THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Résonance 1-3 d'un équilibre hamiltonien

Hanon, Philippe

Award date:
1974

Awarding institution:
Universite de Namur

Résonance 1-3 d'un équilibre hamiltonien.

Promoteur :
Jacques HENRARD

Philippe HANON

1974

Résonance 1 – 3 d'un équilibre hamiltonien.

Table des matières

I. Introduction.

On se propose d'étudier le problème de la détermination de solutions périodiques autour d'un point d'équilibre d'un système hamiltonien - engendré par un hamiltonien conservatif à deux degrés de liberté - dans une situation résonante.

On supposera que le système linéaire associé est constitué de deux oscillateurs harmoniques de fréquences réelles et proches d'être commensurables.

Les motivations pour l'étude de ce problème viennent en ordre principal du problème restreint des trois corps. En effet, lorsque l'on fait varier le rapport des masses, le rapport des fréquences fondamentales aux équilibres équilatéraux parcourt toutes les valeurs depuis un jusqu'à l'infini. De plus l'exploration numérique des familles de Lyapunov de trajectoires périodiques issues de ces équilibres a montré que pour les valeurs de résonance, ces familles subissent des bifurcations (Henrard (1970))

Ce problème a été étudié par Roels (1971), Meyer et Palmore (1969), Henrard (1973), Sweet et Schmidt (1973) pour divers rapports de résonance et par diverses méthodes.

En particulier le cas de résonance $|1|-|3|$ a été étudié par Henrard (1970) à l'aide d'une méthode de perturbation, et par Sweet et Schmidt (1973) à l'aide de la méthode de l'alternative.

Henrard s'est intéressé aux cas où les deux fréquences sont du même signe ou non, et en a déduit des conditions d'existence et de stabilité d'orbites périodiques.
Sweet et Schmidt se sont d'abord intéressés au même cas et en ont déduit des conditions d'existence et de stabilité d'orbites périodiques, conditions dont ils ont présenté une discussion. Ensuite ils ont extrapolé, sans démonstration rigoureuse, leurs résultats au cas où les fréquences sont de signes opposés.
Mais les résultats de ces auteurs ne sont pas concordants.
Vu que les méthodes utilisées sont différentes, la comparaison de ces résultats n'est pas toujours aisée.
Le but de ce travail est donc d'essayer de vérifier ces résultats : y-a-t-il des erreurs d'un côté ou de l'autre ?, les résultats se recouvrent-ils au moins en partie ? ...
On s'efforcera de répondre à ces questions.

On procédera de la manière suivante :
on utilisera d'abord des transformations basées sur les transformations de Lie dans le but d'obtenir une variable ignorable et une forme normalisée de l'hamiltonien mise au point par Birkhoff et appelée forme idéale de résonance,
ensuite on analysera et on appliquera la méthode de l'alternative mise au point par Hale et Césari dans le but d'obtenir

des conditions d'existence et des conditions de stabilité pour les solutions périodiques recherchées.

II. Position du problème

On considère $H(p_i, q_i)$ un hamiltonien conservatif à deux degrés de liberté dans des coordonnées canoniques.
On le supposera analytique au moins au voisinage de l'origine de l'espace de phase (p_i, q_i), $i=1,2$:

$$H = \sum H_j(p_i, q_i)$$

avec H_j polynôme homogène de degré j en p_i, q_i.
Dans l'espace de phase le système résultant s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

où le signe $\cdot$ signifie : dérivation par rapport au temps.
Remarquons que H est une intégrale première de (1), c'est-à-dire qu'il se réduit à une constante égale à E quand p_i et q_i sont solutions de (1),
or l'énergie est définie à une constante près : on prendra dès lors $H(0,0) = H_0 = 0$
Supposons que l'origine O $(p_i = 0, q_i = 0)$ de l'espace

des phases soit un point d'équilibre de (1) :
on a alors $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, c'est-à-dire $H_1 = 0$.

On obtient donc $H = \sum_{j \geq 2} H_j \; (p_i, q_i, \; i = 1, 2)$.

On peut aussi écrire le système (1) sous la forme canonique : $\dot{x} = J H_x$

où $x = (q_i, p_i)$

J est la matrice symplectique $\begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}$

$H_x = \mathrm{grad}_x H$.

La variation de ce système donne lieu à un système hamiltonien linéaire du type :

$$\dot{y} = J B y \quad , \text{avec } B = H_{xx}, \qquad (2)$$

dont l'hamiltonien est quadratique.

C'est donc H_2 qui va engendrer le système linéaire, à coefficients constants, associé :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H_2}{\partial q_i} \end{cases}$$

On supposera que ce système linéaire est constitué de deux oscillateurs harmoniques dont les fréquences respectives ω_1 et ω_2 sont réelles et proches d'être commensurables, on les considérera dès lors comme fonctions d'un paramètre μ.

On supposera aussi que les exposants caractéristiques ρ_i, $i = 1 \dots 4$ de (2), c'est-à-dire les valeurs propres de JB soient distinctes.

On voit aisément que le polynôme $\det(\rho I - JB)$

est pair et que $\forall i$ $(i = 1 \dots 4)$, $\exists k$ $(k = 1 \dots 4)$ tel que $\rho_k = -\rho_i$.
De plus, Henrard (1965) a montré qu'on peut toujours choisir les coordonnées canoniques telles que ces exposants caractéristiques soient par exemple de la forme :

$$\rho_1 = i\omega_1 \ , \ \rho_2 = -i\omega_1 \ , \ \rho_3 = i\omega_2 \ , \ \rho_4 = -i\omega_2 \, .$$

Dans ce cas les multiplicateurs caractéristiques auront la forme Λ_1, $\frac{1}{\Lambda_1}$, Λ_2, $\frac{1}{\Lambda_2}$.

Dans ces hypothèses le système (2) est engendré par $H_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2)$.
Les solutions de (2) sont dès lors des sommes de sinus et cosinus en les deux fréquences fondamentales. On obtient ainsi des figures bien connues de Lissajous. Vu que les exposants caractéristiques sont imaginaires purs, on aura deux types de trajectoires périodiques possibles, plus des trajectoires quasi-périodiques obtenues par sommation.

Le système complet (1) quant à lui est dès lors régi par $H = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) + \sum_{j \geq 3} H_j(p_i, q_i)$,

où les polynômes H_j de degré $j \geq 3$ vont jouer le rôle d'une perturbation.

Vu qu'on a supposé $\begin{cases} \rho_3 = \rho_4^* = i\omega_2 \\ \rho_1 = \rho_2^* = i\omega_1 \end{cases}$, où le signe $*$ signifie complexe conjugué, il suffirait pour être dans les hypothèses du théorème du centre de Lyapunov que ω_2 soit distinct de $n\omega_1$ et que ω_1 soit distinct de $m\omega_2$, quels que soient les naturels n et m. Dans ces hypothèses on est assuré de l'existence de deux familles d'orbites périodiques dont les périodes tendent respectivement vers $\frac{2\pi}{|\omega_1|}$ et $\frac{2\pi}{|\omega_2|}$ lorsque les familles respectives tendent vers l'origine.

Nous supposerons : $0 < |\omega_1| < |\omega_2|$, et nous noterons ces familles respectivement $\mathcal{L}_l$ (famille d'orbites de longue période) et $\mathcal{L}_s$ (famille d'orbites de courte période).

Par contre pour une certaine valeur du paramètre μ, on pourra avoir $\omega_2 = k\,\omega_1$, soit μ_k cette valeur.

Dans ce cas puisque $\omega_1 = \frac{1}{k}\omega_2$, le théorème du centre peut seulement prouver l'existence de $\mathcal{L}_s$, ce qui se traduit mathématiquement par :

$\exists\ x(t,\varepsilon)$ tel que $\forall\,\varepsilon$: $x(t,\varepsilon)$ est solution $T(\varepsilon)$ périodique de (1), avec $x(t,0) \equiv 0$ et $T(0) = \frac{2\pi}{\omega_2}$

La question qui se pose est alors la suivante :

$\mathcal{L}_l$ existe-t-elle quand même pour $\mu = \mu_k$

On développera le cas où $\mu = \mu_{\frac{k}{l}}$, c'est-à-dire le cas de résonance où $k\omega_1 + l\omega_2 = 0$ avec $|k| > |l|$, $|k|$ et $|l| \in \mathbb{N}$.

Puis on l'appliquera au cas particulier $|k| = 3$, $|l| = 1$

Remarquons qu'on s'intéresse bien entendu aux solutions réelles des équations dérivées d'un hamiltonien réel. Cependant on va utiliser par la suite des transformations complexes, on ne pourra donc se placer dans un espace de phase $\mathbb{R}^4$. En conséquence, on traduira la réalité de l'hamiltonien de départ par des propriétés appelées propriétés de réalité.

Notons enfin qu'un exemple typique du choix des exposants caractéristiques effectué ci-dessus est fourni par le problème restreint des trois corps, avec comme origine de l'espace des phases le point d'équilibre L_4 du triangle lagrangien et comme paramètre le rapport des masses μ.
Ce problème a notamment été étudié par Roels (1965).

III. Méthode de perturbation et normalisation de Birkhoff.

Ce problème a notamment été étudié par Henrard (1970)

α)

Une méthode de perturbation a pour but de permettre le franchissement du pas entre le comportement réel d'un système et son approximation linéaire.
Elle consiste à simplifier à l'aide d'un produit de transformations un système différentiel.
Soit un système quelconque du type $\ddot{x} + \omega x = \varepsilon f(x, \dot{x})$ où ε est un petit paramètre.
La première étape consiste à transformer l'espace de phase en introduisant les variables les mieux adaptées au problème. Lorsque le système linéaire ($\varepsilon = 0$) est constitué d'oscillateurs, donnant des cercles comme solutions dans l'espace de phase, il s'agira en l'occurrence de coordonnées polaires du type : amplitudes ($I_i \geq 0$) et phases (φ_i).
Le système peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = \varepsilon A(I, \varphi, \varepsilon) \\ \dfrac{d\varphi_i}{dt} = \omega + \varepsilon B(I, \varphi, \varepsilon) \end{cases}$$

c'est-à-dire $\dfrac{dX}{dt} = P(X, \varepsilon)$ avec $X = (I_i, \varphi_i)$

La seconde étape consiste à moyenner le système, c'est-à-dire à en éliminer la dépendance angulaire à l'aide d'une transformation proche de l'identité et basée sur les transformations de Lie.

Mais vu l'épineux problème de la convergence pour des temps longs, on va se diriger non pas vers des solutions, mais plutôt vers des approximations obtenues en moyennant le système jusqu'à un certain ordre ν et en le tronquant à cet ordre.

Cette transformation peut être défini implicitement par un système du type : $\dfrac{dX}{d\varepsilon} = W(X_i, \varepsilon)$,

où W est la fonction génératrice, analytique de la transformation.

Le critère le plus facilement imposable pour obtenir un "average" étant la périodicité, W va être obtenu en intégrant périodiquement et ordre par ordre un système du type : $\sum \omega_i \dfrac{\partial W}{\partial \varphi_i} = F(I_i, \varphi_i)$
où F est déterminé périodique.

L'effet d'une telle transformation sur des fonctions analytiques et des champs de vecteurs analytiques est décrit par des transformations de Lie.

Le système s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\bar{I}}{dt} = \varepsilon A'(\bar{I}, -, \varepsilon) & \Bigg\| + \varepsilon^{\nu+1} A''(\bar{I}, \bar{\varphi}, \varepsilon) \\[2ex] \dfrac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega + \varepsilon B'(\bar{I}, -, \varepsilon) & \Bigg\| + \varepsilon^{\nu+1} B''(\bar{I}, \bar{\varphi}, \varepsilon) \end{array}\right.$$

Ne contenant ainsi pas de termes séculaires, les approximations — justifiées par un corollaire célèbre de Gronwall — peuvent être considérées comme valables pour des intervalles de temps relativement longs.

β]

On introduira dans le cas qui nous occupe une variante de la méthode des perturbations : les transformations utilisées seront en effet complètement canoniques, dès lors elles garderont un système hamiltonien sous forme canonique. En conséquence on les appliquera directement à l'hamiltonien et les équations différentielles suivront automatiquement.

Les coordonnées polaires ($I_i \geq 0$, φ_i) vont être introduites par la transformation :

$$\begin{cases} q_i = +\sqrt{2I_i}\cos\varphi_i \\ p_i = -\sqrt{2I_i}\sin\varphi_i \end{cases} \qquad (a)$$

qui est complètement canonique puisque les crochets de Poisson valent :

$$[p_i, q_i] = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial p_i}{\partial I_j}\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \varphi_j}\frac{\partial q_i}{\partial I_j}\right) = 1 \quad , \quad i=1,2.$$

$$[p_i, q_j] = 0 \quad , \quad i=1,2 \; , \; j=1,2, \; i \neq j.$$

Dans l'espace des phases (I_i, φ_i) on obtient :

$$H_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_i}{2}\left(2I_i\cos^2\varphi_i + 2I_i\sin^2\varphi_i\right) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$$

Les H_j, $j>2$, deviennent des polynômes homogènes de degré j en $I_i^{|1/2|}\cos\varphi_i$ et $I_i^{|1/2|}\sin\varphi_i$ ou des sommes de Fourier du type :

$$\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} (\text{coefficient}) . \, I_1^{|j_1/2|}\, I_2^{|j_2/2|} \, . \, \begin{matrix}\cos \\ (\sin)\end{matrix} (j_3\varphi_1 + j_4\varphi_2)$$

avec une relation de d'Alembert entre les j_i :

$$|j_3| < |j_1| \quad , \quad |j_3 + j_1| = 0 \quad \text{modulo } 2$$
$$|j_4| < |j_2| \quad ; \quad |j_4 + j_2| = 0 \quad \text{modulo } 2$$

Voyons en quoi consiste le procédé d' "overage" dans le cas de résonance qui nous occupe : il porte le nom de normalisation de Birkhoff.
Comme annoncé plus haut la fonction génératrice W de la transformation destinée à moyenner H par rapport aux φ_i, est obtenue en intégrant périodiquement

$$\sum \omega_i \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} = F(I_i, \varphi_i) .$$

F étant déterminé périodique, soit $A(I)\, e^{i p \varphi}$ un de ses termes avec $p = \begin{pmatrix} j_3 \\ j_4 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$.
En intégrant périodiquement, ce terme devient $\frac{A(I)}{p\,\omega}\, e^{i p \varphi}$.
Mais vu la condition de résonance, à partir d'un certain ordre ν, zéro va apparaître au dénominateur, ce qui va rendre impossible les étapes ultérieures de l' "overage". On devra garder ces termes dans F.

On peut dès lors définir ce qu'on entend par approximation normalisée d'ordre ν d'un système hamiltonien résonant : il s'agit de la troncature à l'ordre ν de la procédure de normalisation de Birkhoff.
L'hamiltonien est dès lors décomposé en $\overline{H} + P^{\nu+1}$, où $\overline{H}$ est l'approximation normalisée et $P^{\nu+1}$ une perturbation composée de termes d'ordre $\geqslant \nu + 1$ en les variables angulaires.
Nous substituerons provisoirement $\overline{H}$ à H.
Plus finement on utilise un produit de deux transformations canoniques : la première permet d'éliminer de $\overline{H}$ tous les termes angulaires, excepté les résonants c'est-à-dire ceux dépendant de $\psi = k\varphi_1 + l\varphi_2$, la seconde permet d'éliminer les sous-harmoniques de la variable angulaire résonante ψ.

On obtient ainsi : (voir Henrard (1970))

$$\overline{H}(I_i,\varphi_i) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + K^{(1)}(I_1,I_2) + K^{(2)}(I_1,I_2).\, I_1^{|\frac{k}{2}|}\, I_2^{|\frac{l}{2}|} \cos\Psi$$

avec $\Psi = k\varphi_1 + l\varphi_2$ la combinaison résonante

$$K^{(1)}(I_1,I_2) = \left(A(\mu)I_1^2 + 2B(\mu)I_1I_2 + C(\mu)I_2^2\right) + \sum_{n\geq 3}^{\nu/2} K_n^{(1)}(I_1,I_2)$$

$$K^{(2)}(I_1,I_2) = D(\mu) + \sum_{n\geq 1}^{(\nu-k-l)/2} K_n^{(2)}(I_1,I_2)$$

sous les hypothèses que

les coefficients dans $\overline{H}$ dépendent analytiquement de μ

$K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ sont des polynômes homogènes de degré n

$D \neq 0$

Remarquons que dans le cas $\mu = \mu_3$, le terme de degré le plus petit dans le développement analytique de $K^{(2)}$ est d'ordre deux en le produit $I_1 . I_2$ et va donc intervenir en même temps que celui du développement de $K^{(1)}$. Dans le cas $\mu = \mu_2$, il intervient même avant.

Plaçons-nous près de la résonance correspondant à $\mu_{\frac{k}{l}}$, soit $\mu - \mu_{\frac{k}{l}} = \varepsilon^2$. Posons $|k| + |l| = r$ et effectuons le changement d'échelle $I_i \longrightarrow \varepsilon^2 I_i$, $i = 1,2$.

D'où au voisinage du point d'équilibre correspondant à $\mu = \mu_{k/l}$ on peut écrire après avoir simplifié par ε^2 :

$$\overline{H} = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \varepsilon^2 (A I_1^2 + 2B I_1 I_2 + C I_2^2 + \dots) + \varepsilon^{r-2}(D + \dots)\, I_1^{|k/2|}\, I_2^{|l/2|} \cos\Psi .$$

Les équations d'Hamilton deviennent :

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \partial H/\partial I_1 = \omega_1 + \varepsilon^2(2AI_1 + 2BI_2) + \varepsilon^{r-2} D \left|\frac{k}{2}\right| I_1^{|\frac{k}{2}|-1} I_2^{|\frac{l}{2}|} \cos\Psi \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \varepsilon^2 (2BI_1 + 2CI_2) + \varepsilon^{r-2} D \left|\frac{l}{2}\right| I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{|\frac{l}{2}|-1} \cos\Psi \\ \dot{I}_1 = -\partial H/\partial \varphi_1 = \varepsilon^{r-2} D\, I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{|\frac{l}{2}|} k \sin\Psi \\ \dot{I}_2 = \varepsilon^{r-2} D\, I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{|\frac{l}{2}|} l \sin\Psi \end{cases}$$

Supposons $\omega_1 > 0$, sinon on peut toujours s'y ramener.
Vu la condition de résonance $k\omega_1 + l\omega_2 = 0$,
on peut écrire que

$$\omega_1 = \lambda l + \lambda_1 (\mu - \mu_{k/l}) + \dots = \lambda l + \lambda_1 \varepsilon^2$$

$$\omega_2 = -\lambda k + \lambda_2 (\mu - \mu_{k/l}) + \dots = -\lambda k + \lambda_2 \varepsilon^2$$

avec $\lambda > 0$, $l > 0$, $l < |k|$

Remarquons qu'on pourrait obtenir $-\varepsilon^2 = \mu - \mu_{k/l}$ en changeant les signes de λ_1 et λ_2.

On aura donc à envisager les deux cas suivants :

cas (1) : $\omega_2 > 0$, c'est-à-dire $k < 0$

cas (2) : $\omega_2 < 0$, c'est-à-dire $k > 0$.

On peut donc écrire :

$$\overline{H} = \lambda l I_1 - \lambda k I_2 + \varepsilon^2 (\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + A I_1^2 + 2B I_1 I_2 + C I_2^2 + \dots) + \varepsilon^{r-2} (D + \dots) I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{|\frac{l}{2}|} \cos \varphi .$$

Remarquons qu'une transformation linéaire canonique permet d'obtenir une variable ignorable et donc de réduire le nombre de degrés de liberté du système d'une unité. Nous en tiendrons compte plus loin.

IV. Choix de coordonnées adéquates

Dans le cas (1) on va effectuer la transformation canonique de multiplicateur $\gamma = 2i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = -q_i + i p_i \\ y_i = -q_i - i p_i \end{array} \right. \qquad , \; i = 1, 2 \qquad (b)_1$$

On a la relation $\overline{H}(x_i, y_i) = 2i \, \overline{H}(p_i, q_i) = 2i \, \overline{H}(I_i, \varphi_i)$.

On a dès lors : $x_i = -\sqrt{2I_i}\; e^{i\varphi_i}$

$$y_i = -\sqrt{2I_i}\; e^{-i\varphi_i} = x_i^*$$

On obtient aussi la propriété de réalité :

$$\overline{H}^*(x_i, y_i) = \left(\overline{H}(x_i, y_i)\right)^*$$

Déterminons $\overline{H}(x_i, y_i)$:

on a par exemple,

$$I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{\frac{l}{2}} \cos(k\varphi_1 + l\varphi_2)$$

$$= I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{\frac{l}{2}} \cos(|k|\varphi_1 - l\varphi_2),$$

$$= I_1^{|\frac{k}{2}|} I_2^{\frac{l}{2}} (\cos|k|\varphi_1 \cos l\varphi_2 + \sin|k|\varphi_1 \sin l\varphi_2)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2^{r/2}}\left[(x_1^{|k|} + y_1^{|k|})(x_2 + y_2) - (x_1^{|k|} - y_1^{|k|})(x_2 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{r/2}}(x_1^{|k|} y_2 + y_1^{|k|} x_2)$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\overline{H}(x_i, y_i) = i\Big[&(\lambda l x_1 y_1 - \lambda k x_2 y_2)\\ &+ \varepsilon^2(\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \tfrac{A}{2} x_1^2 y_1^2 + B x_1 y_1 x_2 y_2 + \tfrac{C}{2} x_2^2 y_2^2)\\ &+ \varepsilon^{r-2}\frac{D}{2^{r/2}}(x_1^{|k|} y_2^{l} + y_1^{|k|} x_2^{l})\Big]\end{aligned} \qquad (4).$$

et à partir de là les équations d'Hamilton dans les coordonnées (x_i, y_i)

Dans le cas (2), on effectue une transformation canonique de multiplicateur $2i$ légèrement différente :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -q_1 + i p_1\\ y_1 &= -q_1 - i p_1\\ x_2 &= q_2 - i p_2\\ y_2 &= q_2 + i p_2 \end{aligned}\right. \qquad (b)_2$$

On obtient également $y_i = x_i^*$, et la seule différence apparaissant dans (4) est le coefficient de ε^{r-2}, il devient :

$$-\frac{D}{2^{r/2}}(x_1^{|k|} x_2^{l} + y_1^{|k|} y_2^{l}).$$

Si nous comparons ce résultat avec celui de Sweet et Schmidt (1973), on constate d'une part que notre coefficient $\frac{D}{2^{r/2}}$ correspond à leur coefficient D et

d'autre part que le signe de notre k est opposé au leur en raison d'une définition différente de la condition de résonance.

V. Méthode de l'alternative de Hale - Césari

Haile (1969) développe en détail cette méthode de l'alternative conçue pour trouver des trajectoires périodiques de période fixe. Comme on peut s'attendre à ce que la période des trajectoires cherchées varie avec leur amplitude, donc avec ε, on va au préalable normaliser cette période en choisissant un nouveau temps.

Dans ce but, on va appliquer la transformation canonique

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2I_1}\; e^{-i\varphi_1} \\ y_1 = \sqrt{2I_1}\; e^{i\varphi_1} \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = y_2 \end{array}\right. \qquad (c)$$

Elle va permettre de réduire d'une unité le nombre de degrés de liberté du système - comme annoncé plus haut - en travaillant dans les coordonnées I_1, x_2, y_2, avec φ_1 comme nouvelle variable indépendante.

En calculant $\frac{dI_1}{dt}$ et $\frac{d\varphi_1}{dt}$ à partir de (3) : $\bar{H}(I_i, \varphi_i)$

en calculant $\frac{dx_2}{dt}$ et $\frac{dy_2}{dt}$ à partir de (4) : $\overline{H}(x_i, y_i)$,

et en exprimant ces expressions en fonction de I_1, x_2 et y_2 à l'aide des transformations utilisées jusqu'ici , (a), (b), (c), on obtient le système suivant :

$$\frac{du}{d\varphi_1} = A u + \varepsilon U (u, \varphi_1, \varepsilon) \qquad (5)$$

avec $u = \begin{pmatrix} I_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y_2 = x_2^*$

$$U = \begin{pmatrix} R (u, \varphi_1, \varepsilon) \\ X_2 (u, \varphi_1, \varepsilon) \\ Y_2 (u, \varphi_1, \varepsilon) \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{k}{l} & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{k}{l} \end{pmatrix}$$

On a en effet par exemple, en $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx_2}{d\varphi_1} = \frac{dx_2/dt}{d\varphi_1/dt} = \frac{d\overline{H}(x_i, y_i)/dt}{d\overline{H}(I_i, \varphi_i)/dt} = \frac{i(-\lambda k x_2)}{\lambda l} = -i\frac{k}{l} x_2 .$$

$U (u, \varphi_1, \varepsilon)$ sera quant à lui expliciter en détail pour le cas particulier de résonance 1-3.

On s'est ainsi ramené à une forme suffisamment simple pour appliquer la méthode de l'alternative, on va rechercher des solutions $2\pi l$ périodiques de (5)

Le système linéaire associé ($\varepsilon=0$), à coefficients constants a les solutions $\frac{2\pi l}{k}$ périodiques en φ_1 suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = a_0 \\ x_2 = a_1 \, e^{-i\frac{k}{l}\varphi_1} \\ y_2 = a_2 \, e^{+i\frac{k}{l}\varphi_1} \end{cases}$$

Remarquons que ces solutions $\frac{2\pi l}{k}$ périodiques (courte période) sont également $2\pi l$ périodiques (longue période).

On est donc dans le cas critique en ce sens que le système linéaire possède d'autres solutions périodiques que la solution triviale $u=0$, on pouvait s'y attendre puisqu'on est en situation de résonance.

Soit $\phi(\varphi_1)$ une base des solutions périodiques du système linéaire, c'est-à-dire que chaque colonne de cette matrice est une solution périodique, d'où toute solution périodique peut s'écrire $u(\varphi_1) = \phi(\varphi_1).a$, avec a vecteur colonne arbitraire constant.

Prenons $\phi(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{k}{l}\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{+i\frac{k}{l}\varphi_1} \end{pmatrix}$,

c'est une matrice fondamentale principale du système linéaire.

Le nombre de solutions périodiques indépendantes du système linéaire adjoint $\frac{dw}{d\varphi_1} = -wA$ est le même que celui du système linéaire, car leurs matrices fondamentales sont inverses.

Soit donc $\psi(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i\frac{k}{l}\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{k}{l}\varphi_1} \end{pmatrix} = \phi^{-1}(\varphi_1)$

une base des solutions $\frac{2\pi l}{k}$, donc $2\pi l$ périodiques du système linéaire adjoint.

Soient les matrices régulières : $C_1 = \int_0^{2\pi l} \phi^t(\varphi_1)\,\phi(\varphi_1)\,d\varphi_1$

$D_1 = \int_0^{2\pi l} \psi(\varphi_1)\,\psi^t(\varphi_1)\,d\varphi_1$

où le symbole t signifie transposé.

Soit Per l'espace des fonctions $2\pi l$ périodiques, continues sur $[0, 2\pi l]$ et munies de la métrique de Chebyschev.

Soient enfin les opérateurs de projection suivants :

P : Per $\longrightarrow$ sous-espace de Per engendré par les solutions $2\pi l$ périodiques du système linéaire,

$$P\,U(\varphi_1) = \phi(\varphi_1)\, C_1^{-1} \int_0^{2\pi l} \phi^t(s)\, U(s)\, ds$$

$PU(\varphi_1)$ est bien une solution périodique du système linéaire car $C_1^{-1} \int_0^{2\pi l} \phi^t(s)\, U(s)\, ds$ est constant.

P est bien une projection car :

$$P^2 U(\varphi_1) = \phi(\varphi_1)\, C_1^{-1} \int_0^{2\pi l} d\varphi_1\, \phi^t(\varphi_1) \left(\phi(\varphi_1)\, C_1^{-1} \int_0^{2\pi l} \phi^t(s) U(s)\, ds\right) = PU$$

Q : Per $\to$ sous-espace de Per engendré par les transposées des solutions $2\pi l$ périodiques du système linéaire adjoint,

$$QU(\varphi_1) = \Psi^t(\varphi_1)\, D_1^{-1} \int_0^{2\pi l} \Psi(s)\, U(s)\, ds$$

On est dans les hypothèses de l'alternative de Fredholm : si A et U sont T périodiques, le système (5) a une solution T périodique si et seulement si $\int_0^T w(\varphi_1)\, U(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0$ pour toutes les solutions w du système linéaire adjoint.

C'est de là que vient le nom de la méthode qu'on va développer. On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $2\pi l$ périodique de (5) est $QU = 0$, auquel cas on peut définir l'opérateur K d'intégration périodique de (5).

De plus on sait que $\forall\, a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

$u(\varphi_1) = \phi(\varphi_1)\, a + \varepsilon\, K U(\varphi_1)$ est la seule solution $2\pi l$ périodique de (5) telle que $Pu = \phi a$.

D'où, puisque $\varepsilon K U$ étant de l'ordre du petit paramètre ε est contractant, on va rechercher un point fixe u^* de $u = \phi a + \varepsilon K U$, $\forall a$; u^* sera alors une solution $2\pi l$ périodique de (5) et on pourra ainsi les obtenir toutes.

Cependant vu la condition de l'alternative, on va plutôt rechercher un point fixe de $u = \phi a + \varepsilon K (I - Q) U$, (6)

en effet $Q\,[(I-Q)U] = (Q - Q^2)\, U = 0$, c'est-à-dire $(I-Q)U$ appartient au sous-espace vectoriel de fonctions pour lequel le système ci-dessous admet une solution périodique :

$$\frac{du}{d\varphi_1} = A u + \varepsilon (I - Q) U . \quad (7).$$

Dès lors après avoir trouvé un point fixe $u^*(\varphi_1, a, \varepsilon)$ de (6), c'est-à-dire une solution $2\pi l$ périodique de (7), il restera à ajuster le vecteur a, qui va jouer le rôle de condition initiale, tel que $QU(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = 0$ pour que $u^*(\varphi_1, a, \varepsilon)$ soit solution $2\pi l$ périodique de (5).

On s'est donc intéressé aux solutions périodiques du système (7) et on ramène ces fonctions périodiques trouvées à être solutions périodiques du système initial (5).

Formellement :

. $\forall \alpha$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ avec $|a| < \alpha$, $\exists u^*(\varphi_1, a, \varepsilon)$ défini pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, solution unique dans une certaine boule, $2\pi l$ périodique de $u = \phi(\varphi_1) a + \varepsilon K (I - Q) U(\varphi_1, u, \varepsilon)$, continûment différentiable en ε et a et telle que $P u^* = \phi a$.

. Si $\exists a(\varepsilon)$, $|a(\varepsilon)| < \alpha$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, avec $QU(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = 0$ alors $u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon)$ est solution $2\pi l$ périodique de (5), unique dans une certaine boule.

On en déduit que $u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon)$ est solution $2\pi l$ périodique de (5) si :

$$F(a, \varepsilon) \equiv \int_0^{2\pi l} \Upsilon(\varphi_1)\, U(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = 0 ,$$

ces équations sont appelées équations de bifurcation.
Plus explicitement elles peuvent s'écrire :

$$\int_0^{2\pi l} \begin{pmatrix} R(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \\ e^{i\frac{k}{l}\varphi_1} X_2(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \\ e^{-i\frac{k}{l}\varphi_1} Y_2(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \end{pmatrix} d\varphi_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_0(a, \varepsilon) \\ \Gamma_1(a, \varepsilon) \\ \Gamma_2(a, \varepsilon) \end{pmatrix} = 0$$

avec $\Gamma_2^*(a, \varepsilon) = \Gamma_1(a, \varepsilon)$

Leur solvabilité va dépendre, comme on le verra, de l'existence de l'intégrale première $\overline{H}$.

Du théorème des fonctions implicites on déduit la méthode de Hale-Césari au premier ordre :

Si $\exists$ vecteur a° tel que $F(a^\circ, 0) = 0$ et $\det\left(\frac{\partial F(a^\circ,0)}{\partial a}\right) \neq 0$, alors $\exists\ \varepsilon_1 > 0$, $a(\varepsilon)$ avec $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ tel que $F(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$.

Remarquons enfin l'analogie avec la méthode de la moyenne en théorie des perturbations où l'on obtient une solution périodique en annulant les seconds membres moyennés du système pour éviter l'apparition de termes séculaires. Ici en modifiant le U, on ignore d'abord les termes ennuyeux QU, où Q joue le rôle d'une sorte de moyenne, ensuite on s'arrange pour les annuler. D'autre part la méthode de Hale-Césari présente des avantages certains dont le moindre n'est pas son caractère intrinsèque.

VI. Rôle de l'intégrale première.

Hale (1969) s'intéresse également à ce problème. L'hamiltonien $H(\varphi_1, u, \varepsilon)$ étant une intégrale première, on a la relation : $\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = 0$.

Soit la notation $H_u = \text{grad}_u H = \frac{\partial H(\varphi_1, u, \varepsilon)}{\partial u}$

Vu la forme de notre système (5), on déduit que

$$H_u\,(Au + \varepsilon U) + H_{\varphi_1} = 0 \quad , \quad \forall\ \varphi_1, u, \varepsilon$$

et que $\int_0^{2\pi l} \left[H_u \cdot (Au + \varepsilon U) + H_{\varphi_1} \right]_{|u=u^*} d\varphi_1 = 0$, où u^* est un point fixe de (6).

Comme H et u^* sont $2\pi l$ périodiques on a :

$$0 = \int_0^{2\pi l} \frac{d}{d\varphi_1} (H(\varphi_1, u^*, \varepsilon)) \, d\varphi_1$$

$$= \int_0^{2\pi l} \left(H_u \frac{du}{d\varphi_1} + H_{\varphi_1} \right)_{|u=u^*} d\varphi_1$$

$$= \int_0^{2\pi l} \left[H_u (Au + \varepsilon(I - Q)U) + H_{\varphi_1} \right]_{|u=u^*} d\varphi_1$$

On déduit par soustraction que :

$$\int_0^{2\pi l} [H_u \, Q \, U]_{|u=u^*} \, d\varphi_1 = 0 \qquad (8)$$

H_u étant solution $2\pi l$ périodique du système linéaire adjoint associé à (5), et H étant analytique, on a :

$\forall$ vecteur $a^0 \neq 0$, $\exists$ $H_u(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a^0, 0), 0)$ solution $2\pi l$ périodique du système adjoint et non nulle comme vu plus haut.

De plus $\exists$ vecteur ligne $h \neq 0$, tel que $H_u(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a^0, 0), 0) = h\Psi$, et $\exists\, \mu_1(\varphi_1, a, \varepsilon)$ continu, $2\pi l$ périodique avec $\mu_1(\varphi_1, a^0, 0) = 0$, tel que

$$H_u(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a, \varepsilon), \varepsilon) = H_u(\varphi_1, u^*(\varphi_1, a^0, 0), 0) + \mu_1(\varphi_1, a, \varepsilon)$$
$$= h\Psi + \mu_1$$

La relation (8) s'écrit alors :

$$0 = \int_0^{2\pi l} (h\Psi + \mu_1) \, Q \, U \, d\varphi_1$$

$$= \int_0^{2\pi l} (h\Psi + \mu_1) \, \Psi^t D_1^{-1} \left(\int_0^{2\pi l} \Psi U \, ds \right) d\varphi_1$$

$$= \int_0^{2\pi l} (h\Psi + \mu_1) \, \Psi^t D_1^{-1} \, F(a, \varepsilon) \, d\varphi_1$$

$$= \left(h + D_1^{-1} \int_0^{2\pi l} \mu_1 \Psi^t \, d\varphi_1 \right) F(a, \varepsilon).$$

Or $h \neq 0$ et $\mu(\varphi_0, a^0, 0) = 0$,

on en déduit qu'il existe une relation linéaire entre les composantes de F, c'est-à-dire entre les équations de bifurcation. L'une d'entre elles est donc redondante et par conséquent le déterminant de la jacobienne des équations de bifurcation est nul, d'où on ne peut à priori appliquer la méthode de Hale Césari au premier ordre.

Cependant si on peut trouver un mineur non nul dans cette jacobienne et si les deux équations correspondant à ce mineur sont satisfaites, alors la troisième l'est automatiquement.

De plus les conditions de réalité montrent que si les deux premières équations sont satisfaites, alors la troisième l'est automatiquement.

VII. Application au cas de résonance 1-3.

Nous allons appliquer la méthode de l'alternative en résonance 1-3 dans le but d'examiner si les orbites de longue période que ne peut nous fournir dans le cas présent le théorème de Lyapunov, existent quand même.

Vu les hypothèses envisagées on a donc $l = +1$ et $r = |k| + |l| = 4$ et on traitera simultanément le cas (1) où $k = -3$ qui est équivalent au cas traité par Sweet et Schmidt (1973), et le cas (2) où $k = +3$.

α) Détermination du système (5) et des équations de bifurcation.

- Cas (1).

Il nous faut donc calculer les termes R, X_2, Y_2 $(u, \varphi_1, \varepsilon)$ apparaissant dans (5).

On tire par exemple de (3) :

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \lambda + \varepsilon^2 (\lambda_1 + 2AI_1 + 2BI_2 + D\,\tfrac{3}{2} I_1^{1/2} I_2^{1/2} \cos\psi)$$

avec $\psi = -3\varphi_1 + \varphi_2$

En maniant les transformations (a), (b), (c) pour se ramener aux coordonnées I_1, x_2, y_2 on trouve

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \lambda + \varepsilon^2 (\lambda_1 + 2AI_1 + Bx_2y_2 - \frac{3\sqrt{2}}{4} I_1^{1/2} \operatorname{Re}(D e^{i3\varphi_1} y_2))$$

avec Re signifiant : partie réelle.

$$= \lambda + \varepsilon^2 (\xi)$$

De (4) on peut tirer

$$\frac{dx_2}{dt} = i\left[3\lambda x_2 + \varepsilon^2 (\lambda_2 x_2 + Bx_1y_1x_2 + Cx_2^2 y_2 + \frac{D}{4} x_1^3)\right],$$

qu'on transforme en :

$$\frac{dx_2}{dt} = i\left[3\lambda x_2 + \varepsilon^2 (\lambda_2 x_2 + 2BI_1x_2 + Cx_2^2 y_2 + \frac{D}{4} (-\sqrt{2I_1})^3 e^{i3\varphi_1})\right]$$

$$= i\left[3\lambda x_2 + \varepsilon^2 (\rho)\right]$$

On obtient :

$$\frac{dx_2}{d\varphi_1} = \frac{dx_2/dt}{d\varphi_1/dt} = \left(i3x_2 + i\varepsilon^2 \frac{\rho}{\lambda}\right)\left(1 - \varepsilon^2 \frac{\xi}{\lambda}\right)$$

$$= i\left[3x_2 + \varepsilon^2 X_2(\varphi_1, u)\right] + O(\varepsilon^4)$$

avec
$$X_2 = \frac{1}{\lambda}\Big[x_2(\lambda_2 - 3\lambda_1) + 2I_1x_2(B - 3A) + x_2^2 y_2 (C - 3B) - D\frac{\sqrt{2}}{2} I_1^{3/2} e^{i3\varphi_1} + \frac{9\sqrt{2}}{4} I_1^{1/2} x_2 \operatorname{Re}(D e^{i3\varphi_1} y_2)\Big]$$

Pour simplifier les notations on posera :

$$\ell B + kA = B - 3A = M$$
$$\ell C + kB = C - 3B = N$$
$$\ell \lambda_2 + k\lambda_1 = \lambda_2 - 3\lambda_1 = \sigma$$

En continuant à procéder de la même façon, le système (5) se met finalement sous la forme :

$$(\overline{5})\quad \begin{cases} \dfrac{dI_1}{d\varphi_1} = \varepsilon^2 R(\varphi_1, u, \varepsilon) = \varepsilon^2 \dfrac{1}{\lambda}\left[-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} I_1^{3/2}\, \mathrm{Im}(D e^{i3\varphi_1} y_2)\right] \\[2ex] \dfrac{dx_2}{d\varphi_1} = 3ix_2 + \varepsilon^2 X_2 \\ \quad = i\Big\{ 3x_2 + \varepsilon^2 \dfrac{1}{\lambda}\Big[x_2\sigma + 2I_1 x_2 M + x_2^2 y_2 N \\ \qquad - D\dfrac{\sqrt{2}}{2} I_1^{3/2} e^{i3\varphi_1} \\ \qquad + \dfrac{9\sqrt{2}}{4} I_1^{1/2} x_2 \,\mathrm{Re}(D e^{i3\varphi_1} y_2)\Big]\Big\} \\[2ex] \dfrac{dy_2}{d\varphi_1} = -3iy_2 + \varepsilon^2 Y_2 \\ \quad = -i\{3y_2 + \varepsilon^2 X_2^*\} \end{cases}$$

en se rappelant : $y_2 = x_2^*$.

Le système linéaire associé a les solutions $\frac{2\pi}{3}$ périodiques (courte période) et donc 2π périodiques (longue période) suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = a_0 \\ x_2 = a_1 e^{i3\varphi_1} \\ y_2 = a_2 e^{-i3\varphi_1} \end{cases}$$

Puisqu'on se dirige vers l'application de la méthode de l'alternative au 1er ordre, on va déterminer les équations de bifurcation $F(a, \varepsilon = 0)$.

On obtient :

$$F(a, \varepsilon=0) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R(u^*, \varphi_1, \varepsilon) \\ e^{-i3\varphi_1} \, X_2(u^*, \varphi_1, \varepsilon) \\ e^{i3\varphi_1} \, Y_2(u^*, \varphi_1, \varepsilon) \end{pmatrix}_{\Big| u^* = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 e^{i3\varphi_1} \\ a_2 e^{-i3\varphi_1} \end{pmatrix}} d\varphi_1$$

c'est-à-dire, après simplification du facteur commun $2\pi . \frac{1}{\lambda}$

$$(9) \begin{cases} \Gamma_0(a,0) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} a_0^{3/2} \, \mathrm{Im}(D a_2) + O(\varepsilon^2) \\ \Gamma_1(a,0) = i \left[\left\{ 2Ma_0 + Na_1 a_2 + \sigma + \frac{9\sqrt{2}}{4} a_0^{1/2} \mathrm{Re}(Da_2) \right\} . a_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} D a_0^{3/2} \right] + O(\varepsilon^2) \\ \Gamma_2(a,0) = \Gamma_1^*(a,0) \end{cases}$$

- Cas (2)

Par une démarche analogue on détermine les termes R, X_2, Y_2 dans le cas où $k = +3$.
Pour obtenir un système le plus proche de $(\bar{5})$ possible on effectue le changement de variables

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = y_2 \\ \bar{y}_2 = x_2 \end{cases}$$

on obtient ainsi un système ne se distinguant de $(\bar{5})$ que par des différences de signe, en posant bien entendu ici : $B + 3A = M$

$C + 3B = N$

$\lambda_2 + 3\lambda_1 = \sigma$

Le système linéaire a les mêmes solutions périodiques,

et les équations de bifurcation ne diffèrent de (9) que par des changements de signe :
on obtient en effet après calcul un signe + pour Γ_0 et un signe − devant le terme entre accolades pour Γ_1 et Γ_2.

β) <u>Recherche de conditions d'existence d'orbites de longue période.</u>

. <u>Cas (1)</u>

Il faut donc chercher un vecteur a° tel que $F(a^\circ, 0) = 0$ et $\frac{\partial F(a^\circ, 0)}{\partial a} \neq 0$.

Soient $\begin{cases} a_1 = \alpha\, e^{i\xi} \\ a_2 = a_1^* = \alpha\, e^{-i\xi} \end{cases}$

Résolvons d'abord l'équation $\Gamma_0(a, 0) = 0$ ou l'équation équivalente

$$0 = \tilde{\Gamma}_0 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\, a_0^{3/2}\, \mathrm{Im}.(D\alpha\, e^{-i\xi}) \right)$$

Pour $\varepsilon = 0$, on obtient les deux solutions :

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \xi = \pi \end{cases}$$

c'est-à-dire $a_1 = a_2 = \alpha$.

Remarquons aussi que $\left.\frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial \xi}\right|_{\varepsilon=0} = a_0^{3/2}\, D\, \alpha \neq 0$

D'où pour $\varepsilon \neq 0$, mais suffisamment petit, on obtient deux solutions distinctes pour $\xi = \xi(a_0, \alpha, \varepsilon)$ en choisissant α positif ou négatif.

Compte tenu du rôle de l'intégrale première, il reste à essayer de résoudre $\Gamma_1(a,0)=0$.

Considérons plutôt :

$$0 = \tilde{\Gamma}_1 = \mathrm{Im}\left[e^{-i\zeta(a_0,\alpha,\varepsilon)}\,\Gamma_1\right]$$
$$= 2Ma_0\alpha + N\alpha^3 + \sigma\alpha + \frac{9\sqrt{2}}{4}D\alpha^2(\cos\zeta)\,a_0^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}Da_0^{3/2}e^{-i\zeta}$$

Pour $\varepsilon = 0$, on doit donc chercher les solutions $\alpha = \alpha(a_0)$ de :

$$\left(2Ma_0 + N\alpha^2 + \sigma + \frac{9\sqrt{2}}{4}a_0^{1/2}D\alpha\right)\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}Da_0^{3/2} = 0 \qquad (10)$$

Pour $\varepsilon \neq 0$, on pourra trouver $\alpha = \alpha(a_0,\varepsilon)$ à condition que :

$$\left.\frac{\partial\tilde{\Gamma}_1}{\partial\alpha}\right|_{\varepsilon=0} \neq 0$$

c'est-à-dire $\left(2Ma_0 + 3N\alpha^2 + \sigma + \frac{9\sqrt{2}}{2}a_0^{1/2}D\alpha\right) \neq 0$

c'est à dire encore, en se servant de (10) :

$$\frac{\sqrt{2}\,D\,a_0^{3/2}}{2\alpha} + 2N\alpha^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}a_0^{1/2}D\alpha \neq 0 \qquad (11)$$

Dans ces conditions les hypothèses de la méthode de l'alternative au premier ordre sont vérifiées en prenant a_0 comme paramètre pour les orbites 2π périodiques.

Posons $x = \dfrac{a_0^{1/2}}{\alpha}$.

On en conclut que pour $\bar{H}$, dans le cas $k=-3$, $l=1$, l'existence d'orbites de périodes proches de 2π (c'est à dire d'orbites appartenant à $\mathcal{L}_l$ (longue période)) est garantie pour $\varepsilon > 0$ pour les valeurs du paramètre x telles que les relations ci-après, déduites de (10) et (11), soient vérifiées :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{-\sigma}{-\frac{\sqrt{2}}{2} D x^3 + 2 M x^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4} D x + N} > 0 & (\overline{10}) \\ 2N - \frac{9\sqrt{2}}{4} D x - \frac{\sqrt{2}}{2} D x^3 \neq 0 & (\overline{11}) \end{cases}$$

- cas (2)

En procédant d'une manière tout à fait analogue dans le cas où $k = +3$, on obtient comme conditions d'existence d'orbites de longue période : les relations $(\overline{10})$ où le coefficient de x^3 est précédé du signe +
et $(\overline{11})$ où les deux premiers termes sont changés de signe.

γ) Etude de la stabilité des orbites de $\mathcal{L}_\ell$.

a) lemme.

Hoile (1969) s'intéresse au sort des multiplicateurs caractéristiques lorsqu'on diminue d'une unité le nombre de degrés de liberté du système.

Soit γ une orbite T périodique du système de départ (1) $\dot{x} = f(x) = J H_x$, avec f de classe C^1.

Dès lors $\exists$ solution T périodique $x^*(t)$ de (1) telle que $\gamma = \{ x = x^*(t) , -\infty < t < \infty \}$.

Choisissons comme représentation paramétrique de γ

la fonction $x^*(\varphi_1)$, $0 \leq \varphi_1 \leq T$.

D'où $\dfrac{dx^*(\varphi_1)}{d\varphi_1} = f(x^*(\varphi_1))$ (12)

Hale montre alors que dans ces conditions, $\exists$ un système mobile orthonormal le long de γ, c'est-à-dire un système orthonormal $(e_1(\varphi_1), \ldots, e_4(\varphi_1))$, T périodique en φ_1 et tel que $\exists\ j$ avec $e_j(\varphi_1) = \dfrac{dx^*/d\varphi_1}{|dx^*/d\varphi_1|} = v$.

Soit donc (v, ξ_2, ξ_3, ξ_4) un tel système et soit le changement de variable envoyant x sur (φ_1, u) donné par $x = x^*(\varphi_1) + Z(\varphi_1)u$, avec Z la matrice quatre fois trois $(\xi_2\ \xi_3\ \xi_4)$, $0 \leq \varphi_1 \leq T$.

On peut voir alors que le comportement des solutions de (1) est donné par les solutions de

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 1 + f_1(\varphi_1, u) \\ \dot{u} = A(\varphi_1)u + f_2(\varphi_1, u) \end{cases}$$

avec $A = Z^t\left(-\dfrac{dZ}{d\varphi_1} + \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x} Z\right)$, $|f_1| = O(|u|)$ pour $|u| \to 0$, $f_2(\varphi_1, 0) = 0$, $\partial f_2(\varphi_1, 0)/\partial u = 0$

Soit y l'écart d'une autre solution de (1), par rapport à x^* :

$$\frac{d}{d\varphi_1}(x^* + y) = f(x^* + y) = \frac{d}{d\varphi_1}x^* + \frac{d}{d\varphi_1}y = f(x^*) + \frac{d}{d\varphi_1}y$$

D'où $\dfrac{d}{d\varphi_1}y = f(x^*+y) - f(x^*) = f(x^*) + \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*} y + (-f(x^*) + \cdots)$

On obtient ainsi l'équation linéaire aux variations associée à la solution x^* :

$$\frac{d}{d\varphi_1}(y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*} y = J H_{xx}\big|_{x^*} y \qquad (2)$$

Ce système possède toujours une solution non triviale T périodique, en effet $\dfrac{dx^*(\varphi_1)}{d\varphi_1}$ est une de ces solutions, car : $\frac{d}{d\varphi_1}\left(\frac{dx^*(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right) = \frac{d}{d\varphi_1}\left(f(x^*(\varphi_1))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x^*(\varphi_1)} \frac{dx^*}{d\varphi_1}$

en vertu de (12).

D'où au moins un des multiplicateurs caractéristiques est égal à un.

Il résulte des considérations émises tout au début que x^* est une solution périodique de (1) de multiplicateurs caractéristiques du type $1, 1, \Lambda, \frac{1}{\Lambda}$.

On peut voir alors que l'on passe au système $\dot{u} = A(\varphi_1)u + f_2(\varphi_1, u)$ dont le nombre de degrés de liberté est réduit d'une unité, les multiplicateurs deviennent $1, \Lambda, \frac{1}{\Lambda}$

b) On déduit de ce lemme que dans le cas qui nous occupe, les multiplicateurs caractéristiques de $u^*(\varphi_1)$ solution 2π périodique de $(\overline{5})$ sont du type $1, \Lambda, \frac{1}{\Lambda}$.

L'équation linéaire aux variations s'écrit :

$$\frac{d}{d\varphi_1}\delta u = \left(A + \varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial u}\right)\Big|_{u=u^*} \delta u , \qquad (13)$$

avec δu écart par rapport à u^* d'une autre solution.

Soit $\delta u = \delta u_1 + \varepsilon^2 \delta u_2$ solution de cette équation avec δu_1 solution de $\frac{d}{d\varphi_1}\delta u_1 = A\,\delta u_1$.

On obtient $\frac{d}{d\varphi_1}\delta u_2 = A\delta u_2 + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)\Big|_{u^*} \delta u_1$,

qui possède comme solution de condition initiale $\delta u_2(0) = 0$, donnée par la méthode de variation des constantes :

$$\delta u_2(T) = \int_0^T \phi(T, s) \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)\Big|_{u=u^*(s)} \delta u_1(s)\, ds$$

où $T = 2\pi$, $\phi(\varphi_1, s)$ matrice principale du système linéaire associé à $(\overline{5})$.

On en déduit que la matrice de monodromie de l'équation aux variations (13) s'écrit :

$$M = \phi(2\pi, 0) + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \phi(2\pi, s) \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_{|u=u^*} \phi(s,0)\, ds \qquad (14)$$

Rappelons-nous aussi que Ψ étant matrice principale du système linéarisé adjoint associé à $(\overline{5})$, on a les relations :

$$\Psi(\varphi_1, 0) = \phi^{-1}(\varphi_1, 0) = \phi(0, \varphi_1) ;$$

$$\Psi(T, 0) = \phi(T, 0) = I$$

$$\phi(0, s) = \phi(0, t)\, \phi(t, s) , \quad \forall\, t \in [0, s]$$

De plus le vecteur a étant condition initiale de u^*

on a : $u^*(a, \varphi_1, \varepsilon) = \phi(\varphi_1, 0)\, a + O(\varepsilon)$

et donc $\dfrac{\partial u^*}{\partial a} = \phi(\varphi_1, 0) + O(\varepsilon)$.

Dès lors

$$\frac{d F(a,0)}{d a} = \Psi^t(2\pi, 0)\, D_1^{-1} \int_0^{2\pi} \Psi(s,0) \frac{\partial U}{\partial u}\Big|_{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial a}\, ds$$

$$= I\, D_1^{-1} \int_0^{2\pi} \phi(0, s) \frac{\partial U}{\partial u}\Big|_{u^*(s)} \phi(s,0)\, ds$$

$$= D_1^{-1} \left[\int_0^{2\pi} \phi(2\pi, s) \frac{\partial U}{\partial u}\Big|_{u^*(s)} \phi(s,0)\, ds \right]$$

On en déduit que (14) s'écrit :

$$M = \phi(2\pi, 0) + \varepsilon^2 \left[\int_0^{2\pi} \phi(2\pi, s) \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_{|u^*} \phi(s,0)\, ds \right]$$

$$= I + \varepsilon^2 D_1 \frac{\partial F(a,0)}{\partial a} + O(\varepsilon)$$

Nous rappelant que la trace Tr d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres et que les valeurs propres d'une matrice de monodromie sont par définition les multiplicateurs caractéristiques du système, on a : $\mathrm{Tr}\, M = 1 + \Lambda + \dfrac{1}{\Lambda}$.

Malheureusement on obtient :

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial F(a,0)}{\partial a}\right) = O(\varepsilon^2)$$

Rappelons-nous alors un théorème qui dit que si ν_1, ν_2, ν_3 sont les valeurs propres d'une matrice L, alors la trace de la matrice composée des mineurs de L et notée $\mathrm{adj}\, L$ est $\mathrm{Tr}(\mathrm{adj}\, L) = \nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_1\nu_3$.

Appliquons cela à la matrice $M - I$ de valeurs propres $0, \Lambda - 1, \frac{1}{\Lambda} - 1$: $\mathrm{Tr}(\mathrm{adj}(M-I)) = 2 - \Lambda - \frac{1}{\Lambda}$

$$\text{D'où } \mathrm{Tr}\, M = 1 + \Lambda + \frac{1}{\Lambda} = 3 - \mathrm{Tr}(\mathrm{adj}(M-I))$$
$$= 3 - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{adj}\left(\varepsilon^2 D_1 \frac{\partial F(a,0)}{\partial a}\right)\right)$$

On en déduit la stabilité des orbites périodiques de longue période pour lesquelles :

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{adj}\left(\frac{\partial F(a,0)}{\partial a}\right)\right) > 0$$

- Cas (1).

En effectuant les dérivées nécessaires et en nous rappelant qu'en $\varepsilon = 0$, $a_1 = a_2 = \alpha$ on arrive à

$$\frac{\partial F(a,0)}{\partial a} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{4}\, i\, a_0^{3/2} D & \frac{3\sqrt{2}}{4}\, i\, a_0^{3/2} D \\ i C_2 & i A_2 + i\alpha B_2 & i\alpha B_2 \\ -i C_2 & -i\alpha B_2 & -iA_2 - i\alpha B_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_2 = 2Ma_0 + N\alpha^2 + \tau + \frac{9\sqrt{2}}{4} a_0^{1/2} D\alpha$

$B_2 = N\alpha + \frac{9\sqrt{2}}{8} a_0^{1/2} D$

$C_2 = 2M\alpha + \frac{9\sqrt{2}}{8} a_0^{-1/2} D\alpha^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4} D a_0^{1/2}$

$$\text{D'où } \operatorname{Tr}\left(\operatorname{adj}\left(\frac{\partial F(a,0)}{\partial a}\right)\right) = A_2^2 + 2\alpha A_2 B_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} a_0^{3/2} D\, C_2$$

$$= \frac{a_0}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2} D^2 a_0^2 + \frac{9}{2} D^2 a_0^2 + a_0^{1/2}\alpha^3 D\sqrt{2}\,\Delta - \frac{27}{8}\alpha^4 D^2\right),$$

en tirant σ de (10)

et en posant $lN + kM = N - 3M = \Delta$

Posons à nouveau $x = \dfrac{a_0^{1/2}}{\alpha}$,

la trace s'écrit alors $x^2\alpha^4\left(\frac{1}{2} D^2 x^4 + \frac{9}{2} D^2 x^2 + \sqrt{2}\,\Delta D x - \frac{27}{8} D^2\right)$

Finalement en tirant x^3 de $(\overline{10})$, on a :

si le paramètre x vérifiant $(\overline{10})$ et $(\overline{11})$ est tel que

$$\sqrt{2}\, M D x^3 + \frac{27}{4} D^2 x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\Delta + N + \frac{\sigma}{\alpha^2}\right) D x - \frac{27}{8} D^2 > 0 \quad (1$$

alors l'orbite de longue période est stable.

– cas (2)

En effectuant le même raisonnement, on obtient comme condition de stabilité :

$$-\sqrt{2}\, M D x^3 - \frac{27}{4} D^2 x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\Delta + N + \frac{\sigma}{\alpha^2}\right) D x - \frac{27}{8} D^2 > 0$$

expression qui à nouveau ne diffère que par des signes, étant donné qu'on a évidemment posé : $N + 3M = \Delta$

VIII. Conclusions.

En utilisant la méthode de l'alternative, c'est-à-dire celle employée par Sweet et Schmidt (1973), nous sommes arrivés aux expressions :

$(\overline{10})$, $(\overline{11})$: conditions d'existence d'orbites de longue période ;

(15) : condition de stabilité de ces orbites.

En utilisant une méthode de perturbation, Henrard (1973) est arrivé aux résultats suivants :

. conditions d'existence :

$$(16)\quad \begin{cases} \text{racine simple de : } M u^3 + N u w^2 + \dfrac{G}{\sqrt{2}} w^3 + \dfrac{3qG}{2\sqrt{2}} w u^2 + \gamma u = 0 \\[2ex] \text{non annulation de : } \dfrac{27 G^2}{2\sqrt{2}} + 2G\left(3M + 9N + \dfrac{\gamma}{u^2}\right)x + \dfrac{q^3 G^2}{\sqrt{2}} x^2 + 2NGx^3 = R \end{cases}$$

. condition de stabilité

$$R < 0 \qquad (17)$$

En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} (N, M, D) \rightarrow \left(M, \dfrac{N}{2}, -G\right), \text{ avec } q = -3 & \text{dans le cas (1)} \\ \text{et } (N, M, D) \rightarrow \left(M, \dfrac{N}{2}, G\right), \text{ avec } q = 3 & \text{dans le cas (2)} \end{cases}$$

dans les expressions $(\overline{10})$, $(\overline{11})$, (15) on trouve les expressions (16), (17).

On conclut donc que les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats et donc que des erreurs de calcul doivent s'être glissées dans les développements de Sweet et Schmidt.

Références

J. HALE (1969), Ordinary differential equations, Wiley - interscience.

J. HENRARD (1965), Solution générale au voisinage des équilibres colinéaires du problème restreint, dissertation doctorale.

J. HENRARD (1970), Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium, Celestial mechanics, p. 437-466.

J. HENRARD (1973), Lyapunov's center theorem for resonant equilibrium, Journal of differential equations, p. 431-441

J. ROELS (1965), Les phénomènes de résonance au voisinage des équilibres équilatéraux dans le problème restreint plan des trois corps, dissertation doctorale.

D. SCHMIDT (1973), Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamiltonian system, University of Maryland report.

D. SCHMIDT - D. SWEET (1973), A unifying theory in determining periodic families for hamiltonian systems at resonance, University of Maryland report.

D. SWEET, (1973), Periodic families at resonance, Journal of differential equations volume 14, number 1.