La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes

Degauquier, Vincent

Publication date:
2018

La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes*

Vincent Degauquier

1 Introduction

Deux traits semblent communs à tous les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin. D'une part, tout énoncé de problème est formulé, totalement ou partiellement, en langue naturelle. L'usage fait de la langue dans la formulation d'un problème est d'ailleurs rarement anecdotique. Dans la plupart des énoncés de problème figurent en effet des phrases contenant des informations nécessaires à sa résolution. D'autre part, toute résolution de problème nécessite d'effectuer, à des degrés divers, des raisonnements. Quel que soit le domaine mathématique dont relève un problème ou l'année d'étude des élèves auxquels il s'adresse, sa résolution consiste à déduire certaines informations à partir d'autres contenues dans l'énoncé.

Par ailleurs, la logique nous enseigne que la correction d'un raisonnement repose essentiellement sur la structure logique des expressions qui le composent. Autrement dit, la structure logique des expressions constitutives d'un raisonnement permet à elle seule de déterminer si ce raisonnement est correct. À titre d'exemple, le raisonnement présenté ci-dessous [1] est correct quelles que soient les propriétés désignées par les mots « homme » et « mortel » et quel que soit l'objet désigné par le mot « Socrate ».

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tout homme est mortel.}\\ \text{Socrate est un homme.}\end{array}}{\text{Socrate est mortel.}}$$

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet Loglang mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

1. La ligne qui sépare les prémisses de la conclusion du raisonnement se lit « donc ».

Pour s'en convaincre, constatons que ce raisonnement reste correct lorsque l'on y substitue le mot « cheval » au mot « homme », le mot « véloce » au mot « mortel » et le mot « Bucéphale » au mot « Socrate ».

$$\frac{\text{Tout cheval est véloce.} \quad \text{Bucéphale est un cheval.}}{\text{Bucéphale est véloce.}}$$

Si résoudre un problème nécessite d'effectuer des raisonnements corrects à partir de phrases de la langue naturelle et si effectuer des raisonnements corrects nécessite d'identifier — de quelque façon que ce soit — la structure logique des expressions qui le composent, alors résoudre un problème nécessite d'identifier la structure logique des phrases de la langue naturelle.

Cet article a pour objectif d'établir deux points. Le premier est que la plupart des phrases en langue naturelle, sinon toutes, sont ambiguës eu égard à leur structure logique. Le second est que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, nous examinerons la langue naturelle à la lumière du langage de la logique contemporaine. Aussi, nous proposerons une analyse logique de phrases en langue naturelle, dont certaines sont issues d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin.

Notre propos s'organise en quatre parties. Tout d'abord, nous exposerons les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine. À cette occasion, nous évoquerons deux étapes décisives de son développement, à savoir le projet d'une langue symbolique universelle imaginé par G. W. Leibniz (1646–1716) et la *Begriffsschrift* élaborée par G. Frege (1848–1925). Ensuite, nous présenterons le langage de la logique des prédicats du premier ordre avec égalité. Nous détaillerons alors, à l'aide d'exemples empruntés à l'arithmétique, les différents types de symboles qui constituent son alphabet ainsi que les règles syntaxiques qui définissent l'ensemble des expressions bien formées de ce langage. Une fois le langage de la logique dépeint, nous montrerons qu'il constitue un outil précieux pour l'analyse des langues naturelles. Nous constaterons que la plupart des phrases françaises, sinon toutes, sont ambiguës en ce sens que plusieurs analyses logiques en sont possibles. Enfin, nous analyserons un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Nous montrerons que certaines phrases figurant dans l'énoncé du problème sont ambiguës relativement à leur structure logique et que cette ambiguïté touche à la signification même du problème.

2 Les origines du langage de la logique

Les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine résultent d'un double constat. D'une part, certaines vérités ne peuvent être établies avec certitude qu'en s'assurant de la correction de nos raisonnements. Parmi ces dernières figurent les vérités mathématiques. Même si l'intuition peut nous amener à conjecturer certaines propriétés mathématiques, elle n'en garantit pas pour autant l'exactitude. Seul un raisonnement correct permet de les établir avec certitude. D'autre part, les langues naturelles sont incapables d'exprimer adéquatement les structures logiques sur lesquelles repose la correction des raisonnements. L'opacité de la structure logique des phrases des langues naturelles constitue en effet un obstacle à la conduite des raisonnements.

2.1 Projet d'une langue symbolique universelle

L'idée suivant laquelle l'élaboration d'une langue symbolique universelle constitue une voie privilégiée vers la certitude fut, semble-t-il, formulée pour la première fois par Leibniz. Cette langue aurait pour vocation de formuler des raisonnements de telle façon qu'il serait possible de s'assurer de leur correction au moyen de méthodes purement arithmétiques. Précisons, au départ d'une citation de Leibniz lui-même, en quoi consiste cette langue [6].

> L'unique moyen de redresser nos raisonnemens est de les rendre aussi sensibles que le sont ceux des Mathematiciens, en sorte qu'on puisse trouver son erreur à veue d'œil, et quand il y a des disputes entre les gens, on puisse dire seulement : contons, sans autre ceremonie, pour voir lequel a raison.
>
> Si les paroles estoient faits suivant un artifice que je voy possible, mais dont ceux qui ont fait des langues universelles ne se sont pas avisés on pourroit arriver à cet effect par les paroles mêmes, ce qui seroit d'une utilité incroyable pour la vie humaine ; Mais en attendant il y a un autre chemin moins beau, mais qui est deja ouvert, au lieu que l'autre deuvroit estre fait tout de nouveau. C'est en se servant de characteres à l'exemple des mathematiciens, qui sont propres de fixer nostre Esprit, et en y adjoutant une preuve des nombres.
>
> Car par ce moyen ayant reduit un raisonnement de morale, de physique, de médecine ou de Metaphysique a ces termes ou characteres, on pourra tellement a tout moment l'accompagner de l'epreuve de nombres, qu'il sera impossible de se tromper si on ne le veut bien. Ce qui est peut estre une des plus importantes decouvertes dont on se soit avisé de long temps.

Selon Leibniz, une langue adaptée à la conduite de nos raisonnements devrait être symbolique. Dans la mesure où les symboles permettent d'appréhender les concepts plus adéquatement que les mots, cette langue s'inspirerait davantage de celle des mathématiques que de la langue naturelle. De plus, la langue imaginée par Leibniz devrait être universelle. Étant admis que la correction d'un raisonnement repose exclusivement sur la structure logique des expressions qui y figurent, cette langue permettrait de déterminer si un raisonnement est correct quel que soit le domaine de connaissance dont il relève.

2.2 Élaboration d'une écriture conceptuelle

Certes, Leibniz est le premier à imaginer une langue symbolique universelle et à en percevoir l'intérêt pour effectuer des raisonnements. Pourtant, il n'en propose aucune description précise. S'inscrivant dans le projet initié par Leibniz, Frege élabore près de deux siècles plus tard une écriture conceptuelle spécifiquement dédiée à la conduite des raisonnements. C'est cette *Begriffsschrift*[2] qui marque véritablement la naissance du langage de la logique contemporaine [3]. Notons cependant que bien que la plupart des concepts constitutifs de la logique contemporaine soient présents dans cet ouvrage, l'écriture conceptuelle de Frege demeure très éloignée, dans sa présentation, du langage de la logique tel qu'on peut le trouver aujourd'hui dans les ouvrages de logique.

> De sorte que [...] quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'immiscer de façon inaperçue, tout devait reposer sur l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Comme je m'efforçais à répondre à cette exigence le plus strictement possible, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre la précision que mon but exigeait. De ce besoin naquit l'idée de la présente écriture conceptuelle. Elle doit ainsi d'abord servir à vérifier de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à indiquer toute présupposition qui veut s'insinuer de façon inaperçue de sorte que sa provenance puisse être recherchée. C'est pourquoi j'ai renoncé à exprimer tout ce qui est sans signification pour la *déduction.*

L'écriture conceptuelle de Frege résulte donc de l'impossibilité d'exprimer dans la langue naturelle et de façon parfaitement précise les mécanismes déductifs qui assurent la correction des raisonnements. En ce sens,

2. Nous avons choisi de traduire cette expression par « écriture conceptuelle » plutôt que par « idéographie ». En cela, nous suivons la traduction anglaise proposée par J. L. Austin [4].

il semble demeurer dans la langue naturelle une forme d'opacité irréductible qui rend toute expression intrinsèquement ambiguë relativement à sa structure logique. L'écriture conceptuelle se démarque de la langue naturelle précisément en cela qu'elle tient compte uniquement de ce qui détermine la correction des raisonnements, à savoir la structure logique des expressions qui les composent.

3 Le langage de la logique contemporaine

Si le langage de la logique contemporaine est héritier de l'écriture conceptuelle de Frege, cette dernière est elle-même inspirée du langage de l'arithmétique [3]. À ce titre, deux observations préliminaires concernant le langage de l'arithmétique semblent éclairantes pour appréhender celui de la logique.

D'une part, tous les symboles n'y désignent pas des concepts de même nature. En effet, ils peuvent aussi bien désigner des nombres que des fonctions ou des relations. D'autre part, tous les symboles ne désignent pas un concept spécifique. Alors que certains symboles désignent un concept déterminé, d'autres sont susceptibles d'en désigner plusieurs.

L'usage conjoint de symboles dont l'interprétation peut varier et d'autres dont l'interprétation est fixe confère à certaines expressions arithmétiques leur statut de vérité universelle. Une expression arithmétique est vraie en vertu de sa structure. Dans le langage de l'arithmétique, comme dans celui de la logique, ce sont les symboles dont l'interprétation est fixe qui déterminent la structure d'une expression. Aussi, dès lors que les symboles $+$, 0 et $=$ reçoivent leur interprétation usuelle, l'expression arithmétique $x + 0 = x$ demeure vraie quelle que soit la valeur assignée à x. En ce sens, la vérité d'une expression arithmétique repose sur les symboles dont l'interprétation est fixe tandis que son universalité repose sur les symboles dont l'interprétation est variable.

Afin d'illustrer les deux observations qui précèdent, les symboles qui figurent dans l'expression $x + 0 = x$ sont classés dans le tableau ci-dessous selon la nature des concepts qu'ils désignent et le caractère fixe ou variable de cette désignation.

3. Le mot « arithmétique » désigne ici la discipline mathématique qui a pour objet les propriétés générales des nombres, les fonctions sur les nombres et les relations entre les nombres [10].

	Interprétation fixe	Interprétation variable
Nombre	0	x
Fonction	$+$	
Relation	$=$	

Un *langage prédicatif du premier ordre avec égalité* (ou *langage logique*) est composé d'un alphabet et d'une syntaxe.

3.1 Alphabet

Un *alphabet* est un ensemble de symboles comprenant :

— les symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$
— les variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$
— les parenthèses :), (

Outre ces symboles, un alphabet peut comprendre :

— des symboles prédicatifs n-aires $(n > 0)$: p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, $\ldots$
— des symboles propositionnels : p, q, r, s, p_1, $\ldots$
— des symboles fonctionnels n-aires $(n > 0)$: f^n, g^n, h^n, f_1^n, $\ldots$
— des constantes : a, b, c, d, a_1, $\ldots$

Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes d'un alphabet forment l'ensemble des *symboles propres* de cet alphabet. Dans la mesure où deux alphabets ne peuvent différer que par l'ensemble de leurs symboles propres, spécifier un alphabet revient à en spécifier les symboles propres.

3.2 Syntaxe

Une expression d'un langage est une suite finie de symboles de l'alphabet de ce langage. Certaines expressions d'un langage sont appelées des termes et d'autres des formules. Ces expressions sont formées au moyen de règles syntaxiques exhaustives. De cette façon, les termes et les formules d'un langage sont uniquement les expressions construites conformément à ces règles.

Un *terme* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un terme.
— Toute constante est un terme.
— Tout symbole fonctionnel n-aire suivi de n termes est un terme.

Une *formule* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Tout symbole propositionnel est une formule.
— Tout symbole prédicatif n-aire suivi de n termes est une formule.
— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule.
— Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
— Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules.
— Si α est une variable et A est une formule, alors $\forall \alpha\, A$ et $\exists \alpha\, A$ sont des formules.

3.3 Sémantique

Les symboles d'un langage logique peuvent être répartis en différentes catégories suivant le type de concept qu'ils désignent. Les symboles prédicatifs n-aires désignent des relations à n arguments [4]. Les symboles propositionnels désignent des propositions. Les symboles fonctionnels n-aires désignent des fonctions à n arguments. Les constantes désignent des objets.

Les symboles logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ et $\exists$ désignent des opérateurs qui expriment respectivement les concepts de négation, conjonction, disjonction, implication, quantification universelle et quantification existentielle. Ces concepts sont volontiers traduits en français par les expressions « ne ... pas », « et », « ou », « si ... alors », « tout » et « au moins un ». Le symbole logique $=$ désigne, quant à lui, la relation binaire d'identité.

Les variables, comme les constantes, désignent des objets. Cependant, contrairement aux constantes, les variables ne désignent pas un objet spécifique. Elles sont ainsi susceptibles de désigner n'importe quel objet.

Les parenthèses ne possèdent pas, à proprement parler, de signification. Elles sont des symboles de ponctuation. En effet, les règles syntaxiques adoptées dans cet article rendent nécessaire l'usage de ce type de symboles afin d'éviter toute forme d'ambiguïté [5].

Par ailleurs, il est possible de distinguer les symboles d'un langage logique relativement au degré de variabilité de l'interprétation qu'ils peuvent recevoir. Les symboles logiques possèdent une interprétation qui est fixée quel que soit le contexte [6]. Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes possèdent une interprétation qui peut varier d'un contexte à l'autre. Les symboles de variable possèdent une interprétation qui peut varier au sein d'un même contexte.

4. Lorsqu'une relation n'admet qu'un seul argument, elle est assimilée à une propriété.
5. Les parenthèses ne sont pourtant pas essentielles aux langages logiques. Comme l'illustre la notation polonaise, il est possible de s'en passer tout en évitant l'ambiguïté.
6. La notion informelle de contexte fait ici écho au concept de modèle en logique [9].

Ces deux catégorisations des symboles d'un langage logique peuvent être combinées et synthétisées sous la forme du tableau suivant.

	Interprétation fixée quel que soit le contexte	Interprétation variable d'un contexte à l'autre	Interprétation variable au sein d'un même contexte
Objet		a, b, c, d	x, y, z
Fonction		f^n, g^n, h^n	
Proposition		p, q, r, s	
Relation	$=$	p^n, q^n, r^n, s^n	
Opérateur	$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$		

L'interprétation des termes et des formules d'un langage logique est définie à partir de celle des symboles de sorte que tout terme désigne un objet et que toute formule est susceptible de vérité ou de fausseté.

4 Une analyse logique des langues naturelles

Une analyse logique d'une phrase de la langue naturelle consiste à en identifier les constituants logiques ainsi que les relations qu'ils entretiennent [7]. Autrement dit, analyser logiquement une phrase revient à lui associer une formule d'un langage logique sur base d'un vocabulaire fixé préalablement [7, 2, 1].

Un *vocabulaire* $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ pour un langage logique $\mathcal{L}$ consiste à associer à tout symbole propre de $\mathcal{L}$ une expression de la langue naturelle de sorte qu'à des symboles distincts correspondent des expressions distinctes. Autrement dit, un vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ est une application injective de l'ensemble des symboles propres de $\mathcal{L}$ dans l'ensemble des expressions de la langue naturelle [8].

Une *analyse logique* d'une phrase relativement à un vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ est une traduction de cette phrase par une formule de $\mathcal{L}$. Il est à noter que

7. Le concept d'analyse logique est assimilable à celui de structure logique.

8. Notons que l'assignation d'une expression de la langue naturelle à un symbole propre d'un langage logique doit respecter certaines règles. Dans la mesure où l'étude de ces règles nécessiterait de rentrer dans des considérations linguistiques qui dépassent largement le cadre de notre propos, nous les passerons sous silence.

la possibilité de proposer une traduction (adéquate) d'une phrase dépend directement du vocabulaire choisi. Bien que nous n'abordions pas explicitement la question épineuse des critères qui permettent de juger du caractère adéquat d'une traduction, celle-ci demeure en filigrane de notre propos tout au long de cet article.

Une phrase est *ambiguë* si elle admet plusieurs analyses logiques relativement à un même vocabulaire. Nous distinguons deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle.

Une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. Plus précisément, une phrase est *ambiguë constitutivement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent. Plus précisément, une phrase est *ambiguë relationnellement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Remarquons qu'il suit immédiatement de ces définitions que tout phrase ambiguë l'est nécessairement constitutivement ou relationnellement.

4.1 Ambiguïté constitutive

Afin d'illustrer l'ambiguïté constitutive des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Cinq est différent de la racine carrée de dix.

Soit le langage logique $\mathcal{L}$ dont les symboles propres sont : p, p^1, r^2, s^2, f^1, g^2, a, b, c, d. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ suivant :

p	Cinq est différent de la racine carrée de dix.
p^1	différent de la racine carrée de dix
r^2	différent de ...
s^2	racine carrée de ...
f^1	la racine carrée de ...
g^2	la racine ... de ...
a	cinq
b	la racine carrée de dix
c	dix
d	deux

Analyse logique 1 : p

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p\}$. Bien que cette traduction puisse sembler fort grossière, elle n'en demeure pas moins pertinente dans la mesure où elle rend compte adéquatement de la structure propositionnelle de la phrase. En effet, aucune mention explicite n'y est faite des opérateurs propositionnels de négation, conjonction, disjonction et implication.

Analyse logique 2 : p^1a

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, a\}$. Cette traduction est conforme à la théorie aristotélicienne des syllogismes en ce sens qu'elle rend compte de la structure logique de la phrase au travers de la distinction entre sujet et prédicat. En effet, elle signifie que la propriété d'être différent de la racine carrée de dix s'applique au nombre cinq. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas d'exprimer les relations à plusieurs arguments.

Analyse logique 3 : r^2ab

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{r^2, a, b\}$. Il s'agit d'une traduction qui rend compte de la notion de dissemblance au moyen d'une relation à deux arguments. Cette traduction se distingue des interprétations mathématiques usuelles où la notion de dissemblance n'est pas conçue comme une relation primitive mais bien comme la négation de la relation d'identité.

Analyse logique 4 : $\neg a = b$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{a, b\}$. Dans cette traduction, contrairement à la précédente, la notion de dissemblance est conçue comme la négation de la relation d'identité. En mathématiques, le symbole logique de négation précédant une formule identitaire est bien souvent délaissé au profit d'une notation plus compacte faisant intervenir le symbole $\neq$.

Analyse logique 5 : $(\exists x(s^2xc \wedge \forall y(s^2yc \rightarrow y = x)) \wedge \neg s^2ac)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{s^2, a, c\}$. La notion de racine carrée est ici interprétée comme une relation plutôt que comme une fonction. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle dix possède exactement une racine carrée et cinq n'est pas cette racine carrée. Cette analyse logique n'est pas sans rappeler la problématique des descriptions définies traitée par Russell [8].

Analyse logique 6 : $\neg a = f^1 c$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{f^1, a, c\}$. Cette traduction, qui se rapproche davantage de l'interprétation mathématique usuelle, rend compte de la notion de racine carrée au moyen d'une fonction à un argument.

Analyse logique 7 : $\neg a = g^2 dc$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{g^2, a, d, c\}$. Dans cette traduction, la notion de racine carrée est conçue comme une fonction à deux arguments tels que le premier est l'indice de la racine et le second est son radicand.

Nous constatons que toutes ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë constitutivement. Cette ambiguïté est qualifiée de « constitutive » dans la mesure où elle repose sur l'identification des éléments conceptuels mobilisés par la phrase (quelles que soient les relations qu'ils entretiennent). Déterminer l'ensemble des symboles propres qui doivent figurer dans l'analyse logique d'une phrase revient en fait à identifier l'ensemble des concepts mobilisés par cette phrase. En ce sens, l'ambiguïté constitutive met en évidence que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une même phrase.

En général, l'identification des constituants logiques d'une phrase dépend du contexte de son énonciation. C'est pourquoi il semble illusoire de pouvoir identifier de façon univoque les constituants logiques d'une phrase, si élémentaire soit-elle. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë constitutivement.

4.2 Ambiguïté relationnelle

Afin d'illustrer l'ambiguïté relationnelle des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Les multiples de neuf et de douze sont des multiples de trois.

Soit le langage logique $\mathcal{L}'$ dont les symboles propres sont : p^1_3, p^1_9, p^1_{12}. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ suivant :

p^1_3	nombre naturel multiple de trois
p^1_9	nombre naturel multiple de neuf
p^1_{12}	nombre naturel multiple de douze

Analyse logique 1 : $\forall x\,((p^1_9 x \to p^1_3 x) \wedge (p^1_{12} x \to p^1_3 x))$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1_3, p^1_9, p^1_{12}\}$. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de neuf est multiple de trois et tout nombre naturel multiple de douze est également multiple de trois.

Analyse logique 2 : $\forall x\,((p^1_9 x \vee p^1_{12} x) \to p^1_3 x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1_3, p^1_9, p^1_{12}\}$. Cette traduction, plus libre, rend compte de l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de douze ou de neuf est multiple de trois.

Analyse logique 3 : $\forall x\,((p^1_9 x \wedge p^1_{12} x) \to p^1_3 x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1_3, p^1_9, p^1_{12}\}$. L'idée véhiculée par cette traduction est que tout nombre naturel qui est multiple à la fois de douze et de neuf est multiple de trois.

Nous constatons que ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë relationnellement. L'aspect relationnel de cette ambiguïté est suggéré par le fait que même si l'identification des constituants logiques d'une phrase est arrêtée, il est possible d'en donner différentes traductions selon l'identification des relations logiques qu'entretiennent ces constituants. Autrement dit, différentes articulations peuvent être envisagées pour un même découpage conceptuel.

Il est à noter également que si les trois analyses logiques exposées antérieurement sont vraies en arithmétique élémentaire, elles ne sont pas logiquement équivalentes [9]. En effet, la première et la deuxième sont équivalentes entre elles mais la troisième n'est pas équivalente aux deux précédentes. En fait, la première analyse, comme la deuxième, entraîne logiquement la troisième. Deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent ne sont donc pas nécessairement logiquement équivalentes.

Par ailleurs, il est possible de déduire de la définition de langage logique que, quelle que soit l'analyse logique qui est proposée d'une phrase, il en existe une autre dont les constituants logiques sont identiques et qui lui est logiquement équivalente. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë relationnellement.

9. Pour s'en convaincre, une analyse similaire à celle proposée ci-dessus peut être appliquée à la phrase « Les multiples de trois et de quatre sont des multiples de douze. ».

5 La résolution de problèmes

L'ambiguïté logique de la langue naturelle maintenant constatée, il s'agit de montrer que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, la présente section est consacrée à l'analyse d'un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Il s'agit du dix-neuvième problème de la seconde épreuve du quatorzième RMT, intitulé « Chasse au trésor ».

L'autre jour, en fouillant dans le grenier, Marc a découvert une vieille malle qui contenait un parchemin et un coffre. En lisant le parchemin, il a compris que le coffre contenait un trésor protégé par une serrure avec une combinaison à 3 chiffres (de 1 à 9). En outre, le parchemin donnait ces informations :

- *a)* *Dans* $\langle 3, 4, 5\rangle$ *un seul des chiffres est correct, mais n'est pas bien placé.*
- *b)* *Dans* $\langle 2, 3, 6\rangle$ *aucun de ces chiffres n'est correct.*
- *c)* *Dans* $\langle 6, 7, 8\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
- *d)* *Dans* $\langle 4, 7, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
- *e)* *Dans* $\langle 8, 5, 9\rangle$ *deux chiffres sont corrects, mais un seul est bien placé.*
- *f)* *Dans* $\langle 5, 8, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

Pouvez-vous aider Marc à trouver la bonne combinaison pour ouvrir le coffre ? Expliquez comment vous avez résolu ce problème. [10]

5.1 Analyse de l'énoncé du problème

Plutôt que de proposer une analyse logique de la totalité du problème, nous focaliserons notre attention sur l'expression « un seul chiffre est correct et bien placé ». Cette expression apparaît à trois reprises dans l'énoncé du problème ; nous limiterons notre analyse à la phrase dans laquelle figure la dernière occurrence.

Dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

Soit le langage logique $\mathcal{L}''$ dont les symboles propres sont : p^1, q^1, r^1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ suivant :

p^1	chiffre bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$
q^1	chiffre correct
r^1	chiffre figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$
c_i	le chiffre « i » ($1 \leq i \leq 9$)

10. La bonne combinaison mentionnée dans l'analyse *a priori* du problème est $\langle 5, 7, 9\rangle$.

Analyse logique forte : $(\exists! x\,(r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\,((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))$

Cette analyse logique [11] est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. L'interprétation de la phrase correspondant à cette traduction est qu'il existe exactement un chiffre correct dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que ce chiffre est en outre bien placé.

Analyse logique faible : $\exists! x\,((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. Elle traduit l'idée selon laquelle il existe exactement un chiffre dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ qui est à la fois correct et bien placé.

Dans la mesure où elles sont relatives au même vocabulaire et les symboles propres qui y figurent sont identiques, ces deux analyses logiques témoignent de l'ambiguïté relationnelle de la phrase considérée. D'autre part, elles ne sont pas logiquement équivalentes. Dans le cadre de la logique formelle, il est en effet possible de montrer que l'analyse forte entraîne l'analyse faible alors que l'analyse faible n'entraîne pas l'analyse forte.

5.2 Analyse d'un raisonnement

Afin de mettre en exergue l'impact que peut avoir cette ambiguïté logique sur la résolution du problème, nous nous proposons d'examiner le raisonnement suivant [12].

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Dans } \langle 5,8,2\rangle \text{ le chiffre « 5 » est correct.}\\ \text{Dans } \langle 5,8,2\rangle \text{ un seul chiffre est correct et bien placé.}\end{array}}{\text{Dans } \langle 5,8,2\rangle \text{ le chiffre « 5 » est bien placé et tous les autres sont incorrects.}}$$

Notre analyse du raisonnement s'inspire du projet leibnizien d'une langue symbolique universelle. En cela, elle consiste à traduire dans un langage logique chacune des phrases qui composent le raisonnement de sorte à pouvoir ensuite juger de sa correction sur base d'un système déductif approprié [13].

Dans cette perspective, la première et la troisième phrase du raisonnement sont analysées relativement au vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$. La première phrase exprime l'idée que le chiffre « 5 » figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que ce chiffre est correct. Aussi peut-elle être fidèlement traduite par la formule $(r^1c_5 \wedge q^1c_5)$.

11. Le symbole $\exists$ suivi d'un point d'exclamation se lit « il existe *exactement* un ». Formellement, $\exists!\alpha\, A$ est une abréviation de $\exists\alpha\,(A \wedge \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha))$ où β est une variable distincte de α qui ne figure pas dans la formule A [5].

12. Une variante de ce raisonnement figure dans l'analyse *a priori* du problème.

13. Nous entendons par là tout système axiomatique qui satisfait le théorème de complétude pour la logique classique du premier ordre avec égalité.

La troisième phrase, quant à elle, signifie que le chiffre « 5 » est bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que tout chiffre différent de « 5 » qui figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est nécessairement incorrect. Ce que l'on traduira volontiers par la formule $(p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))$.

Selon que l'on opte pour l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible de la deuxième phrase du raisonnement, celui-ci donne lieu à deux formulations distinctes dans le langage logique $\mathcal{L}''$:

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique forte

$$\begin{array}{c}(r^1 c_5 \wedge q^1 c_5)\\ (\exists! x\,(r^1 x \wedge q^1 x) \wedge \forall y\,((r^1 y \wedge q^1 y) \rightarrow p^1 y))\\ \hline (p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))\end{array}$$

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique faible

$$\begin{array}{c}(r^1 c_5 \wedge q^1 c_5)\\ \exists! x\,((r^1 x \wedge q^1 x) \wedge p^1 x)\\ \hline (p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))\end{array}$$

Alors que le raisonnement basé sur l'analyse logique forte est correct, celui basé sur l'analyse logique faible ne l'est pas. Afin d'établir cette double affirmation, nous privilégierons un argument informel à un examen technique s'appuyant sur un système déductif.

Dans le cas de l'interprétation forte, nous supposons que le chiffre « 5 », qui figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$, est correct et qu'un seul chiffre figurant dans cette combinaison est correct. Il s'ensuit que tout chiffre autre que « 5 » figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est incorrect. Par ailleurs, nous supposons également que le seul chiffre correct figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est en outre bien placé. Comme ce chiffre est « 5 », nous en déduisons qu'il est bien placé dans la combinaison. En conséquence, le chiffre « 5 » est bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et tout autre chiffre y figurant est incorrect.

Au contraire, dans le cas de l'interprétation faible, la dernière phrase du raisonnement ne peut être déduite des deux précédentes. Autrement dit, la vérité des deux premières phrases n'entraîne pas la vérité de la troisième. Il existe en effet un contre-exemple où le chiffre « 8 » est correct et bien placé, le chiffre « 5 » est correct mais n'est pas bien placé et le chiffre « 2 » n'est ni correct ni bien placé. Un tel contre-exemple rend vraies les prémisses du raisonnement alors qu'il rend fausse sa conclusion.

En résumé, nous constatons que l'ambiguïté logique d'une phrase figurant dans l'énoncé d'un problème peut avoir une incidence sur la correction des raisonnements effectués dans le cadre de sa résolution. Suivant que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre, un même raisonnement peut être considéré comme correct ou incorrect.

5.3 Analyse de la solution du problème

Dans la mesure où l'ambiguïté logique influe sur les cheminements déductifs qui conduisent à la solution d'un problème, il n'est pas rare qu'elle donne lieu à des réponses différentes [14]. Le problème qui nous occupe fait pourtant exception à cette règle. En effet, que l'on retienne l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible, la solution qu'il convient d'y apporter demeure inchangée. À cet égard, deux remarques nous semblent essentielles.

Premièrement, l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler. En effet, il ne suffit pas, lors de la relecture d'un problème, de comparer les réponses apportées par chacun pour s'assurer que ce problème échappe à toute ambiguïté préjudiciable à sa bonne compréhension. En revanche, il est nécessaire pour cela d'examiner l'enchaînement des raisonnements effectués et d'en vérifier la correction. C'est seulement de cette façon qu'une ambiguïté comme celle que nous avons traitée peut éventuellement être identifiée.

Deuxièmement, l'ambiguïté logique peut avoir un impact sur le degré de complexité d'un problème. Comme nous l'avons mentionné, l'analyse logique forte entraîne l'analyse logique faible. Cela signifie que si un cheminement déductif effectué au départ de l'énoncé du problème est correct relativement à l'analyse faible, alors il est également correct relativement à l'analyse forte [15]. Au contraire, certains cheminements déductifs corrects relativement à l'analyse forte ne le sont pas relativement à l'analyse faible. Il apparaît donc qu'identifier un cheminement déductif permettant de résoudre le problème est davantage aisé lorsqu'on adopte l'analyse logique forte que lorsqu'on adopte l'analyse logique faible.

6 Conclusion

Il ressort de la présente discussion que les phrases en langue naturelle sont ambiguës eu égard à leur structure logique et que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes.

14. Le problème du RMT « Des carrés sur une figure » (25.II.04) en est un bon exemple. Un examen des copies d'élèves de la Section belge nous a en effet permis d'identifier deux analyses logiques du problème conduisant à des solutions différentes.

15. L'argument formel qui sous-tend notre propos est le suivant. Soient deux formules A et B telles que le raisonnement A *donc* B est correct. Alors, pour toute formule C et toute suite de formules Γ, si Γ, B *donc* C est correct, alors Γ, A *donc* C est également correct.

À la lumière du langage de la logique contemporaine, nous avons distingué deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle. L'ambiguïté constitutive traduit l'idée que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. D'autre part, l'ambiguïté relationnelle capture l'idée que plusieurs articulations conceptuelles peuvent être associées à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent.

Qu'elle soit constitutive ou relationnelle, l'ambiguïté d'une phrase peut bien souvent être levée grâce au contexte de son énonciation. En effet, le contexte permet habituellement d'identifier, parmi les différentes analyses logiques possibles, celle qui est la plus pertinente et, partant, qu'il convient de retenir. Toutefois, il arrive que le contexte d'énonciation ne permette pas d'identifier une unique analyse logique. Un cas particulièrement critique d'ambiguïté survient lorsque plusieurs analyses logiques pertinentes sont envisageables et que ces analyses ne sont pas logiquement équivalentes. Le problème du RMT intitulé « Chasse au trésor » illustre ce cas de figure.

Notre examen de ce problème révèle que deux analyses logiques pertinentes et non logiquement équivalentes peuvent être associées à l'une des phrases qui figurent dans l'énoncé. Il s'avère que cette ambiguïté touche à la signification du problème tout entier au point que sa résolution appelle des cheminements déductifs différents selon que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre. En outre, nous avons constaté que l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler et qu'elle peut avoir une incidence sur le degré de complexité d'un problème.

En général, l'ambiguïté logique des langues naturelles nous semble constituer un défi didactique plutôt qu'une déficience à laquelle il conviendrait de remédier. Dans une telle perspective, il apparaît alors que l'identification de structures logiques adéquates à la résolution d'un problème est un objet d'apprentissage et que toute résolution de problème comporte une marge interprétative irréductible.

Références

[1] M. Crabbé, *La loglangue facile en quinze leçons*, accessible en ligne à l'adresse : `http://logoi.be/crabbe/textes/loglangue.pdf`, 2017.

[2] O. Ducrot, *La preuve et le dire. Langage et logique*, Maison Mame, Paris, 1973.

[3] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle (Saale), 1879.

[4] ______, *The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (trad. J. L. Austin), Harper Torchbooks, New York, 1960.

[5] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.

[6] G. W. Leibniz, *Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer*, Opuscules et fragments inédits de Leibniz (L. Couturat, ed.), Félix Alcan, Paris, 1903, pp. 175–182.

[7] W. V. O. Quine, *Elementary logic. Revised edition*, Harper Torchbooks, New York, 1965.

[8] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, Dover Publications, New York, 1920.

[9] J. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts), 1967.

[10] A. Tarski, *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Les origines du langage de la logique **3**

2.1 Projet d'une langue symbolique universelle 3

2.2 Élaboration d'une écriture conceptuelle 4

3 Le langage de la logique contemporaine **5**

3.1 Alphabet 6

3.2 Syntaxe 6

3.3 Sémantique 7

4 Une analyse logique des langues naturelles **8**

4.1 Ambiguïté constitutive 9

4.2 Ambiguïté relationnelle 11

5 La résolution de problèmes **13**

5.1 Analyse de l'énoncé du problème 13

5.2 Analyse d'un raisonnement 14

5.3 Analyse de la solution du problème 16

6 Conclusion **16**