Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

Degauquier, Vincent

Publication date:
2020

Link to publication

Citation for pulished version (HARVARD):
Degauquier, V 2020, *Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique*.

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 28. Apr. 2024

Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

Vincent Degauquier

2020

La première chose qu'on peut remarquer est que la correction d'un raisonnement ne dépend que de sa forme (c'est en cela qu'on dit que la logique est formelle) et non de la signification des mots qui y figurent.

G. Dowek, *La logique* (2015)

Introduction

Le point de départ des réflexions consignées dans ce recueil d'articles réside dans quelques faits théoriques et empiriques qui sont synthétisés dans les six paragraphes qui suivent.

§1 Le raisonnement déductif est un élément constitutif des mathématiques [10, 2]. Si ce dernier trouve son expression la plus explicite dans les démonstrations, sa présence excède largement ce cadre — au point qu'il semble ne pouvoir y avoir d'activité mathématique sans raisonnement [1].

§2 La correction d'un raisonnement repose essentiellement sur la structure logique des expressions qui le composent [8]. Autrement dit, la structure logique des expressions qui constituent un raisonnement permet à elle seule de déterminer si ce raisonnement est correct.

§3 Si toute activité mathématique rigoureuse nécessite d'effectuer des raisonnements corrects et si effectuer des raisonnements corrects nécessite d'identifier — de quelque façon que ce soit — la structure logique des expressions qui les composent, alors toute activité mathématique rigoureuse nécessite d'identifier la structure logique des expressions qu'elle mobilise. Aussi la maîtrise des mathématiques passe-t-elle par la maîtrise de la langue dans laquelle elles sont formulées [1].

§4 La langue mathématique est un mélange de langue naturelle et d'une langue — que l'on qualifie parfois de symbolique — élaborée artificiellement par les mathématiciens au fil des siècles. Les expressions mathématiques sont ainsi de trois sortes : celles formulées exclusivement en langue naturelle, celles formulées exclusivement en langue symbolique et celles composées à la fois de syntagmes de la langue naturelle et de syntagmes de la langue symbolique.

§5 Malgré leur apparente transparence, les expressions mathématiques sont le plus souvent opaques quant à leur structure logique, et cela qu'elles ressortissent à la langue naturelle ou à la langue symbolique. Il apparaît en

1. L'article du présent recueil intitulé « Résolution d'équations et déduction naturelle » étudie en détail la place qu'occupent les raisonnements dans la résolution d'équations.

effet que ces expressions sont ambiguës en ce sens que plusieurs structures logiques pertinentes peuvent leur être associées [2].

§6 Certaines difficultés observées dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sont directement liées à l'identification de la structure logique des expressions qui y interviennent [7, 6, 5]. C'est pourquoi une analyse logique de ces expressions ainsi que des relations qu'elles entretiennent au sein des raisonnements représente un véritable enjeu pour la didactique des mathématiques.

Les trois articles rassemblés dans ce recueil poursuivent un objectif commun, à savoir proposer une analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique. Chaque article vise d'une part à préciser la structure logique des expressions mathématiques et d'autre part à expliciter leur rôle dans la conduite des raisonnements. Pour l'essentiel, l'analyse logique proposée dans ces articles consiste en une traduction des expressions de la langue mathématique dans le langage de la logique contemporaine [9, 4, 3].

Le premier article, intitulé « La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes », examine quelques phrases françaises issues d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin. Il montre que la plupart des phrases en langue naturelle sont ambiguës eu égard à leur structure logique et que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur les raisonnements menés dans le cadre de la résolution de problèmes.

Le deuxième article, intitulé « Résolution d'équations et déduction naturelle », analyse la structure logique de raisonnements mathématiques. Il identifie, au travers du formalisme de la déduction naturelle, un ensemble de mécanismes déductifs propositionnels pouvant intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. En outre, il dégage une classification de ces mécanismes qui permet de rendre compte à la fois de leur pluralité et de leurs différents niveaux de complexité.

Le troisième article, intitulé « Description définie et division par zéro », interroge la signification du symbole de division à la lumière de la théorie russellienne des descriptions définies. Il étudie de la sorte le statut des conditions d'existence associées à certaines expressions algébriques ainsi que la correction de certains raisonnements effectués dans le cadre de la résolution d'équations.

2. Tandis que l'article intitulé « La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes » met en évidence la pluralité des structures logiques pertinentes pour des expressions formulées en langue naturelle, l'article intitulé « Description définie et division par zéro » met en exergue cette même pluralité pour des expressions formulées en langue symbolique.

Références

[1] J. L. Austin and A. G. Howson, *Language and mathematical education*, Educational Studies in Mathematics **10** (1979), no. 2, 161–197.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970.

[3] M. Crabbé, *La loglangue facile en quinze leçons*, accessible en ligne à l'adresse : `http://logoi.be/crabbe/textes/loglangue.pdf`, 2015.

[4] O. Ducrot, *La preuve et le dire. Langage et logique*, Maison Mame, Paris, 1973.

[5] V. Durand-Guerrier, *Logic in mathematics education*, Encyclopedia of mathematics education (S. Lerman, ed.), Springer, Dordrecht, 2014, pp. 361–364.

[6] V. Durand-Guerrier, P. Boero, N. Douek, S. Epp, and D. Tanguay, *Examining the role of logic in teaching proof*, Proof and proving in mathematics education (G. Hanna and M. de Villiers, eds.), Springer, Dordrecht, 2012, pp. 369–389.

[7] S. Epp, *The role of logic in teaching proof*, The American Mathematical Monthly **110** (2003), no. 10, 886–899.

[8] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle (Saale), 1879.

[9] W. V. O. Quine, *Elementary logic. Revised edition*, Harper Torchbooks, New York, 1965.

[10] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, Dover Publications, New York, 1920.

La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes*

1 Introduction

Deux traits semblent communs à tous les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin. D'une part, tout énoncé de problème est formulé, totalement ou partiellement, en langue naturelle. L'usage fait de la langue dans la formulation d'un problème est d'ailleurs rarement anecdotique. Dans la plupart des énoncés de problème figurent en effet des phrases contenant des informations nécessaires à sa résolution. D'autre part, toute résolution de problème nécessite d'effectuer, à des degrés divers, des raisonnements. Quel que soit le domaine mathématique dont relève un problème ou l'année d'étude des élèves auxquels il s'adresse, sa résolution consiste à déduire certaines informations à partir d'autres contenues dans l'énoncé.

Par ailleurs, la logique nous enseigne que la correction d'un raisonnement repose essentiellement sur la structure logique des expressions qui le composent. Autrement dit, la structure logique des expressions constitutives d'un raisonnement permet à elle seule de déterminer si ce raisonnement est correct. À titre d'exemple, le raisonnement présenté ci-dessous [1] est correct quelles que soient les propriétés désignées par les mots « homme » et « mortel » et quel que soit l'objet désigné par le mot « Socrate ».

Tout homme est mortel.
Socrate est un homme.

Socrate est mortel.

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet LOGLANG mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

1. La ligne qui sépare les prémisses de la conclusion du raisonnement se lit « donc ».

Pour s'en convaincre, constatons que ce raisonnement reste correct lorsque l'on y substitue le mot « cheval » au mot « homme », le mot « véloce » au mot « mortel » et le mot « Bucéphale » au mot « Socrate ».

Tout cheval est véloce.
Bucéphale est un cheval.

Bucéphale est véloce.

Si résoudre un problème nécessite d'effectuer des raisonnements corrects à partir de phrases de la langue naturelle et si effectuer des raisonnements corrects nécessite d'identifier — de quelque façon que ce soit — la structure logique des expressions qui le composent, alors résoudre un problème nécessite d'identifier la structure logique des phrases de la langue naturelle.

Cet article a pour objectif d'établir deux points. Le premier est que la plupart des phrases en langue naturelle, sinon toutes, sont ambiguës eu égard à leur structure logique. Le second est que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, nous examinerons la langue naturelle à la lumière du langage de la logique contemporaine. Aussi, nous proposerons une analyse logique de phrases en langue naturelle, dont certaines sont issues d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin.

Notre propos s'organise en quatre parties. Tout d'abord, nous exposerons les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine. À cette occasion, nous évoquerons deux étapes décisives de son développement, à savoir le projet d'une langue symbolique universelle imaginé par G. W. Leibniz (1646–1716) et la *Begriffsschrift* élaborée par G. Frege (1848–1925). Ensuite, nous présenterons le langage de la logique des prédicats du premier ordre avec égalité. Nous détaillerons alors, à l'aide d'exemples empruntés à l'arithmétique, les différents types de symboles qui constituent son alphabet ainsi que les règles syntaxiques qui définissent l'ensemble des expressions bien formées de ce langage. Une fois le langage de la logique dépeint, nous montrerons qu'il constitue un outil précieux pour l'analyse des langues naturelles. Nous constaterons que la plupart des phrases françaises, sinon toutes, sont ambiguës en ce sens que plusieurs analyses logiques en sont possibles. Enfin, nous analyserons un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Nous montrerons que certaines phrases figurant dans l'énoncé du problème sont ambiguës relativement à leur structure logique et que cette ambiguïté touche à la signification même du problème.

2 Les origines du langage de la logique

Les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine résultent d'un double constat. D'une part, certaines vérités ne peuvent être établies avec certitude qu'en s'assurant de la correction de nos raisonnements. Parmi ces dernières figurent les vérités mathématiques. Même si l'intuition peut nous amener à conjecturer certaines propriétés mathématiques, elle n'en garantit pas pour autant l'exactitude. Seul un raisonnement correct permet de les établir avec certitude. D'autre part, les langues naturelles sont incapables d'exprimer adéquatement les structures logiques sur lesquelles repose la correction des raisonnements. L'opacité de la structure logique des phrases des langues naturelles constitue en effet un obstacle à la conduite des raisonnements.

2.1 Projet d'une langue symbolique universelle

L'idée suivant laquelle l'élaboration d'une langue symbolique universelle constitue une voie privilégiée vers la certitude fut, semble-t-il, formulée pour la première fois par Leibniz. Cette langue aurait pour vocation de formuler des raisonnements de telle façon qu'il serait possible de s'assurer de leur correction au moyen de méthodes purement arithmétiques. Précisons, au départ d'une citation de Leibniz lui-même, en quoi consiste cette langue [6].

> L'unique moyen de redresser nos raisonnemens est de les rendre aussi sensibles que le sont ceux des Mathematiciens, en sorte qu'on puisse trouver son erreur à veue d'œil, et quand il y a des disputes entre les gens, on puisse dire seulement : contons, sans autre ceremonie, pour voir lequel a raison.
>
> Si les paroles estoient faits suivant un artifice que je voy possible, mais dont ceux qui ont fait des langues universelles ne se sont pas avisés on pourroit arriver à cet effect par les paroles mêmes, ce qui seroit d'une utilité incroyable pour la vie humaine ; Mais en attendant il y a un autre chemin moins beau, mais qui est deja ouvert, au lieu que l'autre deuvroit estre fait tout de nouveau. C'est en se servant de characteres à l'exemple des mathematiciens, qui sont propres de fixer nostre Esprit, et en y adjoutant une preuve des nombres.
>
> Car par ce moyen ayant reduit un raisonnement de morale, de physique, de médecine ou de Metaphysique a ces termes ou characteres, on pourra tellement a tout moment l'accompagner de l'epreuve de nombres, qu'il sera impossible de se tromper si on ne le veut bien. Ce qui est peut estre une des plus importantes decouvertes dont on se soit avisé de long temps.

Selon Leibniz, une langue adaptée à la conduite de nos raisonnements devrait être symbolique. Dans la mesure où les symboles permettent d'appréhender les concepts plus adéquatement que les mots, cette langue s'inspirerait davantage de celle des mathématiques que de la langue naturelle. De plus, la langue imaginée par Leibniz devrait être universelle. Étant admis que la correction d'un raisonnement repose exclusivement sur la structure logique des expressions qui y figurent, cette langue permettrait de déterminer si un raisonnement est correct quel que soit le domaine de connaissance dont il relève.

2.2 Élaboration d'une écriture conceptuelle

Certes, Leibniz est le premier à imaginer une langue symbolique universelle et à en percevoir l'intérêt pour effectuer des raisonnements. Pourtant, il n'en propose aucune description précise. S'inscrivant dans le projet initié par Leibniz, Frege élabore près de deux siècles plus tard une écriture conceptuelle spécifiquement dédiée à la conduite des raisonnements. C'est cette *Begriffsschrift*[2] qui marque véritablement la naissance du langage de la logique contemporaine [3]. Notons cependant que bien que la plupart des concepts constitutifs de la logique contemporaine soient présents dans cet ouvrage, l'écriture conceptuelle de Frege demeure très éloignée, dans sa présentation, du langage de la logique tel qu'on peut le trouver aujourd'hui dans les ouvrages de logique.

> De sorte que [...] quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'immiscer de façon inaperçue, tout devait reposer sur l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Comme je m'efforçais à répondre à cette exigence le plus strictement possible, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre la précision que mon but exigeait. De ce besoin naquit l'idée de la présente écriture conceptuelle. Elle doit ainsi d'abord servir à vérifier de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à indiquer toute présupposition qui veut s'insinuer de façon inaperçue de sorte que sa provenance puisse être recherchée. C'est pourquoi j'ai renoncé à exprimer tout ce qui est sans signification pour la *déduction*.

L'écriture conceptuelle de Frege résulte donc de l'impossibilité d'exprimer dans la langue naturelle et de façon parfaitement précise les mécanismes déductifs qui assurent la correction des raisonnements. En ce sens,

2. Nous avons choisi de traduire cette expression par « écriture conceptuelle » plutôt que par « idéographie ». En cela, nous suivons la traduction anglaise proposée par J. L. Austin [4].

il semble demeurer dans la langue naturelle une forme d'opacité irréductible qui rend toute expression intrinsèquement ambiguë relativement à sa structure logique. L'écriture conceptuelle se démarque de la langue naturelle précisément en cela qu'elle tient compte uniquement de ce qui détermine la correction des raisonnements, à savoir la structure logique des expressions qui les composent.

3 Le langage de la logique contemporaine

Si le langage de la logique contemporaine est héritier de l'écriture conceptuelle de Frege, cette dernière est elle-même inspirée du langage de l'arithmétique [3]. À ce titre, deux observations préliminaires concernant le langage de l'arithmétique semblent éclairantes pour appréhender celui de la logique.

D'une part, tous les symboles n'y désignent pas des concepts de même nature. En effet, ils peuvent aussi bien désigner des nombres que des fonctions ou des relations. D'autre part, tous les symboles ne désignent pas un concept spécifique. Alors que certains symboles désignent un concept déterminé, d'autres sont susceptibles d'en désigner plusieurs.

L'usage conjoint de symboles dont l'interprétation peut varier et d'autres dont l'interprétation est fixe confère à certaines expressions arithmétiques leur statut de vérité universelle. Une expression arithmétique est vraie en vertu de sa structure. Dans le langage de l'arithmétique, comme dans celui de la logique, ce sont les symboles dont l'interprétation est fixe qui déterminent la structure d'une expression. Aussi, dès lors que les symboles $+$, 0 et $=$ reçoivent leur interprétation usuelle, l'expression arithmétique $x + 0 = x$ demeure vraie quelle que soit la valeur assignée à x. En ce sens, la vérité d'une expression arithmétique repose sur les symboles dont l'interprétation est fixe tandis que son universalité repose sur les symboles dont l'interprétation est variable.

Afin d'illustrer les deux observations qui précèdent, les symboles qui figurent dans l'expression $x + 0 = x$ sont classés dans le tableau ci-dessous selon la nature des concepts qu'ils désignent et le caractère fixe ou variable de cette désignation.

3. Le mot « arithmétique » désigne ici la discipline mathématique qui a pour objet les propriétés générales des nombres, les fonctions sur les nombres et les relations entre les nombres [10].

	Interprétation fixe	Interprétation variable
Nombre	0	x
Fonction	$+$	
Relation	$=$	

Un *langage prédicatif du premier ordre avec égalité* (ou *langage logique*) est composé d'un alphabet et d'une syntaxe.

3.1 Alphabet

Un *alphabet* est un ensemble de symboles comprenant :

— les symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$
— les variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ...
— les parenthèses :), (

Outre ces symboles, un alphabet peut comprendre :

— des symboles prédicatifs n-aires ($n > 0$) : p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, ...
— des symboles propositionnels : p, q, r, s, p_1, ...
— des symboles fonctionnels n-aires ($n > 0$) : f^n, g^n, h^n, f_1^n, ...
— des constantes : a, b, c, d, a_1, ...

Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes d'un alphabet forment l'ensemble des *symboles propres* de cet alphabet. Dans la mesure où deux alphabets ne peuvent différer que par l'ensemble de leurs symboles propres, spécifier un alphabet revient à en spécifier les symboles propres.

3.2 Syntaxe

Une expression d'un langage est une suite finie de symboles de l'alphabet de ce langage. Certaines expressions d'un langage sont appelées des termes et d'autres des formules. Ces expressions sont formées au moyen de règles syntaxiques exhaustives. De cette façon, les termes et les formules d'un langage sont uniquement les expressions construites conformément à ces règles.

Un *terme* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un terme.
— Toute constante est un terme.
— Tout symbole fonctionnel n-aire suivi de n termes est un terme.

Une *formule* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Tout symbole propositionnel est une formule.
— Tout symbole prédicatif n-aire suivi de n termes est une formule.
— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule.
— Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
— Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules.
— Si α est une variable et A est une formule, alors $\forall \alpha\, A$ et $\exists \alpha\, A$ sont des formules.

3.3 Sémantique

Les symboles d'un langage logique peuvent être répartis en différentes catégories suivant le type de concept qu'ils désignent. Les symboles prédicatifs n-aires désignent des relations à n arguments [4]. Les symboles propositionnels désignent des propositions. Les symboles fonctionnels n-aires désignent des fonctions à n arguments. Les constantes désignent des objets.

Les symboles logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ et $\exists$ désignent des opérateurs qui expriment respectivement les concepts de négation, conjonction, disjonction, implication, quantification universelle et quantification existentielle. Ces concepts sont volontiers traduits en français par les expressions « ne ... pas », « et », « ou », « si ... alors », « tout » et « au moins un ». Le symbole logique $=$ désigne, quant à lui, la relation binaire d'identité.

Les variables, comme les constantes, désignent des objets. Cependant, contrairement aux constantes, les variables ne désignent pas un objet spécifique. Elles sont ainsi susceptibles de désigner n'importe quel objet.

Les parenthèses ne possèdent pas, à proprement parler, de signification. Elles sont des symboles de ponctuation. En effet, les règles syntaxiques adoptées dans cet article rendent nécessaire l'usage de ce type de symboles afin d'éviter toute forme d'ambiguïté [5].

Par ailleurs, il est possible de distinguer les symboles d'un langage logique relativement au degré de variabilité de l'interprétation qu'ils peuvent recevoir. Les symboles logiques possèdent une interprétation qui est fixée quel que soit le contexte [6]. Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes possèdent une interprétation qui peut varier d'un contexte à l'autre. Les symboles de variable possèdent une interprétation qui peut varier au sein d'un même contexte.

4. Lorsqu'une relation n'admet qu'un seul argument, elle est assimilée à une propriété.
5. Les parenthèses ne sont pourtant pas essentielles aux langages logiques. Comme l'illustre la notation polonaise, il est possible de s'en passer tout en évitant l'ambiguïté.
6. La notion informelle de contexte fait ici écho au concept de modèle en logique [9].

Ces deux catégorisations des symboles d'un langage logique peuvent être combinées et synthétisées sous la forme du tableau suivant.

	Interprétation fixée quel que soit le contexte	Interprétation variable d'un contexte à l'autre	Interprétation variable au sein d'un même contexte
Objet		a, b, c, d	x, y, z
Fonction		f^n, g^n, h^n	
Proposition		p, q, r, s	
Relation	$=$	p^n, q^n, r^n, s^n	
Opérateur	$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$		

L'interprétation des termes et des formules d'un langage logique est définie à partir de celle des symboles de sorte que tout terme désigne un objet et que toute formule est susceptible de vérité ou de fausseté.

4 Une analyse logique des langues naturelles

Une analyse logique d'une phrase de la langue naturelle consiste à en identifier les constituants logiques ainsi que les relations qu'ils entretiennent [7]. Autrement dit, analyser logiquement une phrase revient à lui associer une formule d'un langage logique sur base d'un vocabulaire fixé préalablement [7, 2, 1].

Un *vocabulaire* $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ pour un langage logique $\mathcal{L}$ consiste à associer à tout symbole propre de $\mathcal{L}$ une expression de la langue naturelle de sorte qu'à des symboles distincts correspondent des expressions distinctes. Autrement dit, un vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ est une application injective de l'ensemble des symboles propres de $\mathcal{L}$ dans l'ensemble des expressions de la langue naturelle [8].

Une *analyse logique* d'une phrase relativement à un vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ est une traduction de cette phrase par une formule de $\mathcal{L}$. Il est à noter que

7. Le concept d'analyse logique est assimilable à celui de structure logique.

8. Notons que l'assignation d'une expression de la langue naturelle à un symbole propre d'un langage logique doit respecter certaines règles. Dans la mesure où l'étude de ces règles nécessiterait de rentrer dans des considérations linguistiques qui dépassent largement le cadre de notre propos, nous les passerons sous silence.

la possibilité de proposer une traduction (adéquate) d'une phrase dépend directement du vocabulaire choisi. Bien que nous n'abordions pas explicitement la question épineuse des critères qui permettent de juger du caractère adéquat d'une traduction, celle-ci demeure en filigrane de notre propos tout au long de cet article.

Une phrase est *ambiguë* si elle admet plusieurs analyses logiques relativement à un même vocabulaire. Nous distinguons deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle.

Une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. Plus précisément, une phrase est *ambiguë constitutivement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent. Plus précisément, une phrase est *ambiguë relationnellement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Remarquons qu'il suit immédiatement de ces définitions que tout phrase ambiguë l'est nécessairement constitutivement ou relationnellement.

4.1 Ambiguïté constitutive

Afin d'illustrer l'ambiguïté constitutive des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Cinq est différent de la racine carrée de dix.

Soit le langage logique $\mathcal{L}$ dont les symboles propres sont : p, p^1, r^2, s^2, f^1, g^2, a, b, c, d. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ suivant :

p	Cinq est différent de la racine carrée de dix.
p^1	différent de la racine carrée de dix
r^2	différent de ...
s^2	racine carrée de ...
f^1	la racine carrée de ...
g^2	la racine ... de ...
a	cinq
b	la racine carrée de dix
c	dix
d	deux

Analyse logique 1 : p

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p\}$. Bien que cette traduction puisse sembler fort grossière, elle n'en demeure pas moins pertinente dans la mesure où elle rend compte adéquatement de la structure propositionnelle de la phrase. En effet, aucune mention explicite n'y est faite des opérateurs propositionnels de négation, conjonction, disjonction et implication.

Analyse logique 2 : p^1a

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, a\}$. Cette traduction est conforme à la théorie aristotélicienne des syllogismes en ce sens qu'elle rend compte de la structure logique de la phrase au travers de la distinction entre sujet et prédicat. En effet, elle signifie que la propriété d'être différent de la racine carrée de dix s'applique au nombre cinq. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas d'exprimer les relations à plusieurs arguments.

Analyse logique 3 : r^2ab

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{r^2, a, b\}$. Il s'agit d'une traduction qui rend compte de la notion de dissemblance au moyen d'une relation à deux arguments. Cette traduction se distingue des interprétations mathématiques usuelles où la notion de dissemblance n'est pas conçue comme une relation primitive mais bien comme la négation de la relation d'identité.

Analyse logique 4 : $\neg a = b$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{a, b\}$. Dans cette traduction, contrairement à la précédente, la notion de dissemblance est conçue comme la négation de la relation d'identité. En mathématiques, le symbole logique de négation précédant une formule identitaire est bien souvent délaissé au profit d'une notation plus compacte faisant intervenir le symbole $\neq$.

Analyse logique 5 : $(\exists x(s^2xc \wedge \forall y(s^2yc \rightarrow y = x)) \wedge \neg s^2ac)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{s^2, a, c\}$. La notion de racine carrée est ici interprétée comme une relation plutôt que comme une fonction. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle dix possède exactement une racine carrée et cinq n'est pas cette racine carrée. Cette analyse logique n'est pas sans rappeler la problématique des descriptions définies traitée par Russell [8].

Analyse logique 6 : $\neg a = f^1 c$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{f^1, a, c\}$. Cette traduction, qui se rapproche davantage de l'interprétation mathématique usuelle, rend compte de la notion de racine carrée au moyen d'une fonction à un argument.

Analyse logique 7 : $\neg a = g^2 dc$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{g^2, a, d, c\}$. Dans cette traduction, la notion de racine carrée est conçue comme une fonction à deux arguments tels que le premier est l'indice de la racine et le second est son radicand.

Nous constatons que toutes ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire $\mathcal{V}_\mathcal{L}$ mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë constitutivement. Cette ambiguïté est qualifiée de « constitutive » dans la mesure où elle repose sur l'identification des éléments conceptuels mobilisés par la phrase (quelles que soient les relations qu'ils entretiennent). Déterminer l'ensemble des symboles propres qui doivent figurer dans l'analyse logique d'une phrase revient en fait à identifier l'ensemble des concepts mobilisés par cette phrase. En ce sens, l'ambiguïté constitutive met en évidence que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une même phrase.

En général, l'identification des constituants logiques d'une phrase dépend du contexte de son énonciation. C'est pourquoi il semble illusoire de pouvoir identifier de façon univoque les constituants logiques d'une phrase, si élémentaire soit-elle. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë constitutivement.

4.2 Ambiguïté relationnelle

Afin d'illustrer l'ambiguïté relationnelle des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Les multiples de neuf et de douze sont des multiples de trois.

Soit le langage logique $\mathcal{L}'$ dont les symboles propres sont : p_3^1, p_9^1, p_{12}^1. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ suivant :

p_3^1	nombre naturel multiple de trois
p_9^1	nombre naturel multiple de neuf
p_{12}^1	nombre naturel multiple de douze

Analyse logique 1 : $\forall x\,((p_9^1 x \rightarrow p_3^1 x) \wedge (p_{12}^1 x \rightarrow p_3^1 x))$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1, p_9^1, p_{12}^1\}$. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de neuf est multiple de trois et tout nombre naturel multiple de douze est également multiple de trois.

Analyse logique 2 : $\forall x\,((p_9^1 x \vee p_{12}^1 x) \rightarrow p_3^1 x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1, p_9^1, p_{12}^1\}$. Cette traduction, plus libre, rend compte de l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de douze ou de neuf est multiple de trois.

Analyse logique 3 : $\forall x\,((p_9^1 x \wedge p_{12}^1 x) \rightarrow p_3^1 x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1, p_9^1, p_{12}^1\}$. L'idée véhiculée par cette traduction est que tout nombre naturel qui est multiple à la fois de douze et de neuf est multiple de trois.

Nous constatons que ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}'}$ et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë relationnellement. L'aspect relationnel de cette ambiguïté est suggéré par le fait que même si l'identification des constituants logiques d'une phrase est arrêtée, il est possible d'en donner différentes traductions selon l'identification des relations logiques qu'entretiennent ces constituants. Autrement dit, différentes articulations peuvent être envisagées pour un même découpage conceptuel.

Il est à noter également que si les trois analyses logiques exposées antérieurement sont vraies en arithmétique élémentaire, elles ne sont pas logiquement équivalentes [9]. En effet, la première et la deuxième sont équivalentes entre elles mais la troisième n'est pas équivalente aux deux précédentes. En fait, la première analyse, comme la deuxième, entraîne logiquement la troisième. Deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent ne sont donc pas nécessairement logiquement équivalentes.

Par ailleurs, il est possible de déduire de la définition de langage logique que, quelle que soit l'analyse logique qui est proposée d'une phrase, il en existe une autre dont les constituants logiques sont identiques et qui lui est logiquement équivalente. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë relationnellement.

9. Pour s'en convaincre, une analyse similaire à celle proposée ci-dessus peut être appliquée à la phrase « Les multiples de trois et de quatre sont des multiples de douze. ».

5 La résolution de problèmes

L'ambiguïté logique de la langue naturelle maintenant constatée, il s'agit de montrer que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, la présente section est consacrée à l'analyse d'un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Il s'agit du dix-neuvième problème de la seconde épreuve du quatorzième RMT, intitulé « Chasse au trésor ».

L'autre jour, en fouillant dans le grenier, Marc a découvert une vieille malle qui contenait un parchemin et un coffre. En lisant le parchemin, il a compris que le coffre contenait un trésor protégé par une serrure avec une combinaison à 3 chiffres (de 1 à 9). En outre, le parchemin donnait ces informations :

a) *Dans* $\langle 3, 4, 5\rangle$ *un seul des chiffres est correct, mais n'est pas bien placé.*
b) *Dans* $\langle 2, 3, 6\rangle$ *aucun de ces chiffres n'est correct.*
c) *Dans* $\langle 6, 7, 8\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
d) *Dans* $\langle 4, 7, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
e) *Dans* $\langle 8, 5, 9\rangle$ *deux chiffres sont corrects, mais un seul est bien placé.*
f) *Dans* $\langle 5, 8, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

Pouvez-vous aider Marc à trouver la bonne combinaison pour ouvrir le coffre ? Expliquez comment vous avez résolu ce problème. [10]

5.1 Analyse de l'énoncé du problème

Plutôt que de proposer une analyse logique de la totalité du problème, nous focaliserons notre attention sur l'expression « un seul chiffre est correct et bien placé ». Cette expression apparaît à trois reprises dans l'énoncé du problème ; nous limiterons notre analyse à la phrase dans laquelle figure la dernière occurrence.

Dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

Soit le langage logique $\mathcal{L}''$ dont les symboles propres sont : p^1, q^1, r^1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9. Soit également le vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ suivant :

p^1	chiffre bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$
q^1	chiffre correct
r^1	chiffre figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$
c_i	le chiffre « i » $(1 \leq i \leq 9)$

10. La bonne combinaison mentionnée dans l'analyse *a priori* du problème est $\langle 5, 7, 9\rangle$.

Analyse logique forte : $(\exists!x\,(r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\,((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))$

Cette analyse logique [11] est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. L'interprétation de la phrase correspondant à cette traduction est qu'il existe exactement un chiffre correct dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que ce chiffre est en outre bien placé.

Analyse logique faible : $\exists!x\,((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)$

Cette analyse logique est relative à $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. Elle traduit l'idée selon laquelle il existe exactement un chiffre dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ qui est à la fois correct et bien placé.

Dans la mesure où elles sont relatives au même vocabulaire et les symboles propres qui y figurent sont identiques, ces deux analyses logiques témoignent de l'ambiguïté relationnelle de la phrase considérée. D'autre part, elles ne sont pas logiquement équivalentes. Dans le cadre de la logique formelle, il est en effet possible de montrer que l'analyse forte entraîne l'analyse faible alors que l'analyse faible n'entraîne pas l'analyse forte.

5.2 Analyse d'un raisonnement

Afin de mettre en exergue l'impact que peut avoir cette ambiguïté logique sur la résolution du problème, nous nous proposons d'examiner le raisonnement suivant [12].

Dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ le chiffre « 5 » est correct.
Dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ un seul chiffre est correct et bien placé.

Dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ le chiffre « 5 » est bien placé et tous les autres sont incorrects.

Notre analyse du raisonnement s'inspire du projet leibnizien d'une langue symbolique universelle. En cela, elle consiste à traduire dans un langage logique chacune des phrases qui composent le raisonnement de sorte à pouvoir ensuite juger de sa correction sur base d'un système déductif approprié [13].

Dans cette perspective, la première et la troisième phrase du raisonnement sont analysées relativement au vocabulaire $\mathcal{V}_{\mathcal{L}''}$. La première phrase exprime l'idée que le chiffre « 5 » figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que ce chiffre est correct. Aussi peut-elle être fidèlement traduite par la formule $(r^1c_5 \wedge q^1c_5)$.

11. Le symbole $\exists$ suivi d'un point d'exclamation se lit « il existe *exactement* un ». Formellement, $\exists!\alpha\,A$ est une abréviation de $\exists\alpha\,(A \wedge \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha))$ où β est une variable distincte de α qui ne figure pas dans la formule A [5].

12. Une variante de ce raisonnement figure dans l'analyse *a priori* du problème.

13. Nous entendons par là tout système axiomatique qui satisfait le théorème de complétude pour la logique classique du premier ordre avec égalité.

La troisième phrase, quant à elle, signifie que le chiffre « 5 » est bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et que tout chiffre différent de « 5 » qui figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est nécessairement incorrect. Ce que l'on traduira volontiers par la formule $(p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))$.

Selon que l'on opte pour l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible de la deuxième phrase du raisonnement, celui-ci donne lieu à deux formulations distinctes dans le langage logique $\mathcal{L}''$:

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique forte

$$\frac{\begin{array}{c}(r^1 c_5 \wedge q^1 c_5)\\ (\exists! x\,(r^1 x \wedge q^1 x) \wedge \forall y\,((r^1 y \wedge q^1 y) \rightarrow p^1 y))\end{array}}{(p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))}$$

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique faible

$$\frac{\begin{array}{c}(r^1 c_5 \wedge q^1 c_5)\\ \exists! x\,((r^1 x \wedge q^1 x) \wedge p^1 x)\end{array}}{(p^1 c_5 \wedge \forall x\,((r^1 x \wedge \neg x = c_5) \rightarrow \neg q^1 x))}$$

Alors que le raisonnement basé sur l'analyse logique forte est correct, celui basé sur l'analyse logique faible ne l'est pas. Afin d'établir cette double affirmation, nous privilégierons un argument informel à un examen technique s'appuyant sur un système déductif.

Dans le cas de l'interprétation forte, nous supposons que le chiffre « 5 », qui figure dans $\langle 5, 8, 2\rangle$, est correct et qu'un seul chiffre figurant dans cette combinaison est correct. Il s'ensuit que tout chiffre autre que « 5 » figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est incorrect. Par ailleurs, nous supposons également que le seul chiffre correct figurant dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ est en outre bien placé. Comme ce chiffre est « 5 », nous en déduisons qu'il est bien placé dans la combinaison. En conséquence, le chiffre « 5 » est bien placé dans $\langle 5, 8, 2\rangle$ et tout autre chiffre y figurant est incorrect.

Au contraire, dans le cas de l'interprétation faible, la dernière phrase du raisonnement ne peut être déduite des deux précédentes. Autrement dit, la vérité des deux premières phrases n'entraîne pas la vérité de la troisième. Il existe en effet un contre-exemple où le chiffre « 8 » est correct et bien placé, le chiffre « 5 » est correct mais n'est pas bien placé et le chiffre « 2 » n'est ni correct ni bien placé. Un tel contre-exemple rend vraies les prémisses du raisonnement alors qu'il rend fausse sa conclusion.

En résumé, nous constatons que l'ambiguïté logique d'une phrase figurant dans l'énoncé d'un problème peut avoir une incidence sur la correction

des raisonnements effectués dans le cadre de sa résolution. Suivant que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre, un même raisonnement peut être considéré comme correct ou incorrect.

5.3 Analyse de la solution du problème

Dans la mesure où l'ambiguïté logique influe sur les cheminements déductifs qui conduisent à la solution d'un problème, il n'est pas rare qu'elle donne lieu à des réponses différentes [14]. Le problème qui nous occupe fait pourtant exception à cette règle. En effet, que l'on retienne l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible, la solution qu'il convient d'y apporter demeure inchangée. À cet égard, deux remarques nous semblent essentielles.

Premièrement, l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler. En effet, il ne suffit pas, lors de la relecture d'un problème, de comparer les réponses apportées par chacun pour s'assurer que ce problème échappe à toute ambiguïté préjudiciable à sa bonne compréhension. En revanche, il est nécessaire pour cela d'examiner l'enchaînement des raisonnements effectués et d'en vérifier la correction. C'est seulement de cette façon qu'une ambiguïté comme celle que nous avons traitée peut éventuellement être identifiée.

Deuxièmement, l'ambiguïté logique peut avoir un impact sur le degré de complexité d'un problème. Comme nous l'avons mentionné, l'analyse logique forte entraîne l'analyse logique faible. Cela signifie que si un cheminement déductif effectué au départ de l'énoncé du problème est correct relativement à l'analyse faible, alors il est également correct relativement à l'analyse forte [15]. Au contraire, certains cheminements déductifs corrects relativement à l'analyse forte ne le sont pas relativement à l'analyse faible. Il apparaît donc qu'identifier un cheminement déductif permettant de résoudre le problème est davantage aisé lorsqu'on adopte l'analyse logique forte que lorsqu'on adopte l'analyse logique faible.

6 Conclusion

Il ressort de la présente discussion que les phrases en langue naturelle sont ambiguës eu égard à leur structure logique et que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes.

14. Le problème du RMT « Des carrés sur une figure » (25.II.04) en est un bon exemple. Un examen des copies d'élèves de la Section belge nous a en effet permis d'identifier deux analyses logiques du problème conduisant à des solutions différentes.

15. L'argument formel qui sous-tend notre propos est le suivant. Soient deux formules A et B telles que le raisonnement A *donc* B est correct. Alors, pour toute formule C et toute suite de formules Γ, si Γ, B *donc* C est correct, alors Γ, A *donc* C est également correct.

À la lumière du langage de la logique contemporaine, nous avons distingué deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle. L'ambiguïté constitutive traduit l'idée que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. D'autre part, l'ambiguïté relationnelle capture l'idée que plusieurs articulations conceptuelles peuvent être associées à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent.

Qu'elle soit constitutive ou relationnelle, l'ambiguïté d'une phrase peut bien souvent être levée grâce au contexte de son énonciation. En effet, le contexte permet habituellement d'identifier, parmi les différentes analyses logiques possibles, celle qui est la plus pertinente et, partant, qu'il convient de retenir. Toutefois, il arrive que le contexte d'énonciation ne permette pas d'identifier une unique analyse logique. Un cas particulièrement critique d'ambiguïté survient lorsque plusieurs analyses logiques pertinentes sont envisageables et que ces analyses ne sont pas logiquement équivalentes. Le problème du RMT intitulé « Chasse au trésor » illustre ce cas de figure.

Notre examen de ce problème révèle que deux analyses logiques pertinentes et non logiquement équivalentes peuvent être associées à l'une des phrases qui figurent dans l'énoncé. Il s'avère que cette ambiguïté touche à la signification du problème tout entier au point que sa résolution appelle des cheminements déductifs différents selon que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre. En outre, nous avons constaté que l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler et qu'elle peut avoir une incidence sur le degré de complexité d'un problème.

En général, l'ambiguïté logique des langues naturelles nous semble constituer un défi didactique plutôt qu'une déficience à laquelle il conviendrait de remédier. Dans une telle perspective, il apparaît alors que l'identification de structures logiques adéquates à la résolution d'un problème est un objet d'apprentissage et que toute résolution de problème comporte une marge interprétative irréductible.

Références

[1] M. Crabbé, *La loglangue facile en quinze leçons*, accessible en ligne à l'adresse : `http://logoi.be/crabbe/textes/loglangue.pdf`, 2017.

[2] O. Ducrot, *La preuve et le dire. Langage et logique*, Maison Mame, Paris, 1973.

[3] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle (Saale), 1879.

[4] ———, *The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (trad. J. L. Austin), Harper Torchbooks, New York, 1960.

[5] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.

[6] G. W. Leibniz, *Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer*, Opuscules et fragments inédits de Leibniz (L. Couturat, ed.), Félix Alcan, Paris, 1903, pp. 175–182.

[7] W. V. O. Quine, *Elementary logic. Revised edition*, Harper Torchbooks, New York, 1965.

[8] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, Dover Publications, New York, 1920.

[9] J. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts), 1967.

[10] A. Tarski, *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

Résolution d'équations et déduction naturelle*

> Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques.
>
> G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*

1 Introduction

De nombreux élèves rencontrent des difficultés quant à la maîtrise des mécanismes logico-déductifs inhérents à l'activité mathématique [1]. Ces mécanismes se situent bien souvent en filigrane de l'activité mathématique ; ce qui les rend difficilement identifiables. Cet article a pour objectif de mettre en exergue quelques-uns des mécanismes déductifs propositionnels qui peuvent intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. Pour ce faire, nous proposons une analyse de quelques résolutions d'équations à la lumière de la déduction naturelle.

La déduction naturelle est une approche formelle élaborée par G. Gentzen (1909–1945) visant à refléter le plus adéquatement possible les raisonnements logiques qui sont présents dans les démonstrations mathématiques [2, 3, 4]. En raison de sa précision conceptuelle et de sa proximité avec la pratique mathématique, elle constitue un cadre particulièrement commode pour la mise en lumière de l'arrière-plan logico-déductif à partir duquel sont partiquées les mathématiques.

Notre propos s'organise en trois parties. Nous présenterons d'abord un système de déduction naturelle pour la logique propositionnelle [6, 7]. Ensuite, nous analyserons trois extraits de résolutions d'équations au travers du prisme de la déduction naturelle et mettrons en évidence l'enchaînement des mécanismes déductifs qui y sont à l'œuvre. Enfin, nous montrerons que ces mécanismes sont variés et relèvent de différents niveaux de complexité.

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet LOGLANG mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

2 Déduction naturelle

La déduction naturelle est une approche formelle qui consiste à déduire une formule à partir d'autres au moyen de règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques. Une caractéristique essentielle de cette approche est qu'elle repose sur le concept d'hypothèse. Contrairement à l'axiomatique hilbertienne, où les déductions sont construites à partir d'axiomes, la déduction naturelle prend comme point de départ des hypothèses, qui pourront éventuellement être déchargées par la suite.

Un *langage (propositionnel)* $\mathcal{L}$ est composé d'un ensemble non vide de symboles propositionnels p_n (où $n \in \mathbb{N}$) ainsi que des symboles logiques $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. Les formules d'un langage $\mathcal{L}$ sont définies inductivement de la façon suivante.

$$A ::= p \mid \bot \mid \neg A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A)$$

Remarque Par la suite, nous utiliserons le symbole $\leftrightarrow$ comme abréviation. Aussi, nous noterons parfois $(A \leftrightarrow B)$ l'expression $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ où A et B désignent des formules d'un langage.

Un *raisonnement (propositionnel)* est un couple $\langle \Gamma, C \rangle$ où Γ est un ensemble fini de formules d'un langage et C est une formule de ce langage. Le raisonnement $\langle \Gamma, C \rangle$ est noté $\Gamma \vdash C$.

Un raisonnement $\Gamma \vdash C$ est *correct* s'il existe une déduction dont la conclusion est C et dont l'ensemble des hypothèses (non déchargées) est Γ.

Le concept de *déduction* ainsi que ceux d'hypothèse et de conclusion sont conjointement définis de façon inductive. Il est à noter que l'indice dont sont habituellement affectées les hypothèses d'une déduction est négligé dans le système exposé ci-dessous [7].

Déduction initiale

Toute formule A est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est $\{A\}$. En d'autres termes, cela signifie que toute formule peut être déduite d'elle-même.

Règles d'introduction et d'élimination de la conjonction

Règle d'introduction de la conjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A & B\end{array}}{(A \wedge B)} \wedge_I$$

est une déduction dont la conclusion est $(A \wedge B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. Autrement dit, la règle d'introduction de la conjonction appliquée simultanément à une déduction de A et une déduction de B produit une déduction de $(A \wedge B)$.

Règles d'élimination de la conjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \wedge B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ (A \wedge B)\end{array}}{A} \wedge_{E_D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ (A \wedge B)\end{array}}{B} \wedge_{E_G}$$

sont des déductions dont la conclusion est respectivement A et B et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Ainsi, lorsqu'elles sont appliquées à une déduction de $(A \wedge B)$, la règle d'élimination de la conjonction droite produit une déduction de A et la règle d'élimination de la conjonction gauche produit une déduction de B.

Règles d'introduction et d'élimination de l'implication

Règle d'introduction de l'implication. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \mathcal{D}_1 \\ B\end{array}}{(A \to B)} \to_I$$

est une déduction dont la conclusion est $(A \to B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{A\}$. La règle d'introduction de l'implication appliquée à une déduction de B reposant éventuellement sur l'hypothèse A produit une déduction de $(A \to B)$ où l'hypothèse A est déchargée.

Règle d'élimination de l'implication. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \to B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ (A \to B) & A\end{array}}{B} \to_E$$

est une déduction dont la conclusion est B et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. Cela signifie que la règle d'élimination de l'implication appliquée simultanément à une déduction de $(A \to B)$ et une déduction de A produit une déduction de B. Remarquons que cette règle correspond à celle du *modus ponens*, que l'on retrouve traditionnellement dans les systèmes axiomatiques hilbertiens.

Règles d'introduction et d'élimination de la disjonction

Règles d'introduction de la disjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion A ou de conclusion B dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}}{(A \vee B)} \vee_{I_D} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ B\end{array}}{(A \vee B)} \vee_{I_G}$$

sont des déductions dont la conclusion est $(A \vee B)$ et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Autrement dit, la règle d'introduction de la disjonction droite appliquée à une déduction de A produit une déduction de $(A \vee B)$. De la même manière, la règle d'introduction de la disjonction gauche appliquée à une déduction de B produit une déduction de $(A \vee B)$.

Règle d'élimination de la disjonction. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $(A \vee B)$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion C dont l'ensemble des hypothèses est H_2 et si $\mathcal{D}_3$ est une déduction de conclusion C dont l'ensemble des hypothèses est H_3, alors

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ (A \vee B) & C & C\end{array}}{C} \vee_E$$

est une déduction dont la conclusion est C et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup (H_2 \setminus \{A\}) \cup (H_3 \setminus \{B\})$. La règle d'élimination de la disjonction appliquée simultanément à une déduction de $(A \vee B)$, une déduction de C reposant éventuellement sur l'hypothèse A et une déduction de C reposant

éventuellement sur l'hypothèse B produit une déduction de C où A est déchargée des hypothèses de la deuxième déduction et B est déchargée des hypothèses de la troisième déduction.

Règles d'introduction et d'élimination de la négation

Règle d'introduction de la négation. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\bot$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{D}_1\\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg_I$$

est une déduction dont la conclusion est $\neg A$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{A\}$. La règle d'introduction de la négation appliquée à une déduction qui repose éventuellement sur l'hypothèse A et dont la conclusion est l'absurde produit une déduction de $\neg A$ où l'hypothèse A est déchargée.

Règle d'élimination de la négation. Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\neg A$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1 et si $\mathcal{D}_2$ est une déduction de conclusion A dont l'ensemble des hypothèses est H_2, alors

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \neg A & A\end{array}}{\bot}\ \neg_E$$

est une déduction dont la conclusion est $\bot$ et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \cup H_2$. La règle d'élimination de la négation appliquée simultanément à une déduction de $\neg A$ et une déduction de A produit une déduction dont la conclusion est l'absurde.

Règle de l'absurde intuitionniste

Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\bot$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \bot\end{array}}{A}\ \bot_i$$

est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est H_1. Cette règle fait écho à l'adage latin *e falso (sequitur) quodlibet*, qui signifie que du faux suit n'importe quoi. Autrement dit, lorsqu'elle est appliquée à une déduction dont la conclusion est l'absurde, cette règle produit une déduction de conclusion A, quelle que soit la formule A. Le système obtenu en ajoutant cette règle aux règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques détermine la logique intuitionniste des propositions.

Règle de l'absurde classique

Si $\mathcal{D}_1$ est une déduction de conclusion $\bot$ dont l'ensemble des hypothèses est H_1, alors

$$\begin{array}{c} [\neg A] \\ \mathcal{D}_1 \\ \dfrac{\bot}{A}\,\bot_c \end{array}$$

est une déduction dont la conclusion est A et dont l'ensemble des hypothèses est $H_1 \setminus \{\neg A\}$. Cette règle correspond à l'élimination de la double négation. Aussi, lorsqu'elle est appliquée à une déduction qui repose éventuellement sur l'hypothèse $\neg A$ et dont la conclusion est l'absurde, cette règle produit une déduction de A où l'hypothèse $\neg A$ est déchargée. Le système formé de cette règle et des précédentes détermine la logique classique des propositions.

Il suit de la définition qui précède que toute déduction peut être représentée sous la forme d'une arborescence finie de formules dont la racine (située en bas) est la conclusion et dont les feuilles (situées en haut) sont les hypothèses (déchargées ou non).

Exemple Nous présentons ici une déduction qui garantit la correction du raisonnement $(p_1 \to p_3), (p_2 \to p_3) \vdash ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

$$\dfrac{\dfrac{[(p_1 \vee p_2)] \quad \dfrac{\dfrac{(p_1 \to p_3) \qquad [p_1]}{p_3}\to_E \quad \dfrac{(p_2 \to p_3) \qquad [p_2]}{p_3}\to_E}{p_3}\vee_E}{((p_1 \vee p_2) \to p_3)}\to_I}{}$$

3 Résolution d'équations

La *résolution d'une équation* dont la seule variable est α consiste à identifier, parmi les valeurs assignables à α, celles qui rendent l'équation vraie. En pratique, résoudre une telle équation revient généralement à déterminer une expression logico-arithmétique qui lui est équivalente et qui permet d'en identifier aisément les solutions.

Exemple La résolution de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ peut s'effectuer en montrant, par le calcul du discriminant, qu'elle est équivalente à l'expression logico-arithmétique $x = -2$ ou $x = -3$.

Cette section vise à mettre en exergue l'enchaînement des mécanismes déductifs propositionnels qui sont à l'œuvre dans certaines résolutions d'équations et qui demeurent le plus souvent implicites. Pour ce faire, trois extraits de résolutions d'équations sont présentés et traduits dans un formalisme inspiré de celui de la déduction naturelle.

Résolution de l'équation $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 4x + 3} = 0$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$ si et seulement si $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

$\mathcal{H}_2$ $x^2 - 8x + 15 = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = 5$.

$\mathcal{H}_3$ $x^2 - 4x + 3 = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = 1$.

$\mathcal{C}$ Si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$. Par $\mathcal{H}_1$, il s'ensuit que $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Par $\mathcal{H}_2$, nous en déduisons que $x = 3$ ou $x = 5$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x \neq 3$ et $x \neq 1$. De ce qui précède, il suit que $x = 5$. En conséquence, si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

Résolution de l'équation $|x - 2| = 5$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ Si $0 \leq x-2$, alors $|x-2| = x-2$.

$\mathcal{H}_2$ Si $x-2 < 0$, alors $|x-2| = -(x-2)$.

$\mathcal{H}_3$ Si $|x-2| = 5$ et $|x-2| = x-2$, alors $x = 7$.

$\mathcal{H}_4$ Si $|x-2| = 5$ et $|x-2| = -(x-2)$, alors $x = -3$.

$\mathcal{C}$ Si $|x-2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $|x-2| = 5$. Deux cas seulement sont possibles, $0 \leq x-2$ ou $x-2 < 0$. Supposons que $0 \leq x-2$. De $\mathcal{H}_1$, il suit que $|x-2| = x-2$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x = 7$. Supposons que $x-2 < 0$. De $\mathcal{H}_2$, il suit que $|x-2| = -(x-2)$. Par $\mathcal{H}_4$, nous en déduisons que $x = -3$. En conséquence, si $|x-2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Résolution de l'équation $\dfrac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Quels sont les mécanismes déductifs qui autorisent le passage des hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ à la conclusion $\mathcal{C}$?

$\mathcal{H}_1$ $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$ si et seulement si $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$.

$\mathcal{H}_2$ $x-3 = 0$ si et seulement si $x = 3$.

$\mathcal{H}_3$ $(x-3)^2 = 0$ si et seulement si $x = 3$.

$\mathcal{C}$ $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

Extrait de la résolution de l'équation. Soit $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$. Par $\mathcal{H}_1$, il s'ensuit que $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$. Par $\mathcal{H}_2$, nous en déduisons que $x \neq 3$. Par $\mathcal{H}_3$, nous en déduisons que $x = 3$. Ce qui est absurde. En conséquence, $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

Afin de rendre compte le plus adéquatement possible des mécanismes déductifs présents dans la résolution des équations considérées ci-dessus, nous avons intégré dans leur traduction des étapes qui ne correspondent à aucune instance de règle autorisée par le formalisme de la déduction naturelle (cf. DM, MT, SD et TE). À proprement parler, ces traductions ne sont donc pas des déductions. Pour cette raison, les étapes constitutives de ces quasi-déductions sont désignées par un trait discontinu plutôt que continu (comme c'est le cas dans le formalisme de la déduction naturelle).

Traduction de la résolution de l'équation $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$

Vocabulaire

p_1	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$	p_4	$x=3$
p_2	$x^2-8x+15=0$	p_5	$x=5$
p_3	$x^2-4x+3=0$	p_6	$x=1$

$$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)), (p_2 \leftrightarrow (p_4 \vee p_5)), (p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee p_6)) \vdash (p_1 \rightarrow p_5)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_2}{(p_2 \leftrightarrow (p_4 \vee p_5))}\ \wedge_{E_D}}{(p_2 \rightarrow (p_4 \vee p_5))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}\ \wedge_{E_D}}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \qquad [p_1]}{(p_2 \wedge \neg p_3)}\ \rightarrow_E}{p_2}\ \wedge_{E_D}}{(p_4 \vee p_5)}\ \rightarrow_E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_3}{(p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee p_6))}\ \wedge_{E_G}}{((p_4 \vee p_6) \rightarrow p_3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}\ \wedge_{E_D}}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \qquad [p_1]}{(p_2 \wedge \neg p_3)}\ \rightarrow_E}{\neg p_3}\ \wedge_{E_G}}{\neg(p_4 \vee p_6)}\ \mathsf{MT}}{(\neg p_4 \wedge \neg p_6)}\ \mathsf{DM} \qquad \wedge_{E_D}}{\neg p_4}$$

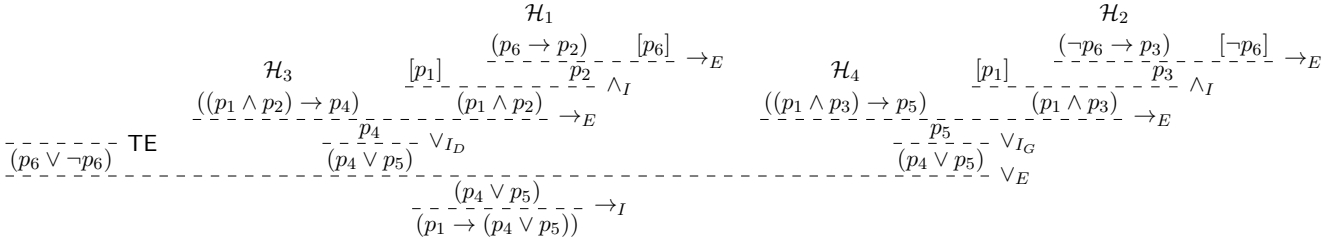
$$\dfrac{p_5}{(p_1 \rightarrow p_5)}\ \mathsf{SD}\ \rightarrow_I$$

Traduction de la résolution de l'équation $|x-2|=5$

Vocabulaire

p_1	$\lvert x-2\rvert = 5$	p_4	$x = 7$
p_2	$\lvert x-2\rvert = x-2$	p_5	$x = -3$
p_3	$\lvert x-2\rvert = -(x-2)$	p_6	$0 \leq x-2$

$$(p_6 \to p_2), (\neg p_6 \to p_3), ((p_1 \wedge p_2) \to p_4), ((p_1 \wedge p_3) \to p_5) \vdash (p_1 \to (p_4 \vee p_5))$$



Traduction de la résolution de l'équation $\dfrac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Vocabulaire

p_1	$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	p_3	$x - 3 = 0$
p_2	$(x-3)^2 = 0$	p_4	$x = 3$

$$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)), (p_3 \leftrightarrow p_4), (p_2 \leftrightarrow p_4) \vdash \neg p_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_2}{(p_3 \leftrightarrow p_4)}}{(p_4 \rightarrow p_3)}\wedge_{E_G} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}\wedge_{E_D} \quad [p_1]}{(p_2 \wedge \neg p_3)}\rightarrow_E}{\neg p_3}\wedge_{E_G}}{\neg p_4}\mathsf{MT} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_3}{(p_2 \leftrightarrow p_4)}}{(p_2 \rightarrow p_4)}\wedge_{E_D} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}\wedge_{E_D} \quad [p_1]}{(p_2 \wedge \neg p_3)}\rightarrow_E}{p_2}\wedge_{E_D}}{p_4}\rightarrow_E}{\dfrac{\bot}{\neg p_1}\neg_I}\neg_E$$

4 Mécanismes logico-déductifs

Les traductions qui précèdent permettent d'identifier de façon précise et systématique les mécanismes logico-déductifs présents dans les résolutions d'équations abordées. De plus, elles permettent d'identifier les hypothèses sur lesquelles repose l'enchaînement de ces mécanismes (cf. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, etc.). Dès lors que ces hypothèses sont admises, il ressort des traductions que les mécanismes qui interviennent dans la résolution des équations sont exclusivement d'ordre logique. En effet, la correction des étapes qui composent les quasi-déductions est indépendante du contenu mathématique associé à chacun des symboles propositionnels qui y figurent.

4.1 Pluralité des mécanismes logico-déductifs

Les résolutions d'équations que nous avons examinées mobilisent un large éventail de mécanismes déductifs. En effet, considérées conjointement, les traductions de ces résolutions d'équations couvrent la totalité des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques. Seules deux règles du formalisme de la déduction naturelle sont absentes des traductions, à savoir la règle de l'absurde intuitionniste et celle de l'absurde classique.

	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}=0$	$\lvert x-2\rvert=5$	$\frac{(x-3)^2}{x-3}=0$
$\wedge_I$	×	√	×
$\wedge_{E_D}$	√	×	√
$\wedge_{E_G}$	√	×	√
$\rightarrow_I$	√	√	×
$\rightarrow_E$	√	√	√
$\vee_{I_D}$	×	√	×
$\vee_{I_G}$	×	√	×
$\vee_E$	×	√	×
$\neg_I$	×	×	√
$\neg_E$	×	×	√
$\bot_i$	×	×	×
$\bot_c$	×	×	×

D'autre part, la diversité des mécanismes déductifs identifiés dans les résolutions d'équations excède celle des règles de la déduction naturelle, en ce sens que certaines étapes de leur traduction ne correspondent à aucune instance de règle du formalisme de la déduction naturelle.

	$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	$\lvert x-2\rvert = 5$	$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$
DM	$\surd$	$\times$	$\times$
MT	$\surd$	$\times$	$\surd$
SD	$\surd$	$\times$	$\times$
TE	$\times$	$\surd$	$\times$

4.2 Complexité des mécanismes logico-déductifs

Les étapes des traductions qui ne correspondent à aucune instance de règle autorisée par le formalisme de la déduction naturelle peuvent être conçues comme des instances de règles abréviatives. Ces règles abréviatives, contrairement à celles de la déduction naturelle, s'appuient sur un raisonnement dont la correction est considérée comme préalablement établie. Les formes de raisonnements corrects auxquelles font appel les règles abréviatives DM, MT, SD et TE sont présentées ci-dessous et une déduction est proposée pour chacun d'eux [5].

L'une des lois de De Morgan (DM) : $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \qquad \dfrac{[A]}{(A \vee B)}\vee_{I_D}}{\dfrac{\bot}{\neg A}\neg_I}\neg_E \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \qquad \dfrac{[B]}{(A \vee B)}\vee_{I_G}}{\dfrac{\bot}{\neg B}\neg_I}\neg_E}{(\neg A \wedge \neg B)}\wedge_I$$

Le *modus tollens* (MT) : $(A \to B), \neg B \vdash \neg A$

$$\dfrac{\neg B \qquad \dfrac{(A \to B) \qquad [A]}{B}\to_E}{\dfrac{\bot}{\neg A}\neg_I}\neg_E$$

Le syllogisme disjonctif (SD) : $(A \vee B), \neg A \vdash B$

$$\dfrac{(A \vee B) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \qquad [A]}{\dfrac{\bot}{B}\,\bot_i}\,\neg_E \qquad\qquad [B]}{B}\,\vee_E$$

Le principe du tiers exclu (TE) : $\vdash (A \vee \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \qquad \dfrac{[A]}{(A \vee \neg A)}\,\vee_{I_D}}{\dfrac{\bot}{\neg A}\,\neg_I}\,\neg_E \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)] \qquad \dfrac{[\neg A]}{(A \vee \neg A)}\,\vee_{I_G}}{\dfrac{\bot}{A}\,\bot_c}\,\neg_E}{\dfrac{\bot}{(A \vee \neg A)}\,\bot_c}$$

Remarque Bien que les règles $\bot_i$ et $\bot_c$ n'apparaissent pas explicitement dans la traduction des résolutions d'équations examinées, celles-ci sont présentes dans les déductions qui assurent la correction des raisonnements sur lesquels s'appuient respectivement les règles abréviatives SD et TE.

L'usage de règles abréviatives dans la traduction des résolutions d'équations met en évidence l'emploi de mécanismes déductifs complexes. À la lumière de la déduction naturelle, deux types de mécanismes déductifs peuvent être distingués. Les mécanismes déductifs simples correspondent à des instances de règles de la déduction naturelle, qui ont pour effet d'introduire ou d'éliminer un unique connecteur logique (à l'exception des règles $\bot_i$ et $\bot_c$). Au contraire, les mécanismes déductifs complexes correspondent à des instances de règles abréviatives qui mobilisent implicitement la correction de raisonnements dans lesquels interviennent généralement plusieurs connecteurs logiques.

Il ressort de cette analyse que les mécanismes déductifs présents dans certaines résolutions d'équations sont tantôt simples tantôt complexes. Parmi les mécanismes déductifs simples, figurent notamment le *modus ponens* (qui correspond à la règle d'élimination de l'implication), le raisonnement par

l'absurde (qui correspond à la règle d'introduction de la négation) et la disjonction de cas (qui correspond à la règle d'élimination de la disjonction). Parmi les mécanismes déductifs complexes, figurent entre autres les lois de De Morgan (dont l'une d'elles correspond à la règle abréviative DM), le *modus tollens* (qui correspond à la règle abréviative MT) et le syllogisme disjonctif (qui correspond à la règle abréviative SD).

Remarque Deux niveaux de complexité pourraient être distingués parmi les mécanismes déductifs simples suivant qu'ils correspondent à une règle qui autorise ou non le déchargement d'une ou plusieurs hypothèses.

- ▷ Mécanismes déductifs simples
  - ○ Règles sans déchargement d'hypothèse
    - — le *modus ponens* ($\rightarrow_E$)
  - ○ Règles avec déchargement d'hypothèse
    - — la disjonction de cas ($\vee_E$)
    - — le raisonnement par l'absurde ($\neg_I$)
- ▷ Mécanismes déductifs complexes
  - — les lois de De Morgan (DM)
  - — le *modus tollens* (MT)
  - — le syllogisme disjonctif (SD)

5 Conclusion

Nous avons identifié, au travers du formalisme de la déduction naturelle, un ensemble de mécanismes déductifs propositionnels pouvant intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. En outre, nous avons dégagé une classification de ces mécanismes qui permet de rendre compte à la fois de leur pluralité et de leurs différents niveaux de complexité.

Références

[1] S. Epp, *The role of logic in teaching proof*, The American Mathematical Monthly **110** (2003), no. 10, 886–899.

[2] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen. I*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 176–210.

[3] ———, *Untersuchungen über das logische Schließen. II*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 405–431.

[4] ———, *Recherches sur la déduction logique* (trad. R. Feys et J. Ladrière), Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

[5] T. Lucas, I. Berlanger, and V. Degauquier, *Initiation à la logique formelle. Exercices et corrigés*, De Boeck, Bruxelles, 2014.

[6] D. Prawitz, *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965.

[7] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic proof theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Description définie et division par zéro*

> That everything is not for the best in this best of all possible worlds, even in mathematics, is well illustrated by the vexing problem of defining the operation of division in the elementary theory of arithmetic.
>
> P. Suppes, *Introduction to logic*

1 Introduction

Il est deux faits logico-mathématiques que nul ne peut contester et qui pourtant semblent contradictoires. Le premier, qui est général et appartient à la logique classique des prédicats du premier ordre avec égalité, est que, pour tout x, y et z, si $x = y$, alors $(x * z) = (y * z)$ et cela quelle que soit la signification du symbole fonctionnel binaire $*$. Le second, qui relève plus particulièrement de l'algèbre élémentaire des nombres réels, est que $(x \cdot x) = x$ n'entraîne pas que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. En effet, zéro est solution de la première équation alors qu'il n'est pas solution de la seconde.

Le présent article poursuit un double objectif. De sorte à montrer en quoi cette contradiction n'est qu'apparente, il vise à préciser la signification du symbole de division à la lumière de la théorie russellienne des descriptions définies. D'autre part, il entend examiner les conséquences de cette interprétation relativement au statut des conditions d'existence et à la correction des raisonnements qui interviennent dans la résolution de certaines équations.

Notre propos s'organise en cinq parties. Tout d'abord, nous exposerons le cadre logique et algébrique à partir duquel nous étudierons la signification du symbole de division, à savoir l'algèbre élémentaire des nombres réels. Deuxièmement, nous montrerons que, bien qu'elle soit usuellement conçue comme une fonction à deux arguments, la division ne peut être traduite

*Cet article s'inscrit dans le cadre du projet LOGLANG mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

adéquatement par un symbole fonctionnel binaire du langage de l'algèbre élémentaire. Une fois cette impossibilité établie, nous présenterons la théorie russellienne des descriptions définies. Nous montrerons que cette dernière propose une interprétation des expressions de la forme « le α tel que A » qui permet de rendre compte de la signification de toute formule dans laquelle figurent de telles expressions et cela qu'il existe exactement un α tel que A ou non. Quatrièmement, nous mettrons en exergue que, dès lors que le quotient de deux nombres réels x et y, noté $(x \div y)$, est défini comme le nombre réel z tel que $x = (y \cdot z)$, la théorie russellienne des descriptions définies peut être appliquée aux formules dans lesquelles figure le symbole de division. Nous observerons alors qu'une signification peut être attachée à ces formules indépendamment de toute condition préalable. Enfin, nous examinerons, à l'aune de notre analyse de la division, la signification que recouvrent les conditions d'existence dans la résolution d'équations ainsi que la correction de quelques raisonnements dans lesquels le symbole de division apparaît.

2 L'algèbre élémentaire des nombres réels

Cette section est consacrée à l'exposition du cadre logico-algébrique à partir duquel nous étudierons la signification du symbole de division. Pour ce faire, nous définirons d'abord en quoi consiste le langage de l'algèbre élémentaire. Ensuite, nous présenterons un système d'axiomes et de règles qui traduisent les principes logiques qui régissent ce langage. Enfin, nous identifierons un ensemble de formules du langage qui décrivent certaines propriétés fondamentales des nombres réels.

2.1 Langage

Le *langage de l'algèbre élémentaire* est un langage prédicatif du premier ordre avec égalité dont les seuls symboles propres sont un symbole prédicatif binaire, deux symboles fonctionnels binaires et deux constantes. Une description de l'alphabet et de la syntaxe de ce langage est proposée ci-dessous.

L'*alphabet* comprend :

— les symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$;
— les variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$;
— les parenthèses :), (;
— le symbole prédicatif binaire : $<$;
— les symboles fonctionnels binaires : $+$, $\cdot$;
— les constantes : 0, 1.

Une expression algébrique est une suite finie de symboles de l'alphabet du langage de l'algèbre élémentaire. Certaines expressions algébriques sont appelées des termes et d'autres des formules. Ces expressions sont formées au moyen de règles syntaxiques exhaustives. De cette façon, les termes et les formules du langage de l'algèbre élémentaire sont uniquement les expressions construites conformément à ces règles.

Un *terme* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un terme.
— Toute constante est un terme.
— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $(t_1 + t_2)$ et $(t_1 \cdot t_2)$ sont des termes.

Une *formule* est une expression formée à partir des règles suivantes.

— Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ et $t_1 < t_2$ sont des formules.
— Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
— Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \to B)$ sont des formules.
— Si α est une variable et A est une formule, alors $\forall \alpha\, A$ et $\exists \alpha\, A$ sont des formules.

Soient une formule A, une variable α et un terme t. Alors, $A[\alpha := t]$ désigne la formule obtenue en substituant t à chaque occurrence libre de α dans A. Notons que la substitution d'un terme aux occurrences libres d'une variable dans une formule est soumise à une condition de substituabilité, que nous considérons implicite dans le cadre de cet article [10].

2.2 Système

Les principes déductifs qui gouvernent le langage de l'algèbre élémentaire sont ceux de la logique classique. Ces principes peuvent être précisés grâce à un système de schémas d'axiomes et de règles tel que celui présenté ci-dessous [4, 6, 12, 2].

Axiomes

$(A \to (B \to A))$

$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$(A \to (B \to (A \wedge B)))$

$((A \wedge B) \to A)$

$((A \wedge B) \to B)$

$(A \to (A \vee B))$

$(B \to (A \vee B))$

$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

$((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

$(\neg\neg A \to A)$

$(\forall \alpha\, A \to A[\alpha := t])$

$(A[\alpha := t] \to \exists \alpha\, A)$

$t = t$

$(t = u \to (A[\alpha := t] \to A[\alpha := u]))$

Règles

$$\frac{(A \to B) \qquad A}{B}$$

$$\frac{(B \to A[\alpha := \beta])}{(B \to \forall \alpha\, A)} \qquad\qquad \frac{(A[\alpha := \beta] \to B)}{(\exists \alpha\, A \to B)}$$

Ces deux dernières règles sont soumises à certaines restrictions portant sur la variable β. Celles-ci sont mentionnées dans la définition qui suit.

Une *dérivation à partir d'un ensemble d'hypothèses* $\mathcal{H}$ est une suite finie de formules telle que chaque formule de la suite est :

— soit un axiome ;
— soit une formule de $\mathcal{H}$;
— soit une formule B telle qu'il existe une formule A de sorte que les formules $(A \to B)$ et A la précèdent dans la suite ;
— soit une formule $(B \to \forall \alpha\, A)$ telle qu'il existe une variable β ne figurant librement ni dans $(B \to \forall \alpha\, A)$ ni dans une formule de $\mathcal{H}$ présente dans la suite de sorte que la formule $(B \to A[\alpha := \beta])$ la précède dans la suite ;
— soit une formule $(\exists \alpha\, A \to B)$ telle qu'il existe une variable β ne figurant librement ni dans $(\exists \alpha\, A \to B)$ ni dans une formule de $\mathcal{H}$ présente dans la suite de sorte que la formule $(A[\alpha := \beta] \to B)$ la précède dans la suite.

Une *dérivation d'une formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses $\mathcal{H}$* est une dérivation à partir de $\mathcal{H}$ dont la dernière formule est A.

Une formule A est *dérivable à partir d'un ensemble d'hypothèses $\mathcal{H}$* s'il existe une dérivation de A à partir de $\mathcal{H}$.

2.3 Hypothèses

L'algèbre élémentaire peut être caractérisée au moyen d'un ensemble de formules du langage qui décrivent certaines propriétés fondamentales des nombres réels [5, 14, 13]. Ces propriétés arithmétiques sont décrites par les formules qui figurent dans la liste qui suit ainsi que par un schéma de formules apparenté à l'axiome de complétude [1]. En général, l'ensemble formé de ces formules, noté $\mathcal{A}$, couvre les propriétés qui sont satisfaites par les éléments de tout corps réel clos [15].

Remarque Afin de faciliter la lecture des formules, les expressions $\neg t < u$ et $\neg t = u$ sont respectivement notées $t \not< u$ et $t \neq u$, où t et u sont des termes du langage.

$$\forall x \forall y \, (x \neq y \to (x < y \vee y < x))$$

$$\forall x \forall y \, (x < y \to y \not< x)$$

$$\forall x \forall y \forall z \, ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$$

$$\forall x \forall y \, (x + y) = (y + x)$$

$$\forall x \forall y \forall z \, (x + (y + z)) = ((x + y) + z)$$

$$\forall x \forall y \exists z \, x = (y + z)$$

$$\forall x \forall y \forall z \, (y < z \to (x + y) < (x + z))$$

$$\forall x \, (x + 0) = x$$

$$\forall x \forall y \, (x \cdot y) = (y \cdot x)$$

$$\forall x \forall y \forall z \, (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$$

$$\forall x \forall y \, (y \neq 0 \to \exists z \, x = (y \cdot z))$$

$$\forall x \forall y \forall z \, ((0 < x \wedge y < z) \to (x \cdot y) < (x \cdot z))$$

$$\forall x \, (x \cdot 1) = x$$

1. Ce schéma de formules est équivalent à la double affirmation selon laquelle tout nombre positif possède une racine carrée et tout polynôme de degré impair possède au moins une racine. Dans la mesure où ce schéma de formules n'intervient pas dans les considérations qui suivent, nous n'en préciserons pas davantage la nature.

$\forall x \forall y \forall z \, (x \cdot (y + z)) = ((x \cdot y) + (x \cdot z))$

$0 \neq 1$

Un *théorème de l'algèbre élémentaire* est une formule dérivable à partir de $\mathcal{A}$.

Un *théorème logique* est une formule dérivable à partir de l'ensemble vide.

Soient deux formules A et B. Soit également une suite de variables distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comprenant exactement celles qui figurent librement dans A ou B. Alors :

- A *entraîne logiquement* B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n \, (A \to B)$ est un théorème logique ;
- A *entraîne algébriquement* B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n \, (A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire ;
- A est *logiquement équivalent* à B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n \, ((A \to B) \wedge (B \to A))$ est un théorème logique ;
- A est *algébriquement équivalent* à B si la formule $\forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n \, ((A \to B) \wedge (B \to A))$ est un théorème de l'algèbre élémentaire.

3 La division comme symbole fonctionnel

La division est usuellement conçue comme une fonction qui associe un nombre à certains couples de nombres. Dès lors, il semble naturel de traduire ce concept dans le langage de l'algèbre élémentaire par un symbole fonctionnel binaire. Pourtant, cela n'est pas sans poser quelques difficultés. Deux observations nous amènent à ce constat.

D'une part, si la division est traduite par un symbole fonctionnel binaire, alors, quelle que soit la définition qui en est proposée, cette fonction doit être partout définie. Formellement, cela signifie que la division doit être une loi de composition interne sur l'ensemble des objets arithmétiques que l'on considère. Autrement dit, pour tout couple de nombres il existe exactement un objet arithmétique tel qu'il est égal à leur quotient.

D'autre part, aucune définition de la division comme application n'est pleinement satisfaisante. Admettre l'existence d'un objet arithmétique tel qu'il est égal au quotient d'un nombre par zéro donne lieu à des difficultés considérables quant à l'élaboration d'une définition adéquate de la division.

Seule la première observation nécessite d'être précisée dans la mesure où la seconde est le résultat d'un examen approfondi de la division comme fonction partout définie [13].

Soit le langage obtenu à partir de celui de l'algèbre élémentaire en ajoutant un symbole fonctionnel binaire, noté $*$, aux symboles propres de l'alphabet et en amendant la définition de terme de sorte que si t_1 et t_2 sont des termes, alors $(t_1 * t_2)$ est également un terme.

Montrer que, quelle que soit la définition qui en est proposée, la fonction associée au symbole $*$ est partout définie revient à montrer que la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ est un théorème logique. En effet, si cette formule est dérivable à partir de l'ensemble vide, cela signifie que sa dérivabilité est indépendante de toute hypothèse concernant la signification du symbole $*$ et, partant, qu'elle repose exclusivement sur les principes déductifs du système. Aussi, les considérations qui suivent peuvent être étendues à tout symbole fonctionnel binaire d'un langage prédicatif du premier ordre avec égalité.

La suite de formules présentes ci-dessous constitue une dérivation de la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ à partir de l'ensemble vide.

$(x * y) = (x * y)$

$((x * y) = (x * y) \rightarrow \exists z\, (x * y) = z)$

$\exists z\, (x * y) = z$

$(\exists z\, (x * y) = z \rightarrow (z = z \rightarrow \exists z\, (x * y) = z))$

$(z = z \rightarrow \exists z\, (x * y) = z)$

$(z = z \rightarrow \forall y \exists z\, (x * y) = z)$

$(z = z \rightarrow \forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z)$

$z = z$

$\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$

Outre cette dérivation de la formule $\forall x \forall y \exists z\, (x * y) = z$ à partir de l'ensemble vide, un argument moins formel peut être avancé afin de rendre davantage explicite l'incompatibilité entre la négation de cette formule et certains principes fondamentaux de la logique classique.

Supposons qu'il existe un x et il existe un y tels que, quel que soit z, $(x * y) \neq z$. Alors, en particulier, il existe un x et il existe un y tels que $(x * y) \neq (x * y)$. Or cela contredit le caractère réflexif de la relation d'égalité. En conséquence, il ne se peut pas qu'il existe un x et il existe un y tels que, quel que soit z, $(x * y) \neq z$. Autrement dit, quels que soient x et y il existe un z tels que $(x * y) = z$.

Force est donc de constater que la division ne peut être traduite adéquatement par un symbole fonctionnel binaire du langage de l'algèbre élémentaire. Quel statut convient-il alors d'accorder à la division dans un tel contexte ?

4 La théorie russellienne des descriptions définies

Une description est soit définie soit indéfinie. Une *description indéfinie* (ou ambiguë) est une expression de la forme « un α tel que A ». Par exemple, l'expression « un x tel que $0 < x$ » est une description indéfinie. D'autre part, une *description définie* est une expression de la forme « le α tel que A ». Par exemple, l'expression « le x tel que $(1 + x) = 0$ » est une description définie.

Nombreuses sont les définitions mathématiques dans lesquelles interviennent des descriptions définies. À titre d'exemple, nous pouvons mentionner la définition de la différence de deux nombres réels. La différence de x et y, notée $(x - y)$, est le nombre z tel que $x = (y + z)$.

Si toute expression de la forme « le α tel que A » véhicule l'idée qu'il existe *exactement* un α tel que A, certaines ne satisfont pas à cette exigence. Dans le cadre de l'algèbre élémentaire des nombres réels, nous constatons en effet que des expressions comme « le x tel que $0 = ((x \cdot x) + 1)$ » ou « le x tel que $1 = (0 \cdot x)$ » trahissent l'idée qu'il existe *au moins* un tel nombre. En outre, des expressions comme « le x tel que $1 = (x \cdot x)$ » ou « le x tel que $0 = (0 \cdot x)$ » trahissent l'idée qu'il existe *au plus* un tel nombre.

La théorie russellienne des descriptions définies propose une interprétation des expressions de la forme « le α tel que A » qui permet de rendre compte de la signification de toute formule dans laquelle figurent de telles expressions, et cela qu'il existe exactement un α tel que A ou non [8, 16, 9]. En particulier, cette théorie permet de réduire toute formule dans laquelle figurent des descriptions définies à une formule dans laquelle n'en figure aucune.

L'interprétation des descriptions définies proposée par B. Russell assimile les expressions de la forme « le α tel que A » à des symboles de quantification [2]. À l'instar des quantificateurs universel et existentiel, les descriptions définies sont des 'symboles incomplets' dont la signification ne peut être détachée de la formule dans laquelle elles apparaissent. C'est pourquoi toute formulation adéquate de ces expressions dans un langage logique nécessite,

2. Pour une interprétation où les descriptions définies sont assimilées à des termes d'un langage logique, nous renvoyons, entre autres, aux textes fondateurs de G. Frege et P. Strawson [3, 11, 1].

d'une part, de les distinguer des termes du langage et, d'autre part, de préciser, lorsqu'elles figurent dans une formule, l'occurrence de formule à laquelle elles se rapportent.

Soit le langage de l'algèbre élémentaire augmenté d'un symbole de description définie, noté $\imath$, ainsi que d'un symbole de ponctuation, noté $|$. Le symbole de description définie peut être conçu comme un symbole logique de quantification binaire [7]. Aussi, nous élargissons la définition de formule de sorte que si α est une variable et si A et B sont des formules, alors $\imath\alpha\,(A \mid B)$ est une formule. Une formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ se lit « le α tel que A est tel que B ».

Suivant la théorie russellienne des descriptions définies, toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie qu'il existe exactement un α tel que A et que cet unique α est tel que B. Autrement dit, toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie à la fois que :

— il existe au moins un α tel que A ;
— il existe au plus un α tel que A ;
— tout α tel que A est tel que B.

Sur base de cette interprétation, toute formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ — où A et B sont des formules du langage de l'algèbre élémentaire — peut être traduite par une formule de la forme qui suit — où β et γ sont des variables distinctes qui ne figurent pas dans la formule $\exists\alpha\, A$.

$$((\exists\alpha\, A \wedge \forall\beta\forall\gamma\,((A[\alpha := \beta] \wedge A[\alpha := \gamma]) \rightarrow \beta = \gamma)) \wedge \forall\alpha\,(A \rightarrow B))$$

D'autres traductions logiquement équivalentes, comme celles mentionnées ci-dessous, sont également possibles.

$$\exists\alpha\,((A \wedge \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha)) \wedge B)$$

$$\exists\alpha\,(\forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \leftrightarrow \beta = \alpha) \wedge B)$$

Remarque Le symbole $\leftrightarrow$ est ici utilisé comme une abréviation. Aussi notons-nous $(A \leftrightarrow B)$ l'expression $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Soient deux formules A et B du langage de l'algèbre élémentaire. Alors, la *traduction russellienne* de la formule $\imath\alpha\,(A \mid B)$ est la formule $\exists\alpha\,((A \wedge \forall\beta\,(A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha)) \wedge B)$, où β est la première variable de la liste de l'alphabet qui ne figure pas dans $\exists\alpha\, A$.

À l'aide de cette traduction, toute formule du langage de l'algèbre élémentaire augmenté du symbole de description définie peut être réduite à

une formule du langage de l'algèbre élémentaire (sans ce symbole). En remplaçant successivement chaque occurrence de formule de la forme $\imath\alpha\,(A \mid B)$ dans une formule par sa traduction russellienne, il est possible d'associer à toute formule dans laquelle figurent des descriptions définies une formule dans laquelle il n'en figure pas.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir les propositions 1 à 5. Celles-ci indiquent que, moyennant certaines hypothèses, la position qu'occupe une description définie au sein d'une formule peut varier sans que cela n'ait une incidence sur la signification logique de cette formule. Autrement dit, une description définie peut se rapporter à différentes occurrences de formule dans une formule sans que cela n'affecte sa signification logique. Ces propositions s'avéreront particulièrement utiles lorsque nous aborderons la signification du symbole de division.

Proposition 1. *Soient deux variables distinctes α et β ainsi que trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire telles que α ne figure pas librement dans B et β ne figure pas librement dans A. Alors, la réduction de la formule $\imath\alpha\,(A \mid \imath\beta\,(B \mid C))$ est logiquement équivalente à la réduction de la formule $\imath\beta\,(B \mid \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 2. *Soient deux formules A et B du langage de l'algèbre élémentaire. S'il existe exactement un α tel que A, alors la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid \neg B)$ est logiquement équivalente à la réduction de $\neg\imath\alpha\,(A \mid B)$.*

Proposition 3. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire.*

- *Si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \wedge C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \wedge C)$.*
- *Si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \wedge C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \wedge \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 4. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire.*

- *Si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \vee C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \vee C)$.*
- *Si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \vee C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \vee \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Proposition 5. *Soient trois formules A, B et C du langage de l'algèbre élémentaire. S'il existe exactement un α tel que A, alors :*

- *si α ne figure pas librement dans C, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \to C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(\imath\alpha\,(A \mid B) \to C)$;*
- *si α ne figure pas librement dans B, la réduction de $\imath\alpha\,(A \mid (B \to C))$ est logiquement équivalente à la réduction de $(B \to \imath\alpha\,(A \mid C))$.*

Afin d'illustrer les propositions 1 et 2, deux exemples relatifs à la différence de deux nombres réels sont présentés dans l'appendice 1.

5 La division comme description définie

Dans cette section, nous entendons, d'une part, préciser la signification du symbole de division à la lumière de la théorie russellienne des descriptions définies et, d'autre part, montrer que la plupart des expressions dans lesquelles figure ce symbole sont ambiguës quant à l'analyse logique qui peut en être proposée.

Afin d'étudier la signification que recouvre le symbole de division dans le cadre de la résolution d'équations, nous définissons un pseudo-langage logique dont l'alphabet est celui du langage de l'algèbre élémentaire augmenté d'un pseudo-symbole fonctionnel binaire, noté $\div$, et dont la syntaxe est décrite ci-dessous.

Un *pseudo-terme* est défini à partir des règles suivantes.

— Toute variable est un pseudo-terme.
— Toute constante est un pseudo-terme.
— Si t_1 et t_2 sont des pseudo-termes, alors $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$ et $(t_1 \div t_2)$ sont des pseudo-termes.

Une *pseudo-formule* est définie à partir des règles suivantes.

— Si t_1 et t_2 sont des pseudo-termes, alors $t_1 = t_2$ et $t_1 < t_2$ sont des pseudo-formules.
— Si A est une pseudo-formule, alors $\neg A$ est une pseudo-formule.
— Si A et B sont des pseudo-formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des pseudo-formules.
— Si α est une variable et A est une pseudo-formule, alors $\forall \alpha\, A$ et $\exists \alpha\, A$ sont des pseudo-formules.

Le *quotient* de deux nombres réels x et y, noté $(x \div y)$, est défini comme le nombre réel z tel que $x = (y \cdot z)$. Cette définition est d'ordinaire soumise à la restriction suivant laquelle le nombre y est distinct de zéro de sorte à assurer, sur base des hypothèses formulées à l'égard des nombres réels, l'existence et l'unicité d'un z tel que $x = (y \cdot z)$.

Dans la mesure où tout pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ — dans lequel t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire — est assimilable à une expression de la forme « le α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ », l'interprétation russellienne des descriptions définies nous dispense de restreindre cette définition aux cas où t_2 est distinct de zéro. En effet, la théorie russellienne des descriptions définies permet de rendre compte de la signification des formules dans lesquelles figurent des expressions de la forme « le α tel que A » en toute généralité — qu'il existe exactement un α tel que A ou non. C'est pourquoi, il nous est permis d'adopter la définition du quotient de deux

nombres réels en négligeant la restriction qui l'accompagne. Nous posons dès lors le schéma abréviatif suivant.

Tout pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$, où t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire, est une abréviation d'une expression de la forme « le α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ » — où α est une variable qui ne figure ni dans t_1 ni dans t_2.

En première approximation, une analyse logique d'une pseudo-formule dans laquelle figure le symbole de division consiste à lui associer une formule du langage de l'algèbre élémentaire d'une façon qui est conforme à la fois au schéma abréviatif de la division et à la théorie russellienne des descriptions définies.

Exemple Soit la pseudo-formule $(x \div 1) = x$. Suivant le schéma abréviatif de la division, le pseudo-terme $(x \div 1)$ est une abréviation de l'expression « le y tel que $x = (1 \cdot y)$ ». Proposer une analyse logique de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$ revient donc à identifier une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est conforme à l'interprétation russellienne de l'expression « le y tel que $x = (1 \cdot y)$ est tel que $y = x$ » ou, plus formellement, de l'expression $\imath y\,(x = (1 \cdot y) \mid y = x)$. En ce sens, la formule $\exists y\,((x = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (1 \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge y = x)$ constitue une analyse logique de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$. L'exactitude de la pseudo-formule $(x \div 1) = x$ peut alors être établie en observant que la formule qui lui est associée est un théorème de l'algèbre élémentaire.

Soient une pseudo-formule A et une variable α telles qu'il n'existe aucune occurrence de α dans A. Une *interprétation russellienne* de A est une pseudo-formule de la forme $\exists\alpha\,((t_1 = (t_2 \cdot \alpha) \wedge \forall\beta\,(t_1 = (t_2 \cdot \beta) \rightarrow \beta = \alpha)) \wedge B)$ où :

- t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire ;
- B est une pseudo-formule telle qu'il existe exactement une occurrence libre de α dans B et telle que A est identique à $B[\alpha := (t_1 \div t_2)]$;
- β est la première variable de la liste de l'alphabet qui est distincte de α et ne figure pas dans A.

Une pseudo-formule B est une *transformation russellienne* d'une pseudo-formule A s'il existe une pseudo-formule C telle que :

- il existe une pseudo-formule D telle que D est une interprétation russellienne de C ;
- il existe une occurrence de C dans A telle que B est la pseudo-formule obtenue en remplaçant cette occurrence de C dans A par D.

Une formule B du langage de l'algèbre élémentaire est une *analyse logique* d'une pseudo-formule A s'il existe une suite finie $\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle$ telle que σ_1

est la pseudo-formule A, σ_n est la formule B et σ_{i+1} est une transformation russellienne de σ_i, pour tout i $(1 \leq i < n)$.

La plupart des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division sont empreintes d'ambiguïté en ce sens qu'elles admettent plusieurs analyses logiques. En effet, il n'est pas rare que plusieurs formules du langage de l'algèbre élémentaire puissent être associées à une unique pseudo-formule.

Pour l'essentiel, une transformation russellienne d'une pseudo-formule A consiste, d'une part, à choisir dans A une occurrence d'un pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et, d'autre part, à choisir l'occurrence de pseudo-formule dans A à laquelle se rapporte cette occurrence de pseudo-terme. Dans cette perspective, une analyse logique d'une pseudo-formule A revient à opérer ce double choix autant de fois qu'il existe d'occurrences du symbole de division dans A. Aussi l'ambiguïté d'une pseudo-formule dépend-elle à la fois de sa complexité et du nombre d'occurrences du symbole de division dans cette pseudo-formule. Deux exemples qui illustrent l'ambiguïté des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division sont présentés dans l'appendice 2.

Deux formes d'ambiguïté peuvent être distinguées. Une pseudo-formule est *faiblement ambiguë* si toutes ses analyses logiques sont algébriquement équivalentes. Elle est *fortement ambiguë* sinon. À la lumière des propositions 1 à 5, il est possible de montrer que cette seconde forme d'ambiguïté — la seule qui soit véritablement critique dans le cadre qui nous occupe — concerne exclusivement les pseudo-formules dans lesquelles figure un pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que l'existence ou l'unicité d'un α tel que $t_1 = (t_2 \cdot \alpha)$ ne peut être établie à partir des hypothèses formulées à l'égard des nombres réels.

Exemple Soit la pseudo-formule $(0 \div 0) \neq 1$. Deux analyses logiques en sont possibles. L'une est la formule obtenue en y remplaçant l'occurrence de $(0 \div 0) = 1$ par son interprétation russellienne et l'autre est la formule obtenue en y remplaçant l'occurrence de $(0 \div 0) \neq 1$ par son interprétation russellienne. La première analyse logique correspond à la formule du langage de l'algèbre élémentaire $\neg\exists x\,((0 = (0 \cdot x) \wedge \forall y\,(0 = (0 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x = 1)$. Cette analyse logique traduit l'idée qu'il n'existe pas un et un seul nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et tel que $x = 1$. La seconde analyse logique correspond, quant à elle, à la formule du langage de l'algèbre élémentaire $\exists x\,((0 = (0 \cdot x) \wedge \forall y\,(0 = (0 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x \neq 1)$. Cette analyse logique traduit l'idée qu'il existe exactement un nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et cet unique nombre x est tel que $x \neq 1$. Tandis que la première analyse logique est un théorème de l'algèbre élémentaire, la seconde ne l'est pas.

Face à l'ambiguïté des pseudo-formules dans lesquelles figure le symbole de division, il est commode de définir une transformation russellienne privilégiée de sorte qu'une unique analyse logique puisse être associée à toute pseudo-formule de ce type. La transformation russellienne privilégiée d'une pseudo-formule A revient, d'une part, à choisir dans A la première occurrence de pseudo-terme de la forme $(t_1 \div t_2)$ tel que t_1 et t_2 sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et, d'autre part, à convenir que celle-ci se rapporte à l'occurrence de pseudo-formule dans A qui est atomique. Par le biais de cette définition, une unique analyse logique peut être proposée pour chaque pseudo-formule dans laquelle figure le symbole de division. Cette analyse logique est dite *standard*.

Sont présentées ci-après quatre pseudo-formules dont l'analyse logique standard est un théorème de l'algèbre élémentaire. Les différentes analyses logiques de ces pseudo-formules sont consignées dans l'appendice 3.

$\forall x \forall y \forall z \, ((x \div y) = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \rightarrow ((x \div y) = z \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \rightarrow (x \div y) \neq z)$

$\forall x \neg \exists y \, (x \div 0) = y$

Il est crucial de remarquer que si les principes déductifs de la logique classique s'appliquent aux analyses logiques des pseudo-formules, ils ne s'appliquent pas aux pseudo-formules elles-mêmes. En effet, si tel était le cas, il serait possible de déduire de la première pseudo-formule, comme de la troisième et de la quatrième, la négation de la réflexivité de l'égalité. En outre, la deuxième pseudo-formule, qui correspond à la définition usuellement proposée de la division, serait soumise au théorème logique rappelé dans la section 3, de sorte que quel que soit x il existerait un z tel que $(x \div 0) = z$.

Remarque Dans les analyses logiques de ces pseudo-formules, nous avons considéré, par souci d'économie, le symbole $\leftrightarrow$ comme un symbole primitif du langage de l'algèbre élémentaire plutôt que comme une abréviation.

La signification du symbole de division maintenant précisée, examinons les conséquences de cette interprétation relativement au statut des conditions d'existence et à la correction des raisonnements qui interviennent dans la résolution de certaines équations.

6 La résolution d'équations

Nous appelons *équation (à une inconnue)* toute pseudo-formule de la forme $t_1 = t_2$ dans laquelle figure exactement une variable.

À partir de notre analyse de la division, nous montrons qu'il est possible d'associer une condition d'existence à tout pseudo-terme dans lequel figure exactement une variable de sorte à en préciser le domaine de définition. En outre, nous montrons à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé lorsque le symbole de division y apparaît.

6.1 Pseudo-terme et condition d'existence

En général, les pseudo-termes sont de deux sortes : ceux qui sont des termes du langage de l'algèbre élémentaire et ceux qui ne le sont pas. Les premiers sont ceux dans lesquels n'apparaît pas le symbole de division et les seconds ceux dans lesquels il apparaît.

Notre propos se limite aux seuls pseudo-termes dans lesquels figure exactement une variable. Soit un pseudo-terme t dont la seule variable est α.

Si le symbole de division n'apparaît pas dans t, alors toute formule de la forme $\exists\beta\, t = \beta$ ou $\forall\beta\forall\gamma\,((t = \beta \wedge t = \gamma) \rightarrow \beta = \gamma)$ — où β et γ sont des variables distinctes qui ne figurent pas dans t — est un théorème logique. Aussi, pour tout nombre réel α, existe-t-il exactement un nombre réel β tel que t est égal à β.

En revanche, si le symbole de division apparaît dans t, il se peut que, pour quelque nombre réel α, il n'existe pas un et un seul nombre réel β tel que t est égal à β. C'est pourquoi, il importe, lorsque le symbole de division figure dans un pseudo-terme t, d'identifier l'ensemble des nombres réels α tels que t existe et est unique.

Soit un pseudo-terme t dans lequel figure le symbole de division et dont la seule variable est α. La *condition d'existence* de t — ou encore le *domaine de définition* de t — est l'ensemble des valeurs assignables à α telles qu'elles rendent vraie l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$, où β est la première variable de la liste de l'alphabet qui ne figure pas dans t.

En pratique, spécifier la condition d'existence d'un tel pseudo-terme revient à déterminer une formule du langage de l'algèbre élémentaire telle qu'elle est algébriquement équivalente à l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$ et telle que les valeurs assignables à α qui la rendent vraie sont aisément identifiables. L'appendice 4 comprend deux exemples dans lesquels la condition d'existence d'un pseudo-terme est spécifiée.

Remarque Bien que cette définition n'impose pas l'unicité du pseudo-terme t de façon explicite, celle-ci peut être déduite de l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists\beta\, t = \beta$.

6.2 Pseudo-formule et raisonnement

Afin de préciser à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé, nous définissons une relation de *conséquence algébrique* sur l'ensemble des équations.

Soient deux équations A et B dont la seule variable est α. Si A et B sont toutes deux des formules du langage de l'algèbre élémentaire, nous posons que A a pour conséquence algébrique B si la formule $\forall\alpha\,(A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Au contraire, si l'une ou l'autre des deux équations que sont A et B n'est pas une formule du langage de l'algèbre élémentaire, nous posons que A a pour conséquence algébrique B si l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall\alpha\,(A \to B)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire.

Il est à noter que la relation de conséquence algébrique satisfait plusieurs propriétés intéressantes. Tout d'abord, il s'agit bien d'une relation de nature déductive dans la mesure où elle est à la fois réflexive et transitive. Ensuite, elle est conforme aux principes déductifs de la logique classique dès lors qu'elle porte sur des formules du langage de l'algèbre élémentaire. En effet, lorsque A et B sont des formules, A a pour conséquence algébrique B si et seulement si A entraîne algébriquement B. Enfin, la relation de conséquence algébrique s'applique à des équations dans lesquelles figure le symbole de division. Elle permet ainsi d'étendre la relation d'entraînement algébrique à des pseudo-formules qui échappent aux principes déductifs de la logique classique.

Afin d'illustrer notre propos, nous identifions les couples d'équations distinctes formés à partir de E.1, E.2 et E.3 tels que la première équation a pour conséquence algébrique la seconde.

$$(x \cdot x) = x \tag{E.1}$$

$$((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \tag{E.2}$$

$$x = 1 \tag{E.3}$$

Étant donné que E.1 et E.3 sont des formules du langage de l'algèbre élémentaire, celles-ci répondent aux principes déductifs de la logique classique. Aussi est-il possible de déterminer à partir des seules ressources de l'algèbre élémentaire si l'une a pour conséquence algébrique l'autre.

D'une part, comme la formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow x = 1)$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire, il s'ensuit que E.1 n'a pas pour conséquence algébrique E.3. Nous constatons en effet que $\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow x = 1)$ entraîne logiquement $((0 \cdot 0) = 0 \rightarrow 0 = 1)$, qui entraîne algébriquement une contradiction.

D'autre part, comme la formule $\forall x\,(x = 1 \rightarrow (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire, il s'ensuit que E.3 a pour conséquence algébrique E.1. En effet, nous observons que $(1 \cdot 1) = 1$, qui est logiquement équivalent à $\forall x\,(x = 1 \rightarrow (x \cdot x) = x)$, est incontestablement un théorème de l'algèbre élémentaire.

Quant aux quatre autres couples d'équations distinctes formés à partir de E.1, E.2 et E.3, il n'est pas possible de déterminer s'ils appartiennent à la relation de conséquence algébrique sans que ne soit précisée la signification du symbole de division. À la lumière de notre analyse de la division, nous montrons dans l'appendice 5 que E.1 n'a pas pour conséquence algébrique E.2 mais E.2 a pour conséquence algébrique E.3, E.3 a pour conséquence algébrique E.2 et E.2 a pour conséquence algébrique E.1.

7 Conclusion

La théorie russellienne des descriptions définies apporte une réponse à la question épineuse du traitement des fonctions partiellement définies dans le cadre de la logique classique des prédicats du premier ordre avec égalité.

Si cette théorie permet de saisir de façon adéquate la signification du symbole de division tel qu'il apparaît en algèbre élémentaire, celle-ci peut sembler excessivement compliquée. Cependant, comme l'indique son auteur, la complexité de cette théorie est inhérente à son objet. De plus, la thèse qui la sous-tend est en définitive assez simple : toute expression de la forme « le α tel que A est tel que B » signifie qu'il existe exactement un α tel que A et que cet unique α est tel que B.

D'autre part, la théorie des descriptions définies proposée par B. Russell est extrêmement générale en ce sens qu'elle s'applique à toute expression de la forme « le α tel que A ». Aussi permet-elle de résoudre de nombreuses difficultés liées à l'interprétation de ces expressions dans le cadre des définitions mathématiques. En particulier, préciser la signification du symbole de division à l'aide de cette théorie présente de nombreux avantages.

Tout d'abord, l'interprétation russellienne du symbole de division met en lumière l'ambiguïté que recèlent certaines pseudo-formules dans lesquelles il figure. Elle permet ainsi de tirer d'embarras qui chercherait à juger de l'exactitude de pseudo-formules telles que $(0 \div 0) \neq 1$. Si cette pseudo-formule signifie qu'il existe exactement un nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et cet unique nombre x est tel que $x \neq 1$, il conviendra de répondre par la négative. Au contraire, si elle signifie qu'il n'existe pas un et un seul nombre réel x tel que $0 = (0 \cdot x)$ et tel que $x = 1$, une réponse affirmative sera donnée.

Ensuite, il est possible, grâce à la théorie des descriptions définies, d'associer une condition d'existence à tout pseudo-terme dans lequel figure exactement une variable et cela exclusivement au moyen des concepts de l'algèbre élémentaire. De la sorte, le statut qu'occupent les conditions d'existence dans la résolution d'équations peut être précisé indépendamment de toute considération analytique.

Enfin, la théorie des descriptions définies que propose B. Russell permet de déterminer, en accord avec les principes déductifs de la logique classique, à quelles conditions le passage d'une équation à une autre est autorisé lorsque le symbole de division y apparaît. En particulier, elle permet, par le biais d'une analyse de la langue mathématique, de réconcilier, d'une part, le fait que $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ et, d'autre part, le fait que, $\forall x \forall y \forall z\, (x = y \rightarrow (x * z) = (y * z))$ est un théorème logique, quelle que soit la signification du symbole fonctionnel binaire $*$.

Extraits

It is important to observe the effect of our theory on the interpretation of definitions which proceed by means of denoting phrases. Most mathematical definitions are of this sort : for example, "$m - n$ means the number which, added to n, gives m". Thus $m - n$ is defined as meaning the same as a certain denoting phrase ; but we agreed that denoting phrases have no meaning in isolation. Thus what the definition really ought to be is : "Any proposition containing $m-n$ is to mean the proposition which results from substituting for '$m - n$' 'the number which, added to n, gives 'm' ". The resulting proposition is interpreted according to the rules already given for interpreting propositions whose verbal expression contains a denoting phrase. In the case where m and n are such that there is one and only one number x which, added to n, gives m, there is a number x which can be substituted for $m - n$ in any proposition containing $m - n$ without altering the truth or falsehood of the proposition. But in other cases, all propositions in which "$m - n$" has a primary occurrence are false.

B. Russell, *On denoting*

A descriptive function will in general exist while y belongs to a certain domain, but not outside that domain ; thus if we are dealing with positive rationals, $\sqrt{y}$ will be significant if y is a perfect square, but not otherwise ; if we are dealing with real numbers, and agree that "$\sqrt{y}$" is to mean the *positive* square root (or, is to mean the negative square root), $\sqrt{y}$ will be significant provided y is positive, but not otherwise ; and so on. Thus every descriptive function has what we may call a "domain of definition" or a "domain of existence," which may be thus defined : If the function in question is $R`y$, its domain of definition or of existence will be the class of those arguments $y$ for which we have $\mathrm{E}!R`y$, *i.e.* for which $\mathrm{E}!(\imath x)(xRy)$, *i.e.* for which there is one x, and no more, having the relation R to y.

A. N. Whitehead & B. Russell, *Principia mathematica*

Appendice 1

Exemple Montrons que la réduction de 1 est logiquement équivalente à la réduction de 2.

$$\imath y\,(x = (1 + y) \mid \imath z\,(x = (0 + z) \mid y < z)) \tag{1}$$

$$\imath z\,(x = (0 + z) \mid \imath y\,(x = (1 + y) \mid y < z)) \tag{2}$$

En remplaçant dans 1 l'occurrence de $\imath z\,(x = (0+z) \mid y < z)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule suivante.

$$\imath y\,(x = (1 + y) \mid \exists z\,((x = (0 + z) \wedge \forall y\,(x = (0 + y) \to y = z)) \wedge y < z)) \tag{3}$$

En remplaçant dans 3 l'occurrence de $\imath y\,(x = (1+y) \mid \exists z\,((x = (0+z) \wedge \forall y\,(x = (0+y) \to y = z)) \wedge y < z))$ par sa traduction russellienne, nous obtenons une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est la réduction de 1.

$$\exists y\,((x = (1 + y) \wedge \forall z\,(x = (1 + z) \to z = y)) \wedge \exists z\,((x = (0 + z) \wedge \forall y\,(x = (0 + y) \to y = z)) \wedge y < z)) \tag{4}$$

En remplaçant dans 2 l'occurrence de $\imath y\,(x = (1+y) \mid y < z)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule suivante.

$$\imath z\,(x = (0 + z) \mid \exists y\,((x = (1 + y) \wedge \forall z\,(x = (1 + z) \to z = y)) \wedge y < z)) \tag{5}$$

En remplaçant dans 5 l'occurrence de $\imath z\,(x = (0+z) \mid \exists y\,((x = (1+y) \wedge \forall z\,(x = (1+z) \to z = y)) \wedge y < z))$ par sa traduction russellienne, nous obtenons une formule du langage de l'algèbre élémentaire qui est la réduction de 2.

$$\exists z\,((x = (0 + z) \wedge \forall y\,(x = (0 + y) \to y = z)) \wedge \exists y\,((x = (1 + y) \wedge \forall z\,(x = (1 + z) \to z = y)) \wedge y < z)) \tag{6}$$

Il reste alors à montrer que 4 est logiquement équivalent à 6.

Exemple Montrons que la réduction de 7 est logiquement équivalente à la réduction de 8.

$$\imath x\,(0 = (1 + x) \mid x \neq 0) \tag{7}$$

$$\neg\imath x\,(0 = (1 + x) \mid x = 0) \tag{8}$$

En remplaçant dans 7 l'unique occurrence de $\imath x\,(0 = (1 + x) \mid x \neq 0)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule qui suit.

$$\exists x\,((0 = (1 + x) \wedge \forall y\,(0 = (1 + y) \rightarrow y = x)) \wedge x \neq 0) \tag{9}$$

Nous constatons que 9, qui est une formule du langage de l'algèbre élémentaire, est la réduction de 7.

En remplaçant dans 8 l'unique occurrence de $\imath x\,(0 = (1 + x) \mid x = 0)$ par sa traduction russellienne, nous obtenons la formule qui suit.

$$\neg\exists x\,((0 = (1 + x) \wedge \forall y\,(0 = (1 + y) \rightarrow y = x)) \wedge x = 0) \tag{10}$$

Nous constatons que 10, qui est une formule du langage de l'algèbre élémentaire, est la réduction de 8.

Il reste alors à montrer que 9 est logiquement équivalent à 10 à condition qu'il existe exactement un x tel que $0 = (1 + x)$.

Appendice 2

Exemple Montrons que plusieurs analyses logiques de la pseudo-formule qui suit peuvent être proposées.

$$(1 \div 1) \neq 0 \tag{11}$$

Il existe exactement deux pseudo-formules qui figurent dans 11 et admettent une interprétation russellienne. Il s'agit des pseudo-formules $(1 \div 1) = 0$ et $(1 \div 1) \neq 0$.

D'une part, la pseudo-formule $(1 \div 1) = 0$, qui est identique à $x = 0\,[x := (1 \div 1)]$, admet 12 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x = 0) \tag{12}$$

D'autre part, la pseudo-formule $(1 \div 1) \neq 0$, qui est identique à $x \neq 0\,[x := (1 \div 1)]$, admet 13 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x \neq 0) \tag{13}$$

Il s'ensuit qu'il existe exactement deux transformations russelliennes de 11. L'une consiste à remplacer dans 11 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div 1) = 0$ par 12. L'autre consiste à remplacer dans 11 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div 1) \neq 0$ par 13. Ces deux transformations russelliennes correspondent respectivement à 14 et 15.

$$\neg\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x = 0) \tag{14}$$

$$\exists x\,((1 = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x \neq 0) \tag{15}$$

Par observation des suites $\langle 11, 14\rangle$ et $\langle 11, 15\rangle$, nous constatons que les formules 14 et 15 sont toutes deux des analyses logiques de 11. Notons également que ces formules sont équivalentes dans le cadre de l'algèbre élémentaire des nombres réels.

Exemple Montrons que plusieurs analyses logiques de la pseudo-formule qui suit peuvent être proposées.

$$(1 \div (1 + 1)) < ((1 + 1) \div 1) \tag{16}$$

Il existe une unique pseudo-formule qui figure dans 16, à savoir 16 elle-même. Cette pseudo-formule est identique à la fois à $x < ((1+1) \div 1)\,[x := (1 \div (1+1))]$ et à $(1 \div (1+1)) < x\,[x := ((1+1) \div 1)]$. Elle admet donc exactement deux interprétations russelliennes (aux seules variables liées près) que sont 17 et 18.

$$\exists x\,((1 = ((1 + 1) \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = ((1 + 1) \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge x < ((1 + 1) \div 1)) \tag{17}$$

$$\exists x\,(((1 + 1) = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,((1 + 1) = (1 \cdot y) \rightarrow y = x)) \wedge (1 \div (1 + 1)) < x) \tag{18}$$

Il s'ensuit qu'il existe exactement deux transformations russelliennes de 16. L'une consiste à remplacer dans 16 l'unique occurrence de 16 par 17. L'autre consiste à remplacer dans 16 l'unique occurrence de 16 par 18. De ce fait, ces deux transformations russelliennes correspondent respectivement à 17 et 18.

D'une part, il existe exactement trois pseudo-formules qui figurent dans 17 et admettent une interprétation russellienne. Seule la pseudo-formule $x < ((1 + 1) \div 1)$ est ici examinée. Cette pseudo-formule, qui est identique à $x < y\,[y := ((1 + 1) \div 1)]$, admet 19 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists y\,(((1 + 1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,((1 + 1) = (1 \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge x < y) \tag{19}$$

En remplaçant dans 17 l'unique occurrence de la pseudo-formule $x < ((1 + 1) \div 1)$ par 19, nous obtenons 20, qui est une transformation russellienne de 17.

$$\exists x\,((1 = ((1 + 1) \cdot x) \wedge \forall y\,(1 = ((1 + 1) \cdot y) \to y = x)) \wedge \exists y\,(((1 + 1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,((1 + 1) = (1 \cdot z) \to z = y)) \wedge x < y)) \quad (20)$$

Par observation de la suite $\langle 16, 17, 20\rangle$, nous constatons que la formule 20 est une analyse logique de 16.

D'autre part, il existe exactement trois pseudo-formules qui figurent dans 18 et admettent une interprétation russellienne. Seule la pseudo-formule $(1 \div (1 + 1)) < x$ est ici examinée. Cette pseudo-formule, qui est identique à $y < x\,[y := (1 \div (1 + 1))]$, admet 21 comme unique interprétation russellienne (aux seules variables liées près).

$$\exists y\,((1 = ((1 + 1) \cdot y) \wedge \forall z\,(1 = ((1 + 1) \cdot z) \to z = y)) \wedge y < x) \quad (21)$$

En remplaçant dans 18 l'unique occurrence de la pseudo-formule $(1 \div (1 + 1)) < x$ par 21, nous obtenons 22, qui est une transformation russellienne de 18.

$$\exists x\,(((1 + 1) = (1 \cdot x) \wedge \forall y\,((1 + 1) = (1 \cdot y) \to y = x)) \wedge \exists y\,((1 = ((1 + 1) \cdot y) \wedge \forall z\,(1 = ((1 + 1) \cdot z) \to z = y)) \wedge y < x)) \quad (22)$$

Par observation de la suite $\langle 16, 18, 22\rangle$, nous constatons que la formule 22 est une analyse logique de 16.

Il est à noter que les six analyses logiques possibles de la pseudo-formule $(1 \div (1 + 1)) < ((1 + 1) \div 1)$ sont toutes logiquement équivalentes.

Appendice 3

ANALYSES LOGIQUES DE LA PSEUDO-FORMULE $\forall x \forall y \forall z \left((x \div y) = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))\right)$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \left(\imath x_1 \left(x = (y \cdot x_1)\right) \mid x_1 = z\right) \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)))$

$\forall x \forall y \forall z \left(\exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \left(x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1\right)\right) \wedge x_1 = z\right) \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z)))$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, \imath x_1 \left(x = (y \cdot x_1)\right) \mid (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))))$

$\forall x \forall y \forall z \exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \left(x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1\right)\right) \wedge (x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))))$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \, \imath x_1 \left(x = (y \cdot x_1)\right) \mid \forall z \left(x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))\right))$

$\forall x \forall y \exists x_1 \left((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \left(x = (y \cdot y_1) \rightarrow y_1 = x_1\right)\right) \wedge \forall z \left(x_1 = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = (y \cdot z))\right))$

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \to ((x \div y) = z \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \to (\imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid x_1 = z) \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \to (\exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 = z) \leftrightarrow x = (y \cdot z)))$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \to \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y \neq 0 \to \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

$\forall x \forall y \forall z \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

Quatrième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \, \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid \forall z \, (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

$\forall x \forall y \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge \forall z \, (y \neq 0 \to (x_1 = z \leftrightarrow x = (y \cdot z))))$

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \to (x \div y) \neq z)$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \to \neg \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid x_1 = z))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \to \neg \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 = z))$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \to \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid x_1 \neq z))$

$\forall x \forall y \forall z \, (y = 0 \to \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge x_1 \neq z))$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \forall z \, \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid (y = 0 \to x_1 \neq z))$

$\forall x \forall y \forall z \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge (y = 0 \to x_1 \neq z))$

Quatrième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \forall y \, \imath x_1 \, (x = (y \cdot x_1) \mid \forall z \, (y = 0 \to x_1 \neq z))$

$\forall x \forall y \exists x_1 \, ((x = (y \cdot x_1) \wedge \forall y_1 \, (x = (y \cdot y_1) \to y_1 = x_1)) \wedge \forall z \, (y = 0 \to x_1 \neq z))$

Analyses logiques de la pseudo-formule $\forall x \neg \exists y \, (x \div 0) = y$

Première analyse logique (standard) et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \neg \exists y \, \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid z = y)$

$\forall x \neg \exists y \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge z = y)$

Deuxième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \neg \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid \exists y \, z = y)$

$\forall x \neg \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge \exists y \, z = y)$

Troisième analyse logique et son expression dans le formalisme des descriptions définies

$\forall x \, \imath z \, (x = (0 \cdot z) \mid \neg \exists y \, z = y)$

$\forall x \exists z \, ((x = (0 \cdot z) \wedge \forall x_1 \, (x = (0 \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge \neg \exists y \, z = y)$

Appendice 4

Exemple Spécifions la condition d'existence du pseudo-terme $(1 \div x)$.

Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists y\,(1 \div x) = y$, à savoir 23.

$$\exists y \exists z\,((1 = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\,(1 = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge z = y) \tag{23}$$

Nous constatons alors que 23 est logiquement équivalent à 24.

$$\exists z\,(1 = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\,(1 = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \tag{24}$$

En outre, comme 25 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 24 est algébriquement équivalent à 26.

$$\forall x \forall y\,(\exists z\,(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = (y \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \leftrightarrow y \neq 0) \tag{25}$$

$$x \neq 0 \tag{26}$$

De ce qui précède, nous concluons que la condition d'existence de $(1 \div x)$ est l'ensemble des valeurs assignables à x telles qu'elles rendent vraie la formule $x \neq 0$.

Exemple Spécifions la condition d'existence du pseudo-terme $(1 \div (x \div (x + 1)))$.

Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\exists y\,(1 \div (x \div (x + 1))) = y$, à savoir 27.

$$\exists y \exists z\,((x = ((x + 1) \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = ((x + 1) \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge \exists x\,((1 = (z \cdot x) \wedge \forall x_1\,(1 = (z \cdot x_1) \rightarrow x_1 = x)) \wedge x = y)) \tag{27}$$

Nous constatons alors que 27 est logiquement équivalent à 28.

$$\exists z_1 \exists z_2 \left((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge \forall x_1 \left(x = ((x+1) \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z_1\right)) \wedge (1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge \forall x_2 \left(1 = (z_1 \cdot x_2) \rightarrow x_2 = z_2\right))\right) \tag{28}$$

Comme 29 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 28 est algébriquement équivalent à 30.

$$\forall x \forall y \left(\exists z \left(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z\right)\right) \leftrightarrow y \neq 0\right) \tag{29}$$

$$\exists z_1 \exists z_2 \left((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge (x+1) \neq 0) \wedge (1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge z_1 \neq 0)\right) \tag{30}$$

Comme 31 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 30 est algébriquement équivalent à 32.

$$\forall x \forall y \forall z \left(x = (y \cdot z) \rightarrow (x = 0 \leftrightarrow (y = 0 \vee z = 0))\right) \tag{31}$$

$$\exists z_1 \exists z_2 \left(((x = ((x+1) \cdot z_1) \wedge (x+1) \neq 0) \wedge (1 = (z_1 \cdot z_2) \wedge z_1 \neq 0)) \wedge x \neq 0\right) \tag{32}$$

Par 29 et 31, nous constatons que 32 est algébriquement équivalent à 33.

$$((x+1) \neq 0 \wedge x \neq 0) \tag{33}$$

De ce qui précède, nous concluons que la condition d'existence de $(1 \div (x \div (x+1)))$ est l'ensemble des valeurs assignables à x telles qu'elles rendent vraie la formule $((x+1) \neq 0 \wedge x \neq 0)$ ou, de façon abrégée, $(x \neq -1 \wedge x \neq 0)$.

Appendice 5

Exemple Vérifions que $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \to ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 34.

$$\forall x\,((x{\cdot}x) = x \to \exists y\,(((x{\cdot}x) = (x{\cdot}y) \wedge \forall z\,((x{\cdot}x) = (x{\cdot}z) \to z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x{\cdot}z) \wedge \forall x_1\,(x = (x{\cdot}x_1) \to x_1 = z)) \wedge y = z))) \quad (34)$$

Nous constatons que 34 est logiquement équivalent à 35 et que 35 entraîne logiquement 36.

$$\forall x\,((x \cdot x) = x \to \exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \to z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \to z = y)))) \quad (35)$$

$$((0 \cdot 0) = 0 \to \exists y\,(((0 \cdot 0) = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,((0 \cdot 0) = (0 \cdot z) \to z = y)) \wedge (0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \to z = y)))) \quad (36)$$

Comme 37 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 36 entraîne algébriquement 38 et 39.

$$\forall x\,(x \cdot 0) = 0 \quad (37)$$

$$(0 = 0 \to \exists y\,((0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \to z = y)) \wedge (0 = (0 \cdot y) \wedge \forall z\,(0 = (0 \cdot z) \to z = y)))) \quad (38)$$

$$(0 = 0 \to \exists y\,(\forall z\,z = y \wedge \forall z\,z = y)) \quad (39)$$

Il reste alors à constater que 39 entraîne logiquement 40, 41 et 42.

$$\exists y\,(\forall z\; z = y \wedge \forall z\; z = y) \tag{40}$$

$$\exists y\,(0 = y \wedge 1 = y) \tag{41}$$

$$0 = 1 \tag{42}$$

Du fait que 34 entraîne algébriquement une contradiction, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,((x \cdot x) = x \rightarrow ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ n'est pas un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $(x \cdot x) = x$ n'a pas pour conséquence algébrique la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$.

Exemple Vérifions que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique $x = 1$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow x = 1)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 43.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z)) \wedge y = z)) \rightarrow x = 1) \tag{43}$$

Nous constatons que 43 est logiquement équivalent à 44.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \rightarrow z = y))) \rightarrow x = 1) \tag{44}$$

Comme 45 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 44 est algébriquement équivalent à 46.

$$\forall x \forall y \left(\exists z \left(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1 \left(x = (y \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z\right)\right) \leftrightarrow y \neq 0\right) \tag{45}$$

$$\forall x \left(\exists y \left(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x \neq 0) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge x \neq 0)\right) \rightarrow x = 1\right) \tag{46}$$

Il reste alors à constater que 46 est logiquement équivalent à 47 et 48.

$$\forall x \forall y \left((((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x = (x \cdot y)) \wedge x \neq 0) \rightarrow x = 1\right) \tag{47}$$

$$\forall x \left(((x \cdot x) = x \wedge x \neq 0) \rightarrow x = 1\right) \tag{48}$$

Du fait que 43 est algébriquement équivalent 48 et que 48 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x \left(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow x = 1\right)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $x = 1$.

Exemple Vérifions que $x = 1$ a pour conséquence algébrique $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x \left(x = 1 \rightarrow ((x \cdot x) \div x) = (x \div x)\right)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 49.

$$\forall x \left(x = 1 \rightarrow \exists y \left(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z \left((x \cdot x) = (x \cdot z) \rightarrow z = y\right)) \wedge \exists z \left((x = (x \cdot z) \wedge \forall x_1 \left(x = (x \cdot x_1) \rightarrow x_1 = z\right)) \wedge y = z\right)\right)\right) \tag{49}$$

Nous constatons que 49 est logiquement équivalent à 50 et 51.

$$\forall x\,(x = 1 \to \exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \to z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \to z = y)))) \tag{50}$$

$$\exists y\,(((1 \cdot 1) = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,((1 \cdot 1) = (1 \cdot z) \to z = y)) \wedge (1 = (1 \cdot y) \wedge \forall z\,(1 = (1 \cdot z) \to z = y))) \tag{51}$$

Comme 52 est une hypothèse de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 51 est algébriquement équivalent à 53.

$$\forall x\,(x \cdot 1) = x \tag{52}$$

$$\exists y\,((1 = y \wedge \forall z\,(1 = z \to z = y)) \wedge (1 = y \wedge \forall z\,(1 = z \to z = y))) \tag{53}$$

Il reste alors à constater que 53 est logiquement équivalent à 54 et 55.

$$\exists y\,((1 = y \wedge 1 = y) \wedge (1 = y \wedge 1 = y)) \tag{54}$$

$$\exists y\,1 = y \tag{55}$$

Du fait que 49 est algébriquement équivalent 55 et que 55 est un théorème logique, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(x = 1 \to ((x \cdot x) \div x) = (x \div x))$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $x = 1$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$.

Exemple Vérifions que $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique $(x \cdot x) = x$. Par définition, cela revient à montrer que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \to (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, nous identifions l'analyse logique standard de cette pseudo-formule, à savoir 56.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x{\cdot}x) = (x{\cdot}y) \wedge \forall z\,((x{\cdot}x) = (x{\cdot}z) \to z = y)) \wedge \exists z\,((x = (x{\cdot}z) \wedge \forall x_1\,(x = (x{\cdot}x_1) \to x_1 = z)) \wedge y = z)) \to (x{\cdot}x) = x) \quad (56)$$

Nous constatons que 56 est logiquement équivalent à 57.

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge \forall z\,((x \cdot x) = (x \cdot z) \to z = y)) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge \forall z\,(x = (x \cdot z) \to z = y))) \to (x \cdot x) = x) \quad (57)$$

Comme 58 est un théorème de l'algèbre élémentaire, nous remarquons que 57 est algébriquement équivalent à 59.

$$\forall x \forall y\,(\exists z\,(x = (y \cdot z) \wedge \forall x_1\,(x = (y \cdot x_1) \to x_1 = z)) \leftrightarrow y \neq 0) \quad (58)$$

$$\forall x\,(\exists y\,(((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x \neq 0) \wedge (x = (x \cdot y) \wedge x \neq 0)) \to (x \cdot x) = x) \quad (59)$$

Il reste alors à constater que 59 est logiquement équivalent à 60 et 61.

$$\forall x \forall y\,((((x \cdot x) = (x \cdot y) \wedge x = (x \cdot y)) \wedge x \neq 0) \to (x \cdot x) = x) \quad (60)$$

$$\forall x\,(((x \cdot x) = x \wedge x \neq 0) \to (x \cdot x) = x) \quad (61)$$

Du fait que 56 est algébriquement équivalent 61 et que 61 est un théorème logique, nous concluons que l'analyse logique standard de la pseudo-formule $\forall x\,(((x \cdot x) \div x) = (x \div x) \rightarrow (x \cdot x) = x)$ est un théorème de l'algèbre élémentaire et, partant, que la pseudo-formule $((x \cdot x) \div x) = (x \div x)$ a pour conséquence algébrique la pseudo-formule $(x \cdot x) = x$.

Références

[1] A. Church, *Introduction to mathematical logic. Volume I*, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1956.

[2] M. Crabbé, *Notions de logique*, accessible en ligne à l'adresse : `http://logoi.be/crabbe/textes/logique.pdf`, 2019.

[3] G. Frege, *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik **100** (1892), 25–50.

[4] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen. II*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), no. 1, 405–431.

[5] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1903.

[6] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[7] S. Neale, *Descriptions*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

[8] B. Russell, *On denoting*, Mind **14** (1905), no. 56, 479–493.

[9] ———, *Introduction to mathematical philosophy*, Dover Publications, New York, 1920.

[10] J. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts), 1967.

[11] P. F. Strawson, *On referring*, Mind **59** (1950), no. 235, 320–344.

[12] G. Sundholm, *Systems of deduction*, Handbook of philosophical logic. Volume I : Elements of classical logic (D. Gabbay and F. Guenthner, eds.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983, pp. 133–188.

[13] P. Suppes, *Introduction to logic*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1957.

[14] A. Tarski, *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[15] ———, *A decision method for elementary algebra and geometry*, Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (B. F. Caviness and J. R. Johnson, eds.), Springer-Verlag, Wien, 1998, pp. 24–84.

[16] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica. Volume I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

Table des matières

Introduction **3**

La logique comme outil d'analyse **6**

Résolution d'équations et déduction naturelle **24**

Description définie et division par zéro **40**