

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ SPÉCIALISÉE EN DATA SCIENCE

Motifs de Turing sur réseaux étude des cas dirigés et dégénérés

Dorchain, Marie

Award date:
2023

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des sciences

**MOTIFS DE TURING SUR RÉSEAUX : ÉTUDE DES CAS DIRIGÉS ET
DÉGÉNÉRÉS**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en data science**

Marie DORCHAIN

Promoteur : Timoteo CARLETTI Collaborateur : Riccardo MUOLO

Juin 2023

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidée, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens tout d'abord à remercier M. Carletti pour m'avoir soutenue tout au long de ce travail, ainsi que pour tous ces conseils, aussi bien d'écriture que de réflexion. Merci aussi d'avoir cru en moi avant même que je n'y croie moi-même. Je remercie aussi Riccardo qui m'a beaucoup aidée, guidée, motivée, et qui a toujours gardé la porte de son bureau grande ouverte pour mes questions.

Je voudrais aussi exprimer ma reconnaissance envers tous les membres du Département de Mathématiques pour avoir contribué à mon apprentissage, mais aussi pour m'avoir fait grandir tout au long de ces 5 années.

Je tiens aussi à remercier ma famille et mes proches pour leur soutien, à chacun de leur façon. En particulier, merci à mes parents de m'avoir supportée et merci à ma maman d'avoir toujours pris le temps de relire mes travaux parfois illisibles.

Un grand merci aussi à tous mes copains de la piscine, pour m'avoir chacun transmis leurs expériences et partagé leurs bons conseils. Je remercie aussi tous mes amis en général, pour m'avoir soutenue et encouragée tout au long de mes études.

Je remercie enfin mon amoureux, qui a subi toutes les étapes de ce travail mais aussi de mes études, aussi bien les moments remplis d'angoisse que les plus joyeux. Merci aussi pour l'intérêt porté à ce que je fais, malgré une compréhension difficile.

Marie Dorchain

Résumé

Les motifs font partie intégrante de ce qui nous entoure. Une des théories les plus répandues pour expliquer l'émergence de motifs est très certainement la théorie de Turing. En effet, en 1952, Alan Turing étudie un système de réaction-diffusion, c'est-à-dire un système où deux espèces sont en interaction et diffusent à travers le domaine. Il suppose qu'un tel système possède un équilibre stable et, une fois perturbé, sous certaines conditions, le système peut atteindre un nouvel état inhomogène, qui est appelé motif de Turing. Cette théorie a d'abord été étudiée pour un domaine continu, mais a ensuite été étudiée pour les domaines discrets, que l'on représente avec un réseau. Ce travail reprend donc les bases nécessaires de la théorie de Turing et reproduit les résultats établis pour les réseaux, dans un premier temps non dirigés, puis dirigés, et ensuite non-normaux. Nous allons ensuite au-delà de ce cadre et considérons les réseaux dégénérés, et introduisons un formalisme pour l'étude de la théorie de Turing sur un tel support. Nous nous intéressons aussi à la reconstruction de motifs. En effet, s'il a déjà été établi que le motif pouvait être expliqué grâce aux vecteurs propres de la matrice Laplacienne associée aux valeurs propres instables, nous nous intéressons spécialement à l'effet des vecteurs propres généralisés dans la reconstruction.

Mots-clés : motif de Turing, réseaux dégénérés, dynamique sur réseaux, réaction-diffusion, reconstruction de motif.

Abstract

Patterns are an essential part of our surroundings. Turing's theory is certainly one of the most widely used theories to explain the emergence of patterns. In 1952 Alan Turing studied a reaction-diffusions system, which is a system where two species interact with each other and diffuse through the domain. He assumed that such a system has a stable equilibrium which, once disturbed, can reach a new inhomogeneous state under certain conditions, referred to as a Turing pattern. This theory was initially studied for a continuous domain but was then studied for a discrete one, which can be represented by a network. Our work therefore restates the necessary foundation of Turing's theory and reproduces results established for networks, first undirected, then directed and non-normal. We then go beyond this framework and consider defective networks and introduce a new formalism to study Turing's theory on such a network. Pattern reconstruction is also something we study in this work. Indeed, it has already been established that pattern can be explained by the unstable eigenvectors of the Laplace matrix, i.e., eigenvectors corresponding to unstable eigenvalues. We are particularly interested in the effect of generalised eigenvectors in the pattern reconstruction.

Key-words : Turing pattern, defective network, dynamics on a network, réaction-diffusion, pattern reconstruction.

Table des matières

Introduction	9
1 Motifs de Turing sur espace continu	11
1.1 Étude de la théorie de Turing	11
1.2 Application au modèle du Brusselator	16
2 Création de réseaux	21
2.1 Notions et propriétés des réseaux	22
2.2 Algorithmes de création de réseaux	23
3 Motifs de Turing sur réseaux dirigés et non dirigés	29
3.1 Instabilité de Turing sur réseaux non dirigés	29
3.2 Application au modèle du Brusselator	34
3.3 Instabilité de Turing sur réseaux dirigés	37
3.4 Application au modèle du Brusselator	39
4 Motifs de Turing sur réseaux non-normaux	47
4.1 Théorie des réseaux non-normaux	47
4.2 Application au modèle du Brusselator	50
5 Le cas des réseaux dégénérés	55
5.1 Instabilité de Turing sur réseaux non-normaux dégénérés	55
5.2 Reconstruction de motifs	59
Conclusions et perspectives	69
Bibliographie	72

Introduction

Comprendre la nature qui l’entoure, c’est ce que l’humain tente de faire depuis toujours. Que ce soit comprendre pourquoi la pomme tombe au pied de l’arbre, à pourquoi les poules pondent des oeufs, en passant par comment la plante pousse, les scientifiques ont toujours tenté de répondre à ces questions. Le sujet qui nous intéresse en particulier dans ce mémoire est l’émergence de motifs : comment expliquer l’apparition de taches sur le pelage des guépards, ou les lignes présentes sur la peau de certains poissons, ou encore l’agencement des cellules d’une plante, par exemple. Plus précisément, nous nous intéressons aux motifs de Turing. En 1952, le célèbre Alan Turing publie un article pionnier dans le domaine ; *The Chemical Basis of Morphogenesis* [Turing, 1952]. Cet article tente d’expliquer l’émergence de motifs, grâce à un modèle mathématique. Ainsi, Alan Turing considère un système de réaction-diffusion sur un domaine continu, c’est-à-dire un système où deux espèces chimiques sont en interaction et diffusent à travers le domaine, chacune avec un coefficient de diffusion distinct de l’autre espèce. Dans sa théorie, il suppose que ce système possède un équilibre stable, représentant un état homogène. Si cet équilibre est perturbé grâce à une perturbation inhomogène, sous certaines conditions, il en résulte un équilibre instable et le système atteint un nouvel état d’équilibre inhomogène. C’est l’apparition de motifs, dits de Turing. Ce phénomène est aussi appelé instabilité de Turing. Ce modèle reste encore un des plus utilisés pour expliquer l’émergence de motifs et est une base dans le domaine.

Si cette théorie ([Turing, 1952]) a initialement été développée pour un domaine continu, elle a plus récemment été étendue à un domaine discret par [H.Nakao & A.S.Mikhailov, 2010] dans l’article *Turing patterns in network-organized activator–inhibitor systems*. Ainsi, le premier Chapitre de ce mémoire se concentre brièvement sur l’étude du système de réaction-diffusion sur domaine continu, étudiant l’émergence de motifs dits de Turing, sur base du développement de [Murray, 2003] dans son livre *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, lui-même développé à partir de l’article de [Turing, 1952]. Ce Chapitre a pour but d’introduire la théorie de Turing, nécessaire à la suite. En effet, dans ce mémoire, nous nous concentrons sur la théorie de Turing sur domaine discret. Un domaine discret pouvant être modélisé par un réseau, le Chapitre 2 se consacre à la création de ceux-ci. En effet, la suite du mémoire étant consacrée à l’étude des effets que peuvent avoir différents types de réseaux sur l’émergence de motifs, ce Chapitre rappelle quelques notions utiles à propos des réseaux et introduit les différents algorithmes de créations de réseaux, utilisés par la suite.

Le troisième Chapitre concerne donc l'étude de l'émergence de motifs de Turing sur domaine discret. Il considère deux types de réseaux, à savoir les réseaux non dirigés, dans un premier temps, sur base de l'article *Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems* de [H.Nakao & A.S.Mikhailov, 2010], et dirigés dans un second temps, sur base de l'article *The theory of pattern formation on directed networks* de [Asllani et al., 2014]. Il reproduit aussi un bon nombre des résultats du mémoire de [Muolo, 2018], ayant pour titre *Effects of Nonnormality on Turing-Like Pattern Formation*. Le quatrième Chapitre s'intéresse quant à lui à une catégorie de réseaux bien particulière ; les réseaux non-normaux. L'étude de tels réseaux est pertinente car un bon nombre de réseaux réels possèdent cette particularité [Asllani & Carletti, 2018]. Dans ce Chapitre, les réseaux non-normaux sont introduits, ainsi que leur effet particulier sur la dynamique d'un système. Les résultats présentés dans l'article *Patterns of non-normality in networked systems* de [Muolo et al., 2019] sont ensuite reproduits.

Le cinquième et dernier Chapitre est sans doute le plus innovant, car il concerne notre contribution à la théorie déjà existante. En effet, celui-ci concerne encore une fois une catégorie de réseaux bien particulière ; les réseaux dégénérés. Si la théorie originale de Turing suppose qu'une base de vecteurs propres de la matrice Laplacienne associée aux réseaux existe et que ses éléments soient orthonormaux, ce n'est pas le cas des réseaux dégénérés, une telle base n'existe pas. Un nouveau formalisme est alors introduit afin de pouvoir étudier l'émergence de motifs pour ces réseaux. En plus de cela, une bonne partie de ce Chapitre est dédiée à l'étude de la reconstruction de motifs, grâce aux vecteurs propres de la matrice Laplacienne. Nous montrons aussi l'effet des vecteurs propres généralisés dans cette reconstruction.

Dans tous les Chapitres, l'exemple utilisé pour illustrer la théorie est le modèle du Brusselator. Celui-ci a été choisi car il est souvent pris comme exemple dans les articles étudiant la théorie de Turing, aussi bien sur domaine continu que discret. Ce modèle a tout d'abord été introduit par [Prigogine & Lefever, 1968] dans l'article *Symmetry breaking instabilities in dissipative system*, et à a ensuite été simplifié par [Boland et al., 2008] dans l'article *How limit cycles and quasi-cycles are related in systems with intrinsic noise*. Nous utilisons cette dernière version. Le modèle concerne un certain système de réactions chimiques, que nous ne développons pas dans le cadre de ce mémoire.

Nous terminons ce travail par une brève conclusion, ainsi que l'introduction de perspectives, dans un but de poursuivre ou approfondir les travaux déjà réalisés.

1 Motifs de Turing sur espace continu

Nous nous basons dans ce Chapitre sur les travaux d'Alan Turing, étudiant l'apparition de motifs dans un domaine continu grâce à un système de réaction-diffusion ; un système faisant interagir deux espèces entre elles, diffusant à travers le domaine. Pour ce faire, nous reprenons les différents développements de [Murray, 2003] dans son livre *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, qui lui-même reprend les travaux primaires d'Alan Turing dans son article *The Chemical Basis of Morphogenesis* [Turing, 1952]. Notons que nous n'abordons ici que les concepts nécessaires à la suite de nos analyses. Ainsi, le sujet n'est qu'effleuré, mais de plus amples détails et une analyse plus approfondie sont disponibles dans le livre de [Murray, 2003]. Nous commençons par introduire le système de réaction-diffusion dans un domaine continu. Nous établissons ensuite les conditions analytiques nécessaires et suffisantes pour que, lorsque l'équilibre stable du système soit perturbé, naisse le phénomène d'instabilité de Turing. Nous appliquons ensuite la théorie développée au cas du célèbre modèle du Brusselator, un modèle théorique de réaction (chimique) autocatalytique, afin d'illustrer celle-ci.

1.1 Étude de la théorie de Turing

Considérons un système où deux espèces sont en interaction dans un domaine Ω . L'espèce u est un activateur et v , un inhibiteur, c'est-à-dire que l'espèce u favorise la production de v , alors que l'espèce v freine la production de u . Supposons que les fonctions f et g , non linéaires, représentent l'interaction entre ces deux espèces. Si nous considérons à présent que les espèces diffusent dans le domaine Ω , nous ajoutons pour chaque espèce un terme de diffusion fickéenne, $D_u \nabla^2 u(x, t)$ et $D_v \nabla^2 v(x, t)$ respectivement, où ∇^2 est l'opérateur Laplacien¹ et où les constantes D_u et D_v sont les coefficients de diffusion des espèces u et v respectivement. L'évolution au cours du temps des concentrations des différentes espèces

1. Notons que dans le cas où le domaine Ω considéré serait de dimension 1, il s'agit de opérateur Laplacien serait simplement la dérivée seconde par rapport à la variable spatiale.

dans le domaine considéré peut être modélisée mathématiquement par le système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = f(u, v) + D_u \nabla^2 u(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = g(u, v) + D_v \nabla^2 v(x, t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

avec une fois encore $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Les conditions de bord peuvent être périodiques, et donc, en dimension 1, être le cercle S^1 . Il est aussi souvent coutume d'étudier ce système avec les conditions de bord de Neumann, à savoir

$$\begin{cases} \nabla u(x, t) \cdot \hat{n} = 0 \\ \nabla v(x, t) \cdot \hat{n} = 0 \end{cases},$$

avec ∇ le gradient² et \hat{n} le vecteur unité normal au bord du domaine $\partial\Omega$.

Calculons la solution homogène et stationnaire de ce système, (u^*, v^*) , c'est-à-dire la solution constante sur le domaine spatial. De ce fait, comme $u(x, t) = u^*$ et $v(x, t) = v^*$, nous avons aussi

$$\nabla^2 u(x, t) = \nabla^2 v(x, t) = 0. \quad (1.2)$$

Ainsi, cette solution (u^*, v^*) vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u^*, v^*) = 0 \\ g(u^*, v^*) = 0 \end{cases}. \quad (1.3)$$

Dans son article original, [Turing, 1952] émet l'hypothèse que, en l'absence de diffusion, une telle solution est linéairement stable. Afin de définir les conditions menant à cette affirmation, définissons pour commencer la jacobienne du système homogène

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} f(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} g(u, v) \end{pmatrix}.$$

Notons J_0 cette jacobienne évaluée à l'équilibre (u^*, v^*) , c'est-à-dire, $J(u^*, v^*) := J_0$. Le système homogène est considéré linéairement stable si et seulement si

$$\begin{cases} \text{tr } J_0 < 0 \\ \det J_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} f(u^*, v^*) + \frac{\partial}{\partial v} g(u^*, v^*) < 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} f(u^*, v^*) \frac{\partial}{\partial v} g(u^*, v^*) - \frac{\partial}{\partial u} g(u^*, v^*) \frac{\partial}{\partial v} f(u^*, v^*) > 0 \end{cases}.$$

2. Remarquons que pour un domaine de dimension 1, le gradient est simplement la dérivée par rapport à la variable spatiale.

En introduisant la notation $\frac{\partial}{\partial u} f(u^*, v^*) := f_u$, et de façon similaire pour les autres dérivées, nous pouvons réécrire cette condition de stabilité comme

$$\begin{cases} f_u + g_v < 0 \\ f_u g_v - g_u f_v > 0 \end{cases} .$$

Si nous perturbons maintenant le système à l'équilibre avec une perturbation inhomogène

$$\begin{cases} u(x, t) = u^* + \delta u(x, t) \\ v(x, t) = v^* + \delta v(x, t) \end{cases} ,$$

nous pouvons étudier la stabilité locale autour de l'équilibre. Pour ce faire, utilisons le développement de Taylor du 1^{er} ordre afin de linéariser le système perturbé autour de l'équilibre

$$\begin{cases} f(u^* + \delta u, v^* + \delta v) = f(u^*, v^*) + f_u \delta u + f_v \delta v \\ g(u^* + \delta u, v^* + \delta v) = g(u^*, v^*) + g_u \delta u + g_v \delta v. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant (1.2) et (1.3), le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \delta u = f_u \delta u + f_v \delta v + D_u \nabla^2 \delta u \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta v = g_u \delta u + g_v \delta v + D_v \nabla^2 \delta v \end{cases} ,$$

que l'on peut exprimer sous forme matricielle comme

$$\dot{\mu} = J_0 \mu + D \nabla^2 \mu, \tag{1.4}$$

avec $\mu = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}$. Cette équation décrit l'évolution de la perturbation au cours du temps.

Une méthode possible pour résoudre le système (1.4) est d'utiliser la transformée de Fourier et alors de travailler dans l'espace conjugué ($\mu \longleftrightarrow \hat{\mu}$)³. Plus précisément, nous utilisons la propriété de différentiation de la transformée de Fourier

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \longleftrightarrow (ik)^n \hat{f}(k),$$

appliquée au cas où $n = 2$, nous avons alors que $\nabla^2 \mu \longleftrightarrow (ik)^2 \hat{\mu} = -k^2 \hat{\mu}$. La variable k présente dans la propriété est décrite par [Murray, 2003] comme "*wavenumber*", vérifiant

3. Une autre méthode possible pour la résolution du système (1.4) est d'étendre la perturbation sur la base de fonctions propres de l'opérateur Laplacien. Il s'agit de la méthode utilisée par [Murray, 2003]. Cette méthode est similaire à celle que nous utilisons, car dans le cas de conditions de bord périodiques, les fonctions propres de l'opérateur Laplacien seraient alors les fonctions sinusoidales, sinus et cosinus.

l'expression $\omega = 2\pi/k$, avec ω la longueur d'onde. Ainsi, dans l'espace conjugué, le système (1.4) peut se réécrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mu} = J_0 \hat{\mu} + D(-k^2 \hat{\mu}).$$

En adoptant la notation $\hat{J} := J_0 - k^2 D$, le système devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mu} = \hat{J} \hat{\mu}, \quad (1.5)$$

qui est donc un système linéaire, dépendant d'une matrice plutôt que d'un opérateur, comme c'était le cas pour le système (1.4). Ainsi, si nous définissons λ_i , $i = 1, 2$, comme les valeurs propres de \hat{J} , la solution de ce système est, si les valeurs propres λ_i sont distinctes, une combinaison linéaire des exponentielles $e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. Nous avons alors que le système perturbé (1.5) est instable si et seulement si $\max_{i=1,2}(\operatorname{Re}(\lambda_i)) > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda_1)$ ou $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$.

Étudions à présent les valeurs propres de $\hat{J} = \begin{pmatrix} f_u - k^2 D_u & f_v \\ g_u & g_v - k^2 D_v \end{pmatrix}$, en commençant par les calculer

$$\begin{aligned} \det(\hat{J} - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \operatorname{tr}(\hat{J})\lambda + \det \hat{J} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(f_u + g_v - k^2(D_u + D_v)) + (f_u g_v - k^2 f_u D_v - k^2 g_v D_u + k^4 D_u D_v - g_u f_v) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v)) + k^4 D_u D_v - k^2(f_u D_v + g_v D_u) + \det J_0 &= 0. \end{aligned}$$

En posant $h(k^2) := k^4 D_u D_v - k^2(f_u D_v + g_v D_u) + \det J_0$, nous pouvons obtenir

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v) \pm \sqrt{(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v))^2 - 4h(k^2)}}{2}.$$

Remarquons que dans les conditions nécessaires pour que (u^*, v^*) soit un équilibre stable, nous avons imposé $\operatorname{tr} J_0 = f_u + g_v < 0$. Les coefficients de diffusion D_u et D_v sont tous les deux positifs par définition, rendant ainsi la quantité $\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v)$ négative. De ce fait, comme nous cherchons la valeur propre avec la plus grande partie réelle positive, nous pouvons négliger la valeur propre $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v) - \sqrt{(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v))^2 - 4h(k^2)} \right)$. Pour avoir l'instabilité, nous souhaitons avoir $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$, or,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v) + \sqrt{(\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v))^2 - 4h(k^2)} \right), \quad (1.6)$$

avec $\operatorname{tr} J_0 - k^2(D_u + D_v) < 0$, donc, pour avoir $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$, il suffit d'imposer que $h(k^2)$ soit négatif. Nous définissons la partie réelle de l'équation (1.6) comme étant la relation de dispersion.

La condition d'instabilité du système perturbé devient alors

$$\max_{i=1,2}(\operatorname{Re}(\lambda_i)) > 0 \Leftrightarrow h(k^2) < 0,$$

avec

$$h(k^2) := k^4 D_u D_v - k^2 (f_u D_v + g_v D_u) + \det J_0,$$

or $h(k^2) = 0$ est une parabole convexe (car, D_u et D_v étant positifs, $D_u D_v$ l'est aussi). De ce fait, pour avoir un intervalle de k^2 tel que $h(k^2)$ soit négatif, il suffit d'imposer que le minimum de cette parabole soit négatif. En posant $y := k^2$, l'équation de la parabole devient

$$y^2 D_u D_v - y (f_u D_v + g_v D_u) + \det J_0 = 0,$$

dont le minimum est donné par

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \frac{D_u g_v + D_v f_u}{2 D_u D_v} \\ &:= k_{\min}^2. \end{aligned}$$

Nous avons que $D_u D_v$ est positif, k_{\min}^2 étant positif, nous devons alors imposer que $D_u g_v + D_v f_u$ soit positif.

Regardons à présent la condition à imposer pour que le minimum de la parabole soit négatif.

$$\begin{aligned} h(k_{\min}^2) &= \left(\frac{D_u g_v + D_v f_u}{2 D_u D_v} \right)^2 D_u D_v - \left(\frac{D_u g_v + D_v f_u}{2 D_u D_v} \right) (f_u D_v + g_v D_u) + \det J_0 \\ &= \frac{1}{4 D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2 - \frac{1}{2 D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2 + (f_u g_v - f_v g_u) \\ &= (f_u g_v - f_v g_u) - \frac{1}{4 D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité devant être négative, nous imposons que $(f_u g_v - f_v g_u) - \frac{1}{4 D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2$ soit négatif.

En réunissant les différentes conditions que nous avons établies jusqu'ici, nous pouvons dire que les conditions nécessaires et suffisantes pour que d'un équilibre stable naisse une instabilité lorsque le système est perturbé sont les suivantes

$$\begin{aligned} (I) \quad & f_u + g_v < 0 \\ (II) \quad & f_u g_v - g_u f_v > 0 \\ (III) \quad & D_u g_v + D_v f_u > 0 \\ (IV) \quad & (f_u g_v - f_v g_u) - \frac{1}{4 D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2 < 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ces conditions sont aussi connues sous le nom de Théorème de Turing. Nous pouvons ensuite remarquer que

$$f_u + g_v < 0 \Rightarrow f_u < |g_v|$$

car $f_u + g_v < 0$ et $D_u g_v + D_v f_u > 0$, avec D_u et D_v positifs, impliquent que $f_u g_v < 0$. La variable v étant l'inhibiteur (et u l'activateur), nous avons que $g_v < 0$, ce qui implique alors que $f_u > 0$. Nous pouvons alors déduire de la condition (III) que $D_v f_u > D_u |g_v|$, et en utilisant que $f_u < |g_v|$, nous avons aussi que

$$D_v f_u > D_u |g_v| > D_u f_u \Rightarrow \frac{D_v}{D_u} > 1.$$

Cette constatation, faite par [Gierer & Meinhardt, 1972] dans l'article *A theory of biological pattern formation* et ensuite reprise par [Murray, 2003], implique que pour qu'il y ait une présence de motifs, la diffusion de l'inhibiteur doit être plus rapide que celle de l'activateur (D_v doit être plus grand que D_u).

1.2 Application au modèle du Brusselator

Considérons à présent le modèle du *Brusselator* introduit par [Prigogine & Lefever, 1968] dans l'article *Symmetry breaking instabilities in dissipative system*, reformulé par la suite par [Boland et al., 2008] dans l'article *How limit cycles and quasi-cycles are related in systems with intrinsic noise*, et appliquons-lui la théorie établie à la section précédente (1.1). Ce modèle décrit une réaction chimique autocatalytique, c'est-à-dire une réaction dans laquelle un des produits catalyse (déclenche) la réaction.

La dynamique du modèle évolue selon celle du système (1.1), en prenant les fonctions d'interaction entre les espèces

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 1 - (b + 1)u(x, t) + cu^2(x, t)v(x, t) \text{ et} \\ g(u, v) &= bu(x, t) - cu^2(x, t)v(x, t), \end{aligned}$$

définies par le modèle du Brusselator.

Ainsi, le système définissant l'évolution des concentrations des espèces u et v au cours du temps peut être défini comme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 1 - (b + 1)u(x, t) + cu^2(x, t)v(x, t) + D_u \nabla^2 u(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = bu(x, t) - cu^2(x, t)v(x, t) + D_v \nabla^2 v(x, t) \end{cases} . \quad (1.8)$$

Commençons par déterminer l'équilibre du système homogène (u^*, v^*) tel que $f(u^*, v^*) = 0$ et $g(u^*, v^*) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 1 - (b+1)u^* + c(u^*)^2v^* = 0 \\ bu^* - c(u^*)^2v^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^* = 1 \\ v^* = \frac{b}{c} \end{cases}.$$

Nous avons ensuite besoin du jacobien du système homogène, évalué à l'équilibre $(u^*, v^*) = (1, \frac{b}{c})$

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} -(b-1) + 2cu^*v^* & c(u^*)^2 \\ -2cu^*v^* & -c(u^*)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & c \\ -b & -c \end{pmatrix} := J_0.$$

Les conditions (1.7) (I) et (II) deviennent à présent

$$\begin{cases} f_u + g_v < 0 \\ f_u g_v - g_u f_v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1-c < 0 \\ (b-1)(-c) - c(-b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > b-1 \\ c > 0 \end{cases},$$

et les conditions (1.7) (III) et (IV) deviennent

$$\begin{aligned} & \begin{cases} D_u g_v + D_v f_u > 0 \\ (f_u g_v - f_v g_u) - \frac{1}{4D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -cD_u + (b+1)D_v > 0 \\ c - \frac{1}{4D_u D_v} (-cD_u + (b-1)D_v)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} c < \frac{(b-1)D_v}{D_u} \\ \frac{-c^2 D_u}{4D_v} + c \left(1 + \frac{1}{2}(b-1)\right) - \frac{1}{4} \frac{D_v}{D_u} (b-1)^2 > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nous pouvons afficher ces différentes conditions sur un graphe, créé à l'aide du programme Matlab⁴, et observer la région de paramètres c et b pour lesquels l'instabilité de Turing apparaît. Cette région d'instabilité est représentée sur la Figure 1.1 (panel de gauche) par la zone rose. Il est évident que cette zone dépend des coefficients de diffusion D_u et D_v , ainsi, si nous fixons d'autres valeurs que celles utilisées ici ($D_u = 0.1$ et $D_v = 1$) pour ces coefficients, nous aurons une autre région d'instabilité. Par exemple, à la Figure 1.1 (panel de droite), où nous avons pris des coefficients de diffusion relativement proches l'un de l'autre, $D_u = 0.4$ et $D_v = 0.6$, nous avons que la région d'instabilité est plus petite. En effet, nous avons vu, à la fin de la section 1.1, que pour avoir une instabilité de Turing, il fallait que le coefficient de diffusion de l'espèce v soit supérieur à celui de l'espèce u . Dans la pratique, il doit être largement supérieur.

Rappelons que l'instabilité de Turing apparaît lorsque qu'il existe un intervalle de k^2 tel qu'au moins une valeur propre de \hat{J} soit telle que sa partie réelle est strictement positive.

4. Chaque condition (I) – (IV) correspond graphiquement à l'aire sous une courbe. Nous avons utilisé la fonction `area` de Matlab permettant de représenter ces aires sous les courbes.

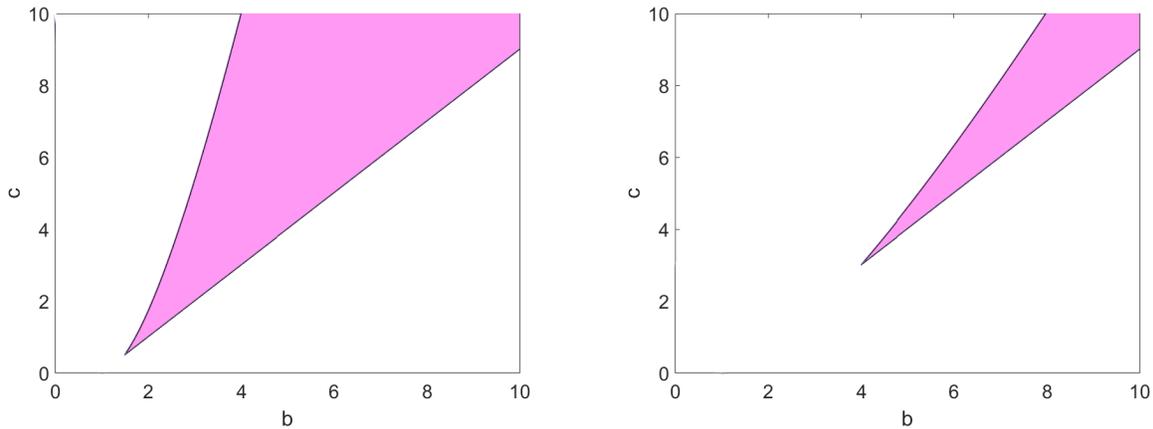


Figure 1.1 – Région d’instabilité représentée par l’aire rose; zone dans laquelle les conditions (1.7) (I) – (IV) sont réunies, pour les paramètres $D_u = 0.1$ et $D_v = 1$ pour le panel de gauche et $D_u = 0.4$ et $D_v = 0.6$ pour le panel de droite.

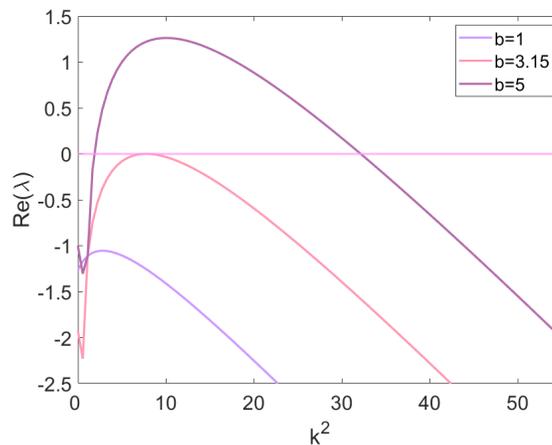


Figure 1.2 – Pour $D_u = 0.1$, $D_v = 1$ et $c = 6$, nous obtenons cette relation de dispersion pour le modèle du Brusselator, pour plusieurs valeurs de b

Ceci correspond graphiquement à observer la courbe de la relation de dispersion (1.6) des valeurs propres λ (en fonction k^2)⁵, l’instabilité de Turing se produit lorsqu’une partie de cette courbe est positive. Nous représentons la relation de dispersion sur la Figure 1.2, pour plusieurs valeurs du paramètre b . Ainsi, nous remarquons que, pour $D_u = 0.1$, $D_v = 1$ et $c = 6$ fixés et en faisant varier b , nous obtenons trois cas. Le premier cas, associé à $b = 1$, est le cas où le système ne présente pas d’instabilité de Turing. En effet, pour cette valeur de b , nous avons que $\text{Re}(\lambda) < 0$. Ainsi, après perturbation de l’équilibre, le système revient à

5. Afin d’obtenir cette courbe dans Matlab, nous avons discrétisé finement l’intervalle des valeurs que peut prendre k^2 et, pour chacune de ces valeurs, nous avons calculé le maximum de la partie réelle des valeurs propres de \hat{J} . Nous avons utilisé pour ce faire les fonctions `max`, `real` et `eig`.

l'équilibre. Le deuxième cas, associé à $b = 3.15$, concerne le cas critique, où $\text{Re}(\lambda) = 0$. Ce cas détermine le seuil du paramètre b au-delà duquel nous pourrions observer une instabilité de Turing et en dessous duquel le système reste stable après perturbation de l'équilibre. Le dernier cas, associé à $b = 5$, est le cas où le système présente une instabilité de Turing. En effet, nous voyons que pour un intervalle de k^2 , $\text{Re}(\lambda) > 0$. Nous avons alors que l'équilibre stable devient instable après la perturbation et le nouvel état inhomogène est atteint par le système.

Dans ce Chapitre, nous avons introduit la théorie de Turing sur un domaine continu. Celle-ci considère un système de réaction-diffusion, étudiant l'évolution au cours du temps de la concentration de deux espèces en interaction, diffusant à travers un domaine continu. Nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que, de l'équilibre stable homogène d'un tel système, naisse une instabilité de Turing. Nous avons ensuite illustré cette théorie à l'aide du modèle du Brusselator et étudié différents cas de figures possibles en fonction de différentes combinaisons possibles de paramètres. Par la suite, nous nous intéressons uniquement au cas où le domaine considéré est discret plutôt que continu. Pour pouvoir faire cela, nous introduisons tout d'abord dans le Chapitre 2 la notion de réseau, modélisant les domaines discrets.

2

Création de réseaux

Certains phénomènes naturels peuvent être représentés par un milieu discret plutôt que continu, comme nous avons utilisé jusqu'ici. Par exemple, le phénomène d'interactions humaines peut être représenté de façon discrète : chaque personne serait alors représentée par une entité. Étudier les relations entre ces personnes reviendrait donc à étudier les liens entre ces entités discrètes. Un autre exemple pourrait être l'étude des vols aériens au niveau mondial. Dans ce cas, nous avons bien qu'il existe un nombre fini et discret d'aéroports dans le monde, et l'étude des vols revient à étudier les différents flux de vols entre ces aéroports. Ainsi, dans ce Chapitre, nous introduisons la notion de réseau, nécessaire à la modélisation de milieux discrets, ainsi que quelques propriétés utiles. En effet, dans le Chapitre 1, nous avons considéré un système de deux espèces interagissant entre elles et diffusant à travers un domaine continu. Si nous voulons à présent étendre la théorie aux domaines discrets, nous devons tout d'abord commencer par introduire cette notion de réseau. Les différentes notions et propriétés présentées sont tirées du livre *Networks* de [Newman, 2018].

Nous étudions aussi dans ce Chapitre la création de réseau. En effet, les réseaux utilisés lors de l'étude de la théorie de Turing sur support discret possèdent des caractéristiques particulières. C'est pourquoi nous avons besoin d'algorithmes spécifiques pour créer ces réseaux et ainsi obtenir des résultats similaires aux articles de référence utilisés dans les Chapitres suivants. Nous nous intéressons aux algorithmes de création des réseaux de Watts-Strogatz, tirés de l'article *Collective dynamics of 'small-world' networks* [Strogatz & Watts, 1998], Newman-Watts, qui, lui, est une adaptation de l'algorithme de Watts-Strogatz, présente dans le livre *Networks* [Newman, 2018], ainsi que les réseaux non-normaux, dont la création est tirée de l'article *Topological resilience in non-normal networked systems* de [Asllani & Carletti, 2018], et enfin les réseaux non-normaux aléatoires présentés dans l'Annexe de l'article *Synchronization Dynamics in Non-Normal Networks : The Trade-Off for Optimality* de [Muolo et al., 2020].

2.1 Notions et propriétés des réseaux

Commençons par rappeler qu'un **graphe** ou **réseau** est un ensemble fini de noeuds reliés deux à deux par des liens. Il est dit d'un graphe qu'il est non dirigé si, lorsqu'il existe un lien entre le noeud i et j , il existe aussi un lien entre le noeud j et i . À l'inverse, un graphe est dit orienté ou dirigé lorsque s'il existe un lien d'un noeud i vers un noeud j , l'inverse n'est pas forcément vrai.

La **matrice d'adjacence** A d'un graphe à N noeuds est une matrice de taille $N \times N$, telle que son élément A_{ij} vaut 1 s'il existe un lien du noeud j vers le noeud i . De ce fait, travailler avec un graphe ou réseau non dirigé implique alors que sa matrice d'adjacence est symétrique, car nous aurons alors par définition que les éléments A_{ij} et A_{ji} sont identiques.

Si le graphe est à présent **pondéré**, cela signifie que chaque lien possède un poids (alors que jusqu'ici, nous avons considéré un poids de 1 pour tous les liens du graphe). Dans la matrice d'adjacence, cela se traduit simplement par le fait que si le lien du noeud j au noeud i possède le poids q , nous aurons alors que l'élément A_{ij} vaut q au lieu de 1.

Définissons aussi la notion de **degré** d'un noeud, que nous utiliserons par la suite. Dans le cas de réseaux non dirigés, le degré d'un noeud est simplement le nombre de liens incidents que ce noeud possède. Donc, pour un noeud quelconque i , nous pouvons calculer son degré k_i comme étant la somme des éléments de la ligne i de la matrice d'adjacence du réseau : $\sum_{j=1}^N A_{ij}$. Remarquons que dans le cas des réseaux dirigés, cette définition de degré reste valable, mais nous parlons alors de **degré entrant**, qui représente alors le nombre de liens partant d'un noeud quelconque pour aller au noeud i . On le dénote souvent k_i^{in} . À l'inverse, nous pouvons aussi calculer le **degré sortant** d'un noeud i comme étant le nombre de liens partant du noeud i pour aller à un noeud quelconque. Il se note k_i^{out} et se calcule comme $\sum_{j=1}^N A_{ji}$.

Si on note d_{ij} le chemin le plus court du noeud i au noeud j , nous pouvons définir l le **chemin le plus court moyen**, ou *average shortest path*, comme la moyenne de tous les plus courts chemins entre tous les couples de noeuds

$$l = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} d_{ij}.$$

Le **coefficient de clustering local** c_i d'un noeud i peut être défini comme le nombre de triangles T_i dont fait partie le noeud i , divisé par le nombre de triangles possibles dont i pourrait faire partie $K_i(K_i - 1)/2$

$$c_i = \frac{2T_i}{K_i(K_i - 1)},$$

où K_i est le nombre de voisins du noeud i . Il donne donc une idée de la connectivité locale. Inspiré des réseaux sociaux, il détermine pour une personne (noeud du réseau) le nombre

d'amis à lui qui sont aussi amis entre eux.

Un **treillis régulier**, appelé *regular lattice* [Gräzer, 2011] en anglais, est un réseau particulier où chaque noeud est relié au même nombre de noeuds k , que l'on appelle voisins. Un exemple d'un tel réseau, en dimension 1, est illustrée à la Figure 2.1, à gauche, avec $k = 4$.

Un réseau ***small-world***¹ est un réseau dont le plus court chemin moyen entre les paires de noeuds est faible et dont le niveau de clustering local est élevé. Intuitivement, on peut décrire un réseau *small-world* comme un réseau dans lequel la majorité des noeuds ne sont pas voisins les uns des autres mais où les voisins d'un noeud sont possiblement voisins les uns des autres. Les noeuds voisins peuvent alors être atteints à partir des autres noeuds en un court chemin.

2.2 Algorithmes de création de réseaux

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour construire un réseau, dépendant des propriétés que l'on souhaite lui attribuer. Dans la suite de ce mémoire, nous étudions plusieurs types de réseaux afin de considérer la théorie de Turing pour un domaine discret : tout d'abord, les réseaux non dirigés et dirigés dans le Chapitre 3, ensuite les réseaux non-normaux dans le Chapitre 4 et enfin les réseaux dégénérés dans le Chapitre 5. Dans nos différentes illustrations de la théorie de Turing, nous avons donc besoin de réseaux correspondant aux types étudiés, c'est pourquoi cette Section est dédiée à l'introduction de différents algorithmes de créations de réseaux.

Par la suite, nous utilisons tout d'abord des réseaux non dirigés. Par conséquent, la première méthode que nous explicitons ici est celle explicitée dans [Strogatz & Watts, 1998] pour construire un réseau de type *small-world*. Nous appelons les réseaux créés avec cette méthode les réseaux Watts-Strogatz (WS). La construction se fait comme suit : le réseau de départ est un treillis régulier, auquel on vient débrancher et rebrancher des liens d'une certaine manière. Plus précisément, pour un noeud, on retire le lien qu'il possède avec son voisin direct de droite avec une probabilité p et (s'il est retiré) on ajoute un lien au hasard au départ du noeud considéré. Pour un noeud fixé, on explore de la sorte tous ses voisins de droite et une fois cela fait, on réitère la procédure pour le premier voisin de droite et ainsi de suite jusqu'à avoir visité tous les noeuds du réseau. Au niveau de la matrice d'adjacence du réseau, lorsqu'un lien est retiré, supposons celui du noeud i à j , l'élément $A_{ij} = 1$ est annulé, ainsi que l'élément symétrique (car, le réseau n'étant pas dirigé, la matrice d'adjacence est symétrique) $A_{ij} = A_{ji} = 0$. Un nouveau lien est alors créé au hasard entre le noeud i et un noeud l , différent de j et i , $A_{il} = A_{li} = 1$. Le réseau ainsi créé n'est pas dirigé et a la propriété d'être *small-world*, lorsque la probabilité p de retirer un lien est assez faible, comme cela est

1. Plus de détails concernant les réseaux *small-world* sont disponibles dans le livre [Newman, 2018].

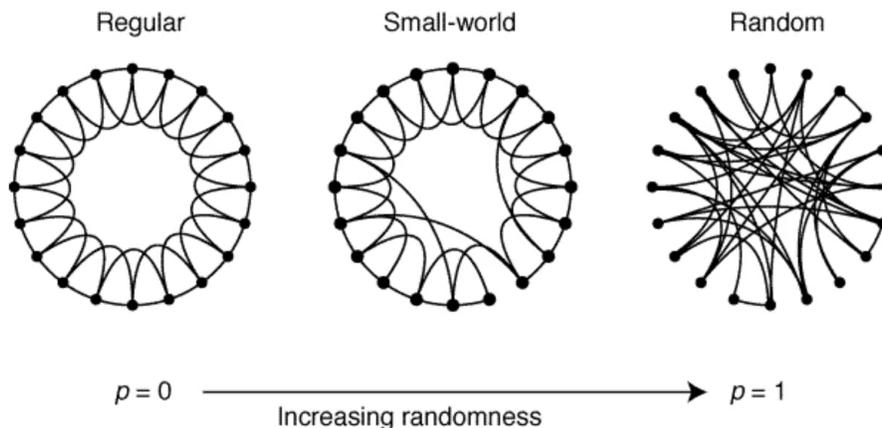


Figure 2.1 – Construction d’un réseau à partir d’un treillis régulier, lorsque la probabilité p augmente, de plus en plus de liens sont changés. Source :[Strogatz & Watts, 1998]

illustré à la Figure 2.1.

Nous pouvons aussi introduire un autre algorithme de création de réseau non dirigé, l’algorithme de Newman-Watts (NW), explicité dans [Newman, 2018]. Cet algorithme est semblable à celui de Watt-Strogaz (WS), mais dans ce cas-ci, nous ne retirons pas de lien pour en ajouter un nouveau, nous ajoutons simplement des liens au hasard. Ce réseau nous sert de point de départ d’un des algorithmes présentés ci-après.

Nous remarquons assez directement que ces deux méthodes de création de réseaux non dirigés peuvent être adaptées aux cas dirigés. Il suffit de ne plus considérer que la matrice d’adjacence est symétrique pour la mise à jour de retraits et ajouts de liens. Il faudrait aussi commencer avec un cercle de N noeuds dirigé. Cela se fait assez simplement, en considérant pour un noeud i que ses voisins sont les k noeuds à sa droite par exemple, et que les liens sont maintenant dirigés. Lors de nos illustrations de la théorie de Turing pour un réseau dirigé, nous utilisons la version dirigée des réseaux NW.

Nous utilisons aussi dans les prochains Chapitres des réseaux dits non-normaux, c’est-à-dire des réseaux dont la matrice d’adjacence A ne commute pas avec sa transposée conjuguée² ($AA^* \neq A^*A$). Introduisons le premier algorithme de création de réseau non-normal explicité dans l’article *Topological resilience in non-normal networked systems* [Asllani & Carletti, 2018]. Le réseau est construit sur base de la méthode Newman-Watts (version dirigée) pour obtenir un réseau dirigé et pondéré, possédant la propriété d’être *small-world*. L’algorithme initialise tout d’abord un réseau en anneau, dirigé, où les poids des différents liens sont issus d’une

2. Notons que bien que la définition utilise la transposée conjuguée, nous ne travaillons qu’avec des réseaux dont la matrice d’adjacence est réelle, ainsi, dans notre cas la définition de non-normalité de la matrice A devient $AA^T \neq A^T A$.

loi uniforme $U[0, \gamma]$, avec $\gamma > 1$ réel. Le paramètre γ décrit ici une sorte de directionnalité, renforçant le caractère non-normal du réseau. Les noeuds sont ordonnés de telle sorte que le noeud i est connecté au noeud $i + 1$. Après cela, nous ajoutons des liens réciproques faibles (de l'ordre de l'unité), avec une faible probabilité $0 < p_1 < 1$. Ces liens réciproques lient quant à eux le noeud i au noeud $i - 1$. Enfin, des liens longue-distance faibles sont aussi créés avec une faible probabilité $0 < p_2 < 1$. Contrairement aux réseaux créés précédemment, la matrice d'adjacence de ces réseaux non-normaux est creuse et possède la majeure partie de ses éléments non-nuls sur la diagonale, décrivant ainsi l'effet de directionnalité.

Une autre catégorie de réseau non-normaux est utilisée par la suite ; les réseaux aléatoires non-normaux. L'algorithme de leur création est tiré de l'appendice de l'article *Synchronization Dynamics in Non-Normal Networks : The Trade-Off for Optimality* de [Muolo et al., 2020]. L'algorithme commence par initialiser un réseau Erdős-Rényi³ dirigé, non pondéré, avec un nombre fixé de noeuds N , un nombre de voisins fixés K et une probabilité p_0 de créer un lien du noeud i au noeud j . Ce réseau est automatiquement non-normal grâce à sa nature dirigée. Pour augmenter la non-normalité de ce réseau, sa directionnalité doit être augmentée. Pour ce faire, nous retirons au hasard, avec une probabilité p , des liens se trouvant dans la partie triangulaire inférieure de la matrice d'adjacence.

Des exemples de réseaux obtenus avec ces méthodes sont présentés à la Figure 2.2. A la Figure 2.2(a), on observe bien un réseau du même type que celui de la Figure 2.1. C'est ce type de réseau (Watts-Strogaz) que nous allons utiliser pour les réseaux non dirigés du Chapitre suivant. Nous pouvons visuellement remarquer qu'il s'agit bien d'un réseau *small-world* car le chemin entre chaque paire de noeuds est court et chaque noeud est assez fortement connecté à ses voisins. Une version de réseau Newman-Watts dirigée est illustrée à la Figure 2.2(b). Nous utilisons ce type de graphe au Chapitre suivant, lorsque nous illustrons la théorie de Turing pour les réseaux dirigés. Sur la Figure 2.2(c), où un réseau non-normal créé avec la méthode de [Asllani & Carletti, 2018] est illustré, nous pouvons bien voir l'effet de directionnalité dans le sens horaire. En effet, la majorité des liens se trouvent dans ce sens et possèdent des poids supérieurs à ceux présents dans le sens inverse. Remarquons aussi que le réseau résultant de cette méthode est assez semblable au réseau Newman-Watts dirigé, illustré à la Figure 2.2(b). Dès lors, nous observons bien que la méthode de [Asllani & Carletti, 2018] renforce bien le caractère directionnel (et donc non-normal) du réseau Newman-Watts dirigé. Le dernier réseau, illustré à la Figure 2.2(d), représente un réseau aléatoire non-normal. Assez visuellement, nous pouvons remarquer le caractère aléatoire de ce réseau, grâce à la non-régularité des différents liens. Nous pouvons aussi observer, peut-être plus difficilement, la directionnalité : la majorité des liens semblent pointer vers le bas du réseau.

Notons que sur la Figure 2.1, les réseaux sont représentés de manière circulaire. Ils ne le sont pas forcément, mais ils sont représentés de la sorte pour d'une part, pouvoir les comparer et d'autre part, pour pouvoir observer la directionnalité pour les réseaux non-normaux.

3. Les réseaux de type Erdős-Rényi font partie de la catégorie des réseaux aléatoires.

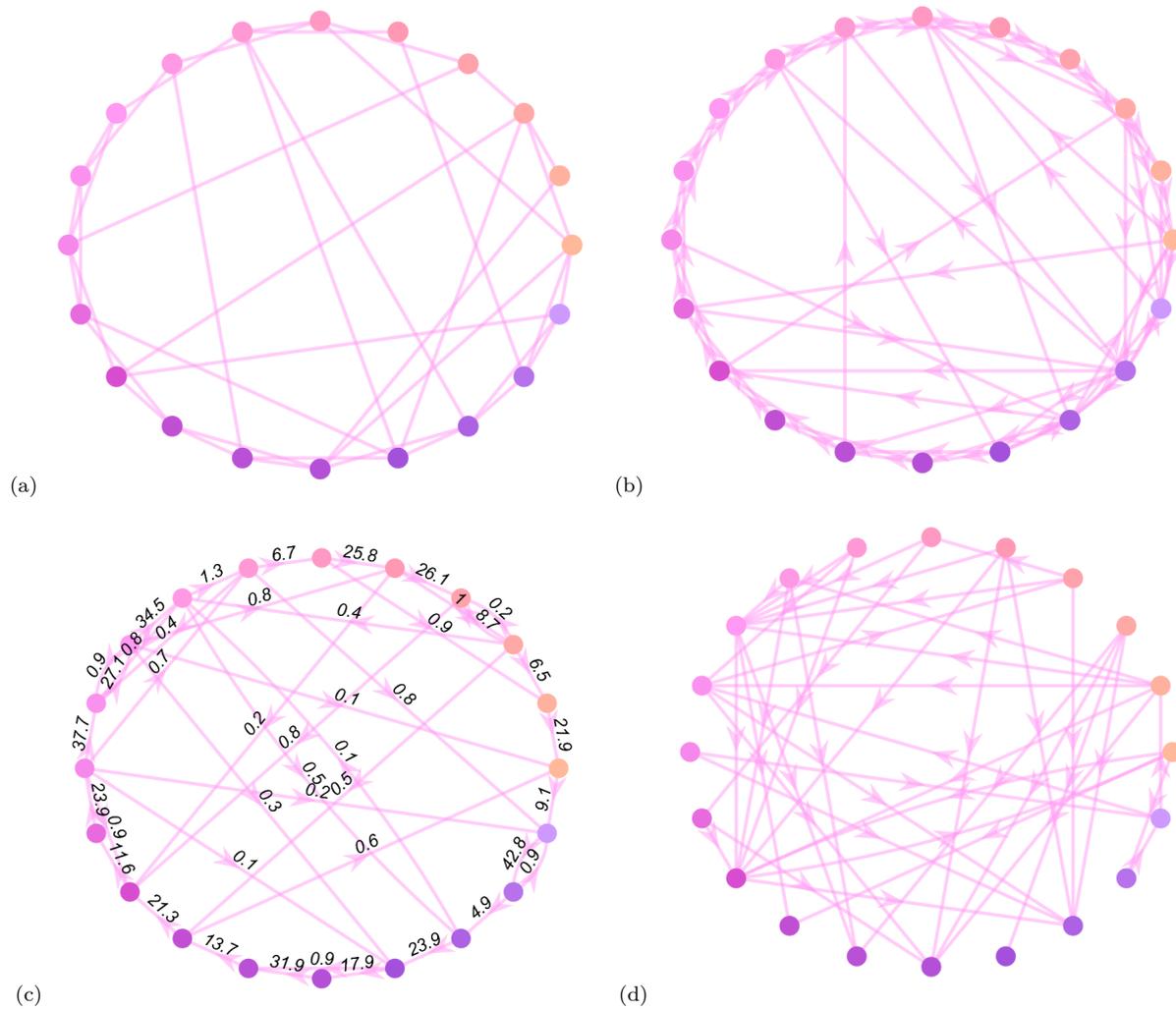


Figure 2.2 – (a) Réseau WS construit avec $N = 20$, $K = 4$ et $p = 0.2$. (b) Réseau NW, version dirigée, construit avec $N = 20$, $K = 2$ et $p = 0.4$. (c) Réseau non-normal obtenu avec les paramètres $N = 20$, $\gamma = 50$, $p_1 = 0.2$ et $p_2 = 0.05$. (d) Réseau aléatoire non-normal obtenu avec les paramètres $N = 20$, $K = 10$, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.8$.

Dans ce Chapitre, nous avons brièvement introduit la notion de réseau, ainsi que quelques définitions et propriétés nécessaires pour la suite. Ces réseaux nous seront utiles pour la modélisation de domaines discrets et donc pour l'étude de la théorie de Turing sur support discret plutôt que continu. Nous avons aussi explicité les différents algorithmes de création de réseaux que nous utilisons par la suite. Plus précisément, nous avons développé la création de réseaux non dirigés et non pondérés, ainsi que leurs modifications pour obtenir des versions dirigées. Nous avons aussi expliqué les algorithmes de création de réseaux non-normaux et non-normaux aléatoires. Le Chapitre 3 introduit l'extension de la théorie de Turing pour un domaine discret, modélisé par un réseau. Nous utilisons alors des réseaux non dirigés et non pondérés, ainsi que dirigés.

3 Motifs de Turing sur réseaux dirigés et non dirigés

Comme nous l'avons vu au début du Chapitre 2, un certain nombre de phénomènes naturels peuvent être représentés par un réseau plutôt qu'un domaine continu. Ainsi, étendre la théorie de Turing aux supports discrets, les réseaux, permet de considérer un cas intéressant. Nous étudions donc dans ce Chapitre la théorie de Turing, développée au Chapitre 1 pour un domaine continu, à présent pour le cas des domaines discrets, que nous pouvons représenter avec des réseaux. Lorsque nous considérons un système de réaction-diffusion sur un réseau, nous considérons alors que les deux espèces activateur u et inhibiteur v interagissent entre elles, au sein d'un noeud du réseau, et diffusent à travers les liens de ce réseau, et non plus dans le domaine comme dans le cas continu.

Dans ce Chapitre, nous étudions tout d'abord le cas des réseaux non dirigés, en se basant sur les travaux de [H.Nakao & A.S.Mikhailov, 2010], plus précisément l'article *Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems*, pionnier dans l'étude de la théorie de Turing sur support discret et découlant eux-mêmes des travaux de [Othmer & Scriven, 1971] dans l'article *A theory of biological pattern formation*. Ces travaux antérieurs ne concernaient cependant que des treillis réguliers [Othmer & Scriven, 1971, Othmer & Scriven, 1974]. Nous poursuivons par l'étude du cas des réseaux dirigés, en s'appuyant sur l'article *The theory of pattern formation on directed networks* de [Asllani et al., 2014]. Dans les deux cas, nous utilisons les réseaux dont les méthodes de construction sont explicitées au Chapitre 2 ; les réseaux Watt-Strogaz et les réseaux Newman-Watts, dont nous utilisons les versions non dirigées et dirigées. Nous reprenons le modèle du Brusselator pour appliquer la théorie développée pour le cas des réseaux dirigés et non dirigés.

3.1 Instabilité de Turing sur réseaux non dirigés

Nous considérons dans cette Section un réseau non dirigé, non pondéré, de N noeuds. Ainsi, la matrice d'adjacence A représentant ce réseau est telle que ses éléments A_{ij} et A_{ji} valent 1 si les noeuds i et j sont connectés par un lien, et ses éléments A_{ij} et A_{ji} sont nuls

sinon. Nous pouvons dès lors remarquer que le fait que le réseau ne soit pas dirigé implique que sa matrice d'adjacence est symétrique, autrement dit, tous les éléments de la matrice d'adjacence sont tels que $A_{ij} = A_{ji}$.

Notons k_i le degré du noeud i , soit donc le nombre de liens que le noeuds i possède, donné par $k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$. La diffusion d'espèces sur un réseau vers un noeud i est donnée par la somme des flux partant de tous les noeuds j connectés à i vers ce noeud i . La diffusion d'une espèce u d'un noeud k vers un noeud l étant donnée par $D_u(u_k - u_l)$, nous pouvons alors déduire, selon la loi (discrète) de Fick, que le flux avec lequel la concentration u_i varie est donnée par

$$\dot{u}_i = D_u \sum_{j=1}^N A_{ij}(u_j - u_i) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= D_u \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j - D_u u_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \\ &= D_u \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j - D_u u_i k_i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où nous avons bien que dans (3.1), le terme $D_u(u_j - u_i)$ désigne le flux diffusion d'un noeud j vers le noeud i , et où nous avons pris la somme de tous les flux allant vers le noeud i . Le terme A_{ij} joue alors ici un rôle d'indicateur de présence de lien entre le noeud j et i . Nous pouvons ensuite réécrire (3.2) comme

$$\dot{u}_i = D_u \sum_{j=1}^N (A_{ij} - \delta_{ij}k_i)u_j.$$

Ces développements sont repris de [Muolo, 2018].

Ainsi, en introduisant la matrice Laplacienne L , dont les composantes sont données par $L_{ij} = A_{ij} - k_i\delta_{ij}$, nous avons alors que la diffusion de l'espèce u vers le noeud i est donnée par $D_u \sum_{j=1}^N L_{ij}u_j$ et la diffusion de l'espèce v vers le noeud i , par $D_v \sum_{j=1}^N L_{ij}v_j$, avec, comme dans le cas continu (1.1), D_u et D_v les coefficients de diffusion. La matrice Laplacienne L a la propriété de ne posséder que des valeurs propres négatives. Elle possède aussi toujours $\lambda = 0$ comme valeur propre, associée au vecteur propre $(1, 1, \dots, 1)^\top$ [Newman, 2018].

Les équations de réaction-diffusion sur réseau deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_i(t) = f(u_i, v_i) + D_u \sum_{j=1}^N L_{ij}u_j \\ \frac{d}{dt}v_i(t) = g(u_i, v_i) + D_v \sum_{j=1}^N L_{ij}v_j \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Remarquons que les dérivées partielles temporelles du système pour un domaine continu (1.1)

sont ici des dérivées totales. Cela est dû au fait que la dépendance spatiale est dans ce cas uniquement due au noeud, ainsi, les concentrations ne dépendent plus d'un espace continu (mais uniquement du noeud i auquel elles appartiennent). Remarquons aussi brièvement en comparant les équations de réaction-diffusion pour un support continu (1.1) et pour un réseau (3.3) que l'opérateur Laplacien ∇^2 des équations (1.1) est devenu dans les équations (3.3) la matrice Laplacienne L . Nous pouvons dès lors voir la matrice Laplacienne comme une sorte de discrétisation de l'opérateur Laplacien. C'est en effet exactement le cas lorsque le réseau considéré est un treillis.

Considérons (u^*, v^*) la solution homogène stationnaire du système (3.3), telle que $f(u^*, v^*) = 0$ et $g(u^*, v^*) = 0$. Nous pouvons, comme pour le cas continu, définir la jacobienne du système homogène, évaluée à l'équilibre (u^*, v^*)

$$J_0 = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix},$$

où les notations utilisées sont celles introduites précédemment, à savoir, $f_u = \frac{\partial}{\partial u} f(u^*, v^*)$ (et pareillement pour le reste des dérivées partielles). Identiquement au cas continu, le système est stable si et seulement si

$$\begin{cases} \operatorname{tr} J_0 < 0 \\ \det J_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_u + g_v < 0 \\ f_u g_v - g_u f_v > 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Nous perturbons maintenant l'équilibre avec une perturbation inhomogène

$$\begin{cases} u_i(t) = u^* + \delta u_i(t) \\ v_i(t) = v^* + \delta v_i(t) \end{cases} ,$$

que nous introduisons dans le système (3.3) pour avoir

$$\begin{cases} \dot{\delta u}_i = f(u^* + \delta u_i, v^* + \delta v_i) + D_u \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta u_j \\ \dot{\delta v}_i = g(u^* + \delta u_i, v^* + \delta v_i) + D_v \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta v_j \end{cases} . \quad (3.5)$$

En effet, à l'équilibre, les termes $D_u \sum_{j=1}^N L_{ij} u^*$ et $D_v \sum_{j=1}^N L_{ij} v^*$ sont tous deux nuls, par définition de l'équilibre homogène.

Nous pouvons linéariser le système (3.5) en utilisant le développement de Taylor au premier ordre. Nous obtenons alors

$$\begin{cases} \dot{\delta u}_i = f_u \delta u_i + f_v \delta v_i + D_u \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta u_j \\ \dot{\delta v}_i = g_u \delta u_i + g_v \delta v_i + D_v \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta v_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Ce système (3.6) de dimension $2N$ peut être réécrit sous forme matricielle comme

$$\dot{\mu} = \tilde{J}\mu,$$

où $\tilde{J} = J + DL$, $\mu = (\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_N, \delta v_1, \dots, \delta v_N)^\top$, $J = \begin{pmatrix} f_u I_N & f_v I_N \\ g_u I_N & g_v I_N \end{pmatrix}$, et $DL = \begin{pmatrix} D_u L & 0_N \\ 0_N & D_v L \end{pmatrix}$, I_N étant la matrice identité de dimension N et 0_N la matrice nulle de dimension N .

Grâce au théorème spectral, nous avons que les vecteurs propres de la matrice Laplacienne L forment une base orthonormale et, par conséquent, ces vecteurs propres sont linéairement indépendants. Ce théorème est effectivement applicable, car la matrice Laplacienne L est ici symétrique et possède bien des entrées réelles, ce qui est la condition nécessaire du théorème spectral. Soient $\{\Lambda^{(\alpha)}\}_{\alpha=1, \dots, N}$ ses valeurs propres et $\{\nu^{(\alpha)}\}_{\alpha=1, \dots, N}$ ses vecteurs propres associés, nous avons la relation suivante

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} \nu_j^{(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \nu_i^{(\alpha)}.$$

La solution du système (3.6) peut donc s'exprimer dans la base des vecteurs propres de L comme

$$\begin{cases} \delta u_i(t) = \sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \\ \delta v_i(t) = \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \end{cases},$$

avec β_α et σ_α les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales du système. Nous pouvons insérer cette solution dans le système (3.6) et ainsi obtenir

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \lambda_\alpha \nu_i^{(\alpha)} = f_u \left(\sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) + f_v \left(\sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) + D_u \Lambda^{(\alpha)} \left(\sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) \\ \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \lambda_\alpha \nu_i^{(\alpha)} = g_u \left(\sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) + g_v \left(\sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) + D_v \Lambda^{(\alpha)} \left(\sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} \right) \end{cases}.$$

En développant les sommes et en identifiant terme à terme, nous obtenons

$$\begin{cases} \beta_\alpha \lambda_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} = f_u \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} + f_v \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} + D_u \Lambda^{(\alpha)} \nu_i^{(\alpha)} \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \\ \sigma_\alpha \lambda_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} = g_u \beta_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} + g_v \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \nu_i^{(\alpha)} + D_v \Lambda^{(\alpha)} \nu_i^{(\alpha)} \sigma_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_\alpha \lambda_\alpha = f_u \beta_\alpha + f_v \sigma_\alpha + D_u \Lambda^{(\alpha)} \beta_\alpha \\ \sigma_\alpha \lambda_\alpha = g_u \beta_\alpha + g_v \sigma_\alpha + D_v \Lambda^{(\alpha)} \sigma_\alpha \end{cases},$$

que nous pouvons réécrire sous forme matricielle comme

$$\lambda_\alpha \begin{pmatrix} \beta_\alpha \\ \sigma_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u + D_u \Lambda^{(\alpha)} & f_v \\ g_u & g_v + D_v \Lambda^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\alpha \\ \sigma_\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Nous pouvons observer que (3.7) correspond à N équations caractéristiques de solution λ_α , où la dépendance du réseau est obtenue via les valeurs propres de la matrice Laplacienne. Trouvons à présent la forme explicite des valeurs propres λ_α

$$\det \begin{pmatrix} f_u + D_u \Lambda^{(\alpha)} - \lambda_\alpha & f_v \\ g_u & g_v + D_v \Lambda^{(\alpha)} - \lambda_\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\alpha^2 - \lambda_\alpha (\Lambda^{(\alpha)}(D_u + D_v) + f_u + g_v) + D_u D_v (\Lambda^{(\alpha)})^2 + \Lambda^{(\alpha)}(f_u D_v + g_v D_u) + (f_u g_v - g_u f_v) = 0.$$

En posant $h(\Lambda^{(\alpha)}) = D_u D_v (\Lambda^{(\alpha)})^2 + \Lambda^{(\alpha)}(f_u D_v + g_v D_u) + (f_u g_v - g_u f_v)$, nous avons

$$\lambda_{\alpha 1,2} = \frac{\Lambda^{(\alpha)}(D_u + D_v) + f_u + g_v \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3.8)$$

avec $\Delta = (\Lambda^{(\alpha)}(D_u + D_v) + f_u + g_v)^2 - 4h(\Lambda^{(\alpha)})$. Ainsi, nous remarquons que λ_α est fonction de $\Lambda^{(\alpha)}$, avec $\Lambda^{(\alpha)}$ les valeurs propres du Laplacien L , présentes au nombre de N .

Remarquons que la solution du système (3.3) dépend de la structure du réseau, or dans ce cas, comme nous avons que la matrice Laplacienne est symétrique, ses valeurs propres sont automatiquement réelles. Ainsi, nous ne pouvons pas avoir de motifs de vague, car, pour en avoir, il faudrait alors que la partie imaginaire de la relation de dispersion, lorsque celle-ci est positive, soit non nulle. Nous voyons très bien que nous ne sommes pas dans ce cas, car la relation de dispersion dépend des valeurs propres de la matrice Laplacienne, réelles ici.

De manière analogue au cas continu, le système (3.6) est instable si et seulement si $h(\Lambda^{(\alpha)}) < 0$, qui est équivalent à la condition $h(k^2) < 0$ dans le cas continu. Dès lors, si nous voulons effectuer un changement de variable de k^2 vers $\Lambda^{(\alpha)}$, nous devons tenir compte du fait que $\Lambda^{(\alpha)}$ est toujours négatif alors que k^2 est positif et réel ; nous introduisons simplement un signe négatif et nous obtenons ainsi le changement de variable $k^2 = -\Lambda^{(\alpha)}$. Notons que dans ce cas, la matrice Laplacienne étant réelle, nous n'avons pas besoin d'imposer que $-\Lambda^{(\alpha)}$ le soit aussi, mais par la suite, nous considérons toujours $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ afin de nous assurer que cette quantité soit bien réelle. Nous pouvons donc écrire les conditions d'instabilité comme

$$\begin{cases} D_u g_v + D_v f_u > 0 \\ (f_u g_v - f_v g_u) - \frac{1}{4D_u D_v} (D_u g_v + D_v f_u)^2 < 0 \end{cases} .$$

Ainsi, la seule différence avec le cas continu réside dans le fait que les valeurs propres λ_α de la relation de dispersion prennent N valeurs discrètes plutôt qu'un ensemble de valeurs

continues. La relation de dispersion revient dans ce cas à étudier les valeurs de $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$, avec λ défini comme la partie réelle de la valeur propre λ_{α_1} dans (3.8), en fonction des valeurs de $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$, avec $\Lambda^{(\alpha)}$ les valeurs propres de la matrice Laplacienne L .

3.2 Application au modèle du Brusselator

Reprenons la même application que dans le cas continu, c'est-à-dire, le modèle du Brusselator. Les équations de celui-ci deviennent, sur un réseau,

$$\begin{cases} \dot{u}_i = 1 - (b+1)u_i + cu_i^2v_i + D_u \sum_{j=1}^N L_{ij}u_j \\ \dot{v}_i = bu_i - cu_i^2v_i + D_v \sum_{j=1}^N L_{ij}v_j \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Le réseau utilisé pour cette illustration est un réseau *small-world* Watts-Strogatz, dont la construction est explicitée au Chapitre 2.

Comme à la section 1.2, le point fixe homogène du système (3.9) est $(u^*, v^*) = (1, b/c)$. Nous pouvons observer, en faisant varier les paramètres, différents comportements du système (3.9). Afin d'observer ces comportements, le système à l'équilibre a été inhomogènement perturbé avec une perturbation de l'ordre de 5×10^{-2} .

Le premier comportement que nous observons est celui où le système se comporte de la même manière sur support continu que discret. Pour ce faire, nous utilisons un réseau Watts-Strogatz de $N = 20$ noeuds que nous illustrons à la Figure 3.1. Sur la Figure 3.2, nous illustrons la relation de dispersion ainsi que l'évolution des concentrations de l'espèce u sur chaque noeud i du réseau pour le modèle du Brusselator avec des paramètres fixés. Lorsque nous regardons la relation de dispersion¹ à la Figure 3.2, panel de gauche, nous observons qu'il existe, pour le cas discret, des valeurs $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ telles que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif, ce qui signifie que le système présente alors une instabilité de Turing. Nous remarquons aussi que c'est bien le cas pour le cas continu, en effet, il existe un intervalle de $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$, correspondant à k^2 dans le cas continu, tel que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif. Nous observons alors cette instabilité de Turing à la Figure 3.2, à droite, représentant l'évolution des concentrations² de l'espèce u sur chaque noeud i au cours du temps. Ainsi, chaque courbe du graphe correspond à un noeud du réseau, représenté à la Figure 3.1³. Le phénomène d'instabilité de Turing est représenté au niveau des concentrations des espèces par une séparation des trajectoires, depuis l'équilibre initialement stable, vers deux groupes, un supérieur à l'équilibre et un inférieur, constituant le

1. Obtenue sur Matlab de manière analogue au cas continu, nous avons simplement calculé le maximum de la partie réelle des valeurs propres λ_{α} , pour chaque valeur $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ et non plus pour k^2 .

2. Pour obtenir ces courbes de concentration, nous avons intégré dans Matlab le système d'équations (3.9) à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3, issue de [Füzfa, 2021].

3. Afin de les identifier, chaque noeud de la Figure 3.1 et sa courbe correspondante dans la Figure 3.2, à droite, ont la même couleur.

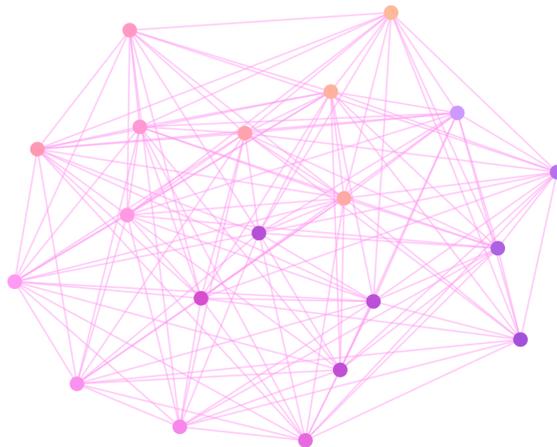


Figure 3.1 – Réseau Watts-Strogatz construit avec $N = 20$, $k = 15$ et $p = 0.5$.

nouvel état inhomogène. C'est bien ce que nous pouvons voir sur la Figure 3.2, à droite ; une partie des trajectoires se stabilise vers une valeur supérieure à celle de l'équilibre initialement stable, qui rappelons-le est 1, et l'autre partie des trajectoires se stabilise vers une valeur inférieure à celle de l'équilibre initialement stable.

Le deuxième comportement que nous pouvons observer est celui où, dans le cas continu, il y aurait une instabilité de Turing, mais dans le cas discret, dû au fait que les valeurs propres $\Lambda^{(\alpha)}$ (et donc par conséquent λ_α) ne prennent que des valeurs discrètes, nous n'observons pas d'instabilité de Turing. Ce phénomène est illustré à la Figure 3.3. Nous observons sur la Figure de la relation de dispersion 3.3, panel de gauche que dans le cas discret, aucune valeur propre n'est telle que sa partie réelle est positive (aucune étoile ne traverse la droite horizontale $y = 0$, elles sont toutes bien négatives), alors que dans le cas continu, représenté par la courbe mauve, nous pouvons trouver un intervalle de $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ (correspondant à k^2 dans le cas continu) tel que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif, ce qui correspond à l'instabilité de Turing. Ce phénomène est donc l'effet de la discrétisation spatiale. Nous observons alors, à la Figure 3.3, panel de droite, que les différentes concentrations tendent à retourner à leur état d'équilibre, c'est-à-dire ici, 1, après perturbation. Nous ne sommes donc pas en présence de motifs de Turing.

Le dernier cas que nous illustrons ici est celui où, autant pour le cas discret que continu, nous n'observons pas d'instabilité. Ce cas est illustré à la Figure 3.4. Sur la Figure 3.4, panel de gauche, nous observons qu'aucune valeur propre n'est telle que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif et qu'il n'existe aucun intervalle de $-\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ (correspondant, dans le cas continu, à un intervalle de k^2) tel que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif. Cela signifie alors que nous ne sommes pas en présence d'instabilité de Turing pour le jeu de paramètres considéré. Il s'agit bien de ce que nous observons à la Figure 3.4, panel de droite. En effet, après que l'équilibre ait été perturbé, les concentrations reviennent très vite à leur valeur à l'état d'équilibre (stable), à savoir, 1.

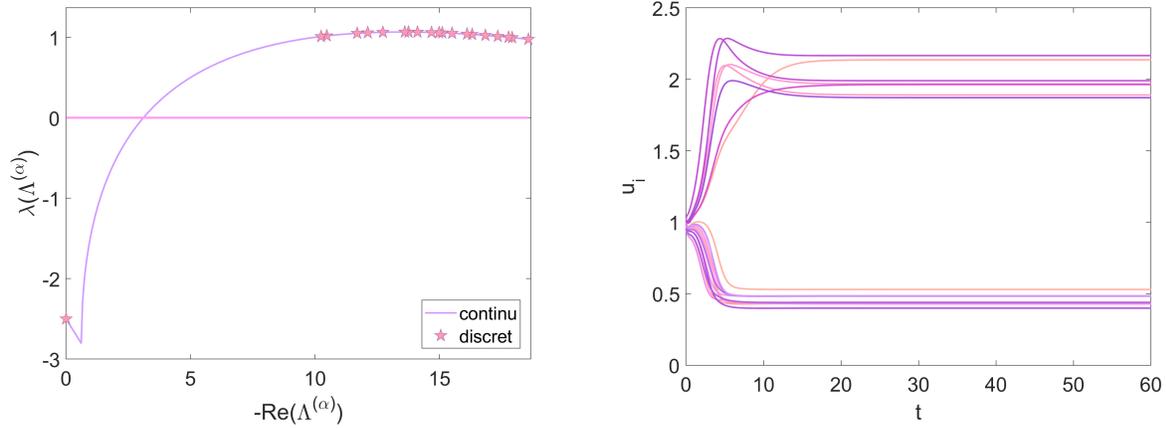


Figure 3.2 – Panel de gauche : relation de dispersion. Panel de droite : trajectoires des espèces u_i au cours du temps pour le modèle du Brusselator. Le réseau WS utilisé a été construit avec $N = 20$, $k = 15$ et $p = 0.5$. Les constantes utilisées sont $b = 6$, $c = 10$ et $D_u = 0.1$ et $D_v = 0.9$.

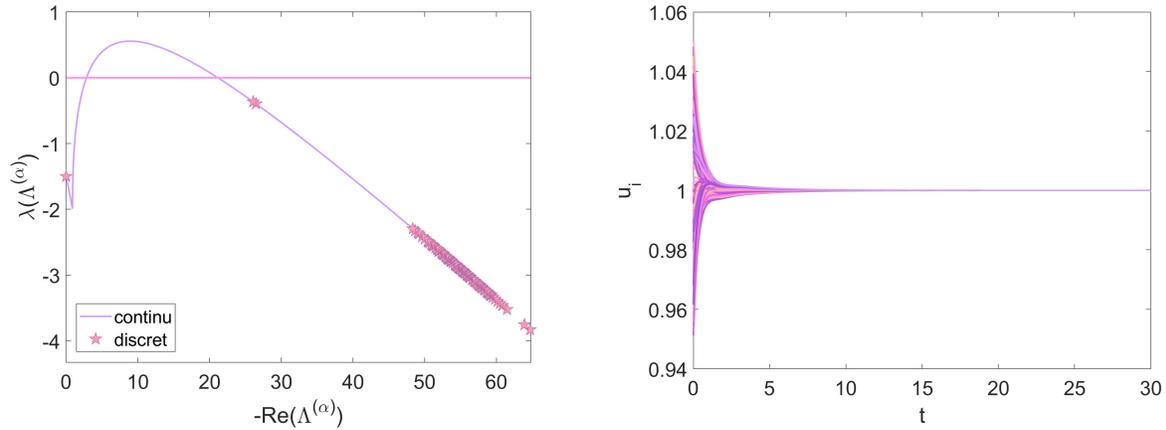


Figure 3.3 – Panel de gauche : relation de dispersion. Panel de droite : trajectoires des espèces u_i au cours du temps pour le modèle du Brusselator. Le réseau WS utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 55$ et $p = 0.1$. Les constantes utilisées sont $b = 4$, $c = 6$ et $D_u = 0.1$ et $D_v = 1$.

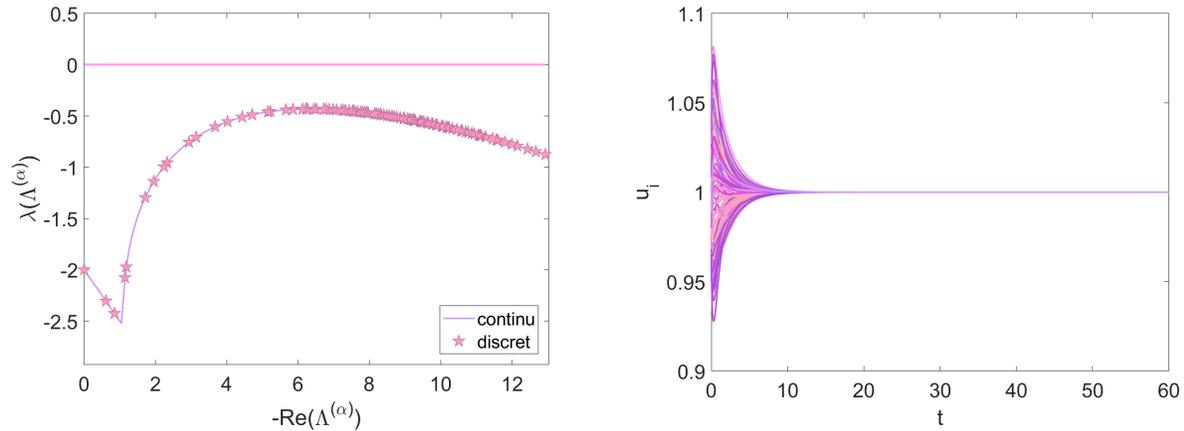


Figure 3.4 – Panel de gauche : relation de dispersion. Panel de droite : trajectoires des espèces u_i au cours du temps pour le modèle du Brusselator. Le réseau WS utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 8$ et $p = 0.1$. Les constantes utilisées sont $b = 5$, $c = 8$ et $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$.

3.3 Instabilité de Turing sur réseaux dirigés

Dans cette section, nous nous inspirons de l'article *The theory of pattern formation on directed networks* de [Asllani et al., 2014], pour reprendre la théorie de Turing sur les réseaux, à présent appliquée au cas des réseaux dirigés, c'est-à-dire le cas où nous n'avons plus $A_{ij} = A_{ji}$. La matrice d'adjacence n'est donc plus symétrique. Comme déjà mentionné dans le Chapitre 2, nous pouvons alors interpréter le degré du noeud i , $k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$, comme le nombre de liens entrant du noeud i . La matrice d'adjacence n'étant pas symétrique, la matrice Laplacienne ne l'est donc pas non plus. Nous n'avons alors pas la garantie de l'existence d'une base de vecteurs propres (car une hypothèse du théorème spectral est d'avoir une matrice symétrique). De ce fait, nous faisons l'hypothèse que la matrice Laplacienne L soit diagonalisable, c'est-à-dire, posséder N vecteurs propres linéairement indépendants. Nous relâcherons par la suite cette hypothèse, au Chapitre 5, où nous considérerons les réseaux dégénérés, ne possédant pas une matrice Laplacienne diagonalisable. Ainsi, nous pouvons aussi, comme précédemment, analyser le système sous forme de N systèmes 2×2 au lieu de 1 système $2N \times 2N$. Remarquons aussi que dans ce cas, comme la matrice Laplacienne n'est plus symétrique, nous n'avons plus la garantie que les valeurs propres de celle-ci sont réelles.

Reprenons la relation de dispersion (3.8) (où nous prenons λ_α dépendant de $+\sqrt{\Delta}$), que nous pouvons réécrire

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2} \left(\text{tr } J_\alpha + \sqrt{(\text{tr } J_\alpha)^2 - 4 \det J_\alpha} \right) \quad (3.10)$$

en introduisant la notation $J_\alpha = \begin{pmatrix} f_u + D_u \Lambda^{(\alpha)} & f_v \\ g_u & g_v + D_v \Lambda^{(\alpha)} \end{pmatrix}$. Pour plus de concision, nous avons aussi noté $\text{tr } J_\alpha = \Lambda^{(\alpha)}(D_u + D_v) + f_u + g_v$ ainsi que $\det J_\alpha = h(\Lambda^{(\alpha)})$.

Comme $\Lambda^{(\alpha)}$ est ici potentiellement complexe, nous pouvons la décomposer en fonction de sa partie réelle et de sa partie imaginaire, $\Lambda^{(\alpha)} = \text{Re}(\Lambda^{(\alpha)}) + i\text{Im}(\Lambda^{(\alpha)})$ où $\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})$ est négatif. De ce fait, nous avons aussi

$$\begin{aligned} \text{Re}(\text{tr } J_\alpha) &= \text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})(D_u + D_v) + f_u + g_v \\ \text{Im}(\text{tr } J_\alpha) &= \text{Im}(\Lambda^{(\alpha)})(D_u + D_v) \\ \text{Re}(\det J_\alpha) &= D_u D_v \left(\text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})^2 + \text{Im}(\Lambda^{(\alpha)})^2 \right) + \text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})(f_u D_v + g_v D_u) + (f_u g_v - g_u f_v) \\ \text{Im}(\det J_\alpha) &= 2D_u D_v \text{Re}(\Lambda^{(\alpha)})\text{Im}(\Lambda^{(\alpha)}) + \text{Im}(\Lambda^{(\alpha)})(f_u D_v + g_v D_u). \end{aligned}$$

Ainsi, la relation de dispersion (3.10) devient

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2} \left[\text{Re}(\text{tr } J_\alpha) + i\text{Im}(\text{tr } J_\alpha) + \sqrt{\text{Re}(\text{tr } J_\alpha)^2 + i2\text{Re}(\text{tr } J_\alpha)\text{Im}(\text{tr } J_\alpha) - \text{Im}(\text{tr } J_\alpha)^2 - 4(\text{Re}(\det J_\alpha) + i\text{Im}(\det J_\alpha))} \right] \quad (3.11)$$

Rappelons maintenant une propriété des nombres complexes ; pour un nombre complexe $z = a + ib$, sa racine carrée est donnée par

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + |z|}{2}} + i \text{sgn}(b) \sqrt{\frac{-a + |z|}{2}} \right),$$

avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Grâce à cette propriété, nous pouvons développer la racine carrée présente dans (3.11) et ainsi obtenir

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2} \left[\text{Re}(\text{tr } J_\alpha) + i\text{Im}(\text{tr } J_\alpha) + \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + i \text{sgn}(B) \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \right]$$

où nous avons posé $A := \text{Re}(\text{tr } J_\alpha)^2 - \text{Im}(\text{tr } J_\alpha)^2 - 4\text{Re}(\det J_\alpha)$, la partie réelle de l'intérieur de la racine carrée de (3.11), et $B := 2\text{Re}(\text{tr } J_\alpha)\text{Im}(\text{tr } J_\alpha) - 4\text{Im}(\det J_\alpha)$, sa partie imaginaire. En posant à présent

$$\gamma := \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \quad \text{et} \quad \mu := \text{sgn}(B) \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}},$$

la relation de dispersion (3.11) devient enfin

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2} (\text{Re}(\text{tr } J_\alpha) + \gamma) + \frac{1}{2} i (\text{Im}(\text{tr } J_\alpha) + \mu), \quad (3.12)$$

où nous remarquons bien une contribution imaginaire, qui n'était pas présente dans le cas des réseaux non dirigés. En plus de cela, [Asllani et al., 2014] remarquent qu'un système de réaction-diffusion devrait présenter un motif de vague à un moment donné, ce qui n'est pas le cas pour un support symétrique. Nous illustrons cela par la suite. Ce motif de vague est possible grâce à la contribution imaginaire dans la relation de dispersion. Comme dit précédemment, un tel motif n'est possible que si la partie imaginaire de la relation de dispersion est non nulle lorsque la relation de dispersion est positive, ce qui est bien le cas ici.

La condition pour avoir une instabilité de Turing est d'avoir $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ positif, que nous pouvons aussi réécrire, grâce à (3.12), $|\operatorname{Re}(\operatorname{tr} J_\alpha)| \leq \gamma$. Après de lourds calculs, non développés ici mais réalisés par [Asllani et al., 2014], nous pouvons réécrire la condition d'instabilité comme

$$S_2(\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})) \left[\operatorname{Im}(\Lambda^{(\alpha)})^2 \right] \leq -S_1(\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})), \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} S_1(\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})) &= C_{14}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})^4 + C_{13}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})^3 + C_{12}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})^2 + C_{11}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)}) + C_{10}, \\ S_2(\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})) &= C_{22}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)})^2 + C_{21}\operatorname{Re}(\Lambda^{(\alpha)}) + C_{20} \end{aligned}$$

et les coefficients

$$\begin{aligned} C_{14} &= D_u D_v (D_u + D_v)^2 \\ C_{13} &= (D_u + D_v)^2 (f_u D_v + g_v D_u) + 2(f_u + g_v) D_u D_v (D_u + D_v) \\ C_{12} &= (f_u g_v - g_u f_v) (D_u + D_v)^2 + (f_u + g_v)^2 D_u D_v + 2(f_u + g_v) (D_u + D_v) (f_u D_v + g_v D_u) \\ C_{11} &= 2(f_u + g_v) (D_u + D_v) (f_u v_v - g_u f_v) + (f_u + g_v)^2 (f_u D_v + g_v D_u) \\ C_{10} &= (f_u g_v - g_u f_v) (f_u + g_v)^2 \\ C_{22} &= D_u D_v (D_u - D_v)^2 \\ C_{21} &= (f_u D_v + g_v D_u) (D_u - D_v)^2 \\ C_{20} &= f_u g_v (D_u - D_v)^2. \end{aligned}$$

3.4 Application au modèle du Brusselator

Dans cette Section, nous utilisons encore une fois l'exemple du modèle du Brusselator afin d'illustrer les effets produits par l'utilisation de réseaux dirigés plutôt que non dirigés. Nous avons modifié l'algorithme de Newman-Watts⁴ de [Newman, 2018], afin de prendre en compte un réseau dirigé, c'est-à-dire une matrice d'adjacence non symétrique. Les paramètres du système utilisés sont ici ceux utilisés dans l'article *The theory of pattern formation on directed networks* de [Asllani et al., 2014] afin d'avoir des résultats similaires; les constantes du

4. Notons qu'une analyse similaire peut aussi être réalisée avec une adaptation des réseaux construits sur base de l'algorithme Watts-Strogatz, [Strogatz & Watts, 1998].

modèle du Brusselator sont $b = 9$ et $c = 30$, et les paramètres de diffusion sont $D_u = 1$ et $D_v = 7$. Tous les réseaux construits dans cette section sont construits avec $N = 100$ noeuds et $K = 4$ voisins. Le seul paramètre que nous changeons est p , utilisé dans l'algorithme de Newman-Watts lors de la création du réseau comme la probabilité d'ajouter un lien au hasard.

Le premier cas que nous étudions est celui associé à la probabilité $p = 0.1$, illustré à la Figure 3.5. Sur le panel de droite, nous représentons les valeurs propres de la matrice Laplacienne $\Lambda^{(\alpha)}$ dans le plan complexe par des points et la zone d'instabilité du système est représentée par l'aire rose⁵. Cette zone représente la condition d'instabilité, établie précédemment comme (3.13). Nous observons donc sur cette Figure que certaines valeurs propres se trouvent dans la zone d'instabilité, signifiant que le système présente une instabilité de Turing. Cette affirmation est confirmée par la relation de dispersion, illustrée à la Figure 3.5, panel de gauche. En effet, si dans le cas continu, nous n'observons pas d'instabilité de Turing, nous l'observons pour le cas discret avec réseau dirigé. Il existe bien des valeurs propres telles que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif, correspondant à une instabilité de Turing. Nous observons aussi sur cette Figure un phénomène lié à l'utilisation d'un réseau dirigé; les valeurs propres, représentées par les étoiles, se sont soulevées de la courbe représentant le cas continu. Ainsi, dans ce cas, le système présente une instabilité de Turing alors que dans le cas d'un réseau non dirigé, illustré à la Figure 3.6, celui-ci ne présente pas d'instabilité, car les valeurs propres se trouvent alors sur la même courbe que le cas continu. Nous l'observons à la Figure 3.6, panel de gauche; la courbe de la relation de dispersion ainsi que les étoiles représentant le cas du réseau symétrisé sont bien négatives. Nous pouvons aussi remarquer à la Figure 3.6, panel de droite, que toutes les valeurs propres du Laplacien sont bien réelles (elles possèdent bien toutes une partie imaginaire nulle) et ne rentrent donc pas dans la zone d'instabilité. Notons que pour pouvoir comparer les deux réseaux, nous avons simplement symétrisé la matrice d'adjacence correspondant au réseau dirigé, ainsi correspondant maintenant à la version non dirigée du réseau. Cette symétrisation est réalisée en supprimant la partie triangulaire inférieure de la matrice d'adjacence et en réécrivant dans cette partie triangulaire inférieure les éléments symétriques, présents dans la partie triangulaire supérieure de la matrice d'adjacence.

L'évolution temporelle des motifs de Turing peut être représentée visuellement à l'aide de la fonction `heatmap` de Matlab. Cette approche est complémentaire à l'observation des solutions $u_i(t)$ en fonction du temps. Nous illustrons donc les motifs présents dans ce premier cas à la Figure 3.7, panel de gauche. En effet, ce graphe représente l'évolution au cours du temps de la concentration de l'espèce u sur chaque noeud i du réseau ($i = 1, \dots, 100$). Nous pouvons bien voir sur cette Figure un motif de vague, représentant un motif de Turing. A l'inverse, pour le cas non dirigé et donc symétrique, nous n'observons pas de motifs, ce que nous observons bien sur le panel de droite de la Figure 3.7. La couleur uniforme nous indique bien que les différentes concentrations retournent à l'équilibre stable homogène.

5. De manière similaire au cas continu, cette zone est obtenue sur Matlab grâce à la fonction `area`, affichant l'aire sous la courbe que la condition d'instabilité (3.13) représente.

Si nous étudions à présent le cas où $p = 0.5$, nous pouvons observer que, sur la Figure 3.8, panel de gauche, représentant les valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe, certaines valeurs propres sont présentes à l'intérieur de la zone d'instabilité, signifiant que nous sommes encore une fois en présence d'une instabilité de Turing. Cependant, comparativement au cas précédent où $p = 0.1$, nous remarquons que moins de valeurs propres sont présentes dans cette zone. En analysant la relation de dispersion, illustrée à la Figure 3.8, panel de droite, nous pouvons tirer les mêmes conclusions, à savoir, que moins de valeurs propres sont telles que $\lambda(\Lambda^{(\alpha)})$ est positif. Nous observons aussi que le phénomène de "décollement" des valeurs propres par rapport à la courbe du cas continu est bien moins important comparé au cas où $p = 0.1$.

Nous terminons par le cas où $p = 0.9$. Sur la Figure 3.9, panel de gauche, représentant les valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe, nous pouvons observer qu'aucune d'entre elles ne se trouve dans la zone d'instabilité. Ainsi, dans ce cas, nous ne sommes pas en présence d'instabilité de Turing. Nous observons sur la relation de dispersion, à la Figure 3.9, panel de droite, que les valeurs propres associées à ce cas (discret, sur réseau dirigé) sont presque toutes sur la courbe associée au cas continu. En effet, le phénomène de "décollement" est très faible dans ce cas. Ainsi, comme la courbe de la relation de dispersion correspondant au cas continu est négative, le décollement n'est pas assez important pour que les valeurs propres traversent le seuil d'instabilité.

Nous pouvons conclure de ces différentes observations que lorsque p , la probabilité d'ajouter un nouveau lien dans l'algorithme de Newman-Watts, augmente, nous observons de moins en moins de phénomène de décollement des valeurs propres par rapport au cas non dirigé.

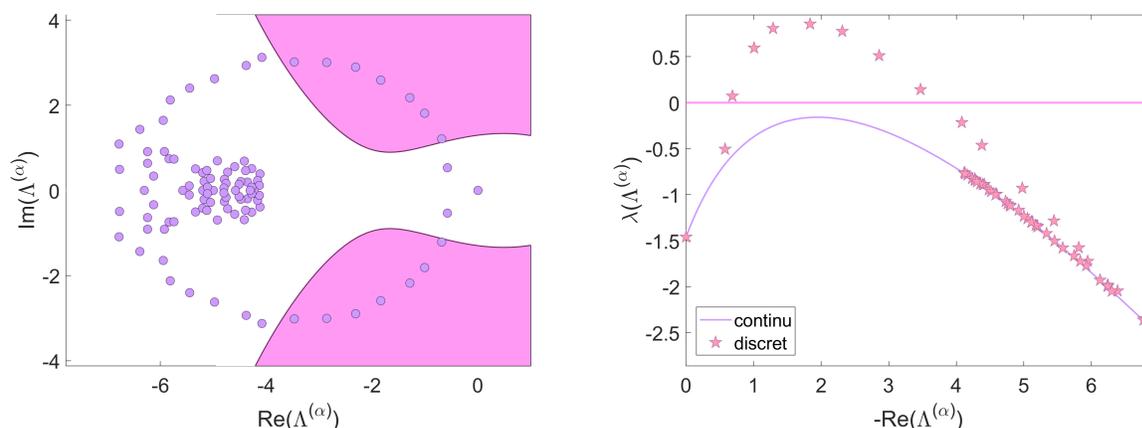


Figure 3.5 – Panel de gauche : valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe, avec en rose, la représentation de la condition d'instabilité (3.13). Panel de droite : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator. Le réseau dirigé NW utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 4$ et $p = 0.1$. Les constantes du système utilisées sont $b = 9$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$.

Nous pouvons alors dire que pour une grande probabilité p , si le système reste stable après perturbation de l'équilibre pour le cas des réseaux non dirigés, il en sera de même pour les réseaux dirigés. Notons que la raison du décolllement des valeurs propres est uniquement liée à la contribution imaginaire dans la relation de dispersion (3.12), inexistante dans le cas symétrique.

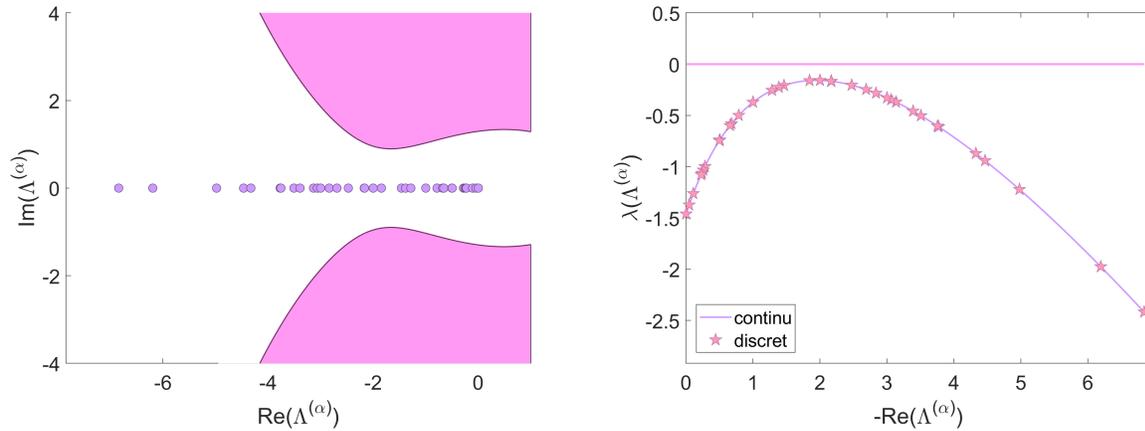


Figure 3.6 – Panel de gauche : valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe. Panel de droite : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator. Le réseau NW utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 4$ et $p = 0.1$. Les constantes utilisées sont $b = 9$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$. Ce réseau a ensuite été symétrisé pour correspondre à la version non dirigée du réseau de la Figure 3.5.

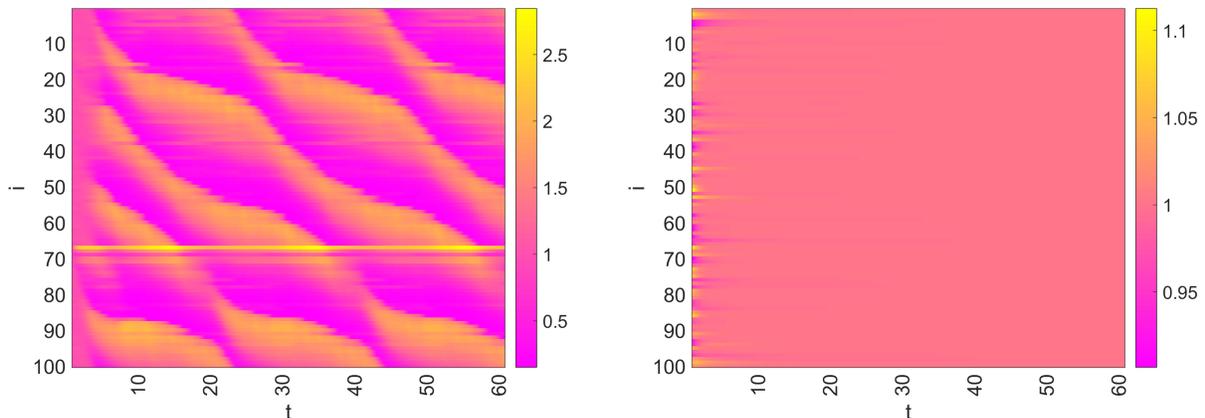


Figure 3.7 – Évolution des concentrations de l'espèce u sur chaque noeud i du réseau NW construit avec les constantes $N = 100$, $k = 4$ et $p = 0.1$ pour le panel de gauche et l'équivalent symétrique de ce réseau pour le panel de droite. Les constantes du système utilisées sont $b = 9$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$.

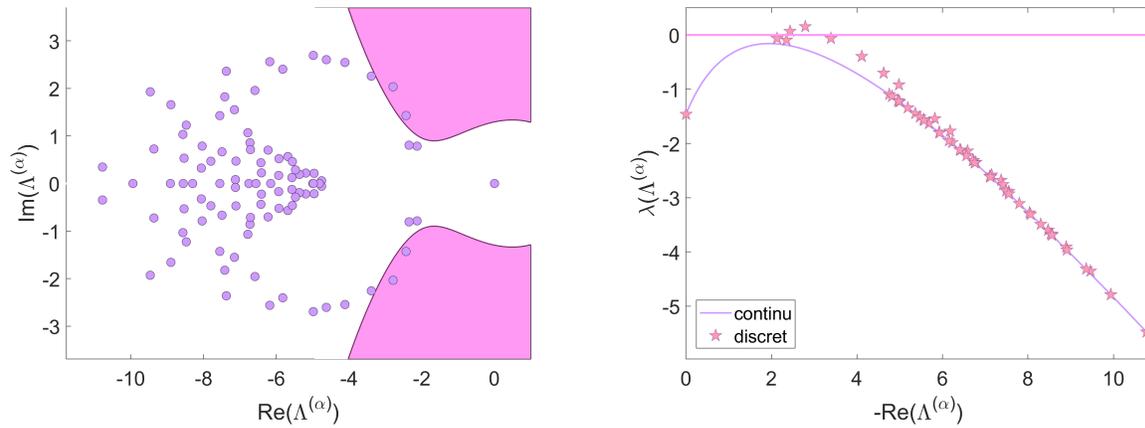


Figure 3.8 – Panel de gauche : valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe. Panel de droite : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator. Le réseau NW utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 4$ et $p = 0.5$. Les constantes utilisées sont $b = 9$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$.

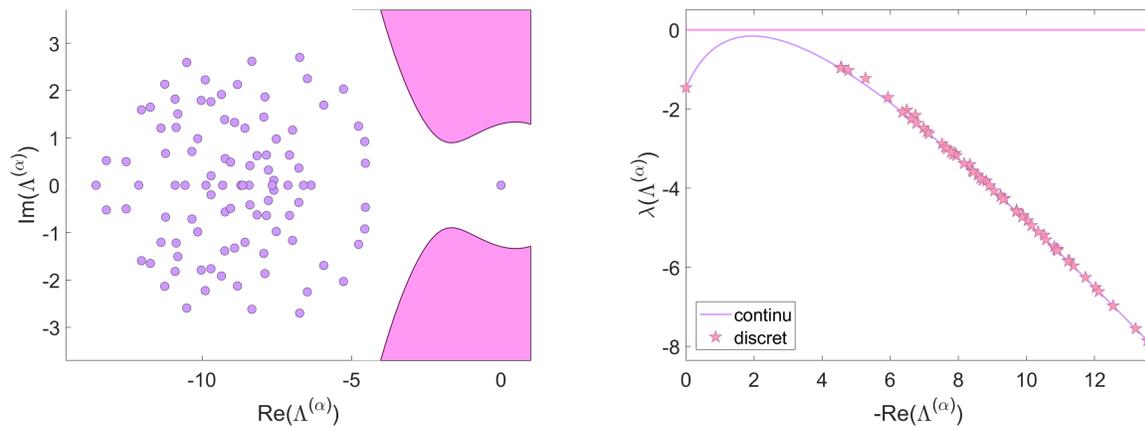


Figure 3.9 – Panel de gauche : valeurs propres de la matrice Laplacienne dans le plan complexe. Panel de droite : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator. Le réseau NW utilisé a été construit avec $N = 100$, $k = 4$ et $p = 0.9$. Les constantes utilisées sont $b = 9$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$.

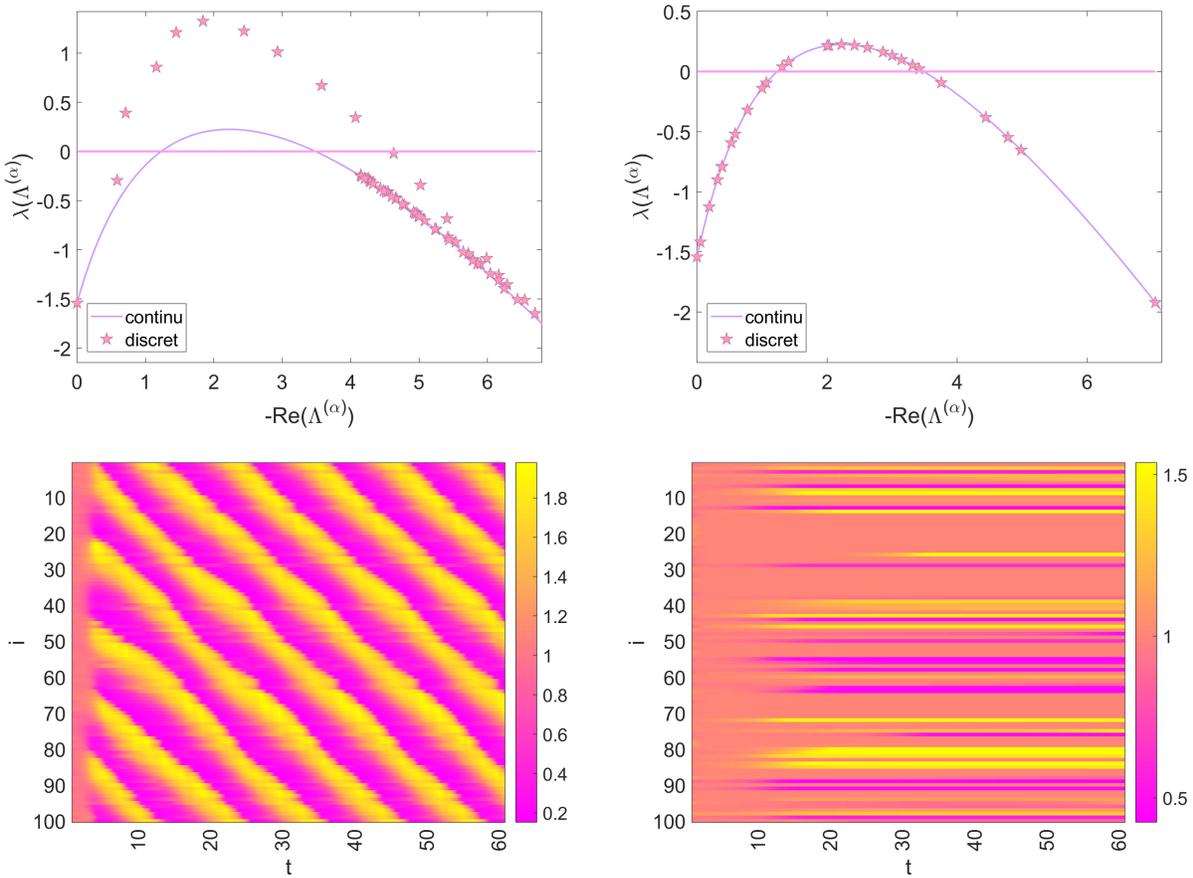


Figure 3.10 – Panels du haut : relations de dispersion, panels du bas : évolution des concentrations de l'espèce u sur chaque noeud i du réseau, panel de gauche : pour un NW de $N = 100$ noeuds $k = 4$ et $p = 0.1$, panel de droite : la version symétrique de ce réseau. Les constantes utilisées sont $b = 10$, $c = 30$ et $D_u = 1$ et $D_v = 7$.

Comme remarqué dans la Section précédente (3.3), un système de réaction-diffusion de deux espèces devrait présenter un motif de vague à un moment donné, ce que nous avons déjà pu voir à la Figure 3.7 (panel de gauche), alors que pour le cas symétrique cela n'est pas le cas. Sur la Figure 3.10, nous illustrons le cas où la relation de dispersion est positive, aussi bien pour le cas d'un réseau symétrique que dirigé, indiquant alors la présence de motifs de Turing dans les deux cas. En effet, à la Figure 3.10, panel du haut, la relation de dispersion est bien positive pour le cas dirigé (panel de gauche) ainsi que symétrique (panel de droite). Sur le panel du bas de la Figure 3.10, nous illustrons l'évolution des concentrations de l'espèce u au cours du temps, sur chaque noeud i du réseau considéré. Nous observons que pour la version dirigée (panel de gauche), nous avons bien un motif de vague, alors que pour la version symétrique (panel de droite), le motif présent est plutôt stationnaire. Nous avons donc bien illustré la remarque de [Asllani et al., 2014].

Dans ce Chapitre, nous avons étudié la théorie de Turing, précédemment étudiée au Chapitre 1 pour un domaine continu, pour un domaine discret, que nous modélisons par un réseau. Nous avons tout d'abord considéré cette théorie pour un réseau non dirigé et avons observé que la seule différence avec le cas continu est le fait que la relation de dispersion ne peut prendre que des valeurs discrètes. Cela permet donc, pour certaines valeurs, de ne pas avoir d'instabilité de Turing alors que c'est le cas pour un domaine continu. Ce phénomène est possible car la relation de dispersion du cas continu peut être positive, mais sans qu'il existe de valeur propre de la matrice Laplacienne telle que la relation de dispersion est positive. Lorsque nous considérons un réseau dirigé, une contribution imaginaire apparaît dans la relation de dispersion, dû au fait que la matrice d'adjacence du réseau n'est pas symétrique. Ainsi, nous observons pour ce cas un phénomène de décollement de la relation de dispersion du cas des réseaux dirigés par rapport au cas continu. Ceci peut alors entraîner une instabilité de Turing, alors que ce n'est pas le cas pour le cas continu ou le cas des réseaux non dirigés ; en effet, si la relation de dispersion liée au cas continu est toujours négative, certaines valeurs propres de la matrice Laplacienne du réseau peuvent être telles que la relation de dispersion se décolle tellement de la version continue que certaines valeurs sont positives, indiquant un motif de Turing.

4

Motifs de Turing sur réseaux non-normaux

Dans le Chapitre précédent, nous avons étudié la théorie de Turing sur un domaine discret, un réseau. Nous avons étudié les réseaux non dirigés ainsi que dirigés. Dans ce Chapitre, nous étudions une catégorie de réseaux supplémentaire; les réseaux non-normaux. En effet, ceux-ci peuvent représenter une plus grande partie des réseaux empiriques, comme cela est mentionné dans l'article *Structure and dynamical behavior of non-normal networks* de [Asllani et al., 2018]. Nous commençons tout d'abord par introduire ces réseaux particuliers ainsi que l'effet qu'ils peuvent avoir sur la dynamique d'un système. Nous étudions ensuite les motifs de Turing sur ce type de réseaux grâce au modèle du Brusselator, en reproduisant les observations de l'article *Patterns of non-normality in networked systems* de [Muolo et al., 2019].

4.1 Théorie des réseaux non-normaux

Il est dit d'un réseau qu'il est non-normal si sa matrice d'adjacence A ne commute pas avec sa transposée conjuguée, c'est-à-dire si $AA^* \neq A^*A$. Cette propriété est souvent observée dans les réseaux empiriques [Asllani & Carletti, 2018, Asllani et al., 2018], c'est pourquoi il est intéressant d'étudier la théorie de Turing sur leur équivalent synthétique si nous voulons étendre la validité de la théorie. Notons que la plupart des réseaux dirigés sont non-normaux. Nous n'en avons pas remarqué les effets précédemment car la non-normalité était très faible, donc négligeable pour nos analyses.

Nous commençons par définir la **partie hermitienne** d'une matrice A

$$H(A) = \frac{A + A^T}{2}.$$

Ceci nous permet de définir l'**abscisse numérique** de la matrice A : la plus grande valeur propre de la partie hermitienne de A

$$\omega(A) = \sup(\sigma(H(A))),$$

où nous avons que $\sigma(A)$ représente le spectre de la matrice A . Nous appelons **abscisse spectrale** la plus grande partie réelle du spectre de A

$$\alpha(A) = \sup(\operatorname{Re}(\sigma(A))).$$

Notons que lorsque la matrice A est normale, c'est-à-dire si $AA^* = A^*A$, ces deux dernières définitions sont équivalentes, alors que dans le cas où elle ne l'est pas, nous avons toujours que $\alpha(A) < \omega(A)$.

Reprenons l'exemple repris dans l'annexe de l'article *Topological resilience in non-normal networked systems* de [Asllani & Carletti, 2018] d'un système linéaire stable

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x_0 = 1 \end{cases}, \quad \text{où } A \text{ est stable et non-normale.}$$

Sa solution est $x(t) = e^{At}x_0$ et décroît jusqu'à 0, son équilibre stable. Observons à présent l'effet que peut avoir la non-normalité d'une matrice sur la dynamique de ce système.

Notons tout d'abord que l'abscisse spectrale $\alpha(A)$ représente la dynamique du système sur le long terme, c'est-à-dire le comportement des trajectoires du système lorsque le temps tend à l'infini, alors que l'abscisse numérique $\omega(A)$ représente la dynamique sur le court terme, c'est-à-dire le comportement des trajectoires peu de temps après la perturbation de l'équilibre. Pour expliquer cela, reprenons les développements de [Asllani & Carletti, 2018] dans l'annexe de l'article *Topological resilience in non-normal networked systems*, découlant du livre *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators* de [Trefethen & Embree, 2005].

L'abscisse numérique peut être calculée comme ¹

$$\begin{aligned} \sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\left(\frac{1}{\|x\|} \frac{d\|x\|}{dt} \right) \Big|_{t=0} \right] &= \sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\left(\frac{1}{\|x\|} \frac{d\sqrt{x^*x}}{dt} \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\left(\frac{x^* dx/dt + (dx/dt)^* x}{2\|x\|^2} \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\left(\frac{x^*(A + A^*)x}{2\|x\|^2} \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\left(\frac{x_0^* H(A) x_0}{x_0^* x_0} \right) \right], \end{aligned}$$

où x_0 est la condition initiale du système. Nous pouvons dès lors remarquer que cette expression étudie le comportement initial de la norme de la trajectoire. Remarquons que la dernière

1. Notons qu'aussi bien pour la définition de l'abscisse numérique que spectrale, nous utilisons le sup et pas un max. Ceci est dû au fait que la théorie développée dans le livre de [Trefethen & Embree, 2005] concerne les matrices mais aussi les opérateurs, dont le maximum peut ne pas être atteint, d'où l'utilisation du sup.

expression est bien équivalente à la définition de l'abscisse numérique ; pour dire cela, il suffit d'utiliser le principe de Rayleigh. L'abscisse spectrale peut quant à elle être calculée comme

$$\sup_{\|x_0\| \neq 0} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\|x\|} \frac{d\|x\|}{dt} \right) \right],$$

et représente donc bien l'étude de la dynamique sur le long terme (lorsque $t \rightarrow +\infty$). Grâce à sa définition de valeur propre ayant la plus grande partie réelle, nous aurions déjà pu déduire que l'abscisse spectrale détermine la dynamique à long terme.

Comme dans le cas que nous étudions, le système est stable, nous avons que $\alpha(A) < 0$, car un système est stable si la partie réelle de ses valeurs propres est négative. Si $\omega(A) > 0$, alors nous avons qu'une croissance transitoire apparaît, ce que nous illustrons ci-après.

Afin d'observer l'effet d'une matrice non-normale dans la dynamique du système, considérons deux matrices A_1 et A_2 telles que A_1 soit faiblement non-normale et possède une abscisse numérique $\omega(A_1)$ négative et A_2 soit fortement non-normale et possède une abscisse numérique $\omega(A_2)$ positive

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notons que, comme ces deux matrices sont non-normales, nous avons $\alpha(A_1) < \omega(A_1)$ et $\alpha(A_2) < \omega(A_2)$.

Nous traçons à la Figure 4.1 la norme des trajectoires $x_1(t) = e^{A_1 t} x_0$ et $x_2(t) = e^{A_2 t} x_0$ dont la condition initiale x_0 est l'équilibre stable perturbé. Assez rapidement, nous remarquons que la trajectoire associée à la matrice A_1 , faiblement non-normale, retourne bien directement à l'équilibre. En effet, cette matrice, bien que non-normale, possède une abscisse numérique négative et ne présente donc pas de croissance transitoire. De manière très différente, la trajectoire associée à la matrice A_2 , fortement non-normale cette fois, subit une croissance transitoire avant de retourner à l'équilibre. Cette croissance transitoire est caractérisée sur la Figure 4.1 par le pic orange effectué par la trajectoire associée à la matrice A_2 , éloignant fortement cette trajectoire de l'exponentielle décroissante réalisée par la trajectoire mauve associée à la matrice A_1 . Cette matrice a bien une abscisse numérique positive, indiquant la croissance transitoire.

Intuitivement, nous pouvons imaginer les effets d'un tel phénomène dans le cas où le système étudié ne serait pas linéaire ; en effet, si cette croissance transitoire est assez importante, le bassin d'attraction associé à l'équilibre stable rétrécit considérablement et on peut imaginer que la trajectoire du système "sorte" du bassin d'attraction de cet équilibre stable et "entre" dans le bassin d'attraction d'un autre équilibre. À l'inverse, dans le cas où la matrice

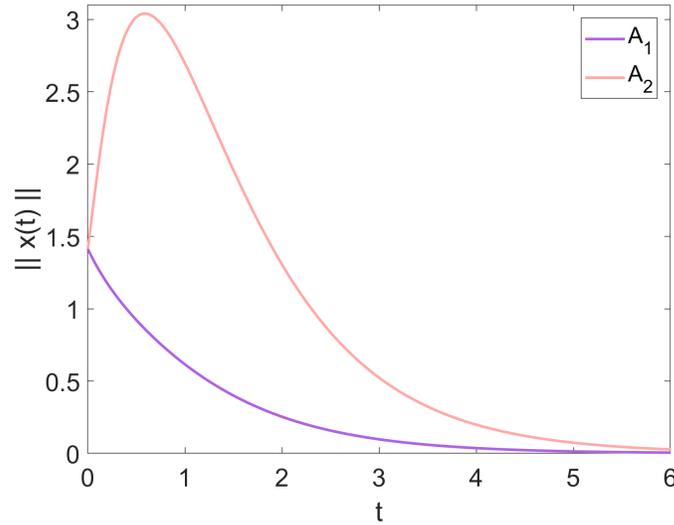


Figure 4.1 – Évolution de la norme de la solution du système linéaire $\dot{x} = Ax$, pour une matrice normale (A_1 , en mauve) vs. non-normale (A_2 , en orange).

non-normale serait symétrisée, c'est-à-dire rendue normale, la trajectoire resterait bien dans le bassin d'attraction de l'équilibre stable. Nous utilisons comme méthode de symétrisation le calcul de la partie hermitienne de la matrice. Ainsi pour une matrice d'adjacence A , nous prenons $(A + A^T)/2$, qui est l'équivalent symétrique de A que nous considérons ici.

Dans la section suivante, nous mettons en lumière cet effet particulier des réseaux non-normaux, dans l'étude de la théorie de Turing pour les réseaux.

4.2 Application au modèle du Brusselator

Nous utilisons ici encore l'exemple du modèle du Brusselator. Jusqu'ici, nous avons étudié, au Chapitre 3, ce modèle sur des réseaux non dirigés et dirigés. Nous étudions à présent le cas des réseaux non-normaux, qui sont une catégorie de réseaux dirigés. Plus précisément, nous utilisons les réseaux non-normaux de l'article *Topological resilience in non-normal networked systems* de [Asllani & Carletti, 2018], dont la création a été explicitée précédemment, dans le Chapitre 2.

Nous commençons par reproduire les différents résultats présentés dans l'article *Patterns of non-normality in networked systems* de [Muolo et al., 2019]. Ces cas représentent les trois cas de figures dans lesquels nous pouvons nous trouver lorsque nous utilisons un réseau non-normal lors de l'étude de la théorie de Turing sur un réseau.

Le premier cas étudié est celui où il existe des valeurs propres de la matrice Laplacienne $\Lambda^{(\alpha)}$ telles que la relation de dispersion λ_α est positive, aussi bien pour le réseau non-normal que pour sa symétrisation. Ce cas est représenté à la première colonne de la Figure 4.2. En effet, sur les deux premières Figures, nous représentons la relation de dispersion, où les étoiles, représentant la relation de dispersion dans le cas non-normal, sont bien positives pour quelques-unes d'entre elles. Nous avons alors une présence de motifs de Turing, que nous observons à la troisième Figure de la première colonne. En effet, cette Figure représente l'évolution des concentrations des espèces u_i au cours du temps, sur les différents noeuds du réseau. Ainsi, nous observons que ces motifs sont stationnaires (chaque concentration u_i prise individuellement devient constante au cours du temps après la perturbation). Les diamants représentent quant à eux la relation de dispersion dans le cas où nous considérons la version symétrisée du réseau non-normal précédemment utilisé. Nous sommes alors face à un réseau symétrique, et donc non dirigé. Certains de ces diamants, présents sur la courbe correspondant au cas continu, sont bien positifs, ce que nous pouvons voir plus clairement à la deuxième Figure de la première colonne. Cela signifie que nous pouvons observer un motif de Turing, ce que nous illustrons bien à la quatrième Figure. Le cas présenté ici illustre la présence de motifs de Turing lorsque les paramètres du système b et c se trouvent dans la région d'instabilité déterminée pour le cas des réseaux non dirigés, qui a été calculée au Chapitre 3. Ainsi, les effets observés ne sont ici pas dûs à la non-normalité du réseau.

Le deuxième cas étudié est celui où la relation de dispersion est positive pour le cas non-normal, alors qu'elle est négative par la symétrisation du réseau (et donc aussi pour le cas continu). Ce cas est illustré à la Figure 4.2, deuxième colonne. Nous pouvons en effet observer que la relation de dispersion pour le cas non-normal, représentée sur les deux premières Figures de la deuxième colonne par les étoiles, possède bien des éléments positifs. Cela signifie que le système est instable ; nous pouvons en effet voir les motifs de Turing à la troisième Figure de la deuxième colonne. Sur la deuxième Figure (de la deuxième colonne), nous observons plus facilement que la relation de dispersion dans le cas continu, sur laquelle se trouvent les diamants correspondants à la relation de dispersion dans le cas symétrisé, est bien négative. Le système est alors stable et nous n'observons pas de motifs. Ceci est illustré à la quatrième Figure, où nous avons bien qu'après la perturbation, le système a retrouvé son équilibre (toutes les concentrations sont identiques et égales à l'équilibre, formant une couleur unie sur la Figure). Ce cas représente l'effet des réseaux dirigés. En effet, au Chapitre 3, nous avons observé un "décollement" de la relation de dispersion pour les réseaux dirigés (dans notre cas non-normal) par rapport à son analogue continu ou non dirigé, permettant ainsi à la relation de dispersion d'être positive.

Le dernier cas concerne l'effet propre des réseaux non-normaux. Dans ce cas, la relation de dispersion est négative, aussi bien pour le réseau non-normal que pour son analogue symétrique. Nous pouvons observer cela à la Figure 4.2, dernière colonne, ou plus précisément sur les deux premières Figures. Les étoiles, représentant la relation de dispersion pour le réseau non-normal, sont bien toutes négatives, tout comme les diamants représentant la relation de dispersion pour la version symétrique du réseau. Cependant, pour le cas du réseau

non-normal, nous pouvons observer des motifs, que nous pouvons voir sur la troisième Figure de la dernière colonne. Ceci est assez surprenant car nous faisons face à des motifs, alors que la relation de dispersion n'en prévoit pas. Ainsi, nous voyons que l'analyse de stabilité linéaire utilisée jusqu'ici ne permet pas de prédire ces motifs, mais ils sont bien présents. Les motifs obtenus sont en réalité liés à la condition initiale. En effet, dans ce cas, si la condition initiale est suffisamment éloignée de l'équilibre et si la direction de celle-ci est adéquate, il y a émergence de motifs, que nous ne pouvons alors pas appeler motifs de Turing à proprement parler. Nous les appelons alors motifs de type Turing. Notons que pour le cas symétrisé, nous avons bien un motif homogène, car le système retourne bien à son équilibre. Nous l'observons à la dernière Figure de la troisième colonne, avec la couleur homogène correspondant aux concentrations à l'équilibre après la perturbation. Remarquons que dans ce dernier cas, la relation de dispersion est bien négative, mais les valeurs propres sont tout de même proches du seuil à partir duquel nous pouvons observer des motifs de Turing.

Si nous revenons à ce qui a été dit précédemment, nous avons vu qu'une dynamique liée à un réseau non-normal pouvait, selon certaines conditions, exprimer une croissance transitoire, induisant un rétrécissement du bassin d'attraction liée à l'équilibre stable, permettant ainsi à la trajectoire de "traverser" la limite qui sépare le bassin d'attraction stable de celui de l'équilibre inhomogène. C'est en effet ce qui se passe dans ce dernier cas étudié.

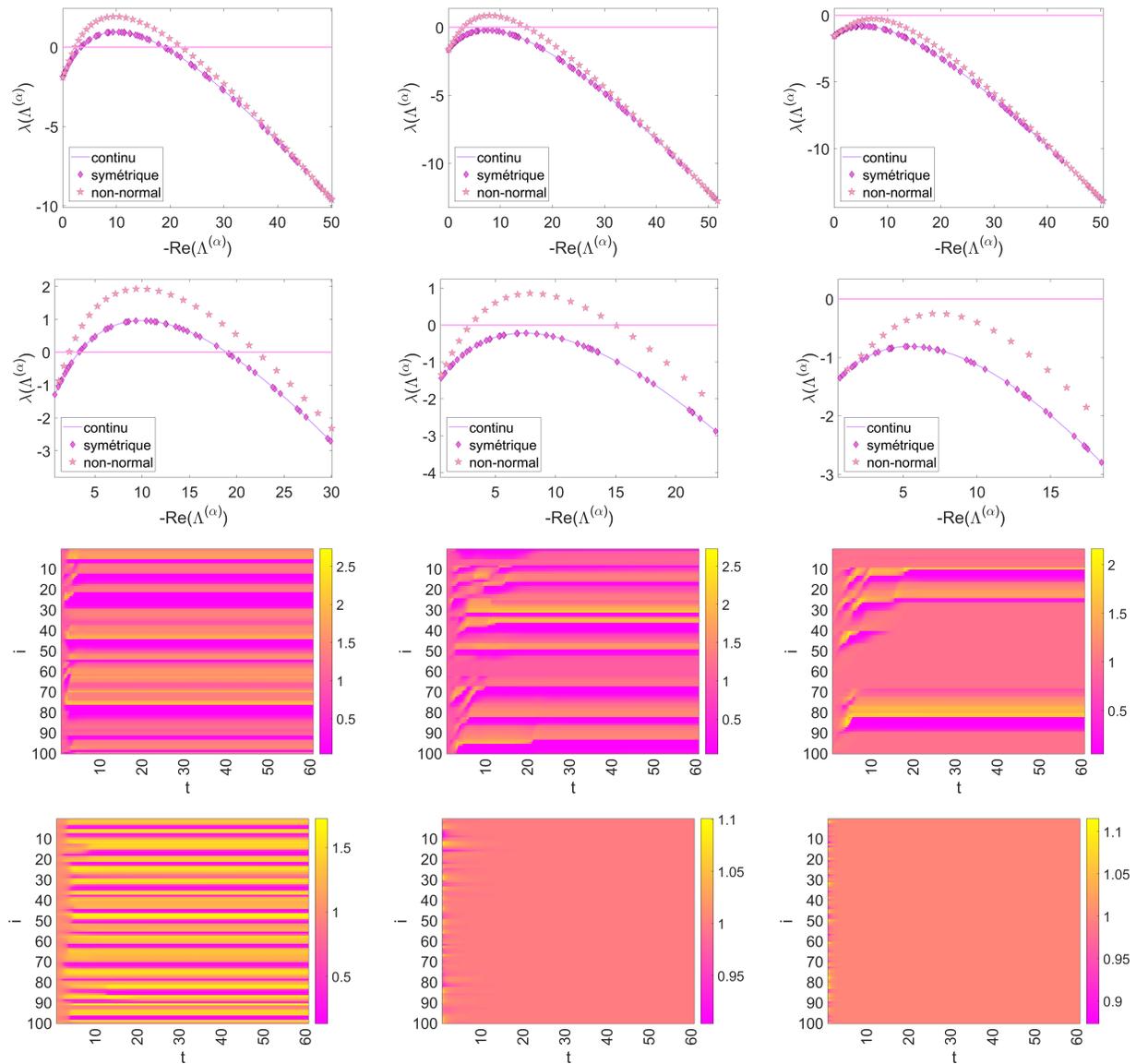


Figure 4.2 – De haut en bas : relation de dispersion et zoom sur la relation de dispersion pour le cas du réseau non-normal (étoiles) et leur analogue symétrique (diamants), ainsi que l'évolution des concentrations de l'espèce u sur les noeuds i au cours du temps pour le réseau non-normal et sa symétrisation, respectivement. Les réseaux non-normaux considérés possèdent 100 noeuds et les constantes du système qui restent identiques sont $c = 61.1$ et $D_u = 0.5$ et $D_v = 1.925$. La première colonne concerne le cas d'un réseau non-normal créé avec les paramètres $\gamma = 50$, $p_1 = 0.2$ et $p_2 = 0$, et $b = 28$ comme dernier paramètre du système. La deuxième colonne concerne un réseau non-normal créé avec les paramètres $\gamma = 50$, $p_1 = 0.2$ et $p_2 = 0$, et $b = 24$ comme dernier paramètre du système, et la troisième colonne concerne un réseau non-normal dont les paramètres de construction sont $\gamma = 50$, $p_1 = 0.2$ et $p_2 = 0$, et $b = 21.3$ comme dernier paramètre du système.

Dans ce Chapitre, nous avons introduit la notion de réseau non-normal, ainsi que l'impact que cela peut avoir dans la dynamique d'un système. Nous avons ensuite, une fois encore grâce au modèle du Brusselator, illustré la théorie de Turing pour le cas spécifique des réseaux non-normaux. Nous en avons déduit que, à cause du phénomène de croissance transitoire, il peut y avoir des motifs de type Turing² que la théorie ne prévoit pas ; en effet, la relation de dispersion pour certains réseaux non-normaux est bien négative, indiquant normalement qu'il n'y a pas de motifs de Turing. Or, nous avons observé des motifs de type Turing. Ceci est dû au fait qu'avec une croissance transitoire des trajectoires, la trajectoire quitte le bassin d'attraction de l'équilibre stable pour arriver dans le bassin d'attraction de l'état inhomogène, raison pour laquelle nous observons des motifs de Turing.

2. Notons qu'on ne peut pas parler de motifs de Turing à proprement parler, car ces motifs apparaissent alors que les paramètres du système (b et c) ne se trouvent pas dans la zone d'instabilité prévue par la théorie de Turing.

5

Le cas des réseaux dégénérés

Dans ce Chapitre, nous abordons une sous-catégorie spéciale de réseaux : les réseaux dégénérés. Notons qu’au Chapitre 3, nous avons supposé lors de la décomposition de la perturbation du système dans la base de vecteurs propres qu’il existait bien une base de vecteurs propres orthonormaux, ce qui nous a permis de découpler les équations du système étudié¹ et ainsi obtenir N systèmes de dimension 2 au lieu d’un unique système de dimension $2N$. Nous pouvons donc naturellement nous demander si la théorie développée jusqu’ici reste valide dans le cas où nous n’aurions pas cette base de vecteurs propres. Nous étudions alors le cas des réseaux dégénérés. Un réseau est dit dégénéré si la matrice Laplacienne qui lui est attachée n’est pas diagonalisable, autrement dit si la matrice Laplacienne ne possède pas de base de vecteurs propres linéairement indépendants. Assez naturellement, nous voyons que nous ne pouvons alors plus utiliser la même méthode pour découpler les équations du système perturbé. Nous étudions alors dans ce Chapitre une manière particulière d’étudier la théorie de Turing pour le cas des dégénérés. Nous étudions aussi la reconstruction de motifs grâce aux vecteurs propres de la matrice Laplacienne du réseau, afin d’observer l’effet des vecteurs propres généralisés dans la reconstruction.

5.1 Instabilité de Turing sur réseaux non-normaux dégénérés

Afin d’obtenir un réseau dégénéré, nous utilisons ici un réseau aléatoire non-normal dont la création provient de l’article *Synchronization Dynamics in Non-Normal Networks : The Trade-Off for Optimality* de [Muolo et al., 2020] et a été explicitée au Chapitre 2. En effet, il s’avère que ces réseaux peuvent être dégénérés dans certains cas, ce que nous cherchons ici. Nous pouvons reprendre le développement de la théorie de Turing dans ce cas précis.

1. Pour le cas des réseaux non-normaux, nous pouvons aussi découpler les équations, en considérant les vecteurs propres à gauche et droite pour obtenir une base. Ce point n’est pas détaillé ici, mais est développé dans la thèse de [Muolo, 2023].

Pour plus de facilité, nous reprenons le développement à partir des équations (3.6), le reste étant identique au développement réalisé dans le Chapitre 3. Ainsi, si nous résumons le développement jusqu'ici, nous perturbons l'équilibre stable du système avec une perturbation inhomogène, nous obtenons alors le système perturbé, dont nous ne gardons que les termes du premier ordre du développement de Taylor. Nous obtenons alors à ce stade du développement les équations (3.6)

$$\begin{cases} \delta \dot{u}_i = f_u \delta u_i + f_v \delta v_i + D_u \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta u_j \\ \delta \dot{v}_i = g_u \delta u_i + g_v \delta v_i + D_v \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta v_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

Nous introduisons à présent la notation $\delta x = (\delta u_1, \delta v_1, \dots, \delta u_n, \delta v_n)^\top$, où δx est un vecteur de dimension $2N$, pour pouvoir réécrire ces équations comme

$$\delta \dot{x}(t) = [I_N \otimes J_0 + L \otimes D] \delta x, \quad (5.1)$$

où \otimes est le produit le Kronecker et où les notations utilisées sont identiques à celles utilisées précédemment, à savoir I_N la matrice identité de dimension N , $J_0 = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}$ et L la matrice Laplacienne du réseau.

Dans le Chapitre 3, nous avons supposé que la matrice Laplacienne possédait une base de vecteurs propres orthonormaux. Nous avons ensuite pu exprimer les différentes perturbations dans cette base et ainsi obtenir N systèmes 2×2 plutôt qu'un unique système $2N \times 2N$. Ici, comme la matrice Laplacienne que nous considérons est dégénérée, elle ne possède pas de base orthonormée. Nous ne pouvons donc pas procéder de la même manière.

Nous utilisons le théorème de la forme canonique de Jordan pour pouvoir écrire

$$P^{-1}LP = B,$$

où P est une matrice inversible de dimension N et où B est une matrice diagonale avec pour éléments diagonaux les blocs de Jordan B_j de taille $m_j \times m_j$,

$$B_j = \begin{pmatrix} \Lambda^{(j)} & & & & \\ 1 & \Lambda^{(j)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \Lambda^{(j)} \end{pmatrix},$$

où m_j est la multiplicité algébrique de la valeur propre $\Lambda^{(j)}$ de la matrice Laplacienne L . Notons que nous devons avoir $m_1 + \dots + m_l = N$, avec l le nombre de valeurs propres de L

distinctes et N , comme précédemment, le nombre de noeuds du réseau.

Si nous définissons $Q = P \otimes I_{2 \times 2}$ et $\delta y = Q^{-1} \delta x$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{y} &= Q^{-1} \delta \dot{x} \\
 &= Q^{-1} [I_{N \times N} \otimes J_0 + L \otimes D] \delta x \\
 &= (P^{-1} \otimes I_{2 \times 2}) [I_{N \times N} \otimes J_0 + L \otimes D] (P \otimes I_{2 \times 2}) Q^{-1} \delta x \\
 &= [I_{N \times N} \otimes J_0 + B \otimes D] \delta y
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Grâce à sa forme, δy hérite de la décomposition de Jordan, ce qui nous permet d'écrire (5.2) comme un système de l équations, chacun de dimension $2m_j$

$$\delta \dot{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & J_0 \end{pmatrix} \delta y^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ D & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & D & 0 \end{pmatrix} \delta y^{(1)}, \tag{5.3}$$

$$\delta \dot{y}^{(j)} = \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & J_0 \end{pmatrix} \delta y^{(j)} + \begin{pmatrix} \Lambda^{(j)} D & & \\ D & \Lambda^{(j)} D & \\ & \ddots & \ddots \\ & & D & \Lambda^{(j)} D \end{pmatrix} \delta y^{(j)} \tag{5.4}$$

$\forall j = 2, \dots, \ell.$

La première équation du système (5.3) possède cette forme, car, une fois les valeurs propres classées dans l'ordre décroissant, et comme la matrice Laplacienne possède toujours la valeur propre 0, la valeur propre $\Lambda^{(1)}$ est nulle. Le bloc B_1 qui lui est associé possède alors 0 comme valeur sur sa diagonale, donnant cette forme particulière à l'équation (5.3). De plus, cette solution retourne à l'équilibre, car nous avons supposé que J_0 vérifie les conditions de stabilité (3.4) pour le système, or la matrice

$$\begin{pmatrix} J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & J_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ D & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & D & 0 \end{pmatrix}$$

possède les mêmes valeurs propres que la matrice J_0 , nous permettant de conclure sur sa stabilité.

Si nous observons à présent l'équation (5.4), nous pouvons définir le couple $(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})$ de dimension 2 et avec $i = 1, \dots, m_j$, de telle sorte que le vecteur $\delta y^{(j)}$ puisse se réécrire $\delta y^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \eta_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \dots, \xi_{m_j}^{(j)}, \eta_{m_j}^{(j)})^\top$. Avec cela, nous pouvons réécrire (5.4) en découplant

ses composantes

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix} + \Lambda^{(j)} D \begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_2^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi_2^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \end{pmatrix} + \Lambda^{(j)} D \begin{pmatrix} \xi_2^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

⋮

$$\begin{pmatrix} \xi_{m_j}^{(j)} \\ \eta_{m_j}^{(j)} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi_{m_j}^{(j)} \\ \eta_{m_j}^{(j)} \end{pmatrix} + \Lambda^{(j)} D \begin{pmatrix} \xi_{m_j}^{(j)} \\ \eta_{m_j}^{(j)} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \xi_{m_{j-1}}^{(j)} \\ \eta_{m_{j-1}}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Nous remarquons assez directement que la première équation (5.5) est semblable à celle que nous aurions pu avoir si la matrice Laplacienne L avait été diagonalisable. Ainsi, il est assez direct de déterminer les conditions d'instabilité de la projection $\begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix}$ car elles sont identiques à celles déterminées dans le Chapitre 3, pour les réseaux non dégénérés.

Si nous observons à présent la deuxième équation (5.6), nous pouvons remarquer que les deux premiers termes sont semblables à ceux présents dans la première équation (5.5); ils dépendent de la matrice $J_0 + \Lambda^{(j)}D$, et le dernier terme dépend de la projection $\begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix}$. De ce fait, si les conditions d'instabilité sont remplies pour cette matrice $J_0 + \Lambda^{(j)}D$, la projection $\begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \eta_1^{(j)} \end{pmatrix}$ retourne à l'équilibre instable et il en est donc de même pour la projection $\begin{pmatrix} \xi_2^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \end{pmatrix}$. Si nous procédons de la sorte pour le reste des projections, jusqu'à (5.7), nous pouvons voir qu'il suffit que la première projection soit instable pour pouvoir dire que toutes les autres le sont aussi.

Nous voyons donc ici que si la matrice Laplacienne du réseau est dégénérée, nous pouvons tout de même effectuer des analyses, similaires au cas où la matrice Laplacienne est bien diagonalisable, grâce à l'information disponible. Nous pouvons cependant envisager le cas où la matrice $J_0 + \Lambda^{(j)}D$ serait stable; dans ce cas, (5.5) retournerait à l'équilibre, mais nous ne pourrions pas en dire de même pour (5.6) et le reste des projections. En effet, si la première partie de l'équation, dépendant de la matrice $J_0 + \Lambda^{(j)}D$, retourne bien à l'équilibre stable, le dernier terme pourrait induire une croissance transitoire. De ce fait, la trajectoire pourrait "traverser" la limite qui sépare de bassin d'attraction stable de celui instable et ainsi retourner à l'équilibre instable plutôt que stable.

5.2 Reconstruction de motifs

Lorsque le réseau n'est pas dégénéré, il a déjà été étudié que le motif de Turing que nous pouvons obtenir peut être expliqué grâce aux vecteurs propres de la matrice Laplacienne associés aux valeurs propres instables, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice Laplacienne qui sont telles que la relation de dispersion est positive. Autrement dit, à partir de combinaisons linéaires de ces vecteurs propres, nous pouvons reconstruire (partiellement ou totalement) le motif de Turing obtenu par intégration du système de réaction-diffusion.

La méthode que nous utilisons ici pour obtenir la partie du motif qui peut être expliquée par les vecteurs propres est de projeter le motif de Turing sur le sous-espace vectoriel composé des vecteurs propres considérés. Ainsi, si nous notons V ce sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^N de dimension k , et B la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de sa base, en l'occurrence ici les vecteurs propres, chaque élément du sous-espace peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de la base. En d'autres termes, si nous notons $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^N$ les vecteurs de base, avec $i = 1, \dots, k$ et k le nombre de vecteurs propres pris en compte, et

$$B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_k \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

tout élément $\vec{a} \in V$ peut s'écrire comme $\vec{a} = B\vec{y}$, \vec{y} étant le vecteur de \mathbb{R}^k contenant les coefficients de la combinaison linéaire. Ainsi, si nous souhaitons connaître la projection d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ dans le sous-espace V , que nous notons $\text{Proj}_V(\vec{x})$, remarquons que celle-ci peut s'exprimer dans la base de vecteurs propres comme $\text{Proj}_V(\vec{x}) = B\vec{y}$, avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. Notre but à ce stade est alors de trouver la valeur du vecteur \vec{y} . Grâce à de l'algèbre de base, nous pouvons écrire \vec{x} comme sa projection dans l'espace V et un élément $\vec{z} \in V^\perp$: $\vec{x} = \text{Proj}_V(\vec{x}) + \vec{z}$. Avec quelques propriétés de l'algèbre, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} V &= \text{Im}(B) \quad , \text{ ainsi que} \\ V^\perp &= \text{Im}(B)^\perp \\ &= \text{Ker}(B^\top). \end{aligned}$$

Assez directement, nous pouvons alors écrire $\vec{x} - \text{Proj}_V(\vec{x}) \in \text{Ker}(B^\top)$ et donc, par définition du noyau,

$$\begin{aligned} B^\top(\vec{x} - \text{Proj}_V(\vec{x})) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow B^\top(\vec{x} - B\vec{y}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow B^\top\vec{x} &= B^\top B\vec{y} \\ \Leftrightarrow \vec{y} &= (B^\top B)^{-1} B^\top\vec{x}, \end{aligned}$$

et ainsi $\text{Proj}_V(\vec{x}) = B(B^\top B)^{-1} B^\top\vec{x}$.

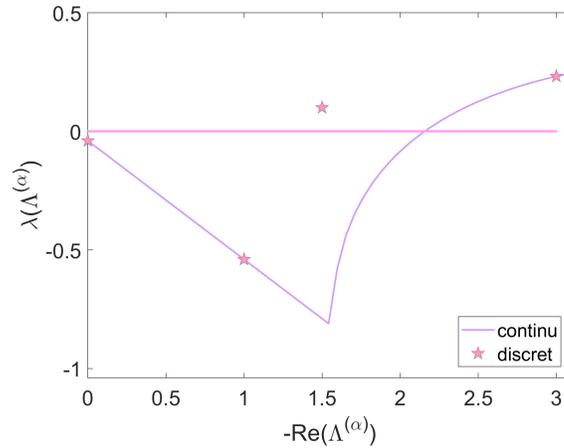


Figure 5.1 – Relation de dispersion pour le modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$, sur un réseau arbitraire non-normal de 10 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$.

Remarquons que la matrice $(B^\top B)$ est bien inversible, car ses colonnes sont les vecteurs propres, linéairement indépendants.

Dans le cas des réseaux dégénérés, nous ne disposons pas d'une base de vecteurs propres linéairement indépendants. Ainsi, si nous utilisons la même méthode que pour les réseaux non-dégénérés, en ne prenant que les vecteurs propres qui sont bien linéairement indépendants pour faire la projection, nous obtenons des résultats bien moins probants comparativement à un cas non dégénéré.

Nous nous intéressons à présent à l'effet que peuvent avoir les vecteurs propres généralisés dans la reconstruction de motifs. En effet, si dans le cas dégénéré nous ne possédons pas de base de vecteurs propres linéairement indépendants, nous pouvons cependant calculer les vecteurs propres généralisés de la matrice Laplacienne afin d'obtenir à présent une base de vecteurs propres linéairement indépendants. Afin d'illustrer l'importance d'inclure les vecteurs propres pour la reconstruction de motifs, nous utilisons un réseau aléatoire non-normal dégénéré. Ce réseau possède trois valeurs propres instables : deux valeurs propres conjuguées, chacune de multiplicité 1, dont la partie réelle est 1.5 et une valeur propre de multiplicité 2, dont la partie réelle est 3. Ces trois valeurs propres sont instables, nous pouvons en effet observer à la Figure 5.1 que la relation de dispersion est bien positive pour ces valeurs propres ; il s'agit des deux étoiles au-dessus de la droite rose, représentant la limite par delà laquelle la relation de dispersion est positive (et donc que nous sommes en présence de motifs de Turing).

Afin d'observer l'effet de l'utilisation du vecteur propre lors de la reconstruction du motif dans ce cas, nous observons, à la Figure 5.2, l'évolution de l'erreur absolue entre le motif de Turing et la reconstruction de ce motif en fonction du nombre de vecteurs propres ou vecteurs

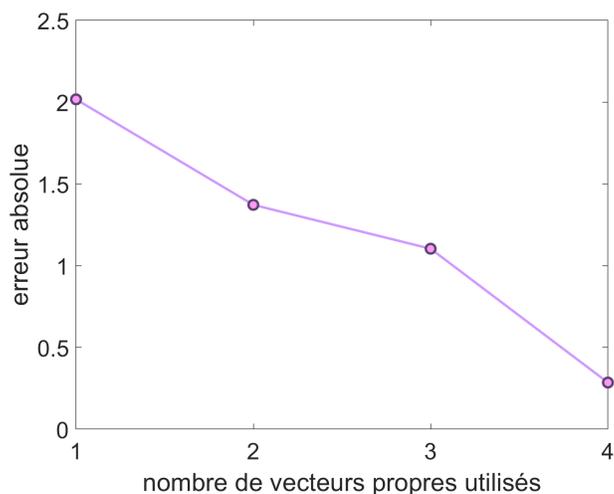


Figure 5.2 – Evolution de l’erreur absolue en fonction du nombre de vecteurs propres utilisés dans la reconstruction du motif. Le motif reconstruit est celui résultant du modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$, sur un réseau arbitraire non-normal de 10 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$.

propres généralisés utilisés pour cette reconstruction. Ainsi, si nous notons $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)^\top$ le motif reconstruit grâce à la méthode explicitée, et $\hat{u} = (u_1(\hat{t}), \dots, u_N(\hat{t}))^\top$ le motif réel obtenu au temps $\hat{t} = 150$, avec N le nombre de noeuds du réseau (ici $N = 10$), l’erreur absolue mesure l’écart entre la valeur réelle et reconstruite, grâce à la formule $|\tilde{u} - \hat{u}|$. Notons qu’il est tout à fait évident que cette erreur absolue diminue en fonction du nombre de vecteurs propres pris en compte dans la reconstruction, car la dimension du sous-espace vectoriel dans lequel le motif de Turing est projeté augmente. Cependant, nous observons que l’ajout du vecteur propre généralisé, qui est le dernier (4^e) ajouté, produit la diminution de l’erreur absolue la plus forte. Nous pouvons voir cela grâce à la pente du dernier segment, qui est plus importante que les autres. Observons aussi que c’est grâce à ce vecteur propre généralisé que l’erreur absolue descend en dessous de l’unité. De cela, nous pouvons déduire que l’utilisation du vecteur propre dans la reconstruction du motif semble importante.

Rappelons que, comme nous avons trois valeurs propres instables dont une dégénérée, nous possédons quatre vecteurs à notre disposition : trois vecteurs propres et un vecteur propre généralisé. Si nous utilisons la méthode traditionnelle de reconstruction de motifs, qui n’utilise que les vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres instables, nous obtenons la reconstruction illustrée à la Figure 5.3 (panel de gauche). Nous pouvons voir que certaines concentrations ne sont pas reconstruites alors que dans le cas où nous ajoutons le vecteur propre généralisé pour la reconstruction (Figure 5.3 ; panel de droite), la totalité des concentrations sont reconstruites presque parfaitement. Nous n’avons ici utilisé que des critères visuels pour comparer ces deux reconstructions, mais il est évident qu’ajouter un vecteur dans l’espace dans lequel le motif est projeté améliore la qualité de

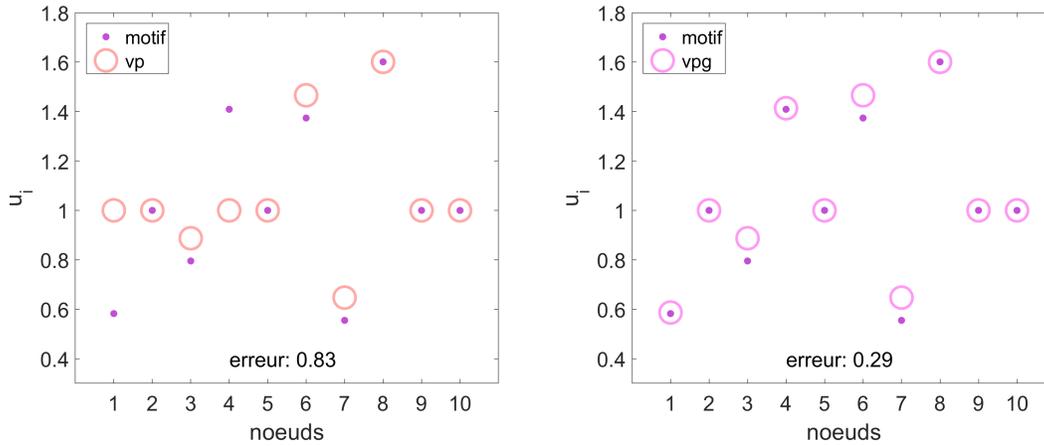


Figure 5.3 – Motif vs. reconstruction pour le modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$, sur un réseau arbitraire non-normal de 10 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$, panel gauche : reconstruction du motif avec uniquement les trois vecteurs propres (vp) ; panel de droite : reconstruction du motif avec les trois vecteurs propres et le vecteur propre généralisé (vpg).

la reconstruction, comme expliqué précédemment. Pour cela, nous ne pouvons pas nous fier totalement aux repères visuels ; nous utilisons alors une erreur absolue pondérée afin de comparer les deux reconstructions de motifs. La pondération agit comme il suit : chaque erreur absolue entre le motif et sa reconstruction est pondérée par le nombre de vecteurs propres et généralisés utilisés dans la reconstruction, divisé pas le nombre de vecteurs propres et généralisés instables disponibles. Ainsi, dans notre cas, la première erreur absolue est pondérée par le facteur $3/4$ car seulement trois vecteurs propres sont utilisés, alors que l’erreur absolue pour la seconde reconstruction, qui prend en compte le vecteur propre généralisé, est pondérée par le facteur $4/4$, car quatre vecteurs sur les quatre disponibles sont utilisés. Ainsi, nous obtenons une erreur de 0.83 pour la reconstruction avec uniquement les vecteurs propres et une erreur de 0.29 pour la reconstruction qui utilise à la fois les vecteurs propres et le vecteur propre généralisé. Nous pouvons encore une fois déduire, aussi bien visuellement que quantitativement, que le motif est mieux reconstruit avec le vecteur propre généralisé, ce qui montre bien un effet positif de celui-ci.

Remarquons sur la Figure 5.3 que certaines concentrations du motif sont à l’équilibre (1) : les noeuds 2, 5, 9 et 10. Il ne s’agit pas ici d’une erreur ou d’une anomalie, en effet, si nous analysons le réseau (Figure 5.4) sur lequel nous travaillons, ces noeuds correspondent à ceux dont le degré entrant est nul, comme le noeud 10 ou 2, ou uniquement connecté au reste du réseau par un noeud dont le degré entrant est nul, comme c’est le cas pour les noeuds 5 et 9. Il semble alors assez intuitif de penser que la diffusion du système n’aurait pas d’effet sur le long terme. Ainsi, ces trajectoires retourneraient à l’équilibre homogène du système, ce qui est bien ce que nous observons à la Figure 5.3.

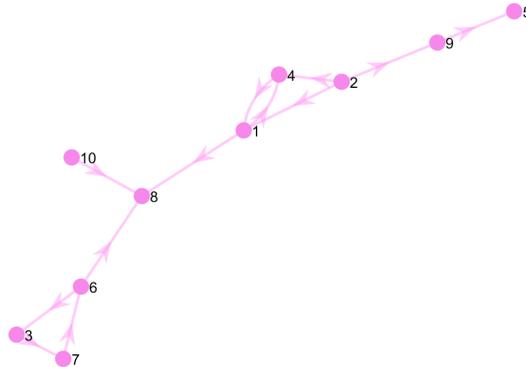


Figure 5.4 – Réseau aléatoire non-normal construit avec les paramètres, $N = 10$, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$.

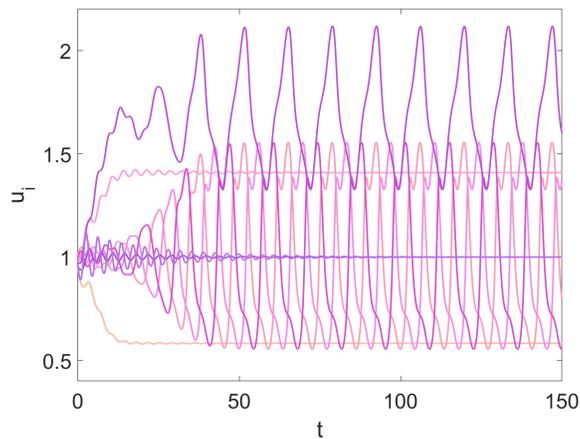


Figure 5.5 – Évolution des concentrations u_i en fonction du temps, pour chaque noeud du réseau arbitraire non-normal de 10 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$, pour le modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$.

Malgré la reconstruction du motif avec les vecteurs propres et vecteur propre généralisé assez bonne, nous pouvons tout de même observer à droite de la Figure 5.3 que certaines concentrations ne sont pas parfaitement reconstruites. Nous pouvons avant toute chose observer les trajectoires u_i en fonction du temps, à la Figure 5.5, et remarquer que ces trajectoires sont périodiques. Notons que lors de nos analyses précédentes, il s'agit du motif final qui a été reconstruit, celui obtenu ici après 150 unités de temps. Ainsi, en observant ces trajectoires, nous pouvons nous demander s'il ne serait pas possible de mieux reconstruire le motif obtenu. Une première idée est de considérer un motif obtenu pour un autre moment. Nous avons alors remarqué que les qualités des deux reconstructions sont semblables au cas précédent.

Une seconde idée pour obtenir une meilleure reconstruction est alors de considérer le motif moyen plutôt qu'à un certain temps. En effet, comme les trajectoires illustrées à la Figure 5.5 sont périodiques, nous pouvons calculer le motif moyen, ou autrement dit les concentrations moyennes de ces trajectoires. Ainsi, si l'évolution au cours du temps de la concentration de l'espèce u sur le noeud i est notée $u_i(t)$, sa moyenne temporelle peut être approximée par

$$\bar{u}_i = 1/T \sum_{j=1}^T u_i(j),$$

avec T le nombre total de points d'intégration lors du calcul de la solution du système. La méthode de reconstruction est alors similaire au cas précédents, nous prenons juste le motif moyen $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)^\top$ au lieu du motif réel à un temps fixé \hat{u} . Nous affichons alors les mêmes graphes que précédemment, c'est-à-dire le motif, ici moyen, et sa reconstruction avec les vecteurs propres et sa reconstruction avec les vecteurs propres et le vecteur propre généralisé. Ces graphes se trouvent à la Figure 5.6. Nous observons alors sur le panel de gauche, où la reconstruction n'a été réalisé qu'avec les vecteurs propres, que seulement deux concentrations du motif moyen ne sont pas reconstruites exactement. Sur le panel de droite, concernant la reconstruction effectuée avec les vecteurs propres et le vecteur propre généralisé, nous observons à présent que toutes les concentrations du motif moyen sont bien reconstruites. Ainsi, nous pouvons déduire de ceci que le motif moyen est mieux reconstruit que le motif obtenu à un moment précis, comme nous l'avons étudié précédemment. Nous pouvons aussi, comme précédemment, comparer les erreurs absolues pondérées de ces deux reconstructions : pour la reconstruction du panel de gauche de la Figure 5.6, nous obtenons une erreur de 0.60 alors que pour le panel de droite, l'erreur est plutôt de l'ordre de 10^{-2} , ce qui confirme bien que la reconstruction du motif moyen est de bien meilleure qualité.

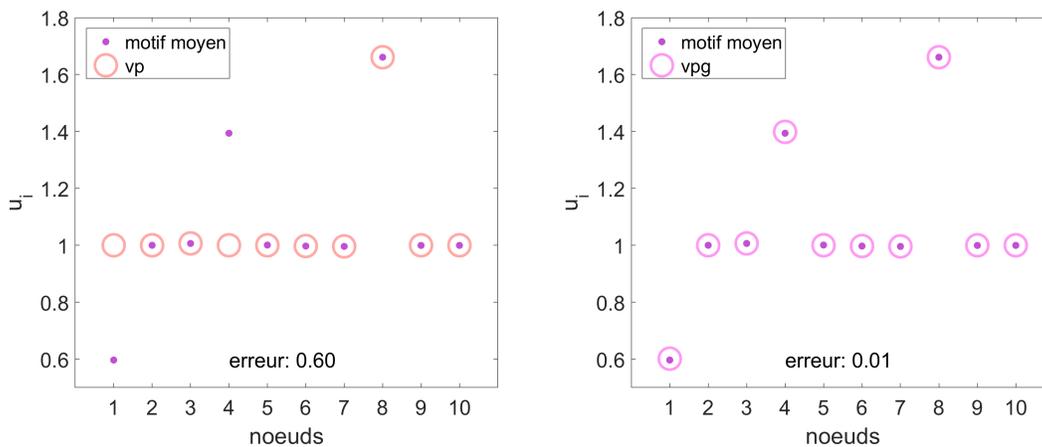


Figure 5.6 – Motif moyen vs. reconstruction ; panel gauche : reconstruction du motif avec uniquement les trois vecteurs propres ; panel de droite : reconstruction du motif avec les trois vecteurs propres et le vecteur propre généralisé.

Nous avons jusqu'ici bien montré l'importance des vecteurs propres généralisés lors de la reconstruction de motifs à partir des vecteurs propres, mais nous ne pouvons pas nous baser sur un unique exemple pour affirmer l'effet positif de l'utilisation des vecteurs propres généralisés. De ce fait, la fin de ce Chapitre est consacrée à d'autres exemples qui montrent aussi l'effet des vecteurs propres généralisés lors de la reconstruction de motifs de Turing.

Nous utilisons à présent un autre exemple, plus simple, de réseau non-normal aléatoire dégénéré de 10 noeuds, créé à partir des mêmes paramètres que précédemment. Nous utilisons encore le modèle du Brusselator, toujours aussi avec les mêmes paramètres. Nous travaillons ici avec un réseau dont la matrice Laplacienne ne possède qu'une seule valeur propre instable de multiplicité 2; -4 , que nous pouvons observer sur la relation de dispersion, sur le panel du haut de la Figure 5.7. Sont associés à cette valeur propre instable un vecteur propre et un vecteur propre généralisé. Nous pouvons, comme précédemment, comparer les reconstructions effectuées avec uniquement le vecteur propre associé à la valeur propre instable et la reconstruction effectuée avec le vecteur propre et le vecteur propre généralisé qui lui sont associés. C'est ce que nous faisons sur le panel du bas de la Figure 5.7, à gauche et droite, respectivement. Nous observons donc à gauche que deux concentrations ne sont pas reconstruites alors qu'à droite, elles le sont (presque). Ainsi, visuellement, nous pouvons encore dire que la reconstruction est meilleure en utilisant le vecteur propre généralisé. Comme pour le cas précédent, nous pouvons utiliser l'erreur absolue pondérée pour comparer les deux reconstructions; nous obtenons alors une erreur de 0.44 pour la reconstruction sans vecteur propre généralisé et 0.15 avec. Nous pouvons donc bien conclure sur la meilleure qualité de la deuxième reconstruction.

Considérons à présent un réseau non-normal aléatoire dégénéré de 20 noeuds, obtenu grâce au même algorithme que précédemment. Nous utilisons toujours le modèle du Brusselator muni des mêmes paramètres que précédemment. La matrice Laplacienne du réseau considéré possède trois valeurs propres instables que nous pouvons voir à la Figure 5.8 (panel du haut); -4 qui est de multiplicité 4, et -5 et -7 , chacune de multiplicité 1. La valeur propre -4 possède une multiplicité géométrique de 1 (c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un vecteur propre associé à cette valeur propre linéairement indépendant), ainsi, cette valeur propre possède trois vecteurs propres généralisés. Nous comparons, une fois encore, à la Figure 5.8, la reconstruction du motif effectuée avec uniquement les vecteurs propres (panel du bas, à gauche) et la reconstruction du motif avec les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés (panel du bas, à droite). Assez directement, nous pouvons voir que la reconstruction avec les vecteurs propres généralisés est visuellement meilleure, mais dans l'ensemble, la reconstruction est assez mauvaise tout de même. Cela semble assez normal car la dimension du sous-espace dans lequel le motif est projeté est de dimension six pour le panel de droite et trois pour le panel de gauche, contre vingt pour le motif d'origine. Nous pouvons tout de même remarquer que la reconstruction effectuée avec les vecteurs propres généralisés tente de reconstruire 8 concentrations sur les 20, contre 3 pour la reconstruction sans, ce qui n'est pas négligeable.

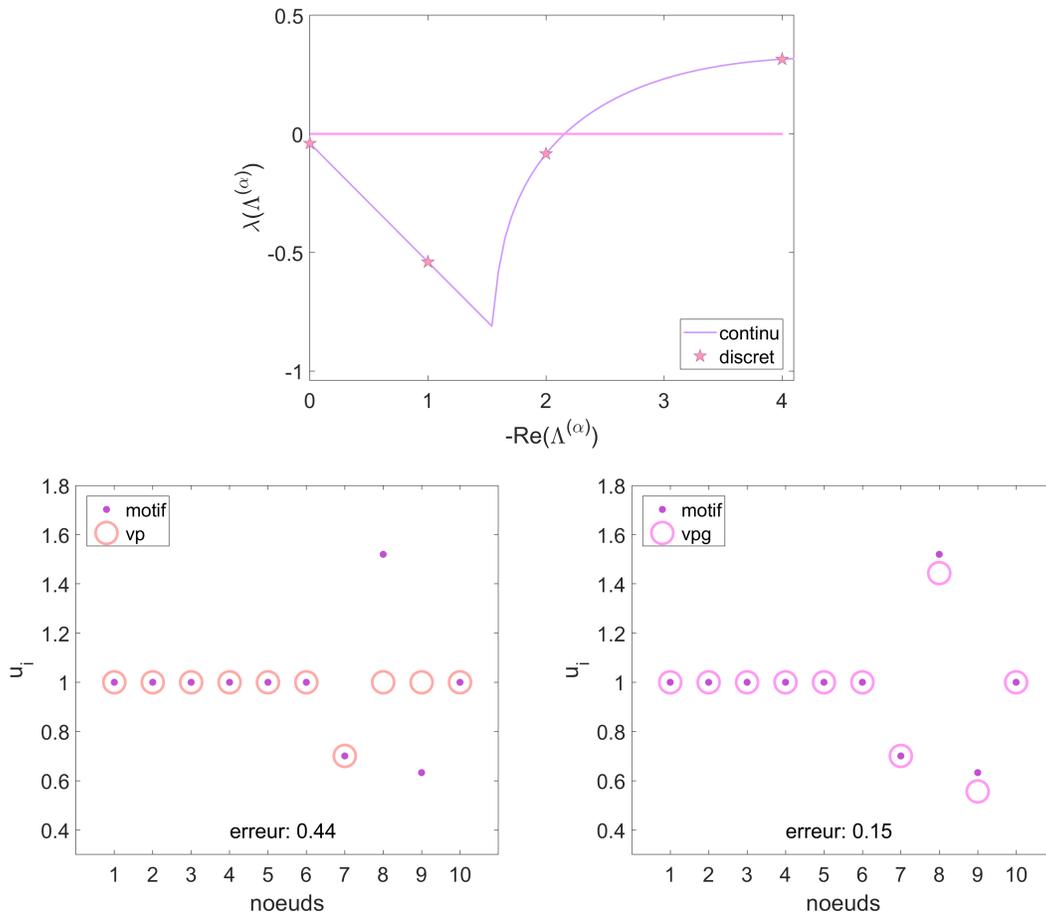


Figure 5.7 – Panel du haut : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$, sur un réseau arbitraire non-normal de 10 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$. Panel du bas : motif vs. reconstruction ; panel gauche : reconstruction du motif avec uniquement le vecteur propre ; panel de droite : reconstruction du motif avec le vecteur propre et le vecteur propre généralisé.

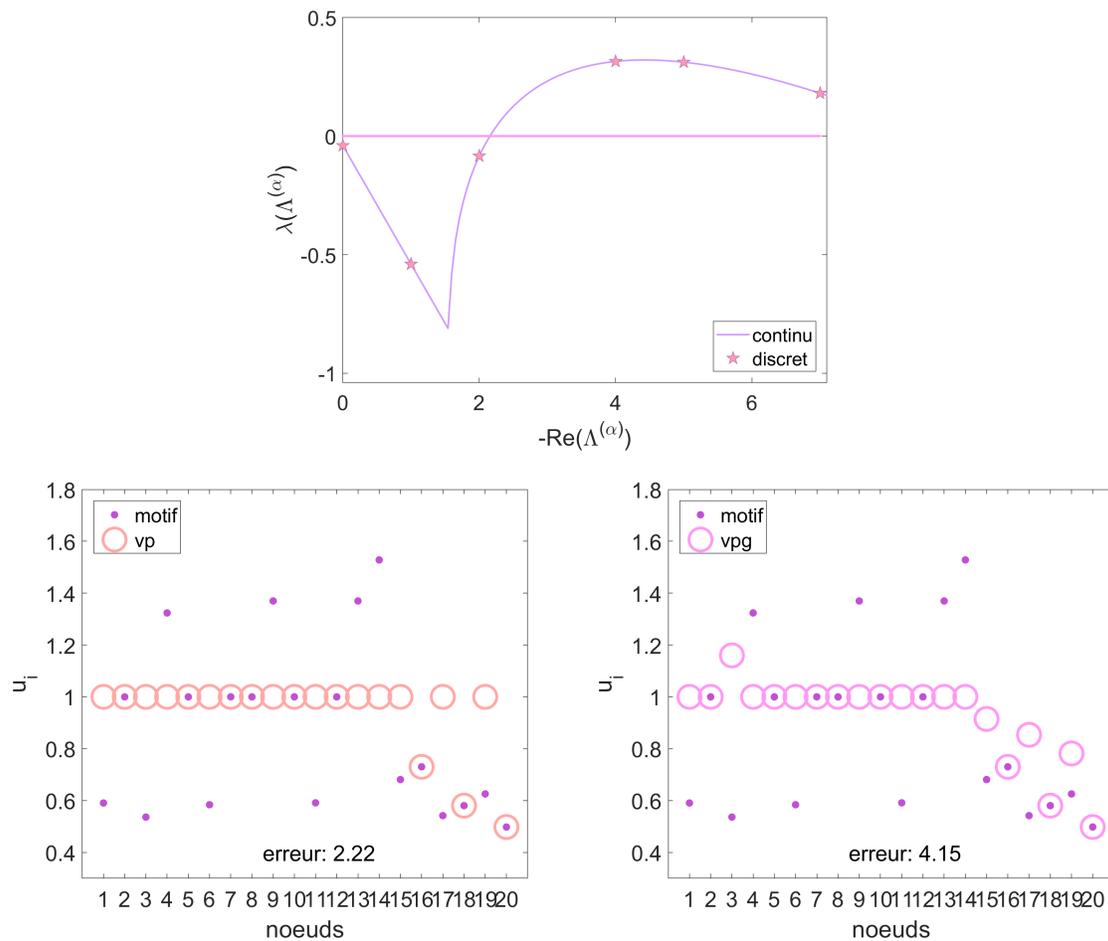


Figure 5.8 – Panel du haut : relation de dispersion pour le modèle du Brusselator avec les paramètres $b = 3.92$, $c = 3$, $D_u = 0.2$ et $D_v = 0.8$, sur un réseau arbitraire non-normal de 20 noeuds, $p_0 = 0.2$ et $p = 0.6$. Panel du bas : motif vs. reconstruction ; panel gauche : reconstruction du motif avec uniquement les trois vecteurs propres ; panel de droite : reconstruction du motif avec les trois vecteurs propres et les trois vecteurs propres généralisés.

En terme d'erreur pondérée, elle est de 2.22 pour la reconstruction uniquement avec les vecteurs propres et 4.15 en ajoutant les vecteurs propres généralisés. L'erreur pondérée nous indique donc dans ce cas que la reconstruction avec les vecteurs propres généralisés est de moins bonne qualité que sans. Cette forte différence s'explique par le fait que la première reconstruction est pondérée par le facteur $3/6$, alors que pour la deuxième, ce facteur est de $6/6$, une très grande différence donc dans ces facteurs. Nous avons évoqué une raison pour expliquer la qualité de la reconstruction de ce motif en particulier, à savoir, la dimension de l'espace dans lequel le motif est projeté. Une autre explication pourrait simplement être le nombre de valeurs propres instables et vecteurs propres généralisés. En effet, il a été étudié que la reconstruction de motif est presque parfaite dans le cas où il n'y a qu'une valeur propre instable, mais si l'on augmente la quantité de valeurs propres instables, la qualité de la reconstruction se dégrade. Notons aussi que dans ce cas, nous avons autant de vecteurs propres que de vecteurs propres généralisés, ce qui n'était pas le cas dans les exemples précédents.

Dans ce Chapitre, nous avons étudié le cas particulier des réseaux dégénérés, cas dans lequel la manière d'étudier le système doit être adaptée, car nous ne possédons pas de base de vecteurs propres linéairement indépendants. Après avoir développé cette nouvelle méthode permettant de déterminer les conditions d'instabilité pour le cas dégénéré, nous avons étudié plus en profondeur la reconstruction de motifs à partir des vecteurs propres. Plus précisément, nous avons étudié l'impact des vecteurs propres généralisés dans cette reconstruction. À travers plusieurs exemples, nous avons pu conclure que l'impact des vecteurs propres généralisés est plutôt positif sur la reconstruction de motifs de Turing.

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié la formation de motifs grâce à la théorie introduite par Alan Turing, considérant dans la théorie originale un système de réaction-diffusion, un système où deux espèces sont en interaction et diffusent à travers leur domaine. Nous avons étudié les conditions pour que lorsque l'équilibre stable homogène et stationnaire d'un tel système est perturbé de manière inhomogène, il en résulte (selon certaines conditions) un nouvel état inhomogène. Les motifs dits de Turing apparaissent alors.

Dans le premier Chapitre, nous nous sommes concentrés sur l'introduction de la théorie de Turing, telle qu'elle a été développée dans le livre de [Murray, 2003], sur base de l'article original de [Turing, 1952]. Nous avons donc étudié le système de réaction-diffusion pour un domaine continu et déterminé les conditions pour que le système présente une instabilité de Turing. Le Chapitre 2 est une introduction aux réseaux et à leur construction. En effet, par la suite, nous ne considérons plus la théorie de Turing pour un domaine continu mais plutôt discret. Ceux-ci pouvant être modélisés par des réseaux, nous les introduisons ainsi que les concepts nécessaires. Nous introduisons aussi les algorithmes de construction des différents réseaux que nous utilisons par la suite. Le troisième Chapitre concerne l'extension de la théorie de Turing pour les domaines discrets réalisée par [H.Nakao & A.S.Mikhailov, 2010] pour les réseaux en général. La différence majeure entre ce cas et le cas continu pour la théorie de Turing est la discrétisation de la relation de dispersion. Dans ce Chapitre, nous avons aussi considéré les réseaux dirigés, introduits pour la théorie de Turing par [Asllani et al., 2014]. Nous avons alors une contribution imaginaire dans la relation de dispersion, impliquant un décollement des valeurs propres de la relation de dispersion par rapport au cas précédents. Les réseaux dirigés étendent alors la région d'instabilité des paramètres du système (si les paramètres se trouvent dans cette zone, nous sommes face à des motifs de Turing). Dans le Chapitre 4, nous avons considéré une catégorie de réseaux bien particuliers : les réseaux non-normaux. L'étude de ces réseaux en particulier est utile car cette propriété est présente dans les réseaux réels [Asllani et al., 2018]. Nous avons tout d'abord introduit ces réseaux et explicités leurs propriétés. Nous avons ensuite montré qu'une dynamique liée à une matrice non-normale pouvait présenter une croissance transitoire. Appliqué au cas de la théorie de Turing, nous avons pu analyser les effets spécifiques des réseaux non-normaux, à savoir la présence de motifs de type Turing alors que la théorie ne le prédit pas, à cause de la croissance transitoire. Dans le dernier Chapitre, nous avons considéré une autre catégorie de réseaux particulière : les réseaux dégénérés. Ceux-ci ont la particularité que la matrice Laplacienne qui leur est associée ne possède pas de base de vecteurs propres, nécessaire aux

développements précédents. Nous avons dès lors introduit un nouveau formalisme, permettant de conclure sur l'instabilité de Turing. Après cela, nous avons étudié la reconstruction de motifs, intéressante dans ce cas car les motifs peuvent être expliqués par les vecteurs propres de la matrice Laplacienne du réseau. Nous avons donc étudié l'impact de vecteurs propres généralisé dans la reconstruction. Nous en avons conclu que leur effet est plutôt positif.

Le travail majeur qui pourrait être réalisé à la suite de ce mémoire concerne un cas spécifique pour les réseaux dégénérés. En effet, dans le Chapitre 5, à la fin de la Section 5.1, nous avons mentionné le fait que si la matrice étudiée était stable, le dernier terme de (5.7) pourrait induire une croissance transitoire et alors, comme pour les réseaux non-normaux, le système pourrait présenter des motifs de type Turing, non prévus par le formalisme. Afin de vérifier cela, il serait intéressant d'analyser numériquement le cas où la matrice serait stable et où un motif de type Turing serait tout de même observable. Dans nos résultats, nous avons étudié la reconstruction de motifs pour les réseaux dégénérés, en observants l'effet des vecteurs propres généralisés. Nous avons analysé les cas où le réseau possède une et deux valeurs propres instables, avec à chaque fois une valeur propre dégénérée. A la fin de la Section 5.2, nous avons étudié un réseau de plus grande taille que les précédents et possédant plus de deux valeurs propres instables. La reconstruction dans ce cas n'était pas aussi qualitative que les précédentes. Nous avons émis plusieurs hypothèses quant à cette réduction de qualité, à savoir la dimension de l'espace de projection du motif, mais aussi le nombre de valeurs et vecteurs propres instables. Si nous avons pu conclure sur un effet positif des vecteurs propres dans la reconstruction, ce résultat pourrait être le point de départ d'autres analyses, comme, par exemple, l'analyse en profondeur du cas où plus de deux valeurs propres sont instables dans le cas dégénéré, ce qui n'a pas pu être fait dans ce mémoire. Il pourrait aussi être intéressant de considérer des réseaux réels. En effet, comme bon nombre de réseaux réels ont la particularité d'être non-normaux [Asllani et al., 2018], et que nous pouvons trouver les réseaux dégénérés dans les réseaux non-normaux, nous aurions pu confirmer nos hypothèses réalisées au sujet de la reconstruction de motifs pour de plus grands réseaux.

Bibliographie

- [Asllani & Carletti, 2018] Asllani, M. & Carletti, T. (2018). Topological resilience in non-normal networked systems. Phys. Rev. E, 97, 042302 (1–12).
- [Asllani et al., 2014] Asllani, M., Challenger, J. D., Pavone, F. S., Sacconi, L., & Fanelli, D. (2014). The theory of pattern formation on directed networks. Nature Communications, 5, 5–9.
- [Asllani et al., 2018] Asllani, M., Lambiotte, R., & Carletti, T. (2018). Structure and dynamical behavior of non-normal networks. Science Advances, 4(12), eaau9403 (1–8).
- [Boland et al., 2008] Boland, R., Galla, T., & McKane, A. (2008). How limit cycles and quasi-cycles are related in systems with intrinsic noise. Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment, 2008.
- [Füzfa, 2021] Füzfa, A. (2021). Cours d’introduction aux algorithmes mathématiques et au calcul scientifique (syllabus 2014).
- [Gierer & Meinhardt, 1972] Gierer, A. & Meinhardt, H. (1972). A theory of biological pattern formation. Kybernetik, 12(1), 30–39.
- [Gräzer, 2011] Gräzer, G. (2011). Lattice Theory : Foundation. Birkhäuser.
- [H.Nakao & A.S.Mikhailov, 2010] H.Nakao & A.S.Mikhailov (2010). Turing patterns in network-organized activator–inhibitor systems. Nature Physics, 6, 544–550.
- [Muolo, 2018] Muolo, R. (2018). Effects of Nonnormality on Turing-Like Pattern Formation. PhD thesis.
- [Muolo, 2023] Muolo, R. (2023). Symmetry breaking and Turing patterns on networks and higher-order structures : nonlinear beasts and where to find them. PhD thesis.
- [Muolo et al., 2019] Muolo, R., Asllani, M., Fanelli, D., Maini, P. K., & Carletti, T. (2019). Patterns of non-normality in networked systems. Journal of Theoretical Biology, 480, 81–91.
- [Muolo et al., 2020] Muolo, R., Carletti, T., Gleeson, J. P., & Asllani, M. (2020). Synchronization dynamics in non-normal networks : The trade-off for optimality. Entropy, 23(1), 36 (1–12).
- [Murray, 2003] Murray, J. (2003). Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications. Springer, 3 edition.
- [Newman, 2018] Newman, M. (2018). Networks. Oxford University Press, 2 edition.

- [Othmer & Scriven, 1971] Othmer, H. & Scriven, L. (1971). Instability and dynamic pattern in cellular networks. Journal of Theoretical Biology, 32(3), 507–537.
- [Othmer & Scriven, 1974] Othmer, H. & Scriven, L. (1974). Non-linear aspects of dynamic pattern in cellular networks. Journal of Theoretical Biology, 43(1), 83–112.
- [Prigogine & Lefever, 1968] Prigogine, I. & Lefever, R. (1968). Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. ii. J. Chem. Phys., 48, 1695 (1–6).
- [Strogatz & Watts, 1998] Strogatz, S. & Watts, D. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. Nature, 393, 440–442.
- [Trefethen & Embree, 2005] Trefethen, L. & Embree, M. (2005). Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators.
- [Turing, 1952] Turing, A. (1952). The chemical basis of morphogenesis. Biological Sciences, Series B, 237(641), 37–72.