

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ APPROFONDIE

Stabilisation positive optimale de systèmes dynamiques linéaires

PIENGEON, Violaine

Award date:
2023

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**STABILISATION POSITIVE OPTIMALE DE SYSTEMES
DYNAMIQUES LINEAIRES**

Promoteur : Joseph WINKIN

Encadrante : Candy SONVEAUX

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « [sciences mathématiques à finalité approfondie](#) »**

Violaine PIENGEON

Août 2023

Stabilisation positive optimale de systèmes dynamiques linéaires
par Violaine Piengeon

Résumé : Ce mémoire a pour objet l'étude du problème de stabilisation positive de systèmes linéaires temps-invariants (LTI) positifs fini-dimensionnels. Nous nous intéressons donc au développement de lois de contrôle qui permettent de stabiliser asymptotiquement un système tout en maintenant la propriété de positivité des trajectoires d'état. Dans un premier temps, des paramétrisations des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour deux classes de systèmes positifs sont fournies. Les résultats obtenus sont ensuite appliqués à des modèles discrétisés associés au système de diffusion pure, qui est un système LTI positif infini-dimensionnel. Dans un second temps, nous nous intéressons au problème qui consiste à trouver, pour un système LTI positif, la matrice d'asservissement positivement stabilisante optimale selon un critère choisi. Les contraintes de ce problème d'optimisation sont paramétrées pour laisser la possibilité d'imposer une vitesse de convergence au système. Une fois posé, une méthode numérique basée sur le principe de la dichotomie est proposée afin de résoudre le problème d'optimisation. Cet algorithme est testé numériquement sur l'un des modèles étudiés et associés à la diffusion pure.

Optimal positive stabilization of linear dynamical systems
by Violaine Piengeon

Abstract : This master thesis is concerned with the study of the positive stabilization problem for linear time-invariant (LTI) finite-dimensional systems. Thus, we focused on the development of control laws that allow asymptotic stabilization of a system while keeping the positivity property of state trajectories. First, parameterizations of all positively stabilizing feedbacks for two particular classes of positive systems are provided. The obtained results are then applied to discretized models associated with the pure diffusion system, which is an infinite-dimensional positive LTI system. Secondly, we address the problem of finding the optimal positively stabilizing feedback matrix for a positive LTI system according to a chosen criterion. The constraints of this optimization problem are parameterized to allow imposing a convergence rate on the system. Once formulated, a numerical method based on the bisection principle is proposed to solve the optimization problem. This algorithm is numerically tested on one of the studied models associated with pure diffusion.

Remerciements

À travers ces lignes, je tiens à remercier les nombreuses personnes qui m'ont apporté leur soutien et leur aide tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à mon promoteur, Monsieur Joseph Winkin. Sa passion pour les mathématiques, sa bienveillance et ses encouragements ont joué un rôle essentiel dans le développement de ce mémoire. Je le remercie pour ses nombreuses idées partagées et le temps qu'il m'a consacré. Je lui suis aussi reconnaissante de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche scientifique.

Je voudrais également adresser mes remerciements à Candy Sonveaux, qui a supervisé mon mémoire aux côtés de Monsieur Winkin. Ses conseils et son soutien ont été inestimables tout au long de ce travail. Je la remercie pour sa disponibilité et ses idées éclairantes. Sa relecture attentive, ainsi que celle de Monsieur Winkin, ont été d'une aide précieuse pour l'amélioration de ce mémoire.

Je tiens également à remercier Monsieur Chris Guiver, mon maître de stage, qui m'a accompagnée lors de mon séjour à Édimbourg. Grâce à nos échanges, j'ai pu élargir mes connaissances dans le domaine de la stabilisation des systèmes positifs. Je le remercie de m'avoir fait grandir face à la démarche de recherche en mathématiques.

Ma reconnaissance va également à ma famille, dont le soutien inébranlable et les encouragements ont été des piliers essentiels tout au long de mon parcours académique, et bien au-delà. Je les remercie infiniment pour leur présence au quotidien et pour avoir toujours cru en moi. Il est certain que je ne serais pas arrivée jusque là sans eux. Merci pour tout !

Enfin, j'aimerais remercier mes ami(e)s pour les bons moments passés. Leur amitié précieuse a été un véritable soutien.

Table des matières

Introduction	1
1 Systèmes linéaires temps-invariants positifs	5
1.1 Système dynamique considéré	5
1.2 Stabilisation positive des systèmes LTI positifs	8
1.2.1 Stabilité des systèmes LTI	8
1.2.2 Stabilisation des systèmes LTI	9
1.2.3 Stabilisation positive des systèmes LTI positifs	10
1.3 Conception de lois d’asservissement positivement stabilisantes	10
2 Système de diffusion pure contrôlé au bord	15
2.1 Système non contrôlé	15
2.1.1 Définition	15
2.1.2 Discrétisation	16
2.2 Système contrôlé au début du domaine spatial	19
2.3 Système contrôlé à la fin du domaine spatial	23
2.4 Système contrôlé au début et à la fin du domaine spatial	28
3 Stabilisation positive optimale	33
3.1 Présentation du problème	33
3.2 Pertinence	40
3.2.1 Relativité de la notion d’optimalité	40
3.2.2 Étude des objectifs de contrôle	41
3.2.3 Existence d’autres critères d’optimalité	42
3.3 Réécriture des contraintes	42
4 Algorithme pour le problème de stabilisation positive optimale	51
4.1 Algorithme d’optimisation	51
4.2 Méthode de dichotomie	53
4.2.1 Principe de la méthode	53
4.2.2 Avantages de l’algorithme	55
4.3 Méthode de dichotomie avec des LMI	57
4.3.1 Motivations	57
4.3.2 Présentation de la méthode	58
4.3.3 Avantages et limites de l’algorithme	59
4.4 Résolution numérique des sous-problèmes	61

5 Simulations numériques	67
5.1 Données et éléments caractéristiques	67
5.2 Comparaison entre l'itéré final et l'itéré initial	70
5.3 Étude sur les marges de stabilité	74
5.4 Étude sur les matrices de poids	78
5.5 Discussion sur la convergence numérique	81
Conclusion	83
Bibliographie	88

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques, qui est un domaine des mathématiques appliquées cherchant à modéliser les systèmes contrôlés afin de pouvoir influencer leur comportement. Ces systèmes contrôlés sont omniprésents en sciences et en ingénierie. Ils apparaissent dans des disciplines variées, du contrôle aérospatial au contrôle de production et de fabrication, en passant par la robotique, l'épidémiologie ou encore la gestion des écosystèmes. La modélisation se fait souvent via une équation différentielle et l'objectif est alors de concevoir des lois de contrôle afin que l'état du système ait le comportement souhaité.

Nous nous intéressons en particulier aux systèmes linéaires positifs, qui sont des systèmes dynamiques linéaires caractérisés par des composantes d'état qui ne deviennent jamais négatives au cours du temps. L'étude de ce genre de système est d'une grande importance puisque la propriété de positivité intervient dans de nombreux domaines comme les sciences biomédicales, l'épidémiologie ou encore l'ingénierie. En effet, des grandeurs physiques comme une masse, une concentration ou encore une densité de population sont toutes des quantités positives pouvant être représentées par des variables d'état. Comme exemples de systèmes positifs, nous pouvons notamment citer les modèles épidémiologiques et les modèles pharmacocinétiques. Le premier de ces modèles étudie l'évolution du nombre d'individus dans différentes classes d'une population au cours d'une épidémie. Le second, quant à lui, décrit l'évolution de la concentration d'un médicament présent dans l'organisme, après son administration. D'autres exemples de systèmes positifs peuvent notamment être trouvés dans les références (CHELLABOINA et al., 2009) et (GODFREY, 1983) ou encore dans (SCHUPPEN, 2008). Par ailleurs, nous citons (HADDAD et al., 2010) et (FARINA & RINALDI, 2000) comme références pour une vue d'ensemble de la théorie des systèmes positifs et de ses applications.

Lorsqu'on désire stabiliser un système linéaire positif, il est nécessaire de pouvoir concevoir des lois de contrôle capables de maintenir cette propriété de positivité. Cela est notamment le cas pour de nombreuses applications, tels que les modèles pharmacocinétiques cités précédemment, dont la positivité est une caractéristique naturelle. En effet, stabiliser de tels systèmes positifs en permettant à certaines variables d'état de devenir négatives n'aurait pas de sens d'un point de vue applicatif car des concentrations sont des quantités toujours positives.

Dans la littérature, le problème de stabilisation de systèmes linéaires positifs est appelé problème de stabilisation positive et les lois de contrôle sont dites positivement stabilisantes. Il existe de nombreuses contributions dédiées à ce sujet comme (LEENHEER & AEYELS, 2001) et (DEHAYE, 2017). Dans cette dernière référence, l'auteur s'intéresse notamment à une classe particulière de systèmes linéaires positifs et il fournit une paramétrisation de toutes les lois de contrôle positivement stabilisantes. Le résultat est ensuite appliqué à un modèle lié au système de diffusion pure, qui est une équation aux dérivées partielles. Dans ce mémoire, nous prolongeons dans un premier temps ces résultats en considérant des variantes des systèmes étudiés dans (DEHAYE, 2017).

En plus de la propriété de positivité, dans les applications, il peut y avoir des manières de stabiliser le système qui sont plus souhaitées que d'autres. Par exemple, un drone est un appareil dont la trajectoire est contrôlée grâce à un ou plusieurs moteurs. Pour l'amener à une certaine position, il y a différents chemins envisageables qui peuvent être empruntés à des vitesses variées. Dès lors, il peut être intéressant de contrôler le drone pour qu'il se déplace le plus rapidement possible sans dépasser la tension maximale autorisée dans les moteurs. Ces questions font notamment l'objet de la théorie de la commande optimale. Plus formellement, celle-ci consiste à trouver une loi de contrôle qui vérifie un critère d'optimalité choisi tout en respectant éventuellement des contraintes qui font intervenir l'état et/ou l'entrée du système. La théorie de la commande optimale est un sujet très important dans la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques et fait notamment l'objet des références (LOCATELLI, 2001) (pour une vue d'ensemble) et (BEAUTHIER, 2011) (pour le problème de la commande optimale LQ dans les systèmes linéaires positifs).

Néanmoins, la particularité dans ce mémoire réside dans le fait que nous nous intéressons à un problème d'optimisation classique (dans le sens où la dynamique n'apparaît pas explicitement dans les contraintes ou dans le critère d'optimalité), mais qui est lié au comportement des systèmes linéaires positifs étudiés. Plus précisément, le problème d'optimisation est posé de telle sorte que la solution peut être utilisée pour construire une loi de contrôle optimale selon des objectifs choisis. De plus, les contraintes du problème garantissent qu'appliquer cette loi de contrôle au système permet de le stabiliser positivement. Nous paramétrons également les contraintes en vue de laisser la possibilité d'imposer une vitesse de convergence au système. L'absence de la dynamique et la forme du problème d'optimisation considéré nous ont, ensuite, permis d'élaborer une méthode numérique de résolution, qui est la contribution principale de ce mémoire dans le domaine de la stabilisation positive. L'algorithme développé a également été implémenté sur MATLAB et testé sur le modèle correspondant à la discrétisation du système de diffusion pure avec un contrôle dans les conditions au bord de Neumann.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Le Chapitre 1 est consacré aux systèmes linéaires temps-invariants positifs. Par soucis de clarté, nous commençons par définir formellement les systèmes étudiés dans la Section 1.1. Le problème de stabilisation positive est ensuite introduit dans la Section 1.2. Nous présentons dans la Section 1.3, des paramétrisations de lois d'asservissement positivement stabilisantes pour deux classes particulières de systèmes linéaires positifs.

Dans le Chapitre 2, nous appliquons les résultats théoriques de la Section 1.3 à des modèles liés au système de diffusion pure. La Section 2.1 permet de définir cette équation aux dérivées partielles et de présenter une manière de la discrétiser. Les Sections 2.2 et 2.3 sont dédiées aux systèmes de diffusion pure avec un contrôle dans les conditions au bord de Neumann, respectivement en $z = 0$ et en $z = L$. Dans la Section 2.4, nous considérons deux contrôles dans les conditions au bord ($z = 0$ et en $z = L$).

Le problème d'optimisation considéré dans ce mémoire fait l'objet du Chapitre 3. Nous le présentons formellement dans la Section 3.1. La Section 3.2 permet de détailler son intérêt dans le cadre de la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques. L'objectif de la Section 3.3 est de présenter d'autres formulations des contraintes de ce problème en vue de faciliter l'élaboration d'un algorithme de résolution.

Cette méthode numérique, qui est un algorithme d'optimisation, fait l'objet du Chapitre 4. Son principe général est présenté dans la Section 4.1. Ensuite, la Section 4.2 permet essentiellement de détailler la méthode utilisée pour construire les itérés. Dans la Section 4.3, nous proposons une alternative à l'algorithme présenté dans la Section 4.2. La question de l'implémentation du sous-problème intervenant dans l'algorithme proposé dans la Section 4.3 fait l'objet de la Section 4.4.

Le Chapitre 5 reprend les différents résultats des simulations effectuées sur MATLAB avec le modèle discrétisé présenté dans la Section 2.2. Après un bref rappel de ce système, nous introduisons, dans la Section 5.1, les éléments caractéristiques permettant une comparaison entre les différents résultats obtenus. L'intérêt de la méthode numérique proposée dans le Chapitre 4 est illustré dans la Section 5.2. Dans les Sections 5.3 et 5.4, nous effectuons une étude comparative des itérés calculés pour différents paramètres du problème d'optimisation. Enfin, dans la Section 5.5, nous motivons une analyse de la convergence numérique des itérés lorsque la dimension du modèle tend vers l'infini.

Nous concluons ce mémoire en résumant notre approche et les différents résultats obtenus et en fournissant différentes perspectives intéressantes pour un travail futur.

Chapitre 1

Systemes lineaires temps-invariants positifs

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une classe particulière de systèmes dynamiques (en dimension finie). Il s'agit des systèmes linéaires temps-invariants (LTI) positifs. Le problème de stabilisation de tels systèmes est également étudié. Pour cela, nous commençons par définir les systèmes LTI positifs dans la Section 1.1. La question de la stabilisation positive des systèmes LTI positifs fait l'objet de la Section 1.2. Enfin, nous présentons dans la Section 1.3, des paramétrisations de lois d'asservissement positivement stabilisantes pour deux types particuliers de systèmes LTI positifs. Notons que cette paramétrisation se situe dans le prolongement de la thèse (DEHAYE, 2017).

1.1 Système dynamique considéré

Cette première section est consacrée aux systèmes LTI positifs (en dimension finie). Avant de donner la définition de tels systèmes, commençons par présenter les systèmes LTI. Cette notion est notamment abordée dans le cours (WINKIN, 2021).

Définition 1.1.1. *Un système linéaire temps-invariant (LTI) est un système dynamique décrit par des équations de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $t \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial. Les fonctions $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont respectivement la trajectoire d'état, l'entrée et la sortie du système (1.1). De plus, l'entrée $u(\cdot)$ est une fonction continue par morceaux. Dans ce cas, $u(\cdot)$ est dite admissible. Notons que $\mathbb{R}^{k \times l}$ et \mathbb{R}_+ représentent respectivement l'ensemble des matrices réelles de dimension $k \times l$ et l'ensemble des réels positifs.

La Figure 1.1 est un schéma fonctionnel d'un système LTI, dit en boucle ouverte, lorsque $D = 0$. Par ailleurs, il est connu que la trajectoire d'état du système (1.1) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

pour tout $t \geq 0$. Dans le cas particulier où $u(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$, la trajectoire d'état correspondante, appelée trajectoire d'état libre, est définie par

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad (1.3)$$

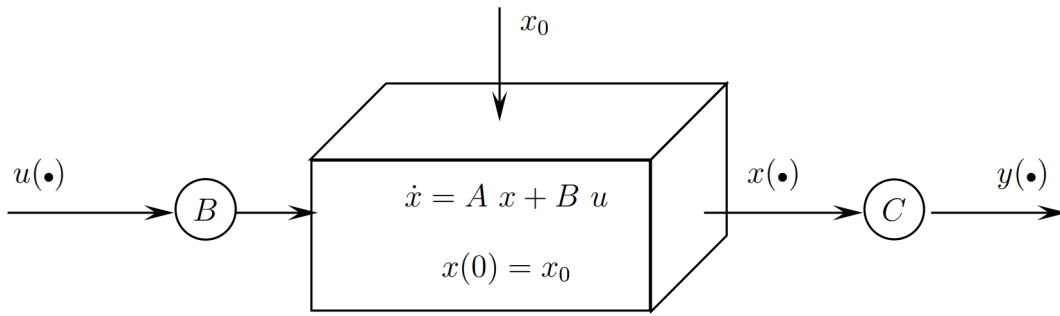


FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel d'un système LTI en boucle ouverte lorsque $D = 0$ - Source : (WINKIN, 2021)

pour tout $t \geq 0$.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons également les notions de vecteurs strictement positifs, positifs, non négatifs et strictement négatifs, ainsi que de matrices positives et non négatives. Remarquons que les matrices positives évoquées dans ce travail doivent être distinguées des matrices définies positives.

Définition 1.1.2. Soient un vecteur $v := (v_1 \dots v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Le vecteur v est dit

- *strictement positif* ($v \gg 0$) si $v_i > 0$, pour $i = 1, \dots, n$,
- *positif* ($v > 0$) si $v_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, n$ et $v \neq 0$,
- *non négatif* ($v \geq 0$) si $v_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, n$,
- *strictement négatif* ($v \ll 0$) si $v_i < 0$, pour $i = 1, \dots, n$.

La matrice A est dite

- *positive* ($A > 0$) si $a_{ij} \geq 0$, pour $i, j = 1, \dots, n$ et $A \neq 0$,
- *non négative* ($A \geq 0$) si $a_{ij} \geq 0$, pour $i, j = 1, \dots, n$.

Les ensembles \mathbb{R}_+^n et $\mathbb{R}_+^{n \times m}$ représentent respectivement l'ensemble des vecteurs non négatifs de \mathbb{R}^n et l'ensemble des matrices non négatives de $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Grâce aux Définitions 1.1.1 et 1.1.2, nous sommes maintenant en mesure de définir la positivité des systèmes LTI, qui, comme indiqué dans l'introduction, est une propriété naturelle de nombreux systèmes tels que les modèles épidémiologiques et les modèles pharmacocinétiques. Ce concept est notamment étudié dans les livres (KACZOREK, 2002) et (HADDAD et al., 2010).

Définition 1.1.3. Un système LTI de la forme (1.1) est positif si pour tout état initial non négatif $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et pour toute entrée admissible non négative $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^m$, la trajectoire d'état $x(\cdot)$ et la sortie $y(\cdot)$ sont non négatives, c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$.

Les systèmes positifs sont donc caractérisés par des composantes d'état qui ne deviennent jamais négatives au cours du temps, lorsqu'une condition initiale et une entrée non négative sont choisies. Comme cela a été réalisé dans la thèse (DEHAYE, 2017), nous pouvons également exprimer le concept de système LTI positif d'un point de vue plus géométrique. En effet, un système de la forme (1.1) est positif si la trajectoire d'état associée à une condition initiale située dans l'orthant non négatif de \mathbb{R}^n et obtenue en appliquant une entrée non négative, reste dans l'orthant non négatif au cours du temps. Cette trajectoire d'état doit également donner une sortie non négative. Les Figures 1.2 et 1.3 montrent trois trajectoires d'état obtenues en appliquant

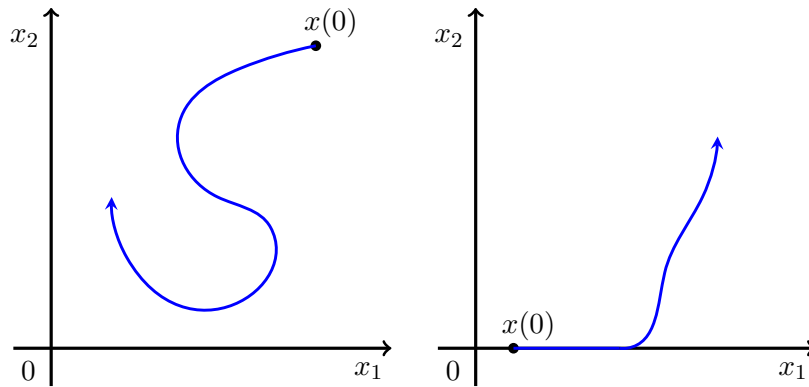


FIGURE 1.2 – Trajectoires d'état associées à une condition initiale $x(0)$ non négative, et obtenues en appliquant une entrée non négative à un système LTI positif - Retravaillé du livre (FARINA & RINALDI, 2000)

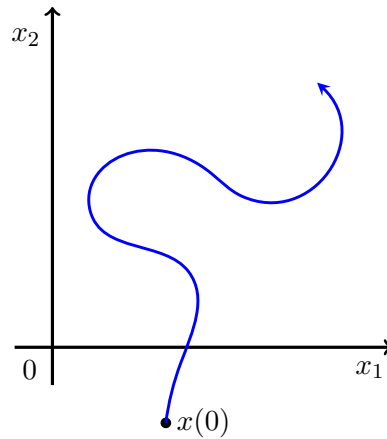


FIGURE 1.3 – Trajectoire d'état associée à une condition initiale $x(0)$ strictement négative, et obtenue en appliquant une entrée non négative à un système LTI positif - Retravaillé du livre (FARINA & RINALDI, 2000)

une entrée non négative à un système LTI positif du second ordre, c'est-à-dire avec $n = 2$. Dans cette situation, l'orthant non négatif est le premier quadrant du plan réel. Nous constatons, sur la Figure 1.2, que la trajectoire commence dans le premier quadrant et reste bien dedans au cours du temps. La trajectoire de la Figure 1.3, quand à elle, ne commence pas dans le premier quadrant mais une fois entrée, elle ne le quitte plus. L'orthant non négatif est donc une région de \mathbb{R}^n dans laquelle les trajectoires générées par des entrées non négatives peuvent entrer mais pas sortir.

Nous allons à présent expliciter une caractérisation de la positivité des systèmes LTI. Celle-ci permet de déterminer si un système LTI est positif, sur base des matrices A , B , C et D du système (1.1). Cette alternative pour tester la positivité d'un système est intéressante par rapport à la Définition 1.1.1 puisque cette dernière nécessite de vérifier que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, et ce, pour tout état initial $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et pour toute fonction d'entrée $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^m$. La caractérisation, quant à elle, se base uniquement sur les matrices A , B , C et D du système et utilise la notion de matrices non négatives mais aussi celle de matrices de Metzler.

Définition 1.1.4. Une matrice A est une matrice de Metzler si toutes ses entrées hors diagonale

sont plus grandes ou égales à zéro, c'est-à-dire $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$, pour tout $i \neq j$.

La propriété d'être de Metzler pour une matrice peut également être caractérisée par une exponentielle matricielle particulière. Cette caractérisation fait l'objet de la Proposition 1.1.1, dont la preuve se trouve notamment dans l'article (CHELLABOINA et al., 2009) ou encore dans le livre (HADDAD et al., 2010).

Proposition 1.1.1. *Une matrice A est une matrice de Metzler si et seulement si $e^{At} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Remarquons qu'une matrice non négative est une matrice de Metzler, alors qu'une matrice de Metzler est une matrice non négative à un shift de la diagonale près.

Il est maintenant possible d'énoncer le théorème permettant de caractériser les systèmes LTI positifs. Celui-ci provient de la thèse (DEHAYE, 2017). Nous n'en donnons pas la preuve mais elle peut être trouvée dans le mémoire (DEHAYE, 2011).

Théorème 1.1.1. *Un système LTI (1.1) est positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et B, C et D sont des matrices non négatives.*

1.2 Stabilisation positive des systèmes LTI positifs

Dans la section précédente, nous avons défini une classe particulière de systèmes LTI : les systèmes LTI positifs. Pour rappel, ces systèmes ont la particularité de maintenir les trajectoires issues de conditions initiales et d'entrées non négatives dans l'orthant non négatif. La stabilité et le problème de stabilisation sont deux autres concepts fondamentaux dans la théorie des systèmes et du contrôle. Ils font l'objet des Sous-sections 1.2.1 et 1.2.2, qui ont été inspirées du cours (WINKIN, 2021). La Sous-section 1.2.3 présente, quant à elle, une manière de traduire le problème de stabilisation dans le cas des systèmes LTI positifs. Ce résultat est notamment présent dans la thèse (DEHAYE, 2017).

1.2.1 Stabilité des systèmes LTI

Nous commençons par donner la définition d'un système LTI (internement) (exponentiellement) stable.

Définition 1.2.1. *Un système LTI (1.1) est (internement) (exponentiellement) stable s'il existe des constantes strictement positives M et ω telles que pour tout $t \geq 0$,*

$$\|e^{At}\| \leq M e^{-\omega t}, \quad (1.4)$$

où $\|\cdot\|$ correspond à n'importe quelle norme matricielle induite. Une matrice A qui vérifie la condition (1.4) est dite (exponentiellement) stable.

Pour savoir si un système est stable, il est également possible d'utiliser une caractérisation bien connue, basée sur la partie réelle des valeurs propres de la matrice A . Dans le Théorème 1.2.1, l'ensemble $\sigma(A)$ est le spectre de A . La preuve se trouve notamment dans l'ouvrage (ANTSAKLIS & MICHEL, 2006).

Théorème 1.2.1. *Un système LTI (1.1) est (internement) (exponentiellement) stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.*

Le Théorème 1.2.2 fourni, quant-à-lui, une interprétation dynamique de la stabilité dans le cas des systèmes LTI.

Théorème 1.2.2. *Un système LTI (1.1) est (internement) (exponentiellement) stable si et seulement s'il existe des constantes strictement positives M et ω telles que la trajectoire d'état libre (1.3) issue de n'importe quel état initial x_0 vérifie, pour tout $t \geq 0$,*

$$\|e^{At}x_0\| \leq Me^{-\omega t}\|x_0\|,$$

c'est-à-dire qu'elle converge exponentiellement vers l'état nul lorsque $t \rightarrow 0$.

Remarque 1.2.1. *Dans la suite, les termes "internement" et "exponentiellement" sont omis.*

1.2.2 Stabilisation des systèmes LTI

Pour certains systèmes LTI (1.1), il peut arriver qu'il existe des états initiaux x_0 dont les trajectoires d'état libres (1.3) correspondantes ne convergent pas vers l'état nul lorsque $t \rightarrow 0$. Dans ce cas, le Théorème 1.2.2 affirme que le système n'est pas stable. Par contre, pour n'importe quel état initial x_0 , il est parfois possible de trouver une entrée $u(\cdot)$ qui, lorsqu'elle est appliquée au système (1.1), donne une trajectoire d'état (1.2) asymptotiquement convergente vers l'état nul. Notons que lorsqu'une entrée $u(\cdot)$ est choisie dans le but qu'un système dynamique ait un comportement souhaité, elle est souvent appelée loi de contrôle ou plus simplement contrôle. Si pour tout état initial x_0 , il est possible de concevoir une loi de contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire d'état (1.2) associée est convergente vers l'état nul lorsque $t \rightarrow 0$, alors le système LTI (1.1) est dit stabilisable.

Définition 1.2.2. *Un système LTI (1.1) est dit (exponentiellement) stabilisable si pour tout état initial x_0 , il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que $x(t) \rightarrow 0$ exponentiellement lorsque $t \rightarrow 0$.*

Ce problème, appelé problème de stabilisation, est notamment étudié dans le cours (WINKIN, 2021). Selon cette référence, il peut être résolu grâce au concept d'asservissement (statique) d'état. Ce résultat fait l'objet du Théorème 1.2.3, dont la preuve se trouve notamment dans la référence (WINKIN, 2021). Notons que le terme "statique" est omis dans la suite. Il en va de même pour le terme "exponentiellement" qui caractérise la stabilisabilité.

Définition 1.2.3. *Une loi d'asservissement (statique) d'état est un contrôle $u(\cdot)$ de la forme*

$$u(\cdot) = Kx(\cdot), \tag{1.5}$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est appelée matrice d'asservissement ou matrice de gain.

Théorème 1.2.3. *Un système LTI (1.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une loi d'asservissement d'état $u(\cdot) = Kx(\cdot)$ telle que le système*

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \tag{1.6}$$

appelé système asservi, est stable. Une telle matrice K est appelée matrice d'asservissement stabilisante pour le système (1.1).

En d'autres termes, le système (1.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice K telle que la matrice $A + BK$ est stable. La Figure 1.4 montre une schématisation du système asservi, aussi appelé système en boucle fermée, lorsque $D = 0$.

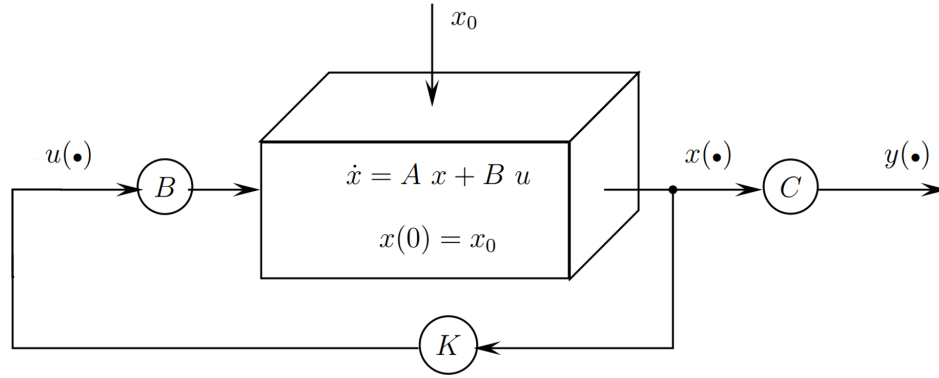


FIGURE 1.4 – Schéma fonctionnel d'un système LTI en boucle fermée lorsque $D = 0$ - Source : (WINKIN, 2021)

1.2.3 Stabilisation positive des systèmes LTI positifs

Comme mentionné dans l'introduction, si l'objectif est de stabiliser un système LTI positif, il est nécessaire de concevoir des lois d'asservissement capables de maintenir la propriété naturelle de positivité. En effet, stabiliser de tels systèmes positifs en permettant à certaines variables d'état de devenir négatives n'aurait pas de sens d'un point de vue applicatif. Le problème de stabilisation de systèmes LTI positifs est appelé problème de stabilisation positive.

Définition 1.2.4. *Un système LTI positif (1.1) est positivement (exponentiellement) stabilisable s'il existe une matrice d'asservissement $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que la matrice $A + BK$ est stable et de Metzler, c'est-à-dire telle qu'il existe des constantes strictement positives M et ω telles que pour tout $t \geq 0$,*

$$\|e^{(A+BK)t}\| \leq Me^{-\omega t},$$

et pour tout $t \geq 0$, $e^{(A+BK)t} \geq 0$. Une telle matrice K est appelée matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système (1.1).

Remarquons qu'un système LTI positif (1.1) est positivement stabilisable si le système asservi (1.6) correspondant est positif et stable.

Pour terminer cette section, nous énonçons une proposition permettant de caractériser la stabilité d'une matrice de Metzler. Celle-ci se trouve notamment dans l'article (CHELLABOINA et al., 2009). Pour une preuve complète, nous suggérons au lecteur de consulter la Proposition 1.1.3 de la thèse (DEHAYE, 2017).

Proposition 1.2.1. *Une matrice de Metzler $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est stable si et seulement si il existe un vecteur strictement positif v tel que Av est strictement négatif, c'est-à-dire il existe $v \in \mathbb{R}_{0,+}^n$ tel que $Av \in \mathbb{R}_{0,-}^n$.*

Notons que la vérification de la stabilité d'une matrice de Metzler se résume donc à trouver une solution d'un système d'inéquations. Ce résultat algébrique sera utilisé dans la section suivante pour fournir des paramétrisations de lois d'asservissement positivement stabilisantes.

1.3 Conception de lois d'asservissement positivement stabilisantes

La section précédente nous a permis de poser le problème de la stabilisation positive de systèmes LTI positifs. À présent, nous allons suivre le raisonnement effectué dans la thèse (DEHAYE,

2017) afin de déduire quelles propriétés doit satisfaire une loi d'asservissement pour stabiliser positivement un système LTI positif. Ce développement peut être réalisé grâce à la Définition 1.2.4 et à la Proposition 1.2.1.

Considérons le système positif décrit par l'équation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.7)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donc une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice non négative. L'entrée $u(\cdot)$ est une loi d'asservissement de la forme (1.5). Selon la Définition 1.2.4 et la Proposition 1.2.1, le système asservi (1.6) est positif et stable si et seulement si

$$\begin{cases} (A + BK) \text{ est une matrice de Metzler} \\ \exists v \gg 0 \text{ tel que } (A + BK)v \ll 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Dans cette section, nous allons développer ces conditions algébriques. Le but est de fournir des paramétrisations de matrices d'asservissement positivement stabilisantes pour le système (1.7), c'est-à-dire une façon directe et simple de calculer toutes les matrices d'asservissement positivement stabilisantes.

Cependant, les conditions (1.8) mènent à un système d'inégalités strictes quadratiques puisque v et K sont inconnus. Ce type de système peut être long et compliqué à résoudre. C'est pourquoi, dans la thèse (DEHAYE, 2017), une classe particulière de systèmes dynamiques a été considérée afin de fournir une paramétrisation plus simple et plus directe des matrices d'asservissement positivement stabilisantes. Ces systèmes sont de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (1.9)$$

où A est une matrice de Metzler et b est un vecteur positif ayant uniquement sa première entrée non nulle. Nous retrouverons cette forme de système dans la Section 2.2, lorsque nous étudierons un modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord. Pour les systèmes à une entrée de la forme (1.9), l'auteur de la thèse (DEHAYE, 2017) a prouvé le Théorème 1.3.1 suivant. Nous ne donnons pas la preuve associée. Néanmoins, un développement similaire à celle-ci sera effectué pour démontrer le Théorème 1.3.2, qui concerne une classe particulière de système LTI positif à deux entrées.

Théorème 1.3.1. *Soit un système LTI positif décrit par l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, où A est une matrice de Metzler et b est un vecteur positif ayant uniquement sa première entrée non nulle, c'est-à-dire $b := b_1 e_1$, où $b_1 > 0$. Notons que e_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors, la matrice d'asservissement $k = (k_1 \ \dots \ k_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est positivement stabilisante pour ce système si et seulement si*

$$k_1 = \frac{-a_{11}v_1 - (a_{12} + b_1 k_2)v_2 - \dots - (a_{1n} + b_1 k_n)v_n - \omega}{b_1 v_1},$$

et

$$k_i \geq \frac{-a_{1i}}{b_1} \quad i = 2, \dots, n,$$

où ω est un paramètre libre strictement positif, et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur strictement positif qui est solution du système d'inégalités

$$\begin{cases} -a_{21}v_1 - \dots - a_{2n}v_n > 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}v_1 - \dots - a_{nn}v_n > 0. \end{cases}$$

A présent, nous allons énoncer et démontrer un théorème similaire au Théorème 1.3.1. Cependant, nous considérons cette fois des systèmes de la forme (1.7) à deux entrées, c'est-à-dire $u(t) = (u_1(t) \ u_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2$. De plus, nous supposons que A est une matrice de Metzler et B est une matrice positive dont les éléments $(1,1)$ et $(n,2)$ sont les seuls éléments non nuls. Nous retrouverons ce type de systèmes dans la Section 2.4, lorsque nous étudierons le système de diffusion pure avec deux entrées dans les conditions au bord. Le Théorème 1.3.2 fournit une paramétrisation de toutes les matrices d'asservissement positivement stabilisantes pour cette classe de systèmes LTI positifs à deux entrées. Nous nous sommes inspirés de la démonstration du Théorème 1.3.2. de la thèse (DEHAYE, 2017) pour prouver ce nouveau résultat.

Théorème 1.3.2. *Soit un système LTI positif décrit par l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de Metzler, B est une matrice positive de la forme*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2},$$

avec b_1 et b_2 des constantes strictement positives, et $u(t) = (u_1(t) \ u_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2$. Alors, la matrice d'asservissement

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n}, \quad (1.10)$$

est positivement stabilisante pour ce système si et seulement si

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{-a_{11}v_1 - (a_{12} + b_1k_{12})v_2 - \dots - (a_{1n} + b_1k_{1n})v_n - \omega_1}{b_1v_1} \\ k_{2n} = \frac{-(a_{n1} + b_2k_{21})v_1 - \dots - (a_{n,n-1} + b_2k_{2,n-1})v_{n-1} - a_{nn}v_n - \omega_2}{b_2v_n}, \end{cases} \quad (1.11)$$

et

$$\begin{cases} k_{1i} \geq \frac{-a_{1i}}{b_1} & i = 2, \dots, n \\ k_{2i} \geq \frac{-a_{ni}}{b_2} & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1.12)$$

où ω_1 et ω_2 sont des paramètres libres strictement positifs, et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur strictement positif qui est solution du système d'inégalités

$$\begin{cases} -a_{21}v_1 - \dots - a_{2n}v_n > 0 \\ \vdots \\ -a_{n-1,1}v_1 - \dots - a_{n-1,n}v_n > 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Démonstration. La suffisance des conditions (1.10)-(1.13) est triviale puisqu'il suffit de vérifier que toutes les matrices d'asservissement de la forme (1.11), (1.12) vérifient les conditions (1.8).

Prouvons maintenant leur nécessité. Pour cela, supposons que la matrice K , donnée par (1.10), soit positivement stabilisante pour le système considéré. Commençons par développer la matrice

$A + BK$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} A + BK &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 k_{11} & \dots & a_{1n} + b_1 k_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} + b_2 k_{21} & \dots & a_{nn} + b_2 k_{2n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque K est positivement stabilisante, $A + BK$ est une matrice de Metzler stable. La première propriété, liée à la positivité, mène aux conditions

$$\begin{cases} k_{1i} \geq \frac{-a_{1i}}{b_1} & i = 2, \dots, n \\ k_{2i} \geq \frac{-a_{ni}}{b_2} & i = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

avec les paramètres k_{11} et k_{2n} libres. De la deuxième propriété, liée à la stabilité, nous obtenons, par la Proposition 1.2.1, le système d'inégalités strictes suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + b_1 k_{11})v_1 + \dots + (a_{1n} + b_1 k_{1n})v_n < 0 \\ a_{21}v_1 + \dots + a_{2n}v_n < 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}v_1 + \dots + a_{n-1,n}v_n < 0 \\ (a_{n1} + b_2 k_{21})v_1 + \dots + (a_{nn} + b_2 k_{2n})v_n < 0 \\ v_1 > 0 \\ \vdots \\ v_n > 0, \end{array} \right.$$

que l'on peut exprimer, en introduisant les paramètres libres $w_1 > 0$ et $w_2 > 0$, comme

$$\left\{ \begin{array}{l} -(a_{11} + b_1 k_{11})v_1 - \dots - (a_{1n} + b_1 k_{1n})v_n = w_1 \\ -a_{21}v_1 - \dots - a_{2n}v_n > 0 \\ \vdots \\ -a_{n-1,1}v_1 - \dots - a_{n-1,n}v_n > 0 \\ -(a_{n1} + b_2 k_{21})v_1 - \dots - (a_{nn} + b_2 k_{2n})v_n = w_2 \\ v_1 > 0 \\ \vdots \\ v_n > 0. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Remarquons que dans le système (1.14), il n'y a que les deux équations qui dépendent explicitement des entrées de K . Nous pouvons les réécrire de la manière suivante

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{-a_{11}v_1 - (a_{12} + b_1 k_{12})v_2 - \dots - (a_{1n} + b_1 k_{1n})v_n - w_1}{b_1 v_1} \\ k_{2n} = \frac{-(a_{n1} + b_2 k_{21})v_1 - \dots - (a_{n,n-1} + b_2 k_{2,n-1})v_{n-1} - a_{nn}v_n - w_2}{b_2 v_n}, \end{cases}$$

où v est une solution strictement positive du système d'inégalités (1.13). \square

Grâce aux Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2, nous avons donc en notre possession des paramétrisations de lois d'asservissement pour deux classes particulières de systèmes LTI positifs. Ces paramétrisations nous seront utiles dans le Chapitre 2. En effet, nous appliquerons la méthode des différences finies à des systèmes particuliers d'équations aux dérivées partielles avec conditions au bord, pour obtenir des systèmes de la forme considérée précédemment. Nous pourrons alors utiliser les paramétrisations des Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 afin d'exprimer les lois d'asservissement d'état positivement stabilisantes pour les systèmes discrétisés obtenus.

Chapitre 2

Systeme de diffusion pure contrôlé au bord

Dans le Chapitre 1, nous nous sommes intéressés aux systèmes LTI positifs. Pour deux classes particulières de ces systèmes, nous avons détaillé une paramétrisation des lois d'asservissement positivement stabilisantes. Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats obtenus à trois exemples concrets de systèmes LTI positifs. Ceux-ci correspondent à des discrétisations du système de diffusion pure contrôlé au bord. Chaque discrétisation est obtenue en considérant un contrôle différent dans les conditions au bord du système non discrétisé. L'objectif est de fournir une paramétrisation des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour chacune de ces discrétisations.

Comme pour le Chapitre 1, le travail effectué dans le Chapitre 2 étend celui qui a été réalisé dans la thèse (DEHAYE, 2017). Celle-ci contient la modélisation et la discrétisation du système de diffusion pure avec des conditions au bord de Neumann contrôlées en $z = 0$. Une conception des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour ce système discrétisé est également présentée. Dans ce chapitre, nous utilisons ces résultats pour déterminer de nouvelles lois d'asservissement positivement stabilisantes, en considérant cette fois, le système de diffusion pure avec d'autres types de contrôles dans les conditions au bord.

Pour obtenir ces différentes lois d'asservissement, nous commençons par présenter, dans la Section 2.1, le système de diffusion pure et sa discrétisation obtenue grâce à la méthode des lignes. Les Sections 2.2 et 2.3 sont consacrées à l'étude du système de diffusion pure avec un contrôle dans les conditions au bord, respectivement en $z = 0$ et en $z = L$. Dans la Section 2.4, nous considérons un contrôle dans chacune des deux conditions au bord, c'est-à-dire en $z = 0$ et en $z = L$.

2.1 Système non contrôlé

2.1.1 Définition

Le système de diffusion pure est un système décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t), \quad z \in [0, L], t \geq 0, \quad (2.1)$$

où D_a est appelé paramètre de diffusion et L est la longueur du domaine. Ces deux paramètres sont strictement positifs. Les variables z et t sont des variables indépendantes. Par ailleurs, pour

résoudre cette équation, il est nécessaire de spécifier une condition initiale et des conditions au bord. La condition initiale du système (2.1) est

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad (2.2)$$

pour tout $z \in [0, L]$. Dans ce chapitre, nous choisissons des conditions au bord de type Neumann. Elles sont fixées dans les Sections 2.2, 2.3 et 2.4.

Notons que le système de diffusion pure peut notamment être vu comme une description du phénomène de conduction thermique dans une tige métallique de longueur L (voir (WOUWER et al., 2014) ou (CRANK, 1975)). Dans cette situation, t est une variable temporelle, et z est une variable spatiale correspondant à la position sur la tige. Dans ce cas, la valeur $x(z, t)$ est la température de la tige au point z et au temps t et l'application $x_0(\cdot)$ définie par (2.2) est appelée le profil de température initial. Pour la suite, nous supposons que l'extrémité gauche de la tige correspond au point $z = 0$, et l'extrémité droite, à $z = L$.

2.1.2 Discrétisation

Dans cette partie du travail, nous discrétisons l'équation aux dérivées partielles (2.1) par rapport à la variable spatiale. Pour cela, la méthode des lignes est utilisée (voir (SARRA, 2003), par exemple). Celle-ci permet de ramener l'équation (2.1) à un système d'équations différentielles ordinaires couplées. La première étape de la méthode des lignes consiste à discrétiser le domaine spatial $[0, L]$ en considérant les n points de discrétisation z_i , $i = 1, \dots, n$, avec $z_1 = 0$ et $z_n = L$. Le pas de discrétisation, noté Δz , est donné par

$$\Delta z = \frac{L}{(n-1)}.$$

Ensuite, nous pouvons approximer les dérivées spatiales en chaque point du domaine spatial, par des formules de différences finies. Nous choisissons les formules de différences finies progressives et régressives du premier ordre pour approximer $\frac{\partial x}{\partial z}(z_i, t)$, pour $i = 1, \dots, n$. Celles-ci sont respectivement données par

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z_i, t) \simeq \frac{x(z_i + \Delta z, t) - x(z_i, t)}{\Delta z},$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z_i, t) \simeq \frac{x(z_i, t) - x(z_i - \Delta z, t)}{\Delta z},$$

pour $i = 1, \dots, n$. Afin d'obtenir une approximation de $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z_i, t)$, pour $i = 1, \dots, n$, nous optons pour la formule de différences finies centrées du second ordre, donnée par

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z_i, t) \simeq \frac{x(z_i + \Delta z, t) - 2x(z_i, t) + x(z_i - \Delta z, t)}{\Delta z^2},$$

pour $i = 1, \dots, n$.

En appliquant successivement les formules de différences finies régressives et progressives,

nous obtenons en z_1

$$\begin{aligned}
\dot{x}(z_1, t) &= D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(0, t) \\
&= D_a \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) \\
&\simeq D_a \frac{\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial x}{\partial z}(-\Delta z, t)}{\Delta z} \\
&\simeq \frac{D_a}{\Delta z} \frac{x(\Delta z, t) - x(0, t)}{\Delta z} \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x(\Delta z, t) - x(0, t)),
\end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial x}{\partial z}(-\Delta z, t) = 0$. En z_i , $i = 2, \dots, n-1$, l'utilisation de la formule de différences finies centrées du second ordre mène à

$$\begin{aligned}
\dot{x}(z_i, t) &= D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z_i, t) \\
&\simeq D_a \frac{x(z_i + \Delta z, t) - 2x(z_i, t) + x(z_i - \Delta z, t)}{\Delta z^2} \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} x(z_i - \Delta z, t) - 2 \frac{D_a}{\Delta z^2} x(z_i, t) + \frac{D_a}{\Delta z^2} x(z_i + \Delta z, t).
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant les formules de différences finies progressives et puis régressives, nous obtenons en z_n

$$\begin{aligned}
\dot{x}(z_n, t) &= D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(L, t) \\
&= D_a \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) \\
&\simeq D_a \frac{\frac{\partial x}{\partial z}(L + \Delta z, t) - \frac{\partial x}{\partial z}(L, t)}{\Delta z} \\
&\simeq \frac{D_a}{\Delta z} \frac{-x(L, t) + x(L - \Delta z, t)}{\Delta z} \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x(L - \Delta z, t) - x(L, t)),
\end{aligned}$$

étant donné que $\frac{\partial x}{\partial z}(L + \Delta z, t) = 0$.

Grâce à la méthode des lignes, nous avons donc transformé l'équation aux dérivées partielles (2.1) en un système de n équations différentielles ordinaires. Le système de diffusion pure (2.1) discrétisé est alors donné par

$$\dot{x}^{(n)}(t) = A^{(n)} x^{(n)}(t), \quad (2.3)$$

où

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} -p_2 & p_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_2 & -2p_2 & p_2 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & p_2 & -2p_2 & p_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_2 & -2p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.4)$$

est une matrice tridiagonale et

$$p_2 = \frac{D_a}{\Delta z^2}.$$

De plus, la trajectoire d'état dans l'équation (2.3), est notée $x^{(n)}(\cdot)$. Elle est défini par

$$x^{(n)}(\cdot) = (x(z_1, \cdot) \quad \cdots \quad x(z_n, \cdot))^{\top} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Remarquons que le système de diffusion pure discrétisé (2.3) est un système LTI positif, c'est-à-dire, par le Théorème 1.1.1, $A^{(n)}$ est une matrice de Metzler. Cette propriété est immédiate puisque $p_2 > 0$. Le système (2.3) est également instable puisque zéro est dans le spectre de $A^{(n)}$. En effet, la somme des colonnes de la matrice $A^{(n)}$ est égal à zéro. Cela implique qu'elles sont linéairement dépendantes et donc $A^{(n)}$ a un déterminant nul. Celui-ci étant le produit des valeurs propres de la matrice, zéro est une valeur propre de $A^{(n)}$. Par ailleurs, en plus d'être tridiagonale, la matrice $A^{(n)}$ est symétrique et a donc toutes ses valeurs propres réelles.

Les Figures 2.1 et 2.2 montrent les trajectoires d'état du système (2.3), obtenues en prenant $L = 1$, $D_a = 1$, $n = 11$, et en considérant les états initiaux du système de diffusion pure (2.1) respectivement donnés par

$$x_0(z) = 1, \quad (2.6)$$

et

$$x_0(z) = 2z^3 - 3z^2 + 1, \quad (2.7)$$

pour tout $z \in [0, L]$. Signalons que ces états initiaux proviennent de la référence (DEHAYE, 2017). Les Figures 2.1 et 2.2 illustrent le caractère positif et instable du système (2.3). En effet, les trajectoires d'état sont issues de conditions initiales non négatives et restent dans l'orthant non négatif. Cependant, elles ne convergent pas vers zéro.

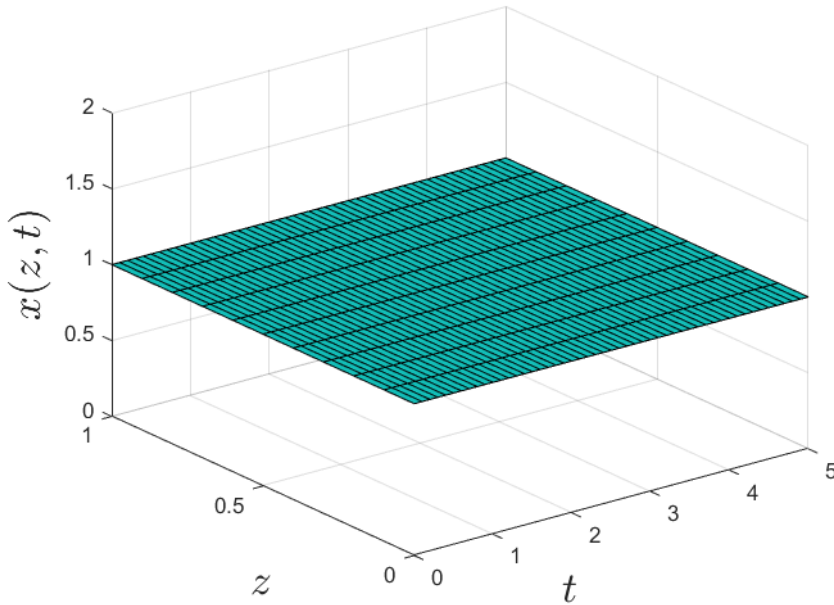


FIGURE 2.1 – Trajectoire d'état du système (2.3) ($n = 11$, $x_0 = 1$) - Retravaillé de la thèse (DEHAYE, 2017)

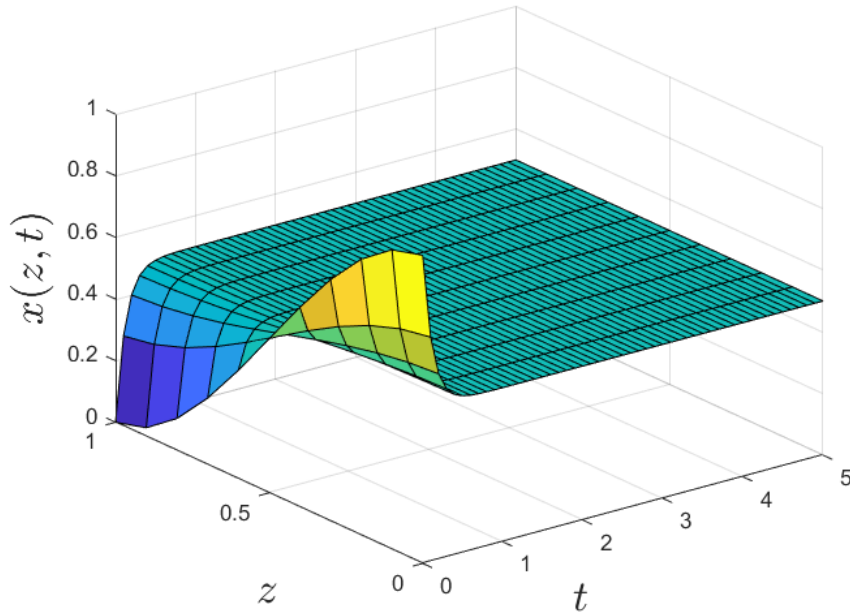


FIGURE 2.2 – Trajectoire d'état du système (2.3) ($n = 11$, $x_0 = 2z^3 - 3z^2 + 1$) - Retravaillé de la thèse (DEHAYE, 2017)

Dans les sections suivantes, nous allons découvrir ce que devient le système de diffusion pure discrétisé (2.3) lorsque différents contrôles sont ajoutés dans les conditions au bord du système non discrétisé (2.1). Malgré l'ajout de ces contrôles, nous verrons que les différents systèmes discrétisés obtenus restent LTI positifs. Pour chacun d'entre eux, nous pourrions alors concevoir des lois d'asservissement positivement stabilisantes.

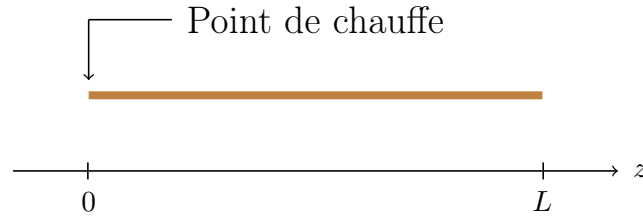
2.2 Système contrôlé au début du domaine spatial

Dans cette section, nous nous intéressons au système de diffusion pure (2.1) avec les conditions au bord de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = v(t) \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

où $v(\cdot)$ est l'entrée du système. Remarquons qu'imposer de tels conditions signifie que la variation de l'état au point $z = L$ est nulle. Par contre, la variation de l'état au bord du domaine, en $z = 0$, est contrôlée grâce à l'entrée $v(\cdot)$.

D'un point de vue physique, ces conditions au bord pour le système de diffusion pure, correspondent à l'action de chauffer ou refroidir une tige métallique uniquement à son extrémité gauche. Plus précisément, appliquer un contrôle $v(\cdot)$ strictement positif signifie que la température à l'intérieur est plus grande que la température à l'extérieur gauche de la tige métallique. Dès lors, puisqu'un transfert de chaleur se produit toujours des corps plus chauds vers les corps plus froids adjacents, un contrôle $v(\cdot)$ strictement positif correspond à l'action de refroidir la tige métallique via l'extrémité gauche. Inversement, pour chauffer la tige métallique par sa gauche, il faut appliquer un contrôle $v(\cdot)$ strictement négatif. La Figure 2.3 montre cette interprétation

FIGURE 2.3 – Tige métallique de longueur L chauffée à son extrémité gauche

physique des conditions au bord (2.8) pour un contrôle $v(\cdot)$ tel que $v(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. Nous y voyons effectivement une tige métallique, représentée par le segment brun, être chauffée exclusivement à son extrémité gauche, en $z = 0$.

Afin d'intégrer le contrôle au bord dans le système discrétisé (2.3), nous commençons par réécrire le système (2.1),(2.8) contrôlé au bord, en un système équivalent. Celui-ci est donné par

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + \delta_0(z)u(t), \quad (2.9)$$

avec δ_0 , la distribution de Dirac en $z = 0$, et les conditions au bord de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

La nouvelle entrée $u(\cdot)$ du système est telle que $u(t) = -v(t)$, pour tout $t \geq 0$. Le système (2.9),(2.10) a la particularité de posséder des conditions au bord homogènes et un contrôle agissant, cette fois, dans la dynamique du système. Notons que le passage du système (2.1),(2.8) au système (2.9),(2.10) a été réalisé dans la thèse (DEHAYE, 2017). De plus, les arguments permettant de justifier l'équivalence entre les deux systèmes sont présents dans la référence (EMIRSJLOW & TOWNLEY, 2000).

Pour obtenir la discrétisation du système (2.9),(2.10), nous utilisons les résultats de la Section 2.1.2 et le fait que la distribution de Dirac δ_0 peut être approximée par la fonction

$$f_{\Delta z} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z} & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0, \end{cases}$$

puisque la suite des fonctions $f_{\Delta z}$ converge vers δ_0 lorsque $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque $\Delta z \rightarrow 0$. Nous obtenons alors le système discrétisé suivant

$$\dot{x}^{(n)}(t) = A^{(n)}x^{(n)}(t) + b^{(n)}u(t), \quad (2.11)$$

où $A^{(n)}$ et $x^{(n)}(\cdot)$ sont respectivement définis par (2.4) et (2.5),

$$b^{(n)} = (p_1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

et

$$p_1 = \frac{1}{\Delta z}.$$

Il est important de constater que le système discrétisé (2.11) est un système LTI positif. En effet, le vecteur $b^{(n)}$ est positif et $A^{(n)}$ est une matrice de Metzler, comme nous l'avons déjà mentionné dans la Section 2.1. Pour rappel, nous avons également prouvé que $A^{(n)}$ était une matrice instable. Le système (2.11) est donc instable et peut être positivement stabilisé. Pour cela, nous pouvons utiliser le Théorème 1.3.1 du Chapitre 1 puisque le vecteur $b^{(n)}$ a uniquement sa première entrée non nulle. Ceci donne lieu au Théorème 2.2.1 suivant, qui est énoncé et démontré dans la thèse (DEHAYE, 2017).

Théorème 2.2.1. *Une matrice d'asservissement $k = (k_1 \dots k_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est positivement stabilisante pour le système de diffusion pure discrétisé (2.11) si et seulement si elle est telle que*

$$k_1 = \frac{D_a v_1 - D_a v_2 - k_2 v_2 \Delta z - \dots - k_n v_n \Delta z - \Delta z^2 \omega}{v_1 \Delta z}, \quad (2.13)$$

et

$$\begin{cases} k_2 \geq \frac{-D_a}{\Delta z} \\ k_i \geq 0 \quad i = 3, \dots, n, \end{cases} \quad (2.14)$$

où ω est un paramètre libre strictement positif, et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur strictement positif qui est solution du système d'inégalités

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 - v_3 > 0 \\ \vdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n > 0 \\ -v_{n-1} + v_n > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

La Proposition 2.2.1 suivante, dont la preuve se trouve dans la thèse (DEHAYE, 2017), explicite la forme du vecteur v présent dans le Théorème 2.2.1.

Proposition 2.2.1. *Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est une solution strictement positive du système d'inégalités*

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 - v_3 > 0 \\ \vdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n > 0 \\ -v_{n-1} + v_n > 0 \end{cases}$$

si et seulement si les éléments de v peuvent s'écrire sous la forme

$$v_i = \sum_{j=1}^n \gamma_j s_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.16)$$

avec $\gamma_j > 0$, pour $j = 1, \dots, n$, et s_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Grâce au Théorème 2.2.1, il est possible d'écrire l'expression des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système de diffusion pure discrétisé (2.11). Elles sont données par

$$u(t) = kx^{(n)}(t) = k \begin{pmatrix} x(z_1, t) \\ \vdots \\ x(z_n, t) \end{pmatrix},$$

où k est la matrice d'asservissement donnée par (2.13),(2.14).

Terminons cette section en donnant un exemple de matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système de diffusion pure discrétisé (2.11). Celui-ci est tiré de la thèse (DEHAYE, 2017). La matrice d'asservissement k considérée est définie par

$$k_1 = \frac{-1}{\Delta z} \kappa, \quad (2.17)$$

et

$$k_i = 0 \quad i = 2, \dots, n, \quad (2.18)$$

avec $\kappa \in \mathbb{R}_{0,+}$. Pour montrer qu'elle est positivement stabilisante, il faut utiliser le Théorème 2.2.1 et la Proposition 2.2.1. Nous ne donnons pas plus de détails ici. Par contre, la preuve de ce résultat se trouve dans la thèse (DEHAYE, 2017). De plus, nous montrerons un résultat analogue dans la Section 2.4, dont la preuve reprend tous les arguments permettant de prouver que k est positivement stabilisante. Les Figures 2.4 et 2.5 montrent des trajectoires d'état du système (2.11) asservi avec la matrice k donnée par (2.17),(2.18), où $\kappa = 1$. Nous avons considéré les mêmes paramètres et les mêmes conditions initiales que pour les Figures 2.1 et 2.2. Puisque les trajectoires d'état convergent vers zéro tout en restant dans l'orthant non négatif, les Figures 2.4 et 2.5 illustrent le fait que k donné par (2.17),(2.18) est positivement stabilisante.

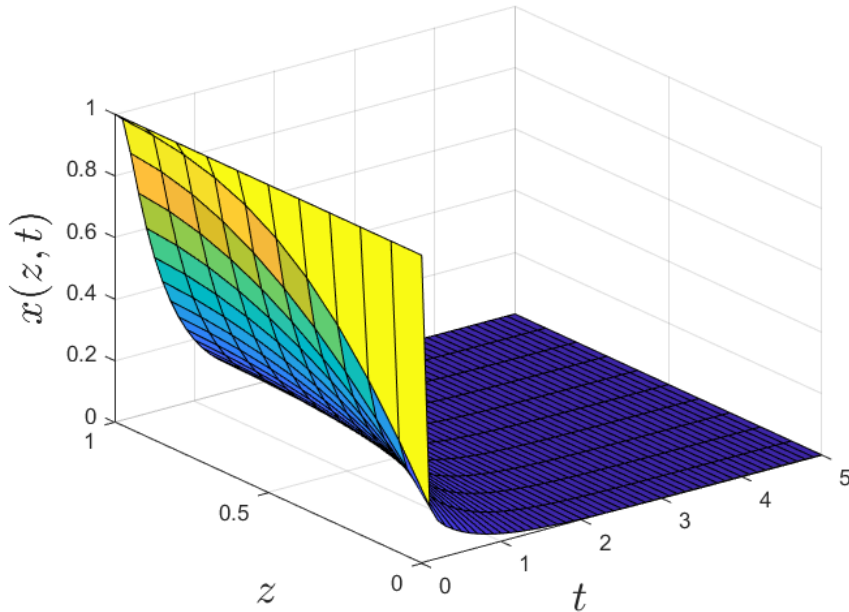


FIGURE 2.4 – Trajectoire d'état du système (2.11) asservi avec k donné par (2.17),(2.18) où $\kappa = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 1$) - Retravaillé de la thèse (DEHAYE, 2017)

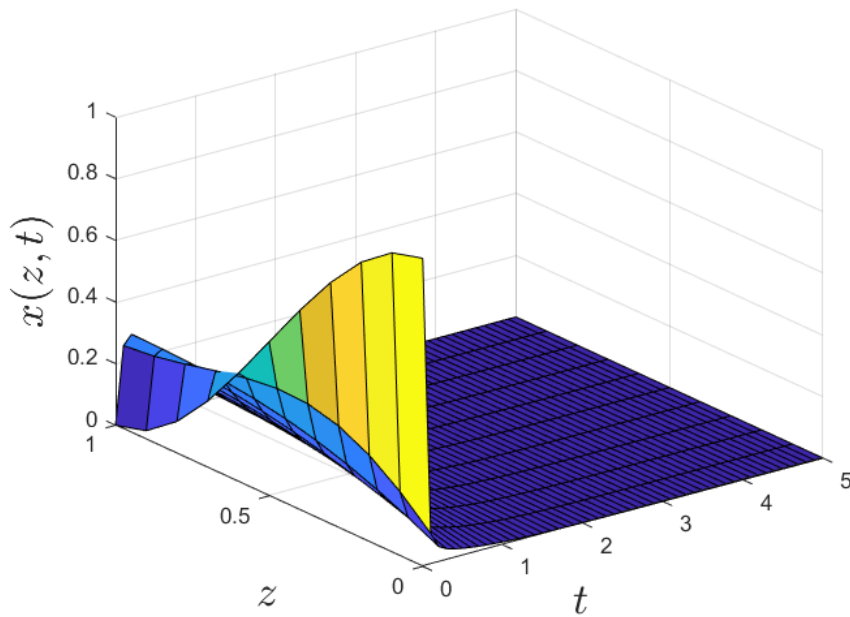


FIGURE 2.5 – Trajectoire d'état du système (2.11) asservi avec k donné par (2.17),(2.18) où $\kappa = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 2z^3 - 3z^2 + 1$) - Retravaillé de la thèse (DEHAYE, 2017)

2.3 Système contrôlé à la fin du domaine spatial

Dans cette section, nous concevons des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour une discrétisation du système de diffusion pure (2.1) avec les conditions au bord de Neumann

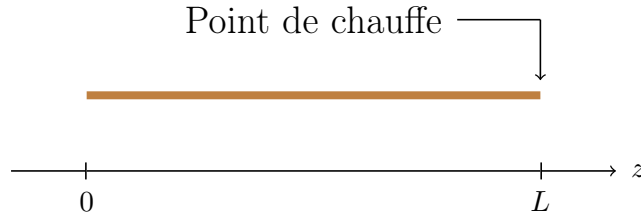
$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = v(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Par rapport à la Section 2.2, nous constatons que l'entrée $v(\cdot)$ agit dans la condition au bord associée à $z = L$ et plus dans celle associée à $z = 0$. Elle correspond donc à la variation de l'état au point $z = L$.

D'un point de vue physique, cela peut se traduire par l'action de chauffer ou refroidir la tige métallique présentée dans la Section 2.1, à son extrémité droite exclusivement. Plus précisément, appliquer un contrôle $v(\cdot)$ strictement positif signifie que la température à l'extérieur droit est plus grande que la température à l'intérieur de la tige métallique. Par conséquent, un contrôle $v(\cdot)$ strictement positif correspond à l'action de chauffer la tige métallique via l'extrémité droite. Inversement, pour refroidir la tige métallique par sa droite, il faut appliquer un contrôle $v(\cdot)$ strictement négatif. La Figure 2.6 montre la situation, où le contrôle $v(\cdot)$ est strictement positif et le point de chauffe se situe en $z = L$.

D'après l'article (EMIRSILOW & TOWNLEY, 2000), il est possible de réécrire le système (2.1),(2.19) sous la forme d'un système équivalent pour lequel l'entrée $v(\cdot)$ agit dans la dynamique et plus dans les conditions au bord. Ce système est donné par

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + \delta_L(z)v(t), \quad (2.20)$$

FIGURE 2.6 – Tige métallique de longueur L chauffée à son extrémité droite

avec δ_L , la distribution de Dirac en $z = L$, et les conditions au bord de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Discrétisons maintenant le système (2.20),(2.21) grâce à la méthode des lignes en considérant les n point de discrétisations $z_1 = 0$, $z_n = L$ et $z_{i+1} = z_i + \Delta z$, pour $i = 1, \dots, n-2$. En utilisant les résultats de la Section 2.1 et le fait que la distribution de Dirac δ_L peut être approximée par la fonction

$$f_{\Delta z} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z} & \text{si } z = L \\ 0 & \text{si } z \neq L, \end{cases}$$

nous obtenons le système LTI positif de dimension finie décrit par les équations

$$\dot{x}^{(n)}(t) = A^{(n)}x^{(n)}(t) + b^{(n)}v(t), \quad (2.22)$$

où $A^{(n)}$ et $x^{(n)}(\cdot)$ sont respectivement définis par (2.4) et (2.5), et

$$b^{(n)} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad p_1)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Par rapport à la Section 2.2, remarquons que le vecteur $b^{(n)}$ a son premier élément nul, alors que son dernier élément est non nul. Pour obtenir la paramétrisation des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour ce système discrétisé, nous utilisons une procédure différente de la Section 2.2. La première étape consiste à effectuer un changement de variable pour obtenir un système équivalent qui aura la forme du système de diffusion pure avec les condition au bord de Neumann (2.8) de la Section 2.2. Ensuite, nous utiliserons la paramétrisation obtenue à la Section 2.2 pour concevoir les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système (2.22). Commençons par effectuer le changement de variable suivant

$$\begin{cases} y = L - z \\ s = t, \end{cases}$$

et considérons l'application \tilde{x} définie par

$$\tilde{x} : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, s) \longmapsto \tilde{x}(y, s) = \tilde{x}(L - z, t) := x(z, t).$$

L'objectif est de ramener le système de diffusion pure (2.1) portant sur x à une nouvelle équation aux dérivées partielles portant sur \tilde{x} . Pour cela, exprimons les différents termes de l'équation en x dans les nouvelles variables. L'utilisation de la règle de dérivation en chaîne donne

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s) \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s)$$

pour la dérivée partielle première par rapport à t . La dérivée partielle première par rapport à z se réécrit dans les nouvelles variables comme

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z, t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s) \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s) \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s).$$

Ceci permet d'écrire la dérivée partielle seconde par rapport à z de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial z}(z, t) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s) \right) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s) \right) \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, s) \right) \frac{\partial s}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial y^2}(y, s). \end{aligned}$$

Par conséquent, dans les nouvelles variables \tilde{x}, y et s , le système de diffusion pure (2.1) avec les conditions au bord de Neumann (2.19) se transforme en un système équivalent donné par

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s) = D_a \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial y^2}(y, s), \quad (2.23)$$

avec des conditions au bord de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(L, s) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(0, s) = -v(s). \end{cases} \quad (2.24)$$

Comme cela a été annoncé, ce système de diffusion pure dans les nouvelles variables correspond exactement au système (2.1),(2.8), étudié dans la section 2. En effet, l'entrée $-v(\cdot)$ contrôle la variation de l'état au point $y = 0$, alors que la variation de l'état en $y = L$ est fixée. Nous allons donc effectuer le même raisonnement que celui réalisé dans la Section 2.2 pour obtenir la paramétrisation des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système (2.23),(2.24) discrétisé. Tout d'abord, grâce aux résultats de l'article (EMIRSILOW & TOWNLEY, 2000), nous pouvons réécrire le système (2.23),(2.24) sous la forme

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s) = D_a \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial y^2}(y, s) + \delta_0(y)w(s), \quad (2.25)$$

avec les conditions au bord de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(0, s) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(L, s) = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

et l'entrée $w(\cdot)$ est donnée par $w(s) = -(-v(s)) = v(s)$, pour tout $s \geq 0$. En considérant les n points de discrétisation $y_1 = 0$, $y_n = L$ et $y_{i+1} = y_i + \Delta z$, pour $i = 1, \dots, n-2$, ce système peut alors être discrétisé de la façon suivante

$$\dot{\tilde{x}}^{(n)}(t) = A^{(n)}\tilde{x}^{(n)}(t) + \tilde{b}^{(n)}w(t), \quad (2.27)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(n)}(\cdot) &= (\tilde{x}(y_1, \cdot) \ \cdots \ \tilde{x}(y_n, \cdot))^\top \in \mathbb{R}^n, \\ \tilde{b}^{(n)} &= (p_1 \ 0 \ \cdots \ 0)^\top \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

et $A^{(n)}$ est définie par (2.4).

Enfin, le Théorème 2.2.1 de la Section 2.2, donne l'expression des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système de diffusion pure dans les nouvelles variables et discrétisé (2.27). Celles-ci sont données par

$$w(s) = \tilde{k}\tilde{x}^{(n)}(s) = \tilde{k} \begin{pmatrix} \tilde{x}(y_1, s) \\ \vdots \\ \tilde{x}(y_n, s) \end{pmatrix},$$

où $\tilde{k} = (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ est défini par (2.13),(2.14). Nous pouvons maintenant exprimer les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système de diffusion pure dans les anciennes variables et discrétisé (2.22). Elles sont données par

$$\begin{aligned}v(t) &= v(s) \\ &= w(s) \\ &= \tilde{k} \begin{pmatrix} \tilde{x}(y_1, s) \\ \vdots \\ \tilde{x}(y_n, s) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{k}_1 \ \cdots \ \tilde{k}_n) \begin{pmatrix} x(L - y_1, t) \\ \vdots \\ x(L - y_n, t) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{k}_n \ \cdots \ \tilde{k}_1) \begin{pmatrix} x(L - y_n, t) \\ \vdots \\ x(L - y_1, t) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{k}_n \ \cdots \ \tilde{k}_1) \begin{pmatrix} x(z_1, t) \\ \vdots \\ x(z_n, t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

puisque $z_i = L - y_{n-i+1}$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Les matrices d'asservissement $k = (k_1 \cdots k_n)$ positivement stabilisantes pour le système de diffusion pure discrétisé (2.22) sont donc données par

$$k_i = \tilde{k}_{n-i+1} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dans la section précédente, nous avons utilisé la référence (DEHAYE, 2017) pour affirmer que la matrice \tilde{k} , donnée par (2.17),(2.18), est un exemple de matrice positivement stabilisante pour le système discrétisé (2.27). Ceci implique que la matrice d'asservissement k définie par

$$k_i = 0 \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{2.28}$$

et

$$k_n = \frac{-1}{\Delta z} \kappa, \tag{2.29}$$

est un exemple de matrice positivement stabilisante pour le système discrétisé (2.22). Les Figures 2.7 et 2.8, représentant des trajectoires d'état du système (2.22) asservi avec la matrice

k donnée par (2.28),(2.29) où $\kappa = 1$, illustrent ce résultat. À nouveau, nous avons considéré les paramètres $L = 1$, $D_a = 1$, $n = 11$, et les conditions initiales issues de (2.6) et (2.7).

Pour terminer cette section, remarquons qu'il est possible de retrouver le système de diffu-

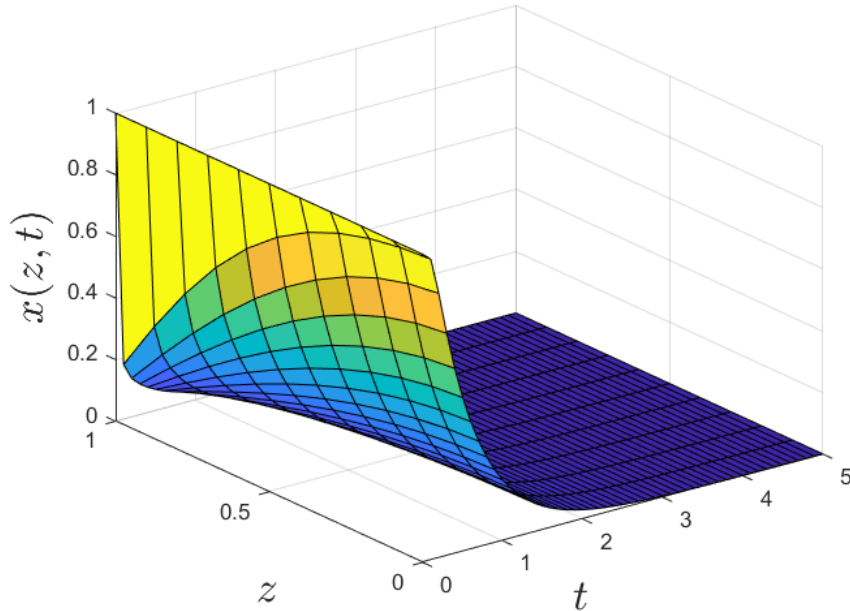


FIGURE 2.7 – Trajectoire d'état du système (2.22) asservi avec k donné par (2.28),(2.29) où $\kappa = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 1$)

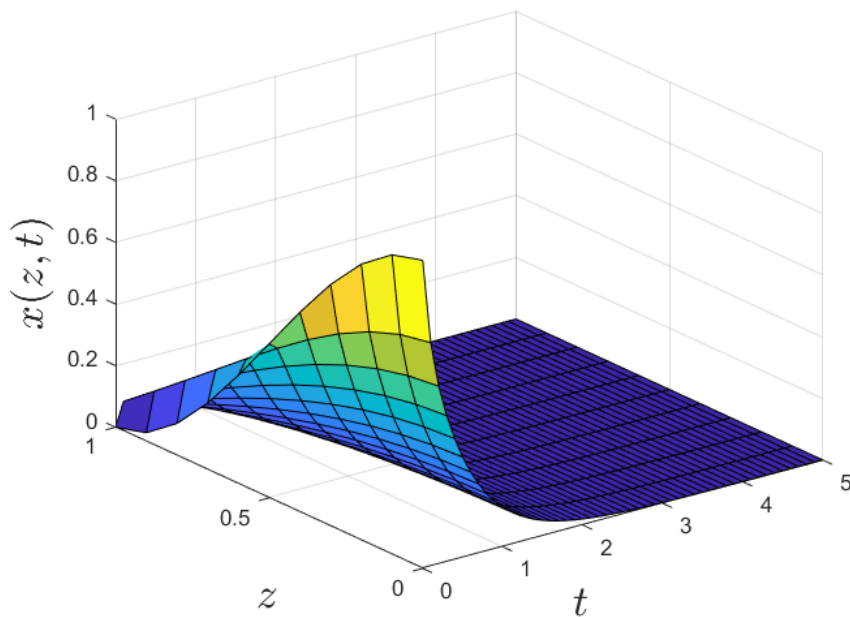


FIGURE 2.8 – Trajectoire d'état du système (2.22) asservi avec k donné par (2.28),(2.29) où $\kappa = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 2z^3 - 3z^2 + 1$)

sion pure (2.20) exprimé dans les anciennes variables avec les conditions au bord de Neumann homogènes (2.21), à partir de celui exprimé dans les nouvelles variables (2.25),(2.26). En effet, par définition de la distribution de Dirac en L ,

$$\delta_0(y) = \delta_0(L - z) = \delta_L(z).$$

Rappelons également que

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(y, s),$$

et

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) = \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial y^2}(y, s).$$

Les systèmes (2.25),(2.26) et (2.20),(2.21) sont donc équivalents. Puisque le système dans les nouvelles variables (2.25) et avec les conditions au bord homogènes (2.26) est équivalent au système dans les anciennes variables (2.1) et avec une entrée en $z = L$ dans les conditions au bord (2.19), les systèmes avec et sans conditions au bord homogènes dans les anciennes variables, c'est-à-dire les systèmes (2.20),(2.21) et (2.1),(2.19) sont équivalents. Ceci confirme le résultat proposé dans l'article (EMIRSILOW & TOWNLEY, 2000).

2.4 Système contrôlé au début et à la fin du domaine spatial

Dans les deux sections précédentes, nous nous sommes intéressés au système de diffusion pure avec une seule entrée dans les conditions au bord. À présent, nous allons considérer le cas où deux entrées interviennent dans les conditions au bord du système de diffusion pure. Plus précisément, le système étudié dans cette section est donné par l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t),$$

et les conditions au bord de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = v_1(t) \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = v_2(t), \end{cases} \quad (2.30)$$

où $v_1(\cdot)$ et $v_2(\cdot)$ sont deux entrées différentes. L'une agit dans la condition au bord associée à $z = 0$ et l'autre agit dans celle associée à $z = L$. Le but de cette section est de combiner les deux contrôles présentés dans les Sections 2.2 et 2.3. Comme nous l'avons fait précédemment, une interprétation physique de ces conditions au bord peut être apportée. Celle-ci est représentée sur la Figure 2.9. Dans cette situation, la tige métallique est chauffée aux deux extrémités.

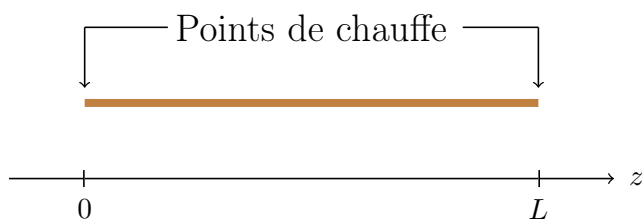


FIGURE 2.9 – Tige métallique de longueur L chauffée à ses deux extrémités

Intégrons maintenant les deux entrées dans la dynamique du système. Quand nous avons une entrée en $z = 0$, nous obtenons un système de diffusion pure avec des conditions au bord de Neumann homogènes, une entrée opposée à $v(\cdot)$ et le terme supplémentaire $\delta_0(z)$. Une entrée en $z = L$ donnait une équation avec le terme $\delta_L(z)$ en plus et des conditions au bord de Neumann homogènes. Lorsque les deux entrées sont combinées, le système équivalent au système (2.1),(2.30) et contenant des conditions au bord de Neumann homogènes est donné par

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + \delta_0(z)u_1(t) + \delta_L(z)v_2(t), \quad (2.31)$$

avec les conditions au bord de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

et l'entrée $u_1(\cdot)$ est définie par $u_1(t) = -v_1(t)$, pour tout $t \geq 0$. Ce système équivalent correspond bien à celui présenté dans l'article (EMIRSJLOW & TOWNLEY, 2000).

Nous pouvons maintenant discrétiser le système (2.31),(2.32). Pour cela, considérons à nouveau les n points de discrétisation $z_1 = 0$, $z_n = L$ et $z_{i+1} = z_i + \Delta z$, pour $i = 1, \dots, n-2$. Les résultats qui ont permis d'obtenir les systèmes discrétisés des sections précédentes, mènent au système LTI positif de dimension finie

$$\dot{x}^{(n)}(t) = A^{(n)}x^{(n)}(t) + B^{(n)}u(t), \quad (2.33)$$

où la matrice $A^{(n)}$ est toujours donnée par

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} -p_2 & p_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_2 & -2p_2 & p_2 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & p_2 & -2p_2 & p_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_2 & -2p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

et la trajectoire d'état par

$$x^{(n)}(\cdot) = (x(z_1, \cdot) \ \cdots \ x(z_n, \cdot))^\top \in \mathbb{R}^n.$$

La matrice $B^{(n)}$ contient cette fois deux colonnes et $u(\cdot)$ est un vecteur de composantes $u_1(\cdot)$ et $v_2(\cdot)$ correspondant aux deux entrées du systèmes non discrétisé (2.31),(2.32). Ils sont définis par

$$B^{(n)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2},$$

et

$$u(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1(\cdot) \\ v_2(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Pour rappel, les constantes p_1 et p_2 sont

$$p_1 = \frac{1}{\Delta z} \quad p_2 = \frac{D_a}{\Delta z^2}.$$

Observons que le système LTI fini-dimensionnel (2.33) est positif puisque $A^{(n)}$ est une matrice de Metzler et $B^{(n)}$ est strictement positif. Rappelons que la matrice $A^{(n)}$ est également instable. Ceci signifie que le système est instable. Par ailleurs, les éléments $(1, 1)$ et $(n, 2)$ de la matrice $B^{(n)}$ sont les seuls éléments à être non nuls. Nous pouvons donc utiliser le Théorème 1.3.2 pour fournir une paramétrisation des matrices d'asservissement positivement stabilisantes pour le système (2.33). Ceci fait l'objet du Théorème 2.4.1 suivant.

Théorème 2.4.1. *Une matrice d'asservissement*

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \cdots & k_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n}$$

est positivement stabilisante pour le système de diffusion pure discrétisé (2.33) si et seulement si elle est telle que

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{D_a v_1 - D_a v_2 - k_{12} v_2 \Delta z - \cdots - k_{1n} v_n \Delta z - \Delta z^2 \omega_1}{v_1 \Delta z} \\ k_{2n} = \frac{-k_{21} v_1 \Delta z - \cdots - k_{2,n-1} v_{n-1} \Delta z - D_a v_{n-1} + D_a v_n - \Delta z^2 \omega_2}{v_n \Delta z}, \end{cases} \quad (2.34)$$

et

$$\begin{cases} k_{12} \geq \frac{-D_a}{\Delta z} \\ k_{1i} \geq 0 \quad i = 3, \dots, n \\ k_{2,n-1} \geq \frac{-D_a}{\Delta z} \\ k_{2i} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (2.35)$$

où ω_1, ω_2 sont des paramètres libres strictement positifs, et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur strictement positif qui est solution du système d'inégalités

$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 - v_3 > 0 \\ \vdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.3.2 au système LTI positif (2.33) en réécrivant les conditions (1.11)-(1.13). \square

Comme nous l'avons fait dans les deux sections précédentes, nous terminons celle-ci en donnant un exemple de matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système de diffusion pure discrétisé (2.33). Considérons la matrice d'asservissement $K \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ donnée par

$$K = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\Delta z} \kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\Delta z} \tilde{\kappa} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

avec κ et $\tilde{\kappa}$, des réels strictement positifs. Pour montrer que K est positivement stabilisante, utilisons le Théorème 2.4.1. Tout d'abord, K vérifie la condition (2.35) puisque D_a et Δz sont strictement positifs. Ensuite, $k_{1i} = 0$, pour $i = 2, \dots, n$ et $k_{2i} = 0$, pour $i = 1, \dots, n-1$. Ceci

implique que la condition (2.34) est vérifiée s'il existe deux réels strictement positifs ω_1 et ω_2 et un vecteur v également strictement positif et solution du système (2.36) tels que

$$\begin{cases} \frac{D_a v_1 - D_a v_2 - \Delta z^2 \omega_1}{v_1 \Delta z} = \frac{-1}{\Delta z} \kappa \\ \frac{-D_a v_{n-1} + D_a v_n - \Delta z^2 \omega_2}{v_n \Delta z} = \frac{-1}{\Delta z} \tilde{\kappa}, \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{(\kappa + D_a)v_1 - D_a v_2}{\Delta z^2} \\ \omega_2 = \frac{(\tilde{\kappa} + D_a)v_n - D_a v_{n-1}}{\Delta z^2}. \end{cases}$$

Remarquons que ω_1 et ω_2 sont strictement positifs si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{v_2}{v_1} < 1 + \frac{\kappa}{D_a} \\ \frac{v_{n-1}}{v_n} < 1 + \frac{\tilde{\kappa}}{D_a}. \end{cases}$$

Ces conditions sont satisfaites pour n suffisamment grand, en prenant un vecteur v donné par (2.16) avec $\gamma_j = (\Delta z)^{j-1}$, pour $j = 1, \dots, n$. En effet,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n}{\gamma_1} = 1 + \sum_{j=2}^n (\Delta z)^{j-1} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta z)^j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{v_{n-1}}{v_n} &= \frac{\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)\gamma_j + (n-2)\gamma_n}{\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)\gamma_j + (n-1)\gamma_n} \\ &= \frac{\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)\gamma_j + (n-2)\gamma_n}{\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (j-1)\gamma_j + (n-2)\gamma_n + \gamma_n} \\ &< 1, \end{aligned}$$

puisque $\gamma_j > 0$, pour $j = 1, \dots, n$. De plus, $\frac{\kappa}{D_a}$ et $\frac{\tilde{\kappa}}{D_a}$ sont des constantes strictement positives. Pour finir, le vecteur v choisi est strictement positif et, par la Proposition 2.2.1, il vérifie le système (2.15) et donc le système (2.36). La matrice $K \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ donnée par (2.37) est donc bien une matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système de diffusion pure discrétisé (2.33).

Nous terminons le Chapitre 2 avec les Figures 2.10 et 2.11, qui représentent deux trajectoires d'état du système (2.33) asservi avec la matrice K donnée par (2.37), où $\kappa = \tilde{\kappa} = 1$. Les paramètres utilisés sont une nouvelle fois donnés par $L = 1$, $D_a = 1$, $n = 11$, et les états initiaux viennent respectivement de (2.6) et (2.7). Observons que les trajectoires d'état des Figures 2.10 et 2.11 convergent bien vers zéro tout en maintenant la propriété de non négativité des conditions initiales.

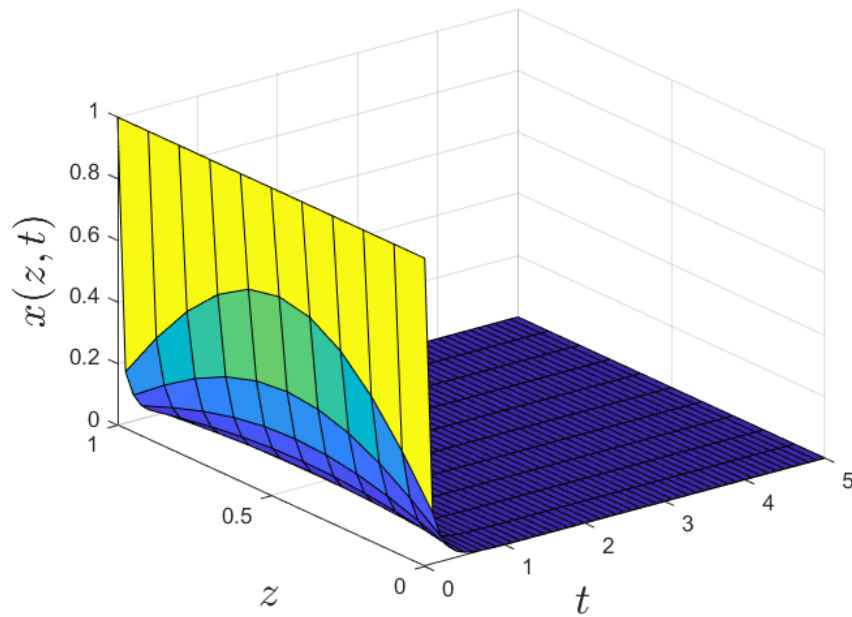


FIGURE 2.10 – Trajectoire d'état du système (2.33) asservi avec K donné par (2.37) où $\kappa = \tilde{\kappa} = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 1$)

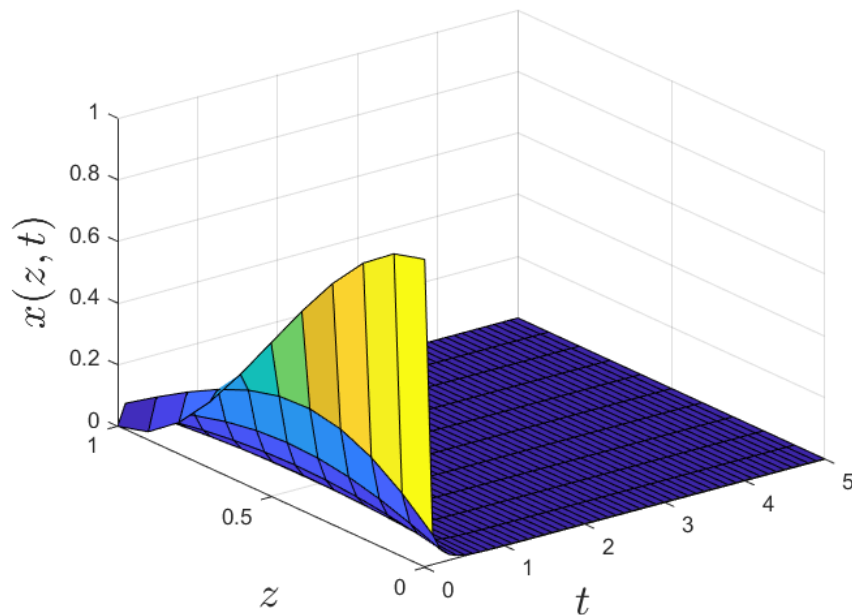


FIGURE 2.11 – Trajectoire d'état du système (2.33) asservi avec K donné par (2.37) où $\kappa = \tilde{\kappa} = 1$ ($n = 11$, $x_0 = 2z^3 - 3z^2 + 1$)

Chapitre 3

Stabilisation positive optimale

Dans le Chapitre 1, nous nous sommes intéressés au problème de stabilisation positive pour les systèmes LTI positifs (1.1). Pour rappel, celui-ci consiste à trouver une matrice d'asservissement K telle que le système asservi (1.6) est stable et positif. Lorsqu'un système LTI (1.1) n'est pas stable, concevoir une loi d'asservissement d'état avec une telle matrice K est intéressant puisque l'application de cette loi dans le système garantit d'obtenir des trajectoires convergentes, et ce, pour n'importe quel état initial. Néanmoins, pour certains systèmes tels que ceux étudiés dans le Chapitre 2, par exemple, il existe une infinité de matrices d'asservissement positivement stabilisantes. C'est pourquoi, il peut être intéressant de connaître l'expression de la meilleure matrice d'asservissement positivement stabilisante selon un critère d'optimalité choisi. Dans ce Chapitre 3, nous nous intéressons à ce problème d'optimisation, que nous appellerons problème de stabilisation positive optimale. Dans un premier temps, il sera envisagé pour un système LTI (1.1) à une entrée quelconque. Ensuite, nous particulieriserons les résultats au cas de l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2).

La Section 3.1 a pour objectif de poser formellement le problème de stabilisation positive optimale. Ensuite, dans la Section 3.2, nous expliquons le critère d'optimalité choisi et nous commentons l'intérêt de ce problème. Enfin, nous présentons, dans la Section 3.3, différentes façons équivalentes d'exprimer les contraintes de stabilisation positive. Ces reformulations sont motivées par la recherche d'une expression des contraintes du problème de stabilisation positive optimale qui permet l'élaboration d'un algorithme numériquement applicable. Cet algorithme fait l'objet du Chapitre 4.

3.1 Présentation du problème

Comme annoncé dans le début de ce Chapitre 3, l'objectif est de trouver une matrice d'asservissement qui stabilise positivement un système donné et qui satisfait également un critère d'optimalité choisi. Plus particulièrement, étudions ce problème de stabilisation positive pour les systèmes LTI (1.1) à une seule entrée dont les équations sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons également que A est une matrice de Metzler et que le vecteur b et les matrices C et D sont non négatives. Ainsi, par le Théorème 1.1.1, le système LTI (3.1) considéré est positif.

Puisque le problème de stabilisation positive optimale consiste à trouver une matrice d'asservissement positivement stabilisante optimale pour le système à une entrée (3.1), les variables du problème d'optimisation se trouvent dans l'espace $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Concernant le critère d'optimalité, supposons que l'objectif est de minimiser une fonction qui dépend des vecteurs lignes de l'espace de recherche $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Cette fonction est appelée fonction de coût ou plus simplement coût. Afin de la définir précisément, la Notation 3.1.1 pour les matrices diagonales est utile.

Notation 3.1.1. *Considérons un vecteur $(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Alors, la matrice diagonale dont les entrées sont les éléments d_1, d_2, \dots, d_n est notée*

$$\text{diag}(d_i)_{i=1}^n := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Grâce à la Notation 3.1.1, nous sommes maintenant en mesure de définir la fonction de coût choisie pour le problème de stabilisation positive optimale. Il s'agit de la fonction $J_W : \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$J_W(k) := kWk^\top = \sum_{i=1}^n w_i k_i^2, \quad (3.2)$$

où $k := (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$ et $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Cette dernière est une matrice de poids. Elle permet d'influencer l'importance des différentes composantes de la matrice d'asservissement k dans la recherche de la meilleure matrice d'asservissement positivement stabilisante selon le coût J_W pour le système à une seule entrée (3.1). Notons que le choix de la fonction J_W comme fonction de coût est commenté dans la Section 3.2.

La dernière étape nécessaire afin de poser le problème de stabilisation positive optimale consiste à formuler les contraintes que doivent vérifier les variables de l'espace de recherche. Dans ce but, rappelons qu'une matrice d'asservissement k est positivement stabilisante si et seulement si $A + bk$ est une matrice de Metzler stable (cf. Théorème 1.2.4). C'est pourquoi, formellement, nous appelons problème de stabilisation positive optimale pour le système à une entrée (3.1), le problème

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}} \quad J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.3a)$$

$$\text{s.c.} \quad A + bk \text{ est Metzler}, \quad (3.3b)$$

$$A + bk \text{ est stable}, \quad (3.3c)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dans la Sous-section 3.2, nous commentons l'importance de ce type de problèmes dans la théorie des systèmes et du contrôle.

Le problème de stabilisation positive optimale étant posé, effectuons quelques observations le concernant. Pour cela, les concepts d'ensemble admissible, de solution optimale et de problème réalisable sont respectivement rappelés dans les Définitions 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3. Ces différentes notions sont centrales en optimisation et peuvent être retrouvées dans plusieurs ouvrages de référence comme (NOCEDAL & WRIGHT, 2006), par exemple. Notons que, dans les Définitions 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3, ces trois concepts ont été adaptés au problème de stabilisation positive optimale (3.3).

Définition 3.1.1. Une matrice $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est dite admissible pour le problème de stabilisation positive optimale (3.3) si $A + bk$ est une matrice de Metzler stable, c'est-à-dire si k est positivement stabilisante. De plus, l'ensemble \mathcal{A} des matrices admissibles pour le problème de stabilisation positive optimale (3.3) est appelé ensemble admissible du problème (3.3). Cet ensemble \mathcal{A} est donné par

$$\mathcal{A} := \{k \in \mathbb{R}^{1 \times n} : A + bk \text{ est une matrice de Metzler stable}\}.$$

Définition 3.1.2. Le problème de stabilisation positive optimale (3.3) est dit réalisable si l'ensemble admissible \mathcal{A} du problème (3.3) est non vide.

Définition 3.1.3. Une matrice $k^* \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est dite optimale pour le problème de stabilisation positive optimale (3.3), si k^* minimise le coût J_W parmi toutes les matrices admissibles du problème (3.3), c'est-à-dire si $k^* \in \mathcal{A}$ et

$$J_W(k^*) \leq J_W(k) \quad \forall k \in \mathcal{A}.$$

Le coût $J_W(k^*)$, noté J^* , est le coût optimal du problème (3.3).

Dans la Remarque 3.1.1, nous utilisons les concepts des Définitions 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 pour commenter le problème de stabilisation optimale (3.3).

Remarque 3.1.1. 1. Le problème de stabilisation positive optimale pour l'approximation (2.11), (2.12) du système de diffusion pure avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann est réalisable. En effet, pour rappel, la matrice k donnée par les équations (2.17) et (2.18) est une matrice d'asservissement positivement stabilisante. C'est pourquoi, l'ensemble admissible du problème (3.3) pour ce système est non vide.

2. En l'absence des contraintes (3.19b) et (3.19c) liée à la stabilisation positive, le critère d'optimalité (3.3a) est vérifié pour la matrice nulle de $\mathbb{R}^{1 \times n}$ puisque cette matrice est l'unique minimum global de J_W .

3. La matrice nulle de $\mathbb{R}^{1 \times n}$ est optimale pour le problème (3.3) lié à un système LTI à une entrée (3.1) positif et stable. Dans ce cas, le coût est également nul. Cette observation découle du fait que la matrice nulle est une matrice d'asservissement positivement stabilisante pour un système LTI à une entrée (3.1) positif et stable.

4. Par contre, lorsque le système (3.1) n'est pas stable, c'est-à-dire lorsque A n'est pas stable, la matrice nulle de $\mathbb{R}^{1 \times n}$ n'est pas une solution optimale car elle n'est pas admissible.

5. De la même façon, la matrice nulle de $\mathbb{R}^{1 \times n}$ n'est pas optimale si le système (3.1) n'est pas positif, c'est-à-dire si la matrice A n'est pas de Metzler.

Avant d'aborder la Sous-section 3.2, nous effectuons une dernière observation. Le problème de stabilisation positive optimale (3.3) pour le système à une entrée (3.1) consiste à trouver une matrice d'asservissement positivement stabilisante $k^* \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ qui minimise le coût J_W . Lorsque celle-ci existe, les trajectoires $x(\cdot)$ du système asservi avec k^* convergent exponentiellement vite vers 0. Cependant, cette méthode ne garantit pas d'obtenir une matrice k^* dont les trajectoires associées $x(\cdot)$ convergent aussi vite que souhaité vers 0. Pour améliorer la vitesse de convergence, nous allons donc modifier le problème de stabilisation positive optimale (3.3) en retirant de l'ensemble admissible, les matrices d'asservissement positivement stabilisantes qui ne permettent pas d'avoir une convergence suffisamment rapide selon les objectifs souhaités. La méthode utilisée pour retirer efficacement ces matrices, se base sur le Théorème 3.1.1. Celui-ci découle du Lemme 3.1.1 suivant et du Lemme 3.1.2.

Le Lemme 3.1.1 précise la dépendance des trajectoires d'état libres d'un système LTI (1.1) par rapport aux valeurs propres de la matrice A . L'énoncé et la preuve de ce résultat peuvent être trouvés dans la référence (ANTSACLIS & MICHEL, 2006).

Lemme 3.1.1. *Considérons un système LTI de la forme (1.1), où $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ sont les μ valeurs propres distinctes de A et λ_i , avec $i = 1, \dots, \mu$, est répétée n_i fois avec $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$. L'unique trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixée est donnée, pour tout $t \geq 0$, par*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\lambda_i t} A_{il} x_0, \quad (3.4)$$

où

$$A_{il} = \frac{1}{l!} \frac{1}{(n_i - 1 - l)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left\{ [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1}]^{(n_i-1-l)} \right\},$$

et $[\cdot]^{(n_i-1-l)}$ correspond à la $(n_i - 1 - l)$ ème dérivée par rapport à s .

L'équation (3.4) montre que la trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ d'un système LTI (1.1) associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ peut être exprimée comme une somme de n termes de la forme $t^l e^{\lambda_i t} A_{il} x_0$, où $A_{il} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Les éléments $t^l e^{\lambda_i t} A_{il}$ sont appelés les modes du système LTI (1.1) non contrôlé (c'est-à-dire avec $B = 0$). C'est pourquoi, la trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ de (1.1) associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est déterminée par les n modes du système LTI (1.1) non contrôlé et par la condition initiale x_0 .

Insistons sur le fait que les matrices A_{il} , présentes dans l'expression (3.4), appartiennent à l'espace $\mathbb{C}^{n \times n}$. Cependant, la trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n puisque $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Le Lemme 3.1.2 informe que la trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ d'un système LTI (1.1) associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ peut être exprimée comme une somme de termes dépendant à nouveau des valeurs propres de A et, cette fois-ci, appartenant tous à \mathbb{R}^n .

Lemme 3.1.2. *Considérons un système LTI de la forme (1.1), où $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ sont les μ valeurs propres distinctes de A et λ_i , avec $i = 1, \dots, \mu$, est répétée n_i fois avec $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$. Supposons également que ces valeurs propres sont classées de la manière suivante*

$$\begin{cases} \lambda_i = \overline{\lambda_{i+\mu_1}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & \text{si } i = 1, \dots, \mu_1 \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, & \text{si } i = 2\mu_1 + 1, \dots, \mu, \end{cases} \quad (3.5)$$

où \bar{z} correspond au complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$. L'unique trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixée est donnée, pour tout $t \geq 0$, par

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} [\cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)t) \operatorname{Re}(A_{il}) - \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)t) \operatorname{Im}(A_{il})] x_0 \\ &\quad + \sum_{i=2\mu_1+1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\lambda_i t} A_{il} x_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où, pour tout $i = 1, \dots, \mu$ et tout $l = 1, \dots, n_i$,

$$A_{il} = \frac{1}{l!} \frac{1}{(n_i - 1 - l)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left\{ [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1}]^{(n_i-1-l)} \right\}, \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{cases} A_{il} = \overline{A_{il}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & \text{si } i = 1, \dots, \mu_1 \\ A_{il} \in \mathbb{R}, & \text{si } i = 2\mu_1 + 1, \dots, \mu, \end{cases} \quad (3.8)$$

et $[\cdot]^{(n_i-1-l)}$ correspond à la $(n_i - 1 - l)$ ème dérivée par rapport à s .

Démonstration. Observons que les matrices A_{il} définies par (3.7) vérifient la propriété (3.8). C'est pourquoi, par le Lemme 3.1.1, l'unique trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixée est donnée, pour tout $t \geq 0$, par

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l (e^{\lambda_i t} A_{il} + e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{A_{il}}) x_0 + \sum_{i=2\mu_1+1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\lambda_i t} A_{il} x_0, \quad (3.9)$$

où A_{il} est donné par (3.7). Calculons également que, pour tout $i = 1, \dots, \mu_1$ et tout $l = 1, \dots, n_i$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} A_{il} + e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{A_{il}} &= 2\operatorname{Re}(e^{\lambda_i t} A_{il}) \\ &= 2 [\operatorname{Re}(e^{\lambda_i t}) \operatorname{Re}(A_{il}) - \operatorname{Im}(e^{\lambda_i t}) \operatorname{Im}(A_{il})], \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$e^{\lambda_i t} = e^{\operatorname{Re}(\lambda_i) t} [\cos(\operatorname{Im}(\lambda_i) t) + j \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i) t)], \quad (3.11)$$

où j est le nombre imaginaire. Finalement, en combinant (3.9), (3.10) et (3.11), nous retrouvons l'expression (3.6). \square

L'équation (3.4) montre que la trajectoire d'état libre $x(\cdot)$ d'un système LTI (1.1) associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ peut être exprimée comme une somme de n termes de la forme

$$t^l e^{\operatorname{Re}(\lambda_i) t} [\cos(\operatorname{Im}(\lambda_i) t) \operatorname{Re}(A_{il}) - \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i) t) \operatorname{Im}(A_{il})] x_0,$$

où $t^l e^{\lambda_i t} A_{il} x_0$. Notons que les coefficients matriciels de x_0 dans ces deux expressions appartiennent à $\mathbb{R}^{n \times n}$ et sont appelés modes réels du système LTI (1.1) non contrôlés.

Le Théorème 3.1.1 est une conséquence du Lemme 3.1.2 et du Théorème 1.2.1. Pour rappel, ce dernier donne une caractérisation de la stabilité des systèmes LTI (1.1) en fonction de la partie réelle des valeurs propres de la matrice A . Le résultat suivant permet d'affirmer que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice d'asservissement stabilisante pour le système LTI (1.1) si $A + \alpha I + BK$ est stable. De plus, l'état $x(t)$ peut être borné, en tout temps t , par une expression dont la convergence dépend notamment d'un paramètre α strictement positif.

Théorème 3.1.1. *Soit un paramètre réel strictement positif α . Considérons également les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ sont les μ valeurs propres distinctes de $A + BK$ et λ_i , avec $i = 1, \dots, \mu$, est répétée n_i fois avec $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$. Supposons que ces valeurs propres sont classées de la manière suivante*

$$\begin{cases} \lambda_i = \overline{\lambda_{i+\mu_1}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & \text{si } i = 1, \dots, \mu_1 \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, & \text{si } i = 2\mu_1 + 1, \dots, \mu. \end{cases}$$

Si $A + \alpha I + BK$ est stable, alors le système

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.12)$$

est stable. De plus, l'unique trajectoire d'état $x(\cdot)$ associée à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixée est bornée, pour tout $t \geq 0$, par

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha t} \left(2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l (\|\operatorname{Re}(A_{il})x_0\| + \|\operatorname{Im}(A_{il})x_0\|) + \sum_{i=2\mu_1+1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l \|A_{il}x_0\| \right), \quad (3.13)$$

où, pour tout $i = 1, \dots, \mu$ et tout $l = 1, \dots, n_i$,

$$A_{il} = \frac{1}{l! (n_i - 1 - l)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \left\{ [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A - BK)^{-1}]^{(n_i - 1 - l)} \right\}, \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{cases} A_{il} = \overline{A_{il}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & \text{si } i = 1, \dots, \mu_1 \\ A_{il} \in \mathbb{R}, & \text{si } i = 2\mu_1 + 1, \dots, \mu, \end{cases}$$

et $[\cdot]^{(n_i - 1 - l)}$ correspond à la $(n_i - 1 - l)$ ème dérivée par rapport à s , alors que $\|\cdot\|$ correspond à n'importe quelle norme vectorielle.

Démonstration. Supposons que $A + \alpha I + BK$ soit stable. Alors, par le Théorème 1.2.1,

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \quad (3.15)$$

pour tout $\lambda \in \sigma(A + \alpha I + BK)$. Observons également que pour toutes valeurs propres λ_i de $A + BK$, il existe $\lambda \in \sigma(A + \alpha I + BK)$ tel que

$$\lambda = \lambda_i + \alpha. \quad (3.16)$$

En combinant (3.15) et (3.16), nous avons que pour toutes valeurs propres λ_i de $A + BK$, il existe $\lambda \in \sigma(A + \alpha I + BK)$ tel que

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) = \operatorname{Re}(\lambda - \alpha) = \operatorname{Re}(\lambda) - \alpha < -\alpha, \quad (3.17)$$

et donc, par le Théorème 1.2.1, $A + BK$ est stable puisque α est un réel strictement positif. De plus, en utilisant le Lemme 3.1.2 pour le système asservi (3.12) et le fait que $\|\cdot\|$ est une norme, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq 2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} [\|\cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)t)\| \|\operatorname{Re}(A_{il})x_0\| + \|\sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)t)\| \|\operatorname{Im}(A_{il})x_0\|] \\ &\quad + \sum_{i=2\mu_1+1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\lambda_i t} \|A_{il}x_0\| \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} (\|\operatorname{Re}(A_{il})x_0\| + \|\operatorname{Im}(A_{il})x_0\|) + \sum_{i=2\mu_1+1}^{\mu} \sum_{l=0}^{n_i-1} t^l e^{\lambda_i t} \|A_{il}x_0\|, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où A_{il} est donné par (3.14). Finalement, combiner (3.17) et (3.18) permet de retrouver l'inégalité (3.13). \square

Par le Théorème 3.1.1, si $A + \alpha I + BK$ est stable, alors le système LTI (1.1) asservi avec K est stable et même suffisamment stable, dans le sens où les trajectoires sont bornées par une expression dont la convergence est dominée par le terme $e^{-\alpha t}$. Une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $A + \alpha I + BK$ est stable, est dite α -stabilisante pour le système LTI (3.1). Intéressons nous maintenant au cas particulier où la matrice $A + BK$ est diagonalisable. Dans ce cas, les n valeurs propres λ_i de A sont toutes distinctes et réelles, et donc $\sigma = n$ et $n_i = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Les expressions (3.4) et (3.6) pour le système asservi (3.12) se réduisent alors toutes deux à

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} A_i x_0,$$

où

$$A_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i)(sI - A - BK)^{-1}] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

De plus, la convergence de $x(t)$ vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ est au moins aussi rapide que celle de $e^{-\alpha t}$ vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, puisque

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \|A_i x_0\|.$$

Réécrivons maintenant le problème de stabilisation positive optimale (3.3) pour le système LTI à une entrée (3.1), en ajoutant la contrainte liée à la vitesse de convergence des trajectoires. Pour cela, nous utilisons le Théorème 3.1.1, comme annoncé. Observons également que $A + BK$ est une matrice de Metzler si et seulement si $A + \alpha I + BK$ en est une. Dans la suite, nous nous intéressons donc au problème (3.19) suivant, que nous appellerons problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Il est donné par

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}} J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.19a)$$

$$\text{s.c.} \quad A_\alpha + bk \text{ est Metzler}, \quad (3.19b)$$

$$A_\alpha + bk \text{ est stable}, \quad (3.19c)$$

où

$$A_\alpha := A + \alpha I,$$

$\alpha \geq 0$ et $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Une matrice $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ vérifiant les contraintes (3.19b) et (3.19c) est dite positivement α -stabilisante pour le système LTI à une entrée (3.1). L'objectif est donc de trouver la matrice $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ qui minimise la fonction J_W parmi toutes les matrices d'asservissement positivement α -stabilisante pour le système LTI à une entrée (3.1).

La Remarque 3.1.2 contient quelques observations concernant le problème (3.19). Dans celle-ci, l'ensemble \mathcal{A}_α , donné par

$$\mathcal{A}_\alpha := \{k \in \mathbb{R}^{1 \times n} : A_\alpha + bk \text{ est une matrice de Metzler stable}\},$$

correspond à l'ensemble admissible du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Ce problème est dit réalisable si l'ensemble admissible \mathcal{A}_α est non vide. Par ailleurs, une matrice $k^* \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est dite optimale pour le problème de stabilisation positive optimale de paramètre α , si k^* minimise le coût J_W parmi toutes les matrices admissibles du problème (3.19), c'est-à-dire si $k^* \in \mathcal{A}_\alpha$ et

$$J_W(k^*) \leq J_W(k) \quad \forall k \in \mathcal{A}_\alpha.$$

Le coût $J_W(k^*)$, noté J_α^* , est le coût optimal du problème (3.19).

Remarque 3.1.2. 1. *Le problème de stabilisation positive optimale de paramètre $\alpha = 0$ correspond au problème (3.3).*

2. *L'ensemble admissible \mathcal{A}_α du problème (3.19) est contenu dans l'ensemble admissible \mathcal{A} du problème (3.3) puisque les contraintes (3.19b) et (3.19c) sont plus fortes que les contraintes (3.3b) et (3.3c). Par conséquent, si k_1^* et k_2^* sont les solutions optimales des problèmes (3.3) et (3.19), alors $J_W(k_1^*) \leq J_W(k_2^*)$. Le prix à payer pour garantir une certaine vitesse de convergence des trajectoires est donc une augmentation potentielle du coût.*

3. Supposons que $\alpha_1 > \alpha_2$. Si k_1^* et k_2^* sont les solutions optimales du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α_1 et α_2 , respectivement, alors les trajectoires du système à une entrée (3.1) asservi avec k_1^* convergent au moins aussi rapidement que avec k_2^* . Cependant, l'ensemble admissible \mathcal{A}_{α_1} du problème avec k_1^* est contenu dans l'ensemble admissible \mathcal{A}_{α_2} du problème avec k_2^* , et donc $J_W(k_1^*) \geq J_W(k_2^*)$.
4. Le problème de stabilisation positive optimale (3.19) liée à un paramètre α trop grand, peut ne pas être réalisable alors qu'il l'était avec $\alpha = 0$.

3.2 Pertinence

Dans cette section, nous discutons de l'intérêt du problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α pour les systèmes LTI positifs à une entrée (3.1).

3.2.1 Relativité de la notion d'optimalité

Commençons par rappeler que l'objectif est de trouver une loi d'asservissement optimale $u(\cdot)$ parmi les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le système LTI positif à une entrée (3.1). Dans le problème (3.19) de paramètre α étudié dans ce mémoire, une loi d'asservissement est optimale lorsque la matrice d'asservissement k associée minimise la fonction J_W parmi les matrices d'asservissement positivement α -stabilisantes. Cependant, il existe d'autres problèmes d'optimisation liée à la stabilisation positive des systèmes LTI positifs à une entrée (3.1). Ceux-ci peuvent être obtenus en changeant le critère d'optimalité et/ou en modifiant les contraintes.

Ce critère d'optimalité et ces contraintes sont choisis en fonction des objectifs de contrôle recherchés. Dans notre cas, nous voulons une matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système LTI positif à une entrée (3.1). De plus, dans les applications, il peut y avoir des manières de stabiliser positivement le système qui sont plus souhaitées que d'autres. En d'autres termes, certaines matrices d'asservissement positivement stabilisantes donnent des trajectoires plus recherchées que d'autres. Le Chapitre 10 de l'ouvrage (ALBERTOS & MAREELS, 2010) présente différents objectifs de contrôle possibles.

Par exemple, une loi d'asservissement peut être conçue dans le but d'obtenir des trajectoires d'état, issues du système asservi, qui convergent le plus rapidement possible. Cet objectif est pertinent notamment lorsque le système LTI à une entrée (3.1) représente l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Rappelons que, dans ce cas, la composante d'état $x_i^{(n)}$, avec $i = 1, \dots, n$, peut être vue comme la température au point de discrétisation z_i d'une tige métallique chauffée ou refroidie à son extrémité gauche. Vouloir que $x^{(n)}(t)$ converge rapidement vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ traduit donc la volonté de chauffer ou refroidir rapidement la tige métallique pour que sa température atteigne rapidement zéro en tout point.

Comme deuxième exemple d'objectifs de contrôle, citons la bornitude de la loi de contrôle $u(\cdot)$. Cette propriété peut être recherchée pour plusieurs raisons. Par exemple, dans certaines applications, l'entrée $u(\cdot)$ ne peut pas être trop grande en valeur absolue car une entrée trop grande n'aurait pas de sens d'un point de vue applicatif. Lorsque le système LTI à une entrée (3.1) représente l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2), une entrée $u(\cdot)$ trop grande en valeur absolue traduit une variation trop importante de la température à l'extrémité gauche de la tige

métallique. En effet, rappelons que l'entrée $u(\cdot)$ est définie par

$$u(t) = -v(t) = \frac{\partial x}{\partial z}(0, t),$$

pour tout $t \geq 0$.

Par conséquent, en fonction des applications, certains comportements du système asservi (et donc certaines matrices d'asservissement) sont meilleurs que d'autres. S'il est possible de déterminer ces matrices d'asservissement grâce à l'optimisation, la question est alors de savoir quelle est la façon la plus adéquate de poser le problème, c'est-à-dire quel est le critère d'optimalité et quelles sont les contraintes qui permettront d'obtenir une loi de contrôle qui remplira les objectifs voulus.

3.2.2 Étude des objectifs de contrôle

Voyons maintenant quels sont les objectifs recherchés avec le problème étudié, qui est le problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α . Le but premier est d'obtenir une solution k^* qui est une matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le système LTI positif à une entrée (3.1). Comme nous l'avons observé dans la Section 3.1, ceci est garanti par les contraintes (3.19b) et (3.19c) et le Théorème 3.1.1. Nous avons également montré que ces contraintes permettent d'imposer une vitesse de convergence minimale aux trajectoires d'état du système asservi avec la solution k^* . Il faut faire varier le paramètre α pour influencer cette vitesse de convergence minimale. Plus α est grand et plus elle est élevée.

L'objectif recherché avec le critère d'optimalité choisi consiste à obtenir une solution optimale k^* dont les composantes sont les plus petites possibles. Grâce à la matrice de poids W , il est possible de pénaliser davantage certaines composantes. Plus précisément, lier une composante à un poids très élevé signifie que cette composante doit absolument être très petite. L'intérêt du critère d'optimalité choisi peut également être interprété d'un point de vue dynamique. En effet, supposons que l'entrée $u(\cdot)$ doit rester bornée par un paramètre réel positif U sinon elle n'aurait, par exemple, pas de sens d'un point de vue applicatif. Nous savons que les trajectoires $x(\cdot)$ d'un système LTI positif à une entrée (3.1) asservi avec une matrice d'asservissement k positivement stabilisante convergent exponentiellement vite vers zéro. Puisque la loi d'asservissement $u(\cdot)$ est définie par

$$u(\cdot) = kx(\cdot),$$

elle converge également exponentiellement vite vers zéro. Cela implique qu'à partir d'un certain moment T , l'entrée $u(\cdot)$ reste bornée par U pour tout $t \geq T$, c'est-à-dire

$$|u(t)| \leq U.$$

Cependant, rien ne garantit que l'entrée $u(\cdot)$ soit bornée par U au début du contrôle, c'est-à-dire lorsque $t < T$. En particulier, des grandes composantes de k en valeur absolue favorisent une entrée $u(\cdot)$ prenant des valeurs éloignées de zéro au départ. Dans ce cas, il est possible que

$$|u(t)| > U,$$

pour certains $t < T$. C'est pourquoi, d'un point de vue dynamique, le critère d'optimalité (3.19a) permet d'essayer d'éviter des lois d'asservissement $u(\cdot)$ positivement stabilisantes qui prennent des valeurs trop éloignées de zéro (selon le paramètre U).

Bien que nous nous intéressions à un problème d'optimisation lié au comportement d'un système dynamique, notons que la trajectoire $x(\cdot)$ n'apparaît pas dans le critère d'optimalité ou dans les contraintes du problème (3.19). Notre problème se réduit donc à un problème d'optimisation classique où la solution est une matrice d'asservissement. L'absence de la dynamique dans le problème (3.19) a l'avantage de faciliter l'élaboration d'un algorithme de recherche d'une approximation de son éventuelle solution.

3.2.3 Existence d'autres critères d'optimalité

Comme mentionné au début de cette Section 3.2, d'autres critères d'optimalité des lois d'asservissement positivement stabilisantes peuvent être étudiés. Pour certains d'entre eux, la trajectoire est présente dans la fonction de coût. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter la dynamique du système dans les contraintes. Le problème d'optimisation est alors composé d'une fonction de coût et de contraintes dynamiques. La théorie des mathématiques qui étudie ce type de problèmes est la théorie de la commande optimale. Elle permet de trouver une loi de contrôle qui vérifie un certain critère d'optimalité tout en respectant éventuellement des contraintes qui font intervenir l'état et/ou l'entrée du système. Notons qu'une introduction à la théorie de la commande optimale peut être trouvée dans l'ouvrage (LOCATELLI, 2001).

L'un des exemples les plus connus de cette théorie est le problème de la commande optimale linéaire quadratique (LQ). Celui-ci fait notamment l'objet des références (CALLIER & WILLEMS, 1983) et (ANDERSON & MOORE, 1990). En horizon infini et dans sa forme normalisée, le problème de la commande optimale LQ consiste à minimiser la fonction de coût quadratique

$$J(x_0, u) := \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\|Ru(t)\|^2 + \|Sx(t)\|^2] dt,$$

pour un système LTI donné et décrit par la dynamique (1.1), où la condition initiale x_0 est fixée, $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue par morceaux, $S \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice symétrique définie positive et $\|\cdot\|$ réfère à la norme euclidienne. Lorsque la commande optimale LQ existe, il est possible de montrer qu'elle est une loi d'asservissement stabilisante. Cependant, le problème classique de la commande optimale LQ n'intègre pas la contrainte recherchée de maintien de la positivité du système en boucle fermée. Cela signifie qu'il ne garantit pas que les trajectoires engendrées par la commande optimale LQ appliquée à un système LTI positif, soient non négatives. Notons que le problème de la commande optimale LQ dans lequel la condition de positivité est ajoutée dans les contraintes a notamment été étudié dans la thèse (BEAUTHIER, 2011). Dans cette référence, l'auteur porte une attention particulière au développement de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour ce problème de la commande optimale LQ avec des contraintes liées au maintien de la positivité des trajectoires.

3.3 Réécriture des contraintes

Dans la section 3.1, nous avons écrit formellement le problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α . Pour rappel, celui-ci est constitué de deux contraintes. La première, la condition (3.19b), est liée à la positivité du système asservi alors que la seconde, la condition (3.19c), correspond à la stabilité du système asservi. L'objectif de cette section est de présenter d'autres formulations de ces deux contraintes apparaissant dans le problème de stabilisation positive optimale (3.19). Notons que les reformulations introduites dans cette section sont de plus en plus développées et les dernières sont utilisées dans le Chapitre 4 afin de concevoir un algorithme de résolution du problème de stabilisation positive optimale.

Le point commun entre les différentes réécritures du problème (3.19) est l'utilisation des notions de matrices définies positives et définies négatives. Pour la dernière reformulation, nous utiliserons également des matrices semi-définies positives. Ces concepts sont rappelés dans les Définitions 3.3.1 et 3.3.2.

Définition 3.3.1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite *définie positive* (resp. *définie négative*) si

$$v^\top Av > 0 \text{ (resp. } v^\top Av < 0),$$

pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$. Lorsque A est définie positive (resp. définie négative), la notation $A \succ 0$ (resp. $A \prec 0$) est utilisée.

Définition 3.3.2. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite *semi-définie positive* (resp. *semi-définie négative*) si

$$v^\top Av \geq 0 \text{ (resp. } v^\top Av \leq 0),$$

pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Lorsque A est semi-définie positive (resp. semi-définie négative), la notation $A \succeq 0$ (resp. $A \preceq 0$) est utilisée.

Notons également que certaines reformulations du problème de stabilisation positive optimale (3.19) font apparaître des inéquations matricielles particulières, appelées LMI (Linear Matrix Inequality). Pour garder une certaine cohérence dans la présentation des différentes reformulations du problème (3.19), il est approprié de commencer par introduire la définition des LMI. Celle-ci provient du cours (WINKIN, 2021).

Définition 3.3.3. Soit F une fonction matricielle dont les variables sont les matrices X_1, \dots, X_m . L'inégalité matricielle

$$F(X_1, \dots, X_m) \prec 0, \tag{3.20}$$

est une LMI si $F(X_1, \dots, X_m)$ est symétrique quelques soient X_1, \dots, X_m et si H est affine par rapport à X_1, \dots, X_m .

Dans la Définition 3.3.3, les variables matricielles X_1, \dots, X_m sont appelées variables de décision. Les inégalités matricielles $F(X_1, \dots, X_m) \succ 0$ et $F(X_1, \dots, X_m) \prec G(X_1, \dots, X_m)$ où F et G sont des fonctions matricielles affines, correspondent également à des LMI. En effet, elles peuvent être réécrites sous la forme standard des LMI comme $-F(X_1, \dots, X_m) \prec 0$ et $F(X_1, \dots, X_m) - G(X_1, \dots, X_m) \prec 0$. Une LMI non-stricte est une LMI où le symbole \prec dans (3.20) est remplacé par \preceq . Par ailleurs, comme indiqué dans la référence (SCHERER & WEILAND, 2000), il existe des méthodes numériques permettant de résoudre les LMI. La toolbox YALMIP (voir (LÖFBERG, 2023)) de MATLAB est notamment un outil de référence pour la résolution de problèmes contenant ce type d'inégalités matricielles (elle est d'ailleurs introduite dans la Section 4.4). C'est pourquoi, formuler les contraintes du problème de stabilisation positive optimale sous forme de LMI est intéressant dans le but de concevoir un algorithme de résolution de ce problème d'optimisation. Pour conclure cette présentation des LMI, signalons qu'elles sont présentes dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées comme le contrôle, l'optimisation ou encore le traitement du signal (cf. (SCHERER & WEILAND, 2000)).

Dans la théorie du contrôle, l'une des LMI les plus connues est l'inégalité de Lyapunov, dont la forme est donnée dans la Définition 3.3.4. Pour plus de détails concernant des méthodes de résolution numérique de l'inégalité de Lyapunov, le lecteur est invité à consulter le Chapitre 6 de l'ouvrage (ANTOULAS, 2005).

Définition 3.3.4. *Considérons une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'inégalité de Lyapunov est une inéquation matricielle de la forme*

$$A^\top P + PA \prec 0, \quad (3.21)$$

où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est à déterminer.

Remarquons que l'inégalité de Lyapunov (3.21) est bien une LMI puisque la fonction matricielle $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$F(P) := A^\top P + PA = F(P)^\top,$$

pour tout $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, est affine.

Cette inégalité de Lyapunov est connue en théorie du contrôle grâce au Théorème 3.3.1. Ce dernier nous apprend que la définition analytique de la stabilité d'un système LTI (1.1) peut être transformée en une caractérisation algébrique via l'inégalité de Lyapunov. Le Théorème 3.3.1 provient de la référence (BEAUTHIER, 2011). Nous n'en donnons pas la preuve mais elle peut être trouvée dans l'ouvrage (CALLIER & DESOER, 1991).

Théorème 3.3.1. *Un système LTI (1.1) est stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^\top P + PA$ est définie négative.*

Le Théorème 3.3.2 affirme que la stabilisabilité d'un système LTI est également directement reliée à la solvabilité d'une inégalité matricielle. Ce théorème est une conséquence directe du Théorème 3.3.1 puisque, par le Théorème 1.2.3, un système LTI (1.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que le système asservi associé est stable.

Théorème 3.3.2. *Un système LTI (1.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice d'asservissement $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que*

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK)$$

est définie négative.

Remarquons que le Théorème 3.3.2 n'implique pas une LMI comme dans le Théorème 3.3.1 mais plutôt une inéquation matricielle quadratique où les variables de décision sont les matrices K et P .

Grâce au Théorème 3.3.2, nous pouvons proposer une première reformulation du problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α pour les systèmes LTI à une entrée de la forme (3.1). Celle-ci est donnée par

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}, P \in \mathbb{S}_n} J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.22a)$$

$$\text{s.c.} \quad A_\alpha + bk \text{ est Metzler}, \quad (3.22b)$$

$$P \succ 0, \quad (3.22c)$$

$$(A_\alpha + bk)^\top P + P(A_\alpha + bk) \prec 0, \quad (3.22d)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et \mathbb{S}_n représente l'ensemble des matrices symétriques de dimension n . La contrainte analytique (3.19c) est donc remplacée par les deux conditions algébriques (3.22c) et (3.22d). Parmi ces deux conditions algébriques, l'inégalité (3.22c) est une LMI alors que (3.22d) est une inégalité matricielle quadratique par

rapport aux variables k et P .

Pour motiver la prochaine réécriture du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α , notons que la matrice P dans la formulation (3.22) doit être symétrique. Cette condition peut être affinée en exploitant la structure de positivité du système LTI à une entrée (3.1). Ce résultat découle du Théorème 3.3.3 dont la preuve se trouve notamment dans la référence (FARINA & RINALDI, 2000).

Théorème 3.3.3. *Un système LTI positif (1.1) est stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^\top P + PA$ est définie négative.*

La stabilité d'un système LTI positif est donc liée à l'existence d'une matrice diagonale (et pas simplement symétrique) vérifiant l'inégalité de Lyapunov. Le Théorème 3.3.4 pour la stabilisation positive des systèmes LTI positifs, est l'analogie du Théorème 3.3.2 pour la stabilisation des systèmes LTI quelconques. Il est une conséquence directe du Théorème 3.3.3.

Théorème 3.3.4. *Un système LTI positif (1.1) est positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice d'asservissement $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice diagonale définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que*

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK)$$

est définie négative et $A + BK$ est une matrice de Metzler.

En utilisant le Théorème 3.3.4, le problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α peut donc se réécrire de la manière suivante

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}, P \in \mathbb{D}^n} J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.23a)$$

$$\text{s.c.} \quad A_\alpha + bk \text{ est Metzler}, \quad (3.23b)$$

$$P \succ 0, \quad (3.23c)$$

$$(A_\alpha + bk)^\top P + P(A_\alpha + bk) \prec 0, \quad (3.23d)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et \mathbb{D}^n représente l'ensemble des matrices diagonales de dimension n . Remarquons que les contraintes n'ont pas changé par rapport à la formulation 3.22. Le changement réside dans le fait que nous pouvons nous contenter de chercher P vérifiant les contraintes (3.23c) et (3.23d), parmi les matrices diagonales (et pas parmi toutes les matrices symétriques).

À présent, notre objectif est de proposer une nouvelle formulation du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α pour le système à une entrée (3.1), où la contrainte quadratique (3.23d) est remplacée par une LMI. Pour cela, nous avons besoin du Théorème 3.3.5. Il affirme qu'une caractérisation de la stabilisation positive d'un système LTI positif (1.1) peut être exprimée en utilisant une LMI. La preuve du Théorème 3.3.5 nécessite le Lemme 3.3.1 suivant.

Lemme 3.3.1. *Une matrice diagonale $D := \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si ses éléments diagonaux sont strictement positifs (resp. positifs), c'est-à-dire $D \succ 0$ (resp. $D \succeq 0$) si et seulement si $d_i > 0$ (resp. $d_i \geq 0$) pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Démonstration. Puisque D est définie positive (resp. semi-définie positive), ses valeurs propres sont strictement positives (resp. positives). Or, les valeurs propres d'une matrice diagonale se situent sur la diagonale, ce qui nous permet de conclure. \square

Notons que le Théorème 3.3.5 se trouve notamment dans la thèse (BEAUTHIER, 2011). Par ailleurs, la preuve a été inspirée du cours (WINKIN, 2021).

Théorème 3.3.5. *Un système LTI positif (1.1) est positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice diagonale définie positive $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$AQ + QA^\top + BY + Y^\top B^\top \quad (3.24)$$

est définie négative et $AQ + BY$ est une matrice de Metzler.

Avant de prouver le Théorème 3.3.5, remarquons que l'inégalité matricielle

$$AQ + QA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0,$$

est bien une LMI pour les variables de décision Y et Q . En effet, la fonction matricielle $F : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$F(Y, Q) := AQ + QA^\top + BY + Y^\top B^\top = F(Y, Q)^\top,$$

pour tout $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, est affine. La preuve suivante est celle du Théorème 3.3.5.

Démonstration. Par le Théorème 3.3.4, un système LTI positif (1.1) est positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice d'asservissement $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice diagonale définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK) \prec 0, \quad (3.25)$$

et $A + BK$ est une matrice de Metzler. Il suffit donc de considérer le changement de variables donné par

$$\begin{cases} Q &= P^{-1} \\ Y &= KP^{-1}. \end{cases} \quad (3.26)$$

En effet, la matrice P est diagonale et définie positive si et seulement si Q est une matrice diagonale définie positive. De plus, dans ce cas, P^{-1} est symétrique et non singulière et donc P vérifie l'inégalité matricielle (3.25) si et seulement si

$$P^{-1}A^\top + P^{-1}K^\top B^\top + AP^{-1} + BKP^{-1} \prec 0, \quad (3.27)$$

est également vérifiée pour P . En utilisant à nouveau le fait que P^{-1} est symétrique et puisqu'une matrice a les mêmes valeurs propres que sa transposée, l'inéquation (3.27) est équivalente à

$$AP^{-1} + BKP^{-1} + P^{-1}A^\top + P^{-1}K^\top B^\top \prec 0.$$

Nous retrouvons finalement l'expression (3.24) en utilisant le changement de variable (3.26).

Il reste à prouver que $A + BK$ est Metzler si et seulement si $AQ + BY$ est Metzler. Pour cela, notons que Q est diagonale et définie positive. Par le Lemme 3.3.1, tous les éléments diagonaux de Q sont donc strictement positifs. Il s'ensuit que $A + BK$ est Metzler si et seulement si $(A + BK)Q$ est Metzler. Nous concluons grâce au changement de variable (3.26) puisque

$$(A + BK)Q = AQ + B K Q = AQ + BY.$$

□

En utilisant le Théorème 3.3.5, le problème de stabilisation positive optimale de paramètre α devient donc

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}, y \in \mathbb{R}^{1 \times n}, Q \in \mathbb{D}^n} J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.28a)$$

$$\text{s.c.} \quad k = yQ^{-1}, \quad (3.28b)$$

$$A_\alpha Q + by \text{ est Metzler}, \quad (3.28c)$$

$$Q \succ 0, \quad (3.28d)$$

$$A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + by + y^\top b^\top \prec 0, \quad (3.28e)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dans le problème (3.28) de stabilisation positive optimale de paramètre α , les contraintes (3.28d) et (3.28e) sont des LMI. Par contre, remarquons que la condition (3.28b), qui permet d'obtenir la matrice d'asservissement k à partir des nouvelles variables y et Q , est une contrainte d'égalité matricielle non linéaire.

La dernière reformulation du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α concerne uniquement le cas particulier de l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Pour rappel, cette approximation est un système LTI positif à une entrée de la forme (3.1), dont les éléments A et b sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} -p_2 & p_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_2 & -2p_2 & p_2 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & p_2 & -2p_2 & p_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_2 & -p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

et

$$b = (p_1 \ 0 \ \cdots \ 0)^\top \in \mathbb{R}_+^n,$$

avec p_1 et p_2 , des paramètres réels strictement positifs liés à la discrétisation et au paramètre de diffusion. Pour cette nouvelle réécriture du problème de stabilisation positive optimale lié à ce système particulier, l'objectif est d'exprimer la contrainte (3.28c) qui impose que $A_\alpha Q + by$ soit Metzler sous la forme d'une LMI non-strictes. Pour cela, nous utilisons le Théorème 3.3.6.

Théorème 3.3.6. *Définissons le vecteur $\mathbb{1} := (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ et les matrices $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$E := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & p_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & p_1 & & & \\ & & p_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p_1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

L'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2) est un système positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice diagonale $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice diagonale définie positive $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$AQ + QA^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top,$$

est définie négative et

$$EQ + FY,$$

est semi-définie positive.

Avant de présenter la preuve, commentons le Théorème 3.3.6. Les fonctions matricielles $F : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ et $G : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$F(Y, Q) := AQ + QA^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top = F(Y, Q)^\top,$$

et

$$G(Y, Q) := EQ + FY = G(Y, Q)^\top,$$

pour tout $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sont affines. C'est pourquoi, avec les variables de décision Y et Q , l'inégalité matricielle

$$AQ + QA^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top \prec 0,$$

est une LMI alors que l'inégalité

$$EQ + FY \succeq 0,$$

est une LMI non-stricte. Donnons maintenant la preuve du Théorème 3.3.6.

Démonstration. Selon le Théorème 3.3.5, un système positif à une entrée de la forme (3.1) est positivement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice diagonale définie positive $Q := \text{diag}(q_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $y := (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tels que

$$AQ + QA^\top + by + y^\top b^\top,$$

est définie négative avec $AQ + by$ Metzler. Remarquons que ce problème est lui-même équivalent au problème qui consiste à trouver une matrice diagonale définie positive $Q := \text{diag}(q_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice diagonale $Y := \text{diag}(y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$AQ + QA^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top,$$

est définie négative avec $AQ + b\mathbb{1}^\top Y$ Metzler. Il reste à traduire cette dernière contrainte en LMI en fonction de Y et Q , lorsque A et b sont les matrices de l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Pour cela, calculons que

$$AQ + b\mathbb{1}^\top Y = \begin{pmatrix} -p_2q_1 + p_1y_1 & p_2q_2 + p_1y_2 & p_1y_3 & \cdots & \cdots & p_1y_n \\ p_2q_1 & -2p_2q_2 & p_2q_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2q_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & p_2q_{n-2} & -2p_2q_{n-1} & p_2q_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_2q_{n-1} & -p_2q_n \end{pmatrix},$$

et observons que, par le Lemme 3.3.1, la matrice diagonale définie positive Q est strictement positive. Par conséquent, puisque p_2 est un paramètre réel strictement positif, $AQ + b\mathbb{1}^\top Y$ est une matrice de Metzler si et seulement si les conditions

$$\begin{cases} p_2q_2 + p_1y_2 \geq 0 \\ p_1y_3, \dots, p_1y_n \geq 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

sont satisfaites. Sous forme matricielle, le système (3.30) peut se réécrire de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & p_2 q_2 + p_1 y_2 & & & & \\ & & p_1 y_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_1 y_n \end{pmatrix} \geq 0,$$

ou encore comme

$$EQ + FY \geq 0,$$

avec E et F données par (3.29). Finalement, puisque la matrice $EQ + FY$ est diagonale, elle est non négative si et seulement si

$$EQ + FY \succeq 0, \quad (3.31)$$

ce qui confirme que $AQ + b\mathbb{1}^\top Y$ est Metzler si et seulement si $EQ + FY$ est semi-définie positive. \square

Grâce au Théorème 3.3.6, nous pouvons proposer une dernière reformulation du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Celle-ci convient uniquement à l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Elle est donnée par

$$\min_{k \in \mathbb{R}^{1 \times n}, Y \in \mathbb{D}^n, Q \in \mathbb{D}^n} J_W(k) = kWk^\top, \quad (3.32a)$$

$$\text{s.c.} \quad k = \mathbb{1}^\top YQ^{-1}, \quad (3.32b)$$

$$EQ + FY \succeq 0, \quad (3.32c)$$

$$Q \succ 0, \quad (3.32d)$$

$$A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top \prec 0, \quad (3.32e)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et, pour rappel, $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur dont toutes les composantes valent un et les matrices $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont données par

$$E := \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & p_2 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F := \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & p_1 & & & & \\ & & p_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_1 \end{pmatrix}.$$

Dans la reformulation (3.32), toutes les contraintes sont matricielles. La condition (3.32b), qui permet de calculer k à partir des variables Y et Q , est la seule équation, mais elle n'est pas linéaire. Les autres contraintes sont des LMI ou des LMI non-strictes.

Chapitre 4

Algorithme pour le problème de stabilisation positive optimale

Dans ce Chapitre 4, nous proposons deux méthodes de résolution numérique du problème (3.19) de stabilisation positive optimale de paramètre α pour les systèmes LTI positifs à une entrée (3.1). Celles-ci sont itératives et utilisent le principe de dichotomie pour passer d'un itéré à l'autre. Le premier algorithme proposé permet d'obtenir une matrice d'asservissement positivement α -stabilisante pour le système (3.1) (cest-à-dire $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$), dont le coût approxime le coût optimal J_α^* du problème (3.19). Il nécessite de résoudre, à chaque itération, un sous-problème contenant notamment des LMI et une inégalité matricielle non linéaire. Cependant, ce sous problème n'est, pour l'instant, pas supporté par la toolbox YALMIP (qui, pour rappel, est l'outil numérique de référence pour la résolution de problèmes contenant des LMI). C'est pourquoi, nous proposons un deuxième algorithme dont le sous-problème implique uniquement des LMI. Cet algorithme ne fournit pas nécessairement une matrice $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût approxime le coût optimal J_α^* . Par contre, il est tout de même capable de fournir une matrice $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût est plus petit que celui de la matrice $k_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ choisie au début de l'algorithme. Dans ce Chapitre 4, nous donnons également des informations sur la toolbox YALMIP qui est donc l'outil utilisé pour résoudre le sous problème intervenant dans le deuxième algorithme proposé. Signalons également que la deuxième méthode proposée dans ce Chapitre 4 est celle utilisée pour effectuer les simulations numériques du Chapitre 5.

Dans la Section 4.1, nous précisons le principe général des deux algorithmes proposés, qui sont des algorithmes d'optimisation. La Section 4.2 est consacrée à la première méthode numérique. Elle permet essentiellement de détailler la méthode de dichotomie utilisée pour construire les itérés. Le deuxième algorithme, qui est celui utilisé dans le Chapitre 5, fait l'objet de la Section 4.3. Enfin, la toolbox YALMIP est présentée dans la Section 4.4. La Section 4.4 contient également la version la plus explicite du deuxième algorithme.

4.1 Algorithme d'optimisation

Puisque le problème de stabilisation positive optimale de paramètre α est un problème d'optimisation, la méthode numérique proposée est un algorithme d'optimisation. Ceux-ci sont itératifs. Ils commencent par une première estimation et génèrent ensuite une séquence d'estimations améliorées (appelés itérés) pour se terminer avec, si possible, une solution. Cette classe d'algorithmes appliqués aux problèmes d'optimisation fait notamment l'objet de l'ouvrage (NOCEDAL & WRIGHT, 2006). Pour le problème de stabilisation positive optimale de paramètre α , notre algorithme va donc, à partir d'une matrice $k_0 \in \mathcal{A}_\alpha$, générer une séquence d'itérés $(k_i)_i \subseteq \mathcal{A}_\alpha$.

Il se termine lorsque la matrice d'asservissement positivement α -stabilisante obtenue a un coût qui approche suffisamment le coût optimale J_α^* , selon un critère choisi. Plus formellement, l'algorithme présenté dans ce Chapitre 4 est construit dans le but qu'il se termine avec une matrice d'asservissement $k \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût vérifie l'inégalité

$$|J_W(k) - J_\alpha^*| \leq \epsilon,$$

où ϵ est un paramètre réel positif tel que $\epsilon \ll 1$. Ce dernier représente la tolérance choisie. De plus, rappelons que

$$J_\alpha^* := J_W(k^*),$$

avec k^* , une solution optimale du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . La difficulté consiste donc à développer une stratégie pour passer d'un itéré k_i à l'itéré suivant k_{i+1} de telle sorte que le coût des itérés construits se rapproche de J_α^* (sachant que J_α^* n'est pas connu).

La construction de cet algorithme d'optimisation est basée sur la forme (3.28) du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Remarquons que celle-ci est elle-même équivalente au problème d'optimisation

$$\min_{y \in \mathbb{R}^{1 \times n}, Q \in \mathbb{D}^n} J_W(yQ^{-1}) = yQ^{-1}WQ^{-1}y^\top, \quad (4.1a)$$

$$\text{s.c.} \quad A_\alpha Q + by \text{ est Metzler}, \quad (4.1b)$$

$$Q \succ 0, \quad (4.1c)$$

$$A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + by + y^\top b^\top \prec 0, \quad (4.1d)$$

où $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ est une matrice diagonale positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Pour ce problème, les variables d'optimisation appartiennent à l'espace $\mathbb{R}^{1 \times n} \times \mathbb{D}^n$. L'espace admissible, noté \mathcal{B}_α , est donné par

$$\mathcal{B}_\alpha := \{(y, Q) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \times \mathbb{D}^n : A_\alpha Q + by \text{ est Metzler}, Q \succ 0 \text{ et } A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + by + y^\top b^\top \prec 0\}.$$

Une solution (y^*, Q^*) du problème d'optimisation (4.1) est optimale si $(y^*, Q^*) \in \mathcal{B}_\alpha$ et

$$J_W(y^*(Q^*)^{-1}) \leq J_W(yQ^{-1}),$$

pour tout $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$.

En considérant le problème d'optimisation (4.1), notre stratégie consiste à concevoir un algorithme d'optimisation qui génère une séquence d'itérés $(y_i, Q_i)_i \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, à partir d'un couple $(y_0, Q_0) \in \mathcal{B}_\alpha$. Cet algorithme se termine lorsque, selon un critère choisi,

$$|J_W(y_i Q_i^{-1}) - J_W(y^*(Q^*)^{-1})| \leq \epsilon, \quad (4.2)$$

où $J_W(y^*(Q^*)^{-1})$ est le coût optimal du problème (4.1), c'est-à-dire le coût d'une solution (y^*, Q^*) optimale pour le problème (4.1). La pertinence de cette méthode pour construire une séquence d'itérés $(k_i)_i \subset \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût s'approche de J^* au cours des itérations repose sur les observations de la Remarque 4.1.1.

Remarque 4.1.1. 1. Par le théorème 3.3.5, $yQ^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha$ lorsque $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$. En d'autres termes, si $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$, alors la matrice yQ^{-1} est positivement α -stabilisante pour le système LTI positif à une entrée (3.1).

2. Le théorème 3.3.5 montre également que, si k est une matrice positivement α -stabilisante, c'est-à-dire $k \in \mathcal{A}_\alpha$, alors il existe un couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $k = yQ^{-1}$.

3. Les deux premières observations combinées à la définition d'une solution optimale pour un problème de minimisation permettent de conclure que $y^*(Q^*)^{-1}$ est une solution optimale du problème (3.19) de paramètre α si (y^*, Q^*) est optimale pour le problème d'optimisation (4.1).

En suivant la première observation de la Remarque 4.1.1, la séquence d'itérés $(k_i)_i \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ recherchée est construite de la manière suivante

$$k_i := y_i Q_i^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

avec les itérés $(y_i, Q_i) \in \mathcal{B}_\alpha$, générés par l'algorithme basé sur le problème d'optimisation (4.1). Par la troisième observation de la Remarque 4.1.1, cet algorithme se termine lorsque

$$|J_W(y_i Q_i^{-1}) - J_W(y^*(Q^*)^{-1})| = |J_W(k_i) - J_\alpha^*| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, un algorithme qui génère une séquence d'itérés $(y_i, Q_i)_i \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, à partir d'un couple $(y_0, Q_0) \in \mathcal{B}_\alpha$, et qui se termine lorsque la condition (4.2) est respectée, permet d'obtenir une matrice d'asservissement positivement α -stabilisante pour le système (3.1), dont le coût est proche du coût optimal J_α^* .

4.2 Méthode de dichotomie

Dans les algorithmes proposés dans ce Chapitre 4, la stratégie adoptée pour générer une séquence d'itérés $(y_i, Q_i)_i \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, à partir d'un couple $(y_0, Q_0) \in \mathcal{B}_\alpha$, utilise la méthode de dichotomie.

4.2.1 Principe de la méthode

Avec cette méthode de dichotomie, l'idée est de partir de l'intervalle $[0, J_W(y_0 Q_0^{-1})]$. Celui-ci contient J_α^* puisque la fonction J_W est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , J_α^* est le coût optimal du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α et $y_0 Q_0^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha$. Ensuite, la première étape de notre méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle $[0, J_W(y_0 Q_0^{-1})]$ en deux, en calculant

$$\beta := \frac{J_W(y_0 Q_0^{-1})}{2}.$$

Il y a alors deux possibilités : soit il existe un couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(y Q^{-1}) \leq \beta$, soit il n'existe pas de couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(y Q^{-1}) \leq \beta$. Dans le premier cas, le couple (y, Q) trouvé devient l'itéré (y_1, Q_1) et la méthode de dichotomie est alors appliquée au sous-intervalle $[0, J_W(y_1 Q_1^{-1})]$. Dans le second cas, la méthode de dichotomie est appliquée au sous-intervalle $[\beta, J_W(y_0 Q_0^{-1})]$.

Dans l'algorithme, la borne inférieure de l'intervalle à partager à chaque itération est notée β_L . Lors de l'initialisation, nous posons

$$\beta_L := 0.$$

À chaque itération, la méthode de dichotomie consiste donc à diviser l'intervalle $[\beta_L, J_W(y_i Q_i^{-1})]$ en deux, en calculant

$$\beta := \frac{\beta_L + J_W(y_i Q_i^{-1})}{2}.$$

S'il existe un couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(yQ^{-1}) \leq \beta$, le couple (y, Q) trouvé devient l'itéré (y_{i+1}, Q_{i+1}) . Le processus de dichotomie est alors répété sur l'intervalle $[\beta_L, J_W(y_{i+1}Q_{i+1}^{-1})]$. Par contre, s'il n'existe pas de couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(yQ^{-1}) \leq \beta$, le processus de dichotomie est répété sur l'intervalle $[\beta, J_W(y_iQ_i^{-1})]$ et β_L devient donc β . Notons que la variable β_L représente donc la borne en dessous de laquelle nous sommes certains de ne pas trouver de couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(yQ^{-1}) \leq \beta_L$. Le processus de partage d'un intervalle en deux et de sélection d'une sous-partie est répétée jusqu'au moment où la variable β_L est suffisamment proche de $J_W(k_i)$, c'est-à-dire lorsque

$$|J_W(k_i) - \beta_L| \leq \epsilon. \quad (4.4)$$

Dans la suite, nous notons $P_{\alpha, \beta}$, le sous-problème qui, pour un système LTI positif à une entrée (3.1) et une matrice diagonale positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, consiste à chercher des matrices $y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $Q \in \mathbb{D}^n$ telles que

$$\begin{cases} J_W(yQ^{-1}) \leq \beta \\ A_\alpha Q + by \text{ est Metzler} \\ Q \succ 0 \\ A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + by + y^\top b^\top \prec 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

avec $\alpha, \beta \geq 0$. Ce problème est dit réalisable s'il admet une solution, c'est-à-dire s'il existe des matrices $y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $Q \in \mathbb{D}^n$ telles que les conditions (4.5) sont satisfaites. Nous notons $\mathcal{B}_{\alpha, \beta}$, l'ensemble des matrices vérifiant les conditions (4.5), c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{B}_{\alpha, \beta} := \mathcal{B}_\alpha \cap \{(y, Q) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} : J_W(yQ^{-1}) \leq \beta\}.$$

Algorithme 1 Méthode de dichotomie avec le sous-problème $P_{\alpha, \beta}$

Entrée : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler, $b \in \mathbb{R}_+^n$, $W = \text{diag}(w_i)_{i=1}^n > 0$ et $\alpha \geq 0$

Sortie : $J_W(k_i) - \beta_L \leq \epsilon$ et $\beta_L < J_\alpha^* \leq J_W(k_i)$, où $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ et J_α^* est le coût optimal du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α

1: **if** le problème d'optimisation (4.1) est réalisable **then**

2: Poser $i \leftarrow 0$

3: Choisir (y_0, Q_0) dans \mathcal{B}_α

4: Poser $k_0 \leftarrow y_0 Q_0^{-1}$

5: **else**

6: **return**

7: **end if**

8: Choisir une tolérance ϵ pour le critère d'arrêt

9: Poser $\beta_L \leftarrow 0$

10: **while** $J_W(k_i) - \beta_L > \epsilon$ **do**

11: $\beta \leftarrow \frac{\beta_L + J_W(k_i)}{2}$

12: **if** le problème $P_{\alpha, \beta}$ est réalisable **then**

13: Poser $i \leftarrow i + 1$

14: Choisir (y_i, Q_i) dans $\mathcal{B}_{\alpha, \beta}$

15: Poser $k_i \leftarrow y_i Q_i^{-1}$

16: **else**

17: $\beta_L \leftarrow \beta$

18: **end if**

19: **end while**

L'Algorithme 1 résume la procédure expliquée précédemment pour obtenir une matrice d'asservissement positivement α -stabilisante dont le coût $J_W(k)$ approxime le coût optimal J_α^* avec une erreur absolue d'au plus ϵ . À la sortie, cette matrice est l'itéré k_i , qui est la dernière matrice d'asservissement construite.

4.2.2 Avantages de l'algorithme

Dans l'Algorithme 1, la condition à la ligne 1 sert à vérifier que l'ensemble \mathcal{B}_α est non vide, c'est-à-dire, par le Théorème 3.3.5, que le système LTI positif à une entrée (3.1) étudié est positivement α -stabilisable. Si cette condition n'est pas remplie, appliquer un algorithme de stabilisation positive optimale n'a pas de sens. Ceci explique l'arrêt forcé de l'algorithme à la ligne 6.

La Remarque 4.2.1 reprend plusieurs observations effectuées concernant la sortie de l'Algorithme 1.

Remarque 4.2.1. 1. L'Algorithme 1 fournit $i + 1$ matrices k_j , avec $j = 0 \dots, i$. Ces matrices k_j sont positivement α -stabilisantes (c'est-à-dire $k_j \in \mathcal{A}_\alpha$) puisque elles sont données par (4.3) avec $(y_j, Q_j) \in \mathcal{B}_\alpha$, par construction.

2. À chaque itération de la boucle présente dans l'Algorithme 1, nous avons

$$\beta_L < J_W(y_i Q_i^{-1}) = J_W(k_i). \quad (4.6)$$

Ceci est dû au fait que la variable β_L est construite comme étant la borne en dessous de laquelle nous sommes certains qu'il n'existe pas de couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_\alpha$ tel que $J_W(yQ^{-1}) \leq \beta_L$. Cet argument permet également d'affirmer qu'à la sortie, le coût optimal du problème d'optimisation (4.1) vérifie

$$\beta_L < J_W(y^*(Q^*)^{-1}), \quad (4.7)$$

où $(y^*, Q^*) \in \mathcal{B}_\alpha$ et (y^*, Q^*) est optimal pour (4.1). Comme nous l'avons mentionné dans la Remarque 4.1.1, $y^*(Q^*)^{-1}$ est optimal pour le problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . C'est pourquoi, l'inégalité (4.7) est équivalente à

$$\beta_L < J_\alpha^*. \quad (4.8)$$

3. Nous pouvons également observer, qu'à chaque itération,

$$J_W(k_{i+1}) = J_W(y_{i+1} Q_{i+1}^{-1}) \leq \frac{\beta_L + J_W(y_i Q_i^{-1})}{2} < J_W(y_i Q_i^{-1}) = J_W(k_i),$$

où la première inégalité vient de la construction de l'itéré (y_{i+1}, Q_{i+1}) alors que l'inégalité stricte est due à (4.6). En l'absence du critère d'arrêt, l'algorithme génère donc une suite d'itérés $(k_i)_i$ associée à une suite de coûts $(J_W(k_i))_i$ strictement décroissante.

4. À chaque itération de la boucle, la variable β_L reste inchangée ou bien elle est mise à jour avec

$$\beta_L \leftarrow \frac{\beta_L + J_W(k_i)}{2} \geq \beta_L.$$

La suite des valeurs de β_L est donc croissante.

5. L'inégalité (4.6) justifie l'abandon de la valeur absolue dans la condition d'arrêt par rapport au critère d'arrêt (4.4) initialement prévu. À la sortie, le critère d'arrêt implique que le dernier itéré k_i vérifie

$$J_W(k_i) - \beta_L \leq \epsilon. \quad (4.9)$$

6. Finalement, à la sortie de l'algorithme, la combinaison des inégalités (4.8) et (4.9) garantit que $J_W(k_i)$ approxime J_α^* avec une erreur absolue d'au plus ϵ , c'est-à-dire

$$J_W(k_i) - J_\alpha^* \leq \epsilon. \quad (4.10)$$

De plus, puisque J_α^* est le coût optimal du problème de stabilisation positive optimale,

$$J_\alpha^* \leq J_W(k_i), \quad (4.11)$$

et donc l'inégalité (4.10) traduit même une surestimation, d'au plus ϵ , de J_α^* par $J_W(k_i)$.

Pour terminer cette Sous-section 4.2.2 sur les avantages de l'Algorithme 1, nous discutons de sa robustesse. Cette notion est notamment étudiée dans l'ouvrage (NOCEDAL & WRIGHT, 2006) ou encore dans la référence (BEN-TAL & NEMIROVSKI, 2001). La robustesse d'un algorithme d'optimisation est l'une des caractéristiques qui permettent d'établir si un algorithme est de qualité ou non. Signalons que les autres caractéristiques sont l'efficacité et la précision. La Définition 4.2.1 suivante de la robustesse provient de la référence (NOCEDAL & WRIGHT, 2006).

Définition 4.2.1. *Un algorithme est robuste s'il fonctionne bien pour la plupart des problèmes auxquels il s'applique et à partir de presque n'importe quel point de départ.*

Dans le cas de l'Algorithme 1, les problèmes auxquels l'algorithme s'applique sont déterminés par le système LTI positif à une entrée 3.1 étudié, la matrice de poids W et le paramètre α choisi. Le point de départ, noté k_0 , appartient à \mathcal{A}_α . Par ailleurs, pour mesurer la robustesse d'un algorithme, plusieurs outils existent dans la littérature. Dans ce Chapitre 4, nous utilisons notamment le concept de convergence globale d'un algorithme. Cette notion est rappelée et appliquée à l'Algorithme 1 dans la Définition 4.2.2.

Définition 4.2.2. *L'Algorithme 1 est dit globalement convergent si, quelque soit le système 3.1 positivement α -stabilisable considéré et la matrice initiale $k_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ choisie, il génère une suite $(k_i)_i \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ telle que*

$$J_W(k_i) \rightarrow J_\alpha^* \quad \text{lorsque} \quad i \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Grâce aux Définitions 4.2.1 et 4.2.2, nous sommes en mesure d'établir la robustesse de l'Algorithme 1. En effet, comme nous l'avons mentionné précédemment, l'Algorithme 1 détecte (grâce à la condition de la ligne 1) si le système LTI positif à une entrée (3.1) étudié n'est pas positivement α -stabilisable. Dans ce cas, l'arrêt est forcé et donc l'algorithme fonctionne bien pour cette classe de problèmes. Si le système (3.1) est positivement α -stabilisable, l'Algorithme 1 sans critère d'arrêt génère une suite $(k_i)_i \subseteq \mathcal{A}_\alpha$. Dans la Remarque 4.2.1, nous avons vu que la suite des coûts $(J_W(k_i))_i$ est strictement décroissante. Par contre, la suite des valeurs que prend β_L est croissante. Par conséquent, puisque l'inégalité (4.6) est vérifiée à chaque itération de la boucle, ces deux suites convergent vers la même limite L , c'est-à-dire

$$J_W(k_i) \rightarrow L \quad \text{lorsque} \quad i \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

et

$$\beta_L \rightarrow L \quad \text{lorsque} \quad i \rightarrow \infty,$$

En passant alors à la limite dans les inégalités (4.8) et (4.11), nous obtenons que

$$L = J_\alpha^*. \quad (4.14)$$

La combinaison de (4.13) et (4.14) implique alors que la propriété de convergence (4.12) est vérifiée. L'Algorithme 1 est donc globalement convergent. En résumé, que le système (3.1) soit positivement α -stabilisable ou non, l'Algorithme 1 fonctionne bien. L'un des principaux avantages de notre méthode numérique basée sur le principe de dichotomie et le sous-problème $P_{\alpha,\beta}$ est donc sa robustesse.

4.3 Méthode de dichotomie avec des LMI

Dans cette Section 4.3, nous proposons une alternative à l'Algorithme 1. L'avantage de cet algorithme par rapport à l'Algorithme 1 réside dans le fait que le sous-problème à résoudre à chaque itération n'implique que des LMI. La Sous-section 4.3.1 détaille ce phénomène. Cependant, nous verrons que cet algorithme ne fournit pas nécessairement une matrice $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût approxime le coût optimal J_α^* . Par contre, il est tout de même capable de fournir une matrice $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût est plus petit que celui de la matrice $k_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ choisie au début de l'algorithme.

4.3.1 Motivations

Pour rappel, l'Algorithme 1 a été construit sur base du problème d'optimisation (4.1) plutôt que sur la forme (3.23) du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Ceci nous a permis de formuler le sous-problème $P_{\alpha,\beta}$ (à résoudre à chaque itération), où les contraintes liées à la stabilité (4.1c) et (4.1d) sont des LMI par rapport aux variables $y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $Q \in \mathbb{D}^n$. Par ailleurs, nous avons observé qu'il était possible, pour certains problèmes, de transformer la contrainte liée à la positivité (4.1b) et les LMI (4.1c) et (4.1d) en des LMI par rapport aux variables $Y, Q \in \mathbb{D}^n$ (avec $y := \mathbb{1}^\top Y$). Le Théorème 3.3.6 justifie ce résultat pour l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). En résumé, pour certains problèmes, les trois conditions (4.1b), (4.1c) et (4.1d) présentes dans le problème $P_{\alpha,\beta}$ peuvent être transformées en trois LMI par rapport aux mêmes variables $Y, Q \in \mathbb{D}^n$. Néanmoins, dans le problème $P_{\alpha,\beta}$, la contrainte

$$J_W(yQ^{-1}) = J_W(\mathbb{1}^\top YQ^{-1}) = \mathbb{1}^\top YQ^{-1}WQ^{-1}Y\mathbb{1} \leq \beta,$$

où $y := \mathbb{1}^\top Y$ avec $Y \in \mathbb{D}^n$, n'est pas une LMI par rapport à $Y, Q \in \mathbb{D}^n$. Cette contrainte combinée aux autres LMI présentes dans le problème $P_{\alpha,\beta}$ complexifie alors la résolution de ce dernier. Nous avons d'ailleurs tenté de le résoudre avec la toolbox YALMIP, sans succès.

C'est pourquoi, dans l'algorithme alternatif proposé dans cette Section 4.3, le sous-problème à résoudre à chaque itération ne contient que la contrainte (4.1b) qui n'est pas une LMI. Cependant, dans certains cas, celle-ci peut être transformée en une LMI (comme pour l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2)).

Dans la suite, le sous-problème introduit précédemment est noté $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$. Pour un système LTI positif à une entrée (3.1) et une matrice diagonale positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il consiste à chercher un paramètre réel μ et des matrices $Y, Q \in \mathbb{D}^n$ telles que les conditions

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ -\nu I \preceq Y \preceq \nu I \\ A_\alpha Q + b\mathbb{1}^\top Y \text{ est Metzler} \\ Q \succeq \mu I \\ A_\alpha Q + QA_\alpha^\top + b\mathbb{1}^\top Y + Y\mathbb{1}b^\top \prec 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

sont satisfaites avec ν défini par

$$\nu := \mu \sqrt{\frac{\beta}{\sum_{i=1}^n w_i}}, \quad (4.16)$$

et les paramètres $\alpha, \beta \geq 0$. Notons que l'intérêt de l'utilisation du sous-problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ dans un algorithme de résolution du problème de stabilisation positive optimale de paramètre est expliqué dans la Sous-section 4.3.3. Comme annoncé, il n'y a que la troisième condition du système (4.15), (4.16) qui n'est pas une LMI. Néanmoins, dans le cas de l'approximation (2.11), (2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2), elle peut être remplacée par la LMI

$$EQ + FY \succeq 0.$$

Les quatre autres contraintes de (4.15) consistent en cinq LMI par rapport aux variables de décision μ, Y et Q . Par ailleurs, l'ensemble des triplets $(\mu, Y, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n$ vérifiant les conditions (4.15), (4.16) est noté $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$. Le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ est dit réalisable si l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$ est non vide. Enfin, avec le Lemme 3.3.1, il est évident que pour tout $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\beta_1 \leq \beta_2$, nous avons

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_1} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_2}. \quad (4.17)$$

4.3.2 Présentation de la méthode

Nous présentons maintenant l'Algorithme 2 faisant l'objet de cette Section 4.3. Il utilise le principe de la dichotomie expliquée dans la Section 4.2 mais le problème $P_{\alpha, \beta}$ est remplacé par $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$. L'initialisation est la même que celle de l'Algorithme 1. Aucun changement n'est effectué

Algorithme 2 Méthode de dichotomie avec le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$

Entrée : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler, $b \in \mathbb{R}_+^n$, $W = \text{diag}(w_i)_{i=1}^n > 0$ et $\alpha \geq 0$

Sortie : $J_W(k_i) - \beta_L \leq \epsilon$ et $J_\alpha^* \leq J_W(k_i) < J_W(k_0)$, où $k_0, k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ et J_α^* est le coût optimal du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α

```

1: if le problème d'optimisation (4.1) est réalisable then
2:   Poser  $i \leftarrow 0$ 
3:   Choisir  $(y_0, Q_0)$  dans  $\mathcal{B}_\alpha$ 
4:   Poser  $k_0 \leftarrow y_0 Q_0^{-1}$ 
5: else
6:   return
7: end if
8: Choisir une tolérance  $\epsilon$  pour le critère d'arrêt
9: Poser  $\beta_L \leftarrow 0$ 
10: while  $J_W(k_i) - \beta_L > \epsilon$  do
11:    $\beta \leftarrow \frac{\beta_L + J_W(k_i)}{2}$ 
12:   if le problème  $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$  est réalisable then
13:     Poser  $i \leftarrow i + 1$ 
14:     Choisir  $(\mu, Y, Q_i)$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$  et poser  $y_i \leftarrow \mathbf{1}^\top Y$ 
15:     Poser  $k_i \leftarrow y_i Q_i^{-1}$ 
16:     if  $\beta_L \geq J_W(k_i)$  then
17:       Poser  $\beta_L \leftarrow 0$ 
18:     end if
19:   else
20:      $\beta_L \leftarrow \beta$ 
21:   end if
22: end while

```

par rapport à l'Algorithme 1 car vérifier si le problème d'optimisation (4.1) est réalisable nécessite déjà de résoudre un système de LMI (si la condition (4.1b) peut être transformée en LMI). Par contre, la condition à vérifier à chaque itération de la boucle pour construire la séquence d'itérés $(k_i)_i$, est modifiée. En effet, dans l'algorithme basé sur $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$, la procédure est la suivante (elle est justifiée dans la Sous-section 4.3.3) : s'il existe un triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}$, le couple $(\mathbb{1}^\top Y, Q)$ trouvé devient l'itéré (y_{i+1}, Q_{i+1}) et $k_{i+1} := y_{i+1} Q_{i+1}^{-1}$. Le processus de dichotomie est alors répété sur l'intervalle $[\beta_L, J_W(k_{i+1})]$ si $\beta_L < J_W(k_{i+1})$, et sur l'intervalle $[0, J_W(k_{i+1})]$ si $\beta_L \geq J_W(k_{i+1})$. Par contre, s'il n'existe pas de triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}$, le processus de dichotomie est répété sur l'intervalle $[\beta, J_W(k_i)]$ et β_L devient donc β .

Notons que la variable β_L représente maintenant la valeur pour laquelle nous sommes certains de ne pas trouver de triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta_L}$, c'est-à-dire telle que $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta_L}$ est vide. Par conséquent, puisque (4.17) est vérifié, β_L représente plus largement la valeur pour laquelle nous savons que $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta_1}$ est vide, pour tout $\beta_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\beta_1 \leq \beta_L$. L'Algorithme 2 résume donc la procédure expliquée précédemment. Les changements par rapport à l'Algorithme 1 sont notés en rouge.

4.3.3 Avantages et limites de l'algorithme

Dans cette Sous-section 4.3.3, l'utilisation du sous-problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ dans un algorithme de résolution du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α est justifiée. Nous expliquons également pourquoi la sortie de l'Algorithme 2 est différente de celle de l'Algorithme 1. L'ajout des lignes 16 à 18 est également argumenté. Ces différentes justifications découlent du Théorème 4.3.1 qui précise le lien entre les sous-problèmes $P_{\alpha,\beta}$ et $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$.

Théorème 4.3.1. *Soient un système LTI positif à une entrée de la forme (3.1), une matrice diagonale positive $W := \text{diag}(w_i)_{i=1}^n$ et des paramètres $\alpha, \beta \geq 0$. Considérons également un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et des matrices diagonales $Q := \text{diag}(q_i)_{i=1}^n$ et $Y := \text{diag}(y_i)_{i=1}^n$. Si les conditions (4.15), où ν est défini par (4.16), sont satisfaites pour le triplet (μ, Y, Q) , alors $(\mathbb{1}^\top Y, Q) \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta}$, c'est-à-dire $(\mathbb{1}^\top Y, Q) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \times \mathbb{D}^n$ et $(\mathbb{1}^\top Y, Q)$ vérifie*

$$\begin{cases} J_W(\mathbb{1}^\top Y Q^{-1}) \leq \beta \\ A_\alpha Q + b \mathbb{1}^\top Y \text{ est Metzler} \\ Q \succ 0 \\ A_\alpha Q + Q A_\alpha^\top + b \mathbb{1}^\top Y + Y \mathbb{1} b^\top \prec 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la première et la troisième condition de (4.18) sont vérifiées. Pour la troisième, observons que $Q - \mu I$ est une matrice diagonale semi-définie positive. Dès lors, par le Lemme 3.3.1, nous obtenons que

$$q_i - \mu \geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

En combinant (4.19) avec l'hypothèse de positivité stricte de μ et le Lemme 3.3.1, nous trouvons que Q est définie positive. À présent, montrons que la première inégalité du système (4.18) est vérifiée en commençant par calculer

$$\mathbb{1}^\top Y Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{q_1} & \dots & \frac{y_n}{q_n} \end{pmatrix},$$

et donc

$$J_W(\mathbb{1}^\top Y Q^{-1}) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{y_i^2}{q_i^2}. \quad (4.20)$$

En utilisant à nouveau le Lemme 3.3.1 et le fait que $Y + \nu I$ et $\nu I - Y$ sont semi-définies positives et diagonales, nous avons que

$$-\nu \leq y_i \leq \nu \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

C'est pourquoi, avec (4.20) et (4.19), nous concluons que

$$J_W(\mathbb{1}^\top Y Q^{-1}) \leq \frac{\nu^2}{\mu^2} \sum_{i=1}^n w_i = \beta,$$

où l'égalité vient de la Définition (4.16) de ν . \square

Le Théorème 4.3.1 assure donc que $(\mathbb{1}^\top Y, Q) \in \mathcal{B}_{\alpha, \beta}$ lorsque $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$. Par ailleurs, la Remarque 4.1.1 nous permet également d'affirmer que, si $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$, alors $\mathbb{1}^\top Y Q^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha$ avec $J_W(\mathbb{1}^\top Y Q^{-1}) \leq \beta$, c'est-à-dire la matrice $\mathbb{1}^\top Y Q^{-1}$ est positivement α -stabilisante et son coût $J_W(\mathbb{1}^\top Y Q^{-1})$ est inférieur ou égal à β . Le Théorème 4.3.1 implique également que $P_{\alpha, \beta}$ est réalisable lorsque $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ l'est. Notons que la réciproque de ce dernier résultat n'est pas garantie. Plus précisément, ce n'est pas parce qu'il existe un couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_{\alpha, \beta}$, que forcément il existe un triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$. En d'autres termes, il est possible qu'il existe un couple $(y, Q) \in \mathcal{B}_{\alpha, \beta}$ mais qu'il n'existe pas de triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$.

Pour justifier l'Algorithme 2 dans le cadre de la résolution du problème de stabilisation positive optimale, nous analysons les différentes étapes de constructions de la séquence d'itérés $(k_i)_i$. L'algorithme débute avec l'intervalle $[\beta_L, J_W(k_0)]$, où β_L est initialisé à zéro. Avant la construction de l'itéré k_1 , l'inégalité

$$\beta_L < J_W(k_0), \quad (4.22)$$

est toujours vérifiée même si β_L augmente à chaque itération de la boucle, en suivant

$$\beta_L \leftarrow \frac{\beta_L + J_W(k_0)}{2}.$$

Dès que le problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ est réalisable, l'itéré k_1 est construit. Puisque le triplet (μ, Y, Q_1) choisi pour construire k_1 est dans $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$, par le Théorème 4.3.1, $k_1 = \mathbb{1}^\top Y Q_1^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha$ avec $J_W(k_1) \leq \beta$, c'est-à-dire k_1 est une matrice d'asservissement positivement α -stabilisante et son coût vérifie

$$J_W(k_1) \leq \beta = \frac{\beta_L + J_W(k_0)}{2} < J_W(k_0),$$

où la dernière inégalité vient de (4.22). Par ailleurs, par définition de β_L , nous savons qu'il n'existe pas de triplet $(\mu, Y, Q) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_L}$, c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_L}$ est vide. Cependant, puisque la réciproque du Théorème 4.3.1 n'est pas garantie, il est possible que le couple $(\mathbb{1}^\top Y, Q_1) =: (y_1, Q_1) \in \mathcal{B}_{\alpha, \beta_L}$, et donc que

$$J_W(k_1) \leq \beta_L. \quad (4.23)$$

Pour éviter cette situation, nous avons ajouté les lignes 16 à 18 dans l'Algorithme 2. Lorsque l'inégalité (4.23) est vérifiée, elles permettent de remettre la variable β_L à zéro. Dans le cas contraire, β_L n'est pas modifiée. Dès lors, à la fin de l'itération de construction de k_1 , nous avons

$$\beta_L < J_W(k_1).$$

Cependant, si la variable β_L a été remise à zéro, nous savons, par (4.17) et (4.23), que $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_1}$ est vide, pour tout $\beta_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\beta_1 \leq J_W(k_1)$. Par conséquent, lors des itérations suivantes, le problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ n'est plus jamais réalisable, et donc, la variable β_L va augmenter à chaque

itération en convergeant vers $J_W(k_1)$. De plus, dans ce cas, aucun itéré k_2 n'est créé.

Les étapes de construction de l'itéré k_{i+1} à partir de l'itéré k_i , avec i quelconque, peuvent être interprétées de la même façon que celles qui permettent de passer de k_0 à k_1 . Par conséquent, l'Algorithme 2 garantit qu'à la fin de chaque itération,

$$\beta_L < J_W(k_i). \quad (4.24)$$

De plus, il fournit $i + 1$ matrices k_j , avec $j = 0 \dots, i$. Ces matrices k_j sont positivement α -stabilisantes, c'est-à-dire $k_j \in \mathcal{A}_\alpha$. Elles vérifient également

$$J_W(k_{j+1}) < J_W(k_j), \quad (4.25)$$

pour tout $j = 0, \dots, i - 1$. Sans critère d'arrêt, nous obtenons donc une séquence de coûts $(J_W(k_i))_i$ strictement décroissante. Résumons maintenant le comportement de β_L . Si la condition à la ligne 16 n'est jamais vérifiée, β_L évolue sur base du même schéma que dans l'Algorithme 1. Dans ce cas, β_L ne diminue jamais au cours des itérations. Par contre, si $\beta_L \geq J_W(k_i)$ lors d'une itération, β_L est remise à zéro lors de cette itération mais ne diminue plus jamais par la suite. La suite des valeurs de β_L est donc croissante à partir d'une certaine itération.

Cette dernière observation combinée avec (4.24) et (4.25) implique que la suite $(J_W(k_i))_i$ et la suite des valeurs de β_L convergent vers la même limite L . Le critère d'arrêt est donc bien vérifié à partir d'un certain moment. Cependant, contrairement à l'Algorithme 1, rien ne garantit que cette limite L corresponde à J_α^* (et donc que l'Algorithme 2 soit globalement convergent selon la Définition 4.2.2). En effet, avec l'Algorithme 1, les inégalités (4.8) et (4.11) étaient vérifiées à la fin de chaque itération de l'algorithme. Il est évident que la seconde reste satisfaite avec l'Algorithme 2 puisque $(k_i)_i \subseteq \mathcal{A}_\alpha$. La première, quant à elle, n'est plus garantie. En effet, puisque la réciproque du Théorème 4.3.1 n'est pas garantie, il est possible que

$$J_\alpha^* \leq \beta_L,$$

même si $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta_L}$ est vide.

Pour conclure cette Section 4.3, l'Algorithme 2 n'est pas forcément globalement convergent selon la Définition 4.2.2 même si la suite $(J_W(k_i))_i$ est convergente. Cependant, comme étudié précédemment, l'Algorithme 2 est tout de même capable de fournir à la sortie, une matrice $k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dont le coût est plus petit que le coût de la matrice $k_0 \in \mathcal{A}_\alpha$ choisie au début de l'algorithme. De plus, le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ à résoudre à chaque itération implique uniquement des LMI, si la contrainte

$$A_\alpha Q + b\mathbb{1}^\top Y \text{ est Metzler,}$$

peut être transformée en une LMI (ce qui, par le Théorème 3.3.6, est le cas de l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2)). Ce sous-problème est donc supporté par la toolbox YALMIP.

4.4 Résolution numérique des sous-problèmes

L'objectif de cette Section 4.4 est de détailler la toolbox YALMIP, qui est l'outil numérique utilisé pour décider si le problème d'optimisation 4.1 et le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha, \beta}$ sont réalisables. Nous verrons également comment utiliser cette toolbox pour calculer des éléments dans les ensembles \mathcal{B}_α et $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha, \beta}$. La plupart des informations présentes dans cette Section 4.4 concernant

YALMIP proviennent du site (LÖFBERG, 2023) et de l'article (LÖFBERG, 2004). De plus, la toolbox peut être installée en suivant le lien : <https://yalmip.github.io/download/>.

YALMIP est implémentée comme une toolbox gratuite pour MATLAB (les lignes de code présentes dans cette Section 4.4 sont d'ailleurs écrites avec le langage de MATLAB et pas en pseudo-code). Elle permet de modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation. Au départ, YALMIP a été développée pour les problèmes d'optimisation semi-définie positive (SDP) mais la version la plus actuelle ne se limite pas à ce type de problèmes. La toolbox peut maintenant traiter de nombreux problèmes d'optimisation convexes mais aussi certains problèmes non convexes. Elle peut également être utilisée pour résoudre des systèmes de contraintes algébriques comme les systèmes de LMI (parmi lesquels figure le système (4.15),(4.16) du problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$).

La modélisation se fait grâce à la commande `sdpvar` qui permet de définir les variables de décision. Ces objets de type `sdpvar` sont les variables symboliques de YALMIP. Par exemple, les variables de décision $(\mu, Y, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n$ du problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ sont obtenues avec les commandes suivantes.

```
Q = sdpvar(n,n,'diagonal');
Y = sdpvar(n,n,'diagonal');
mu = sdpvar(1,1);
```

Pour créer le système à résoudre avec le problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$, il faut définir chaque contraintes et les concaténer. Les symboles d'inégalités `<=` et `>=` de MATLAB sont interprétés en fonction du contexte. Si les deux côtés de l'inégalité sont symétriques, il s'agit d'une inégalité de définie positivité, c'est-à-dire \preceq ou \succeq . Dans le cas contraire, l'inégalité correspond à une inégalité composante par composante. Notons, cependant, que YALMIP n'accepte pas les inégalités strictes car elles n'ont pas de sens dans un logiciel qui fait intervenir des erreurs numériques. Si elles sont tout de même nécessaires, il faut les transformer en inégalités larges avec une marge. Le choix de ces marges est alors crucial. En effet, une marge trop grande enlève des solutions admissibles, alors qu'une marge trop petite peut donner des résultats non admissibles à cause des erreurs numériques. À titre d'exemple, les contraintes (4.15),(4.16) du problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ peuvent être modélisées avec YALMIP grâce aux commandes suivantes, où nous avons utilisé la Définition 1.1.4 des matrices de Metzler (qui donne lieu à une contrainte d'inégalité composante par composante linéaire).

```
1: Ct = [mu >= M1, -mu*sqrt(beta/Wtot)*eye(n) <= Y <= mu*sqrt(beta/Wtot)*eye(n)];
2: Ct = [Ct, A_alpha*Q+Q*A_alpha'+b*ones(1,n)*Y+Y'*ones(n,1)*b' <= -eye(n)*M2];
3: Ct = [Ct, Q >= mu*eye(n)];
4: M = A_alpha*Q+b*ones(1,n)*Y;
5: for i=1:n
6:     for j=1:n
7:         if i~=j
8:             Ct = [Ct, M(i,j)>=0];
9:         end
10:    end
11: end
```

Notons que $M1$ et $-\text{eye}(n)*M2$, où $M1$ est un réel strictement positif et $-\text{eye}(n)*M2$ est définie négative, sont les marges associées aux deux inégalités strictes de $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$. Leur valeur dépend du

problème considéré. De plus, W_{tot} représente la somme des poids, c'est-à-dire

$$W_{tot} := \sum_{l=1}^n w_l.$$

Lorsqu'il est possible de transformer la contrainte

$$A_\alpha Q + b \mathbb{1}^\top Y \text{ est Metzler,}$$

présente dans $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$, en une LMI en fonction des variables de décision μ , Y et Q , les lignes 4 à 11 se résument à une seule ligne de code. Par exemple, pour l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2), elles sont remplacées par la commande suivante, où les variables E et F représentent les matrices données par (3.29).

```
Ct = [Ct, E*Q+F*Y >= 0];
```

De plus, pour ce système LTI (2.11),(2.12), nous avons pris $M1$ et $M2$ valant respectivement 10^{-6} et 10^{-8} . Pour effectuer ce choix, nous avons effectué plusieurs simulations avec des marges de valeurs différentes et nous avons pris les plus petites qui donnent des solution admissibles.

Une fois le problème modélisée, YALMIP le résout en ayant recourt à différents solveurs. Parmi ceux-ci, certains sont internes à la toolbox YALMIP, alors que les solveurs externes sont soit déjà disponibles dans MATLAB, soit il est possible de les installer. Signalons néanmoins que certains sont payants. Lors de la résolution, YALMIP détecte automatiquement le type de problème que l'utilisateur a modélisé et sélectionne un solveur approprié. Si aucun solveur approprié n'est disponible, YALMIP essaie de convertir le problème afin de pouvoir le résoudre. Si cette conversion n'est pas possible, YALMIP précise le(s) solveur(s) manquant(s). Notons que pour résoudre le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$, il est nécessaire d'installer le solveur gratuit MOSEK. Pour plus de détails concernant ce solveur, nous renvoyons le lecteur au site (MOSEK APS, 2023). De plus, il peut être installé en suivant le lien : <https://www.mosek.com/downloads/>. Par ailleurs, la commande YALMIP permettant la résolution de $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ (défini par les contraintes Ct) est la suivante :

```
Sol = optimize(Ct);
```

La variable booléenne `Sol.problem` permet de savoir si YALMIP pense que le problème est réalisable ou non : elle vaut 0 si le problème est réalisable et 1 sinon. S'il est réalisable, les solutions calculées sont obtenues grâce à la commande `value`.

Finalement, en combinant les différentes commandes décrites dans cette Section 4.4 avec l'Algorithme 2, nous obtenons l'Algorithme 3 qui utilise la fonction `ALGOYALMIP` définie par l'Algorithme 4. Notons que l'Algorithme 3 est écrit en pseudo-code, alors que le langage de MATLAB est utilisé pour l'Algorithme 4. De plus, la fonction `ALGOYALMIP` de l'Algorithme 4 peut être utilisée uniquement pour l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Pour un autre système LTI, il faut remplacer la ligne 6, comme expliqué précédemment. La première fois qu'elle est appelée par l'Algorithme 3, la fonction `ALGOYALMIP` de l'Algorithme 4 décide si le problème d'optimisation 4.1 est réalisable (car `init = 1`). Si la réponse est affirmative (c'est-à-dire `real = 1`), elle permet avec la ligne 4 de l'Algorithme 3 de calculer un élément dans l'ensemble \mathcal{B}_α . Les appels suivants permettent de déterminer si un problème de la forme $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ est réalisable (car `init = 0`), et si oui (c'est-à-dire `real = 1`), de calculer un triplet de $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}$. Enfin, dans le Chapitre 2, nous avons vu que les matrices d'asservissement de la forme (2.17),(2.18) sont

positivement stabilisantes pour l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Par conséquent, pour ce système et lorsque $\alpha = 0$, l'Algorithme 3 peut être initialisé avec k_0 donné par (2.17),(2.18) au lieu de recourir aux lignes 1 à 8. Cette alternative à été utilisée pour obtenir les résultats numériques du Chapitre 5 suivant.

Algorithme 3 Méthode de dichotomie avec le sous-problème $\tilde{P}_{\alpha,\beta}$ et YALMIP

Entrée : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler, $b \in \mathbb{R}_+^n$, $W = \text{diag}(w_i)_{i=1}^n > 0$ et $\alpha \geq 0$

Sortie : $J_W(k_i) - \beta_L \leq \epsilon$ et $J_\alpha^* \leq J_W(k_i) < J_W(k_0)$, où $k_0, k_i \in \mathcal{A}_\alpha$ et J_α^* est le coût optimal du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α

```

1: Poser  $[\text{real}, Y, Q] \leftarrow \text{ALGOYALMIP}(n, A_\alpha, b, 1)$ 
2: if  $\text{real} = 1$  then
3:   Poser  $i \leftarrow 0$ 
4:   Poser  $(y_0, Q_0) \leftarrow (\mathbb{1}^\top Y, Q)$ 
5:   Poser  $k_0 \leftarrow y_0 Q_0^{-1}$ 
6: else
7:   return
8: end if
9: Choisir une tolérance  $\epsilon$  pour le critère d'arrêt
10: Poser  $\beta_L \leftarrow 0$ 

11: while  $J_W(k_i) - \beta_L > \epsilon$  do
12:    $\beta \leftarrow \frac{\beta_L + J_W(k_i)}{2}$ 
13:   Poser  $[\text{real}, Y, Q] \leftarrow \text{ALGOYALMIP}(n, A_\alpha, b, 0, W_{tot}, \beta)$ 
14:   if  $\text{real} = 1$  then
15:     Poser  $i \leftarrow i + 1$ 
16:     Poser  $y_i \leftarrow (\mathbb{1}^\top Y, Q)$ 
17:     Poser  $k_i \leftarrow y_i Q_i^{-1}$ 
18:     if  $\beta_L \geq J_W(k_i)$  then
19:       Poser  $\beta_L \leftarrow 0$ 
20:     end if
21:   else if  $\text{real} = 0$  then
22:      $\beta_L \leftarrow \beta$ 
23:   end if
24: end while

```

Algorithme 4 ALGOYALMIP pour le système (2.11),(2.12) lié à la diffusion pure

Entrée : $n > 0$, $A_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ de la forme (2.11),(2.12), $\text{init} = 0$ pour une solution de \mathcal{B}_α , $\text{init} = 1$ pour une solution de $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}$ et $\beta \geq 0$, $\text{Wtot} > 0$ si $\text{init} = 1$

Sortie : si le problème considéré n'est pas réalisable : $\text{real} = 0$ et $\text{Ysol} = \text{Qsol} = \text{Inf}$, si le problème considéré est réalisable : $(\mathbb{1}^\top \text{Ysol}, \text{Qsol}) \in \mathcal{B}_\alpha$ si $\text{init} = 1$ et $(\text{value}(\mu), \text{Ysol}, \text{Qsol}) \in \tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}$ si $\text{init} = 0$

```

1: [real, Ysol, Qsol] = ALGOYALMIP(n, A_alpha, b, init, Wtot, beta)
2:   Q = sdpvar(n, n, 'diagonal');
3:   Y = sdpvar(n, n, 'diagonal');
4:   mu = sdpvar(1, 1);
5:   Ct = A_alpha * Q + Q * A_alpha' + b * ones(1, n) * Y + Y' * ones(n, 1) * b' <= -eye(n) * 1e-8;
6:   Ct = [Ct, E * Q + F * Y >= 0];
7:   if init == 1
8:     Ct = [Ct, Q >= eye(n) * 1e-8];
9:   elseif init == 0
10:    Ct = [mu >= 1e-6, Q >= mu * eye(n)];
11:    Ct = [Ct, -mu * sqrt(beta / Wtot) * eye(n) <= Y <= mu * sqrt(beta / Wtot) * eye(n)];
12:  end
13:  Sol = optimize(Ct);
14:  if Sol.problem == 0
15:    real = 1;
16:    Ysol = value(Q);
17:    Qsol = value(Y);
18:  else
19:    real = 0;
20:    Ysol = Inf;
21:    Qsol = Inf;
22:  end
23: end

```

Chapitre 5

Simulations numériques

Dans ce Chapitre 5, nous effectuons plusieurs simulations numériques des Algorithmes 3 et 4. Ces différents tests numériques sont réalisés sur MATLAB et le système LTI positif à une entrée choisi est l'approximation (2.11),(2.12) du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). En considérant ce système, l'objectif est d'illustrer les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents (voir Section 5.2). Nous réalisons également une étude comparative des itérés calculés par les Algorithmes 3 et 4 pour des marges de stabilité α (voir Section 5.3) et des matrices de poids W (voir Section 5.4) différentes. Ces comparaisons sont basées sur des éléments caractéristiques qui permettent de quantifier la qualité d'un itéré par rapport à son coût, à la vitesse de convergence des trajectoires d'état du système asservi et à la bornitude de la loi d'asservissement associée (voir Section 5.1). Certaines de ces trajectoires d'état et lois d'asservissement sont illustrées graphiquement. Enfin, dans la Section 5.5, nous motivons une analyse de la convergence numérique des itérés calculés par les Algorithmes 3 et 4 lorsque la dimension n tend vers l'infini.

5.1 Données et éléments caractéristiques

En vue de réaliser des simulations numériques des Algorithmes 3 et 4, nous considérons à nouveau le système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2). Rappelons que ce modèle discrétisé est un système LTI positif et instable de la forme (3.1) étudiée. La dynamique est donnée par l'équation

$$\dot{x}^{(n)}(t) = A^{(n)}x^{(n)}(t) + b^{(n)}u(t),$$

où

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} -p_2 & p_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_2 & -2p_2 & p_2 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & p_2 & -2p_2 & p_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_2 & -2p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$b^{(n)} = (p_1 \ 0 \ \cdots \ 0)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$x^{(n)}(\cdot) = (x(z_1, \cdot) \ \cdots \ x(z_n, \cdot))^\top \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$p_1 = \frac{1}{\Delta z} \quad p_2 = \frac{D_a}{\Delta z^2}.$$

De plus, les n points de discrétisation z_i , $i = 1, \dots, n$, sont donnés par

$$\begin{cases} z_{i+1} &= z_i + \Delta z, & i = 1, \dots, n-1 \\ z_0 &= 0, \end{cases}$$

où

$$\Delta z = \frac{L}{(n-1)}.$$

Par ailleurs, toutes les simulations numériques de ce Chapitre 5 ont été réalisées avec $L = 1$, $D_a = 1$ (comme dans le Chapitre 2) et une tolérance $\epsilon = 10^{-8}$. Pour illustrer le comportement des systèmes asservis avec les différentes matrices d'asservissement construites, nous représentons une trajectoire d'état de chacun de ces systèmes en considérant un état initial particulier. Ce dernier correspond à la discrétisation du profil initial du système de diffusion pure (2.1) donné par

$$x_0(z) = 2z^3 - 3z^2 + 1, \quad z \in [0, L]. \quad (5.1)$$

Notons qu'il s'agit de l'un des profils initiaux considérés dans le Chapitre 2. Pour l'analyse du comportement des systèmes asservis considérés dans ce Chapitre 5, l'état initial choisi est donc donné par

$$x_0^{(n)} = (x_0(z_1) \ \cdots \ x_0(z_n))^T \in \mathbb{R}^n, \quad (5.2)$$

où $x_0(\cdot)$ est défini par (5.1). Par ailleurs, nous avons choisi d'utiliser la notation $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ pour désigner le i ème itéré de l'Algorithme 3 obtenu, via MATLAB, en considérant la dimension n , la marge de stabilité α et la matrice de poids W . En particulier, le dernier itéré calculé par l'Algorithme 3 est noté $k_{f,\alpha,W}^{(n)}$.

La qualité de ces matrices d'asservissement $k_{i,\alpha,W}^{(n)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ pour l'approximation du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche, est analysée sur base de plusieurs éléments caractéristiques dont notamment la valeur propre de Frobenius de $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$. Celle-ci est définie grâce au Théorème 5.1.1 qui correspond au Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices de Metzler. Une preuve se trouve notamment dans la référence (ARROW, 1989) ou encore dans (HORN & JOHNSON, 2012).

Théorème 5.1.1. *Soit A une matrice de Metzler. Alors, il existe un nombre réel λ_F et un vecteur réel $v > 0$ tels que $Av = \lambda_F v$, et pour toutes valeurs propres λ de A , $\text{Re}(\lambda) \leq \lambda_F$. La valeur propre λ_F est appelée valeur propre de Frobenius de A .*

Notons que parler de valeur propre de Frobenius pour la matrice $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ sous-entend que cette dernière est de Metzler. Ceci a du sens puisque $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ est construite pour être positivement stabilisante. Les autres éléments caractéristiques analysés pour chaque matrice $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ sont les suivants :

- la valeur E_{min} du plus petit élément de la première ligne de la matrice $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ à laquelle l'élément en position $(1, 1)$ est retiré,
- le coût $J_W(k_{i,\alpha,W}^{(n)})$,
- le minimum u_{min} de la loi d'asservissement $u(\cdot) = k_{i,\alpha,W}^{(n)}x^{(n)}(\cdot)$ associée à l'état initial $x_0^{(n)}$ donné par (5.2),
- le temps $\max(T_s)$ qu'il faut pour que toutes les composantes de l'état (issu de $x_0^{(n)}$) restent plus petite que 10^{-2} (qui est la valeur de référence choisie car elle correspond à 1% de $\max_{i=0,\dots,n} x_0(z_i)$ où $x_0(\cdot)$ est défini par (5.1)),

- le temps $\min(T_s)$ qu'il faut pour que l'une des composantes de l'état (issu de $x_0^{(n)}$) reste plus petite que 10^{-2} ,
- la valeur x_s de la plus grande composante de l'état (issu de $x_0^{(n)}$) à la fin de l'intervalle de temps considéré.

Les éléments E_{min} et λ_F permettent de vérifier si la matrice $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$, obtenue via MATLAB, est bien positivement stabilisante pour le modèle discrétisé étudié. En effet, puisque la matrice $b^{(n)}$ n'a que son premier élément non nul, la matrice $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ ne diffère de $A^{(n)}$ que par sa première ligne. La matrice $A^{(n)}$ étant de Metzler, il suffit donc de vérifier que E_{min} est positif pour vérifier que $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ est une matrice de Metzler. Dès lors, par le Théorème 5.1.1, si la valeur propre de Frobenius λ_F de $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ est strictement négative, toutes les valeurs propres de $A^{(n)} + b^{(n)}k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ ont une partie réelle strictement négative. Par conséquent, si $E_{min} \geq 0$ et $\lambda_F < 0$, alors la matrice $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ est bien positivement stabilisante pour le modèle discrétisé étudié.

La valeur propre réelle λ_F donne également des informations sur la vitesse de convergence des trajectoires d'état $x^{(n)}(\cdot)$ du système asservi avec $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$. En effet, pour rappel, toute trajectoire d'état $x^{(n)}(\cdot)$ issue d'un système stable peut être bornée en tout temps par un terme dont la convergence est dominée par $e^{\lambda_F t}$. Les éléments caractéristiques $\max(T_s)$, $\min(T_s)$ et x_s sont aussi des indicateurs de la vitesse de convergence d'une trajectoire d'état d'un système asservi stable et positif. Plus $\max(T_s)$ est petit et plus les différentes composantes de la trajectoire d'état considérée convergent rapidement vers zéro. Une grande valeur de $\min(T_s)$ indique au contraire que cette convergence est plus lente. La valeur x_s précise quant à elle à quel point la trajectoire d'état est proche de zéro à la fin de l'intervalle de temps considéré.

Enfin, la connaissance de u_{min} est pertinente lorsque l'entrée $u(\cdot)$ ne peut pas être trop grande en valeur absolue car une entrée trop grande n'aurait, par exemple, pas de sens d'un point de vue applicatif (voir Section 3.2). Si l'entrée $u(\cdot)$ doit rester bornée par un réel strictement positif U , alors toutes les matrices d'asservissement positivement stabilisantes $k_{i,\alpha,W}^{(n)}$ telles que

$$|u_{min}| > U,$$

sont à rejeter. Observons que, si $x^{(n)}(0)$ est donné par (5.2), alors

$$\max_{t \geq 0} k_{i,\alpha,W}^{(n)} x^{(n)}(t) < U,$$

puisque U est strictement positif et

$$k_{i,\alpha,W}^{(n)} x^{(n)}(t) \leq 0 \tag{5.3}$$

pour tout $t \geq 0$. Nous ne prouvons pas l'inégalité (5.3) mais nous verrons, dans la suite, que toutes les lois d'asservissement positivement stabilisantes construites pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord sont négatives pour l'état initial $x_0^{(n)}$. Par ailleurs, signalons que l'auteur de la référence (DEHAYE, 2017) montre qu'il n'est pas possible de stabiliser positivement un système LTI positif avec un contrôle $u(\cdot)$ non négatif, c'est-à-dire tel que $u(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. De plus, l'inégalité (5.3) est plutôt intuitive pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche (2.9). En effet, la trajectoire d'état $x^{(n)}(\cdot)$ peut être vue comme une approximation du profil de température $x(\cdot, \cdot)$ d'une tige métallique de longueur L (ici $L = 1$) dont la température est contrôlée via l'extrémité gauche. Ainsi, supposons que, au départ,

la température de la tige métallique soit donnée par (5.1) et que l'objectif est de l'amener à zéro en tout point. Puisque le profil initial $x_0(\cdot)$ est positif sur $[0, 1]$, l'objectif est donc de refroidir le tige métallique via l'extrémité gauche. Pour cela, nous avons vu dans la Section 2.2 qu'il fallait appliquer un contrôle $v(\cdot)$ positif dans les conditions au bord de Neumann (2.8). Or, pour rappel, le contrôle $u(\cdot)$ du modèle discrétisé est telle que $u(t) = -v(t)$, pour tout $t \geq 0$. Lorsque le profil initial est donné par (5.1), il faut donc un contrôle $u(\cdot)$ négatif pour refroidir le tige métallique via l'extrémité gauche.

5.2 Comparaison entre l'itéré final et l'itéré initial

Les premières simulations numériques sont réalisées avec un paramètre $\alpha = 0$. Cela signifie qu'aucune marge de stabilité n'est imposée dans les Algorithmes 3 et 4. L'objectif de cette Section 5.2 est de comparer la matrice d'asservissement initiale $k_{0,0,W}^{(n)}$ avec la matrice d'asservissement finale $k_{f,0,W}^{(n)}$. Cette comparaison est effectuée au moyen des éléments caractéristiques introduits dans la Section 5.1. De plus, pour ces premières simulations, nous avons considéré $n = 11$ et $W = I \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$, ce qui signifie qu'aucune composante de la variable $k \in \mathbb{R}^{1 \times 11}$ n'est pénalisée.

La matrice d'asservissement initiale $k_{0,0,I}^{(11)}$ correspond à la forme (2.17),(2.18), où nous avons choisi $\kappa = 1$. Nous savons déjà que cette matrice est positivement stabilisante pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche (voir Section 2.2). La trajectoire d'état de ce modèle asservi avec $k_{0,0,I}^{(11)}$ et issue de $x_0^{(n)}$ est tracée sur la Figure 2.5. La Figure 5.1 représente, quant à elle, la loi d'asservissement associée à $k_{0,0,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$. Celle-ci est bien négative et $u_{min} = -10$. Le coût de $k_{0,0,I}^{(11)}$ vaut 100.

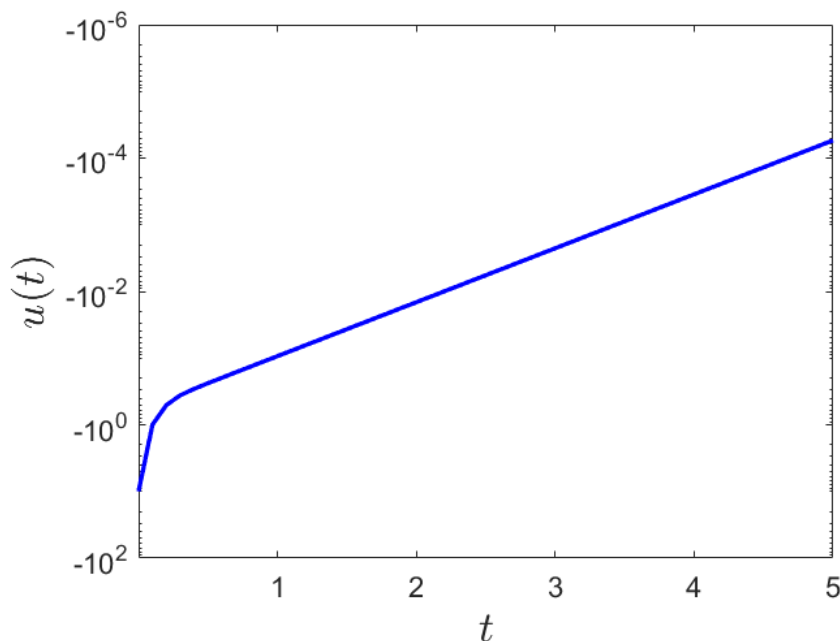


FIGURE 5.1 – Loi d'asservissement associée à $k_{0,0,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

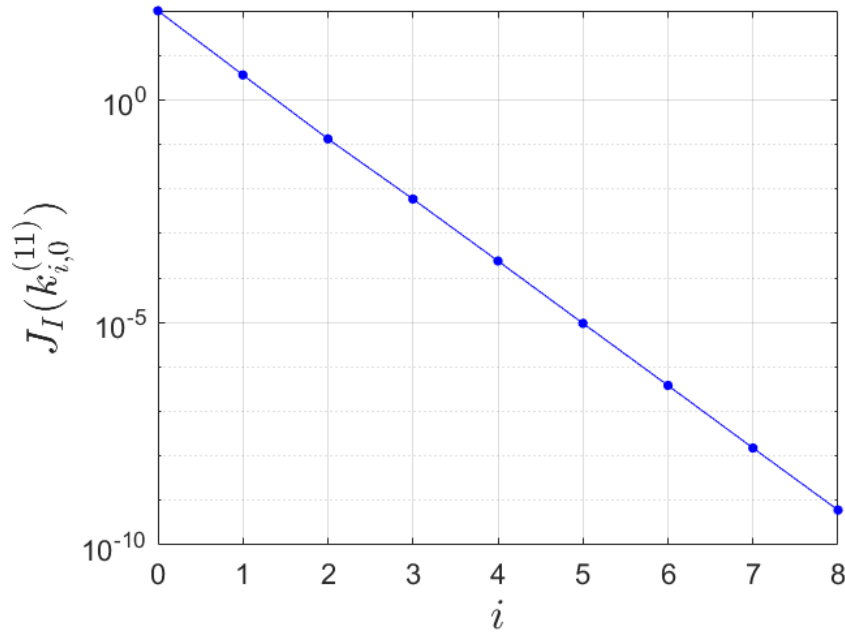


FIGURE 5.2 – Évolution du coût des itérés $k_{i,0}^{(11)}$ obtenus avec les Algorithmes 3 et 4

Pour essayer d'obtenir une matrice d'asservissement positivement stabilisante dont le coût est plus faible que $J_I(k_{0,0,I}^{(11)})$, nous utilisons MATLAB et les Algorithmes 3 et 4 avec $\alpha = 0$. Cette procédure numérique mène à une séquence de neuf itérés dont les coûts, représentés sur la Figure 5.2, diminuent bien à chaque itération i . La dernière matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$ calculée est donnée par

$$k_{f,0,I}^{(11)} = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} -17.93 \\ -14.31 \\ 3.114 \\ 3.176 \\ 3.132 \\ 3.093 \\ 3.045 \\ 2.998 \\ 2.954 \\ 2.922 \\ 2.896 \end{pmatrix},$$

et son coût $J_I(k_{f,0,I}^{(11)}) = 6.092 \times 10^{-10}$. La matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$ a donc un coût plus petit que celui de $k_{0,0,I}^{(11)}$, ce qui est l'objectif recherché avec les Algorithmes 3 et 4. Ce coût est même très proche de zéro, qui correspond au minimum de la fonction de coût J_I . La matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$ est également positivement stabilisante puisque $\lambda_F = -4.469 \times 10^{-06} < 0$ et $E_{min} = 2.896 \times 10^{-05} \geq 0$. De plus, la loi d'asservissement associée à $k_{f,0,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$, qui est représentée sur la Figure 5.3, est bornée en tout temps t par $|u_{min}| = 2.088 \times 10^{-5}$. Cette valeur signifie qu'il est possible d'atteindre asymptotiquement zéro en partant de l'état initial $x_0^{(n)}$, et ce, en appliquant un contrôle très petit en tout temps. D'un point de vue du coût et de u_{min} , la matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$ est donc meilleure que $k_{0,0,I}^{(11)}$.

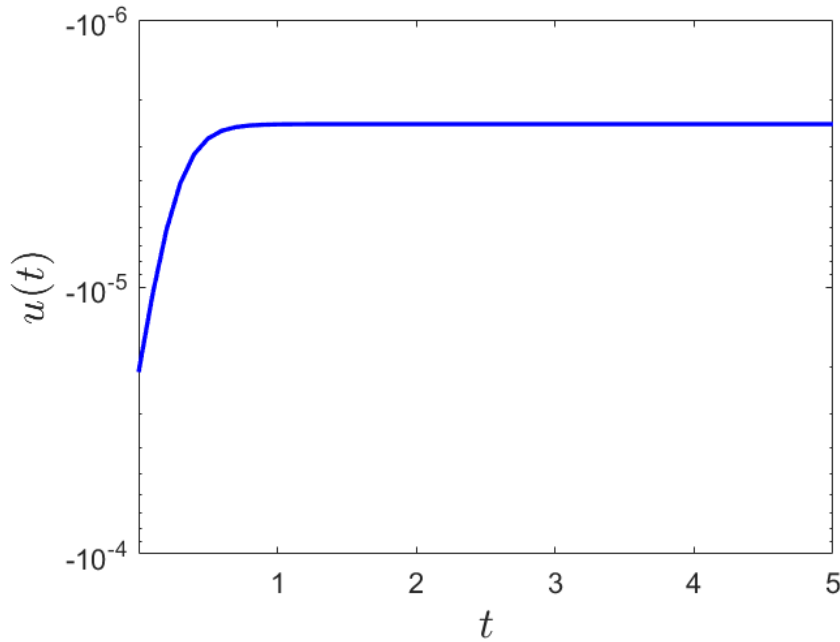


FIGURE 5.3 – Loi d’asservissement associée à $k_{f,0,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

Cependant, la valeur propre de Frobenius de $A^{(11)} + b^{(11)}k_{f,0,I}^{(11)}$ est strictement négative mais presque égale à zéro alors que pour $k_{0,0,I}^{(11)}$, nous trouvons $\lambda_F = -1.863$. Ces résultats numériques signifient que la matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$ est moins performante que $k_{0,0,I}^{(11)}$ en terme de vitesse de convergence. Plus précisément, les trajectoires d’état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ convergent moins vite vers zéro que les trajectoires d’état du système asservi avec $k_{0,0,I}^{(11)}$. Cette différence de vitesse de convergence peut être illustrée en considérant les différentes composantes de la trajectoire d’état du système asservi et issue de l’état initial $x_0^{(11)}$. Avec $k_{0,0,I}^{(11)}$, celles-ci mettent entre 0.97 et 2.04 secondes pour rester inférieures à 10^{-2} et après 5 secondes, elles sont toutes inférieures ou égales à 3.976×10^{-5} . Par contre, l’état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ vaut toujours 0.5 après 5 secondes. À la lumière de la Figure 5.4, qui représente la trajectoire d’état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$, et de la valeur propre de Frobenius, nous pouvons également nous attendre à ce que $\max(T_s)$ et $\min(T_s)$ soient très grands, et donc que cette trajectoire d’état converge lentement vers zéro.

Par ailleurs, notons que la trajectoire d’état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ (représentée graphiquement sur la Figure 5.4) ressemble à la trajectoire d’état du système en boucle ouverte (Figure 2.2). Cette observation est confirmée par la Figure 5.5 qui représente l’évolution au cours du temps de l’écart moyen E entre les différentes composantes de la trajectoire d’état $x_1^{(11)}$ du système asservi par $k_{f,0,I}^{(11)}$ et celles de la trajectoire d’état $x_2^{(11)}$ du système en boucle ouverte, c’est-à-dire

$$E(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(x_{1,j}^{(11)}(t) - x_{2,j}^{(11)}(t) \right)^2, \quad t \geq 0.$$

Le fait que $E(\cdot)$ soit majoré par une valeur de l’ordre de 10^{-6} pendant les 1000 premières secondes signifie que, à court terme, la loi d’asservissement associée à $k_{f,0,I}^{(11)}$ a une faible influence

sur le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche. Cependant, puisque $k_{f,0,I}^{(11)}$ est tout de même positivement stabilisante alors que le système en boucle ouverte est instable, l'écart E augmente au cours du temps (mais se stabilise asymptotiquement).

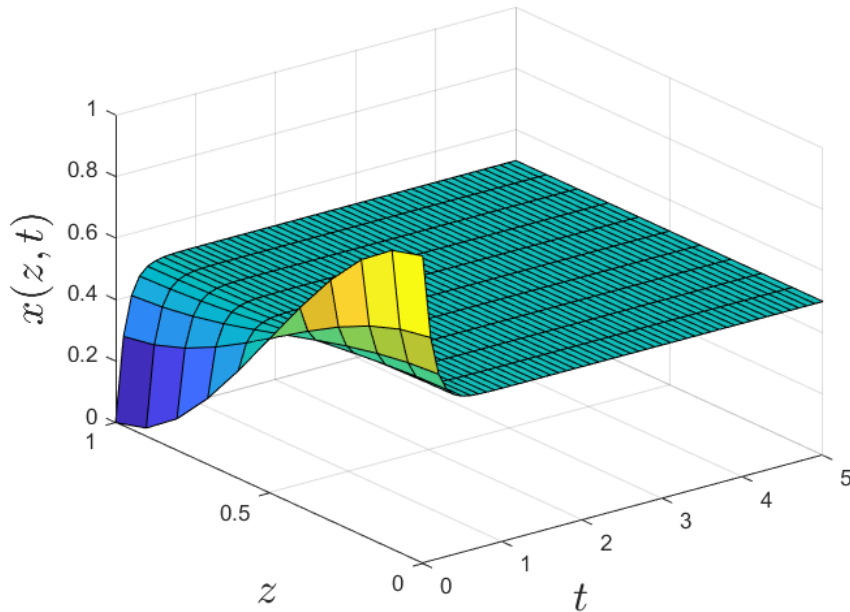


FIGURE 5.4 – Trajectoire d'état associée à $k_{f,0,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

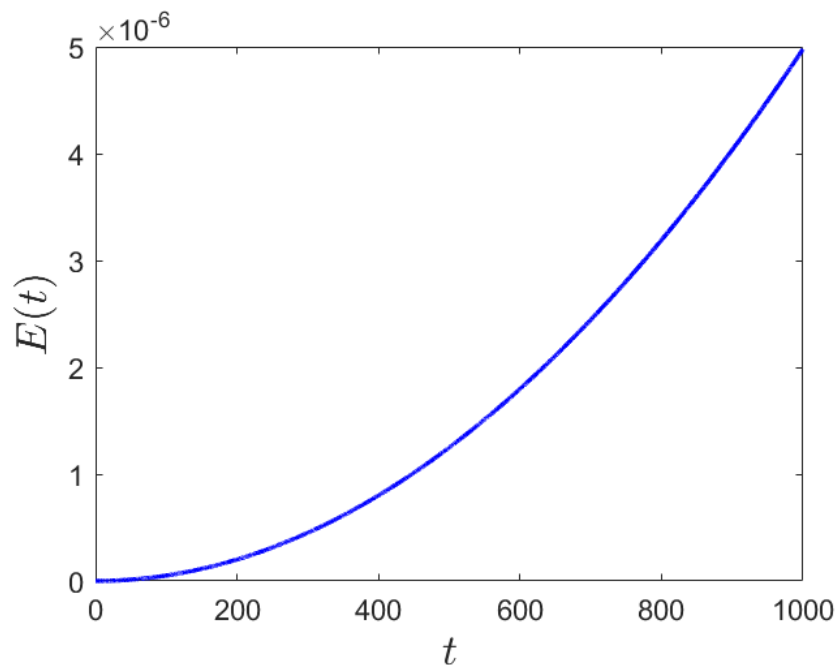


FIGURE 5.5 – Évolution au cours du temps de l'écart moyen E entre les différentes composantes de la trajectoire d'état du système asservi par $k_{f,0,I}^{(11)}$ et celles de la trajectoire d'état du système en boucle ouverte

Pour une meilleure clarté dans la comparaison entre les matrices $k_{0,0,I}^{(11)}$ et $k_{f,0,I}^{(11)}$, la Table 5.1 reprend les différents éléments caractéristiques donnés dans la Section 5.2 pour ces deux matrices. Le symbole ∞ pour les valeurs $\max(T_s)$ et $\min(T_s)$ de $k_{f,0,I}^{(11)}$ correspond au fait que la trajectoire d'état du système asservi associé (et issue de $x_0^{(n)}$) converge lentement vers zéro. Notons également que, dans cette Section 5.2, l'intervalle de temps considéré pour représenté graphiquement les trajectoires et les lois d'asservissement étudiées est l'intervalle $[0, 5]$. Par conséquent, x_s est la plus grande composante de l'état $x^{(n)}$ (5). Enfin, pour résumer cette Section 5.2, rappelons que les matrices $k_{0,0,I}^{(11)}$ et $k_{f,0,I}^{(11)}$ sont bien positivement stabilisantes pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord. De plus, la matrice $k_{f,0,I}^{(11)}$, obtenue à la fin de la simulation, a un meilleur coût que la matrice initiale $k_{0,0,I}^{(11)}$ mais les trajectoires d'état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ convergent beaucoup moins rapidement que avec $k_{0,0,I}^{(11)}$.

	$k_{0,0,I}^{(11)}$	$k_{f,0,I}^{(11)}$
λ_F	-1.863	-4.469×10^{-6}
E_{min}	0	2.896×10^{-5}
$J_I(k_{i,0}^{(11)})$	100	6.092×10^{-10}
u_{min}	-10	-2.088×10^{-5}
$\max(T_s)$	2.04	∞
$\min(T_s)$	0.97	∞
x_s	3.976×10^{-5}	0.5

TABLE 5.1 – Éléments caractéristiques associés à $k_{0,0,I}^{(11)}$ et $k_{f,0,I}^{(11)}$

5.3 Étude sur les marges de stabilité

Dans la Section 5.2 précédente, nous venons de voir que, lorsqu'aucune marge de stabilité n'est imposée aux Algorithmes 3 et 4, la dernière matrice d'asservissement positivement stabilisante calculée $k_{f,0,I}^{(11)}$ (dans le cas où $n = 11$) a un très bon coût J_I mais les trajectoires d'état associées convergent lentement vers zéro. L'objectif de cette Section 5.3 est de comparer la performance de $k_{f,0,I}^{(11)}$ avec celles des matrices fournies par les Algorithmes 3 et 4 lorsqu'une marge de stabilité α est imposée. Nous gardons donc $n = 11$ et $W = I$. Par ailleurs, les simulations de cette Section 5.3 ont été effectuées avec $\alpha = 0.9$ et $\alpha = 1.5$. D'autres marges de stabilité peuvent être choisie mais, pour rappel, si l'Algorithme 3 pense que l'ensemble \mathcal{B}_{α} est vide (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de matrice d'asservissement positivement α -stabilisante), l'arrêt est forcé au moment de l'initialisation. Cette situation a été rencontrée sur MATLAB avec $\alpha = 2.3$.

Les derniers itérés calculés par les Algorithmes 3 et 4 avec les marges de stabilité $\alpha = 0.9$ et

$\alpha = 1.5$ sont respectivement donnés par

$$k_{f,0.9,I}^{(11)} = 10^{-4} \times \begin{pmatrix} -7137 \\ -7131 \\ 2.474 \\ 2.246 \\ 2.079 \\ 1.954 \\ 1.862 \\ 1.794 \\ 1.748 \\ 1.719 \\ 1.707 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad k_{f,1.5,I}^{(11)} = 10^{-2} \times \begin{pmatrix} -252.9 \\ -249.2 \\ 8.031 \\ 6.701 \\ 5.822 \\ 5.175 \\ 4.719 \\ 4.402 \\ 4.198 \\ 4.022 \\ 3.962 \end{pmatrix},$$

et leurs éléments caractéristiques sont repris dans la Table 5.2. Pour faciliter la comparaison avec $k_{f,0,I}^{(11)}$, les données de celle-ci ont également été répétées dans la Table 5.2.

	$k_{f,0,I}^{(11)}$	$k_{f,0.9,I}^{(11)}$	$k_{f,1.5,I}^{(11)}$
λ_F	-4.469×10^{-6}	-0.9063	-1.558
E_{min}	2.896×10^{-5}	1.707×10^{-3}	0.3962
$J_I(k_{f,\alpha,I}^{(11)})$	6.092×10^{-10}	1.018	12.63
u_{min}	-2.088×10^{-5}	-1.406	-4.732
$\max(T_s)$	∞	4.35	2.46
$\min(T_s)$	∞	3.67	1.59
x_s	0.5	5.522×10^{-3}	1.902×10^{-4}

TABLE 5.2 – Éléments caractéristiques associés à $k_{f,0,I}^{(11)}$, $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $k_{f,1.5,I}^{(11)}$

Commençons par observer que les matrices $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ sont bien positivement stabilisantes puisqu'elles sont associées à des éléments E_{min} positifs et chaque valeur propre de Frobenius λ_F est strictement négative. Comme $\lambda_F < -\alpha$, elles sont même positivement α -stabilisantes, ce qui était l'objectif souhaité en imposant une marge de stabilité.

Par ailleurs, plus α augmente et plus λ_F (<0) diminue dans la Table 5.2. Par conséquent, les trajectoires d'état du système asservi avec $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ convergent vers zéro plus rapidement que les trajectoires d'état du système asservi avec $k_{f,0.9,I}^{(11)}$, qui elles-mêmes convergent plus rapidement que celles obtenues avec $k_{f,0,I}^{(11)}$. Ce phénomène est illustré en considérant à nouveau l'état initial $x_0^{(n)}$ défini par (5.2). Selon la Table 5.2, les composantes de la trajectoire d'état du système asservi avec $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ mettent moins de temps pour rester inférieures à 10^{-2} que les composantes de la trajectoire d'état obtenue avec $k_{f,0.9,I}^{(11)}$. Notons que ces deux trajectoires d'état sont illustrées graphiquement par les Figures 5.6 et 5.7, respectivement. De plus, celles-ci atteignent 10^{-2} plus rapidement que les composantes de la trajectoire d'état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ qui, pour rappel, convergent très lentement vers zéro. Observons également que, après 5 secondes, toutes les composantes de l'état du système asservi avec $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ ou avec $k_{f,0.9,I}^{(11)}$, sont proches de zéro

(respectivement au plus de l'ordre 10^{-3} et 10^{-4}), alors que l'une des composantes de l'état du système asservi avec $k_{f,0,I}^{(11)}$ vaut toujours 0.5.

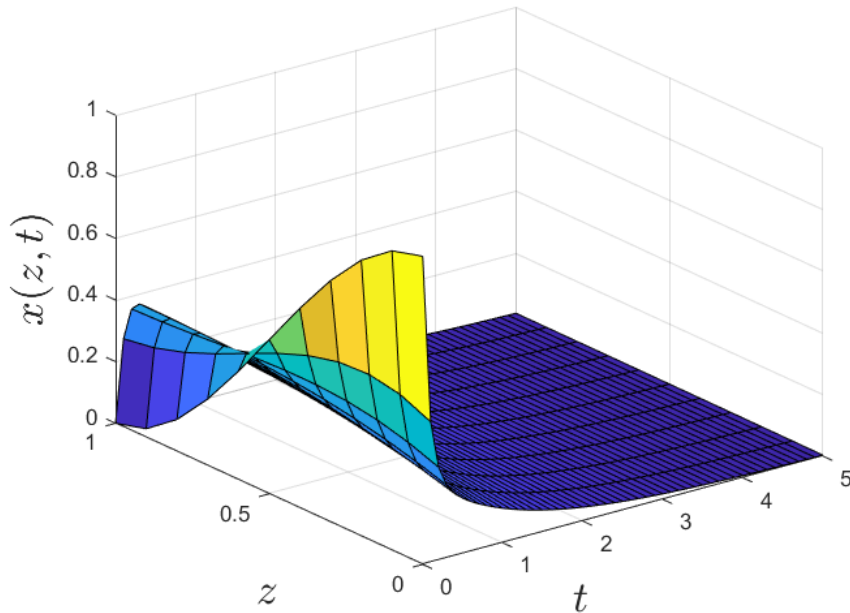


FIGURE 5.6 – Trajectoire d'état associée à $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

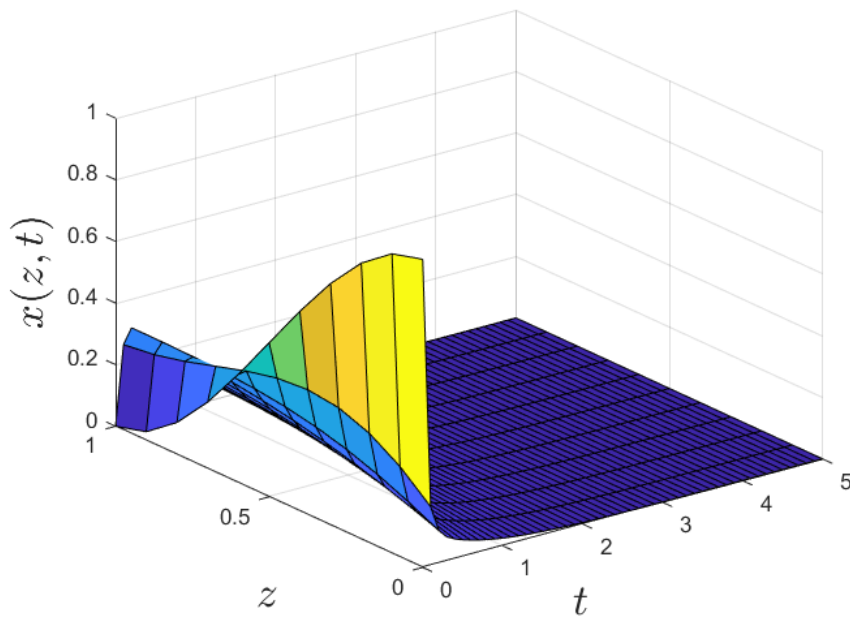


FIGURE 5.7 – Trajectoire d'état associée à $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

Par contre, plus α augmente et plus la matrice finale fournie par les Algorithmes 3 et 4 a un coût élevé. Cette tendance s'explique par le fait que $J_I(k_{f,0,I}^{(11)})$, $J_I(k_{f,0.9,I}^{(11)})$ et $J_I(k_{f,1.5,I}^{(11)})$ sont construits pour être des approximations de J_0^* , $J_{0.9}^*$ et $J_{1.5}^*$, respectivement. Or, pour rappel,

$$J_0^* \leq J_{0.9}^* \leq J_{1.5}^*,$$

puisque

$$\mathcal{A}_{1.5} \subseteq \mathcal{A}_{0.9} \subseteq \mathcal{A}_0.$$

Les coûts associés à $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ restent tout de même de l'ordre de l'unité (pour $\alpha = 0.9$) ou de la dizaine (pour $\alpha = 1.5$). Ils sont donc inférieurs à celui obtenu avec la paramétrisation (2.17),(2.18) du Chapitre 2 (pour rappel, $J_I(k_{0,0,I}^{(11)}) = 100$).

Tout comme le coût, la borne inférieure u_{min} de la loi d'asservissement associée à la condition initiale $x_0^{(n)}$ augmente en valeur absolue avec la marge de stabilité α considérée. Néanmoins, les valeurs de $|u_{min}|$ obtenues à la fin des deux nouvelles simulations (avec $\alpha = 0.9$ et $\alpha = 1.5$) sont à nouveau inférieures à celle associée à la paramétrisation (2.17),(2.18) du Chapitre 2. Par ailleurs, les Figures 5.8 et 5.9, qui représentent les lois d'asservissement issues de $x_0^{(n)}$ et respectivement dues à $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $k_{f,1.5,I}^{(11)}$, montrent que le minimum est atteint en $t = 0$ (comme les lois d'asservissement liées à $k_{f,0,I}^{(11)}$ et $k_{0,0,I}^{(11)}$). Choisir les matrices d'asservissement positivement stabilisantes $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ ou $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ signifie donc que le contrôle appliqué au départ est plus petit que celui associé à $k_{0,0,I}^{(11)}$ mais plus grand que la loi d'asservissement obtenue avec $k_{f,0,I}^{(11)}$.

Pour résumer cette Section 5.3, en considérant une marge de stabilité α , le dernier itéré calculé par les Algorithmes 3 et 4 via MATLAB est bien une matrice d'asservissement positivement stabilisante pour le paramètre α (si α n'est pas trop grand). De plus, avec les marges de stabilité considérées, nous avons pu constater que les Algorithmes 3 et 4 sont capables de fournir des

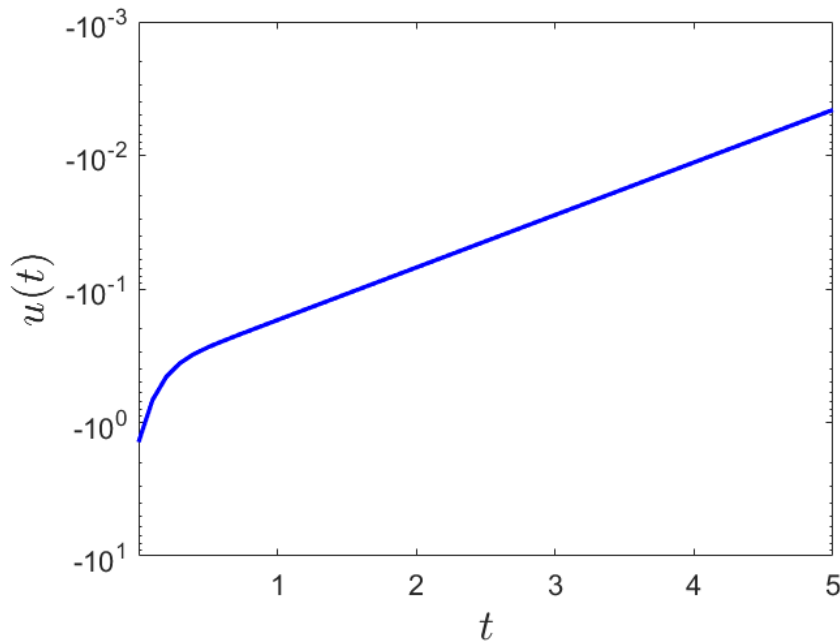


FIGURE 5.8 – Loi d'asservissement associée à $k_{f,0.9,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

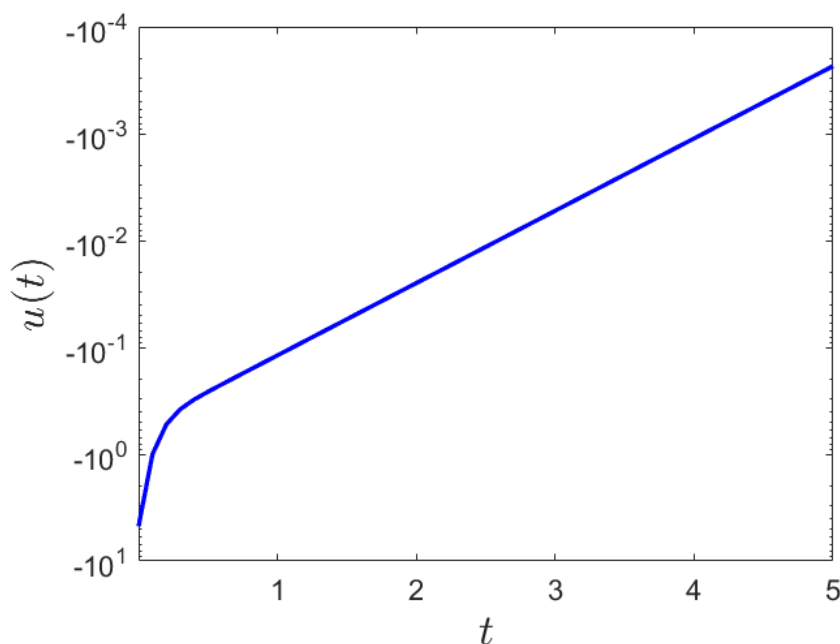


FIGURE 5.9 – Loi d’asservissement associée à $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ et $x_0^{(n)}$

matrices d’asservissement positivement stabilisantes ayant un coût raisonnable (par rapport à la paramétrisation $k_{0,0,I}^{(11)}$ présentée dans le Chapitre 2, par exemple) et produisant des trajectoires ayant la vitesse de convergence souhaitée. Cependant, en augmentant α pour garantir une meilleure vitesse de convergence, les Algorithmes 3 et 4 donnent une matrice d’asservissement dont le coût est plus grand que celui de la matrice obtenue avec le premier α considéré. La borne inférieure u_{min} de la loi d’asservissement associée est également plus grande en valeur absolue. Par conséquent, si avec une marge de stabilité α fixée, la loi d’asservissement fournie à la fin de l’Algorithme 3 n’a pas de sens d’un point de vue applicatif (car elle est dépassée les bornes admises), il faut diminuer α .

5.4 Étude sur les matrices de poids

Les différents résultats présentés jusqu’à présent ont été obtenus avec une matrice de poids $W = I$. Cependant, observons que chaque matrice d’asservissement $k_{f,\alpha,I}^{(11)}$ étudiée à ses deux premières composantes négatives alors que les autres composantes sont positives. Il y a également une différence dans l’ordre de grandeur entre les deux premières composantes et les suivantes. L’objectif dans cette Section 5.4 est de comparer les itérés finaux obtenus numériquement avec la matrice de poids $W_1 := I$ et ceux obtenus en prenant des matrices de poids $W_2, W_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, données respectivement par

$$W_2 := \begin{pmatrix} 100 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 100 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } W_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 100 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

La matrice W_2 permet donc de pénaliser les deux premières composantes de la variable k par rapport aux suivantes. Avec la matrice W_3 , nous pénalisons plutôt les composantes 3 à n . Pour cette étude, nous gardons $n = 11$. De plus, nous considérons les itérés finaux $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ des Algorithmes 3 et 4 pour les trois matrices de poids I , W_2 et W_3 et pour les marges de stabilité $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$. En calculant leurs éléments caractéristiques associés E_{min} et λ_F , il est possible de vérifier que les matrices $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ ainsi obtenues sont bien positivement stabilisantes pour le paramètre α considéré.

La Figure 5.10 illustre graphiquement les valeurs propres de Frobenius λ_F des matrices $A^{(11)} + b^{(11)}k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ considérées en fonction de la marge de stabilité imposée α . Remarquons que pour chacune des trois matrices de poids, λ_F (< 0) diminue lorsque α augmente, ce qui rejoint l'observation faite dans la Section 5.3 précédente pour $W = I$. De plus, à chaque α fixé, la plus petite valeur propre de Frobenius est soit celle de $A^{(11)} + b^{(11)}k_{f,\alpha,I}^{(11)}$, soit celle de $A^{(11)} + b^{(11)}k_{f,\alpha,W_3}^{(11)}$. Par conséquent, pour chaque marge de stabilité α fixée, les trajectoires d'état convergent plus vite vers zéro, soit lorsque le système est asservi avec $k_{f,\alpha,I}^{(11)}$, soit lorsqu'il est asservi avec $k_{f,\alpha,W_3}^{(11)}$.

La Figure 5.11 illustre, quant à elle, les bornes inférieures des lois d'asservissement associées à l'état initial $x_0^{(11)}$ et aux matrices $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ obtenues avec les paramètres α et W considérés. Notons que u_{min} s'éloigne de zéro lorsque α augmente, et ce, avec les trois matrices de poids I , W_2 et W_3 . Par ailleurs, si nous fixons une marge de stabilité parmi celles considérées, la Figure 5.11 informe qu'il est souvent préférable de choisir la matrice W_2 lorsque l'objectif est d'obtenir une loi d'asservissement positivement stabilisante (issue de $x_0^{(11)}$) qui est le plus possible minorée. En fait, selon cet objectif, les matrices de poids I et W_3 sont (légèrement) meilleures uniquement lorsque α vaut respectivement 0.3 et 0.7.

Finalement, la Figure 5.12 reprend les éléments caractéristiques λ_F et u_{min} sur un même

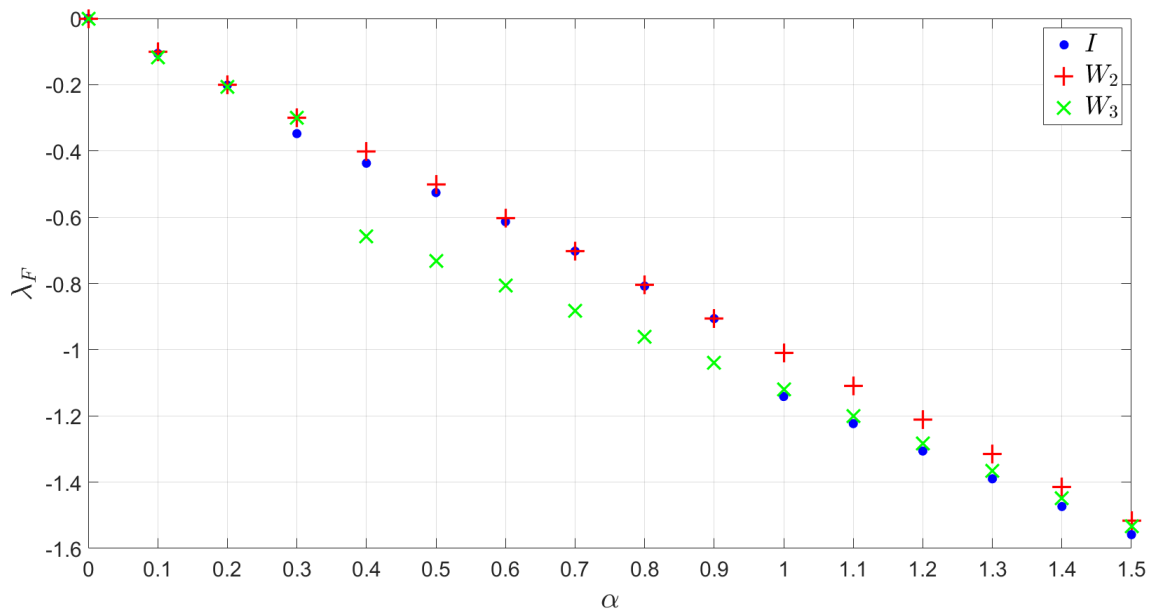


FIGURE 5.10 – Valeurs propres de Frobenius λ_F de $A^{(11)} + b^{(11)}k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ ($W = I, W_2, W_3$ et $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$)

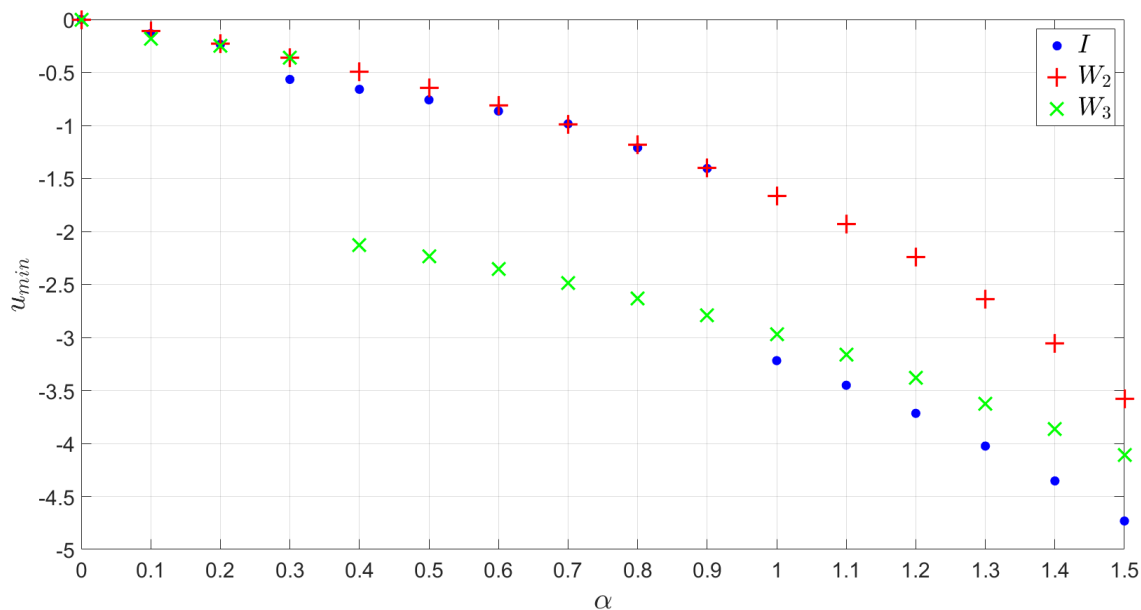


FIGURE 5.11 – Bornes inférieures u_{min} des lois d’asservissement associées à l’état initial $x_0^{(11)}$ et à $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ ($W = I, W_2, W_3$ et $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$)

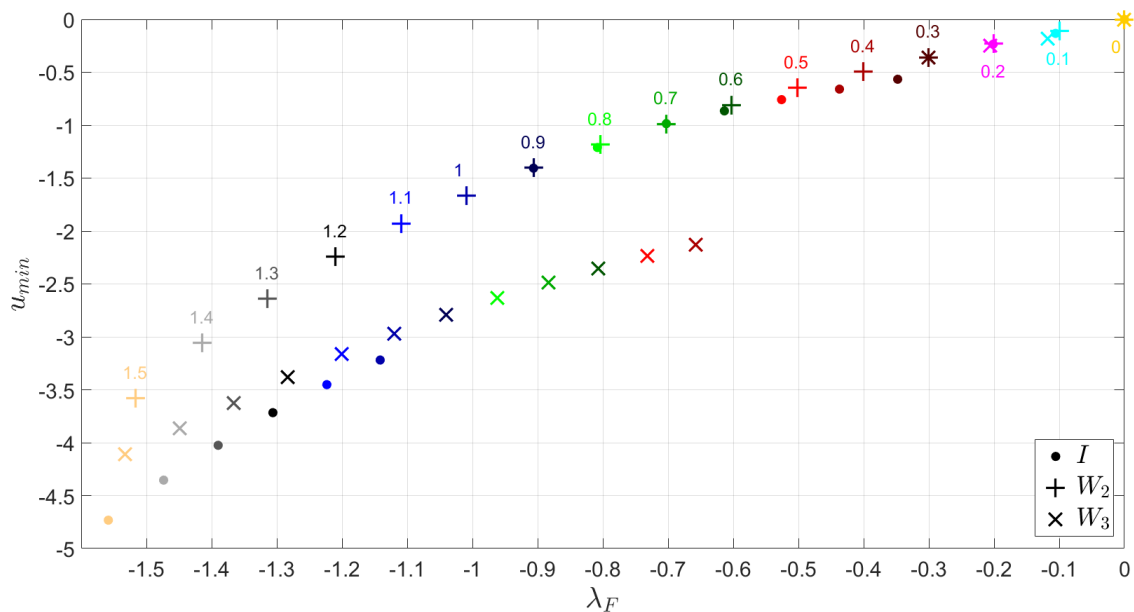


FIGURE 5.12 – Éléments caractéristiques u_{min} et λ_F associés à $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ ($W = I, W_2, W_3$ et $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$)

graphe. Chaque couple (λ_F, u_{min}) correspond à une marge de stabilité α (indiquée par le code de couleurs) et une matrice de poids W (indiquée par le code de formes) différentes parmi celles étudiées. La Figure 5.12 permet ainsi de savoir quelle matrice de poids et quelle marge de stabilité choisir pour obtenir la matrice d’asservissement positivement stabilisante qui remplit le mieux les objectifs souhaités parmi les matrices $k_{f,\alpha,W}^{(11)}$ considérées. Par exemple, la matrice $k_{f,1.2,W_2}^{(11)}$ est la

meilleure si l'objectif est de stabiliser, le plus vite possible, le système à partir de l'état $x_0^{(11)}$ tout en ayant une loi d'asservissement minorée par -2.5 . Par contre, la trajectoire d'état du système asservi avec $k_{f,1.5,I}^{(11)}$ (et issue de $x_0^{(n)}$) est celle qui converge le plus rapidement vers zéro parmi les trajectoires obtenues avec l'une des marges de stabilité ($\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$) et l'une des matrices de poids ($W = I, W_2, W_3$) étudiées.

5.5 Discussion sur la convergence numérique

Lorsque la dimension n est fixée, les Algorithmes 3 et 4 permettent de trouver une matrice d'asservissement positivement α -stabilisante $k_{f,\alpha,W}^{(n)}$ pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche. De plus, le coût $J_W(k_{f,\alpha,W}^{(n)})$ approxime le coût optimal J_α^* . Dès lors, puisque le système étudié est une discrétisation du système de diffusion pure (2.1) avec un contrôle en $z = 0$ dans les conditions au bord de Neumann (2.2), il est naturel de vouloir vérifier que $k_{f,\alpha,W}^{(n)}$ converge vers un opérateur k positivement stabilisant pour le système (2.1),(2.2), lorsque n tend vers l'infini (c'est-à-dire lorsque Δz tend vers zéro). S'il y a convergence, l'opérateur limite k est éventuellement optimal parmi les feedbacks positivement stabilisants du système (2.1),(2.2) (selon des objectifs souhaités).

Dans le cadre de ce mémoire, ces différentes hypothèses ne sont pas vérifiées théoriquement. Cependant, pour motiver ces perspectives, nous présentons les résultats issus de simulations numériques effectuées avec une dimension n de plus en plus grande. La marge de stabilité et la matrice de poids choisies sont respectivement données par $\alpha = 0.9$ et $W = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La Figure 5.13 représente les composantes de $k_{f,0.9,I}^{(n)}$ pour plusieurs dimensions n comprises entre 2 et 1000 (pour une dimension n quelconque, les composantes $n + 1, n + 2, \dots, n$ n'existent pas). Observons que les deux premières composantes, notées k_1 et k_2 sur la Figure 5.13, sont négatives pour toutes les dimensions n testées. De plus, elles semblent se stabiliser autour de -0.7 . Les

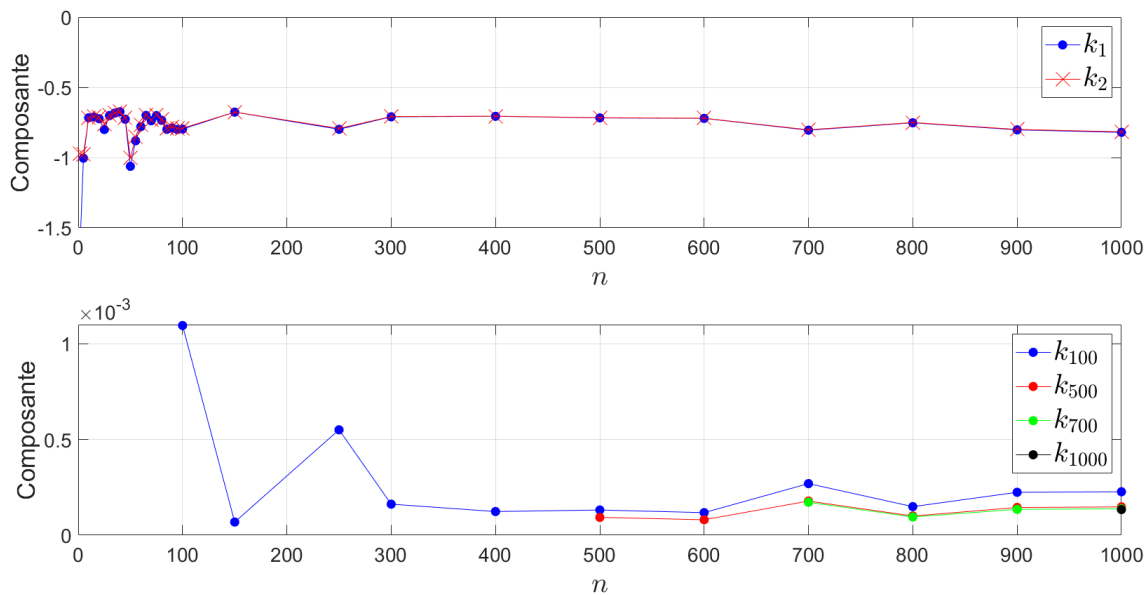


FIGURE 5.13 – Représentation de certaines composantes (1,2,100,500,7000 et 1000) de $k_{f,0.9,I}^{(n)}$ pour plusieurs dimensions n

autres composantes sont positives et convergent vers l'ordre 10^{-4} (la Figure 5.13 ne montre que les composantes 100, 500, 700 et 1000 mais le résultat est similaire pour les autres composantes testées suffisamment grandes). La Figure 5.13 suggèrent donc une convergence numérique de $k_{f,0.9,I}^{(n)}$ lorsque n tend vers l'infini. Cette hypothèse peut éventuellement être vérifiée en effectuant une étude du schéma numérique proposé avec les Algorithmes 3 et 4.

Conclusion

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons répertoriés plusieurs résultats importants qui décrivent les systèmes LTI positifs et le problème de stabilisation positive. Ce dernier consiste à trouver une loi d'asservissement tel que le système en boucle fermée résultant est positif et stable. Nous avons vu que la propriété de positivité pouvait être caractérisée par les matrices qui décrivent la dynamique. Il existe également une caractérisation algébrique pour la stabilité des systèmes LTI positifs. Ces deux résultats ont mené l'auteur de (DEHAYE, 2017) à détailler une méthode permettant de paramétriser toutes les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour les systèmes LTI positifs à une entrée, dans lesquels l'entrée n'agit que dans la première composante du champs de vitesse. Dans ce mémoire, nous avons prolongé ce résultat pour les systèmes à deux entrées. Plus précisément, nous avons fourni une paramétrisation des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour les systèmes LTI positifs à deux entrées. Ces entrées agissent dans la première et la dernière composante du champs de vitesse.

Nous avons ensuite étudié le système de diffusion pure avec trois contrôles différents dans les conditions au bord de Neumann. Tout d'abord, lorsque le système présente un contrôle dans les conditions au bord en $z = 0$, nous avons vu comment le réécrire pour que le contrôle agisse dans la dynamique. L'équation résultante a ensuite été discrétisée grâce à la méthode des lignes. Nous avons alors utilisé la première paramétrisation étudiée pour obtenir toutes les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour le modèle discrétisé, qui est positif et instable. Le deuxième contrôle considéré agit également dans les conditions au bord mais en $z = L$. Nous avons montré que cette configuration pouvait se ramener au cas du système contrôlé en $z = 0$, grâce à un simple changement de variables. Le dernier contrôle étudié consistait à combiner les deux précédents et ainsi étudier le système de diffusion pure dans lequel un contrôle agit des deux côtés du domaine spatial. Pour celui-ci, l'objectif était de combiner une procédure similaire à celle qui a permis de construire le premier modèle discrétisé avec la seconde paramétrisation obtenue précédemment afin de fournir une paramétrisation de toutes les lois d'asservissement positivement stabilisantes pour l'approximation du système de diffusion pure contrôlé des deux côtés. Dans cette partie, plusieurs simulations numériques ont été effectuées pour illustrer des trajectoires d'état des systèmes en boucle fermée obtenus grâce aux résultats théoriques développés.

Puisque pour certains systèmes, comme ceux étudiés dans le second chapitre de ce mémoire, il existe une infinité de lois d'asservissement positivement stabilisantes, nous nous sommes intéressés à un problème que nous avons appelé problème de stabilisation positive optimale. Celui-ci consiste à déterminer une loi d'asservissement positivement stabilisante qui est optimale selon des objectifs fixés. Par ailleurs, ce problème a été étudié pour les systèmes LTI positifs à une entrée, dans lesquels l'entrée n'agit que dans la première composante du champs de vitesse. Nous avons fait le choix d'un critère d'optimalité qui ne dépend que des matrices d'asservissement. Dès lors, grâce à la définition de la stabilisation positive, nous avons pu poser formellement le problème de

stabilisation positive optimale considéré, qui est un problème d'optimisation classique (dans le sens où la dynamique n'intervient, ni dans les contraintes, ni dans le critère d'optimalité). Nous avons également expliqué, grâce à des résultats théoriques, comment modifier les contraintes pour retirer de l'ensemble admissible les matrices d'asservissement qui ne donnent pas des trajectoires d'état qui convergent aussi vite que souhaité. En imposant une marge de stabilité α , le nouveau problème a donc consisté à trouver la loi d'asservissement, dite positivement α -stabilisante qui minimise le coût considéré. L'intérêt de ce problème et de ce coût, dans le cadre de la théorie du contrôle et des systèmes dynamiques, a également été discuté. De plus, nous avons montré que, dans le cas du modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche, il était possible de transformer toutes les contraintes du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α en LMI (dans le cas plus général, il n'y a qu'une contrainte qui n'est pas une LMI mais plutôt une contrainte d'inégalité composante par composante linéaire). L'avantage de cette transformation est qu'il existe des méthodes numériques permettant de résoudre ces inégalités matricielles de définie positivité.

Dans la quatrième partie, notre objectif était de proposer des méthodes de résolution numérique du problème de stabilisation positive optimale de paramètre α . Nous avons commencé par expliquer que les méthodes construites étaient itératives. En effet, elles consistent à considérer une matrice positivement α -stabilisante initiale et à générer une séquence de matrices également positivement α -stabilisantes, de telle sorte que le coût des itérés construits approchent de plus en plus le coût optimal, sachant que celui-ci n'est pas connu. Ensuite, nous avons détaillé notre stratégie pour passer d'un itéré à l'autre. Celle-ci utilise la méthode de dichotomie pour garantir une décroissance dans le coût et nécessite de résoudre un sous-problème à chaque itération. Par ailleurs, les deux algorithmes proposés dans ce mémoire diffèrent par le sous-problème qu'ils impliquent. Nous avons montré que le premier algorithme est théoriquement robuste puisque la suite des coûts générés converge vers le coût optimal. Cependant, son sous-problème, qui contient notamment des LMI et une inégalité non linéaire issue du coût, fait partie des problèmes qui ne sont, pour l'instant, pas supportés par la toolbox YALMIP. Or, YALMIP est l'outil numérique de référence pour la résolution de problèmes contenant des LMI. Nous avons alors proposé une alternative à ce premier algorithme. Celle-ci consiste à résoudre, à chaque itération, un sous-problème qui peut ne contenir que des LMI (comme pour le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche). Cependant, nous avons vu qu'il y avait un compromis à faire concernant la robustesse. En effet, la suite des coûts générés convergent toujours en décroissant mais pas nécessairement vers le coût optimal. Pour terminer la cinquième partie, nous avons détaillé la toolbox YALMIP et présenté l'implémentation du sous-problème intervenant dans le deuxième algorithme proposé.

La dernière partie de ce mémoire reprend les différents résultats des simulations effectuées sur MATLAB avec le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôlé au bord gauche. Le premier test concernait le cas où aucune marge de stabilité n'était imposée. Nous avons vu que la matrice initiale et la matrice finale fournies par l'algorithme étaient bien positivement stabilisantes. De plus, la matrice finale est meilleur en terme de coût mais moins bonne concernant la vitesse de convergence. L'objectif a donc été de comparer cette matrice finale à celles obtenues en imposant différentes marges de stabilité. Avec les marges considérées, nous avons pu constater que la deuxième méthode numérique proposée dans ce mémoire était capable de fournir des matrices d'asservissement positivement stabilisantes ayant un coût raisonnable et produisant des trajectoires ayant la vitesse de convergence souhaitée. Cependant, en augmentant α pour garantir une meilleure vitesse de convergence, l'algorithme donne une matrice d'asservissement dont le coût est plus grand que celui de la matrice obtenue avec le premier α considéré. Ensuite, nous

avons effectué différentes simulations numériques avec des matrices de poids différentes dans la fonction de coût. Avec ces tests, nous avons pu constater que la matrice de poids influençait la solution trouvée par l'algorithme. Nous avons également obtenu un graphe qui permet de savoir quelle matrice de poids et quelle marge de stabilité choisir pour obtenir la matrice d'asservissement positivement stabilisante qui remplit le mieux les objectifs souhaités parmi les matrices trouvées. Enfin, nous avons motivé une analyse de la convergence numérique des itérés lorsque la dimension du modèle tend vers l'infini.

Plusieurs perspectives sont intéressantes pour une recherche future. Nous avons obtenu des paramétrisations des lois d'asservissement positivement stabilisantes pour deux types particuliers de systèmes LTI positifs (pour rappel, le Théorème 1.3.1 provient de (DEHAYE, 2017)). Il pourrait être pertinent de généraliser ces résultats à tout type de systèmes LTI positifs.

Le problème de stabilisation positive optimale étudié concerne la classe particulière des systèmes LTI positifs à une entrée, dans lesquels l'entrée n'agit que dans la première composante du champs de vitesse. Dès lors, nous suggérons une étude de ce problème pour d'autres classes de systèmes comme notamment ceux à deux entrées étudiés dans les Chapitres 1 et 2. Les variables du problème d'optimisation appartiendraient alors à $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Nous avons étudié la robustesse des algorithmes présentés dans ce mémoire. Pour une étude complète des algorithmes, nous conseillons d'analyser l'efficacité et la précision des algorithmes, qui sont les autres caractéristiques qui permettent d'établir si un algorithme est de qualité ou non.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le deuxième algorithme proposé n'est pas robuste bien qu'il soit convergent et qu'il permette d'améliorer le coût par rapport au coût de la matrice initiale. Il pourrait donc être intéressant de voir s'il est possible de développer une autre méthode itérative qui puisse être implémentée sur MATLAB ou autre et dont la robustesse est garantie.

Afin de valider d'avantage le deuxième algorithme proposé, il pourrait être pertinent de le tester sur d'autres systèmes que le modèle discrétisé du système de diffusion pure contrôle au bord gauche.

Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné, il pourrait être intéressant d'analyser la convergence des itérés fournis par l'algorithme proposé lorsque la dimension du modèle tend vers l'infini. En effet, le modèle, étant issu d'une discrétisation du système de diffusion pure, il est naturel de vouloir vérifier si les itérés convergent vers un opérateur positivement stabilisant pour le système de diffusion pure.

Bibliographie

- ALBERTOS, P., & MAREELS, I. (2010). *Feedback and Control for Everyone*. Springer-Verlag.
- ANDERSON, B. D. O., & MOORE, J. B. (1990). *Optimal control : linear quadratic methods*. Prentice Hall.
- ANTOULAS, A. C. (2005). *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM.
- ANTSAKLIS, P., & MICHEL, A. (2006). *Linear Systems*. Birkhäuser Boston.
- ARROW, K. J. (1989). A "Dynamic" Proof of the Frobenius-Perron Theorem for Metzler Matrices. In T. ANDERSON, K. B. ATHREYA & D. L. IGLEHART (Éd.), *Probability, Statistics, and Mathematics* (p. 17-26). Academic Press.
- BEAUTHIER, C. (2011). *The LQ-Optimal Control Problem for Invariant Linear Systems*. Thèse de doctorat, Université de Namur.
- BEN-TAL, A., & NEMIROVSKI, A. (2001). Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. *SIAM*.
- CALLIER, F. M., & WILLEMS, J. L. (1983). Large finite horizon and infinite horizon lq-optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, 4(1), 31-45.
- CALLIER, F., & DESOER, C. (1991). *Linear System Theory*. Springer New York.
- CHELLABOINA, V., BHAT, S., HADDAD, W., & BERNSTEIN, D. (2009). Modeling and analysis of mass-action kinetics : Nonnegativity, realizability, reducibility, and semistability. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(4), 60-78.
- CRANK, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press.
- DEHAYE, J. (2011). *Stabilisation positive de systèmes différentiels linéaires : théorie et application aux réacteurs tubulaires*. Mémoire de Master en Sciences Mathématiques, Université de Namur.
- DEHAYE, J. (2017). *Invariant stabilization of discretized boundary control systems*. Thèse de doctorat, Université de Namur.
- EMIRSJLOW, Z., & TOWNLEY, S. (2000). From PDEs with boundary control to the abstract state equation with an unbounded input operator : A tutorial. *European Journal of Control*, 6, 27-49.
- FARINA, L., & RINALDI, S. (2000). *Positive Linear Systems : Theory and Applications*. John Wiley & Sons.
- GODFREY, K. (1983). *Compartmental Models and Their Applications*. London Academic Press.
- HADDAD, W., CHELLABOINA, V., & HUI, Q. (2010). *Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems*. Princeton University Press.
- HORN, R. A., & JOHNSON, C. R. (2012). *Matrix Analysis* (2^e éd.). Cambridge University Press.
- KACZOREK, T. (2002). *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag London.
- LEENHEER, P. D., & AEYELS, D. (2001). Stabilization of positive linear systems. *Systems & Control Letters*, 44, 259-271.
- LOCATELLI, A. (2001). *Optimal Control : An Introduction*. Birkhäuser Basel.

- LÖFBERG, J. (2004). YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, 284-289.
- LÖFBERG, J. (2023). YALMIP. <https://yalmip.github.io/>
- MOSEK APS. (2023). MOSEK. <https://www.mosek.com/>
- NOCEDAL, J., & WRIGHT, S. (2006). *Numerical Optimization*. Springer New York.
- SARRA, S. A. (2003). The method of characteristics with applications to conservation laws. *Journal of Online mathematics and its Applications*, 3, 1-16.
- SCHERER, C., & WEILAND, S. (2000). Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3(2).
- SCHUPPEN, J. (2008). Problems of Control and System Theory motivated by Biochemical Reaction Systems. In J. BALL (Éd.). Virginia Institute of Technology.
- WINKIN, J. (2021). *Systèmes et Contrôle*. Cours de Systèmes, contrôle et optimisation, Master en Sciences Mathématiques.
- WOUWER, A. V., SAUCEZ, P., & VILAS, C. (2014). Simulation of ODE/PDE Models with MATLAB®, OCTAVE and SCILAB : Scientific and Engineering Applications. *SpringerLink : Bücher*. Springer International Publishing.