Résolution d'équations et déduction naturelle

Degauquier, Vincent

Publication date:
2018

Résolution d'équations et déduction naturelle*

Vincent Degauquier

> Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques.
>
> G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*

1 Introduction

De nombreux élèves rencontrent des difficultés quant à la maîtrise des mécanismes logico-déductifs inhérents à l'activité mathématique [1]. Ces mécanismes se situent bien souvent en filigrane de l'activité mathématique ; ce qui les rend difficilement identifiables. Cet article a pour objectif de mettre en exergue quelques-uns des mécanismes déductifs propositionnels qui peuvent intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. Pour ce faire, nous proposons une analyse de quelques résolutions d'équations à la lumière de la déduction naturelle.

La déduction naturelle est une approche formelle élaborée par G. Gentzen (1909–1945) visant à refléter le plus adéquatement possible les raisonnements logiques qui sont présents dans les démonstrations mathématiques [2, 3, 4]. En raison de sa précision conceptuelle et de sa proximité avec la pratique mathématique, elle constitue un cadre particulièrement commode pour la mise en lumière de l'arrière-plan logico-déductif à partir duquel sont partiquées les mathématiques.

Notre propos s'organise en trois parties. Nous présenterons d'abord un système de déduction naturelle pour la logique propositionnelle [6, 7]. Ensuite, nous analyserons trois extraits de résolutions d'équations au travers du prisme de la déduction naturelle et mettrons en évidence l'enchaînement des mécanismes déductifs qui y sont à l'œuvre. Enfin, nous montrerons que ces mécanismes sont variés et relèvent de différents niveaux de complexité.

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet LOGLANG mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

2 Déduction naturelle

La déduction naturelle est une approche formelle qui consiste à déduire une formule à partir d'autres au moyen de règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques. Une caractéristique essentielle de cette approche est qu'elle repose sur le concept d'hypothèse. Contrairement à l'axiomatique hilbertienne, où les déductions sont construites à partir d'axiomes, la déduction naturelle prend comme point de départ des hypothèses, qui pourront éventuellement être déchargées par la suite.

Un *langage (propositionnel)* $\mathcal{L}$ est composé d'un ensemble non vide de symboles propositionnels p_n (où $n \in \mathbb{N}$) ainsi que des symboles logiques $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. Les formules d'un langage $\mathcal{L}$ sont définies inductivement de la façon suivante.

$$A ::= p \mid \bot \mid \neg A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A)$$

Remarque Par la suite, nous utiliserons le symbole $\leftrightarrow$ comme abréviation. Aussi, nous noterons parfois $(A \leftrightarrow B)$ l'expression $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ où A et B désignent des formules d'un langage.

Un *raisonnement (propositionnel)* est un couple $\langle \Gamma, C \rangle$ où Γ est un ensemble fini de formules d'un langage et C est une formule de ce langage. Le raisonnement $\langle \Gamma, C \rangle$ est noté $\Gamma \vdash C$.

Un raisonnement $\Gamma \vdash C$ est *correct* s'il existe une déduction dont la conclusion est C et dont l'ensemble des hypothèses (non déchargées) est Γ.

Le concept de *déduction* ainsi que ceux d'hypothèse et de conclusion sont conjointement définis de façon inductive. Il est à noter que l'indice dont sont habituellement affectées les hypothèses d'une déduction est négligé dans le système exposé ci-dessous [7].

Déduction initiale

Toute formule A est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est $\{A\}$. En d'autres termes, cela signifie que toute formule peut être déduite d'elle-même.

Règles d'introduction et d'élimination de la conjonction

Règle d'introduction de la conjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A & B\end{matrix}}{(A \wedge B)}\wedge_I$$

est une déduction dont la conclusion est $(A \wedge B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. Autrement dit, la règle d'introduction de la conjonction appliquée simultanément à une déduction de A et une déduction de B produit une déduction de $(A \wedge B)$.

Règles d'élimination de la conjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \wedge B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ (A \wedge B)\end{matrix}}{A}\wedge_{E_D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ (A \wedge B)\end{matrix}}{B}\wedge_{E_G}$$

sont des déductions dont la conclusion est respectivement A et B et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Ainsi, lorsqu'elles sont appliquées à une déduction de $(A \wedge B)$, la règle d'élimination de la conjonction droite produit une déduction de A et la règle d'élimination de la conjonction gauche produit une déduction de B.

Règles d'introduction et d'élimination de l'implication

Règle d'introduction de l'implication. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \mathcal{D}_1 \\ B\end{matrix}}{(A \to B)}\to_I$$

est une déduction dont la conclusion est $(A \to B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{A\}$. La règle d'introduction de l'implication appliquée à une déduction de B reposant éventuellement sur l'hypothèse A produit une déduction de $(A \to B)$ où l'hypothèse A est déchargée.

Règle d'élimination de l'implication. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \to B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ (A \rightarrow B) & A \end{matrix}}{B} \rightarrow_E$$

est une déduction dont la conclusion est B et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. Cela signifie que la règle d'élimination de l'implication appliquée simultanément à une déduction de $(A \rightarrow B)$ et une déduction de A produit une déduction de B. Remarquons que cette règle correspond à celle du *modus ponens*, que l'on retrouve traditionnellement dans les systèmes axiomatiques hilbertiens.

Règles d'introduction et d'élimination de la disjonction

Règles d'introduction de la disjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion A ou de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_1 \\ A \end{matrix}}{(A \vee B)} \vee_{I_D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_1 \\ B \end{matrix}}{(A \vee B)} \vee_{I_G}$$

sont des déductions dont la conclusion est $(A \vee B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Autrement dit, la règle d'introduction de la disjonction droite appliquée à une déduction de A produit une déduction de $(A \vee B)$. De la même manière, la règle d'introduction de la disjonction gauche appliquée à une déduction de B produit une déduction de $(A \vee B)$.

Règle d'élimination de la disjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \vee B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion C dont l'ensemble des hypothèses est H_2 et si $\mathcal{D}_3$ est une déduction de conclusion C dont l'ensemble des hypothèses est H_3, alors

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ (A \vee B) & C & C \end{matrix}}{C} \vee_E$$

est une déduction dont la conclusion est C et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup (H_2 \setminus \{A\}) \cup (H_3 \setminus \{B\})$. La règle d'élimination de la disjonction appliquée simultanément à une déduction de $(A \vee B)$, une déduction de C reposant éventuellement sur l'hypothèse A et une déduction de C reposant éventuellement sur l'hypothèse B produit une déduction de C où A est déchargée des hypothèses de la deuxième déduction et B est déchargée des hypothèses de la troisième déduction.

Règles d'introduction et d'élimination de la négation

Règle d'introduction de la négation. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\perp$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{D}_1\\ \perp\end{array}}{\neg A}\ \neg_I$$

est une déduction dont la conclusion est $\neg A$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{A\}$. La règle d'introduction de la négation appliquée à une déduction qui repose éventuellement sur l'hypothèse A et dont la conclusion est l'absurde produit une déduction de $\neg A$ où l'hypothèse A est déchargée.

Règle d'élimination de la négation. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\neg A$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \neg A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ A\end{array}}{\perp}\ \neg_E$$

est une déduction dont la conclusion est $\perp$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. La règle d'élimination de la négation appliquée simultanément à une déduction de $\neg A$ et une déduction de A produit une déduction dont la conclusion est l'absurde.

Règle de l'absurde intuitionniste

Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\perp$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \perp\end{array}}{A}\ \perp_i$$

est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Cette règle fait écho à l'adage latin *e falso (sequitur) quodlibet*, qui signifie que du faux suit n'importe quoi. Autrement dit, lorsqu'elle est appliquée à une déduction dont la conclusion est l'absurde, cette règle produit une déduction de conclusion A, quelle que soit la formule A. Le système obtenu en ajoutant cette règle aux règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques détermine la logique intuitionniste des propositions.

Règle de l'absurde classique

Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\perp$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \mathcal{D}_1 \\ \perp\end{matrix}}{A}\ \perp_c$$

est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{\neg A\}$. Cette règle correspond à l'élimination de la double négation. Aussi, lorsqu'elle est appliquée à une déduction qui repose éventuellement sur l'hypothèse $\neg A$ et dont la conclusion est l'absurde, cette règle produit une déduction de A où l'hypothèse $\neg A$ est déchargée. Le système formé de cette règle et des précédentes détermine la logique classique des propositions.

Il suit de la définition qui précède que toute déduction peut être représentée sous la forme d'une arborescence finie de formules dont la racine (située en bas) est la conclusion et dont les feuilles (situées en haut) sont les hypothèses (déchargées ou non).

Exemple Nous présentons ici une déduction qui garantit la correction du raisonnement $(p_1 \to p_3), (p_2 \to p_3) \vdash ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

$$\dfrac{\dfrac{[(p_1 \vee p_2)] \qquad \dfrac{(p_1 \to p_3) \qquad [p_1]}{p_3}\ {\to_E} \qquad \dfrac{(p_2 \to p_3) \qquad [p_2]}{p_3}\ {\to_E}}{p_3}\ \vee_E}{((p_1 \vee p_2) \to p_3)}\ {\to_I}$$

3 Résolution d'équations

La *résolution d'une équation* dont la seule variable est α consiste à identifier, parmi les valeurs assignables à α, celles qui rendent l'équation vraie. En pratique, résoudre une telle équation revient généralement à déterminer une expression logico-arithmétique qui lui est équivalente et qui permet d'en identifier aisément les solutions.

Exemple La résolution de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ peut s'effectuer en montrant, par le calcul du discriminant, qu'elle est équivalente à l'expression logico-arithmétique $x = -2$ ou $x = -3$.

Cette section vise à mettre en exergue l'enchaînement des mécanismes déductifs propositionnels qui sont à l'œuvre dans certaines résolutions d'équations et qui demeurent le plus souvent implicites. Pour ce faire, trois extraits de résolutions d'équations sont présentés et traduits dans un formalisme inspiré de celui de la déduction naturelle.

Résolution de l'équation $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 4x + 3} = 0$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ $\quad \frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$ si et seulement si $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

$\mathcal{H}_2$ $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = 5$.

$\mathcal{H}_3$ $\quad x^2 - 4x + 3 = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = 1$.

$\mathcal{C}$ $\quad$ Si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$. Par $\mathcal{H}_1$, il s'ensuit que $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Par $\mathcal{H}_2$, nous en déduisons que $x = 3$ ou $x = 5$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x \neq 3$ et $x \neq 1$. De ce qui précède, il suit que $x = 5$. En conséquence, si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

Résolution de l'équation $|x - 2| = 5$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ Si $0 \leq x-2$, alors $|x-2| = x-2$.

$\mathcal{H}_2$ Si $x-2 < 0$, alors $|x-2| = -(x-2)$.

$\mathcal{H}_3$ Si $|x-2| = 5$ et $|x-2| = x-2$, alors $x = 7$.

$\mathcal{H}_4$ Si $|x-2| = 5$ et $|x-2| = -(x-2)$, alors $x = -3$.

$\mathcal{C}$ Si $|x-2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $|x-2| = 5$. Deux cas seulement sont possibles, $0 \leq x-2$ ou $x-2 < 0$. Supposons que $0 \leq x-2$. De $\mathcal{H}_1$, il suit que $|x-2| = x-2$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x = 7$. Supposons que $x-2 < 0$. De $\mathcal{H}_2$, il suit que $|x-2| = -(x-2)$. Par $\mathcal{H}_4$, nous en déduisons que $x = -3$. En conséquence, si $|x-2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Résolution de l'équation $\dfrac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$ si et seulement si $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$.

$\mathcal{H}_2$ $x-3 = 0$ si et seulement si $x = 3$.

$\mathcal{H}_3$ $(x-3)^2 = 0$ si et seulement si $x = 3$.

$\mathcal{C}$ $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$. Par $\mathcal{H}_1$, il s'ensuit que $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$. Par $\mathcal{H}_2$, nous en déduisons que $x \neq 3$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x = 3$. Ce qui est absurde. En conséquence, $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

Afin de rendre compte le plus adéquatement possible des mécanismes déductifs présents dans la résolution des équations considérées ci-dessus, nous avons intégré dans leur traduction des étapes qui ne correspondent à aucune instance de règle autorisée par le formalisme de la déduction naturelle (cf. DM, MT, SD et TE). À proprement parler, ces traductions ne sont donc pas des déductions. Pour cette raison, les étapes constitutives de ces quasi-déductions sont désignées par un trait discontinu plutôt que continu (comme c'est le cas dans le formalisme de la déduction naturelle).

Traduction de la résolution de l'équation $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$

Vocabulaire

p_1	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$	p_4	$x=3$
p_2	$x^2-8x+15=0$	p_5	$x=5$
p_3	$x^2-4x+3=0$	p_6	$x=1$

$$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)), (p_2 \leftrightarrow (p_4 \vee p_5)), (p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee p_6)) \vdash (p_1 \rightarrow p_5)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\mathcal{H}_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_2 \leftrightarrow (p_4 \vee p_5))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_2 \rightarrow (p_4 \vee p_5))$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\AxiomC{$[p_1]$}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$(p_2 \wedge \neg p_3)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{p_2}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$(p_4 \vee p_5)$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_3$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee p_6))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_G}$}
\UnaryInfC{$((p_4 \vee p_6) \rightarrow p_3)$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\AxiomC{$[p_1]$}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$(p_2 \wedge \neg p_3)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_G}$}
\UnaryInfC{$\neg p_3$}
\dashedLine
\RightLabel{MT}
\BinaryInfC{$\neg(p_4 \vee p_6)$}
\dashedLine
\RightLabel{DM}
\UnaryInfC{$(\neg p_4 \wedge \neg p_6)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$\neg p_4$}
\dashedLine
\RightLabel{SD}
\BinaryInfC{p_5}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_I$}
\UnaryInfC{$(p_1 \rightarrow p_5)$}
\end{prooftree}
$$

Traduction de la résolution de l'équation $|x-2| = 5$

Vocabulaire

p_1	$\lvert x-2\rvert = 5$	p_4	$x = 7$
p_2	$\lvert x-2\rvert = x-2$	p_5	$x = -3$
p_3	$\lvert x-2\rvert = -(x-2)$	p_6	$0 \leq x-2$

$$(p_6 \to p_2), (\neg p_6 \to p_3), ((p_1 \wedge p_2) \to p_4), ((p_1 \wedge p_3) \to p_5) \vdash (p_1 \to (p_4 \vee p_5))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p_6 \vee \neg p_6)}\;\mathsf{TE} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{H}_3}{((p_1 \wedge p_2) \to p_4)} \quad \dfrac{[p_1] \quad \dfrac{\overset{\mathcal{H}_1}{(p_6 \to p_2)} \quad [p_6]}{p_2}\;{\to_E}}{(p_1 \wedge p_2)}\;{\wedge_I}}{p_4}\;{\to_E}}{(p_4 \vee p_5)}\;{\vee_{I_D}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{H}_4}{((p_1 \wedge p_3) \to p_5)} \quad \dfrac{[p_1] \quad \dfrac{\overset{\mathcal{H}_2}{(\neg p_6 \to p_3)} \quad [\neg p_6]}{p_3}\;{\to_E}}{(p_1 \wedge p_3)}\;{\wedge_I}}{p_5}\;{\to_E}}{(p_4 \vee p_5)}\;{\vee_{I_G}}}{(p_4 \vee p_5)}\;{\vee_E}}{(p_1 \to (p_4 \vee p_5))}\;{\to_I}$$

Traduction de la résolution de l'équation $\dfrac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Vocabulaire

p_1	$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	p_3	$x - 3 = 0$
p_2	$(x-3)^2 = 0$	p_4	$x = 3$

$$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)), (p_3 \leftrightarrow p_4), (p_2 \leftrightarrow p_4) \vdash \neg p_1$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\mathcal{H}_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_3 \leftrightarrow p_4)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_G}$}
\UnaryInfC{$(p_4 \rightarrow p_3)$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\AxiomC{$[p_1]$}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$(p_2 \wedge \neg p_3)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_G}$}
\UnaryInfC{$\neg p_3$}
\dashedLine
\RightLabel{MT}
\BinaryInfC{$\neg p_4$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_3$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_2 \leftrightarrow p_4)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_2 \rightarrow p_4)$}
\AxiomC{$\mathcal{H}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{$(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))$}
\AxiomC{$[p_1]$}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{$(p_2 \wedge \neg p_3)$}
\dashedLine
\RightLabel{$\wedge_{E_D}$}
\UnaryInfC{p_2}
\dashedLine
\RightLabel{$\rightarrow_E$}
\BinaryInfC{p_4}
\dashedLine
\RightLabel{$\neg_E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\dashedLine
\RightLabel{$\neg_I$}
\UnaryInfC{$\neg p_1$}
\end{prooftree}
$$

4 Mécanismes logico-déductifs

Les traductions qui précèdent permettent d'identifier de façon précise et systématique les mécanismes logico-déductifs présents dans les résolutions d'équations abordées. De plus, elles permettent d'identifier les hypothèses sur lesquelles repose l'enchaînement de ces mécanismes (cf. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, etc.). Dès lors que ces hypothèses sont admises, il ressort des traductions que les mécanismes qui interviennent dans la résolution des équations sont exclusivement d'ordre logique. En effet, la correction des étapes qui composent les quasi-déductions est indépendante du contenu mathématique associé à chacun des symboles propositionnels qui y figurent.

4.1 Pluralité des mécanismes logico-déductifs

Les résolutions d'équations que nous avons examinées mobilisent un large éventail de mécanismes déductifs. En effet, considérées conjointement, les traductions de ces résolutions d'équations couvrent la totalité des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques. Seules deux règles du formalisme de la déduction naturelle sont absentes des traductions, à savoir la règle de l'absurde intuitionniste et celle de l'absurde classique.

	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$	$\lvert x-2\rvert=5$	$\frac{(x-3)^2}{x-3}=0$
$\wedge_I$	$\times$	$\surd$	$\times$
$\wedge_{E_D}$	$\surd$	$\times$	$\surd$
$\wedge_{E_G}$	$\surd$	$\times$	$\surd$
$\rightarrow_I$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$\rightarrow_E$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\vee_{I_D}$	$\times$	$\surd$	$\times$
$\vee_{I_G}$	$\times$	$\surd$	$\times$
$\vee_E$	$\times$	$\surd$	$\times$
$\neg_I$	$\times$	$\times$	$\surd$
$\neg_E$	$\times$	$\times$	$\surd$
$\perp_i$	$\times$	$\times$	$\times$
$\perp_c$	$\times$	$\times$	$\times$

D'autre part, la diversité des mécanismes déductifs identifiés dans les résolutions d'équations excède celle des règles de la déduction naturelle, en ce sens que certaines étapes de leur traduction ne correspondent à aucune instance de règle du formalisme de la déduction naturelle.

	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$	$\lvert x-2\rvert=5$	$\frac{(x-3)^2}{x-3}=0$
DM	$\surd$	$\times$	$\times$
MT	$\surd$	$\times$	$\surd$
SD	$\surd$	$\times$	$\times$
TE	$\times$	$\surd$	$\times$

4.2 Complexité des mécanismes logico-déductifs

Les étapes des traductions qui ne correspondent à aucune instance de règle autorisée par le formalisme de la déduction naturelle peuvent être conçues comme des instances de règles abréviatives. Ces règles abréviatives, contrairement à celles de la déduction naturelle, s'appuient sur un raisonnement dont la correction est considérée comme préalablement établie. Les formes de raisonnements corrects auxquelles font appel les règles abréviatives DM, MT, SD et TE sont présentées ci-dessous et une déduction est proposée pour chacun d'eux [5].

L'une des lois de De Morgan (DM) : $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee B) \qquad \dfrac{[A]}{(A\vee B)}\vee_{I_D}}{\bot}\neg_E}{\neg A}\neg_I \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(A\vee B)\qquad \dfrac{[B]}{(A\vee B)}\vee_{I_G}}{\bot}\neg_E}{\neg B}\neg_I}{(\neg A\wedge\neg B)}\wedge_I$$

Le *modus tollens* (MT) : $(A \to B), \neg B \vdash \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\neg B \qquad \dfrac{(A\to B)\qquad [A]}{B}\to_E}{\bot}\neg_E}{\neg A}\neg_I$$

Le syllogisme disjonctif (SD) : $(A \vee B), \neg A \vdash B$

$$\dfrac{(A \vee B) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \qquad [A]}{\bot}\,\neg_E}{B}\,\bot_i \qquad [B]}{B}\,\vee_E$$

Le principe du tiers exclu (TE) : $\vdash (A \vee \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \qquad \dfrac{[A]}{(A \vee \neg A)}\,\vee_{I_D}}{\bot}\,\neg_E}{\neg A}\,\neg_I \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \qquad \dfrac{[\neg A]}{(A \vee \neg A)}\,\vee_{I_G}}{\bot}\,\neg_E}{A}\,\bot_c}{\bot}\,\neg_E}{(A \vee \neg A)}\,\bot_c$$

Remarque Bien que les règles $\bot_i$ et $\bot_c$ n'apparaissent pas explicitement dans la traduction des résolutions d'équations examinées, celles-ci sont présentes dans les déductions qui assurent la correction des raisonnements sur lesquels s'appuient respectivement les règles abréviatives SD et TE.

L'usage de règles abréviatives dans la traduction des résolutions d'équations met en évidence l'emploi de mécanismes déductifs complexes. À la lumière de la déduction naturelle, deux types de mécanismes déductifs peuvent être distingués. Les mécanismes déductifs simples correspondent à des instances de règles de la déduction naturelle, qui ont pour effet d'introduire ou d'éliminer un unique connecteur logique (à l'exception des règles $\bot_i$ et $\bot_c$). Au contraire, les mécanismes déductifs complexes correspondent à des instances de règles abréviatives qui mobilisent implicitement la correction de raisonnements dans lesquels interviennent généralement plusieurs connecteurs logiques.

Il ressort de cette analyse que les mécanismes déductifs présents dans certaines résolutions d'équations sont tantôt simples tantôt complexes. Parmi les mécanismes déductifs simples, figurent notamment le *modus ponens* (qui correspond à la règle d'élimination de l'implication), le raisonnement par l'absurde (qui correspond à la règle d'introduction de la négation) et la disjonction de cas (qui correspond à la règle d'élimination de la disjonction). Parmi les mécanismes déductifs complexes, figurent entre autres les lois de De Morgan (dont l'une d'elles correspond à la règle abréviative DM), le *modus tollens* (qui correspond à la règle abréviative MT) et le syllogisme disjonctif (qui correspond à la règle abréviative SD).

Remarque Deux niveaux de complexité pourraient être distingués parmi les mécanismes déductifs simples suivant qu'ils correspondent à une règle qui autorise ou non le déchargement d'une ou plusieurs hypothèses.

- ▷ Mécanismes déductifs simples
  - ○ Règles sans déchargement d'hypothèse
    - — le *modus ponens* ($\rightarrow_E$)
  - ○ Règles avec déchargement d'hypothèse
    - — la disjonction de cas ($\vee_E$)
    - — le raisonnement par l'absurde ($\neg_I$)
- ▷ Mécanismes déductifs complexes
    - — les lois de De Morgan (DM)
    - — le *modus tollens* (MT)
    - — le syllogisme disjonctif (SD)

5 Conclusion

Nous avons identifié, au travers du formalisme de la déduction naturelle, un ensemble de mécanismes déductifs propositionnels pouvant intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. En outre, nous avons dégagé une classification de ces mécanismes qui permet de rendre compte à la fois de leur pluralité et de leurs différents niveaux de complexité.

Références

[1] S. Epp, *The role of logic in teaching proof*, The American Mathematical Monthly **110** (2003), no. 10, 886–899.

[2] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen. I*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 176–210.

[3] ———, *Untersuchungen über das logische Schließen. II*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 405–431.

[4] ———, *Recherches sur la déduction logique* (trad. R. Feys et J. Ladrière), Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

[5] T. Lucas, I. Berlanger, and V. Degauquier, *Initiation à la logique formelle. Exercices et corrigés*, De Boeck, Bruxelles, 2014.

[6] D. Prawitz, *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965.

[7] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic proof theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Déduction naturelle **2**

3 Résolution d'équations **7**

4 Mécanismes logico-déductifs **12**

4.1 Pluralité des mécanismes logico-déductifs 12

4.2 Complexité des mécanismes logico-déductifs 13

5 Conclusion **15**