Description définie et division par zéro

Degauquier, Vincent

Publication date:
2020

Description définie et division par zéro*

Vincent Degauquier

> That everything is not for the best in this best of all possible worlds, even in mathematics, is well illustrated by the vexing problem of defining the operation of division in the elementary theory of arithmetic.
>
> P. Suppes, *Introduction to logic*

1 Introduction

Il est deux faits logico-mathématiques que nul ne peut contester et qui pourtant semblent contradictoires. Le premier, qui est général et appartient à la logique classique des prédicats du premier ordre avec égalité, est que, pour tout x, y et z, si $x = y$, alors $(x * z) = (y * z)$ et cela quelle que soit la signification du symbole fonctionnel binaire $*$. Le second, qui relève plus particulièrement de l'algèbre élémentaire des nombres réels, est que $(x \cdot x) = x$ n'entraîne pas que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. En effet, zéro est solution de la première équation alors qu'il n'est pas solution de la seconde.

Le présent article poursuit un double objectif. De sorte à montrer en quoi cette contradiction n'est qu'apparente, il vise à préciser la signification du symbole de division à la lumière de la théorie russellienne des descriptions définies. D'autre part, il entend examiner les conséquences de cette interprétation relativement au statut des conditions d'existence et à la correction des raisonnements qui interviennent dans la résolution de certaines équations.

Notre propos s'organise en cinq parties. Tout d'abord, nous exposerons le cadre logique et algébrique à partir duquel nous étudierons la signification du symbole de division, à savoir l'algèbre élémentaire des nombres réels. Deuxièmement, nous montrerons que, bien qu'elle soit usuellement conçue comme une fonction à deux arguments, la division ne peut être traduite

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet LOGLANG mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

adéquatement par un symbole fonctionnel binaire du langage de l'algèbre élémentaire. Une fois cette impossibilité établie, nous présenterons la théorie russellienne des descriptions définies. Nous montrerons que cette dernière propose une interprétation des expressions de la forme « le α tel que A » qui permet de rendre compte de la signification de toute formule dans laquelle figurent de telles expressions et cela qu'il existe exactement un α tel que A ou non. Quatrièmement, nous mettrons en exergue que, dès lors que le quotient de deux nombres réels x et y, noté $(x \div y)$, est défini comme le nombre réel z tel que $x = (y \cdot z)$, la théorie russellienne des descriptions définies peut être appliquée aux formules dans lesquelles figure le symbole de division. Nous observerons alors qu'une signification peut être attachée à ces formules indépendamment de toute condition préalable. Enfin, nous examinerons, à l'aune de notre analyse de la division, la signification que recouvrent les conditions d'existence dans la résolution d'équations ainsi que la correction de quelques raisonnements dans lesquels le symbole de division apparaît.

2 L'algèbre élémentaire des nombres réels

Cette section est consacrée à l'exposition du cadre logico-algébrique à partir duquel nous étudierons la signification du symbole de division. Pour ce faire, nous définirons d'abord en quoi consiste le langage de l'algèbre élémentaire. Ensuite, nous présenterons un système d'axiomes et de règles qui traduisent les principes logiques qui régissent ce langage. Enfin, nous identifierons un ensemble de formules du langage qui décrivent certaines propriétés fondamentales des nombres réels.

2.1 Langage

Le *langage de l'algèbre élémentaire* est un langage prédicatif du premier ordre avec égalité dont les seuls symboles propres sont un symbole prédicatif binaire, deux symboles fonctionnels binaires et deux constantes. Une description de l'alphabet et de la syntaxe de ce langage est proposée ci-dessous.

L'*alphabet* comprend :

— les symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$;
— les variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$;
— les parenthèses :), (;
— le symbole prédicatif binaire : $<$;
— les symboles fonctionnels binaires : $+$, $\cdot$;
— les constantes : 0, 1.

Une expression algébrique est une suite finie de symboles de l'alphabet du langage de l'algèbre élémentaire. Certaines expressions algébriques sont appelées des termes et d'autres des formules. Ces expressions sont formées au moyen de règles syntaxiques exhaustives. De cette façon, les termes et les formules du langage de l'algèbre élémentaire sont uniquement les expressions construites conformément à ces règles.

Un *terme* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un terme.
— Toute constante est un terme.
— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $(t_1 + t_2)$ et $(t_1 \cdot t_2)$ sont des termes.

Une *formule* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ et $t_1 < t_2$ sont des formules.
— Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
— Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \to B)$ sont des formules.
— Si α est une variable et A est une formule, alors $\forall\alpha\, A$ et $\exists\alpha\, A$ sont des formules.

Soient une formule A, une variable α et un terme t. Alors, $A[\alpha := t]$ désigne la formule obtenue en substituant t à chaque occurrence libre de α dans A. Notons que la substitution d'un terme aux occurrences libres d'une variable dans une formule est soumise à une condition de substituabilité, que nous considérons implicite dans le cadre de cet article [10].

2.2 Système

Les principes déductifs qui gouvernent le langage de l'algèbre élémentaire sont ceux de la logique classique. Ces principes peuvent être précisés grâce à un système de schémas d'axiomes et de règles tel que celui présenté ci-dessous [4, 6, 12, 2].

Axiomes

$$(A \to (B \to A))$$

$$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$$

$$(A \to (B \to (A \wedge B)))$$

$$((A \wedge B) \to A)$$

$$((A \wedge B) \to B)$$

$(A \to (A \vee B))$

$(B \to (A \vee B))$

$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

$((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

$(\neg\neg A \to A)$

$(\forall\alpha\, A \to A[\alpha := t])$

$(A[\alpha := t] \to \exists\alpha\, A)$

$t = t$

$(t = u \to (A[\alpha := t] \to A[\alpha := u]))$

Règles

$$\frac{(A \to B) \qquad A}{B}$$

$$\frac{(B \to A[\alpha := \beta])}{(B \to \forall\alpha\, A)} \qquad\qquad \frac{(A[\alpha := \beta] \to B)}{(\exists\alpha\, A \to B)}$$

Ces deux dernières règles sont soumises à certaines restrictions portant sur la variable β. Celles-ci sont mentionnées dans la définition qui suit.

Une *dérivation à partir d'un ensemble d'hypothèses* $\mathcal{H}$ est une suite finie de formules telle que chaque formule de la suite est :

— soit un axiome ;
— soit une formule de $\mathcal{H}$;
— soit une formule B telle qu'il existe une formule A de sorte que les formules $(A \to B)$ et A la précèdent dans la suite ;
— soit une formule $(B \to \forall\alpha\, A)$ telle qu'il existe une variable β ne figurant librement ni dans $(B \to \forall\alpha\, A)$ ni dans une formule de $\mathcal{H}$ présente dans la suite de sorte que la formule $(B \to A[\alpha := \beta])$ la précède dans la suite ;
— soit une formule $(\exists\alpha\, A \to B)$ telle qu'il existe une variable β ne figurant librement ni dans $(\exists\alpha\, A \to B)$ ni dans une formule de $\mathcal{H}$ présente dans la suite de sorte que la formule $(A[\alpha := \beta] \to B)$ la précède dans la suite.

Une *dérivation d'une formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses $\mathcal{H}$* est une dérivation à partir de $\mathcal{H}$ dont la dernière formule est A.

Une formule A est *dérivable à partir d'un ensemble d'hypothèses $\mathcal{H}$* s'il existe une dérivation de A à partir de $\mathcal{H}$.

2.3 Hypothèses

L'algèbre élémentaire peut être caractérisée au moyen d'un ensemble de formules du langage qui décrivent certaines propriétés fondamentales des nombres réels [5, 14, 13]. Ces propriétés arithmétiques sont décrites par les formules qui figurent dans la liste qui suit ainsi que par un schéma de formules apparenté à l'axiome de complétude [1]. En général, l'ensemble formé de ces formules, noté $\mathcal{A}$, couvre les propriétés qui sont satisfaites par les éléments de tout corps réel clos [15].

Remarque Afin de faciliter la lecture des formules, les expressions $\neg t < u$ et $\neg t = u$ sont respectivement notées $t \nless u$ et $t \neq u$, où t et u sont des termes du langage.

$$\forall x \forall y\, (x \neq y \to (x < y \vee y < x))$$
$$\forall x \forall y\, (x < y \to y \nless x)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$$

$$\forall x \forall y\, (x + y) = (y + x)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (x + (y + z)) = ((x + y) + z)$$
$$\forall x \forall y \exists z\, x = (y + z)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (y < z \to (x + y) < (x + z))$$
$$\forall x\, (x + 0) = x$$

$$\forall x \forall y\, (x \cdot y) = (y \cdot x)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$$
$$\forall x \forall y\, (y \neq 0 \to \exists z\, x = (y \cdot z))$$
$$\forall x \forall y \forall z\, ((0 < x \wedge y < z) \to (x \cdot y) < (x \cdot z))$$
$$\forall x\, (x \cdot 1) = x$$

1. Ce schéma de formules est équivalent à la double affirmation selon laquelle tout nombre positif possède une racine carrée et tout polynôme de degré impair possède au moins une racine. Dans la mesure où ce schéma de formules n'intervient pas dans les considérations qui suivent, nous n'en préciserons pas davantage la nature.

$\forall x \forall y \forall z\, (x \cdot (y + z)) = ((x \cdot y) + (x \cdot z))$

$0 \neq 1$

Un *théorème de l'algèbre élémentaire* est une formule dérivable à partir de $\mathcal{A}$.

Un *théorème logique* est une formule dérivable à partir de l'ensemble vide.

Soient deux formules A et B. Soit également une suite de variables distinctes α_1, ..., α_n comprenant exactement celles qui figurent librement dans A ou B. Alors :

— A *entraîne logiquement* B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n\, (A \to B)$ est un théorème logique ;
— A *entraîne algébriquement* B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n\, (A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire ;
— A est *logiquement équivalent* à B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n\, ((A \to B) \wedge (B \to A))$ est un théorème logique ;
— A est *algébriquement équivalent* à B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n\, ((A \to B) \wedge (B \to A))$ est un théorème de l'algèbre élémentaire.

3 La division comme symbole fonctionnel

La division est usuellement conçue comme une fonction qui associe un nombre à certains couples de nombres. Dès lors, il semble naturel de traduire ce concept dans le langage de l'algèbre élémentaire par un symbole fonctionnel binaire. Pourtant, cela n'est pas sans poser quelques difficultés. Deux observations nous amènent à ce constat.

D'une part, si la division est traduite par un symbole fonctionnel binaire, alors, quelle que soit la définition qui en est proposée, cette fonction doit être partout définie. Formellement, cela signifie que la division doit être une loi de composition interne sur l'ensemble des objets arithmétiques que l'on considère. Autrement dit, pour tout couple de nombres il existe exactement un objet arithmétique tel qu'il est égal à leur quotient.

D'autre part, aucune définition de la division comme application n'est pleinement satisfaisante. Admettre l'existence d'un objet arithmétique tel qu'il est égal au quotient d'un nombre par zéro donne lieu à des difficultés considérables quant à l'élaboration d'une définition adéquate de la division.

Seule la première observation nécessite d'être précisée dans la mesure où la seconde est le résultat d'un examen approfondi de la division comme fonction partout définie [13].

Soit le langage obtenu à partir de celui de l'algèbre élémentaire en ajoutant un symbole fonctionnel binaire, noté $*$, aux symboles propres de l'alphabet et en amendant la définition de terme de sorte que si t_1 et t_2 sont des termes, alors $(t_1 * t_2)$ est également un terme.

Montrer que, quelle que soit la définition qui en est proposée, la fonction associée au symbole $*$ est partout définie revient à montrer que la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ est un théorème logique. En effet, si cette formule est dérivable à partir de l'ensemble vide, cela signifie que sa dérivabilité est indépendante de toute hypothèse concernant la signification du symbole $*$ et, partant, qu'elle repose exclusivement sur les principes déductifs du système. Aussi, les considérations qui suivent peuvent être étendues à tout symbole fonctionnel binaire d'un langage prédicatif du premier ordre avec égalité.

La suite de formules présentes ci-dessous constitue une dérivation de la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ à partir de l'ensemble vide.

$(x * y) = (x * y)$

$((x * y) = (x * y) \to \exists z\, (x * y) = z)$

$\exists z\, (x * y) = z$

$(\exists z\, (x * y) = z \to (z = z \to \exists z\, (x * y) = z))$

$(z = z \to \exists z\, (x * y) = z)$

$(z = z \to \forall y \exists z\, (x * y) = z)$

$(z = z \to \forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z)$

$z = z$

$\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$

Outre cette dérivation de la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ à partir de l'ensemble vide, un argument moins formel peut être avancé afin de rendre davantage explicite l'incompatibilité entre la négation de cette formule et certains principes fondamentaux de la logique classique.

Supposons qu'il existe un x et il existe un y tels que, quel que soit z, $(x * y) \neq z$. Alors, en particulier, il existe un x et il existe un y tels que $(x*y) \neq (x*y)$. Or cela contredit le caractère réflexif de la relation d'égalité. En conséquence, il ne se peut pas qu'il existe un x et il existe un y tels que, quel que soit z, $(x * y) \neq z$. Autrement dit, quels que soient x et y il existe un z tels que $(x * y) = z$.

Force est donc de constater que la division ne peut être traduite adéquatement par un symbole fonctionnel binaire du langage de l'algèbre élémentaire. Quel statut convient-il alors d'accorder à la division dans un tel contexte ?

4 La théorie russellienne des descriptions définies

Une description est soit définie soit indéfinie. Une *description indéfinie* (ou ambiguë) est une expression de la forme « un α tel que A ». Par exemple, l'expression « un x tel que $0 < x$ » est une description indéfinie. D'autre part, une *description définie* est une expression de la forme « le α tel que A ». Par exemple, l'expression « le x tel que $(1 + x) = 0$ » est une description définie.

Nombreuses sont les définitions mathématiques dans lesquelles interviennent des descriptions définies. À titre d'exemple, nous pouvons mentionner la définition de la différence de deux nombres réels. La différence de x et y, notée $(x - y)$, est le nombre z tel que $x = (y + z)$.

Si toute expression de la forme « le α tel que A » véhicule l'idée qu'il existe *exactement* un α tel que A, certaines ne satisfont pas à cette exigence. Dans le cadre de l'algèbre élémentaire des nombres réels, nous constatons en effet que des expressions comme « le x tel que $0 = ((x \cdot x) + 1)$ » ou « le x tel que $1 = (0 \cdot x)$ » trahissent l'idée qu'il existe *au moins* un tel nombre. En outre, des expressions comme « le x tel que $1 = (x \cdot x)$ » ou « le x tel que $0 = (0 \cdot x)$ » trahissent l'idée qu'il existe *au plus* un tel nombre.

La théorie russellienne des descriptions définies propose une interprétation des expressions de la forme « le α tel que A » qui permet de rendre compte de la signification de toute formule dans laquelle figurent de telles expressions, et cela qu'il existe exactement un α tel que A ou non [8, 16, 9]. En particulier, cette théorie permet de réduire toute formule dans laquelle figurent des descriptions définies à une formule dans laquelle n'en figure aucune.

L'interprétation des descriptions définies proposée par B. Russell assimile les expressions de la forme « le α tel que A » à des symboles de quantification [2]. À l'instar des quantificateurs universel et existentiel, les descriptions définies sont des 'symboles incomplets' dont la signification ne peut être détachée de la formule dans laquelle elles apparaissent. C'est pourquoi toute formulation adéquate de ces expressions dans un langage logique nécessite,

2. Pour une interprétation où les descriptions définies sont assimilées à des termes d'un langage logique, nous renvoyons, entre autres, aux textes fondateurs de G. Frege et P. Strawson [3, 11, 1].

d'une part, de les distinguer des termes du langage et, d'autre part, de préciser, lorsqu'elles figurent dans une formule, l'occurrence de formule à laquelle elles se rapportent.

Soit le langage de l'algèbre élémentaire augmenté d'un symbole de description définie, noté $\imath$, ainsi que d'un symbole de ponctuation, noté $|$. Le symbole de description définie peut être conçu comme un symbole logique de quantification binaire [7]. Aussi, nous élargissons la définition de formule de sorte que si α est une variable et si A et B sont des formules, alors $\imath\alpha\,(A \mid B)$ est une formule. Une formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ se lit « le α tel que A est tel que B ».

Suivant la théorie russellienne des descriptions définies, toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie qu'il existe exactement un α tel que A et que cet unique α est tel que B. Autrement dit, toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie à la fois que :

— il existe au moins un α tel que A ;
— il existe au plus un α tel que A ;
— tout α tel que A est tel que B.

Sur base de cette interprétation, toute formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ — où A et B sont des formules du langage de l'algèbre élémentaire — peut être traduite par une formule de la forme qui suit — où β et γ sont des variables distinctes qui ne figurent pas dans la formule $\exists\alpha\, A$.

$$((\exists\alpha\, A \land \forall\beta\forall\gamma\,((A[\alpha := \beta] \land A[\alpha := \gamma]) \to \beta = \gamma)) \land \forall\alpha\,(A \to B))$$

D'autres traductions logiquement équivalentes, comme celles mentionnées ci-dessous, sont également possibles.

$$\exists\alpha\,((A \land \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \to \beta = \alpha)) \land B)$$

$$\exists\alpha\,(\forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \leftrightarrow \beta = \alpha) \land B)$$

Remarque Le symbole $\leftrightarrow$ est ici utilisé comme une abréviation. Aussi notons-nous $(A \leftrightarrow B)$ l'expression $((A \to B) \land (B \to A))$.

Soient deux formules A et B du langage de l'algèbre élémentaire. Alors, la *traduction russellienne* de la formule $\imath\alpha\,(A \mid B)$ est la formule $\exists\alpha\,((A \land \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \to \beta = \alpha)) \land B)$, où β est la première variable de la liste de l'alphabet qui ne figure pas dans $\exists\alpha\, A$.

À l'aide de cette traduction, toute formule du langage de l'algèbre élémentaire augmenté du symbole de description définie peut être réduite à une formule du langage de l'algèbre élémentaire (sans ce symbole). En remplaçant successivement chaque occurrence de formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ dans une formule par sa traduction russellienne, il est possible d'associer à toute formule dans laquelle figurent des descriptions définies une formule dans laquelle il n'en figure pas.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir les propositions 1 à 5. Celles-ci indiquent que, moyennant certaines hypothèses, la position qu'occupe une description définie au sein d'une formule peut varier sans que cela n'ait une incidence sur la signification logique de cette formule. Autrement dit, une description définie peut se rapporter à différentes occurrences de formule dans une formule sans que cela n'affecte sa signification logique. Ces propositions s'avéreront particulièrement utiles lorsque nous aborderons la signification du symbole de division.

Proposition 1. *Soient deux variables distinctes α et β ainsi que trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire telles que α ne figure pas librement dans B et β ne figure pas librement dans A. Alors, la réduction de la formule $\imath\alpha\,(A \mid \imath\beta\,(B \mid C))$ est logiquement équivalente à la réduction de la formule $\imath\beta\,(B \mid \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 2. *Soient deux formules A et B du langage de l'algèbre élémentaire. S'il existe exactement un α tel que A, alors la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid \neg B)$ est logiquement équivalente à la réduction de $\neg\imath\alpha\,(A \mid B)$.*

Proposition 3. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire.*

- *Si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \wedge C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \wedge C)$.*
- *Si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \wedge C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \wedge \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 4. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire.*

- *Si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \vee C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \vee C)$.*
- *Si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \vee C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \vee \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 5. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire. S'il existe exactement un α tel que A, alors :*

- *si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \to C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \to C)$;*
- *si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \to C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \to \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Afin d'illustrer les propositions 1 et 2, deux exemples relatifs à la différence de deux nombres réels sont présentés dans l'appendice 1.

5 La division comme description définie

Dans cette section, nous entendons, d'une part, préciser la signification du symbole de division à la lumière de la théorie russellienne des descriptions définies et, d'autre part, montrer que la plupart des expressions dans lesquelles figure ce symbole sont ambiguës quant à l'analyse logique qui peut en être proposée.

Afin d'étudier la signification que recouvre le symbole de division dans le cadre de la résolution d'équations, nous définissons un pseudo-langage logique dont l'alphabet est celui du langage de l'algèbre élémentaire augmenté d'un pseudo-symbole fonctionnel binaire, noté $\div$, et dont la syntaxe est décrite ci-dessous.

Un *pseudo-terme* est défini à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un pseudo-terme.
— Toute constante est un pseudo-terme.
— Si t_1 et t_2 sont des pseudo-termes, alors $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$ et $(t_1 \div t_2)$ sont des pseudo-termes.

Une *pseudo-formule* est définie à partir des règles suivantes.

— Si t_1 et t_2 sont des pseudo-termes, alors $t_1 = t_2$ et $t_1 < t_2$ sont des pseudo-formules.
— Si A est une pseudo-formule, alors $\neg A$ est une pseudo-formule.
— Si A et B sont des pseudo-formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des pseudo-formules.
— Si α est une variable et A est une pseudo-formule, alors $\forall\alpha\, A$ et $\exists\alpha\, A$ sont des pseudo-formules.

Le *quotient* de deux nombres réels x et y, noté $(x \div y)$, est défini comme le nombre réel z tel que $x = (y \cdot z)$. Cette définition est d'ordinaire soumise à la restriction suivant laquelle le nombre y est distinct de zéro de sorte à assurer, sur base des hypothèses formulées à l'égard des nombres réels, l'existence et l'unicité d'un z tel que $x = (y \cdot z)$.

Dans la mesure où tout pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ — dans lequel t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire — est assimilable à une expression de la forme « le α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ », l'interprétation russellienne des descriptions définies nous dispense de restreindre cette définition aux cas où t_2 est distinct de zéro. En effet, la théorie russellienne des descriptions définies permet de rendre compte de la signification des formules dans lesquelles figurent des expressions de la forme « le α tel que A » en toute généralité — qu'il existe exactement un α tel que A ou non. C'est pourquoi, il nous est permis d'adopter la définition du quotient de deux nombres réels en négligeant la restriction qui l'accompagne. Nous posons dès lors le schéma abréviatif suivant.

Tout pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$, où t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire, est une abréviation d'une expression de la forme « le α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ » — où α est une variable qui ne figure ni dans t_1 ni dans t_2.

En première approximation, une analyse logique d'une pseudo-formule dans laquelle figure le symbole de division consiste à lui associer une formule du langage de l'algèbre élémentaire d'une façon qui est conforme à la fois au schéma abréviatif de la division et à la théorie russellienne des descriptions définies.

Exemple Soit la pseudo-formule $(x \div 1) = x$. Suivant le schéma abréviatif de la division, le pseudo-terme $(x \div 1)$ est une abréviation de l'expression « le y tel que $x = (1 \cdot y)$ ». Proposer une analyse logique de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$ revient donc à identifier une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est conforme à l'interprétation russellienne de l'expression « le y tel que $x = (1 \cdot y)$ est tel que $y = x$ » ou, plus formellement, de l'expression $\imath y\,(x = (1 \cdot y) \mid y = x)$. En ce sens, la formule $\exists y\,((x = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (1 \cdot z) \to z = y)) \wedge y = x)$ constitue une analyse logique de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$. L'exactitude de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$ peut alors être établie en observant que la formule qui lui est associée est un théorème de l'algèbre élémentaire.

Soient une pseudo-formule A et une variable α telles qu'il n'existe aucune occurrence de α dans A. Une *interprétation russellienne* de A est une pseudo-formule de la forme $\exists\alpha\,((t_1 = (t_2 \cdot \alpha) \wedge \forall\beta\,(t_1 = (t_2 \cdot \beta) \to \beta = \alpha)) \wedge B)$ où :

— t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire ;
— B est une pseudo-formule telle qu'il existe exactement une occurrence libre de α dans B et telle que A est identique à $B[\alpha := (t_1 \div t_2)]$;
— β est la première variable de la liste de l'alphabet qui est distincte de α et ne figure pas dans A.

Une pseudo-formule B est une *transformation russellienne* d'une pseudo-formule A s'il existe une pseudo-formule C telle que :

— il existe une pseudo-formule D telle que D est une interprétation russellienne de C ;
— il existe une occurrence de C dans A telle que B est la pseudo-formule obtenue en remplaçant cette occurrence de C dans A par D.

Une formule B du langage de l'algèbre élémentaire est une *analyse logique* d'une pseudo-formule A s'il existe une suite finie $\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle$ telle que σ_1

est la pseudo-formule A, σ_n est la formule B et σ_{i+1} est une transformation russellienne de σ_i, pour tout i $(1 \leq i < n)$.

La plupart des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division sont empreintes d'ambiguïté en ce sens qu'elles admettent plusieurs analyses logiques. En effet, il n'est pas rare que plusieurs formules du langage de l'algèbre élémentaire puissent être associées à une unique pseudo-formule.

Pour l'essentiel, une transformation russellienne d'une pseudo-formule A consiste, d'une part, à choisir dans A une occurrence d'un pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et, d'autre part, à choisir l'occurrence de pseudo-formule dans A à laquelle se rapporte cette occurrence de pseudo-terme. Dans cette perspective, une analyse logique d'une pseudo-formule A revient à opérer ce double choix autant de fois qu'il existe d'occurrences du symbole de division dans A. Aussi l'ambiguïté d'une pseudo-formule dépend-elle à la fois de sa complexité et du nombre d'occurrences du symbole de division dans cette pseudo-formule. Deux exemples qui illustrent l'ambiguïté des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division sont présentés dans l'appendice 2.

Deux formes d'ambiguïté peuvent être distinguées. Une pseudo-formule est *faiblement ambiguë* si toutes ses analyses logiques sont algébriquement équivalentes. Elle est *fortement ambiguë* sinon. À la lumière des propositions 1 à 5, il est possible de montrer que cette seconde forme d'ambiguïté — la seule qui soit véritablement critique dans le cadre qui nous occupe — concerne exclusivement les pseudo-formules dans lesquelles figure un pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que l'existence ou l'unicité d'un α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ ne peut être établie à partir des hypothèses formulées à l'égard des nombres réels.

Exemple Soit la pseudo-formule $(0 \div 0) \neq 1$. Deux analyses logiques en sont possibles. L'une est la formule obtenue en y remplaçant l'occurrence de $(0 \div 0) = 1$ par son interprétation russellienne et l'autre est la formule obtenue en y remplaçant l'occurrence de $(0 \div 0) \neq 1$ par son interprétation russellienne. La première analyse logique correspond à la formule du langage de l'algèbre élémentaire $\neg\exists x\,((0 = (0 \cdot x) \wedge \forall y\,(0 = (0 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x = 1)$. Cette analyse logique traduit l'idée qu'il n'existe pas un et un seul nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et tel que $x = 1$. La seconde analyse logique correspond, quant à elle, à la formule du langage de l'algèbre élémentaire $\exists x\,((0 = (0 \cdot x) \wedge \forall y\,(0 = (0 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x \neq 1)$. Cette analyse logique traduit l'idée qu'il existe exactement un nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et cet unique nombre x est tel que $x \neq 1$. Tandis que la première analyse logique est un théorème de l'algèbre élémentaire, la seconde ne l'est pas.

Face à l'ambiguïté des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division, il est commode de définir une transformation russellienne privilégiée de sorte qu'une unique analyse logique puisse être associée à toute pseudo-formule de ce type. La transformation russellienne privilégiée d'une pseudo-formule A revient, d'une part, à choisir dans A la première occurrence de pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et, d'autre part, à convenir que celle-ci se rapporte à l'occurrence de pseudo-formule dans A qui est atomique. Par le biais de cette définition, une unique analyse logique peut être proposée pour chaque pseudo-formule dans laquelle figure le symbole de division. Cette analyse logique est dite *standard*.

Sont présentées ci-après quatre pseudo-formules dont l'analyse logique standard est un théorème de l'algèbre élémentaire. Les différentes analyses logiques de ces pseudo-formules sont consignées dans l'appendice 3.

$$\forall x \forall y \forall z\, ((x \div y) = z \leftrightarrow (y \neq 0 \land x = (y \cdot z)))$$

$$\forall x \forall y \forall z\, (y \neq 0 \to ((x \div y) = z \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$$

$$\forall x \forall y \forall z\, (y = 0 \to (x \div y) \neq z)$$

$$\forall x \neg \exists y\, (x \div 0) = y$$

Il est crucial de remarquer que si les principes déductifs de la logique classique s'appliquent aux analyses logiques des pseudo-formules, ils ne s'appliquent pas aux pseudo-formules elles-mêmes. En effet, si tel était le cas, il serait possible de déduire de la première pseudo-formule, comme de la troisième et de la quatrième, la négation de la réflexivité de l'égalité. En outre, la deuxième pseudo-formule, qui correspond à la définition usuellement proposée de la division, serait soumise au théorème logique rappelé dans la section 3, de sorte que quel que soit x il existerait un z tel que $(x \div 0) = z$.

Remarque Dans les analyses logiques de ces pseudo-formules, nous avons considéré, par souci d'économie, le symbole $\leftrightarrow$ comme un symbole primitif du langage de l'algèbre élémentaire plutôt que comme une abréviation.

La signification du symbole de division maintenant précisée, examinons les conséquences de cette interprétation relativement au statut des conditions d'existence et à la correction des raisonnements qui interviennent dans la résolution de certaines équations.

6 La résolution d'équations

Nous appelons *équation (à une inconnue)* toute pseudo-formule de la forme $t_1 = t_2$ dans laquelle figure exactement une variable.

À partir de notre analyse de la division, nous montrons qu'il est possible d'associer une condition d'existence à tout pseudo-terme dans lequel figure exactement une variable de sorte à en préciser le domaine de définition. En outre, nous montrons à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé lorsque le symbole de division y apparaît.

6.1 Pseudo-terme et condition d'existence

En général, les pseudo-termes sont de deux sortes : ceux qui sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et ceux qui ne le sont pas. Les premiers sont ceux dans lesquels n'apparaît pas le symbole de division et les seconds ceux dans lesquels il apparaît.

Notre propos se limite aux seuls pseudo-termes dans lesquels figure exactement une variable. Soit un pseudo-terme t dont la seule variable est α.

Si le symbole de division n'apparaît pas dans t, alors toute formule de la forme $\exists\beta\, t = \beta$ ou $\forall\beta\forall\gamma\, ((t = \beta \wedge t = \gamma) \to \beta = \gamma)$ — où β et γ sont des variables distinctes qui ne figurent pas dans t — est un théorème logique. Aussi, pour tout nombre réel α, existe-t-il exactement un nombre réel β tel que t est égal à β.

En revanche, si le symbole de division apparaît dans t, il se peut que, pour quelque nombre réel α, il n'existe pas un et un seul nombre réel β tel que t est égal à β. C'est pourquoi, il importe, lorsque le symbole de division figure dans un pseudo-terme t, d'identifier l'ensemble des nombres réels α tels que t existe et est unique.

Soit un pseudo-terme t dans lequel figure le symbole de division et dont la seule variable est α. La *condition d'existence* de t — ou encore le *domaine de définition* de t — est l'ensemble des valeurs assignables à α telles qu'elles rendent vraie l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$, où β est la première variable de la liste de l'alphabet qui ne figure pas dans t.

En pratique, spécifier la condition d'existence d'un tel pseudo-terme revient à déterminer une formule du langage de l'algèbre élémentaire telle qu'elle est algébriquement équivalente à l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$ et telle que les valeurs assignables à α qui la rendent vraie sont aisément identifiables. L'appendice 4 comprend deux exemples dans lesquels la condition d'existence d'un pseudo-terme est spécifiée.

Remarque Bien que cette définition n'impose pas l'unicité du pseudo-terme t de façon explicite, celle-ci peut être déduite de l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$.

6.2 Pseudo-formule et raisonnement

Afin de préciser à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé, nous définissons une relation de *conséquence algébrique* sur l'ensemble des équations.

Soient deux équations A et B dont la seule variable est α. Si A et B sont toutes deux des formules du langage de l'algèbre élémentaire, nous posons que A a pour conséquence algébrique B si la formule $\forall\alpha\,(A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Au contraire, si l'une ou l'autre des deux équations que sont A et B n'est pas une formule du langage de l'algèbre élémentaire, nous posons que A a pour conséquence algébrique B si l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall\alpha\,(A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire.

Il est à noter que la relation de conséquence algébrique satisfait plusieurs propriétés intéressantes. Tout d'abord, il s'agit bien d'une relation de nature déductive dans la mesure où elle est à la fois réflexive et transitive. Ensuite, elle est conforme aux principes déductifs de la logique classique dès lors qu'elle porte sur des formules du langage de l'algèbre élémentaire. En effet, lorsque A et B sont des formules, A a pour conséquence algébrique B si et seulement si A entraîne algébriquement B. Enfin, la relation de conséquence algébrique s'applique à des équations dans lesquelles figure le symbole de division. Elle permet ainsi d'étendre la relation d'entraînement algébrique à des pseudo-formules qui échappent aux principes déductifs de la logique classique.

Afin d'illustrer notre propos, nous identifions les couples d'équations distinctes formés à partir de E.1, E.2 et E.3 tels que la première équation a pour conséquence algébrique la seconde.

$$(x \cdot x) = x \tag{E.1}$$

$$((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \tag{E.2}$$

$$x = 1 \tag{E.3}$$

Étant donné que E.1 et E.3 sont des formules du langage de l'algèbre élémentaire, celles-ci répondent aux principes déductifs de la logique classique. Aussi est-il possible de déterminer à partir des seules ressources de l'algèbre élémentaire si l'une a pour conséquence algébrique l'autre.

D'une part, comme la formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \to x = 1)$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire, il s'ensuit que E.1 n'a pas pour conséquence algébrique E.3. Nous constatons en effet que $\forall x\,((x \cdot x) = x \to x = 1)$ entraîne logiquement $((0 \cdot 0) = 0 \to 0 = 1)$, qui entraîne algébriquement une contradiction.

D'autre part, comme la formule $\forall x\,(x = 1 \to (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire, il s'ensuit que E.3 a pour conséquence algébrique E.1. En effet, nous observons que $(1 \cdot 1) = 1$, qui est logiquement équivalent à $\forall x\,(x = 1 \to (x \cdot x) = x)$, est incontestablement un théorème de l'algèbre élémentaire.

Quant aux quatre autres couples d'équations distinctes formés à partir de E.1, E.2 et E.3, il n'est pas possible de déterminer s'ils appartiennent à la relation de conséquence algébrique sans que ne soit précisée la signification du symbole de division. À la lumière de notre analyse de la division, nous montrons dans l'appendice 5 que E.1 n'a pas pour conséquence algébrique E.2 mais E.2 a pour conséquence algébrique E.3, E.3 a pour conséquence algébrique E.2 et E.2 a pour conséquence algébrique E.1.

7 Conclusion

La théorie russellienne des descriptions définies apporte une réponse à la question épineuse du traitement des fonctions partiellement définies dans le cadre de la logique classique des prédicats du premier ordre avec égalité.

Si cette théorie permet de saisir de façon adéquate la signification du symbole de division tel qu'il apparaît en algèbre élémentaire, celle-ci peut sembler excessivement compliquée. Cependant, comme l'indique son auteur, la complexité de cette théorie est inhérente à son objet. De plus, la thèse qui la sous-tend est en définitive assez simple : toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie qu'il existe exactement un α tel que A et que cet unique α est tel que B.

D'autre part, la théorie des descriptions définies proposée par B. Russell est extrêmement générale en ce sens qu'elle s'applique à toute expression de la forme « le α tel que A ». Aussi permet-elle de résoudre de nombreuses difficultés liées à l'interprétation de ces expressions dans le cadre des définitions mathématiques. En particulier, préciser la signification du symbole de division à l'aide de cette théorie présente de nombreux avantages.

Tout d'abord, l'interprétation russellienne du symbole de division met en lumière l'ambiguïté que recèlent certaines pseudo-formules dans lesquelles il figure. Elle permet ainsi de tirer d'embarras qui chercherait à juger de l'exactitude de pseudo-formules telles que $(0 \div 0) \neq 1$. Si cette pseudo-formule signifie qu'il existe exactement un nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et cet unique nombre x est tel que $x \neq 1$, il conviendra de répondre par la négative. Au contraire, si elle signifie qu'il n'existe pas un et un seul nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et tel que $x = 1$, une réponse affirmative sera donnée.

Ensuite, il est possible, grâce à la théorie des descriptions définies, d'associer une condition d'existence à tout pseudo-terme dans lequel figure exactement une variable et cela exclusivement au moyen des concepts de l'algèbre élémentaire. De la sorte, le statut qu'occupent les conditions d'existence dans la résolution d'équations peut être précisé indépendamment de toute considération analytique.

Enfin, la théorie des descriptions définies que propose B. Russell permet de déterminer, en accord avec les principes déductifs de la logique classique, à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé lorsque le symbole de division y apparaît. En particulier, elle permet, par le biais d'une analyse de la langue mathématique, de réconcilier, d'une part, le fait que $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ et, d'autre part, le fait que, $\forall x \forall y \forall z \, (x = y \rightarrow (x * z) = (y * z))$ est un théorème logique, quelle que soit la signification du symbole fonctionnel binaire $*$.

Extraits

It is important to observe the effect of our theory on the interpretation of definitions which proceed by means of denoting phrases. Most mathematical definitions are of this sort : for example, "$m - n$ means the number which, added to n, gives m". Thus $m - n$ is defined as meaning the same as a certain denoting phrase ; but we agreed that denoting phrases have no meaning in isolation. Thus what the definition really ought to be is : "Any proposition containing $m-n$ is to mean the proposition which results from substituting for '$m - n$' 'the number which, added to n, gives 'm' ". The resulting proposition is interpreted according to the rules already given for interpreting propositions whose verbal expression contains a denoting phrase. In the case where m and n are such that there is one and only one number x which, added to n, gives m, there is a number x which can be substituted for $m - n$ in any proposition containing $m - n$ without altering the truth or falsehood of the proposition. But in other cases, all propositions in which "$m - n$" has a primary occurrence are false.

B. Russell, *On denoting*

A descriptive function will in general exist while y belongs to a certain domain, but not outside that domain ; thus if we are dealing with positive rationals, $\sqrt{y}$ will be significant if y is a perfect square, but not otherwise ; if we are dealing with real numbers, and agree that "$\sqrt{y}$" is to mean the *positive* square root (or, is to mean the negative square root), $\sqrt{y}$ will be significant provided y is positive, but not otherwise ; and so on. Thus every descriptive function has what we may call a "domain of definition" or a "domain of existence," which may be thus defined : If the function in question is $R`y$, its domain of definition or of existence will be the class of those arguments $y$ for which we have $\mathrm{E}\,!\,R`y$, *i.e.* for which $\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(xRy)$, *i.e.* for which there is one x, and no more, having the relation R to y.

A. N. Whitehead & B. Russell, *Principia mathematica*

Appendice 1

Exemple Montrons que la réduction de 1 est logiquement équivalente à la réduction de 2.

$$\imath y\,(x = (1+y) \mid \imath z\,(x = (0+z) \mid y < z)) \tag{1}$$

$$\imath z\,(x = (0+z) \mid \imath y\,(x = (1+y) \mid y < z)) \tag{2}$$

En remplaçant dans 1 l'occurrence de $\imath z\,(x = (0+z) \mid y < z)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule suivante.

$$\imath y\,(x = (1+y) \mid \exists z\,((x = (0+z) \wedge \forall y\,(x = (0+y) \rightarrow y = z)) \wedge y < z)) \tag{3}$$

En remplaçant dans 3 l'occurrence de $\imath y\,(x = (1+y) \mid \exists z\,((x = (0+z) \wedge \forall y\,(x = (0+y) \rightarrow y = z)) \wedge y < z))$ par sa traduction russellienne, nous obtenons une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est la réduction de 1.

$$\exists y\,((x = (1+y) \wedge \forall z\,(x = (1+z) \rightarrow z = y)) \wedge \exists z\,((x = (0+z) \wedge \forall y\,(x = (0+y) \rightarrow y = z)) \wedge y < z)) \tag{4}$$

En remplaçant dans 2 l'occurrence de $\imath y\,(x = (1+y) \mid y < z)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule suivante.

$$\imath z\,(x = (0+z) \mid \exists y\,((x = (1+y) \wedge \forall z\,(x = (1+z) \rightarrow z = y)) \wedge y < z)) \tag{5}$$

En remplaçant dans 5 l'occurrence de $\imath z\,(x = (0+z) \mid \exists y\,((x = (1+y) \wedge \forall z\,(x = (1+z) \rightarrow z = y)) \wedge y < z))$ par sa traduction russellienne, nous obtenons une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est la réduction de 2.

$$\exists z\,((x = (0+z) \wedge \forall y\,(x = (0+y) \rightarrow y = z)) \wedge \exists y\,((x = (1+y) \wedge \forall z\,(x = (1+z) \rightarrow z = y)) \wedge y < z)) \tag{6}$$

Il reste alors à montrer que 4 est logiquement équivalent à 6.

Exemple Montrons que la réduction de 7 est logiquement équivalente à la réduction de 8.

$$\iota x\,(0 = (1 + x) \mid x \neq 0) \tag{7}$$

$$\neg\iota x\,(0 = (1 + x) \mid x = 0) \tag{8}$$

En remplaçant dans 7 l'unique occurrence de $\iota x\,(0 = (1 + x) \mid x \neq 0)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule qui suit.

$$\exists x\,((0 = (1 + x) \land \forall y\,(0 = (1 + y) \to y = x)) \land x \neq 0) \tag{9}$$

Nous constatons que 9, qui est une formule du langage de l'algèbre élémentaire, est la réduction de 7.

En remplaçant dans 8 l'unique occurrence de $\iota x\,(0 = (1 + x) \mid x = 0)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule qui suit.

$$\neg\exists x\,((0 = (1 + x) \land \forall y\,(0 = (1 + y) \to y = x)) \land x = 0) \tag{10}$$

Nous constatons que 10, qui est une formule du langage de l'algèbre élémentaire, est la réduction de 8.

Il reste alors à montrer que 9 est logiquement équivalent à 10 à condition qu'il existe exactement un x tel que $0 = (1 + x)$.

Appendice 2

Exemple Montrons que plusieurs analyses logiques de la pseudo-formule qui suit peuvent être proposées.

$$(1 \div 1) \neq 0 \tag{11}$$

Il existe exactement deux pseudo-formules qui figurent dans 11 et admettent une interprétation russellienne. Il s'agit des pseudo-formules $(1 \div 1) = 0$ et $(1 \div 1) \neq 0$.

D'une part, la pseudo-formule $(1 \div 1) = 0$, qui est identique à $x = 0\,[x := (1 \div 1)]$, admet 12 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge x = 0) \tag{12}$$

D'autre part, la pseudo-formule $(1 \div 1) \neq 0$, qui est identique à $x \neq 0\,[x := (1 \div 1)]$, admet 13 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge x \neq 0) \tag{13}$$

Il s'ensuit qu'il existe exactement deux transformations russelliennes de 11. L'une consiste à remplacer dans 11 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div 1) = 0$ par 12. L'autre consiste à remplacer dans 11 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div 1) \neq 0$ par 13. Ces deux transformations russelliennes correspondent respectivement à 14 et 15.

$$\neg\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge x = 0) \tag{14}$$

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge x \neq 0) \tag{15}$$

Par observation des suites $\langle 11, 14\rangle$ et $\langle 11, 15\rangle$, nous constatons que les formules 14 et 15 sont toutes deux des analyses logiques de 11. Notons également que ces formules sont équivalentes dans le cadre de l'algèbre élémentaire des nombres réels.

Exemple Montrons que plusieurs analyses logiques de la pseudo-formule qui suit peuvent être proposées.

$$(1 \div (1 + 1)) < ((1 + 1) \div 1) \tag{16}$$

Il existe une unique pseudo-formule qui figure dans 16, à savoir 16 elle-même. Cette pseudo-formule est identique à la fois à $x < ((1+1) \div 1)\,[x := (1 \div (1+1))]$ et à $(1 \div (1+1)) < x\,[x := ((1+1) \div 1)]$. Elle admet donc exactement deux interprétations russelliennes (aux seules variables liées près) que sont 17 et 18.

$$\exists x\,((1 = ((1 + 1) \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = ((1 + 1) \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x < ((1 + 1) \div 1)) \tag{17}$$

$$\exists x\,(((1 + 1) = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,((1 + 1) = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge (1 \div (1 + 1)) < x) \tag{18}$$

Il s'ensuit qu'il existe exactement deux transformations russelliennes de 16. L'une consiste à remplacer dans 16 l'unique occurrence de 16 par 17. L'autre consiste à remplacer dans 16 l'unique occurrence de 16 par 18. De ce fait, ces deux transformations russelliennes correspondent respectivement à 17 et 18.

D'une part, il existe exactement trois pseudo-formules qui figurent dans 17 et admettent une interprétation russellienne. Seule la pseudo-formule $x < ((1 + 1) \div 1)$ est ici examinée. Cette pseudo-formule, qui est identique à $x < y\,[y := ((1 + 1) \div 1)]$, admet 19 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists y\,(((1 + 1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,((1 + 1) = (1 \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge x < y) \tag{19}$$

En remplaçant dans 17 l'unique occurrence de la pseudo-formule $x < ((1+1) \div 1)$ par 19, nous obtenons 20, qui est une transformation russellienne de 17.

$$\exists x\,((1 = ((1+1) \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = ((1+1) \cdot y) \to y = x)) \wedge \exists y\,(((1+1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,((1+1) = (1 \cdot z) \to z = y)) \wedge x < y)) \tag{20}$$

Par observation de la suite $\langle 16, 17, 20 \rangle$, nous constatons que la formule 20 est une analyse logique de 16.

D'autre part, il existe exactement trois pseudo-formules qui figurent dans 18 et admettent une interprétation russellienne. Seule la pseudo-formule $(1 \div (1+1)) < x$ est ici examinée. Cette pseudo-formule, qui est identique à $y < x\,[y := (1 \div (1+1))]$, admet 21 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists y\,((1 = ((1+1) \cdot y) \wedge \forall z\,(1 = ((1+1) \cdot z) \to z = y)) \wedge y < x) \tag{21}$$

En remplaçant dans 18 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div (1+1)) < x$ par 21, nous obtenons 22, qui est une transformation russellienne de 18.

$$\exists x\,(((1+1) = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,((1+1) = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge \exists y\,((1 = ((1+1) \cdot y) \wedge \forall z\,(1 = ((1+1) \cdot z) \to z = y)) \wedge y < x)) \tag{22}$$

Par observation de la suite $\langle 16, 18, 22 \rangle$, nous constatons que la formule 22 est une analyse logique de 16.

Il est à noter que les six analyses logiques possibles de la pseudo-formule $(1 \div (1+1)) < ((1+1) \div 1)$ sont toutes logiquement équivalentes.

Appendice 3

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \forall y \forall z \left((x \div y) = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)) \right)$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z \left(\iota x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \mid x_1 = z \right) \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)) \right)$$

$$\forall x \forall y \forall z \left(\exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 (x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1)) \wedge x_1 = z \right) \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)) \right)$$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z \, \iota x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \mid (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))) \right)$$

$$\forall x \forall y \forall z \exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 (x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1)) \wedge (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))) \right)$$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \, \iota x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \mid \forall z (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))) \right)$$

$$\forall x \forall y \exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 (x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1)) \wedge \forall z (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))) \right)$$

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \forall y \forall z\,(y \neq 0 \to ((x \div y) = z \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\,(y \neq 0 \to (\iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid x_1 = z) \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$$

$$\forall x \forall y \forall z\,(y \neq 0 \to (\exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 = z) \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\,(y \neq 0 \to \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

$$\forall x \forall y \forall z\,(y \neq 0 \to \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\, \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

$$\forall x \forall y \forall z \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

Quatrième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y\, \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid \forall z\,(y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

$$\forall x \forall y \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge \forall z\,(y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$$

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \forall y \forall z\,(y = 0 \to (x \div y) \neq z)$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\,(y = 0 \to \neg \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid x_1 = z))$$

$$\forall x \forall y \forall z\,(y = 0 \to \neg \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 = z))$$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\,(y = 0 \to \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid x_1 \neq z))$$

$$\forall x \forall y \forall z\,(y = 0 \to \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 \neq z))$$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y \forall z\, \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid (y = 0 \to x_1 \neq z))$$

$$\forall x \forall y \forall z \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (y = 0 \to x_1 \neq z))$$

Quatrième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$$\forall x \forall y\, \iota x_1\,(x = (y \cdot x_1) \mid \forall z\,(y = 0 \to x_1 \neq z))$$

$$\forall x \forall y \exists x_1\,((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1\,(x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge \forall z\,(y = 0 \to x_1 \neq z))$$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \neg \exists y \, \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid z = y)$

$\forall x \neg \exists y \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge z = y)$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \neg \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid \exists y \, z = y)$

$\forall x \neg \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge \exists y \, z = y)$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \, \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid \neg \exists y \, z = y)$

$\forall x \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge \neg \exists y \, z = y)$

Appendice 4

Exemple Spécifions la condition d'existence du pseudo-terme $(1 \div x)$.

Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists y\, (1 \div x) = y$, à savoir 23.

$$\exists y \exists z\, ((1 = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\, (1 = (x \cdot x_1) \to x_1 = z)) \wedge z = y) \tag{23}$$

Nous constatons alors que 23 est logiquement équivalent à 24.

$$\exists z\, (1 = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\, (1 = (x \cdot x_1) \to x_1 = z)) \tag{24}$$

En outre, comme 25 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 24 est algébriquement équivalent à 26.

$$\forall x \forall y\, (\exists z\, (x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1\, (x = (y \cdot x_1) \to x_1 = z)) \leftrightarrow y \neq 0) \tag{25}$$

$$x \neq 0 \tag{26}$$

De ce qui précède, nous concluons que la condition d'existence de $(1 \div x)$ est l'ensemble des valeurs assignables à x telles qu'elles rendent vraie la formule $x \neq 0$.

Exemple Spécifions la condition d'existence du pseudo-terme $(1 \div (x \div (x + 1)))$.

Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists y\, (1 \div (x \div (x + 1))) = y$, à savoir 27.

$$\exists y \exists z\, ((x = ((x + 1) \cdot z) \wedge \forall x_1\, (x = ((x + 1) \cdot x_1) \to x_1 = z)) \wedge \exists x\, ((1 = (z \cdot x) \wedge \forall x_1\, (1 = (z \cdot x_1) \to x_1 = x)) \wedge x = y)) \tag{27}$$

Nous constatons alors que 27 est logiquement équivalent à 28.

$$\exists z_1 \exists z_2 \left((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge \forall x_1 \left(x = ((x+1) \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z_1\right)\right) \wedge \left(1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge \forall x_2 \left(1 = (z_1 \cdot x_2) \rightarrow x_2 = z_2\right)\right)\right) \tag{28}$$

Comme 29 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 28 est algébriquement équivalent à 30.

$$\forall x \forall y \left(\exists z \left(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z\right)\right) \leftrightarrow y \neq 0\right) \tag{29}$$

$$\exists z_1 \exists z_2 \left((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge (x+1) \neq 0) \wedge (1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge z_1 \neq 0)\right) \tag{30}$$

Comme 31 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 30 est algébriquement équivalent à 32.

$$\forall x \forall y \forall z \left(x = (y \cdot z) \rightarrow (x = 0 \leftrightarrow (y = 0 \vee z = 0))\right) \tag{31}$$

$$\exists z_1 \exists z_2 \left(((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge (x+1) \neq 0) \wedge (1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge z_1 \neq 0)) \wedge x \neq 0\right) \tag{32}$$

Par 29 et 31, nous constatons que 32 est algébriquement équivalent à 33.

$$((x+1) \neq 0 \wedge x \neq 0) \tag{33}$$

De ce qui précède, nous concluons que la condition d'existence de $(1 \div (x \div (x+1)))$ est l'ensemble des valeurs assignables à x telles qu'elles rendent vraie la formule $((x+1) \neq 0 \wedge x \neq 0)$ ou, de façon abrégée, $(x \neq -1 \wedge x \neq 0)$.

Appendice 5

Exemple Vérifions que $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 34.

$$\forall x\,((x{\cdot}x) = x \rightarrow \exists y\,(((x{\cdot}x) = (x{\cdot}y) \wedge \forall z\,((x{\cdot}x) = (x{\cdot}z) \rightarrow z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x{\cdot}z) \wedge \forall x_1\,(x = (x{\cdot}x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge y = z))) \tag{34}$$

Nous constatons que 34 est logiquement équivalent à 35 et que 35 entraîne logiquement 36.

$$\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow \exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \rightarrow z = y)))) \tag{35}$$

$$((0 \cdot 0) = 0 \rightarrow \exists y\,(((0 \cdot 0) = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,((0 \cdot 0) = (0 \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge (0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \rightarrow z = y)))) \tag{36}$$

Comme 37 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 36 entraîne algébriquement 38 et 39.

$$\forall x\,(x \cdot 0) = 0 \tag{37}$$

$$(0 = 0 \rightarrow \exists y\,((0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge (0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \rightarrow z = y)))) \tag{38}$$

$$(0 = 0 \rightarrow \exists y\,(\forall z\, z = y \wedge \forall z\, z = y)) \tag{39}$$

Il reste alors à constater que 39 entraîne logiquement 40, 41 et 42.

$$\exists y\,(\forall z\, z = y \wedge \forall z\, z = y) \tag{40}$$

$$\exists y\,(0 = y \wedge 1 = y) \tag{41}$$

$$0 = 1 \tag{42}$$

Du fait que 34 entraîne algébriquement une contradiction, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$.

Exemple Vérifions que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique $x = 1$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow x = 1)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 43.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge y = z)) \rightarrow x = 1) \tag{43}$$

Nous constatons que 43 est logiquement équivalent à 44.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \rightarrow z = y))) \rightarrow x = 1) \tag{44}$$

Comme 45 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 44 est algébriquement équivalent à 46.

$$\forall x \forall y \left(\exists z \left(x = (y \cdot z) \land \forall x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z \right) \right) \leftrightarrow y \neq 0 \right) \tag{45}$$

$$\forall x \left(\exists y \left(((x \cdot x) = (x \cdot y) \land x \neq 0) \land (x = (x \cdot y) \land x \neq 0) \right) \rightarrow x = 1 \right) \tag{46}$$

Il reste alors à constater que 46 est logiquement équivalent à 47 et 48.

$$\forall x \forall y \left((((x \cdot x) = (x \cdot y) \land x = (x \cdot y)) \land x \neq 0) \rightarrow x = 1 \right) \tag{47}$$

$$\forall x \left(((x \cdot x) = x \land x \neq 0) \rightarrow x = 1 \right) \tag{48}$$

Du fait que 43 est algébriquement équivalent 48 et que 48 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x \left(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow x = 1 \right)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $x = 1$.

Exemple Vérifions que $x = 1$ a pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x \left(x = 1 \rightarrow ((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \right)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 49.

$$\forall x \left(x = 1 \rightarrow \exists y \left(((x \cdot x) = (x \cdot y) \land \forall z \left((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y \right)) \land \exists z \left((x = (x \cdot z) \land \forall x_1 \left(x = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z \right)) \land y = z \right) \right) \right) \tag{49}$$

Nous constatons que 49 est logiquement équivalent à 50 et 51.

$$\forall x\, (x = 1 \to \exists y\, (((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\, ((x \cdot x) = (x \cdot z) \to z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\, (x = (x \cdot z) \to z = y)))) \tag{50}$$

$$\exists y\, (((1 \cdot 1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\, ((1 \cdot 1) = (1 \cdot z) \to z = y)) \wedge (1 = (1 \cdot y) \wedge \forall z\, (1 = (1 \cdot z) \to z = y))) \tag{51}$$

Comme 52 est une hypothèse de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 51 est algébriquement équivalent à 53.

$$\forall x\, (x \cdot 1) = x \tag{52}$$

$$\exists y\, ((1 = y \wedge \forall z\, (1 = z \to z = y)) \wedge (1 = y \wedge \forall z\, (1 = z \to z = y))) \tag{53}$$

Il reste alors à constater que 53 est logiquement équivalent à 54 et 55.

$$\exists y\, ((1 = y \wedge 1 = y) \wedge (1 = y \wedge 1 = y)) \tag{54}$$

$$\exists y\, 1 = y \tag{55}$$

Du fait que 49 est algébriquement équivalent 55 et que 55 est un théorème logique, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\, (x = 1 \to ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $x = 1$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$.

Exemple Vérifions que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique $(x \cdot x) = x$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \to (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 56.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x{\cdot}x) = (x{\cdot}y) \wedge \forall z\,((x{\cdot}x) = (x{\cdot}z) \to z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x{\cdot}z) \wedge \forall x_1\,(x = (x{\cdot}x_1) \to x_1 = z)) \wedge y = z)) \to (x{\cdot}x) = x) \tag{56}$$

Nous constatons que 56 est logiquement équivalent à 57.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \to z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \to z = y))) \to (x \cdot x) = x) \tag{57}$$

Comme 58 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 57 est algébriquement équivalent à 59.

$$\forall x \forall y\,(\exists z\,(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = (y \cdot x_1) \to x_1 = z)) \leftrightarrow y \neq 0) \tag{58}$$

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x \neq 0) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge x \neq 0)) \to (x \cdot x) = x) \tag{59}$$

Il reste alors à constater que 59 est logiquement équivalent à 60 et 61.

$$\forall x \forall y\,((((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x = (x \cdot y)) \wedge x \neq 0) \to (x \cdot x) = x) \tag{60}$$

$$\forall x\,(((x \cdot x) = x \wedge x \neq 0) \to (x \cdot x) = x) \tag{61}$$

Du fait que 56 est algébriquement équivalent 61 et que 61 est un théorème logique, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $(x \cdot x) = x$.

Références

[1] A. Church, *Introduction to mathematical logic. Volume I*, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1956.

[2] M. Crabbé, *Notions de logique*, accessible en ligne à l'adresse : `http://logoi.be/crabbe/textes/logique.pdf`, 2019.

[3] G. Frege, *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik **100** (1892), 25–50.

[4] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen. II*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 405–431.

[5] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

[6] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[7] S. Neale, *Descriptions*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

[8] B. Russell, *On denoting*, Mind **14** (1905), no. 56, 479–493.

[9] ———, *Introduction to mathematical philosophy*, Dover Publications, New York, 1920.

[10] J. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts), 1967.

[11] P. F. Strawson, *On referring*, Mind **59** (1950), no. 235, 320–344.

[12] G. Sundholm, *Systems of deduction*, Handbook of philosophical logic. Volume I : Elements of classical logic (D. Gabbay and F. Guenthner, eds.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983, pp. 133–188.

[13] P. Suppes, *Introduction to logic*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1957.

[14] A. Tarski, *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[15] ———, *A decision method for elementary algebra and geometry*, Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (B. F. Caviness and J. R. Johnson, eds.), Springer-Verlag, Wien, 1998, pp. 24–84.

[16] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica. Volume I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

Table des matières