda} X\right)\left(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots\right) \\
& c\,\frac{dy^{(1)}(\tau)}{d\tau} + c^2\,\frac{dy^{(2)}(\tau)}{d\tau} + \dots\dots = \left(c\, x^{(1)}(\tau) + c^2 x^{(2)}(\tau) + \dots + \frac{1}{\lambda} Y\right)\left(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots\right) \\
& c\,\frac{dx_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} + c^2\,\frac{dy_s^{(2)}(\tau)}{d\tau} + \dots = \Big[c\left(c_{s1} x_s^{(1)}(\tau) + \dots + c_{sm} x_m^{(1)}(\tau)\right) \\
& \qquad + c^2\left(c_{s1} x_1^{(2)}(\tau) + \dots + c_{sm} x_m^{(2)}(\tau)\right) + \dots\dots \\
& \qquad \dots + \frac{1}{\lambda} X_s\Big]\Big[1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots\Big]
\end{aligned}
\right.
$$

$$
s = 1 \dots m
\tag{3.7}
$$

Egalons les coefficients des puissances de c.

coefficients de c:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx^{(1)}(\tau)}{d\tau} = -\,y^{(1)}(\tau) \\ \dfrac{dy^{(1)}(\tau)}{d\tau} = x^{(1)}(\tau) \\ \dfrac{dx_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} = c_{s1}x_1^{(1)}(\tau) + \dots\dots\dots + c_{sm}\,x_m^{(1)} \qquad s = 1,\dots,m \end{array}\right. \qquad (3.8)$$

Le déterminant du système homogène $(3.8)_3$ est non nul car (2.9) n'admet pas de racine nulle. Ce système admet donc comme seule solution, la solution triviale

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \dots\dots\dots = x_m^{(1)} = o \qquad (3.9)$$

Le système formé des équations $(3.8)_1$, $(3.8)_2$ a comme solution:

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1)}(\tau) = A\cos\tau + B\sin\tau \\ y^{(1)}(\tau) = A\sin\tau - B\cos\tau \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales $x^{(1)}(o) = 1$
$y^{(1)}(o) = o$

qui entraînent que $A = 1$ et $B = o$.

Nous avons donc $x^{(1)}(\tau) = \cos\tau$

$$y^{(1)}(\tau) = \sin\tau \qquad (3.10)$$

coefficients de $c^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx^{(2)}(\tau)}{d\tau} = -\,y^{(2)}(\tau) - h_1\,y^{(1)}(\tau) + X^{(2)}(\tau) \\ \dfrac{dy^{(2)}(\tau)}{d\tau} = x^{(2)}(\tau) + h_1\,x^{(1)}(\tau) + Y^{(2)}(\tau) \\ \dfrac{dx_s^{(2)}(\tau)}{d\tau} = c_{s1}\,x_1^{(2)}(\tau) + \dots\dots + c_{sm}\,x_m^{(2)}(\tau) + h_1\big(c_{s1}\,x_1^{(1)}(\tau) + \dots\dots \\ \qquad\qquad \dots + c_{sm}\,x_m^{(1)}(\tau)\big) + X_s^{(2)}(\tau) \qquad (s = 1\dots m) \end{array}\right.$$

ce système se ramène à la forme suivante en utilisant (3.9) et (3.10).

$$\frac{dx^{(2)}(\tau)}{d\tau} = -\,y^{(2)}(\tau) - h_1 \sin\tau + X^{(2)}(\tau)$$

$$\frac{d\,y^{(2)}(\tau)}{d\tau} = x^{(2)}(\tau) + h_1 \cos\tau + Y^{(2)}(\tau) \qquad (3.\mathrm{II})$$

$$\frac{d\,x_s^{(2)}(\tau)}{d\tau} = c_{s1}\,x_1^{(2)} + \ldots\ldots c_{sm}\,x_m^{(2)} + X_s^{(2)}(\tau) \qquad s = 1,\ldots,m$$

où $X^{(2)}(\tau), Y^{(2)}(\tau), X_s^{(2)}(\tau)$ sont des termes provenant de $X$, $Y$, $X_s$ dont les développements par rapport à $x$, $y$, $x_s$ commencent par des termes du second ordre. $X^{(2)}, Y^{(2)}, X_s^{(2)}$ sont des fonctions $2\pi$ - périodiques en $\tau$.

L'équation caractéristique de $(3.\mathrm{II})_3$ n'admet pas de racine nulle ou $\pm$ pi d'après (2.9). Le système $(3.\mathrm{II})_3$ est non résonnant. Il admet une seule solution périodique bien déterminée.

En ce qui concerne le système formé des équations $(3.\mathrm{II})_1$ et $(3.\mathrm{II})_2$, pour qu'il existe une solution $2\pi$-périodique $x^{(2)}, y^{(2)}$, il faut que la condition

$$\int_0^{2\pi} \psi(\tau)\, f(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (3.12)$$

où $\psi(\tau)$ est une matrice dont les lignes forment une base pour l'espace des solutions $2\pi$-périodiques du système linéaire adjoint.

soit vérifiée.

Recherche de $\psi(\tau)$.

Le système adjoint s'écrit matriciellement:

$$\left(\frac{d\,x_0^{(2)}}{d\tau} \quad \frac{d\,y_0^{(2)}}{d\tau}\right) = -\,(x_0^{(2)} \quad y_0^{(2)}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x_0^{(2)}}{d\tau} = -\,y_0^{(2)} \\[2ex] \dfrac{d\,y_0^{(2)}}{d\tau} = x_0^{(2)} \end{cases}$$

qui admet pour solution: $x_o^{(2)} = A\cos\tau + B\sin\tau$

$$y_o^{(2)} = A\sin\tau - B\cos\tau$$

Par conséquent $\varphi(\tau)$ peut s'écrire:

$$\varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

<u>Expression de la condition d'écriture (3.12).</u>

$$(3.12) \equiv \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_1\sin\tau + X^{(2)}(\tau) \\ h_1\cos\tau + Y^{(2)}(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} X^{(2)}(\tau)\cos\tau + Y^{(2)}(\tau)\sin\tau \\ -h_1 + X^{(2)}(\tau)\sin\tau - Y^{(2)}(\tau)\cos\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\cos\tau + Y^{(2)}(\tau)\sin\tau)\, d\tau = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} X^{(2)}(\tau)\sin\tau - Y^{(2)}(\tau)\cos\tau )\, d\tau = 2\pi h_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\sin\tau - Y^{(2)}(\tau)\cos\tau)\, d\tau = 2h_1 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\cos\tau + Y^{(2)}(\tau)\sin\tau)\, d\tau = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

L'équation $(3.14)_1$ permet de déterminer la constante $h_1$. L'équation $(3.14)_2$ est nécessairement vérifiée car la solution (3.5) qui vérifie formellement (3.3) existe.

Le système formé des équations $(3.11)_1$ et $(3.11)_2$ admet les solutions $2\pi$-périodiques:

$$\begin{cases} x^{(2)}(\tau) = A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi_2(\tau) \\ y^{(2)}(\tau) = A\sin\tau - B\cos\tau + \psi_2(\tau) \end{cases} \tag{3.15}$$

où $\varphi_2(t)$ et $\psi_2(t)$ sont des solutions périodiques particulières de (3.II).

A et B sont des constantes arbitraires qui sont déterminées par les conditions initiales (3.6)

car $x^{(2)}(o) = o \Rightarrow A = -\varphi_2(o)$

$y^{(2)}(o) = o \Rightarrow B = \psi_2(o)$

Les fonctions $x^{(2)}$, $y^{(2)}$ et la constante $h_1$ sont donc déterminées de manière unique.

Remarquons que $h_1$ est toujours nulle.

En effet, les fonctions $X^{(2)}$ et $Y^{(2)}$ étant des formes quadratiques en $\cos\tau$ et $\sin\tau$

$$\int_o^{2\pi} (X^{(2)}(\tau)\sin\tau - Y^{(2)}(\tau)\cos\tau)\, d\tau = o.$$

Nous verrons même au paragraphe suivant que le premier indice j tel que $h_j$ est non nulle est pair.

Supposons que toutes les fonctions $x^{(j)}, y^{(j)}, x_s^{(j)}$ telles que $j < k$ et que toutes les constantes $h_j$, $j \leq k-1$ soient déjà calculées.

Nous entamons la $k^{\underline{\text{ième}}}$ itération.

Comme pour le cas $k = 2$ nous avons les équations:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^{(k)}}{d\tau} &= -y^{(k)} - h_{k-1}\sin\tau + X^{(k)}(\tau) \\ \frac{dy^{(k)}}{d\tau} &= x^{(k)} + h_{k-1}\cos\tau + Y^{(k)}(\tau) \\ \frac{dx_s^{(k)}}{d\tau} &= c_{s1}x_1^{(k)} + \dots + c_{sm}x_m^{(k)} + X_s^{(k)}(\tau) \end{aligned}\right. \qquad (3.16)$$

où $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $X_s^{(k)}$ sont des fonctions connues, $2\pi$-périodiques en $\tau$.

De manière analogue au cas $k = 2$ nous avons que le système $(3.16)_3$ a une seule solution $2\pi$-périodique et pour que le système formé des équations $(3.16)_1$ et $(3.16)_2$ ait une solution $2\pi$-périodique il faut que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[X^{(k)}(\tau)\sin\tau - Y^{(k)}(\tau)\cos\tau\right]d\tau = 2\,h_{k-1} \\ \int_0^{2\pi}\left[X^{(k)}(\tau)\cos\tau - Y^{(k)}(\tau)\sin\tau\right]d\tau = 0 \end{cases} \qquad (3.17)$$

La condition $(3.17)_1$ détermine la valeur $h_{k-1}$ et l'équation $(3.17)_2$ est automatiquement vérifiée car les séries (3.5) existent.

Alors la solution $2\pi$-périodique de $(3.16)_{1,2}$ s'écrit:

$$x^{(k)} = A_k\cos\tau + B_k\sin\tau + \varphi_k(\tau)$$

$$y^{(k)} = A_k\sin\tau - B_k\cos\tau + \psi_k(\tau)$$

où $\varphi_k$ et $\psi_k$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques de $\tau$

$A_k$ et $B_k$ sont des constantes arbitraires bien déterminées par les conditions initiales (3.6).

Conclusion:

Il existe un et un seul système de séries (3.5) qui vérifie formellement le système (3.3). Ces séries sont convergentes et représentent la solution périodique cherchée.

Nous avons donc trouvé le moyen de calculer la solution et la période.

---

## EXEMPLE

Considérons l'équation:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \beta x^2 = 0} \qquad (3.18)$$

elle peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k\,y \\ \frac{dy}{dt} = k\,x - \frac{\beta}{k}x^2 \end{cases} \qquad (3.19)$$

Est-ce un système de Lyapunov ?

L'équation caractéristique de (3.19)

$$\begin{vmatrix} 0-\rho & -k \\ k & 0-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.20)$$

admet une paire de racines $\pm k\,i$ ($\equiv 1°/$).

Ces racines sont simples et (3.20) n'a pas de racines nulles ($\equiv 2°/$) .

De plus (3.19) admet une intégrale première:

$$H = x^2 + y^2 + S\,(x,y)$$

où S est analytique par rapport à x et y et son développement commence par des termes d'ordre $\geqslant 3$.

En effet, soit $$H = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}\,\frac{\beta}{k^2}\,x^3 \qquad (3.21)$$

Résolution:

$$t = \frac{\tau}{k}\,(1 + h_2\,c^2 + h_3\,c^3 + \dots\dots) \qquad \text{d'après } (3.2) \qquad (3.22)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\,y\,(1 + h_2\,c^2 + h_3\,c^3 + \dots\dots) \qquad (3.23) \\ \frac{dy}{d\tau} &= (x - \frac{\beta}{k^2}\,x^2)\,(1 + h_2\,c^2 + h_3\,c^3 + \dots\dots) \end{aligned} \right.$$

La solution s'écrit:

$$x = c\cos\tau + c^2\,x_2(\tau) + c^3\,x_3\,(\tau) \quad \text{par } (3.5) \qquad (3.24)$$

$$y = c\sin\tau + c^2\,y_2\,(\tau) + c^3\,y_3(\tau) \quad \text{par } (3.5) \qquad (3.25)$$

$$x_2(o) = x_3\,(o) = \dots\dots\dots = o$$

$$y_2(o) = y_3\,(o) = \dots\dots\dots = o \quad \text{par } (3.6)$$

Mais le système (3.23) peut s'écrire sous la forme d'une équation du second ordre:

$$\frac{d^2x}{d\tau} + (x - \frac{\beta}{k^2}\,x^2)\,(1 + h_2\,c^2 + h_3\,c^3 + \dots\dots)^2 \qquad (3.26)$$

Nous désirons connaître la solution périodique générale x, nous n'avons pas besoin de rechercher les coefficients $y_i(\tau)$ de y.

Recherchons les $x_i(\tau)$.

D'une part: $$\frac{d^2x}{d\tau^2} = (-\,x + \frac{\beta}{k^2}\,x^2)\,(1 + 2\,h_2\,c^2 + h_2^2\,c^4 + 2\,h_3\,c^3 + 2\,h_2\,h_3\,c^5 + h_3^2\,c^6 + \dots) \qquad (3.27)$$

D'autre part:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = c\,\frac{d^2\cos\tau}{d\tau^2} + c^2\,\frac{d^2x_2\,(\tau)}{d\tau^2} + c^3\,\frac{d^2x_3\,(\tau)}{d\tau^2} + \dots\dots \qquad (3.28)$$

Remplaçons x dans (3.27) par son expression (3.24) et identifions les coefficients des mêmes puissances de c.

Coefficients de $c^2$:

$$\frac{d^2 x_2(\tau)}{d\tau^2} + x_2(\tau) = \frac{\beta}{k^2}\cos^2\tau$$

$$= \frac{\beta}{2k^2} + \frac{\beta}{2k^2}\cos 2\tau \qquad (3.29)$$

Soit $x_2(\tau) = A + B\cos\tau + C\sin\tau + D\cos 2\tau + E\sin 2\tau$

alors $\frac{d^2 x_2(\tau)}{d\tau} = -B\cos\tau - C\sin\tau - 4D\cos 2\tau - 4E\sin 2\tau$

En reportant dans (3.29)

$$A - 3D\cos 2\tau - 3E\sin 2\tau = \frac{\beta}{2k^2} + \frac{\beta}{2k^2}\cos 2\tau$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\beta}{2k^2}, \quad D = -\frac{\beta}{6k^2}, \quad E = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2(\tau) = \frac{\beta}{2k^2} + B\cos\tau + C\sin\tau - \frac{\beta}{6k^2}\cos 2\tau$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2k^2} + B - \frac{\beta}{6k^2} = 0$$

$$\Rightarrow B = -\frac{\beta}{3k^2}$$

$$\frac{dx(0)}{d\tau} = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2(\tau) = \frac{\beta}{2k^2} - \frac{\beta}{3k^2}\cos\tau - \frac{\beta}{6k^2}\cos 2\tau} \qquad (3.30)$$

Dans (3.23) égalons les coefficients des mêmes puissances de c

$$\frac{dx}{d\tau} = -y\,(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots\ldots)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_2(\tau)}{d\tau} = -y_2(\tau) \\[2ex] \dfrac{dx_3(\tau)}{d\tau} = -y_3(\tau) - h_2\sin\tau & (3.31) \\[2ex] \dfrac{dx_4(\tau)}{d\tau} = -y_4(\tau) - h_3\sin\tau - h_2 y_2(\tau) & (3.32) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (x - \frac{\beta}{k^2} x^2)(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots\ldots)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy_2(\tau)}{d\tau} = x_2(\tau) - \dfrac{\beta}{k^2} \cos^2\tau \\ \dfrac{dy_3(\tau)}{d\tau} = x_3(\tau) + h_2 \cos\tau - \dfrac{2\beta}{k^2} \cos\tau \, x_2(\tau) \qquad (3.33) \\ \dfrac{dy_4(\tau)}{d\tau} = x_4(\tau) + h_3 \cos\tau - \dfrac{\beta}{k^2} x_2^2(\tau) - 2\dfrac{\beta}{k^2} \cos\tau \, x_3(\tau) + h_2 \, x_2(\tau) - \dfrac{\beta}{k^2} h_2 \cos^2\tau \\ \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad (3.34) \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

Calcul de $h_2$.

D'après (3.I7), (3.I6), (3.3I),(3.33)

$$h_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\beta}{k^2} \cos^2\tau \; x_2(\tau)\, d\tau$$

$x_2(\tau)$ est remplacé par (3.30)

$$\boxed{h_2 = \frac{5\beta^2}{12\, k^4}} \qquad (3.35)$$

Coefficients de $c^3$.

$$\frac{d^2 x_3(\tau)}{d\tau^2} + x_3(\tau) = -2\, h_2 \cos\tau + 2\, \frac{\beta}{k^2}\, x_2(\tau) \cos\tau$$

d'après (3.27), (3.28), (3.24)

en remplaçant $x_2(\tau)$ par (3.30) et $h_2$ par (3.35); nous obtenons après calcul:

$$\frac{d^2 x_3(\tau)}{d\tau^2} + x_3(\tau) = -\frac{\beta^2}{3k^4} - \frac{\beta^2}{3k^4}\cos 2\tau - \frac{\beta^2}{6k^4} \cos 3\tau \qquad (3.36)$$

Soit $x_3(\tau) = A + B\cos\tau + C\sin\tau + D\cos 2\tau + E\sin 2\tau + F\cos 3\tau + G\sin 3\tau$

$$\frac{d^2 x_3(\tau)}{d\tau^2} = -B\sin\tau - C\cos\tau - 4D\cos 2\tau - 4E\sin 2\tau - 9F\cos 3\tau - 9G\sin 3\tau$$

En reportant dans (3.26)

$$A-3D\cos 2\tau-3E\sin 2\tau-8F\cos 3\tau-8G\sin 3\tau=\frac{\beta^2}{3k^4}-\frac{\beta^2}{3k^4}\cos 2\tau-\frac{\beta^2}{6k^4}\cos 3\tau$$

$$\Rightarrow \quad A=-\frac{\beta^2}{3k^4}, \quad D=\frac{\beta^2}{9k^4}, \quad F=\frac{\beta^2}{48k^4}, \quad E=G=0$$

$$x_3(0)=0 \Rightarrow A+B+D+F=0$$

$$\Rightarrow B=-A-D-F=\frac{\beta^2}{3k^4}-\frac{\beta^2}{9k^4}-\frac{\beta^2}{48k^4}=\frac{29}{144}\frac{\beta^2}{k^4}$$

$$\frac{d\,x_3(0)}{d\tau}=c=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_3(\tau)=-\frac{\beta^2}{3k^4}+\frac{29}{144}\frac{\beta^2}{k^4}\cos\tau+\frac{\beta^2}{9k^4}\cos 2\tau+\frac{\beta^2}{48k^4}\cos 3\tau} \qquad (3.37)$$

Calcul de $h_3$.

D'après (3.17),(3.16),(3.34),(3.32)

$$h_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{-h_2y_2(\tau)\sin\tau-\cos\tau\left[-\frac{\beta}{k^2}x_2^2(\tau)-2\frac{\beta}{k^2}\cos\tau\, x_3(\tau)+h_2x_2(\tau)-\frac{\beta}{k^2}h_2\cos^2\tau\right]\right\}d\tau$$

$x_2(\tau)$, $x_3(\tau)$, $h_2$ sont remplacés respectivement par (3.30),(3.37), (3.35).

$y_2(\tau)$ est remplacé par $-\dfrac{dx_2(\tau)}{d\tau}$

après calcul nous obtenons:

$$\boxed{h_3=-\frac{5}{18}\frac{\beta^3}{k^6}}$$

Rassemblons nos résultats:

$$\tau=k\,t\left(1+\frac{5}{12}\frac{\beta^2}{k^4}c^2-\frac{5}{18}\frac{\beta^3}{k^6}c^3+\ldots\ldots\right)^{-1}$$

$$x=c\cos\tau+\left(\frac{\beta}{2k^2}-\frac{\beta}{3k^2}\cos\tau-\frac{\beta}{6k^2}\cos 2\tau\right)c^2$$

$$+\left(-\frac{\beta}{3k^4}+\frac{29}{144}\frac{\beta^2}{k^4}\cos\tau+\frac{\beta^2}{9k^4}\cos 2\tau+\frac{\beta^2}{48k^4}\cos 3\tau\right)c^3+\ldots\ldots$$

$$T = \frac{2\pi}{k}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{\beta^2}{k^4}c^2 - \frac{5}{18}\frac{\beta^3}{k^6}c^3 + \ldots\ldots\right)$$

## IV. QUELQUES PROPRIETES DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

A. Pour plus de facilité nous allons d'abord considérer le système du second ordre:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x,y) \qquad (4.I)$$

où X,Y sont des fonctions analytiques de x et y dont les développements commencent par des termes du second ordre au moins.

Soit: $H = x^2 + y^2 + S(x,y) = \text{constante}$ (4.2)

une intégrale première de ce système

où S est une fonction analytique de x,y dont le développement commence par des termes du troisième ordre au moins.

D'après le paragraphe II, le système (4.I) admet une solution périodique qui dépend de deux constantes arbitraires:

- la valeur initiale de x : c
- la valeur initiale du temps: h

On peut dire que cette solution est la solution générale de (4.I). Alors pour toutes valeurs initiales a,b de x,y, la solution des équations (4.I) avec ces conditions initiales est périodique. Les valeurs de a et b doivent être assez petites car les solutions périodiques des systèmes de Lyapunov existent dans un petit voisinage de l'origine.

Considérons le plan de phase x,y pour le système (4.I). Toutes les trajectoires de phase qui se trouvent dans un petit voisinage de l'origine sont fermées car les solutions correspondantes sont périodiques.

Pour la partie linéaire du système (4.I)

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y \qquad\qquad (4.3)$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x$$

le plan de phase présente un centre à l'origine comme pour le système complet.

L'équation des trajectoires de phase est déterminée par (4.2). D'après (4.2) nous voyons que les trajectoires de phase dans le petit voisinage de l'origine sont presque des circonférences.

De plus dans ce petit voisinage de l'origine,les plans de phase de (4.I) et(4.3) ne sont pas très différents. Mais il y a quand même une différence principale entre ces deux images: pour le système linéaire les trajectoires de phase ont toutes la même période $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ tandis que pour le système non linéaire (4.I) la période diffère d'une trajectoire à l'autre car $T$ est fonction de c et chaque trajectoire est fonction de c.

B. Considérons à présent le système de Lyapunov d'ordre arbitraire (I.I7). Nous allons montrer que ce système a une solution périodique où les conditions initiales de x et y sont des petites valeurs a et b qui sont arbitraires et les valeurs initiales de $x_s$ sont des fonctions analytiques bien déterminées de a et b.

Pour cela, nous cherchons la solution particulière de (I.I7) pour que les $x_s$ soient des fonctions analytiques de x et y.

Si ces fonctions existent, alors elles doivent vérifier le système des équations aux dérivées partielles .

$$\frac{\partial x_s}{\partial x}(-\lambda y + X) + \frac{\partial x_s}{\partial y}(\lambda x + Y) = b_{s1}x_1 + \dots b_{sm}x_m + X_s \qquad s = 1,\dots m \quad (4.4)$$

car $x_s = x_s(x,y) \Rightarrow \frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial x_s}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial x_s}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Soient $x_s(x,y) = K_s + A_s x + B_s y + C_s x^2 + D_s xy + E_s y^2 + \dots\dots \quad (s = 1,\dots,m) (4.5)$

où $A_s, B_s, C_s, D_s, E_s$, .... sont des constantes à déterminer.

Reportons ces séries dans (4.4):

$$(A_s + 2\,C_s\,x + D_s\,y + \dots)(-\lambda y + X) + (B_s + 2\,E_s\,y + D_s\,x + \dots)(\lambda x + Y) =$$

$$= b_{s1}(K_1 + A_1 x + B_1 y + C_1 x^2 + D_1 xy + E_1 y^2 + \dots)$$

$$+ b_{s2}(K_2 + A_2 x + B_2 y + C_2 x^2 + D_2 xy + E_2 y^2 + \dots)$$

$$\vdots$$

$$+ b_{sm}(K_m + A_m x + B_m y + C_m x^2 + D_m xy + E_m y^2 + \dots) + X_s \qquad (4.6)$$

Egalons les termes indépendants:

$$b_{s1} K_1 + \dots + b_{sm} K_m = 0 \qquad s = 1,\dots,m$$

Ce système admet uniquement la solution triviale car son déterminant est $\neq 0$ vu que (I.I3) n'admet pas de racine nulle.

$$\Rightarrow K_1 \dots = K_m = 0$$

Egalons les coefficients de x et ceux de y.

$$\left\{\begin{aligned} \lambda B_s &= b_{s1} A_1 + b_{s2} A_2 + \dots + b_{sm} A_m & s&=1,\dots,m \\ -\lambda A_s &= b_{s1} B_1 + b_{s2} B_2 + \dots + b_{sm} A_m & s&=1,\dots,m \end{aligned}\right. \qquad (4.7)$$

posons $\alpha j = Aj + i\,Bj$ $\quad j = 1,\dots,m$ et additionnons $(4.7)_1 + i(4.7)_2$

nous obtenons

$$b_{s1}\alpha_1 + \dots + b_{ss}\alpha_s + \dots + b_{sm}\alpha_m = -i\lambda\alpha_s$$

ou encore

$$b_{s1}\alpha_1 + \dots + (b_{ss} + i\lambda)\alpha_s + \dots + b_{sm}\alpha_m = 0 \qquad s = 1,\dots,m \quad (4.8)$$

or le déterminant de ce système est non nul car (I.I3) n'a pas de racine o ni $\pm\, p\lambda i$, p entier. Ce système admet donc pour seule solution, la solution triviale $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

Autrement dit $A_1 = \dots = A_m = B_1 = \dots = B_m = 0$.

Les fonctions $x_s$ ne contiennent donc pas de termes linéaires en x et y.

Egalons les coefficients de $x^2$, xy et $y^2$.

- en $x^2$ : $\lambda D_s = b_{s1} C_1 + b_{s2} C_2 + \dots + b_{sm} C_m + X_s^{(1)}$

- en $y^2$ : $-\lambda D_s = b_{s1} E_1 + b_{s2} E_2 + \dots + b_{sm} E_m + X_s^{(3)}$ $\qquad$ (4.9)

- en xy : $-2\lambda C_s + 2\lambda E_s = b_{s1} D_1 + b_{s2} D_2 + \dots + b_{sm} D_m + X_s^{(2)}$

où $X_s^{(1)}, X_s^{(2)}, X_s^{(3)}$ sont les coefficients de $x^2$, $xy, y^2$ dans le développement de $X_s$

soit $\beta_s = C_s - E_s + i D_s$ et écrivons$(4.9)_1 - (4.9)_2 + i(4.9)_3$, nous obtenons:

$$b_{s1}\beta_1 + \dots + b_{ss}\beta_s + \dots + b_{sm}\beta_m + X_s^{(1)} - X_s^{(3)} + i X_s^{(2)} = -2i\lambda\beta_s$$

ou encore

$$b_{s1}\beta_1 + \dots + (b_{ss} + 2i\lambda)\beta_s + \dots + b_{sm}\beta_m = X_s^{(3)} - X_s^{(1)} - i X_s^{(2)} \qquad (4.9)^*$$

Le déterminant de ce système est non nul car (I.I3) n'a pas de racine o ni $\pm p\lambda i$, p entier. Par conséquent il existe une seule solution $\beta_1, \dots, \beta_m$ et les coefficients $C_s$, $E_s$, $D_s$ ont des valeurs bien déterminées.

Dans ces séries (4.5) si les coefficients des termes jusqu'à l'ordre $k-1$ sont trouvés, on peut trouver ceux des termes d'ordre k car Lyapunov a montré que les déterminants pour tous les systèmes du type $(4.9)^*$ sont non nuls. Il existe donc une et une seule série (4.5) qui vérifie (4.4).
Lyapunov affirme également que les séries (4.5) trouvées de cette façon convergent pour x,y petits.

En substituant (4.5) dans $(I.I7)_{1,2}$ nous avons le système suivant pour trouver x et y:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + X\big(x,y,x_1(x,y),\dots,x_m(x,y)\big) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda x + Y\big(x,y,x_1(x,y),\dots,x_m(x,y)\big) \end{cases} \qquad (4.I0)$$

Soient x(t,a,b), y(t,a,b) la solution générale de ces équations où a, b sont les valeurs initales de x,y qui sont assez petites.

Alors les fonctions

$$x(t,a,b),\ y(t,a,b),\ x_s(x(t,a,b),y(t,a,b)) \qquad (4.II)$$

déterminent une solution particulière du système (I.I7). Cette solution contient deux constantes arbitraires et est périodique.

En effet, étant donné que le système (I.I7) admet l'intégrale première (I.2I), le système (4.I0) admet l'intégrale première

$$x^2 + y^2 + W\big(x_1(x,y),\dots,x_m(x,y)\big) + S\big(x,y,x_1(x,y),\dots,x_m(x,y)\big) = \text{constante.} \qquad (4.I2)$$

C'est une intégrale du type (4.2) car $W(x_1(x,y),\ldots,x_m(x,y))$ étant quadratique en $x_s$ et les $x_s$ ne comprenant pas de termes linéaires, les développements de W et S ne contiennent pas de termes d'ordre inférieur à trois en x,y.
Le système (4.10) est donc un système de Lyapunov, sa solution générale pour a,b assez petits est périodique. Par conséquent la solution (4.11) du système (1.17) est également périodique.

Il est évident que la valeur initiale de $x_s$ qui est $x_s(a,b)$ est analytique par rapport à a et b.

Conclusion:

> Le système de Lyapunov (1.17) possède une solution périodique qui dépend de deux paramètres a, b qui sont les valeurs initales de x,y. Ces paramètres peuvent être choisis arbitrairement mais doivent être assez petits et tels que la solution soit périodique.

Si dans (4.11) nous prenons $a = c$, $b = o$, alors nous retrouvons la solution périodique déjà considérée aux deux paragraphes précédents.
Avec au temps initial $x = c$, $y = o$, $x_s$ est une fonction analytique de c.
En changeant le temps $t \rightsquigarrow t + h$, nous avons une deuxième constante arbitraire h et nous avons une solution qui dépend encore de deux constantes arbitraires.
Cette solution se distingue de (4.11) par le choix des paramètres.

Comment s'exprime la période si nous choisissons a et b comme paramètres ?

Considérons d'abord le système du second ordre (4.1)
c'est-à-dire:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x,y) \end{aligned}\right. \tag{4.13}$$

Effectuons le changement de variables:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right.$$

Le système (4.13) devient:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \cos\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{\rho}\Big[\cos\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \sin\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{aligned}\right. \tag{4.14}$$

Démonstration : (analogue à celle du paragraphe II)

$$\rho = [x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

• $$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2\rho}\left[2\,x\,\frac{dx}{dt} + 2\,y\,\frac{dy}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[x(-\lambda y + X) + y(\lambda x + Y)\right]$$

$$= \cos\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

• $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\lambda\rho\sin\theta + X - \cos\theta[\cos\theta X + \sin\theta Y]}{-\rho\sin\theta}$$

$$= \lambda + \frac{\sin^2\theta\, X - \cos\theta\sin\theta\, Y}{-\rho\sin\theta}$$

$$= \lambda + \frac{1}{\rho}\left[\cos\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \sin\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right)$$

cqfd.

Nous avons vu au paragraphe II que

$$t\,(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\lambda + \rho\,H} \qquad \text{avec } \frac{d\theta}{dt} = \lambda + \rho\,H$$

$$T = t(\theta + 2\pi) - t\,(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda + \rho\,H}$$

en remplaçant la fonction $H$ par sa valeur ici, nous obtenons:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\theta}{\lambda\rho + \cos\theta\, Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \sin\theta\, X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)} \qquad (4.15)$$

Dans l'intégrale (4.2) passons également aux nouvelles variables.

$$H = x^2 + y^2 + S(x,y) = \mu^2$$

$$= \rho^2\left[1 + \frac{1}{\rho^2}\, S(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right] = \mu^2 \qquad (4.16)$$

où $\mu$ est une constante arbitraire.

L'équation (4.16) a deux solutions pour $\rho$

$$\rho = \pm\mu + u^{(2)}(\theta)\mu^2 \pm u^{(3)}(\theta)\mu^3 + \dots \qquad (4.17)$$

où $u^{(k)}$ $k \geq 2$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques en $\theta$ comme pour l'équation (2.13).

Nous prenons une de ces solutions et nous la mettons dans (4.I5). Nous obtenons une expression de la période T comme fonction analytique de $\mu$ car dans (4.I5) l'intégrand est une fonction analytique de $\rho$ et d'après (4.I7) $\rho$ est une fonction analytique de $\mu$ , par conséquent:

$$T = \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\left[1 + \mathcal{X}_1(\theta)\mu + \mathcal{X}_2(\theta)\mu^2 + \ldots\right] d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[1 + H_1\mu + H_2\mu^2 + \ldots\ldots\right] \qquad (4.I8)$$

$$\text{où } H_k = \int_0^{2\pi}\mathcal{X}_k(\theta)\, d\theta \qquad (4.I9)$$

Mais le développement (4.I8) ne contient que les puissances paires de $\mu$.

Démonstration.

Si dans (4.I6) nous changeons $\rho$ en $-\rho$ et $\theta$ en $\theta+\pi$, l'équation ne change pas. Donc si dans une des solutions de (4.I6) par ex.

$$\rho_1 = \mu + u^{(2)}(\theta)\mu^2 + u^{(3)}(\theta)\mu^3 + \ldots\ldots \qquad (4.20)$$

nous remplaçons $\theta$ par $\theta+\pi$ et puis nous changeons les signes par les signes contraires

$$-\rho_1 = -\mu - u^{(2)}(\theta+\pi)\mu^2 - u^{(3)}(\theta+\pi)\mu^3 - \ldots\ldots \qquad (4.2I)$$

nous avons encore une solution de (4.I6) qui ne peut être la même qu'avant, c'est-à-dire qu'en (4.20), car sa condition initiale est de signe contraire. Elle est donc égale à l'autre solution

$$\rho_2 = -\mu + u^{(2)}(\theta)\mu^2 - u^3(\theta)\mu^3 + \ldots\ldots \qquad (4.22)$$

En égalant (4.2I)et (4.22) nous voyons que lorsque $\theta$ est remplacé par $\theta+\pi$ les fonctions $u^{(2k+1)}$ ne changent pas et les fonctions $u^{(2k)}$ prennent la même valeur avec le signe contraire.

$\rho$ change de signe lorsqu'on remplace $\mu$ par $-\mu$ et $\theta$ par $\theta+\pi$.

D'après (4.I5) la période ne change pas quand on remplace $\rho$ par $-\rho$ et $\theta$ par $\theta+\pi$. Par conséquent T ne change pas si $\theta$ est remplacé par $\theta+\pi$ et $\mu$ par $-\mu$. Alors si dans (4.I5) nous changeons d'abord $\theta$ en $\theta+\pi$ nous ne changeons pas la période, car remplacer $\theta$ par $\theta+\pi$ revient à déplacer les limites d'intégration tout en gardant l'intervalle d'une période et comme l'intégrand est périodique l'intégrale ne change pas de valeur. Donc T ne change pas si on remplace $\mu$ par $-\mu$. Par conséquent T ne contient que les puissances paires de $\mu$.

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\left[1 + H_2\mu^2 + H_4\mu^4 + \ldots\ldots\right] \qquad (4.23)$$

cqfd.

or $\mu^2 = x^2 + y^2 + S(x,y) = C^{te}$

en prenant cette égalité au moment initial nous avons

$$\mu^2 = a^2 + b^2 + S(a,b) \tag{4.24}$$

T peut donc s'exprimer en fonction de a et b.

Considérons à présent le système de Lyapunov d'ordre arbitraire (I.I7). Nous avons déjà montré que la recherche des solutions périodiques de ce système aboutit à la recherche des solutions périodiques d'un système du second ordre.
Mais d'après (4.I2) $\mu^2$ s'écrit:

$$\begin{aligned}\mu^2 &= a^2 + b^2 + W\Big(x_1(a,b),\dots,\ x_n(a,b)+S(a,b,x_1(a,b),\dots,x_m(a,b)\Big) \qquad (4.25)\\ &= a^2 + b^2 + S^*(a,b)\end{aligned}$$

où $S^*$ commence par des termes d'ordre au moins égal à trois.

T peut donc s'exprimer en fonction de a et b en remplaçant $\mu^2$ par (4.25) dans l'expression (4.23).

Si dans (4.23) nous remplaçons a par c et b par o nous obtenons:

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\lambda}\Big(1 + H_2(c^2 + S(c,o)) + H_4(c^2 + S(c,o))^2 + \dots\Big)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\Big(1 + H_2\, c^2 + H_2\, S(c,o) + H_4\, c^4 + 2\, H_4\, c^2\, S\,(c,o) + H_4\, S^2(c,o) + H_6\, c^6\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \text{où } H_2\, c^2 & \text{est d'ordre} & = 2 \\ H_2\, S\,(c,o) & \text{"} & \geqslant 3 \\ H_4\, c^4 & \text{"} & = 4 \\ 2\, H_4 c^2 S(c,o) & \text{"} & \geqslant 5 \\ H_4\, S^2(c;o) & \text{"} & \geqslant 6 \\ H_6\, c^6 & \text{"} & = 6 \end{array} \qquad (4.26)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\,(\,1 + h_2\, c^2 + h_3\, c^3 + h_4\, c^4 + \dots\dots\dots)$$

nous retrouvons (3.I). D'après (4.26) nous voyons que la plus petite puissance non nulle de c dont le coefficient est non nul, est nécessairement paire.

## CHAPITRE 2.

# SYSTEMES PROCHES DES SYSTEMES DE LYAPUNOV.

## I. LES SOLUTIONS GENERATRICES.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système d'équations,

$$\frac{d\,x_s}{dt} = a_{s1}\,x_1 + \dots + a_{sn}\,x_n + X_s^*(x_1,\dots,x_n) + \mathcal{E} f_s(t,x_1,\dots,x_n,\mathcal{E}) \quad s=1,\dots,n \qquad (I.I)$$

où les $a_{sj}$ sont des constantes réelles

les $X_s^*$ sont des fonctions analytiques de $x_1,\dots,x_n$ dont le développement commence par des termes d'ordre $\geqslant 2$.

les $f_s$ sont des fonctions analytiques de $x_1,\dots,x_n$ et du petit paramètre $\mathcal{E}$. Elles sont $2\pi$-périodiques en t développables en série de Fourrier. Le domaine d'analycité de ces fonctions est un certain voisinage autour de l'origine.

Suppôsons que le système générateur, (I.I) où $\mathcal{E} = 0$,

$$\frac{d\,x_s^o}{dt} = a_{s1}\,x_1^o + \dots + a_{sn}\,x_n^o + X_s^*(x_1^o,\dots,x_n^o) \qquad (I.2)$$

soit un système de Lyapunov.

Supposons que $\pm\lambda i$ soient une paire de racines simples de l'équation fondamentale

$$\begin{vmatrix} a_{II}-\rho & a_{I2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2I} & a_{22}-\rho & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (I.3)$$

et que les hypothèses du chapitre I, paragraphe I, sont vérifiées. Alors on peut ramener le système (I.2) au système suivant:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta + X(\xi,\eta,\xi_j)$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda\xi + Y(\xi,\eta,\xi_j) \qquad \text{(I.4)}$$
$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\xi_i + X_s(\xi,\eta,\xi_j) \qquad (s=1,\dots,m) \quad m = n-2$$

où l'équation fondamentale:

$$\begin{vmatrix} b_{II}-\rho & b_{I2} & \cdots & b_{1m} \\ b_{2I} & b_{22}-\rho & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(I.5)}$$

n'admet pas de racine nulle ni de racines $\pm p\lambda i$ où p entier.

Le système (I.4) admet l'intégrale première:

$$H = \xi^2 + \eta^2 + W(\xi_1,\dots,\xi_m) + S(\xi,\eta,\xi_1,\dots,\xi_m) = \text{constante} \qquad \text{(I.6)}$$

où W est une forme quadratique des variables $\xi_1,\dots,\xi_m$

S est une fonction analytique des variables $\xi,\eta,\xi_1,\dots,\xi_m$

dont le développement commence par des termes d'ordre $\geqslant 3$.

De même que le système générateur (I.2) est ramené au système (I.4), le système (I.I.) peut être ramené au système (I.7).

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x,y,x_j) + \varepsilon f(t,x,y,x_j,\varepsilon)$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x,y,x_j) + \varepsilon F(t,x,y,x_j,\varepsilon) \qquad \text{(I.7)}$$
$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{m} b_{si}x_i + X_s(x,y,x_j) + \varepsilon F_s(t,x,y,x_j,\varepsilon)$$

où les fonctions X,Y et $X_s$ sont du même type que les fonctions $X_s^*$

les fonctions f, F et $f_s$ sont du même type que les fonctions $f_s$.

Le système (I.7) avec $\varepsilon = 0$ est un système de Lyapunov.

Au lieu des notations $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $x_s^{(0)}$ qui poseront des problèmes lorsque nous devrons employer des indices, nous utiliserons les notations $\xi,\eta,\xi_s$.

Par le chapitre précédent, nous savons que (I.4) a une solution périodique qui dépend de deux constantes arbitraires c et h et s'écrit d'après (3.5) et (3.10)

$$\begin{cases} \xi = c\cos\tau + c^2\xi_2(\tau) + \ldots\ldots \\ \eta = c\sin\tau + c^2\eta_2(\tau) + \ldots\ldots \\ \xi_s = c\xi_{s1}(\tau) + c^2\xi_{s2}(\tau) + \ldots\ldots \end{cases} \tag{I.8}$$

où $\cdot\ \tau = \dfrac{\lambda(t+h)}{1 + h_2 c^2 + \ldots\ldots}$ (I.9)

- $\xi_k, \eta_k, \xi_{sk}$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques en $\tau$ $k \geqslant 1$ avec les conditions initiales $\xi_k(o) = \eta_k(o) = o$ $k = 2, 3, \ldots$
- $h_2, h_3, \ldots.$ sont des constantes indéterminées telles que la première qui n'est pas nulle, est d'indice pair.
- les séries (I.8) convergent pour h et c suffisamment proches de zéro.
- la période de cette solution est déterminée par la formule;

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + \ldots\ldots) \tag{I.10}$$

D'après la méthode générale de la recherche des solutions périodiques, nous devons d'abord trouver toutes les solutions génératrices de périodes $2\pi$ c'est-à-dire

$$T = \frac{2\pi}{p} \tag{I.11}$$

où p est un entier arbitraire

(I.11) est une condition pour trouver c.

Pour différentes valeurs de p, nous pourrons avoir différentes valeurs de $c_p$ et donc différentes solutions génératrices $\{\xi^{(p)}, \eta^{(p)}, \xi_s^{(p)}\}$.

Pour une valeur donnée de p, nous allons trouver la solution:

$$\{\xi^{(p)}(t+h), \eta^{(p)}(t+h), \xi_s^{(p)}(t+h)\}. \tag{I.12}$$

Cette solution, en vertu de (I.8) est bien déterminée par les formules:

$$\begin{aligned} \xi^{(p)}(t+h) &= c_p\cos\tau + c_p^2\xi_2(\tau) + \ldots\ldots \\ \eta^{(p)}(t+h) &= c_p\sin\tau + c_p^2\eta_2(\tau) + \ldots. \\ \xi_s^{(p)}(t+h) &= c_p\xi_{s1}(\tau) + c_p^2\xi_{s2}(\tau) + \ldots. \end{aligned} \tag{I.13}$$

$$\text{où } \tau = p\,(t + h) \tag{I.14}$$

Détermination de $c_p$.

D'après (I.10) et (I.11) nous avons que

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + h_2\, c_p^2 + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + h_{2r}\, c_p^{2r} + h_{2r+1}\, c_p^{2r+1} + \ldots\right)$$

où $h_{2r}$ est le premier $h_k \neq o$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + h_{2r}\, c_p^{2r} + h_{2r+1}\, c_p^{2r+1} + \ldots\right)$$

$$h_{2r}\, c_p^{2r} + h_{2r+1}\, c_p^{2r+1} + \ldots\ldots = \frac{\lambda - p}{p} \tag{I.15}$$

Pour trouver les racines $c_p$ il faut résoudre l'équation

$$c + \frac{h_{2r+1}}{2r\, h_{2r}}\, c^2 + \ldots\ldots\ldots = a \tag{I.16}$$

$$\text{où } \quad a = \sqrt[2r]{\frac{\lambda - p}{p\, h_{2r}}} \tag{I.17}$$

en effet, en élevant (I.16) où a est remplacé par (I.17) à la puissance 2 r on retrouve l'équation (I.15).

L'équation (I.13) a une seule solution qui s'annule pour $a = o$ et est analytique par rapport à a. Mais (I.17) nous indique que a admet 2r valeurs, nous avons donc 2 r équations (I.13) qui nous donnent 2 r solutions pour (I.12) analytiques par rapport à a et s'annulant pour $a = o$ c'est-à-dire pour $\lambda = p$.

Si $h_{2r}\,(\lambda - p) < o$ alors a est complexe et toutes les solutions $c_p$ sont complexes.
Si $h_{2r}\,(\lambda - p) > o$ alors on n'a que deux solutions réelles l'une positive, l'autre négative.

C'est-à-dire si $h_{2r} > o$ alors p peut prendre toutes les valeurs entières jusque $\lambda$, si $h_{2r} < o$ alors p peut prendre toutes les valeurs entières $\geqslant \lambda$. Alors en choisissant de cette façon le nombre p pour chaque p nous avons deux solutions génératrices

$$\left\{ \xi^{(p)}(t + h)\,,\ \eta^{(p)}(t + h)\,,\ \xi_s^{p}(t + h) \right\}.$$

mais, en plus, il y a encore la solution triviale

$$\xi = \eta = \xi_1 = \ldots\ldots = \xi_m = o$$

## II. SOLUTIONS PERIODIQUES $\{x_s^{(o)}\}$.

Pour le système générateur (I.4) ($\mathcal{E} = o$)

nous avons la solution triviale: $\xi = \eta = \xi_1 = \ldots\ldots = \xi_m = o$

ou les solutions $\{\xi^{(p)}(t+h), \eta^{(p)}(t+h), \xi_s^{(p)}(t+h)\}$

Ces dernières sont notées $\{\xi_s^{(p)}(t+h)\}$ lorsque nous considérons le système (I.2).

Pour le système complet (I.I) ou (I.7) ($\mathcal{E} \neq o$),
nous notons respectivement par $\{x_s^{(o)}\}$ ou $\{x^{(o)}, y^{(o)}, x_s^{(o)}\}$ la solution périodique correspondant à la solution génératrice triviale,
et nous noterons par $\{x_s^{(p)}\}$ ou $\{x^{(p)}, y^{(p)}, x_s^{(p)}\}$ la solution périodique correspondant à la solution génératrice

$$\{\xi_s^{(p)}(t+h)\} \text{ ou } \{\xi^{(p)}(t+h), \eta^{(p)}(t+h), \xi_s^{(p)}(t+h)\}$$

suivant que nous considérons (I.I) et (I.2) ou (I.7) et (I.4).
Nous allons chercher la solution périodique de (I.I) qui s'annule pour $\mathcal{E} = o$.

Si nous supposons que (I.3) n'admet pas de racine $\pm \lambda i$ où $\lambda$ est un entier mais admet au moins une paire de racines $\pm \lambda i$ où $\lambda$ est presque un entier, c'est-à-dire $\lambda$ est un entier plus un terme d'ordre $\mathcal{E}$, alors nous pouvons nous ramener au cas où $\lambda$ est un entier.

Si maintenant nous supposons que (I.3) admet une paire de racines $\pm$ p i où p entier et n'admet pas d'autres racines de ce type, alors le système peut être présenté sous la forme:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -p\,y + X(x,y,x_j) + \mathcal{E} f(t,x,y,x_j,\mathcal{E}) \\ \frac{dy}{dt} &= p\,x + Y(x,y,x_j) + \mathcal{E} F(t,x,y,x_j,\mathcal{E}) \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, x_i + X_s(x,y;x_j) + \mathcal{E} F_s(t,x,y,x_j,\mathcal{E}) \qquad s = 1,\ldots,m \end{aligned}\right. \tag{2.I}$$

Essayons de vérifier ces équations avec les séries:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{E}\, x^{(1)}(t) + \mathcal{E}^2 x^{(2)}(t) + \ldots\ldots \\ y &= y^{(1)}(t) + \mathcal{E}^2 y^{(2)}(t) + \ldots\ldots \\ x_s &= \mathcal{E}\, x_s^{(1)}(t) + \mathcal{E}^2 x_s^{(2)}(t) + \ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

dont les coefficients sont des fonctions $2\pi$-périodiques. Pour rechercher ces coefficients nous reportons les séries (2.2) dans (2.I) et nous identifions les termes de même puissance en $\varepsilon$.

Termes en $\varepsilon$.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} &= -p\, y^{(1)}(t) + f(t,o,o,o,o) \\ \frac{dy^{(1)}(t)}{dt} &= p\, x^{(1)}(t) + F(t,o,o,o,o) \\ \frac{dx_s^{(1)}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, x_s^{(1)}(t) + F_s(t,o,o,o,o) \quad (s = 1,\dots,m) \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

Pour les équations $(2.3)_3$, nous avons un système non résonnant car l'équation(I.5), d'après notre supposition, n'admet pas de racines $\pm$ k i où k entier. Le système n'admet donc qu'une seule solution périodique pour $x_s^{(1)}$.

En ce qui concerne les deux premières équations de (2.3), pour avoir une solution périodique nous devons vérifier la condition d'existence

$$\int_o^2 \psi(t)\, h(t)\, dt = o \tag{2.4}$$

où $\psi(t)$ est une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace des solutions périodiques du système linéaire.

h (t) est la partie non linéaire du système.

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos p\, t & \sin p\, t \\ \sin p\, t & -\cos p\, t \end{pmatrix}$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} f(t,o,o,o,o) \\ F(t,o,o,o,o) \end{pmatrix}$$

Etant donné l'hypothèse que les fonctions $f_s$ figurant dans (I.I) sont développables en séries de Fourier, nous avons:

$$\begin{aligned} f(t,o,o,o,o) &= A_{I0} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cos nt + B_{1n} \sin nt) \\ F(t,o,o,o,o) &= B_{I0} + \sum_{n>1}^{\infty} (A_{2n} \cos nt + B_{2n} \sin nt) \end{aligned} \tag{2.5}$$

La condition (2.4) devient alors:

$$A_{1p}\,\pi + B_{2p}\,\pi = 0$$

$$B_{1p}\,\pi - A_p\,\pi = 0$$

ou encore $\quad \mathcal{S}_1 \overset{\text{déf}}{=} B_{1p} - A_p \quad$ et $\mathcal{S}_2 \overset{\text{déf}}{=} A_{1p} + B_{2p}$ (2.6)

sont nuls.

Si au moins une des valeurs $\mathcal{S}_1$ ou $\mathcal{S}_2$ est non nulle, alors nous disons que nous avons la <u>résonance principale.</u>

<u>Théorème.</u>

Soient 2 l la plus petite puissance des valeurs de c dans le développement de la période T

$$T = \frac{2\pi}{p}\left(1 + h_{2l}\, c^{2l} + \dots\dots\right)$$

de la solution du système générateur

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -p\,\eta + X(\xi, \eta, \xi_j) \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\,\xi + Y(\xi, \eta, \xi_j) \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} b_{si}\,\xi_i + X_s(\xi, \eta, \xi_j) \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

de conditions initiales $\xi(0) = c$, $\eta(0) = 0$.

Alors dans le cas de résonance principale, il existe une et une seule solution périodique $\{x^{(res)}, y^{(res)}, x_s^{(res)}\}$ des équations (2.I) qui s'annule pour $\varepsilon = 0$ et ces fonctions $x^{(res)}, y^{(res)}, x_s^{(res)}$ sont développables en séries par rapport aux puissances entières de $\nu = \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}}$. Ces séries convergent pour $\varepsilon$ suffisamment petit.

<u>Démonstration:</u>

Considérons le système générateur (2.7) . Au paragraphe 4 du chapitre précédent, nous avons démontré qu'il existe pour ce système une solution periodique qui contient deux constantes arbitraires a et b qui sont les valeurs initiales de $\xi$ et $\eta$

et les valeurs $\xi_s$ sont des fonctions analytiques $\xi$ et $\eta$,

$$\xi_s = w_s(\xi, \eta) \tag{2.8}$$

qui vérifient:

$$\frac{\partial w_s}{\partial \xi}\left[-p\eta + X(\xi,\eta,w_j)\right] + \frac{\partial w_s}{\partial \eta}\left[p\xi + Y(\xi,\eta,w_j)\right] = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, w_i + X_s(\xi,\eta,w_j)$$

Nous avons démontré au paragraphe 4 du chapitre précédent que le développement des fonctions $w_s$ commence par des termes dont les puissances $\geqslant 2$. Par conséquent, si dans le système (3.I), nous effectuons le changement de variables

$$u_s = x_s - w_s(x,y) \qquad (s = 1,\dots,m) \tag{2.9}$$

les termes linéaires ne changent pas.

Les fonctions $X, Y, X_s, f, F, F_s$ sont remplacées par des fonctions du même type: $X^*, Y^*, X_s^*, f^*, F^*, F_s^*$.

La substitution donne respectivement pour (2.I) et (2.7):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -p\,y + X^*(x,y,u_j) + \varepsilon f^*(t,x,y,u_j,\varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= p\,x + Y^*(x,y,u_j) + \varepsilon F^*(t,x,y,u_j,\varepsilon) \\ \frac{du_s}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, u_i + X_s^*(x,y,u_j) + \varepsilon F_s^*(t,x,y,u_j,\varepsilon) \end{aligned}\right. \tag{2.I0}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -p\eta + X^*(\xi,\eta,\xi_j) \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\xi + Y^*(\xi,\eta,\xi_j) \\ \frac{d\xi_s^*}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} b_{si}\, \xi_i^* + X_s^*(\xi,\eta,\xi_j^*) \end{aligned} \tag{2.II}$$

Cette substitution est telle que le problème de la recherche de la solution périodique de (2.I) est équivalent au problème de la recherche de la solution périodique de (2.I0).

On a que:

$$f^*(t,o,o,o,o) = f(t,o,o,o,o)$$

$$F^*(t,o,o,o,o) = F(t,o,o,o,o)$$

Les valeurs $\delta_1$ et $\delta_2$ ne changent donc pas. Autrement dit, si nous avons la résonance principale pour (2.I), nous l'avons également pour (2.IO).
La solution périodique de (2.7) devient la solution périodique de (2.II) avec pour seule différence que les valeurs $\xi_s^*$ sont nulles car:

$$\xi_s^* = \xi_s - w_s(\xi, \eta) = \xi_s - \xi_s = o.$$

C'est-à-dire la solution des équations (2.II) avec les conditions initiales

$$\xi(o) = a, \ \eta(o) = b, \ \xi_s^*(o) = o \tag{2.I2}$$

sera périodique. (a,b sont des constantes arbitraires).
La période de cette solution s'écrit:

$$T = \frac{2\pi}{p} \left[ 1 + H_{21} (a^2 + b^2)^1 + \ldots\ldots \right] \tag{2.I3}$$

car • $\mu^2 = a^2 + b^2 + W\left(\xi_1^*(a,b), \ldots, \xi_m^*(a,b)\right)$
$= a^2 + b^2 + W(o, \ldots., o)$
$= a^2 + b^2$ vu W forme quadratique en les $\xi_i^*$

• $\lambda = p$ ici

• et par hypothèse $H_{21}$ est la première constante $H_{2i}$ $i = 1, 2, \ldots.$non nulle. $H_{21} = h_{21}$.

Vu que (2.II) admet la solution périodique où tous les $\xi_s^*$ sont nuls, nous avons que:

$$\left\{ X_s^*(\xi, \eta, \xi_j^*) \right\}_{\xi_j^* = o} = o \tag{2.I4}$$

Maintenant la solution périodique pour le système (2.IO) est:

$$x(t,a,b,\beta_j,\varepsilon), \ y(t,a,b,\beta_j,\varepsilon), \ u_s(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) \tag{2.I5}$$

avec les conditions initiales

$$x(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = a, \ y(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = b, \ u_s(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = \beta_j \tag{2.I6}$$

Pour $\varepsilon = o$, la solution $2\pi$-périodique (2.I5) du système (2.IO) devient la solution périodique du système (2.II) qui pour les conditions initiales (2.I2) est T-périodique et même p T-périodique pour p entier.

Nous avons donc:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{x(pT,a,b,\beta_j,o)\}_{\beta_j=o} & = a \\ \\ \{y(pT,a,b,\beta_j,o)\}_{\beta_j=o} & = b \end{array} \right. \qquad (2.17)$$

La relation (2.14) étant vraie pour toutes valeurs de $\xi$ et $\eta$, et pour $\xi^*_j = o$, la relation (2.10) avec $\varepsilon = o$ admet donc la solution nulle. Elle admet d'autre part la solution

$$u_s(t,a,b,\beta_j,o)$$

En conséquence

$$\{u_s(t,a,b,\beta_j,o)\}_{\beta_j=o} = o \qquad (2.18)$$

car deux solutions d'un système égales en un point, sont partout égales.

Pour que la solution (2.15) du système complet soit $2\pi$-périodique, il faut et il suffit que:

$$[x] = x(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - x(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = o$$

$$[y] = y(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - y(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = o$$

$$[u_s] = u_s(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - u_s(o,a,b,\beta_j,\varepsilon) = o \qquad (s = 1,\dots,m)$$

c'est-à-dire, d'après (2.16), il faut et il suffit que:

$$\begin{aligned} [x] &= x(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - a &&= o \\ [y] &= y(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - b &&= o \qquad (2.19) \\ [u_s] &= u_s(2\pi,a,b,\beta_j,\varepsilon) - \beta_s &&= o \qquad (s = 1,\dots,m) \end{aligned}$$

Si nous écrivons les termes linéaires de la solution (2.15), nous avons:

$$\begin{aligned} x(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) &= A_1(t)\, a + B_1(t)\, b + C_1(t)\,\varepsilon + \dots \\ y(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) &= A_2(t)\, a + B_2(t)\, b + C_2(t)\,\varepsilon + \dots \qquad (2.20) \\ u_s(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) &= A_{s1}(t)\beta_1 + \dots + A_{sm}(t)\beta_m + D_s\,\varepsilon + \dots \end{aligned}$$

où les petits points représentent les termes non linéaires.

Il n'ya pas d'autres termes linéaires.

En effet, montrons le par exemple pour les équations $(2.20)_{1,2}$.

Supposons que $(2.20)_I$ et $(2.20)_2$ contiennent des termes en $\beta_j$ :

$$x(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) = A_1(t)a + B_1(t)\, b + C_1(t)\,\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} E_i\,(t)\beta_i \;+ \dots$$

$$y(t,a,b,\beta_j,\varepsilon) = A_2(t)a + B_2(t)\, b + C_2(t)\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} F_i\,\beta_i \;+ \dots$$

En reportant dans $(2.10)_{I,2}$ et en identifiant les termes de mêmes puissances en $\beta_j$ on obtient le système:

$$\begin{cases} \dot{E}_j(t) = -\,p\,F_j(t) \\ \dot{F}_j(t) = \;p\,E_j(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $E_j(o) = F_j(o) = o$ d'après (2.16).

Ce système admet la solution :

$$E_j(t) = K_{1j}\cos pt + K_{2j}\sin pt$$

$$F_j(t) = K_{1j}\sin pt - K_{2j}\cos pt$$

On déduit des conditions initiales que $K_{1j} = K_{2j} = o \quad \forall j$

et donc $\quad E_j(t) = F_j(t) = o \quad \forall_j$ et $\forall\, t$

Nous désirons exprimer $\beta_j$ comme une fonction analytique de a,b et $\varepsilon$. Mais nous devons nous assurer que cela est possible. Pour cela écrivons la condition de périodicité $(2.19)_3$ en nous limitant aux termes linéaires comme en$(2.20)_3$

$$A_{s1}(2\pi)\beta_1 + \dots + A_{sm}(2\pi)\beta_m + D_s\,\varepsilon + \dots - \beta_s = o$$

ou

$$A_{s1}(2\pi)\beta_1 + \dots + \big(A_{ss}(2\pi) - 1\big)\beta_s + \dots + A_{sm}(2\pi)\beta_m + D_s\,\varepsilon + \dots = o \quad (2.21)$$

D'après le théorème des fonctions implicites, pour que $\beta_j = \beta_j(a,b,\varepsilon)$ nous devons avoir que le jacobien de ces équations par rapport à $\beta_1,\dots,\beta_m$ en $a = b = \beta_1 = \dots = \beta_m = \varepsilon = o$ soit non nul. Autrement dit, il faut que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}(2\pi)-1 & A_{12}(2\pi) & \cdots & A_{1n}(2\pi) \\ A_{21}(2\pi) & A_{22}(2\pi)-1 & \cdots & A_{2n}(2\pi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}(2\pi) & A_{n2}(2\pi) & \cdots & A_{nn}(2\pi)-1 \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

soit $\neq$ o. C'est bien le cas.

Démonstration.

Les valeurs $A_{sj}$ vérifient les équations

$$\frac{d\,A_{sj}(t)}{dt} = b_{s1}\,A_{1j}\,(t)+\ldots\ldots+b_{sm}\,A_{mj}\,(t) \qquad (2.23)$$

avec les conditions initiales

$$A_{ss}\,(o) = 1\,,\quad A_{sj}\,(o) = o \qquad (s \neq j) \qquad (2.24)$$

Les équations (2.23) proviennent de $(2.10)_3$ et les égalités (2.24) nous sont données par $(2.16)_3$.

Si (2.23) est considéré comme un cas particulier de système à coefficients périodiques et si D ($\rho$) exprime son déterminant caractéristique alors d'après [6] p. 141-142 nous avons que

$$\Delta = D\,(1)$$

Les exposants caractéristiques de (2.23) sont les valeurs propres de l'équation caractéristique (1.5) laquelle n'admet pas de racines $\pm$ k i où k entier, vu notre hypothèse concernant (1.3) au début de ce paragraphe. Par conséquent, il n'y a pas de multiplicateur caractéristique égal à 1, c'est-à-dire que D ($\rho$) n'admet pas de racine égale à 1 et donc $\Delta$ est non nul.

Par conséquent, les équations $(2.19)_3$ ou (2.21) sont résolubles par rapport à $\beta_s$ et nous pouvons trouver les $\beta_s$ comme des fonctions analytiques de a, b, $\mathcal{E}$ qui s'annulent pour a = b = $\mathcal{E}$ = o

$$\beta_s = \beta^*_s\,(a,b,\mathcal{E}) \qquad s = 1,\ldots,m \qquad (2.25)$$

Mais elles s'annulent encore pour $\mathcal{E}$ = o et a, b $\neq$ o parce que les fonctions $u_s$ en vertu de (2.18) s'annulent pour $\beta_1 = \ldots = \beta_m = \mathcal{E} = o$ pour toute valeur de t, a, b, alors:

$$\beta^*_s\,(a,b,o) = o \qquad (2.26)$$

Si nous portons (2.25) dans $(2.19)_{1,2}$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} x\Big(2\pi,a,b,\beta^*_j(a,b,\mathcal{E}),\mathcal{E}\Big) - a = o \\ y\Big(2\pi,a,b,\beta^*_j(a,b,\mathcal{E}),\mathcal{E}\Big) - b = o \end{array}\right. \qquad (2.27)$$

qui sont deux équations par rapport aux inconnues a, b.

D'après $(2.20)_{I,2}$ :

$$x\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,o),o\right) = A_1(2\pi)a + B_1(2\pi)\,b + \ldots\ldots\ldots$$
$$y\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,o),o\right) = A_2(2\pi)a + B_2(2\pi)\,b + \ldots\ldots\ldots$$

où les petits points représentent les termes non linéaires et indépendants de $\mathcal{E}$.

Donc:

$$x\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,\mathcal{E}),\mathcal{E}\right) = x\left(2\pi,a,b,\beta^*(a,b,o),o\right) + C_1(2\pi)\mathcal{E} + \mathcal{E}\,\phi_1(a,b,\mathcal{E})$$
$$y\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,\mathcal{E}),\mathcal{E}\right) = y\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,o),o\right) + C_2(2\pi)\mathcal{E} + \mathcal{E}\,\phi_2(a,b,\mathcal{E})$$

où $\phi_i(a,b,\mathcal{E})$ représentent les termes non linéaires dépendant de $\mathcal{E}$.

Et par (2.I9) nous avons

$$\begin{cases} x\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,o),o\right) - a + \mathcal{E}\left\{[C_1] + \phi_1(a,b,\mathcal{E})\right\} = o \\ y\left(2\pi,a,b,\beta_j^*(a,b,o),o\right) - b + \mathcal{E}\left\{[C_2] + \phi_2(a,b,\mathcal{E})\right\} = o \end{cases}$$

car $C_1(o) = C_2(o) = o$ d'après (2.I6)

et par (226) nous avons

$$\begin{cases} \left\{x(2\pi,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o} - a + \mathcal{E}\left\{[C_1] + \phi_1(a,b,\mathcal{E})\right\} = o \\ \left\{y(2\pi,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o} - b + \mathcal{E}\left\{[C_2] + \phi_2(a,b,\mathcal{E})\right\} = o \end{cases} \tag{2.28}$$

D'autre part, d'après (2.I3) nous avons

$$2\pi = p\,T + h \tag{2.29}$$
$$\text{où } h = -2\pi H_{21}(a^2+b^2)^1 + \ldots. \tag{2.30}$$

En développant en série par rapport à h, nous avons:

$$\left\{x(pT,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o} + h\left\{\frac{dx(t,a,b,\beta_j,o)}{dt}\right\}_{\beta_j=o,\,t=pT} + \ldots\ldots - a + \mathcal{E}\left\{[C_1] + \phi_1(a,b,\mathcal{E})\right\} = o$$

$$\left\{y(pT,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o} + h\left\{\frac{dy(t,a,b,\beta_j,o)}{dt}\right\}_{\beta_j=o,\,t=pT} + \ldots. - b + \mathcal{E}\left\{[C_2] + \phi_2(a,b,\mathcal{E})\right\} = o$$

Du fait que les fonctions $\left\{x(t,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o}$ et $\left\{y(t,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o}$

sont périodiques et vérifient (2.7),

$$\left\{\frac{dx(t,a,b,\beta_j,o)}{dt}\right\}_{\beta_j=o,t=pT} = -p\left\{y(t,a,b,\beta_j,o)\right\}_{\beta_j=o,t=pT} + X$$

$$= -p\,b + X \qquad \text{d'après (2.I7)}$$

$$\left\{\frac{dy(t,a,b,\beta_j,o)}{dt}\right\}_{\beta_j=o,t=pT} = p\,a + Y$$

Et donc en vertu de (2.I7)

$$a + h(-p\,b + X) + \ldots\ldots - a + \mathcal{E}\left\{[C_1] + \phi_1\right\} = o$$

$$b + h(p\,a + Y) + \ldots\ldots - b + \mathcal{E}\left\{[C_2] + \phi_2\right\} = o$$

Par conséquent:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\hbar p\, H_{21}(a^2 + b^2)^l\, b + \ldots\ldots + \mathcal{E}\left\{[C_1] + \phi_1(a,b,\varepsilon)\right\} = o \\ -2\hbar p\, H_{21}(a^2 + b^2)^l a + \ldots\ldots + \mathcal{E}\left\{[C_2] + \phi_2(a,b,\mathcal{E})\right\} = o \end{array}\right. \qquad (2.3I)$$

où les termes qui ne dépendent que de a et b sont d'ordre $2\,l + 1$ par rapport à ces valeurs.

Démontrons qu'au moins une des valeurs $[C_1]$ ou $[C_2]$ est non nulle.

Dans $(2.20)_{I,2}$ qui vérifient (2.IO) retenons uniquement les termes en $\mathcal{E}$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\,C_1(t)}{dt} = -p\,C_2 + f^*(t,o,o,o,o) \\ \dfrac{d\,C_2(t)}{dt} = p\,C_1 + F^*(t,o,o,o,o) \end{array}\right. \qquad (2.32)$$

avec les conditions initiales $C_1(o) = C_2(o) = o$ (2.33)

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1(t) = \widetilde{C}_1(t) + t(C_{1p}\cos pt + D_{1p}\sin pt) + A_1\cos pt + B_1\sin pt \\ C_2(t) = \widetilde{C}_2(t) + t(C_{2p}\cos pt + D_{2p}\sin pt) + A_2\cos pt + B_2\sin pt \end{array}\right.$$

où $A_1 = A_2 = o$ vu (2.33)

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{C}_1(t) = \dot{\widetilde{C}}_1(t) + C_{1p}\cos pt + D_{1p}\sin pt + t(-p\,C_{1p}\sin pt + p\,D_{1p}\cos pt) + pB_1\cos pt \\ \dot{C}_2(t) = \dot{\widetilde{C}}_2(t) + C_{2p}\cos pt + D_{2p}\sin pt + t(-p\,C_{2p}\sin pt + p\,D_{2p}\cos pt) + p\,B_2\cos pt \end{array}\right.$$

mais d'après (2.32) et (2.5)

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{C}_1(t) = -p\left[\widetilde{C}_2(t) + t(C_{2p}\cos pt + D_{2p}\sin pt) + B_2\sin pt\right] + A_{IO} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\cos nt + B_{1n}\sin nt) \\ \dot{C}_2(t) = p\left[\widetilde{C}_1(t) + t(C_{1p}\cos pt + D_{1p}\sin pt) + B_1\sin pt\right] + B_{20} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{2n}\cos nt + B_{2n}\sin nt) \end{array}\right.$$

en identifiant on trouve

(1) $D_{1p} = -C_{2p}$ ; (3) $pB_1 + D_{2p} = A_{1p}$ ; (5) $pB_2 - D_{1p} = A_{2p}$

(2) $D_{2p} = C_{1p}$ ; (4) $pB_2 + D_{1p} = B_{1p}$ ; (6) $-pB_1 + D_{2p} = B_{2p}$

$$(3) + (6) \Rightarrow C_{1p} = D_{2p} = \frac{A_{1p} + B_{2p}}{2}$$

$$(4) - (5) \Rightarrow -C_{2p} = D_{1p} = \frac{B_{1p} - A_{2p}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = \frac{1}{2}(A_{1p} + B_{2p})\, t \cos pt + \frac{1}{2}(B_{1p} - A_{2p})\, t \sin pt + C_1^*(t) \\ C_2(t) = -\frac{1}{2}(B_{1p} - A_{2p})\, t \cos pt + \frac{1}{2}(A_{1p} + B_{2p})\, t \sin pt + C_2^*(t) \end{cases}$$

où $C_1^*$, $C_2^*$ sont des fonctions $2\pi$-périodiques en t.

$$\Rightarrow \begin{cases} [C_1] = (A_{1p} + B_{2p})\,\pi = \delta_2 \pi \\ [C_2] = -(B_{1p} - A_{2p})\,\pi = -\delta_1 \pi \end{cases}$$

Au moins une des valeurs $[C_1]$, $[C_2]$ est donc différente de zéro.

Nous allons, à présent, résoudre (2.3I), nous devons trouver les racines a ($\mathcal{E}$) et b ($\mathcal{E}$) qui s'annulent pour $\mathcal{E} = 0$.

Pour cela posons:

$$\begin{cases} \nu = \mathcal{E}^{\frac{1}{2l+1}} \\ a = \nu \alpha_1 \\ b = \alpha_2 \end{cases} \tag{2.34}$$

En remplaçant dans (2.3I) et en divisant par $\nu^{2l+1}$, nous obtenons:

$$\begin{cases} 2\pi p\; H_{2l}\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^l \alpha_2 + [C_1] + \nu\, \phi_1^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0 \\ -2\pi p\; H_{2l}\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^l \alpha_1 + [C_2] + \nu\, \phi_2^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

Pour $\nu = 0$, nous avons une seule solution réelle car pour $\nu = 0$ nous avons:

$$\begin{aligned} &2\pi p\, H_{2l} \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^l \alpha_2^{(0)} + [C_1] = 0 \\ &-2\pi p\, H_{2l} \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^l \alpha_1^{(0)} + [C_2] = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

où $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i(\mathcal{E} = 0) \quad i = 1,2$

$$\Rightarrow [C_1]^2 + [C_2]^2 = (2\pi\, p\, H_{21})^2 \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{21+1} \qquad (2.37)$$

De (2.36) nous tirons:

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{[C_2]}{2\pi p\, H_{21}\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1}}$$

$$\alpha_2^{(0)} = \frac{-[C_1]}{2\pi p\, H_{21}\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1}}$$

En utilisant (2.37), nous trouvons:

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{[C_2]}{\sqrt[21+1]{2\pi p\, H_{21}\left\{[C_1]^2 + [C_2]^2\right\}^{1}}} \qquad (2.38)$$

$$\alpha_2^{(0)} = \frac{-[C_1]}{\sqrt[21+1]{2\pi p\, H_{21}\left\{[C_1]^2 + [C_2]^2\right\}^{1}}}$$

Par conséquent $\alpha_1^{(0)}$ ou $\alpha_2^{(0)}$ est différent de o.

Nous avons déjà la condition (2.36) qui peut s'écrire:

$$F(\alpha, \varepsilon)\Big|_{\substack{\alpha = \alpha^{(0)} \\ \varepsilon = 0}} = 0 \qquad (2.39)$$

Nous devons encore vérifier que le jacobien

$$\text{dét}\left[\frac{\partial F(\alpha, \varepsilon)}{\partial \alpha}\right]_{\substack{\alpha = \alpha^{(0)} \\ \varepsilon = 0}} \neq 0 \qquad (2.40)$$

Ce jacobien s'écrit:

$$4\pi^2 p^2 H_{21}^2 \begin{vmatrix} 21\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1-1} \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} & 21\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1-1} \alpha_2^{(0)^2} + \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1} \\ -21\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1-1} \alpha_1^{(0)^2} + \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1} & -21\left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{1-1} \alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \end{vmatrix}$$

$$= 4\pi^2 p^2 H_{21}^2 (1 + 21) \left(\alpha_1^{(0)^2} + \alpha_2^{(0)^2}\right)^{21}$$

$\neq 0$

car $\alpha_1^{(0)}$ ou $\alpha_2^{(0)} \neq 0$

Il existe donc une seule solution réelle des équations (2.35) au voisinage de $\nu = 0$ et cette solution s'écrit:

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(o)} + \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} \nu^2 + \ldots$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{(o)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} \nu^2 + \ldots \tag{2.4I}$$

où les parties droites sont des fonctions analytiques de $\nu$ au voisinage de $\nu = o$ Autrement dit (2.3I) une solution réelle

$$a = \alpha_1^{(o)} \nu + \alpha_1^{(1)} \nu^2 + \ldots$$

$$b = \alpha_2^{(o)} \nu + \alpha_2^{(1)} \nu^2 + \ldots \tag{2.42}$$

Alors en remplaçant dans (2.25) a et b par la forme trouvée, nous obtenons $\beta_s$ comme fonction analytique de la valeur $\nu$ et en remplaçant a,b, $\beta_s$ dans (2.I5), nous obtenons la solution $2\pi$-périodique de (2.I0) qui vérifie les conditions du théorème.

cqfd.

## III. LE CALCUL PRATIQUE DES SOLUTIONS RESONNANTES.

Nous cherchons les séries:

$$x^{(res)} = x^{(1)} \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}} + x^{(2)} \varepsilon^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots$$

$$y^{(res)} = y^{(1)} \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}} + y^{(2)} \varepsilon^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots \tag{3.I}$$

$$x_s^{(res)} = x_s^{(1)} \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}} + x_s^{(2)} \varepsilon^{\frac{2}{2l+1}} + \ldots$$

où $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$ sont des coefficients $2\pi$-périodiques inconnues. En vertu de la démonstration du théorème précédent nous savons que la solution $2\pi$-périodique de (2.I) qui correspond à la solution génératrice triviale est de cette forme.

Nous reportons (3.I) dans (2.I) afin de déterminer les coefficients.

$$\frac{d\,x^{(res)}}{dt} = -\,p\,y^{(res)} + X\,(x^{(res)}, y^{(res)}, x_j^{(res)}) + f(t, x^{(res)}, y^{(res)}, x_j^{(res)}, \varepsilon)$$

$$\frac{d\,y^{(res)}}{dt} = p\,x^{(res)} + Y(x^{(res)}, y^{(res)}, x_j^{(res)}) + \varepsilon\,F(t, x^{(res)}, y^{(res)}, x_j^{(res)}, \varepsilon)$$

$$\frac{d\,x_s^{(res)}}{dt} = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\,x_i^{(res)} + \varepsilon\,F_s(t, x^{(res)}, y^{(res)}, x_j^{(res)}, \varepsilon) \qquad (s = 1,\ldots,m)$$

ce qui donne en identifiant les coefficients de $\varepsilon^{\frac{k}{2l+1}}$ $k = 1,2,\ldots$

$$\frac{d\,x^{(k)}}{dt} = -\,p\,y^{(k)} + f^{(k)}$$

$$\frac{d\,y^{(k)}}{dt} = p\,x^{(k)} + F^{(k)} \qquad (3.2)$$

$$\frac{d\,x_s^{(k)}}{dt} = \sum_{i=}^{m} b_{si}\,x_i^{(k)} + F_s^{(k)}$$

où $f^{(k)}$, $F^{(k)}$, $F_s^{(k)}$ sont des fonctions analytiques des coefficients périodiques $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$ pour $i < k$. $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$ étant déjà calculés pour $i < k$.

Les équations $(3.2)_3$ déterminent bien $x_s^{(k)}$ car (I.5) n'admet pas de racine nulle. Nous portons alors cette solution $x_s^{(k)}$ dans $(3.2)_{I,2}$. En ce qui concerne les équations $(3.2)_{I,2}$, nous avons la solution $2\pi$-périodique.

$$x^{(k)} = M_k \cos pt - N_k \sin pt + x_k^*(t)$$

$$y^{(k)} = M_k \sin pt + N_k \cos pt + y_k^*(t) \qquad (3.3)$$

où $x_k^*(t)$, $y_k^*(t)$ sont des solutions particulières du système non homogène $(3.2)_{I,2}$

$M_k$, $N_k$ sont des constantes arbitraires.

Pour que les équations qui déterminent $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ possèdent une solution périodique, il faut et il suffit d'avoir la condition

$$a_{1p}^{(k)} + b_{2p}^{(k)} = 0$$

$$b_{1p}^{(k)} - a_{2p}^{(k)} = 0 \qquad (3.4)$$

(d'après les calculs qui donnèrent (2.6)).

où $a_{1p}^{(k)}$ et $b_{1p}^{(k)}$ sont les coefficients de cos pt et sin pt dans le développement de $f^{(k)}$.

$a_{2p}^{(k)}$ et $b_{2p}^{(k)}$ sont les coefficients de cos pt et sin pt dans le développement de $F^{(k)}$.

Les équations (3.4) permettent de trouver les constantes $M_k$ et $N_k$ qui entrent dans (3.3), $M_i$, $N_i$, $i < k$, étant déjà trouvées.

Indiquons les propriétés suivantes de l'équation (3.4) qui peuvent être vérifiées facilement.

I) Ces équations sont identiquement vérifiées pour $k < 2l+1$ .

2) Pour $k = 2l+1$ , ces équations contiennent seulement les constantes $M_1$ et $N_1$ . Elles sont non linéaires et ont une seule solution réelle $M_1$, $N_1$.
Nous pouvons facilement voir que
$M_1 = \alpha_1^{(o)}$ et $N_1 = \alpha_2^{(o)}$ où $\alpha_1^{(o)}$, $\alpha_2^{(o)}$ sont données par (2.38).

3) Pour $k = 2l+j$ $(j > 1)$, ces équations ne contiennent que $M_j$ et $N_j$ et les constantes $M_i$, $N_i$ $(1 \leq i < j)$ qui ont été calculées auparavant. Ces équations sont linéaires par rapport à $M_j$, $N_j$.

---

## IV. SOLUTION PERIODIQUE $\left\{x_s^{(p)}\right\}$.

Nous recherchons à présent les solutions périodiques du système (I.7) qui pour $\varepsilon = o$ deviennent

$$\left\{\xi^{(p)}(t+h),\ \eta^{(p)}(t+h),\ \xi_s^{(p)}(t+h)\right\} \tag{4.I}$$

(cfr paragraphe I du chapitre 2)

Notons cette solution:

$$\left\{x^{(p)}, y^{(p)}, x_s^{(p)}\right\} \tag{4.2}$$

Si nous considérons le système (I.I), nous noterons cette solution:

$$\left\{x_s^{(p)}\right\} \tag{4.3}$$

et pour le système générateur (I.2), la solution sera notée

$$\left\{\xi_s^{(p)}(t+h)\right\} \tag{4.4}$$

Pour qu'à chaque solution périodique (4.4) corresponde une solution périodique (4.3) du système (I.I), il faut que la constante h vérifie l'équation:

$$P(h) = \int_o^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} f_i\ (t, \xi_1^{(p)}(t+h), \ldots, \xi_m^{(p)}(t+h), o\ )\ \Psi_i\ dt = o \tag{4.5}$$

où $\Psi(t)$ est une solution périodique du système adjoint au système aux variations du système générateur:

$$\frac{d\xi_s}{dt} = a_{s1}\ \xi + \ldots + a_{sn}\ \xi_n + X_s^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{4.6}$$

Le système (4.6) possède l'intégrale première

$$H(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \text{constante} \tag{4.7}$$

alors l'équation (4.5) peut s'écrire:

$$P(h) = \int_0^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(t, \xi_1^{(p)}(t+h),\ldots,\xi_n^{(p)}(t+h))\ \left.\frac{\partial H}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \xi_i^{(p)}} dt = 0 \tag{4.8}$$

En vertu des résultats de la première partie,

si $\dfrac{\partial P(h)}{\partial h} \neq 0$ , alors il existe une et une seule solution périodique du système (I.I) et cette solution est analytique par rapport à $\varepsilon$ .

## CONCLUSION.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à la symétrie dans la méthode de HALE-CESARI.

Nous avons présenté les résultats de la théorie de HALE sur laquelle nous nous sommes basés, nous avons démontré un certain nombre de propriétés des solutions périodiques d'un système ayant la propriété (E) par rapport à une matrice S. (Elles se trouvent résumées dans les théorèmes I,2 et 3 pp.I9,20 et 23). Nous avons alors explicité la méthode de HALE sous forme itérative. Ensuite, nous avons défini ce que nous entendions par fonctions symétriques par rapport à une matrice constante S et nous avons démontré plusieurs propriétés de ces fonctions. Nous basant sur nos résultats, nous avons recherché l'incidence de la propriété (E) du système sur les équations de bifurcation en donnant une forme adéquate aux matrices $\phi$ et $\psi$ définies en p.I. Cela nous permit de particulariser la méthode itérative dans le cas où l'on ne recherche que les solutions symétriques du système. Nous avons alors illustré notre théorie en l'appliquant à une équation particulière. Ensuite,nous avons considéré le passage d'un système périodique non linéaire à un système à coefficients constants et nous avons découvert que si nous voulions conserver la propriété de symétrie du système, nous n'étions pas certains qu'après transformation, les solutions conservaient la même période, nous pouvions seulement affirmer que la période était doublée.

Enfin, nous avons présenté les résultats de HALE concernant les systèmes admettant une ou plusieurs intégrales premières et nous avons décidé de résoudre l'exercice proposé par ce dernier.

Dans la deuxième partie, nous avons d'abord étudié dans un premier chapitre les systèmes de LYAPUNOV. Après avoir défini ces systèmes, nous en avons recherché les solutions périodiques. L'essentiel des résultats se trouvent rassemblés pp.67 à 69. Nous avons ensuite indiqué la construction pratique de ces solutions en séries de puissances de la condition initiale c de x .Un exemple illustre cette construction. Puis nous avons étudié les propriétés de ces solutions lorsque les conditions initiales de x et y sont de petites valeurs a et b arbitraires et que les valeurs initiales de $x_s$ sont des fonctions analytiques de $a$ et $b$ et nous avons recherché une expression de la période en fonction des conditions initiales $a$ et $b$.

Dans un second chapitre, nous nous sommes intéressés aux systèmes proches des systèmes de LYAPUNOV, nous en avons d'abord étudié les solutions génératrices puis la solution périodique correspondant à la solution génératrice triviale. Ensuite nous avons démontré le théorème p.94. Sur base de ce théorème, nous avons indiqué le calcul pratique des solutions résonnantes sous forme de séries de puissances $\varepsilon^{\frac{1}{2l+1}}$. Enfin, nous avons recherché les solutions périodiques correspondant aux solutions génératrices non triviales.

---

# BIBLIOGRAPHIE.

(I) CESARI L. "Asymptotic Behavier and Stability Problems" Academic Press, New-York, I963.

(2) GOURSAT "Cours d'Analyse Mathématique" I,II Gauthier-Villars, Paris,I933.

(3) JALE J.K. "Ordinary Differential Equations" New-York,I969.

(4) LYAPUNOV A. "Les Oeuvres complètes" Moscou,I953.

(5) MALKIN "Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations" Moscou,I956.

(6) ROUCHE N., MAWHIN J. "Equations Différentielles Ordinaires" Masson et Cie. Paris, I973.

# TABLE DES MATIERES.