

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Réponse subharmonique pour l'équation de Duffing

Genard, Guy

*Award date:*  
1974

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

RÉPONSE SUBHARMONIQUE  
POUR L'EQUATION DE DUFFING

PROMOTEUR :  
JACQUES HENRARD

GUY GENARD

1974

FM B1/1974/8

MATH

CS 342853

204953



# Table des matières

---

## Introduction

### Chapitre I. Transformations de Lie

§ 1. Transformations de Lie autonomes

§ 2. Transformations de Lie non autonomes

A. définition et propriétés

B. construction du triangle de Lie

C. caractère intrinsèque

§ 3. Transformations de Lie non autonomes à partir du cas autonome

### Chapitre II. Equation de Duffing en cas de résonance

§ 1. Equation de Duffing

A. forme de l'équation

B. introduction de coordonnées polaires

§ 2. Application de la méthode de la moyenne

A. cas résonances  $1/2p+1$

B. application de la méthode de la moyenne par transformées de Lie

C. conservation de la symétrie

D. conservation du caractère polynomial

E. forme générale des équations moyennées

F. introduction d'un terme de freinage

§ 3. Existence et stabilité de trajectoires périodiques

A. réponse harmonique

B. un théorème de prolongement des solutions périodiques

§ 4. Trajectoires sous harmoniques dans le cas de résonance

A. conditions d'existence de ces trajectoires

B. stabilité de ces trajectoires

§5. Cas de freinage fort ou faible

A. freinage faible

B. freinage fort

§6. Récapitulation des résultats

Préférences

de fait de ce mémoire est d'appliquer à la recherche de réponse périodique d'oscillateur non linéaire une technique de perturbation générale introduite par Zhou (1966) et Dupret (1969) en mécanique céleste.

Les réponses périodiques sont particulièrement intéressantes dans la mesure où elles permettent de déterminer la stabilité d'un système oscillant. En cas de stabilité asymptotique d'une réponse périodique, il lui correspond dans l'espace de phase un domaine d'attraction tel que toute trajectoire partant de ce domaine tendra vers la réponse périodique lorsque le temps tend vers l'infini.

Des noms de Szegeles, Kozlov, Kolmogorov (1961) sont attachés à la recherche systématique de ces réponses périodiques par une extension de la méthode de la moyenne. C'est dans un oscillateur faiblement non linéaire, cette méthode consiste à le remplacer par un système d'équations différentielles qui décrit approximativement l'évolution de l'amplitude et de la phase de la réponse. Les trajectoires périodiques correspondent alors aux équilibres de ce nouveau système. Cette méthode présente certains inconvénients.

Il s'agit de coordonnées holonomes (non dérivées les amplitudes de phase) certaines certaines difficultés.  
- c'est une méthode approximative (pas d'équations général d'existence

Le calcul est difficile si il est poussé loin (Krylov-Bogoliubov disent que l'ordre 3 est tout ce que l'on peut faire).

Une autre méthode a été mise au point par Hale et Iserles (méthode de l'alternative). Elle consiste à déterminer des solutions périodiques du système initial modifié, puis d'ajuster certaines constantes pour que la fonction trouvée soit solution du problème initial.

Cette méthode ne fournit pas directement des renseignements sur la stabilité et ne donne aucune indication sur les autres trajectoires (le transient).

Notre but est de montrer que les inconvénients de la méthode de la moyenne peuvent être levés par une utilisation systématique de la technique de perturbation appelée transformation de Lie par Deprit. Cette technique est surtout remarquable par le fait qu'elle fournit de bons algorithmes de calcul et qu'elle est intrinsèque (invariante par changement de coordonnées).

Pour montrer les possibilités de cette méthode nous avons choisi un problème (l'équation de Duffing) qui a déjà été traité assez complètement par la méthode de l'alternative dans un article de R.A. Gamblin et J.-K. Hale.

L'équation de Duffing trouve de nombreuses applications dans les systèmes physiques et électroniques. L'exemple type est le pendule auquel on applique une force extérieure périodique.

L'étude des circuits de courant alternatif contenant des inductances à noyau en fer conduit aussi à cette équation. Citons encore le problème de la recherche de mécanismes électriques synchrones.

Nous retrouvons dans ce mémoire les résultats de Gambill  
et Sale. En plus nous examinons la stabilité et étudions  
les trois premiers cas de résonance.



§1. Transformations de Lie autonomes (rappel).

Soit la transformation de Lie  $x = X(y, \epsilon) = y + \epsilon X_1(y) + \epsilon^2 X_2(y) + \dots$  avec  $x \in \mathbb{R}^m$ . Cette transformation est engendrée par le champ de vecteurs  $W(x, \epsilon)$ , c'est à dire qu'elle est définie comme la solution du système différentiel

$$\frac{dx}{d\epsilon} = W(x, \epsilon) \quad (1.1), \text{ avec la condition initiale } x(\epsilon=0) = y$$

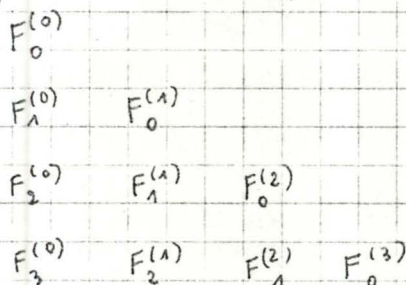
Examinons l'effet de cette transformation sur les seconds membres d'un système d'équations différentielles :  $\frac{dx}{dt} = F(x, \epsilon) \quad (1.2)$

Appelons  $L(W) F(x, \epsilon) = Q(y, \epsilon)$  la transformée du champ de vecteurs  $F(x, \epsilon)$ .

$$L(W) F(x, \epsilon) = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} \left\{ [D^i F(x, \epsilon)]_{x=y} \right\}_{\epsilon=0} \quad (1.3)$$

$$\text{avec } D F(x, \epsilon) = \frac{\partial F(x, \epsilon)}{\partial x} + F_x \cdot W - W_x \cdot F \quad (1.4)$$

Définissons le triangle de Lie par les éléments suivants :



Le triangle est obtenu par l'application successive de la formule :

$$F_i^{(n)} = F_{i+1}^{(n-1)} + \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{i}{j} L_{j+1} F_{i-j}^{(n-1)} \quad (1.5)$$

$$\text{où } L_{j+1} = L_{j+1}(W) \text{ est défini par } L_m F = F_x \cdot W_m - (W_m)_x \cdot F \quad (1.6)$$

Les éléments diagonaux du triangle de Lie  $F_0^{(n)}$  permettent

$$\text{de calculer } L(W) F(x, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_0^{(n)} \quad (1.7)$$

propriétés de  $L_m$  (dérivée de Lie dans la direction  $W_m$ )

-  $L_m$  est linéaire

-  $L_m$  est intrinsèque (invariant par rapport au système de coordonnées utilisé pour représenter l'espace de phase  $x$ )

## § 2. Transformations de Lie non autonomes.

### A. définition et propriétés

Soit la transformation de Lie non autonome (c'est à dire que la transformation dépend de  $t$ )  $x = X(y, t, \epsilon)$  avec  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Cette transformation est engendrée par le champ de vecteurs  $W(x, t, \epsilon)$  et son inverse se notera  $y = Y(x, t, \epsilon)$ .

Examinons l'effet de cette transformation sur les seconds membres d'un système d'équations différentielles de variable indépendante  $t$  :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \epsilon) \quad (2.1)$$

On obtient par dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=X(y,t,\epsilon)} \\ &= \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} F(x, t, \epsilon) + \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=X(y,t,\epsilon)} \stackrel{\text{def.}}{=} Q(y, t, \epsilon) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pour calculer le champ de vecteurs  $Q(y, t, \epsilon)$  sous forme de série, on le développe en série de Taylor :

$$Q(y, t, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \left[ \frac{d^n Q(y, t, \epsilon)}{d\epsilon^n} \right]_{\epsilon=0} \quad (2.3)$$

L'opération essentielle d'un tel développement est évidemment la dérivation totale par rapport à  $\epsilon$ , que nous examinons dans les lemmes suivants :

lemme 1 :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \right\} = - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} \right\}_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.4)$$

En effet :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial t} \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \right\} = \left[ \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial \varepsilon} \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.5)$$

$$\text{or } \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon} \right) \quad (2.6)$$

et  $y = Y(x, t, \varepsilon)$  vérifie :

$$\frac{dY_i}{d\varepsilon} = \frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} W_j(x, t, \varepsilon) = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} W_j(x, t, \varepsilon) \right] \quad (2.8)$$

tenant compte de (2.8), (2.5) devient :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial t} \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial x_j} W_j - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} W_j \right] \right\}_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.9)$$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial x_j} W_j - \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t \partial x_j} W_j - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial W_j}{\partial t} \right\}_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.10)$$

$$= \left\{ - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial W_j}{\partial t} \right\}_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.11)$$

d'où la thèse

lemme 2

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot F(x, t, \varepsilon) \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \right\} = \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot DF \right]_{x=X(y,t,\varepsilon)} \quad (2.12)$$

$$\text{où } DF(x, t, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x, t, \varepsilon) + F_x \cdot W - W_x \cdot F \quad (2.13)$$

$F_x$  et  $W_x$  représentent comme précédemment respectivement la jacobienne de  $F$  et de  $W$  par rapport à  $x$

Le lemme a déjà été établi dans le cadre des transformations de Lie autonomes

$$\text{Or } \frac{d}{d\varepsilon} Q(y, t, \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ F \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \right\} \quad (2.14)$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ F \frac{\partial Y}{\partial x} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \right\} + \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \right\} \quad (2.15)$$

Maintenant compte des 2 lemmes on obtient :

$$\frac{d}{d\varepsilon} Q(y, t, \varepsilon) = \left[ Y_{x\varepsilon} (DF - \frac{\partial W}{\partial t}) \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \quad (2.16)$$

Calculons maintenant  $\frac{d^m}{d\varepsilon^m} Q(y, t, \varepsilon)$

$$\frac{d^m}{d\varepsilon^m} Q(y, t, \varepsilon) = \frac{d^{m-1}}{d\varepsilon^{m-1}} \left\{ \left[ Y_{x\varepsilon} (DF - \frac{\partial W}{\partial t}) \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \right\} \quad (2.17)$$

Puisque  $DF - \frac{\partial W}{\partial t}$  est un champ de vecteurs, on obtient par le lemme 2 :

$$\frac{d^m}{d\varepsilon^m} Q(y, t, \varepsilon) = \left[ Y_{x\varepsilon} D^{m-1} (DF - \frac{\partial W}{\partial t}) \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \quad (2.18)$$

En  $\varepsilon = 0$  on a :

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ Y_{x\varepsilon} = I \end{array} \right\}$$

$$\text{Donc } \left( \frac{d^m}{d\varepsilon^m} Q(y, t, \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = \left[ D^m F(x, t, \varepsilon) - D^{m-1} \frac{\partial W}{\partial t}(x, t, \varepsilon) \right]_{x=y, \varepsilon=0}$$

Puisque le développement en série de  $Q(y, t, \varepsilon)$  est

$$\text{égal à } \sum_{i \geq 0} \left( \frac{d^i}{d\varepsilon^i} Q(y, t, \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon^i \quad (2.20)$$

$$\text{on a : } \boxed{Q(y, t, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left[ D^i F(x, t, \varepsilon) - D^{i-1} \frac{\partial W}{\partial t}(x, t, \varepsilon) \right]_{x=y, \varepsilon=0}} \quad (2.21)$$

Nous allons maintenant établir une autre formulation de  $Q(y, t, \varepsilon)$ .

$$\text{Voyons que } Q(y, t, \varepsilon) = \int_0^\varepsilon \mathcal{L}(w) F(x, t, \varepsilon) - \int_0^\varepsilon \mathcal{L}(w) \frac{\partial W}{\partial t}(x, t, \varepsilon) d\varepsilon \quad (2.22)$$

$$\text{On sait que } Q(y, t, \varepsilon) = \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot F + \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \quad (2.23)$$

$$= \left[ \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot F \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} + \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \quad (2.24)$$

$$= \mathcal{L}(w) F(x, t, \varepsilon) + \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \quad (2.25)$$

En (2.4), on a établi que :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \right\} = \left[ -(Y_x) \frac{\partial w}{\partial t} \right]_{x=x(y, t, \varepsilon)} \\ = -\mathcal{L}(w) \frac{\partial w(x, t, \varepsilon)}{\partial t} \quad (2.26)$$

car c'est la transformée du champ de vecteurs  $\frac{\partial w(x, t, \varepsilon)}{\partial t}$  par le changement de coordonnées

$x = X(y, t, \varepsilon)$  avec  $w(x, t, \varepsilon)$  comme vecteur générateur

On obtient ainsi une équation différentielle en  $\varepsilon$  que l'on peut intégrer :

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial t} \right)_{x=x(y, t, \varepsilon)} = - \int_0^\varepsilon \mathcal{L}(w) \frac{\partial w(x, t, \varepsilon)}{\partial t} d\varepsilon \quad (2.27)$$

$$\text{Donc } \boxed{Q(y, t, \varepsilon) = \mathcal{L}(w) F(x, t, \varepsilon) - \int_0^\varepsilon \mathcal{L}(w) \frac{\partial w(x, t, \varepsilon)}{\partial t} d\varepsilon}$$

(ce qui signifie que  $Q(y, t, \varepsilon)$  est la somme de 2 vecteurs, le second représentant une sorte de vitesse d'entraînement)

### B. construction du triangle de Lie

On peut bien sûr calculer  $\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(w) F(x, t, \varepsilon) \\ \mathcal{L}(w) \frac{\partial w(x, t, \varepsilon)}{\partial t} \end{array} \right|$

mais cela sera assez lourd car il faudra construire 2 triangles de Lie (les champs de vecteurs  $F$  et  $\frac{\partial w}{\partial t}$ )

étant bien sûr différents)

On utilisera plutôt un seul triangle de Lie: il suffira de retrancher  $\frac{\partial W_i}{\partial t}(x, t, \varepsilon)$  au  $i$ ème élément (et cela  $\forall i$ ) de la 2ème colonne obtenue comme dans les transformations de Lie autonomes avec l'opérateur  $L$ .

Ensuite pour les colonnes suivantes, il faudra simplement continuer avec l'opérateur  $L$ . Ceci est justifié par le fait que chaque colonne ainsi construite représentera le développement de  $D^{m-1} [DF - \frac{\partial W}{\partial t}]$  (formule (2.18))

### c. caractère intrinsèque

Ceci résulte du fait que comme dans le cas autonome, chaque opération élémentaire de l'algorithme est intrinsèque.

En effet ces opérations élémentaires sont composées de :

- dérivées de Lie (opérateur  $L_m$ ) par rapport aux champs de vecteurs  $W_i$
- dérivation de champs de vecteurs par rapport à des paramètres indépendants de la variété différentiable
- addition de champs de vecteurs (addition de  $\frac{\partial W}{\partial t}$  à la 2ème colonne) qui est une opération indépendante du système de coordonnées.

### §3. Transformations de Lie non autonomes à partir du cas autonome.

Soit un système  $\frac{dx}{dt} = P(t, x)$  (3.1)

avec  $x \in \mathbb{R}^n$

Pour ramener ce système à un système autonome,

$$\text{posons } X = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(3.1) s'écrit alors :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(t, x) \\ 1 \end{pmatrix} = P(X, \varepsilon) \quad (3.3)$$

Soit une transformation  $x = X(Y, \varepsilon)$  (3.4)

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ t \end{pmatrix}$$

Remarquons que nous imposons à la transformation locale d'être d'un type particulier puisque nous exigeons que la  $(n+1)^{\text{ème}}$  coordonnée (le temps) demeure inchangée. Pour atteindre ce but nous allons choisir des vecteurs générateurs  $W(x, \varepsilon)$  d'un type particulier : la dernière composante s'annule.

Dans la définition des transformations de Lie autonomes, on développe les champs de vecteurs en série de  $\varepsilon$

$$P = P_0^{(0)} + \varepsilon P_1^{(0)} + \dots$$

$$W = W_1 + \frac{\varepsilon}{2!} W_2 + \dots$$

et on utilise les dérivées de Lie :

$$L_i P_l^{(k)} = \left( P_l^{(k)} \right)_x \cdot W_i - (W_i)_x \cdot P_l^{(k)}$$

$L_i$  agit sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

Définissons  $\tilde{L}_i$  : opérateur qui agit sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\tilde{L}_i P_l^{(k)} = \left( P_l^{(k)} \right)_x \cdot W_i - (W_i)_x \cdot P_l^{(k)} \quad (3.5)$$

Or  $P(x, \varepsilon) = P_0^{(0)}(x, \varepsilon) + \varepsilon P_1^{(0)}(x, \varepsilon) + \dots$

et le choix particulier de  $P(x, \varepsilon)$  implique que la  $(m+1)$ -ème composante de  $P_0^{(0)} = 1$

Calculons  $\tilde{L}_i P_0^{(0)}$

$$\text{soit } W_i = \begin{pmatrix} {}^1 W_i \\ \vdots \\ {}^m W_i \\ {}^{m+1} W_i = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0^{(0)} = \begin{pmatrix} {}^1 p \\ \vdots \\ {}^m p \\ {}^{m+1} p = 0 \end{pmatrix}$$

donc  $\tilde{L}_i P_0^{(0)} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^1 p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial {}^1 p}{\partial x_m} & \frac{\partial {}^1 p}{\partial t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial {}^m p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial {}^m p}{\partial x_m} & \frac{\partial {}^m p}{\partial t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1 W_i \\ \vdots \\ {}^m W_i \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^1 W_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial {}^1 W_i}{\partial x_m} & \frac{\partial {}^1 W_i}{\partial t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial {}^m W_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial {}^m W_i}{\partial x_m} & \frac{\partial {}^m W_i}{\partial t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1 p \\ \vdots \\ {}^m p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

= (I) - (II)

Pour (I), on obtient le même résultat que si on avait supprimé la dernière équation au système  $\frac{dx}{dt} = P(x, \varepsilon)$  et utilisé l'opérateur  $L_i$  au lieu de  $\tilde{L}_i$ .

Pour (II), on obtient le même résultat que si on avait supprimé la dernière équation au système  $\frac{dx}{dt} = P(x, \varepsilon)$  et utilisé  $L_i$  au lieu de  $\tilde{L}_i$ , à l'exception d'un vecteur à soustraire :  $\begin{pmatrix} \frac{\partial {}^1 W_i}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial {}^m W_i}{\partial t} \end{pmatrix}$

De plus, par cette construction, tout élément du triangle de Lie qui n'est pas  $P_0^{(0)}$  a sa dernière composante nulle et dans ce cas, quand on calcule  $\tilde{L}_i P_2^{(0)}(x, \varepsilon)$ , on ne soustrait plus le vecteur  $\frac{\partial W_i}{\partial t}$ ; c'est à dire que l'on



obtient le même résultat que si on avait utilisé  $L_i$  au lieu de  $\tilde{L}_i$  après avoir négligé la dernière composante de  $P_L^{(1)}$  qui est nulle.

Donc il suffit de continuer l'algorithme en appliquant l'opérateur  $L$  aux différents éléments obtenus.

On peut donc conclure que pour les transformations de Lie non autonomes, la structure du problème reste identique et qu'il revient au même d'ajouter une composante au système pour appliquer le cas des transformations de Lie autonomes ou bien de changer simplement la 2<sup>ème</sup> colonne dans le triangle de Lie en retranchant le vecteur  $\frac{\partial W_i}{\partial t}$  au  $i$ ème élément (cela  $\forall i$ ) et de continuer l'algorithme avec l'opérateur habituel :

$$L_i P_L^{(1)} = (P_L^{(1)})_x \cdot W_i - (W_i)_x \cdot P_L^{(1)}$$

On est ainsi arrivé à la même conclusion que celle obtenue directement par la théorie générale sur les transformations de Lie non autonomes.

# Chapitre II : Equation de Duffing en cas de résonance.

## § 1. Equation de Duffing.

### A. forme de l'équation

Nous considérerons l'équation de Duffing où la période du terme périodique est  $2\pi$ .

Elle a la forme :

$$\ddot{z} + \sigma^2 z = -\epsilon \gamma z^3 + c \dot{z} + B \cos t \quad (4.1)$$

avec  $\sigma^2, \gamma, B$  des constantes

$c$  un paramètre d'ordre petit que l'on précisera plus tard

L'équation linéaire non homogène  $\ddot{z} + \sigma^2 z = B \cos t$  a comme solution  $\frac{B}{\sigma^2 - 1} \cos t$

La solution de (4.1) que nous appellerons  $z(t)$  peut s'écrire sous la forme  $z(t) = \frac{B}{\sigma^2 - 1} \cos t + x(t)$  (4.2) avec  $x(t)$  à calculer.

$x(t)$  sera solution de :

$$\ddot{x}(t) + \sigma^2 x(t) = -\epsilon \gamma \left[ \frac{B}{\sigma^2 - 1} \cos t + x(t) \right]^3 + c \left[ -\frac{B}{\sigma^2 - 1} \sin t + \dot{x}(t) \right] \quad (4.3)$$

c'est une équation différentielle du second ordre non linéaire et non homogène

Remarquons que si nous trouvons une solution  $x(t)$  de (4.3) qui soit périodique de période  $2k\pi$ ,  $z(t) = x(t) + \frac{B}{\sigma^2 - 1} \cos t$  sera

aussi une solution périodique de période  $2k\pi$  de (4.1).  
 Transformons l'équation (4.3) en un système équivalent.

$$(4.4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[ -\sigma^2 x - \varepsilon \delta \left( \frac{B \cos t}{\sigma^2 - 1} + x \right)^3 + c \left( -\frac{B}{\sigma^2 - 1} \sin t + x \right) \right] \\ = \frac{1}{\sigma} \left[ -\sigma^2 x - \varepsilon \delta \left( \frac{B^3}{(\sigma^2 - 1)^3} + x^3 + \frac{3B^2}{(\sigma^2 - 1)^2} x \cos^2 t + \frac{3B}{\sigma^2 - 1} x^2 \cos t \right) \right. \\ \left. + c \left( -\frac{B}{\sigma^2 - 1} \sin t + x \right) \right] \end{cases}$$

### B. introduction de coordonnées polaires

Nous allons introduire les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  en place des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ : en effet on peut s'attendre à ce qu'elles rendent mieux compte du système puisque pour le système linéaire, les solutions exprimées par rapport à ces coordonnées sont représentées dans le plan de phase par des cercles.

Soit

$$(4.5) \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = -r \sin \varphi \end{cases}$$

remarquons la singularité pour  $r=0$ ; ceci sera envisagé plus tard.

Sous l'effet de cette transformation de coordonnées, (4.4) devient:

$$(4.6) \begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon \delta}{\sigma} \left[ \left( \frac{B}{\sigma^2 - 1} \cos t + r \cos \varphi \right)^3 \sin \varphi \right] + c \left[ \frac{B}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \varphi \sin t + r \sin^2 \varphi \right] \\ \dot{\varphi} = \sigma + \frac{\varepsilon \delta}{\sigma r} \left[ \left( \frac{B \cos t}{\sigma^2 - 1} + r \cos \varphi \right)^3 \cos \varphi \right] + c \left[ \frac{B}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \right] \end{cases}$$

ou encore:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{\epsilon \gamma}{\sigma} \left[ \frac{B^3}{(\sigma^2 - 1)^3} \sin \varphi \cos^3 t + r^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi + \frac{3 B^2}{(\sigma^2 - 1)^2} r \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 B}{\sigma^2 - 1} r^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos t \right] + C \left[ \frac{B}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \varphi \sin t \right. \\
 &\quad \left. + r \sin^2 \varphi \right] \\
 (4.7) \quad \dot{\varphi} &= \sigma + \frac{\epsilon \gamma}{\sigma} \left[ \frac{B^3}{r(\sigma^2 - 1)^3} \cos^3 t \cos \varphi + \frac{3 B^2}{(\sigma^2 - 1)^2} \cos^2 \varphi \cos^2 t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 B}{\sigma^2 - 1} r \cos^3 \varphi \cos t + r^2 \cos^4 \varphi \right] + C \left[ \frac{B}{\sigma(\sigma^2 - 1)} r \sin t \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \right]
 \end{aligned}$$

On s'est ainsi ramené à un système de la forme

$$(4.8) \quad \begin{cases} \dot{r} = \epsilon R(r, \varphi, t) + C G_1(r, \varphi, t) \\ \dot{\varphi} = \sigma + \epsilon \phi(r, \varphi, t) + C G_2(r, \varphi, t) \end{cases}$$

avec  $R, \phi, G_1, G_2$  définis par (4.7)

## §2. Application de la méthode de la moyenne

### A. cas de résonance $1/2p+1$

Si l'on se place dans le cas où  $C = 0$ , (4.8) devient:

$$(4.9) \quad \begin{cases} \dot{r} = \epsilon R(r, \varphi, t) \\ \dot{\varphi} = \sigma + \epsilon \phi(r, \varphi, t) \end{cases}$$

En développant chaque équation (4.9) devient:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{\epsilon \gamma}{\sigma} \left\{ \left[ \frac{3 B^3}{8(\sigma^2 - 1)^3} + \frac{3 B}{8(\sigma^2 - 1)} r^2 \right] \sin(\varphi + t) + \left[ \frac{3 B^3}{8(\sigma^2 - 1)} + \frac{3 B r^2}{8(\sigma^2 - 1)} \right] \sin(\varphi - t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 B^2}{8(\sigma^2 - 1)^2} r \sin(2\varphi + 2t) + \frac{3 B^2}{8(\sigma^2 - 1)^2} r \sin(2\varphi - 2t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3 B}{8(\sigma^2 - 1)} r^2 \sin(3\varphi + t) + \frac{3 B}{8(\sigma^2 - 1)} r^2 \sin(3\varphi - t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B^3}{8(\sigma^2 - 1)^3} \sin(\varphi + 3t) + \frac{B^3}{8(\sigma^2 - 1)^3} \sin(\varphi - 3t) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{\lambda^3}{4} + \frac{3B^2\lambda}{4(\sigma^2-1)^2} \right] \sin 2\varphi + \frac{\lambda^3}{8} \sin 4\varphi \quad \{ \\
 (4.10) \quad \dot{\varphi} = \sigma + \frac{\varepsilon\delta}{\sigma} & \left\{ \left[ \frac{9B}{8(\sigma^2-1)} \lambda + \frac{3B^3}{8\lambda(\sigma^2-1)^3} \right] \cos(\varphi+t) + \left[ \frac{9B}{8(\sigma^2-1)} \lambda + \frac{3B^3}{8\lambda(\sigma^2-1)^3} \right] \cos(\varphi-t) \right. \\
 & + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \cos(2\varphi+2t) + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \cos(2\varphi-2t) \\
 & + \frac{3B\lambda}{8(\sigma^2-1)} \cos(3\varphi+t) + \frac{3B\lambda}{8(\sigma^2-1)} \cos(3\varphi-t) \\
 & + \frac{B^3}{8\lambda(\sigma^2-1)^3} \cos(\varphi+3t) + \frac{B^3}{8\lambda(\sigma^2-1)^3} \cos(\varphi-3t) \\
 & + \left[ \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right] \cos 2\varphi + \frac{\lambda^2}{8} \cos 4\varphi + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \cos 2t \\
 & \left. + \frac{3\lambda^2}{8} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant introduire la résonance  $\frac{1}{2p+1}$   
 Pour se placer dans de telles conditions supposons  
 que  $\sigma - \frac{1}{2p+1}$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ , c'est à dire :

$$\sigma - \frac{1}{2p+1} = \varepsilon \Delta' \quad (4.11)$$

avec  $p$  constante entière

Effectuons une nouvelle transformation de coordonnées

$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \psi)$  en posant :

$$\psi = (2p+1)\varphi - t \quad (4.12)$$

remarquons que ce changement permet d'introduire  
 $\psi$  qui est un angle lent et de ramener le système  
 à une forme standard avant de le moyenniser  
 $\dot{\varphi}$  est en effet proportionnel à  $\varepsilon$  :

$$(4.12) \Rightarrow \dot{\psi} = (2\mu+1) \dot{\varphi} - 1$$

$$= (2\mu+1) \sigma + (2\mu+1) \varepsilon \phi(r, \varphi, t) - 1$$

$$= \varepsilon [\Delta + (2\mu+1) \phi(r, \varphi, t)] \quad (4.13)$$

en posant  $\Delta = (2\mu+1) \Delta'$

(4.10) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = \frac{\varepsilon \sigma}{\sigma} & \left\{ \frac{3B^3}{8(\sigma^2-1)^3} + \frac{3B\alpha^2}{8(\sigma^2-1)} \right\} \sin \frac{\psi + (2\mu+2)t}{2\mu+1} + \left\{ \frac{3B^3}{8(\sigma^2-1)^3} + \frac{3B}{8(\sigma^2-1)} \alpha^2 \right\} \sin \frac{\psi - 2\mu t}{2\mu+1} \\
 & + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \alpha \sin \frac{2\psi + (4\mu+4)t}{2\mu+1} + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \alpha \sin \frac{2\psi - 4\mu t}{2\mu+1} \\
 & + \frac{3B}{8(\sigma^2-1)} \alpha^2 \sin \frac{3\psi + (2\mu+4)t}{2\mu+1} + \frac{3B}{8(\sigma^2-1)} \alpha^2 \sin \frac{3\psi - (2\mu-2)t}{2\mu+1} \\
 & + \frac{B^3}{8(\sigma^2-1)^3} \sin \frac{\psi + (6\mu+4)t}{2\mu+1} + \frac{B^3}{8(\sigma^2-1)^3} \sin \frac{\psi - (6\mu+2)t}{2\mu+1} \\
 & + \left[ \frac{\alpha^3}{4} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right] \sin \frac{2\psi + 2t}{2\mu+1} + \frac{\alpha^3}{8} \sin \frac{4\psi + 4t}{2\mu+1} \left\{ \right. \\
 (4.14) \quad \dot{\psi} = \varepsilon & \left. \left\{ \Delta + (2\mu+1) \frac{\sigma}{\sigma} \left[ \left( \frac{9B\alpha}{8(\sigma^2-1)} + \frac{3B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \right) \cos \frac{\psi + (2\mu+2)t}{2\mu+1} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{9B}{8(\sigma^2-1)} \alpha + \frac{3B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \right) \cos \frac{\psi - 2\mu t}{2\mu+1} + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \cos \frac{2\psi + (4\mu+4)t}{2\mu+1} \right. \right. \\
 & + \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \cos \frac{2\psi - 4\mu t}{2\mu+1} + \frac{3B}{8(\sigma^2-1)} \alpha \cos \frac{3\psi + (2\mu+4)t}{2\mu+1} \\
 & + \frac{3B}{8(\sigma^2-1)} \alpha \cos \frac{3\psi - (2\mu-2)t}{2\mu+1} + \frac{B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \cos \frac{\psi + (6\mu+4)t}{2\mu+1} \\
 & + \frac{B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \cos \frac{\psi - (6\mu+2)t}{2\mu+1} + \left. \left. \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right) \cos \frac{2\psi + 2t}{2\mu+1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\alpha^2}{8} \cos \frac{4\psi + 4t}{2\mu+1} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \cos 2t + \frac{3\alpha^2}{8} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right] \left\{ \right.
 \end{aligned}$$

B. application de la méthode de la moyenne par transformée de Lie

Soit  $x = (r, \varphi)$  et  $y = (\bar{r}, \bar{\psi})$

$$(4.14) \text{ devient } : \frac{dx}{dt} = P(t, x, \varepsilon) \quad (4.15)$$

avec  $P(t, x, \varepsilon)$  vecteur des seconds membres du système (4.14). Par une transformation de Lie, on va ramener ce système sous la forme :

$$(4.16) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon^i R'_i(\bar{x}, \bar{y}, -) + \varepsilon^{\nu+1} R''(\bar{x}, \bar{y}, t, \varepsilon) \\ \dot{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon^i \psi'_i(\bar{x}, \bar{y}, -) + \varepsilon^{\nu+1} \psi''(\bar{x}, \bar{y}, t, \varepsilon) \end{array} \right.$$

(4.16) est un système dont les seconds membres ne dépendent plus de  $t$  jusqu'à un certain ordre  $(\nu+1)$

Si  $x = X(t, y, \varepsilon)$  représente la transformation qui fait passer de (4.14) à (4.16), elle est définie comme solution du système auxiliaire  $\frac{dx}{d\varepsilon} = W(t, x, \varepsilon) = W_1(t, x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2!} W_2(t, x, \varepsilon) + \dots$

( $W(t, x, \varepsilon)$  est le vecteur générateur de la transformation)

La transformée  $\bar{a}(t, y, \varepsilon)$  du champ de vecteurs  $P(t, x, \varepsilon)$  a évidemment les seconds membres du système (4.16) pour composantes.

remarque : construction du triangle de Lie pour obtenir les seconds membres de (4.16)

on a vu dans le chapitre sur les transformations de Lie non autonomes qu'il est équivalent d'ajouter une 3<sup>ème</sup> équation  $\dot{t} = 1$  au système (4.14) pour se ramener au cas autonome et d'utiliser l'opérateur usuel  $\hat{L}$  dans la construction du triangle de Lie, ou bien de conserver ce système mais dans le triangle de Lie construit avec l'opérateur  $L$ , il faudra soustraire le vecteur  $\frac{\partial W_i}{\partial t}$  au  $i$ ème élément de la 2ème colonne,

et cela \$A\_i\$; nous choisissons cette dernière méthode  
 recherche (de \$R'\_{i+1} V'\_i\$) = \$P'\_i\$ et de \$W\_i\$ (dans le cas où \$i > 1\$)

$$P(\alpha, \epsilon) = P'_0 + \epsilon P'_1 \quad (4.17)$$

avec \$P'\_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\$

et \$P'\_1\$ = (coefficient de \$\epsilon\$ dans la 1<sup>ère</sup> équation de (4.14) = \$A'\_1\$)  
 coefficient de \$\epsilon\$ dans la 2<sup>ème</sup> équation de (4.14) = \$B'\_1\$

\$R'\$ algèbre du triangle de Sie donne:

$$P_{(i)} = P'_{(i)} + L_i P'_{(i)} - \frac{\partial W_i}{\partial t} \quad (4.18)$$

$$P'_{(i)} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

$$W_i = \begin{pmatrix} V_i \\ V'_i \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

on obtient:  $A_i + \frac{\partial}{\partial t} V_i = A'_i \quad (4.21)$

$$B_i + \frac{\partial}{\partial t} V'_i = B'_i \quad (4.22)$$

\$A\_i\$ et \$B\_i\$ sont choisis de telle façon que \$V\_i\$ et \$V'\_i\$ soient  
 Normalisées en \$t\$

donc \$A\_i = 0\$ (4.23)

$$B_i = \Delta + 3v^2(2i+1) \delta + \frac{\delta t}{40(e^{2i})} (2i+1) \delta \quad (4.24)$$

$$\text{et } V_i = \delta \left[ -3\theta^3 - 3\theta v^2 \right] \frac{2i+1}{\cos(4 + (2i+2)t)} + \frac{\delta}{\delta(e^{2i})^3} \frac{8(e^{2i})}{2i+2} \cos \frac{2i+2}{2i+1} \quad (4.25)$$

$$+ \frac{\delta}{\delta} \left[ \frac{3\theta^3}{3\theta^3 + 3\theta v^2} + \frac{8(e^{2i})}{2i+1} \right] \frac{2i+1}{\cos(4 - 2it)} \cos \frac{2i+1}{2i+1}$$

$$- \frac{3\theta^2 v \delta}{2i+1} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1} + \frac{3\theta^2 v \delta}{2i+1} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1}$$

$$- 3\theta v^2 \delta \cdot \frac{2i+1}{160(e^{2i})} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1} + 3\theta v^2 \delta \cdot \frac{2i+1}{160(e^{2i})} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1}$$

$$- \frac{\theta^3 \delta}{2i+1} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1} + \frac{\theta^3 \delta}{2i+1} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1}$$

$$- \left( \frac{\theta^4}{2} + 3\theta^2 v \right) \frac{\delta}{2i+1} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1} - \frac{\theta^4}{2} \cos \frac{2i+1}{2i+1} \frac{2i+1}{2i+1}$$

(4.2)



$$\text{remarquons que } v_1(r, \varphi, t) = v_1(r, -\varphi, -t) \quad (4.26)$$

de la même façon

$$\begin{aligned} v_1 = & \frac{(2p+1)^2 \gamma}{(2p+2)\sigma} \left( \frac{9B\alpha}{8(\sigma^2-1)} + \frac{3B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \right) \sin \frac{\varphi + (2p+2)t}{2p+1} \\ & - \frac{(2p+1)^2 \gamma}{2p\sigma} \left( \frac{9B\alpha}{8(\sigma^2-1)} + \frac{3B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \right) \sin \frac{\varphi - 2pt}{2p+1} \\ & + \frac{(2p+1)^2 \gamma}{(4p+4)\sigma} \cdot \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \sin \frac{2\varphi + (4p+4)t}{2p+1} - \frac{(2p+1)^2 \gamma}{4p\sigma} \cdot \frac{3B^2}{8(\sigma^2-1)^2} \sin \frac{2\varphi - 4pt}{2p+1} \\ & + \frac{(2p+1)^2 \gamma}{\sigma(2p+4)} \cdot \frac{3B\alpha}{8(\sigma^2-1)} \sin \frac{3\varphi + (2p+4)t}{2p+1} - \frac{(2p+1)^2 \gamma}{\sigma(p+2)} \cdot \frac{B^3}{8\alpha(\sigma^2-1)^3} \sin \frac{\varphi - (6p+2)t}{2p+1} \\ & + \frac{(2p+1)^2 \gamma}{2\sigma} \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3B^2}{4(\sigma^2-1)^2} \right) \sin \frac{2\varphi + 2t}{2p+1} + \frac{(2p+1)^2 \gamma \alpha^2}{8\sigma} \sin \frac{4\varphi + 4t}{2p+1} \\ & + \frac{3(2p+1)\gamma B^2 \sin 2t}{8\sigma(\sigma^2-1)} \quad (4.27) \end{aligned}$$

$$\text{remarquons que } v_1(r, \varphi, t) = -v_1(r, -\varphi, -t) \quad (4.28)$$

et que des égalités (4.23) et (4.24) on tire :

$$R'_1(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}, -) = [A_1(r, \varphi)]_{\substack{r=\bar{\alpha} \\ \varphi=\bar{\varphi}}} = 0 \quad (4.29)$$

$$\varphi'_1(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}, -) = [B_1(r, \varphi)]_{\substack{r=\bar{\alpha} \\ \varphi=\bar{\varphi}}} = \Delta + 3\bar{\alpha}^2(2p+1)\frac{\gamma}{8\sigma} + \frac{3B^2(2p+1)\gamma}{4\sigma(\sigma^2-1)}$$

### c. conservation de la symétrie

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  dépendant périodiquement de la variable  $t$ , ayant la symétrie suivante :  
si l'expression en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  est  $(S_1, S_2)$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(r, \varphi, t) = -S_1(r, -\varphi, -t) \\ S_2(r, \varphi, t) = S_2(r, -\varphi, -t) \end{array} \right. \quad (4.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(r, \varphi, t) = -S_1(r, -\varphi, -t) \\ S_2(r, \varphi, t) = S_2(r, -\varphi, -t) \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  dépendant périodiquement de la variable  $t$  et ayant la symétrie suivante si l'expression en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$

est  $(R_1, R_2)$  avec

$$\begin{cases} R_1(n, \psi, t) = R_1(n, -\psi, -t) & (4.33) \\ R_2(n, \psi, t) = -R_2(n, -\psi, -t) & (4.34) \end{cases}$$

Lemme 1 :  $\forall S \in \mathcal{F}$  et  $\forall R \in \mathcal{B}$ ,  $L_R S \in \mathcal{F}$ .

$$L_R S = S_{R_2} - R - R_{R_2} \cdot S$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial n} & \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial S_2}{\partial n} & \frac{\partial S_2}{\partial \psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial n} & \frac{\partial R_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial R_2}{\partial n} & \frac{\partial R_2}{\partial \psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial n} \cdot R_1 + \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \cdot R_2 - \frac{\partial R_1}{\partial n} \cdot S_1 - \frac{\partial R_1}{\partial \psi} \cdot S_2 \\ \frac{\partial S_2}{\partial n} \cdot R_1 + \frac{\partial S_2}{\partial \psi} \cdot R_2 - \frac{\partial R_2}{\partial n} \cdot S_1 - \frac{\partial R_2}{\partial \psi} \cdot S_2 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1(n, \psi, t) \\ Q_2(n, \psi, t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Or la dérivée d'une fonction paire (respectivement impaire) est une fonction impaire (respectivement paire).

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall R \in \mathcal{B}, \frac{\partial R}{\partial \psi} \text{ et } \frac{\partial R}{\partial t} \in \mathcal{F} \\ \forall S \in \mathcal{F}, \frac{\partial S}{\partial \psi} \text{ et } \frac{\partial S}{\partial t} \in \mathcal{B} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} Q_1(n, -\psi, -t) &= -\frac{\partial S_1}{\partial n}(n, \psi, t) \cdot R_1(n, \psi, t) - \frac{\partial S_1}{\partial \psi}(n, \psi, t) \cdot R_2(n, \psi, t) \\ &\quad + \frac{\partial R_1}{\partial n}(n, \psi, t) \cdot S_1(n, \psi, t) + \frac{\partial R_1}{\partial \psi}(n, \psi, t) \cdot S_2(n, \psi, t) \\ &= -Q_1(n, \psi, t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \text{et } Q_2(n, -\psi, -t) &= \frac{\partial S_2}{\partial n}(n, \psi, t) \cdot R_1(n, \psi, t) + \frac{\partial S_2}{\partial \psi}(n, \psi, t) \cdot R_2(n, \psi, t) \\ &\quad - \frac{\partial R_2}{\partial n}(n, \psi, t) \cdot S_1(n, \psi, t) - \frac{\partial R_2}{\partial \psi}(n, \psi, t) \cdot S_2(n, \psi, t) \\ &= Q_2(n, \psi, t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} a_1(r, -\psi, -t) \\ a_2(r, -\psi, -t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1(r, \psi, t) \\ a_2(r, \psi, t) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$\text{c'est à dire } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = L_R S \in \mathcal{F}$$

Montrons que dans notre cas tous les  $P_j^{(i)}$  du triangle de Lie  $\in \mathcal{F}$   
 $W_j \in \mathcal{B}$

Pour construire le triangle de Lie, on part de  $P_0^{(0)}$  et de  $P_1^{(0)}$  qui sont les éléments de la 1<sup>ère</sup> colonne : ces 2 vecteurs  $\in \mathcal{F}$   
 D'autre part, en le calculant, on a remarqué que  $W_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

lemme 2 :  $\forall j, W_j \in \mathcal{B}$

$$\forall j, W_j \text{ est défini par } P_0^{(j)} = P_0^{(j-1)} + L_j P_0^{(0)} - \frac{\partial}{\partial t} W_j \quad (4.40)$$

où  $P_0^{(j-1)}$  est l'élément  $P_0^{(j-1)}$  calculé avec  $W_{j-1} = 0$

Si  $j$  appelle  $\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \bar{c}_j \\ \bar{d}_j \end{pmatrix}$  les composantes de  $P_0^{(j)}$   
 $\begin{pmatrix} \bar{c}_j \\ \bar{d}_j \end{pmatrix}$  les composantes de  $P_0^{(j)}$

(4.40) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_j \\ \bar{d}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} W_j^1 \\ \frac{\partial}{\partial t} W_j^2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$c_j$  et  $d_j$  ont déjà été calculés et par récurrence

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$$

$\bar{c}_j =$  valeur moyenne par rapport à  $t$  de  $c_j = f(r, \psi)$   
 avec  $f(r, -\psi) = -f(r, \psi)$

$\bar{d}_j =$  valeur moyenne par rapport à  $t$  de  $d_j = h(r) + g(r, \psi)$   
 avec  $g(r, -\psi) = g(r, \psi)$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial t} W_j^1 = c_j - f(r, \psi) \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_j^2 = d_j - h(r) - g(r, \psi) \quad (4.43)$$

$$\text{on } \frac{\partial}{\partial t} W_j = \begin{pmatrix} c_j(r, \psi, t) \\ d_j'(r, \psi, t) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$\text{avec } \begin{cases} c_j'(r, -\psi, -t) = -c_j(r, \psi, t) \\ d_j'(r, -\psi, -t) = d_j(r, \psi, t) \end{cases} \quad (4.45)$$

$$(4.46)$$

c'est à dire  $\begin{pmatrix} c_j' \\ d_j' \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$

Donc la dérivée par rapport à  $t$  de  $W_j$  doit  $\in \mathcal{F}$   
c'est à dire  $W_j$  doit  $\in \mathcal{B}$

Montrons maintenant par récurrence que tous les éléments du triangle  $\in \mathcal{F}$ .

$$P_0^{(0)} \text{ et } P_1^{(0)} \in \mathcal{F}$$

Supposons que  $P_i^{(j)}$  ( $i+j < n$ )  $\in \mathcal{F}$  et  $W_j$  ( $j < n$ )  $\in \mathcal{B}$

Or l'algorithme pour calculer tous les termes du triangle de Lie est :

$$P_i^{(n)} = P_{i+1}^{(n-1)} + \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{i}{j} L_{j+1} P_{i-j}^{(n-1)} - d \frac{\partial W_{i+1}}{\partial t} \quad (4.47)$$

avec  $\begin{cases} d=1 \text{ si } P_i^{(n)} \in 2^{\text{eme}} \text{ colonne du triangle de Lie} \\ d=0 \text{ sinon} \end{cases}$

- par récurrence  $P_{i+1}^{(n-1)}$  qui a déjà été calculé  $\in \mathcal{F}$   
- on a montré dans le lemme 1 que tous les termes de la forme  $L_{j+1} P_{i-j}^{(n-1)} \in \mathcal{F}$  lorsque

a)  $P_{i-j}^{(n-1)} \in \mathcal{F}$  : ce qui est vrai par récurrence puisque c'est un terme déjà calculé

b)  $W_{j+1} \in \mathcal{B}$  : ce qu'on a établi dans le lemme 2

- on sait d'autre part que  $W_{i+1} \in \mathcal{B}$ , donc  $\frac{\partial W_{i+1}}{\partial t} \in \mathcal{F}$

- la somme de vecteurs de  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$  (c'est un espace

vectoriel)

done  $P_i^{(n)} \in \mathcal{F}$

conclusion

Si l'on prend les termes diagonaux du triangle de Lie:  $(P_0^{(m)})$ , leur  $n^{\text{e}}$  composante est telle que:

$${}^1P_0^{(m)}(r, \psi, t) = -{}^1P_0^{(m)}(r, -\psi, -t) \quad (\text{car } P_0^{(m)} \in \mathcal{F})$$

et leur  $2^{\text{e}}$  composante est telle que:

$${}^2P_0^{(m)}(r, \psi, t) = {}^2P_0^{(m)}(r, -\psi, -t)$$

Or l'algorithme est tel que les éléments diagonaux sont indépendants de  $t$  (jusqu'à un certain ordre).

Done  $P_0^{(m)}$  est tel que

$$\begin{cases} {}^1P_0^{(m)}(r, \psi, -) = -{}^1P_0^{(m)}(r, -\psi, -) \\ {}^2P_0^{(m)}(r, \psi, -) = {}^2P_0^{(m)}(r, -\psi, -) \end{cases}$$

On aura ainsi:

$$R'_m = [{}^1P_0^{(m)}(r, \psi, -)]_{\substack{r=\bar{r} \\ \psi=\bar{\psi}}} = \sum_h g_{h_m}(\bar{r}) \sin h_m \bar{\psi} \quad (4.4)$$

$$\Psi'_m = [{}^2P_0^{(m)}(r, \psi, -)]_{\substack{r=\bar{r} \\ \psi=\bar{\psi}}} = h_m(\bar{r}) + \sum_h h_{h_m}(\bar{r}) \cos h_m \bar{\psi} \quad (4.5)$$

#### D. conservation du caractère polynomial

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de préciser la forme de (4.16) et en particulier déterminer dans chaque équation de (4.16) l'ordre auquel le 1<sup>er</sup> terme non nul interviendra.

Revenons-nous au système initial (4.4) en coordonnées cartésiennes (avec  $c=0$ ). Exprimons les éléments du triangle de Lie par rapport à ces coordonnées.

Définissons tout d'abord quelques ensembles:

A: ensemble des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  dépendant périodiquement de la variable réelle  $t$

- $B(\gamma)$ : sous-ensemble de  $A$  composé des champs de vecteurs dont l'expression en coordonnées cartésiennes est  $(f_1, f_2)$  avec  $f_1$  et  $f_2$ : polynômes de degré  $\gamma$  en  $x, y, \cos t, \sin t$ .
- $C$ : sous-ensemble de  $A$  composé des champs de vecteurs dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  est  $(g_1, g_2)$  avec les développements en série de Fourier de  $g_1, g_2$  qui sont finis.

### propriétés de ces ensembles

- 1)  $B(\gamma)$  est un espace vectoriel de dimension finie.
- 2)  $B(\gamma)$  est un sous-espace vectoriel de  $C$ .

En effet:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y, \sin t, \cos t) \\ f_2(x, y, \sin t, \cos t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} f_1(r \cos \varphi, -r \sin \varphi, \sin t, \cos t) \\ f_2(r \cos \varphi, -r \sin \varphi, \sin t, \cos t) \end{pmatrix}$$

où  $J$  représente la jacobienne de la transformation

$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi) \text{ et } \varphi = \frac{\varphi + t}{2\varphi + 1}$$

On obtient un vecteur  $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$  dont le développement en série de Fourier des composantes est fini (puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont des produits de puissances de  $\sin$  et  $\cos$  (d'arguments  $\varphi$  et  $t$ ) avec des exposants finis c'est à dire des produits finis de termes qui possèdent un développement fini et d'autre part les termes de la jacobienne ont également un développement en série de Fourier fini).

proposition: tous les éléments de la  $m^{\text{ème}}$  ligne du triangle de Lie

$$\in B(2m+1)$$

Le système initial (4.4) s'écrit avec  $e = 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -\sigma x + \varepsilon \left[ -\frac{\delta}{\sigma} (B \cos t + x)^3 \right] \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_0^{(0)} + \varepsilon T_1^{(0)}(x, y, t) \quad (4.50)$$

$$\text{avec } \begin{cases} T_0^{(0)} = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -\sigma x \end{pmatrix} \\ T_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\delta}{\sigma} (B \cos t + x)^3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Appelons  $S(x, y, t, \varepsilon) = S_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} S_2 + \dots$

le vecteur générateur de la transformation exprimé en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$

Nous allons effectuer cette démonstration par récurrence.

1<sup>ère</sup> ligne

Les éléments de la 1<sup>ère</sup> ligne sont  $T_1^{(0)}$  et  $T_0^{(1)}$

Voyons qu'ils appartiennent à  $B(3)$

- c'est le cas pour  $T_1^{(0)}$

$$\text{en effet } T_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\delta}{\sigma} (B \cos t + x)^3 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

- c'est vrai pour  $T_0^{(1)}$

ceci résulte du lemme suivant que nous allons démontrer

lemme : si  $T_0^{(j)}$  (qui est l'élément  $T_0^{(j)}$  calculé pour  $S_j = 0$ )  $\in B(2j+1)$

alors :  $\forall j \mid T_0^{(j)} \in B(2j+1)$

$\mid S_j \in B(2j+1)$

$$\text{En effet, on sait qu'on a : } T_0^{(j)} = T_0^{(j-1)} + L_j T_0^{(j-1)} - \frac{\partial S_j}{\partial t} \quad (4.52)$$

On a donc à résoudre une équation de la forme :

$$\mathcal{L} S_j = d - e \quad (4.53)$$

$$\mathcal{B} = L_f T_0^{(0)} - \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.54)$$

$$\text{et } d = T_0^{(f)} \in B(2f+1) \quad (4.55)$$

$$e = T_0^{(f)} \text{ est choisi dans } \text{Ker } \mathcal{B} \text{ (voir (4.52))} \quad (4.56)$$

$$d - e \text{ est choisi dans } \text{Im } \mathcal{B} \text{ (voir (4.53))} \quad (4.57)$$

$$\text{Soit } \alpha = \text{Im } \mathcal{B} \quad (4.58)$$

$$\beta = \text{Ker } \mathcal{B} \quad (4.59)$$

$$\alpha' = \text{Im } \mathcal{B}'(2f+1) \quad (4.60)$$

$$\beta' = \text{Ker } \mathcal{B}' \text{ (}\mathcal{B}' \text{ restriction de } \mathcal{B} \text{ à } B(2f+1)\text{)} \quad (4.61)$$

On remarque que :

1) l'opérateur  $\mathcal{B}$  est tel que  $\alpha \cap \beta = 0$

$$\text{donc } \mathcal{B} = \alpha \oplus \beta \quad (4.62)$$

2) l'image par  $\mathcal{B}$  d'un polynôme de degré  $2f+1$  en  $x, y, \sin t, \cos t$  ne peut augmenter le degré de ce polynôme : donc  $\alpha' \in B(2f+1)$  (4.63)

$$\text{ainsi comme } \begin{cases} \alpha' \in \alpha \\ \beta' \in \beta \end{cases}$$

$$\text{et donc } \alpha' \cap \beta' = 0$$

$$\text{on a : } B(2f+1) = \alpha' \oplus \beta' \quad (4.64)$$

D'autre part  $d$  qui  $\in B(2f+1)$  se décompose de façon unique en  $d = d_1 + d_2$  avec

$$\begin{cases} d_1 \in \alpha' \\ d_2 \in \beta' \end{cases}$$

Donc | le  $e$  choisi est dans  $\beta'$  et ainsi dans  $B(2f+1)$

$$\Rightarrow T_0^{(f)} \in B(2f+1)$$

|  $d - e$  est dans  $\alpha'$

Or on a à résoudre l'équation  $\mathcal{B} S_f = d - e$   
avec  $(d - e) \in \alpha'$



On sait qu'il existe  $S_j \in \mathcal{A}$  solution de cette équation (celui qu'on calcule en coordonnées  $(r, \varphi)$ ) et on sait aussi qu'il existe un seul  $S_j \in \mathcal{A}'$  solution de l'équation  $\nabla S_j = d - e$  (4.65)

Donc si on choisit  $S_j \in \mathcal{A}$ , il est aussi dans  $\mathcal{A}'$ , et ainsi dans  $\mathcal{B}(2j+1)$ , d'où la thèse

Les affirmations (4.62) et (4.65) résultent des 2 théorèmes suivants :

soit  $\left\{ \begin{array}{l} X : \text{espace vectoriel de dimension finie} \\ A : \text{application linéaire de } X \rightarrow X \end{array} \right.$

a) si  $\text{Im}_A X \cap \text{Ker } A = 0$  alors :

$$X = \text{Im}_A X \oplus \text{Ker } A$$

b) si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Im}_A X \cap \text{Ker } A = 0 \\ y \in \text{Im}_A X \end{array} \right.$

l'équation  $Ax = y$  possède une seule solution  $x \in X$

m<sup>ème</sup> ligne

Prends un élément quelconque de la m<sup>ème</sup> ligne

$$T_h^{(l)} = T_{h-1}^{(l+1)} + L_1 T_h^{(l-1)} + L_2 T_{h-1}^{(l-1)} + \dots + L_h T_1^{(l-1)} \quad (4.66)$$

avec  $h+l = m$

$T_{h-1}^{(l+1)}$  est un terme qui a déjà été calculé et par

réurrence il appartient à  $\mathcal{B}(2m+1)$

Calculons un élément de la somme :

soit  $L_i T_s^{(n)}$

$$\text{avec } i+n+s = h+l = m \quad (4.67)$$

$$L_i T_s^{(n)} = \left( T_s^{(n)} \right)_x \cdot S_i - (S_i)_x \cdot T_s^{(n)} \quad (4.68)$$

avec  $\left( T_s^{(n)} \right)_x$  : jacobienne de  $T_s^{(n)}$  par rapport à  $(x, y)$

$$L_i T_n^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 T_n^{(n)}}{\partial x} & \frac{\partial^1 T_n^{(n)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 T_n^{(n)}}{\partial x} & \frac{\partial^2 T_n^{(n)}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1 s_i \\ {}^2 s_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 s_i}{\partial x} & \frac{\partial^1 s_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 s_i}{\partial x} & \frac{\partial^2 s_i}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1 T_n^{(n)} \\ {}^2 T_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

La 1<sup>ère</sup> composante de  $L_i T_n^{(n)}$  est :

$$\frac{\partial^1 T_n^{(n)}}{\partial x} \cdot {}^1 s_i + \frac{\partial^2 T_n^{(n)}}{\partial y} \cdot {}^2 s_i - \frac{\partial^1 s_i}{\partial x} \cdot {}^1 T_n^{(n)} - \frac{\partial^2 s_i}{\partial y} \cdot {}^2 T_n^{(n)} \quad (4.69)$$

Or  $T_n^{(n)} \in$  ligne  $n+s$  et ainsi il  $\in \mathcal{B}(2(n+s)+1)$ .

Donc  ${}^1 T_n^{(n)}$  et  ${}^2 T_n^{(n)}$  sont des polynômes de degré  $2(n+s)+1$  en  $x, y, \sin t, \cos t$  et  $\frac{\partial^1 T_n^{(n)}}{\partial x}$  de même que  $\frac{\partial^2 T_n^{(n)}}{\partial y}$  sont des polynômes de degré  $2(n+s)$  en  $x, y, \sin t, \cos t$

Par récurrence et d'après le lemme :  $s_i \in \mathcal{B}(2i+1)$ , donc  ${}^1 s_i$  et  ${}^2 s_i$  sont des polynômes de degré  $2i+1$  en  $x, y, \sin t, \cos t$  et par conséquent  $\frac{\partial^1 s_i}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 s_i}{\partial y}$  sont des polynômes de degré  $2i$  en  $x, y, \sin t, \cos t$ .  
Donc la 1<sup>ère</sup> composante de  $L_i T_n^{(n)}$  est une somme de 4 polynômes de degré respectivement :

$$2(n+s)+2i+1, 2(n+s)+2i+1, 2i+2(n+s)+1 \text{ et } 2i+2(n+s)+1 \text{ c'est à dire de degré } 2(i+n+s)+1 = 2m+1 \text{ en } x, y, \sin t, \cos t$$

Cette somme est donc un polynôme de degré  $2m+1$  en  $x, y, \sin t, \cos t$

On obtient la même chose pour la 2<sup>ème</sup> composant de  $L_i T_n^{(n)}$ .

Donc  $T_h^{(h)}$  est une somme d'éléments de  $\mathcal{B}(2m+1)$  qui est un espace vectoriel, c'est donc un

élément de  $B(2m+1)$ , d'où la proposition

remarque : si  $T_k^{(l)} \in 2^{\text{ème}} \text{ colonne du triangle de Lie}$ ,  
on doit lui retrancher  $\frac{\partial S_{k+1}}{\partial t}$  ;

mais comme  $S_{k+1} \in \frac{\partial t}{\partial t} B(2(k+1)+1)$ ,

$$\frac{\partial S_{k+1}}{\partial t} \in B(2(k+1)+1) \subset B(2m+1)$$

et la différence  $\in B(2m+1)$

On vient ainsi d'établir que  ${}^1T_0^{(m)}$  est un polynôme  
de degré  $2m+1$  en  $x, y, \sin t, \cos t$

$$\text{Donc } {}^1T_0^{(m)} = \sum_{l+k+j+i=0}^{2m+1} V_{lkyr} x^l y^k \sin^j t \cos^i t \quad (4.70)$$

(idem pour  ${}^2T_0^{(m)}$ )

Si on repasse aux coordonnées polaires  $(r, \varphi)$ , en vertu  
du caractère intrinsèque de l'opérateur  $L$ , on aura :

$$(4.71) \quad {}^1P_0^{(m)}(r, \varphi, t) = {}^1T_0^{(m)}(x(r, \varphi, t), y(r, \varphi, t), t) \cos \varphi - r {}^2T_0^{(m)}(x(r, \varphi, t), y(r, \varphi, t), t) \sin \varphi$$

Dans  ${}^1T_0^{(m)}$  et  ${}^2T_0^{(m)}$  les termes de la forme  $x^l y^k$   
deviennent en coordonnées  $(r, \varphi)$  :  $r^{l+k} \cos^l \varphi \sin^k \varphi$

D'autre part si on développe  ${}^i T_0^{(m)}$  ( $i=1, 2$ ) suivant  
les formules de Moivre, l'argument en sin et cos  
sera au maximum :

$$\left| \begin{array}{l} l+k \text{ en } \varphi \\ i+j \text{ en } t \end{array} \right.$$

avec  $l+k+i+j \leq 2m+1$

On peut conclure que :

$${}^1P_0^{(m)}(r, \varphi, t) = \sum_{u+v \leq 2m+2} h_{uv}(r) \cos(u\varphi + vt) + \sum_{u+v \leq 2m+2} h_{uv}(r) \sin(u\varphi + vt)$$

Or on a établi précédemment que  $P_0^{(m)} \in \mathcal{J}$

$$\text{c'est à dire } {}^1P_0^{(m)}(r, \psi, t) = -{}^1P_0^{(m)}(r, -\psi, -t)$$

$$\text{Donc } {}^1P_0^{(m)}(r, \psi, t) = \sum_{n+r \leq 2m+2} h_{n,r}(r) \sin(n\psi + r t) \quad (4.72)$$

Rappelons que l'on avait déjà obtenu auparavant (voir (4.48)) une expression de  ${}^1P_0^{(m)}(r, \psi, t)$  :

$${}^1P_0^{(m)}(r, \psi, t) = \sum_{k_m} g_{k_m}(r) \sin k_m \psi \quad (4.73)$$

### E. forme générale des équations moyennées et particularisation

aux résonances 1/3, 1/5 et 1/7

Comme nous avons 2 expressions de  ${}^1P_0^{(m)}$  ((4.72) et (4.73)), nous allons les identifier et ceci nous permettra de préciser encore davantage sa forme.

En identifiant (4.72) et (4.73) on a :

$$k_m \psi = n\psi + r t \quad (4.74)$$

et comme  $\psi = (2p+1)\varphi - t$ , on obtient :

$$k_m \psi = k_m [(2p+1)\varphi - t] = 2p+1 k_m \varphi - k_m t$$

$$\text{et ainsi : } r = -k_m \quad (4.75)$$

$$n = (2p+1) k_m \quad (4.76)$$

$$\text{donc } |n| + |r| = k_m (2p+2) \quad (4.77)$$

Or  $|n| + |r| \leq 2m+2$  (voir (4.73)), donc  $k_m (2p+2) \leq 2m+2$

ce qui est impossible pour  $k_m \in \mathbb{N}$  si  $m \leq p$ , et cela aura lieu la 1<sup>ère</sup> fois pour  $m = p$  ( $k_m = 1$  à ce moment)

Donc le premier  $R'_m(\bar{r}, \bar{\psi}) = [{}^1P_0^{(m)}(r, \psi)]_{\substack{r=\bar{r} \\ \psi=\bar{\psi}}}$  non nul

sera  $R'_p(\bar{r}, \bar{\psi})$  et sera égal à  $g(\bar{r}) \sin \bar{\psi}$  (4.78)

De même  ${}^2P_0^{(p)}(r, \psi)$  aura la forme  $h_p(r) + h_{p_1}(r) \cos \psi$

$$\text{et } \Psi'_p(\bar{n}, \bar{\varphi}) = h_p(\bar{n}) + h_{p+1}(\bar{n}) \cos \bar{\varphi} \quad (4.79)$$

c'est à dire la 1<sup>re</sup> contribution en  $\cos h \bar{\varphi}$  interviendra à l'ordre  $p$  et  $h = 1$  à ce moment

On vient donc d'établir a priori que les équations différentielles en moyenne sont de la forme:

$$(4.80) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{n}} = \varepsilon^k g(\bar{n}) \sin \bar{\varphi} + \varepsilon^{k+1} G(\bar{n}, \bar{\varphi}, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} R_1(\bar{n}, \bar{\varphi}, t) \\ \dot{\bar{\varphi}} = \varepsilon B(\bar{n}, \varepsilon) + \varepsilon^k (h_p(\bar{n}) + h_{p+1}(\bar{n}) \cos \bar{\varphi}) + \varepsilon^{k+1} H(\bar{n}, \bar{\varphi}, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} R_2(\bar{n}, \bar{\varphi}, t) \end{array} \right.$$

avec  $B(\bar{n}, 0) = \Delta + 3\bar{n}^2(2p+1) \frac{\delta}{8\sigma} + \frac{3}{4} \frac{B^2(2p+1)\delta}{\sigma(\sigma^2-1)^2}$  (voir 4.24)

forme particulière de (4.80) dans les cas où  $p = 1, 2, 3$

$p = 1$  (résonance 1/3)

$$(4.81) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{n}} = \varepsilon \left[ \frac{3\delta B}{8\sigma(\sigma^2-1)} \bar{n}^2 \sin \bar{\varphi} \right] + \varepsilon^2 \left[ \left( 0,70 \frac{\delta B^4 \bar{n}^2}{\sigma(\sigma^2-1)^4} + 0,28 \frac{\delta B^2 \bar{n}^4}{\sigma(\sigma^2-1)^2} \right) \sin \bar{\varphi} \right] + \dots \\ \dot{\bar{\varphi}} = \varepsilon \left[ \Delta + \frac{3}{4} \frac{B^2 \delta}{\sigma(\sigma^2-1)^2} + \frac{9\bar{n}^2 \delta}{8\sigma} + \frac{9}{8} \frac{B \delta \bar{n} \cos \bar{\varphi}}{\sigma(\sigma^2-1)} \right] + \varepsilon^2 \left[ 0,74 \frac{B^5 \delta}{(\sigma^2-1)^5 \sigma} \right. \\ \left. + 2,4 \frac{\delta B^3 \bar{n}^2}{\sigma(\sigma^2-1)^3} + 0,95 \frac{\delta B^2 \bar{n}^4}{\sigma(\sigma^2-1)^2} + \left( 2,1 \frac{\delta B^4}{\sigma(\sigma^2-1)^4} \bar{n} + 1,4 \frac{\delta B^2 \bar{n}^3}{\sigma(\sigma^2-1)^2} \right) \cos \bar{\varphi} \right] + \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\bar{n}) = \frac{3\delta B}{8\sigma(\sigma^2-1)} \bar{n}^2 \\ \lambda(\bar{n}) = \frac{9B\delta \bar{n}}{8\sigma(\sigma^2-1)} \end{array} \right. \quad (4.82)$$

$p = 2$

$$(4.83) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{n}} = \varepsilon^2 \left[ -2,93 \frac{\delta^2 B}{\sigma^2(\sigma^2-1)} \bar{n}^4 \sin \bar{\varphi} \right] + \dots \\ \dot{\bar{\varphi}} = \varepsilon \left[ \Delta + \frac{15}{4} \frac{\delta B^2}{\sigma(\sigma^2-1)^2} + \frac{15}{8} \frac{\delta \bar{n}^2}{\sigma} \right] + \varepsilon^2 \left[ 11,42 \frac{\delta^2 B^4}{\sigma^2(\sigma^2-1)^4} + 9,95 \frac{\delta^2 \bar{n}^4}{\sigma^2} \right. \\ \left. + 19,32 \frac{\delta^2 B^2}{\sigma^2(\sigma^2-1)^2} \bar{n}^2 - 2,93 \frac{\delta^2 B}{\sigma^2(\sigma^2-1)} \bar{n}^3 \cos \bar{\varphi} \right] + \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\bar{n}) = -2,93 \frac{\delta^2 B}{\sigma^2(\sigma^2-1)} \bar{n}^4 \\ h(\bar{n}) = -2,93 \frac{\delta^2 B}{\sigma^2(\sigma^2-1)} \bar{n}^3 \end{array} \right. \quad (4.84)$$

$$\mu = 3$$

$$(4.85) \quad \dot{\bar{\lambda}} = \varepsilon^3 \left[ 10,63 \frac{\delta^3 \beta}{\sigma^3(\sigma^2-1)} \bar{\lambda}^6 \sin \varphi \right] + \dots$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}} = & \varepsilon \left[ \Delta + \frac{21}{4} \frac{\beta^2 \gamma}{\sigma(\sigma^2-1)^2} + \frac{21}{8} \frac{\bar{\lambda}^2 \gamma}{\sigma} \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{25 \delta^2 \beta^4}{\sigma^2(\sigma^2-1)^4} + \frac{37,73 \delta^2 \beta^2 \bar{\lambda}^2}{\sigma^2(\sigma^2-1)^2} \right. \\ & + \left. 19,55 \frac{\delta^2 \bar{\lambda}^4}{\sigma^2} \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{90,75 \Delta \delta^2 \beta^4}{\sigma^2(\sigma^2-1)^4} + \frac{396,50 \delta^3 \beta^6}{\sigma^3(\sigma^2-1)^6} \right. \\ & + \frac{194,04 \Delta \delta^2 \beta^2 \bar{\lambda}^2}{\sigma^2(\sigma^2-1)^2} + \frac{1.498,91 \delta^2 \beta^4 \bar{\lambda}^4}{\sigma^2(\sigma^2-1)^4} + \frac{54,88 \Delta \delta^2 \bar{\lambda}^4}{\sigma^2} \\ & \left. + \frac{1.404,56 \delta^3 \beta^2 \bar{\lambda}^4}{\sigma^3(\sigma^2-1)^2} + \frac{376,96 \delta^3}{\sigma^3} \bar{\lambda}^6 + \frac{10,63 \delta^3 \beta}{\sigma^3(\sigma^2-1)} \bar{\lambda}^5 \cos \varphi \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{\lambda}) &= 10,63 \frac{\delta^3 \beta}{\sigma^3(\sigma^2-1)} \bar{\lambda}^6 \\ h(\bar{\lambda}) &= 10,63 \frac{\delta^3 \beta}{\sigma^3(\sigma^2-1)} \bar{\lambda}^5 \end{aligned} \right\} (4.86)$$

### F. introduction d'un terme de freinage

Reintroduisons  $c$  et posons-le égal à  $\varepsilon^h c'$  (4.87)

(4.8) s'écrit :

$$(4.88) \quad \left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \varepsilon R(\lambda, \varphi, t) + \varepsilon^h \left( \frac{c'}{\sigma(\sigma^2-1)} \sin \varphi \sin t + \lambda c' \sin^2 \varphi \right) \\ \dot{\psi} &= \sigma + \varepsilon q(\lambda, \varphi, t) + \varepsilon^h \left( \frac{\beta c'}{\sigma(\sigma^2-1)\lambda} \sin t \cos \varphi + c' \sin \varphi \cos \varphi \right) \end{aligned} \right\}$$

ou encore en tenant compte de (4.12) :

$$(4.89) \quad \left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \varepsilon Z(\lambda, \varphi, t) + \varepsilon^h \left[ \frac{c'}{2\sigma(\sigma^2-1)} \left( \cos \frac{\varphi - 2\mu t}{2\mu+1} - \cos \frac{\varphi + (2\mu+2)t}{2\mu+1} \right) + \frac{\lambda c'}{2} (1 - \cos \frac{2\varphi+2t}{2\mu+1}) \right] \\ \dot{\psi} &= \varepsilon Z'(\lambda, \varphi, t) + \varepsilon^h \left[ \frac{\beta c'}{2\sigma(\sigma^2-1)\lambda} \left( \sin \frac{\varphi + (2\mu+2)t}{2\mu+1} - \sin \frac{\varphi - 2\mu t}{2\mu+1} \right) + \frac{c'}{2} \sin \frac{2\varphi+2t}{2\mu+1} \right] \end{aligned} \right\}$$

avec  $z(\lambda, \varphi, t)$  et  $z'(\lambda, \varphi, t)$  déterminés par (4.14)

En posant  $(\lambda, \varphi) = x$ , le vecteur des seconds membres peut se mettre sous la forme  $P(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^h V(x, t)$

On a donc un système de la forme :

$$\dot{x} = P(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^h V(x, t) \quad (4.90)$$

En effectuant la transformation de Lie définie par le vecteur générateur  $V(x, t, \epsilon)$  que l'on avait introduit dans le cas où  $c$  était nul, on obtient :

$$\dot{y} = \mathcal{L}(w) P(x, t, \epsilon) + \epsilon^h \mathcal{L}(w) V(x, t) \quad (4.91)$$

avec  $y = (\bar{x}, \bar{\psi})$

$$\text{ou } \dot{y} = Q(y, \epsilon) + \epsilon^h \mathcal{L}(w) V(x, t) + O(\epsilon^\nu) \quad (4.92)$$

avec  $\nu > h$

$Q(y, \epsilon)$  défini par (4.16)

$$\mathcal{L}(w) V(x, t) = \epsilon^h V(y, t) + \epsilon^h \sum_{i \geq 1} \epsilon^i V_i(y, t)$$

On peut moyenner maintenant :

$$\dot{y} = Q + \epsilon^h \mathcal{L}(w) V + O(\epsilon^\nu) \text{ jusqu'à l'ordre } \nu$$

Cherchons la première contribution (en  $\epsilon^h$ ) de cette nouvelle transformation.

Pour cela, examinons avec  $\epsilon^h = \mu$  le système

$$\dot{y} = \mu V(y, t) \quad (4.93)$$

Soit le vecteur générateur  $s(y, t, \mu)$  qui définit la transformée de Lie permettant d'effectuer le changement de coordonnées de  $y = (\bar{x}, \bar{\psi})$  vers  $z = (x', \psi')$  de telle façon que les éléments diagonaux du triangle de Lie soient indépendants de  $t$  jusqu'à l'ordre  $m$  (avec  $h, m \geq \nu$ )

$$\text{On aura : } \dot{z} = \mathcal{L}(s) \mu V(y, t) \quad (4.94)$$

$$= \mu \frac{c'}{2} + O(\mu)$$

$$\text{car } P_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P_1^{(0)} = \frac{c'}{20(c^2-1)} \begin{pmatrix} \cos \frac{\bar{\psi}-2\mu t}{2\mu+1} & -\cos \frac{\bar{\psi}+(2\mu+2)t}{2\mu+1} \\ \frac{bc'}{2} \left( \sin \frac{\bar{\psi}+(2\mu+2)t}{2\mu+1} - \sin \frac{\bar{\psi}-2\mu t}{2\mu+1} \right) & + \frac{c'}{2} \sin \frac{2\bar{\psi}+2t}{2\mu+1} \end{pmatrix}$$

En se limitant au 1<sup>er</sup> terme (4.94) s'écrit :

$$\dot{z} = M [P_0^{(1)}(\bar{n}, \bar{\psi}, t)]_{\substack{\bar{n} = n' \\ \bar{\psi} = \psi'}} \quad (4.95)$$

$$\text{ou } \dot{z} = M \begin{pmatrix} \frac{c' n'}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

car  $P_0^{(1)}$  est obtenu en prenant la valeur moyenne par rapport à  $t$  de  $P_1^{(0)}$

Appliquons le changement de coordonnées de  $y$  vers  $z$  (4.92)

$$\text{On a : } \dot{z} = \mathcal{L}(s) Q(y, \varepsilon) + M \begin{pmatrix} \frac{c' n'}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(M) + \mathcal{O}(\varepsilon^\nu) \quad (4.97)$$

$$\text{or } \mathcal{L}(s) Q(y, \varepsilon) = Q(z, \varepsilon) + \sum_{i \geq 1} M^i Q_i(z, \varepsilon) \quad (4.98)$$

$$\text{avec } Q(z, \varepsilon) = [Q(y, \varepsilon)]_{y=z}$$

Donc si l'on suppose  $k < \nu$ , (4.97) devient :

$$\dot{z} = Q(z, \varepsilon) + \mathcal{O}(M) + M \begin{pmatrix} \frac{c' n'}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } \dot{z} = Q(z, \varepsilon) + M \begin{pmatrix} \frac{c' n'}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(M) \quad (4.99)$$

Le système moyenné aura donc la forme (voir 4.80)

$$(4.100) \quad \begin{cases} \dot{n}' = \varepsilon^k [g(n') \sin \psi'] + \varepsilon^k \frac{c' n'}{2} + \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon^i T_i'(n', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^\nu) \\ \dot{\psi}' = \varepsilon \left[ \Delta + 3 n'^2 (2\mu+1) \frac{\delta}{8\sigma} + \frac{3}{4} \theta^2 (2\mu+1) \frac{\delta}{\sigma(\sigma^2-1)^2} \right] + \sum_{i=r}^{\nu} \varepsilon^i S_i'(n', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^\nu) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} r = \text{minimum}(\mu+1, k+1) \\ \nu = \text{minimum}(2, \mu+1, k+1) \end{cases}$$



### § 3. Existence et stabilité de trajectoires périodiques.

#### A. réponse harmonique

Le système initial s'écrivait en coordonnées cartésiennes (voir (4.4))

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[ -\sigma^2 x - \varepsilon \delta \frac{(\beta \cos t + x)^3}{\sigma^2 - 1} + c \left( \frac{-\beta}{(\sigma^2 - 1)} \sin t + x \right) \right] \end{cases}$$

Comme le système linéaire ne possède pas de solution périodique de période  $2\pi$ , le théorème de l'alternative affirme qu'il existe une solution périodique de période  $2\pi$  pour le système complet (voir Hale's "Ordinary Differential Equations" ch IV).

Le système (5.1) moyenné devient :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = F_1(x', y', -, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^\nu) \\ \frac{dy'}{dt} = F_2(x', y', -, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^\nu) \end{cases}$$

$$\text{avec } x = x' + \varepsilon G(x', y', t, \varepsilon) \quad (5.3)$$

Comme  $x$  doit être périodique de période  $2\pi$ ,  $x'$  l'est également.

Or  $x' = r' \cos \psi'$  en vertu du caractère intrinsèque des transformations de Lie avec  $r'$  et  $\psi'$  définis comme suit :

$$(5.4) \quad \begin{cases} \dot{r}' = \varepsilon^h c \frac{r'}{2} + \varepsilon^h g(r') \sin[(2p+1)\psi' - t] + \mathcal{O}(\varepsilon^h) \\ \dot{\psi}' = \frac{1}{2p+1} (\dot{\psi}' - 1) = \frac{\varepsilon}{2p+1} \left( \Delta + \frac{3\delta}{8\sigma} r'^2 (2p+1) \right) + \frac{1}{2p+1} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

Donc  $r' = r'_0 + \varepsilon H(r', \psi', t, \varepsilon)$

$$a) \text{ si } h = p \quad r' = r'_{10} + \varepsilon^h H_1(r', \psi', t) + \mathcal{O}(\varepsilon^h) \quad (5.5)$$

$$b) \text{ si } h > p \quad r' = r'_{20} + \varepsilon^h H_2(r', \psi', t) + \mathcal{O}(\varepsilon^h) \quad (5.6)$$

$$c) \text{ si } h < p \quad r' = r'_{30} + \varepsilon^h H_3(r', \psi', t) + \mathcal{O}(\varepsilon^h) \quad (5.7)$$

$$\text{On a aussi } \psi' = \psi'_0 + \frac{t}{2p+1} + \varepsilon P(r', \psi', t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.8)$$

donc  $\cos \varphi'$  n'engendre pas de terme périodique de période  $2\pi$

$$\text{On } x' = r' \cos \varphi' = r'_{i0} \cos \left( \varphi'_0 + \frac{t}{2\mu+1} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.9)$$

et quel que soit le cas (a), (b) ou (c) il faudra que  $r'_{i0} = 0$  pour que  $x'$  soit périodique de période  $2\pi$

Donc: (a):  $r'$  sera au moins de l'ordre de  $\varepsilon^k$

(b): même conclusion

(c):  $r'$  sera au moins de l'ordre de  $\varepsilon^k$

ce qui ne sera pas le cas, comme nous le verrons plus tard pour les trajectoires sous harmoniques.

Examinons la stabilité asymptotique de cette solution périodique de période  $2\pi$ .

L'équation (4.3) peut encore s'écrire :

$$\ddot{x}(t) = g(x, t, \varepsilon) + c \dot{x} \quad (5.10)$$

$$\text{avec } g(x, t, \varepsilon) = -\sigma^2 x - \varepsilon \left( \frac{\beta}{\sigma^2 - 1} \cos t + x \right)^3 + c \left( \frac{\beta}{\sigma^2 - 1} \sin t \right) \quad (5.11)$$

Le système  $\ddot{x}(t) = g(x, t, \varepsilon)$

peut se ramener à un système hamiltonien avec

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x g(y, t, \varepsilon) dy \quad (5.12)$$

Aucune trajectoire périodique de ce système ne pourra être asymptotiquement stable car l'équation aux variations d'un système hamiltonien engendre un système hamiltonien linéaire qui ne peut jamais être asymptotiquement stable. La stabilité asymptotique dépendra alors du terme  $c \dot{x}$

6. théorème de prolongement des solutions périodiques

Soit un système tronqué  $\dot{x} = f(x, t, \epsilon)$  (5.13)

le système complet  $\dot{y} = f(y, t, \epsilon) + \epsilon^{\nu+1} g(y, t, \epsilon)$  (5.14)

avec  $f$  et  $g$  périodiques de période  $T$  (5.15)

Supposons que l'on a une solution périodique de période  $T$  de (5.13) : appelons-la  $x^*(t, \epsilon)$  (5.16)

et que les multiplicateurs caractéristiques ont la forme

$$1 + \epsilon^{h_i} m_i(\epsilon) \quad (5.17)$$

$$\text{avec } |h_i| \geq 0 \quad (5.18)$$

$$m_i(0) \neq 0 \quad (5.19)$$

(remarquons que cette condition exprime qu'aucun multiplicateur ne sera égal à 1 sauf éventuellement pour  $\epsilon = 0$  puisque dans ce cas, comme les exposants caractéristiques sont proportionnels à  $\epsilon$ , les multiplicateurs sont égaux à 1).

On supposera encore que  $f, g, x^*$  sont analytiques dans une boule de centre 0 et de rayon  $\epsilon_0$ .

$M = \nu - h > 0$  et  $\nu > 2h$  (conditions qui apparaîtront dans la démonstration)

$$\text{où } h = \sum_{i=1}^m h_i$$

Nous allons montrer que (5.14) possède une solution périodique de période  $T$

Soit  $z$  défini par  $y = x^*(t, \epsilon) + \epsilon^M z$  (5.20)

(5.14) s'écrit :  $\dot{x}^* + \epsilon^M \dot{z} = f(x^* + \epsilon^M z, t, \epsilon) + \epsilon^{\nu+1} g(z, t, \epsilon)$  (5.21)

$$\text{où } \epsilon^M \dot{z} = f(x^* + \epsilon^M z, t, \epsilon) - f(x^*, t, \epsilon) + \epsilon^{\nu+1} g(z, t, \epsilon) \quad (5.22)$$

Si l'on développe le second membre de (5.22) en série de Taylor autour de  $x = x^*$ , on obtient :

$$\varepsilon^M \dot{z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*} \varepsilon^M z + \varepsilon^{2M} h_1(z, t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu+1} g(z, t, \varepsilon) \quad (5.23)$$

où  $\varepsilon^{2M} h_1(z, t, \varepsilon)$  est le reste de la série  
 $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*}$  est une matrice périodique

$$\text{ou encore } \dot{z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*} z + \varepsilon^M h_1(z, t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu+1-M} g(z, t, \varepsilon) \quad (5.24)$$

On supposera en outre que  $M < \nu+1$  (5.25)

ce qui n'est pas restrictif car on peut choisir  $\nu$   
 aussi élevé qu'on veut

Si l'on parvient à trouver une solution périodique  $z(t)$  de  
 période  $T$  de (5.24) alors  $y(t)$  sera une solution périodique  
 de période  $T$  de (5.18) car  $x(t)$  est de période  $T$ .

Montrons que à toute condition initiale  $z_0$  qui appartient  
 à un compact, on peut associer  $z(t)$  périodique de période  $T$   
 pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Si  $R(T, 0)$  représente la matrice principale du système  
 linéaire  $\dot{z} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*} z$  (5.26)

alors la solution générale de (5.24) s'écrit implicitement  
 $z(t) = R(T, 0) z_0 + \int_0^t R(t, \sigma) [\varepsilon^M h_1(z, t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu+1-M} g(z, t, \varepsilon)] d\sigma$  (5.27)

Cette équation implicite admet une solution  $z(t)$  définie  
 dans l'intervalle  $[0, T]$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit (théorème  
 8.4 p. 36 "Theory of Ordinary Differential Equations" by  
 Coddington and Levinson).

La condition de périodicité de  $z(t)$  s'écrit  $z(T) = z(0)$  c'est  
 à dire :  $[R(T, 0) - I] z_0 + \varepsilon^M h_2(z_0, T, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu+1-M} h_3(z_0, T, \varepsilon) = 0$  (5.28)  
 avec  $h_2$  et  $h_3$  qui sont des fonctions analytiques en  $\varepsilon$ ,

obtenues par intégration de  $h_1$  et  $g$  (elles-mêmes des fonctions analytiques).

Les valeurs propres de  $R(T, 0)$  (c'est à dire les multiplicateurs caractéristiques) étant  $1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon)$ , les valeurs propres de  $[R(T, 0) - I]$  sont  $\varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon)$ .

Le déterminant de  $[R(T, 0) - I]$  étant égal au produit des valeurs propres on a :

$$\det [R(T, 0) - I] = \varepsilon^{h_2} m(\varepsilon) \quad (5.29)$$

$$\text{avec } h_2 = \sum_{i=1}^m h_i \quad (5.30)$$

$$m(\varepsilon) = \prod_{i=1}^m m_i(\varepsilon) \quad (5.31)$$

Pour  $\varepsilon \neq 0$ , ce déterminant est  $\neq 0$  car comme  $m_i(0) \neq 0$ ,  $m_i(\varepsilon)$  est  $\neq 0$  pour  $\varepsilon$  dans un intervalle suffisamment petit autour de l'origine soit  $D$ .

Donc  $[R(T, 0) - I]^{-1}$  existe dans  $D$  (sauf à l'origine) et sera composé d'éléments de la forme  $\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{h_2}}$  avec  $B(\varepsilon)$

fonction analytique en  $\varepsilon$  car composée d'une somme de produits de fonctions analytiques en  $\varepsilon$ .

$$\text{Soit } A(\varepsilon) = \varepsilon^{h_2} [R(T, 0) - I]^{-1} \quad (5.32)$$

comme  $[R(T, 0) - I]^{-1}$ , c'est une fonction analytique dans  $D$  mais aussi à l'origine (pour  $\varepsilon = 0$ ).

En multipliant par  $A(\varepsilon)$ , (5.28) devient :

$$z_0 + A(\varepsilon) [\varepsilon^{M-h_2} h_2(z_0, T, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu+1-M-h_2} h_3(z_0, T, \varepsilon)] = 0 \quad (5.33)$$

$$\text{Or } \begin{cases} M = \nu - h_2 \\ \nu > 2h_2 \end{cases}$$

$$\text{et en posant } h'_2 = (\nu - 2h_2 - 1) h_2 \quad (5.34)$$

$$\text{on a : } z_0 + A(\varepsilon) [\varepsilon^{h'_2} h_2 + \varepsilon^{h_3}] = 0 \quad (5.35)$$

$$(car \mu - k = \nu - k > 0)$$

Montrons qu'il existe  $z_0(\varepsilon)$  (5.35) soit vérifiée

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites.

a) pour  $\varepsilon = 0$ ,  $z_0 = 0$  est solution de (5.35)

b) la jacobienne par rapport à  $z$  de  $z_0 + A(\varepsilon)[\varepsilon h'_2 + \varepsilon h'_3]$  en  $\varepsilon = 0$  est l'identité et son déterminant est  $\neq 0$

c)  $z_0 + A(\varepsilon)[\varepsilon h'_2 + \varepsilon h'_3]$  est analytique en  $\varepsilon$  dans  $D$

On a donc l'existence d'une solution  $z_0(\varepsilon)$  analytique en  $\varepsilon$  et elle sera de la forme  $\varepsilon z_0^*(\varepsilon)$  car elle doit tendre vers 0 si  $\varepsilon$  tend vers 0 ; de plus on a :

$$y - x^* = \varepsilon^{\nu - k + 1} z_0^*(\varepsilon) \quad (5.36)$$

#### § 4 Trajectoires sous harmoniques dans le cas de résonance et $k = \nu$

##### A. conditions d'existence de ces trajectoires

Nous allons tout d'abord montrer l'existence de trajectoires périodiques pour le système tronqué à l'ordre  $\nu$  ; celui-ci s'écrit lorsque  $k = \nu$  (voir (4.100)) :

$$(5.37) \quad \begin{cases} \dot{\rho}' = \varepsilon^\mu \left[ q(\rho') \sin \psi' + \frac{c' \rho'}{2} \right] + \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon^i T_i(\rho', \psi', -) \\ \dot{\psi}' = \varepsilon \left[ \Delta_\mu + 3\rho'^2 (2\mu + 1) \frac{\delta}{8\sigma} \right] + \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon^i S_i(\rho', \psi', -) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma = \mu + 1 \\ \nu = 2 \\ \Delta_\mu = \Delta + \frac{3\sigma^2 (2\mu + 1) \delta}{4\sigma(\sigma^2 - 1)} \end{cases}$$

Supposons qu'il existe  $(\rho'_0, \psi'_0)$  tel que :

$$\begin{aligned}
 (5.38) \quad & g(n'_0) \sin \psi_0 + c' n'_0 = 0 \\
 (5.39) \quad & \Delta k + 3n'_0 \frac{\delta}{r} = 0 \\
 (5.40) \quad & \text{et que } n'_0 g(n'_0) \cos \psi_0 \neq 0
 \end{aligned}$$

théorème il existe  $(n(\epsilon), \psi(\epsilon))$  tel que :

$$\begin{aligned}
 (5.41) \quad & \epsilon^r [g(n(\epsilon)) + c' n(\epsilon)] + \sum_{i=0}^{p+q-1} \epsilon^i T_i(n(\epsilon), \psi(\epsilon)) = 0 \\
 (5.42) \quad & \epsilon^r [\Delta k + 3n^2(\epsilon) \frac{\delta}{r} + \sum_{i=0}^q \epsilon^i S_i(n(\epsilon), \psi(\epsilon))] + \sum_{i=0}^{p+q-1} \epsilon^i S_{i+q}^*(n(\epsilon), \psi(\epsilon)) = 0
 \end{aligned}$$

Soit que ceci soit vrai, il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned}
 (5.43) \quad & T_i(n(\epsilon), \psi(\epsilon)) = 0 \\
 (5.44) \quad & S_i(n(\epsilon), \psi(\epsilon)) = 0
 \end{aligned}$$

(car il suffira de multiplier (5.43) par  $\epsilon^r$  pour avoir (5.41) et (5.44) pour  $\epsilon$  pour obtenir (5.42))

Soit étalon (5.43) et (5.44), il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

Mais comme rien dans les conditions d'application de ce théorème :

a) par hypothèse (5.32) et (5.39) :  $F(n'_0, \psi_0) | T_i(n'_0, \psi_0, 0) = 0$

en effet  $T_i(n'_0, \psi_0, 0) = g(n'_0) \sin \psi_0 + c' n'_0 = \Delta k + 3n'^2_0 \frac{\delta}{r} = 0$

b) voyons que le déterminant de la jacobienne

$$\left[ \begin{array}{c} D(T_i(n', \psi', \epsilon)) \\ D(n', \psi') \end{array} \right]_{\substack{n' = n'_0 \\ \psi' = \psi_0 \\ \epsilon = 0}} \text{ est } \neq 0$$

ce déterminant est égal à :

$$\left| \begin{array}{c} g(n'_0) \sin \psi_0 + c' n'_0 \\ \Delta k + 3n'^2_0 \frac{\delta}{r} \end{array} \right| \frac{1}{2} (2p+1) \delta n'_0$$

$$\text{avec } \dot{g}(\nu) = \frac{dg(\nu')}{d\nu'} \quad (5.46)$$

$$= \frac{3}{4\sigma} (2\mu + 1) \delta \nu'_0 g(\nu'_0) \cos \psi'_0 \quad (5.47)$$

et ceci est  $\neq 0$  (voir (5.40))

Le théorème des fonctions implicites affirme alors que  $\exists (\nu'(\varepsilon), \psi'(\varepsilon))$  analytique en  $\varepsilon$  (car  $T'(\nu', \psi', \varepsilon)$  et  $S'(\nu', \psi', \varepsilon)$  sont analytiques en  $\varepsilon$ )

$$\left. \begin{array}{l} T'(\nu', \psi', \varepsilon) = 0 \\ S'(\nu', \psi', \varepsilon) = 0 \end{array} \right\}$$

dans un voisinage de  $\varepsilon = 0$

c'est à dire  $\exists (\nu'(\varepsilon), \psi'(\varepsilon))$  tel que  $\left. \begin{array}{l} \nu' = 0 \\ \psi' = 0 \end{array} \right\}$

pour le système tronqué à l'ordre  $\nu$

remarques

a) si  $\mu = 1$ , (5.38), (5.39) et (5.40) deviennent respectivement

$$g(\nu'_0) \sin \psi'_0 + \frac{c' \nu'_0}{2} = 0 \quad (5.48)$$

$$\Delta \mu + \frac{g}{8} \frac{\delta \nu'^2_0}{\sigma} + h(\nu'_0) \cos \psi'_0 = 0 \quad (5.49)$$

$$\nu'^2_0 \neq \frac{4}{8^2 \beta^2 \sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} c'^2} \quad (5.50)$$

ou encore :

$$3\delta \beta \nu'_0 \sin \psi'_0 + \frac{c'}{2} = 0 \quad (5.51)$$

$$\Delta \mu + \frac{g \delta \nu'^2_0}{8\sigma} + \frac{g}{8} \frac{\theta \delta \nu'_0 \cos \psi'_0}{\sigma(\sigma^2 - 1)} = 0 \quad (5.52)$$

$$\nu'^2_0 \neq \frac{4}{8^2 \beta^2 \sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} c'^2} \quad (5.53)$$

b) quand on a déterminé  $\nu'_0$  à partir de (5.39),

la condition (5.38) donne :  $\sin \psi'_0 = -\frac{c'}{2g(\nu'_0)}$



et on a ainsi 2 solutions  $(\psi'_{01}$  et  $\psi'_{02} = \pi - \psi'_{01}$ ) ;  
 il faut aussi que  $-1 \leq \frac{e'}{2g(r'_0)} \leq 1$  ou  $|e'| \leq 2|g(r'_0)|$   
 $\psi'$  étant égal à  $(2p+1)\psi' - t$ , on voit qu'à chaque  
 solution  $(r'_0, \psi'_0)$  correspondent  $(2p+1)$  déterminations  
 en  $(r, \psi)$  et donc en  $(x, y)$

Si  $r' = \psi' = 0$  pour le système tronqué, alors si on  
 repasse en coordonnées cartésiennes, cela correspondra  
 à une trajectoire périodique de période  $(2p+1)2\pi$  (c'est  
 à dire de période multiple de celle du terme forçant)  
 pour le système tronqué.

En effet : la coordonnée cartésienne  $x$  est égale à  $r \cos \psi$   
 avec les deux transformations de Lie définies par les  
 vecteurs  $W$  et  $S$ ,  $r \cos \psi$  s'exprime sous la forme  
 d'une fonction  $d(r', \psi', t)$  ou encore  $d(x', y', t)$  (en  
 posant  $x' = r' \cos \psi'$  et  $y' = -r' \sin \psi'$ ) si l'on tient compte  
 du caractère intrinsèque des transformations de Lie.

Donc  $x = d(x', y', t)$  où  $d$  est une fonction analytique  
 en  $x', y'$ . Or par définition  $\psi' = (2p+1)\psi' - t$

$$\text{donc } \dot{\psi}' = \frac{1}{2p+1} \quad (5.54)$$

$$\text{d'où } \psi' = \frac{1}{2p+1} t + \psi'_0 \quad (5.55)$$

$$\text{et } \begin{cases} x' = r' \cos \left( \frac{1}{2p+1} t + \psi'_0 \right) & (5.56) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -r' \sin \left( \frac{1}{2p+1} t + \psi'_0 \right) & (5.57) \end{cases}$$

$x'$  et  $y'$  sont donc périodiques en  $t$  de période  $(2p+1)2\pi$  et  $x$  est  
 ainsi périodique en  $t$  de période  $(2p+1)2\pi$ . De plus  $x$  est  
 analytique en  $\varepsilon$  par construction.

On a donc prouvé l'existence de trajectoires périodiques de période  $(2p+1) 2\pi$  pour le système tronqué.

Nous allons maintenant appliquer le théorème de prolongement des solutions périodiques (§3.B) à notre système et ceci établira l'existence de trajectoires périodiques de période  $(2p+1) 2\pi$  pour le système complet en coordonnées cartésiennes et donc pour l'équation de Duffing (4.1).

Dans notre cas, on a un système tronqué de la forme (voir 5.37)

$$(5.58) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{n}' &= \varepsilon^k \left[ g(n') \sin \psi' + \frac{c'n'}{2} \right] + \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon^i T'_i(n', \psi', -) = \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon^i T'_i \\ \dot{\psi}' &= \varepsilon \left[ \Delta_p + 3n'^2 (2p+1) \frac{\gamma}{8\sigma} \right] + \sum_{i=N-1}^{\nu} \varepsilon^i S'_i(n', \psi', -) = \sum_{i=N-1}^{\nu} \varepsilon^i S'_i \end{aligned} \right.$$

Nous sommes bien dans les hypothèses du théorème (§3.B):

- les seconds membres sont analytiques en  $\varepsilon$

- la fonction  $g$  est ici: 
$$\left( \begin{array}{l} \sum_{i \geq \nu+1} \varepsilon^{i-\nu-1} T'_i(n', \psi', \varepsilon) \\ \sum_{i \geq \nu+1} \varepsilon^{i-\nu-1} S'_i(n', \psi', \varepsilon) \end{array} \right)$$

- on a établi qu'il existe une solution périodique, du système tronqué, qui est analytique en  $\varepsilon$  de période  $(2p+1) 2\pi$

prenons par exemple celle définie par

$$(5.59) \quad \left\{ \begin{aligned} n' &= n'_1(\varepsilon) \\ \psi' &= \psi'_1(\varepsilon) \end{aligned} \right.$$

(5.37) peut alors s'écrire en développant le vecteur des seconds membres en série de Taylor autour

$$\text{de } \left\{ \begin{aligned} n' &= n'_1 \\ \psi' &= \psi'_1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}' \\ \dot{\psi}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda' - \lambda'_1 \\ \psi' - \psi'_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda' - \lambda'_1, \psi' - \psi'_1) \quad (5.60)$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\mu} \left[ \dot{g}(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu}) & \varepsilon^{\mu} g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu}) \\ \varepsilon \frac{3}{4\sigma} (2\mu+1) \delta \lambda'_1 + \mathcal{O}(\varepsilon) & \varepsilon^{\mu} h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu}) \end{pmatrix} \Big|_{\substack{\lambda'_1 \\ \psi'_1}}$$

le terme  $\varepsilon^{\mu} h(\lambda'_1) \sin \psi'_1$  résulte du fait que le premier terme qui dépend de  $\psi$  dans la seconde équation de (5.37) intervient à l'ordre  $\mu$  (voir (4.80).)

la dernière condition d'application du théorème est de voir que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$ , alors  $e^{\lambda T}$  (le multiplicateur caractéristique correspondant) doit avoir la forme  $1 + \varepsilon^k m(\varepsilon)$  avec

$$\begin{cases} m(0) \neq 0 \\ T = (2\mu+1) 2\pi \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{puisque dans notre cas} \\ \text{la période est } (2\mu+1) 2\pi \end{array} \right)$$

si  $\mu > 1$ :

les valeurs propres de  $M$  sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left\{ \varepsilon^{\mu} \left[ \dot{g}(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right] + h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu}) & \\ - \varepsilon^{\mu+1} \left[ \frac{3}{4\sigma} (2\mu+1) \delta \lambda'_1 g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu+1}) & = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\varepsilon^{\mu}}{2} \left[ \dot{g}(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu}) \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{3}{\sigma} (2\mu+1) \delta \lambda'_1 g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 \right] \varepsilon^{\mu+1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mu+1})} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{ou } \lambda = \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{\mu+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2\mu+1) \delta \lambda'_1 g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{2}})} \quad (5.)$$

$$\text{donc } e^{\lambda T} = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{\mu+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2\mu+1) \delta \lambda'_1 g(\lambda'_1) \cos \psi'_1} T + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{2}})$$

$$\text{soit } \varepsilon^{\frac{p+1}{2}} = M^{p+1} \quad (5.66)$$

$$\text{avec } M = \varepsilon^{1/2} \quad (5.67)$$

(5.65) devient :

$$e^{\lambda T} = 1 + \frac{1}{2} M^{p+1} T \sqrt{\frac{3}{6} (2p+1) \delta \lambda'_1(M) g(\lambda'_1(M)) \cos \psi'_1(M)} + O(M^{p+2}) \quad (5.68)$$

on a donc bien la forme voulue pour les multiplicateurs caractéristiques :  $1 + M^k m(M)$  (en posant  $k = p+1$ ) ; mais il faut encore exiger que  $m(0) \neq 0$  c'est à dire :

$$\frac{3}{6} (2p+1) \delta \lambda'_1(0) g(\lambda'_1(0)) \cos \psi'_1(0) \neq 0$$

$$\text{ou encore comme } \begin{cases} \lambda'_1(0) = \lambda'_0 \\ \psi'_1(0) = \psi'_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda'_0 g(\lambda'_0) \cos \psi'_0 \neq 0} \quad (5.69)$$

( $\delta$  étant supposé  $\neq 0$ )

donc sous cette condition, les hypothèses du théorème sont vérifiées et on a une trajectoire périodique de période  $(2p+1) 2\pi$  pour le système complet.

remarques

a) la condition (5.69) avait déjà été imposée pour assurer l'existence d'un zéro au système tronqué à l'ordre  $\nu$  en coordonnées  $(\lambda, \psi)$

b) lorsque  $p=2$  ou  $p=3$ , (5.69) s'écrit  $\cos \psi'_0 \neq 0$  (en excluant ici le cas  $\lambda'_0=0$ )

si  $p=1$ :

les valeurs propres de  $M$  sont les racines de :

$$\lambda^2 - \lambda \left[ \varepsilon \left( \dot{g}(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} + h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 \right) + \theta(\varepsilon) \right] \\ - \varepsilon^2 \left[ g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 \cdot \frac{9}{4\sigma} \delta \lambda'_1 - \dot{g}(\lambda'_1) h(\lambda'_1) \sin^2 \psi'_1 - \frac{c'}{2} h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 \right] + \theta(\varepsilon)$$

c'est à dire :

$$\lambda = \frac{\varepsilon \left[ \left( \dot{g}(\lambda'_1) + h(\lambda'_1) \right) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right] \pm \sqrt{\left( \dot{g}(\lambda'_1) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} + h(\lambda'_1) \sin \psi'_1 \right)^2 \\ + \frac{9\delta}{\sigma} g(\lambda'_1) \cos \psi'_1 \cdot \lambda'_1 - 4 \dot{g}(\lambda'_1) h(\lambda'_1) \sin^2 \psi'_1 - 2c' h(\lambda'_1) \sin \psi'_1}}{2} + \theta(\varepsilon) \\ = \frac{\varepsilon \left[ \left( \dot{g}(\lambda'_1) + h(\lambda'_1) \right) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right] \pm \sqrt{\frac{c'^2}{4} + \sin \psi'_1 (c' \dot{g}(\lambda'_1) - c' h(\lambda'_1)) \\ + \sin^2 \psi'_1 \left[ \left( \dot{g}(\lambda'_1) - h(\lambda'_1) \right)^2 \right] + \frac{9\delta}{\sigma} \lambda'_1 g(\lambda'_1) \cos \psi'_1}}{2} + \theta(\varepsilon)$$

or lorsque  $\mu = 1$ , on a (voir (4.82)) :

$$g(\lambda') = \frac{3\delta B \lambda'^2}{8\sigma(\sigma^2 - 1)}$$

$$\dot{g}(\lambda') = \frac{3\delta B \lambda'}{4\sigma(\sigma^2 - 1)}$$

$$h(\lambda') = \frac{9\delta B \lambda'}{8\sigma(\sigma^2 - 1)}$$

$$\text{d'où } \lambda = \varepsilon \left[ \frac{15\delta B \lambda'_1}{16\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \psi'_1 + \frac{c'}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c'^2}{4} - \frac{3c'\delta B \lambda'_1 \sin \psi'_1}{8\sigma^2(\sigma^2 - 1)}} \right] \\ + \frac{27\delta^2 B \lambda'^3 \cos \psi'_1}{8\sigma^2(\sigma^2 - 1)} + \frac{9\delta^2 B^2 \lambda'^2 \sin^2 \psi'_1}{64\sigma^2(\sigma^2 - 1)^2} + \theta(\varepsilon) \quad (5.70)$$

$$\text{et } e^{\lambda T} = 1 + \varepsilon \lambda T + \theta(\varepsilon)$$

on a ainsi la forme voulue pour les multiplicateurs caractéristiques :  $1 + \varepsilon^h m(\varepsilon)$  mais il faut encore exiger que  $m(0) \neq 0$  c'est à dire :

$$\frac{15\delta B \lambda'_0}{16\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \psi'_0 + \frac{c'}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c'^2}{4} - \frac{3c'\delta B \lambda'_0 \sin \psi'_0}{8\sigma(\sigma^2 - 1)}} \\ + \frac{27\delta^2 B \lambda'^3 \cos \psi'_0}{8\sigma^2(\sigma^2 - 1)} + \frac{9\delta^2 B^2 \lambda'^2 \sin^2 \psi'_0}{64\sigma^2(\sigma^2 - 1)^2} \neq 0 \quad (5.71)$$

des exemples suivants sont illustrés ces résultats.

l'ordre  $n$

l'opérateur différentiel de période  $2\pi$  lorsque  $\Delta$

que l'on veut s'attendre à retrouver dans la

l'ordre  $n$  lorsque  $\Delta$  l'ordre  $n$ , c'est à dire

$$\text{Période } (2k+1)2\pi, \text{ on a } n_0' = -\frac{8\Delta k}{3(2k+1)} \text{ et donc}$$

$n_0' = \varphi' = 0$  correspond à une opérateur différentiel de

si l'on annule  $\varphi'$  au  $1^{\text{er}}$  ordre (supposons que

$$\varphi' = \varepsilon (\Delta k + 3n_0' (2k+1) + \theta(\varepsilon))$$

$$n_0' = \varepsilon^2 g(n_0', \varphi') + \theta(\varepsilon k)$$

l'opérateur différentiel final en coordonnées  $(n_0', \varphi')$  s'écrit :

restent les mêmes que dans le cas  $k=1$ )

du système de prolongement des solutions périodiques

est vérifiée (les autres conditions d'application

l'ordre  $6\pi$  pour le système complet lorsque (5.74)

l'ordre  $k=1$ , on a donc une solution périodique de

$$c_1^2 \neq 72 \left( 8^2 \theta_{1,3} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{8^4 \theta_{1,6}^2 n_0'^4}{1 + 8^4 \theta_{1,6}^2 n_0'^4} + \frac{\sigma^4}{256 \sigma^4 (6^2 - 1)^2}} \right) \quad (5.74)$$

et en développant :

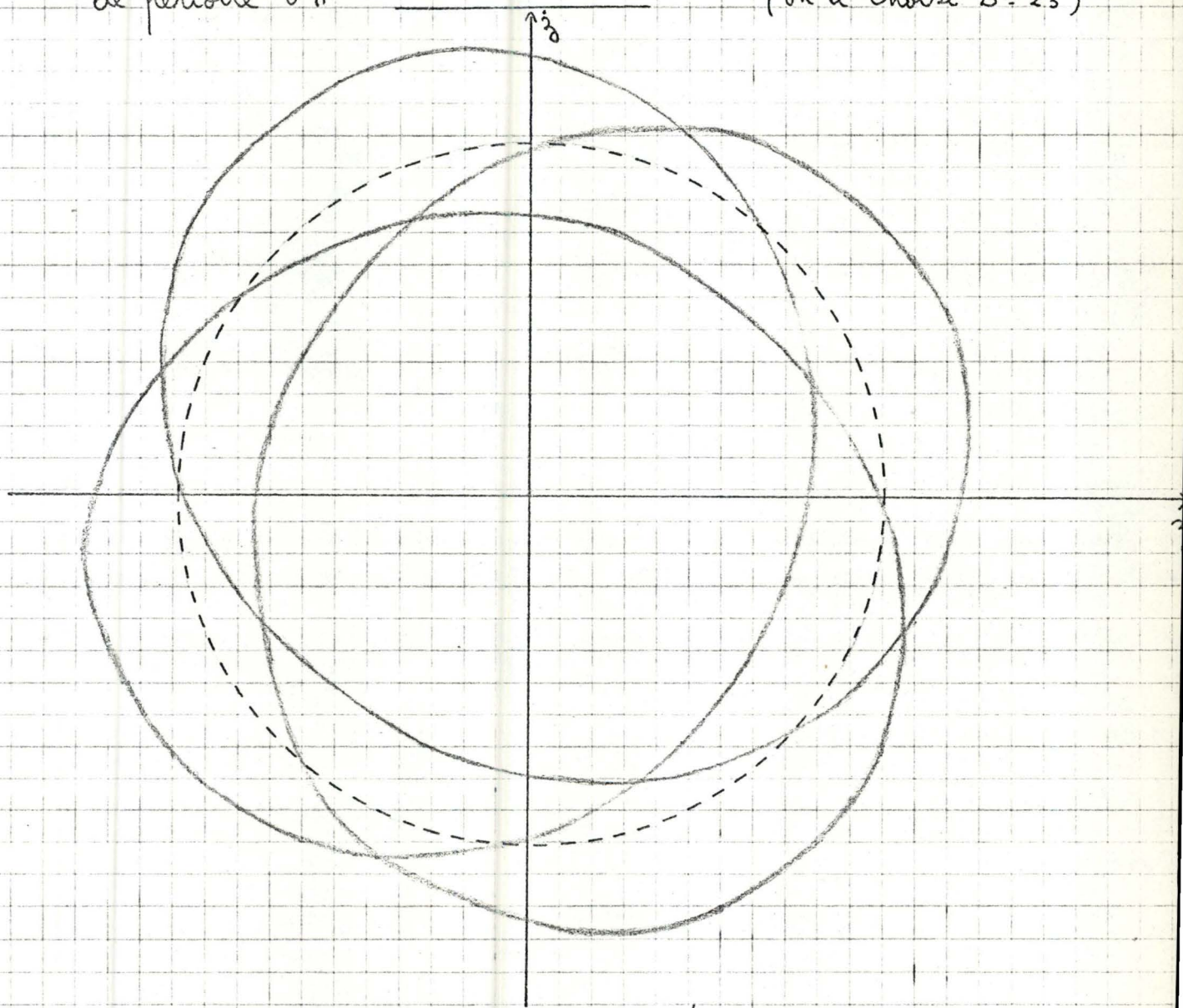
$$m - 3c_1^2 \pm \frac{4}{32 \sigma^2 (6^2 - 1)} \sqrt{1 + 16 \sigma^2 (6^2 - 1)^2 c_1^2} \cdot \frac{1}{9 \sigma^2 \theta_{1,6}^2 n_0'^2} \quad (5.73)$$

$$-c_1^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{c_1^2 + \frac{27 \sigma^2 \theta_{1,3} \cos \varphi_0'}{8 \sigma^2 (6^2 - 1)}} \neq 0 \quad (5.72)$$

$$\text{on trouve comme au } \varphi_0' = -\frac{4(6^2 - 1)\sigma c_1}{3 \theta_{1,6} n_0'}$$

a) Représentation (au premier ordre et dans le cas où  $\mu = h = 1$ )  
 dans le plan de phase de la trajectoire périodique  
 de période  $2\pi$  -----

et de la trajectoire périodique (correspondant à  $\pi'_0 = -\frac{8}{27}$  et  $\psi'_0 = \frac{\pi}{2}$ )  
 de période  $6\pi$  ----- (on a choisi  $\Delta = 23$ )



-----

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = -\frac{9}{8} \cos t + \frac{8}{27} \sin \frac{t}{3} \\ \ddot{z} = \frac{9}{8} \sin t + \frac{8}{27} \cos \frac{t}{3} \end{array} \right.$$

-----

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = -\frac{9}{8} \cos t \\ \ddot{z} = \frac{9}{8} \sin t \end{array} \right.$$

b) Mouvement dans le voisinage des solutions périodiques (dans le cas où  $p=1$  et  $k>1$ ), si l'on tronque au premier ordre.

Comme le système tronqué a la forme :

$$\begin{cases} \dot{r}' = \varepsilon \left[ \frac{3}{8} \frac{\gamma B \lambda'^2}{\sigma(\sigma^2-1)} \sin \psi' \right] \\ \dot{\psi}' = \varepsilon \left[ \Delta_p + \frac{9}{8\sigma} \gamma \lambda'^2 + \frac{9}{8} \frac{\gamma B \lambda'}{\sigma(\sigma^2-1)} \cos \psi' \right] \end{cases}$$

Les points correspondant à des trajectoires périodiques sont déterminés par :

$$\begin{cases} \psi' = 0 \\ \Delta_p + \frac{9}{8\sigma} \gamma \lambda'^2 + \frac{9}{8} \frac{\gamma B \lambda'}{\sigma(\sigma^2-1)} \cos \psi' = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \psi' = 0 \text{ et } \lambda' = -0,43 \\ \psi' = 0 \text{ et } \lambda' = 0,77 \end{cases}$$

$$\text{si l'on pose } \gamma = -\frac{8}{9}, \quad B = \frac{8}{27}, \quad \Delta_p = 1$$

Une intégrale première du système tronqué au premier ordre

$$\text{est : } \Delta_p + \log r' + \frac{9}{16} \frac{\gamma \lambda'^2}{\sigma} + \frac{3}{8} \frac{\gamma B \lambda' \cos \psi'}{\sigma(\sigma^2-1)} = E$$

et avec le choix des constantes elle est représentée par les courbes  $\log r' - \frac{3}{2} \lambda'^2 + \frac{\lambda'}{3} \cos \psi' = E$  (où  $E$  est une constante)

Nous allons représenter ces courbes dans le plan  $(x, y)$  avec

$$x = r' \cos \psi'$$

$$y = r' \sin \psi'$$

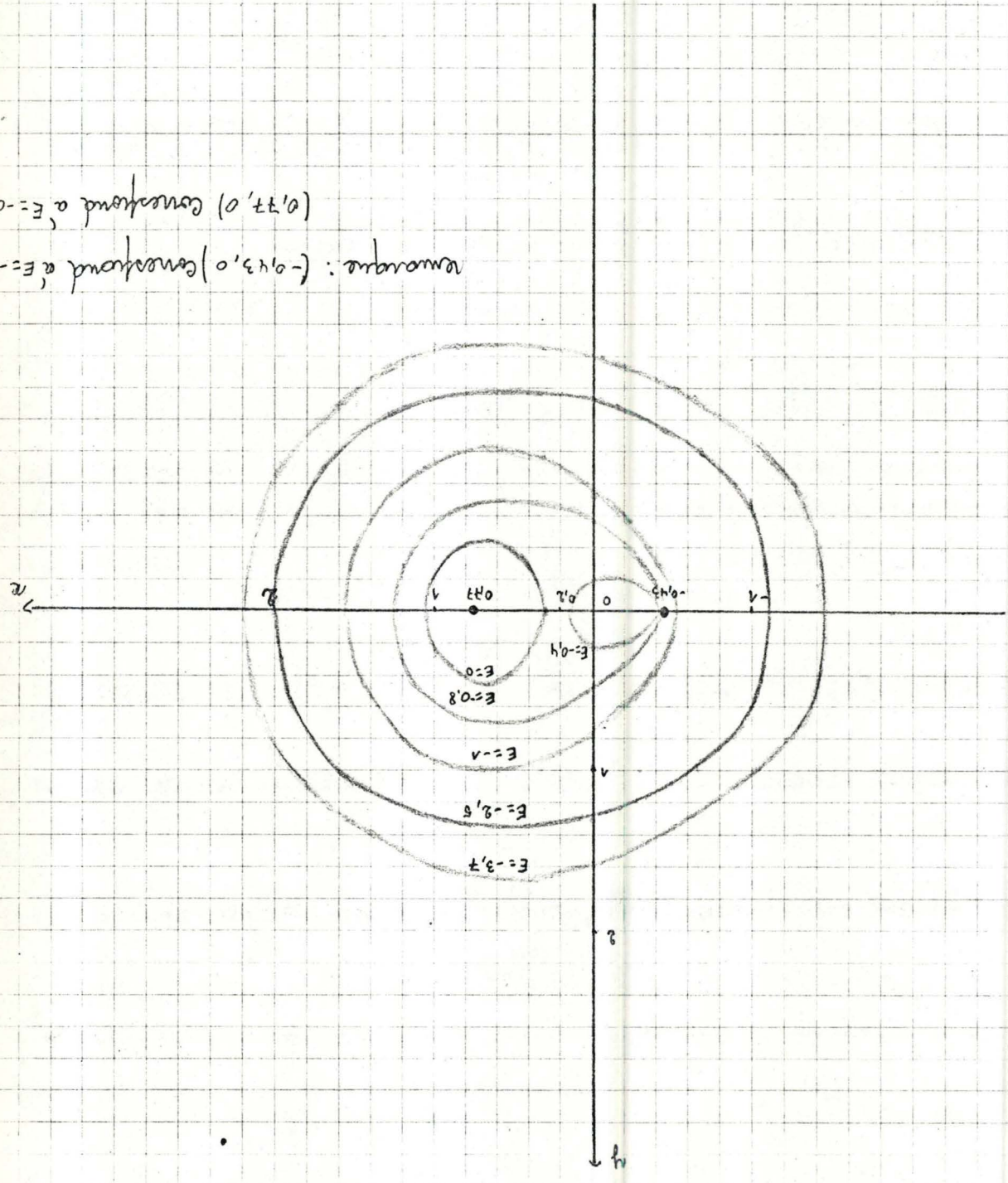
Les points  $(0,77,0)$  et  $(-0,43,0)$  correspondent à des trajectoires périodiques.

On a donc les courbes :

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{3}{2} (x^2 + y^2) + \frac{x}{3} = E$$



Eigenwerte:  $(-0,43, 0)$  Eigenvektor  $\alpha = (-0,43, 1)$   
 $(0,77, 0)$  Eigenvektor  $\alpha = (-0,65, 1)$



## B. stabilité de ces trajectoires

lemme : à toute solution périodique asymptotiquement stable de période  $T$  de (5.13) correspond une solution périodique asymptotiquement stable de période  $T$  de (5.14)

Puisque l'on a établi le théorème de prolongement (§ 3. B), il reste à montrer que la solution périodique de période  $T$  de (5.14) est asymptotiquement stable.

Si  $x^*(t, \varepsilon)$  est la solution périodique de (5.13), l'équation aux variations de (5.13) s'écrit :

$$\dot{x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x^*} (x - x^*) + O(x - x^*) \quad (5.75)$$

et comme  $y^* - x^* = \varepsilon^{\nu-h+1} z_0^*(\varepsilon)$  (voir (5.36)), l'équation aux variations de (5.14) s'écrit :

$$\dot{y} = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=x^* + \varepsilon^{\nu-h+1} z_0^*(\varepsilon) = y^*} \right] (y - y^*) + O(y - y^*) \quad (5.76)$$

ou encore :

$$\dot{y} = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=x^*} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{y=x^*} \varepsilon^{\nu-h+1} z_0^*(\varepsilon) \right] (y - y^*) + O(y - y^*) \varepsilon^{\nu-h+1}$$

En posant :  $A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^*}$  (5.78)

$$B = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{y=x^*} z_0^*(\varepsilon) \quad (5.79)$$

(5.75) et (5.77) deviennent respectivement :

$$\dot{x} = A(x - x^*) + O(x - x^*) \quad (5.80)$$

$$\dot{y} = A(y - y^*) + \varepsilon^{\nu-h+1} B(y - y^*) + O(\varepsilon^{\nu-h+1} (y - y^*)) \quad (5.81)$$

Par continuité des solutions et comme  $\varepsilon^{\nu-h+1} (y - y^*) = O(\varepsilon^{\nu-h})$

$$y(t) = x^*(t) + \varepsilon^{\nu-h+1} \int_0^t B(y - y^*)(t) dt + O(\varepsilon^{\nu-h+1}) \quad (5.82)$$

comme sur une période  $T$ , l'intégrale est bornée

La matrice de monodromie de (5.80) soit  $N$  et la matrice de monodromie de (5.81) soit  $N'$  ont leurs éléments proches à  $\varepsilon^{\nu-h+1}$  près. Donc la différence entre les valeurs propres de  $N$  et celles de  $N'$  est de l'ordre de  $\varepsilon^{\nu-h+1}$  (voir Wilkinson [14] "The Algebraic Eigenvalue Problem", §5).

Or les multiplicateurs caractéristiques, c'est à dire les valeurs propres de  $N$  ont la forme  $1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon)$ . Donc les valeurs propres de  $N'$  auront la forme  $1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon) + \varepsilon^{\nu-h+1} m_i(\varepsilon)$ .

Rappelons que si les multiplicateurs caractéristiques du système linéaire sont  $< 1$  en module, on aura la stabilité asymptotique; donc si  $|\nu - h + 1| > h_i$  (5.83)

$$|1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon)| \neq 1 \text{ en module (5.84)}$$

alors si  $1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon)$  est  $< 1$  en module,  $1 + \varepsilon^{h_i} m_i(\varepsilon) + \varepsilon^{\nu-h+1} m_i(\varepsilon)$  est  $< 1$  en module et la stabilité asymptotique de  $x^*$  entraîne la stabilité asymptotique de  $y$  (trajectoire périodique du système complet) d'où la thèse.

Dans notre cas, on a:  $h_1 = h_2 = \frac{p+1}{2}$  si  $p > 1$

donc  $h = p+1$  et (5.83) s'écrit:

$$\nu - (p+1) + 1 > \frac{p+1}{2}$$

$$\text{ou } \nu > \frac{3p+1}{2} \quad (5.85)$$

$$h = 2 \text{ si } p = 1$$

et (5.83) devient:

$$\nu > 2 \quad (5.86)$$

Examinons donc le système tronqué qui a la forme:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{\psi}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' - x'_1(\varepsilon) \\ \psi' - \psi'_1(\varepsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x' - x'_1, \psi' - \psi'_1)$$

Si les valeurs propres de  $\Pi$  (les exposants caractéristiques du système linéaire) ont leur partie réelle strictement négative, alors on a la stabilité asymptotique des trajectoires périodiques pour le système tronqué (voir Coddington and Levinson [2] "Theory of Ordinary Differential Equations", theory p. 134) et par conséquent en vertu du lemme précédent, on l'aura aussi pour le système complet.

On a calculé précédemment ces valeurs propres :

1.7.1 : on a (voir (5.64))

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2k+1) \delta n'_1 g(n'_1) \cos \psi'_1} + O(\varepsilon^{\frac{k+1}{2}}) \quad (5.87)$$

dans ce qui suit, nous supposons  $\delta < 0$

si  $n'_1 g(n'_1) \cos \psi'_1 < 0$ , on aura instabilité asymptotique :

en effet  $\lambda = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2k+1) \delta n'_1 g(n'_1) \cos \psi'_1}$  est

un exposant du type stable mais par contre

$\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2k+1) \delta n'_1 g(n'_1) \cos \psi'_1}$  est un exposant

du type instable ; comme on a vu que pour chaque  $n'_0$

on avait 2 solutions  $\psi'_{01}$  et  $\psi'_{02}$ , si  $\psi'_1$  correspond à  $\psi'_{01}$

la condition peut s'écrire :  $n'_0 g(n'_0) \cos \psi'_{01} < 0$  (5.88)

ou  $\psi'_{02} = \pi - \psi'_{01}$ , donc alors  $n'_0 g(n'_0) \cos \psi'_{02} > 0$  (5.89)

et dans ce cas le radical étant négatif, le coefficient

de  $\varepsilon^{\frac{k+1}{2}}$  sera imaginaire et le signe de la partie

réelle de  $\lambda$  sera celui de  $(g(n'_1) + h(n'_1)) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2}$  (5.90)

car (voir (5.42))  $\lambda = \frac{\varepsilon^k}{2} \left\{ (g(n'_1) + h(n'_1)) \sin \psi'_1 + \frac{c'}{2} \right\} + O(\varepsilon^k)$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2k+1) \delta n'_1 g(n'_1) \cos \psi'_1} \varepsilon^{\frac{k+1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{k+1}{2}})$$

(5.90) est négative (et on a alors la stabilité asymptotique

$$\text{si } (g(n'_0) + h(n'_0)) \sin \psi'_{00} + \frac{c'}{2} < 0 \quad (5.91)$$

$$\text{or } \sin \psi'_0 = \frac{-c' n'_0}{2g(n'_0)} \quad (\text{voir (5.48)})$$

donc (5.91) s'écrit :

$$\frac{-[g(n'_0) + h(n'_0)] c' n'_0}{g(n'_0)} + \frac{c'}{2} < 0 \quad (5.92)$$

c'est à dire :

$$\text{si } c' > 0 : \frac{1}{2} - \frac{[g(n'_0) + h(n'_0)] n'_0}{g(n'_0)} < 0 \quad (5.93)$$

$$\text{si } c' < 0 : \frac{1}{2} - \frac{[g(n'_0) + h(n'_0)] n'_0}{g(n'_0)} > 0 \quad (5.94)$$

dans les cas  $\mu = 2$  et  $\mu = 3$ , nous connaissons les fonctions  $g(n')$  et  $h(n')$  (voir (4.82) et (4.84)) et en remplaçant dans (5.93) et (5.94), on trouve :

$\mu = 2$  : si  $c' > 0$  : stabilité asymptotique

si  $c' < 0$  : instabilité asymptotique

$\mu = 3$  : mêmes conclusions

$\mu = 1$  : dans ce cas, on a (voir (5.70)) :  $\lambda = \varepsilon \left[ \frac{15}{16} \frac{\delta B n'_1}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \psi'_1 + \frac{c'}{4} \right.$

$$\left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c'^2}{4} - \frac{3}{8} \frac{c' \delta B n'_1}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \psi'_1 + \frac{27}{8} \frac{\delta^2 B n'_1{}^3 \cos \psi'_1}{\sigma^2(\sigma^2 - 1)} + \frac{9}{64} \frac{\delta^2 B^2 n'_1{}^2 \sin^2 \psi'_1}{\sigma^2(\sigma^2 - 1)^2}} \right]$$

si le radical est négatif, c'est à dire, en tenant compte

$$\text{que } \sin \psi'_0 = -\frac{4}{3} \frac{c' \sigma(\sigma^2 - 1)}{\delta B n'_0}, \text{ si } c'^2 + \frac{27}{8} \frac{\delta^2 B n'_0{}^3 \cos \psi'_0}{\sigma(\sigma^2 - 1)} < 0$$

la condition de stabilité asymptotique est :

$$\frac{15}{16} \frac{\delta B n'_0 \sin \psi'_0}{\sigma(\sigma^2 - 1)} + \frac{c'}{4} < 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{5}{4} c' + \frac{c'}{4} < 0$$

donc si  $c' > 0$  : stabilité asymptotique (5.95)

si  $c' < 0$  : instabilité asymptotique (5.96)

si le radical est positif, c'est à dire  $c'^2 + \frac{27}{8} \frac{\delta^2 B n'_0{}^3 \cos \psi'_0}{\sigma^2(\sigma^2 - 1)} > 0$

deux cas sont à envisager :

$$\text{soit } \frac{15}{16} \frac{\delta B n'_1}{\sigma(\sigma^2 - 1)} \sin \psi'_1 + \frac{c'}{4} > 0 \quad (\text{ce qui est réalisé si } c' < 0)$$

- on aura alors l'instabilité asymptotique (au moins un exposant caractéristique sera positif)

soit  $\frac{15 \delta B \lambda_1 \sin \psi_1}{16 \sigma (\sigma^2 - 1)} + \frac{c'}{4} < 0$  (réalisée si  $c' > 0$ ):

on aura 2 exposants négatifs et donc la stabilité asymptotique

si  $\left| \frac{15 \delta B \lambda_1 \sin \psi_1}{16 \sigma (\sigma^2 - 1)} + \frac{c'}{4} \right| > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c'^2}{4} - \frac{3c' \delta B \lambda_1 \sin \psi_1}{\sigma (\sigma^2 - 1)} +$

$$\frac{27 \delta^2 B \lambda_1^3 \cos \psi_1}{8 \sigma (\sigma^2 - 1)} + \frac{9 \delta^2 B^2 \lambda_1^2 \sin^2 \psi_1}{64 \sigma^2 (\sigma^2 - 1)} \quad (5.97)$$

et en développant, on trouve que cette condition est réalisée si:

$$\left\{ \begin{array}{l} c'^2 > 72 \left( \frac{\delta^2 B \lambda_0^3}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{84 B^2 \lambda_0^6}{\sigma^4} + \frac{1}{256} \frac{84 B^2 \lambda_0^4}{\sigma^4 (\sigma^2 - 1)^2}} \right) \quad (5.98) \\ \text{ou } c'^2 < 72 \left( \frac{\delta^2 B \lambda_0^3}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{84 B^2 \lambda_0^6}{\sigma^4} + \frac{1}{256} \frac{84 B^2 \lambda_0^4}{\sigma^4 (\sigma^2 - 1)^2}} \right) \quad (5.99) \end{array} \right.$$

## § 5. Cas de freinage faible ou fort

### A. freinage faible ( $h > p$ )

On a alors un système de la forme (voir (4.100)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}' = \varepsilon^{\mu} g(\lambda') \sin \psi' + \sum_{i=p+1}^{\nu} \varepsilon^i T_i(\lambda', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\nu}) \\ \dot{\psi}' = \varepsilon \left( \Delta_p + 3 \lambda'^2 (2p+1) \frac{\delta}{8\sigma} \right) + \sum_{i=2}^{\nu} \varepsilon^i S_i(\lambda', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\nu}) \end{array} \right.$$

On peut alors recommencer ce qu'on a fait dans le cas où  $h = p$  en faisant  $c' = 0$  dans les équations. De la même façon, on obtient l'existence de trajectoires périodiques de période  $(2p+1) 2\pi$  pour le système complet. Les changements qui interviennent sont:

$p > 1$  :  $\lambda_0$  et  $\psi_0$  sont déterminés par (voir (5.38) et (5.39))

$$(5.100) \left\{ \begin{array}{l} g(\lambda_0) \sin \psi_0 = 0 \text{ et donc } \sin \psi_0 = 0 \text{ si } g(\lambda_0) \text{ n'est pas} \\ \text{identiquement nul} \end{array} \right.$$

$$\Delta_p + 3 \lambda_0^2 (2p+1) \frac{\delta}{8\sigma} = 0$$

la condition d'existence d'une solution périodique pour le système tronqué est  $r'_0 g(r'_0) \neq 0$  (5.101) (voir 5.40); cette condition reste la même pour l'existence d'une solution périodique de période  $(2p+1) 2\pi$  pour le système complet (voir (5.69));

pour la stabilité asymptotique:

on a (voir 5.63):

$$\lambda = \varepsilon^{\frac{p+1}{2}} [\dot{g}(r'_1) + h(r'_1)] \sin \psi'_1 + O(\varepsilon^k) \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2p+1) \delta r'_1 g(r'_1) \cos \psi'_1 \varepsilon^{k+1} + O(\varepsilon^{k+1})} \quad (5.102)$$

soit  $\delta < 0$

si  $r'_1 g(r'_1) \cos \psi'_1 < 0$ , le radical est positif et on a instabilité asymptotique car les 2 exposants sont de signes contraires

$$(\lambda = \pm \varepsilon^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{\frac{3}{\sigma} (2p+1) \delta r'_1 g(r'_1) \cos \psi'_1} + O(\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}))$$

or pour chaque  $r'_0$ , on a 2 solutions (voir 5.100):

$$\psi'_{01} = 0 \quad \text{et} \quad \psi'_{02} = \pi$$

si  $\psi'_1$  correspond à  $\psi'_{01}$ ,  $r'_1 g(r'_1) \cos \psi'_1 < 0$  peut encore s'écrire:  $r'_0 g(r'_0) < 0$ ;

en considérant le cas  $\psi'_{02} = \pi$ , si  $r'_0 g(r'_0) < 0$ , alors  $r'_1 g(r'_1) \cos \psi'_1 > 0$  et le radical étant négatif, le signe de la partie réelle de  $\lambda$  sera celui de  $[\dot{g}(r'_1) + h(r'_1)] \sin \psi'_1$ : si le premier terme non nul du développement de cette expression en série de  $\varepsilon$  est  $< 0$ , on aura la stabilité asymptotique.

$p=1$ :  $r'_0$  et  $\psi'_0$  sont déterminés par (voir (5.38) et (5.39)):

$$(5.103) \left\{ \begin{array}{l} \sin \psi_0 = 0 \\ \Delta_f + \frac{9\alpha_0'^2 \delta}{8\sigma} + \frac{9B\delta\alpha_0' \cos \psi_0'}{8\sigma(\sigma^2-1)} = 0 \end{array} \right.$$

- la condition d'existence d'une trajectoire périodique pour le système tronqué est (voir (5.50)) :

$$\alpha_0'^2 \neq \frac{4}{\delta^2 B^2 \sigma^2 (\sigma^2-1)^2} \quad (5.104)$$

- la condition d'existence d'une trajectoire périodique pour le système complet est (voir (5.72)) :

$$\alpha_0' \neq 0 \quad (5.105)$$

- pour la stabilité asymptotique :

on a (voir (5.70)) :

$$\lambda = \varepsilon \left[ \frac{158B\alpha_1' \sin \psi_1'}{16\sigma(\sigma^2-1)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27\delta^2 \alpha_1'^3 B \cos \psi_1'}{8\sigma^2(\sigma^2-1)} + \frac{9\delta^2 B^2 \alpha_1'^2 \sin^2 \psi_1'}{64\sigma^2(\sigma^2-1)^2}} \right] + O(\varepsilon)$$

si le radical est négatif, c'est à dire, comme  $\sin \psi_0' = 0$ ,  $\alpha_0'^3 \cos \psi_0' < 0$  alors la condition de stabilité est :

$$\frac{158B\alpha_1' \sin \psi_1'}{16\sigma(\sigma^2-1)} < 0 \quad (5.106)$$

si le premier terme non nul du développement en série de  $\varepsilon$  de cette expression est négatif on aura la stabilité asymptotique et on aura l'instabilité asymptotique s'il est positif si le radical est positif (c'est à dire  $\alpha_0'^3 \cos \psi_0' > 0$ ), on aura instabilité asymptotique (car  $\frac{158B\alpha_1' \sin \psi_1'}{16\sigma(\sigma^2-1)}$  a un développement en série de  $\varepsilon$  dont le premier terme non nul est au moins de l'ordre de  $\varepsilon$  et de ce fait on a 2 exposants de signes contraires).



## B. freinage fort ( $h < p$ )

On a un système de la forme (voir (4.100))

$$(5.107) \quad \begin{cases} \dot{n}' = \varepsilon^h c' \frac{n'}{2} + \sum_{i=h+1}^p \varepsilon^i T'_i(n', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^p) \\ \dot{\psi}' = \varepsilon \left( \sigma_p + \frac{3n'^2}{8\sigma} (2p+1)\delta \right) + \sum_{i=2}^p \varepsilon^i S'_i(n', \psi', -) + \mathcal{O}(\varepsilon^p) \end{cases}$$

$n' = n'_0 = 0$  est tel que  $\varepsilon^h c' \frac{n'}{2} = 0$  (et est la seule valeur possible qui annule le premier terme du second membre de la première équation de (5.107)) ; ce cas  $n'_0 = 0$  rentre dans le cadre du § 3. A. : on a donc l'existence d'une trajectoire périodique de période  $2\pi$  qui correspond à  $n'$  au moins de l'ordre de  $\varepsilon^h$

## § 6. Récapitulation des résultats

On suppose  $\delta < 0$

Soit  $n'_0$  auquel correspondent 2 valeurs possibles  $\psi'_0 = \psi'_{01}$  et  $\psi'_0 = \psi'_{02} = \pi - \psi'_{01}$

<u>CONDITIONS</u>		<u>RESULTATS</u>
$h = p$	$n'_0 g(n'_0) \cos \psi'_{01} \neq 0$	existence de 2 trajectoires périodiques de période $(2p+1)2\pi$ instabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à $\psi'_0 = \psi'_{01}$ stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à $\psi'_0 = \psi'_{02}$
$h > 1$	$n'_0 g(n'_0) \cos \psi'_{01} < 0$	
	$n'_0 g(n'_0) \cos \psi'_{01} < 0$ et $c' \left\{ \frac{1}{2} - \frac{[g(n'_0) + h(n'_0)] n'_0}{g(n'_0)} \right\} < 0$	
$h = 1$	$n'_0 \neq \frac{4}{8^2 B^2 \sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2 - 16/g c'^2}$ $n'_0 \neq \frac{8^2 B^2 \sigma^2 n'_0^3 \pm \sqrt{\frac{8^4}{256} B^2 n'_0^6 + \frac{1}{256} \frac{8^4 B^2 n'_0^4}{\sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2}}}{8^2 B^2 \sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2 - 16/g c'^2}$	existence de 2 trajectoires périodiques de période $6\pi$

stabilité asymptotique

stabilité asymptotique

stabilité asymptotique

$$c^2 + 2\tau^2 \theta_{n^0} > 0 \quad \text{et} \quad c^1 > 0$$

$$c^2 + 2\tau^2 \theta_{n^0} \cos \psi_0 > 0 \quad \text{et} \quad c^1 < 0$$

$$c^2 + 2\tau^2 \theta_{n^0} \cos \psi_0 > 0$$

$$c^1 > 0$$

$$\text{et } c^2 > \tau^2 \left( \theta_{n^0}^2 + \sqrt{\frac{\tau^4 \theta_{n^0}^6}{64} + \frac{\tau^4 \theta_{n^0}^2}{256} \frac{64(6^2-1)^2}{64}} \right)$$

$$\text{ou } c^2 < \tau^2 \left( \theta_{n^0}^2 - \sqrt{\frac{\tau^4 \theta_{n^0}^6}{64} + \frac{\tau^4 \theta_{n^0}^2}{256} \frac{64(6^2-1)^2}{64}} \right)$$

$\mu_{21}$

$$n^0 g(n^0) \neq 0$$

$$n^0 g(n^0) \cos \psi_0 < 0$$

$$n^0 g(n^0) \cos \psi_0 < 0$$

$$\text{et } [g(n^0) + h(n^0)] \sin \psi_0 < 0$$

$$|g(n^0) + h(n^0)| \sin \psi_0 > 0$$

$\mu_{22}$

stabilité asymptotique

existence de 2 trajectoires périodiques de période  $2\pi$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

existence de 2 trajectoires périodiques de période  $2\pi$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

stabilité asymptotique de la trajectoire correspondant à  $\psi_0 = \psi_0^*$

$$\cos \psi_0 < 0 \quad \text{et} \quad c^1 > 0$$

$$c^2 + 2\tau^2 \theta_{n^0} \cos \psi_0 > 0 \quad \text{et} \quad c^1 < 0$$

$$n^0 \cos \psi_0 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{15 \tau^2 \theta_{n^0} \sin \psi_0}{16 \cdot 6(6^2-1)} < 0$$

$$\frac{15 \tau^2 \theta_{n^0} \sin \psi_0}{16 \cdot 6(6^2-1)} > 0$$

$$n^0 \cos \psi_0 > 0$$

$$n^0 \neq 0$$

$$n^0 \neq \frac{8^2 \theta_{n^0}^2 (6^2-1)^2}{4}$$

$\mu_{21}$

De plus dans ces deux cas ( $k = p$  et  $k > p$ ) et lorsque  $k < p$ ,  
on a l'existence d'une trajectoire périodique de période  $2\pi$

---

## References

- [1] Bogoliubov et Mitropolsky. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. Hindustan Publishing Corp., Delhi, India (1961)
- [2] Coddington et Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations. Mc Graw-Hill, New York (1955)
- [3] Cohn P. Lie Groups. Cambridge University Press (1961)
- [4] Depuit H. Asymptotic Representation of the Cycle of Vander Pol's Equation for Small Damping Coefficients. Journal de Mathématiques et de Physique appliquées (1967), 18, 736-747
- [5] Depuit H. Celestial Mechanics (1969) 1, 12-30
- [6] Hale J. Ordinary Differential Equations. Wiley-Interscience, New York (1969)
- [7] Hemard J. Perturbation Technique in the Theory of Nonlinear Oscillations and in Celestial Mechanics. Technical Note (1970), n°51
- [8] Hemard J. Poisson Series Processor. Publication du Département de Mathématiques (FUN) (1972)
- [9] Hemard J. Lyapunov's Center Theorem for Resonant Equilibrium. Journal of Differential Equations (1973), 14, 431-441
- [10] Gambill B. et Hale J. Subharmonic and Ultraharmonic Solutions for Weakly Nonlinear Systems. Journal Rational Mech. Anal. (1956) 5, n°2
- [11] Hori G. Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. Publications of the Astronomical Society of Japan (1966), 18, 287-296
- [12] Kirchgraber U. The Transformation Behaviour of Perturbation Theories, Celestial Mechanics (1973), 7, 474-494

- (13) Lord W. Subbarao. Solutions of Second Order Equations Having near Harmonic Solutions. Journal of Differential Equations, (1972), 11, no. 3
- (14) Lord W. Subbarao. Treatise on Analytical Dynamics. Hermann LTD, London (1968)
- (15) Schwart. Analyse mathématique (tome II), Herman, Paris, (1967)
- (16) Stoker. Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems Wiley-Interscience, New York, (1950)
- (17) Wilks. The Algebraic Equations, Elsevier, Oxford, (1972)