Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche

researchportal.unamur.be

University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ DIDACTIQUE

Des podcasts sur les combinaisons linéaires

Illustration du caractère unificateur de l'algèbre linéaire ... Et bien plus encore!

Hiernaux, Célestine

Award date:
2021

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 24. Apr. 2024

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Faculté des Sciences

DES PODCASTS SUR LES COMBINAISONS LINÉAIRES : ILLUSTRATION DU CARACTÈRE UNIFICATEUR DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE … ET BIEN PLUS ENCORE !

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique de master

en « Master en Sciences Mathématiques à finalité didactique »

Célestine HIERNAUX

Juin 2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Madame Martine De Vleeschouwer, ma promotrice, aux côtés de qui apprendre est toujours un plaisir, d'avoir permis la réalisation du projet de ce mémoire en duo. Je tiens aussi à la remercier pour son oreille toujours attentive, ses conseils, sa patience, sa disponibilité et son soutien, tout au long de ces deux années de travail.

Je remercie également Mesdames Anne Lemaitre et Annick Sartenaer, enseignantes à l'Université de Namur, pour m'avoir aimablement autorisée à tester notre projet avec leurs étudiants, et sans qui la mise en pratique de ce mémoire n'aurait pas pu se concrétiser.

Je remercie aussi les assistants et collaborateurs didactiques de l'Université de Namur qui ont pu consacrer un peu de leur temps à notre enquête. Leurs retours ont été précieux dans la finalisation de ce mémoire.

Je remercie également la Cellule Tice de l'Université de Namur pour m'avoir permis d'accéder à leur "Kit de survie pédagogique" en ligne et pour leurs conseils lors de l'enregistrement des podcasts.

Je tiens à remercier ma famille, grâce à qui j'ai pu entreprendre ces études et dont le soutien sans faille m'a permis de ne jamais baisser les bras et de persévérer durant ces sept années. Tout particulièrement, je remercie ma maman pour ses encouragements et ses relectures dans la construction de ce mémoire.

Enfin, je remercie mes amis et, bien sûr, mon compagnon, pour leur présence et leurs encouragements qui ont renforcé ma ténacité.

Résumé

Le caractère unificateur de l'algèbre linéaire n'est pas facilement identifié par les étudiants débutants dans ce domaine. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons créé un dispositif qui consiste en une proposition d'une série de podcasts illustrant la notion algébrique de combinaison linéaire. Cette notion est assez élémentaire pour que les débutants puissent l'appliquer à des espaces vectoriels différents, de manière progressive, de façon à mettre en lumière ce caractère unificateur. Les spécificités d'enseignement et d'apprentissage de l'algèbre linéaire, comme l'obstacle du formalisme, se mêlent aux difficultés déjà repérées dans la littérature. Certaines sont prises en charge de manière évolutive par le dispositif. La justification de toute technique utilisée par un discours théorique pose également souvent problème aux étudiants dans la transition secondaire/université. Tous les podcasts montrent donc l'importance de la théorie et de la rigueur mathématique dans les exercices pour faciliter l'apprentissage du domaine de l'algèbre linéaire. Ce travail de création de liens entre la théorie et les exercices est souvent réalisé en autonomie par les étudiants. Les podcasts, qui agiraient comme un complément aux cours, pourraient leur être utiles. Le dispositif a été testé auprès d'étudiants débutants en algèbre linéaire et des enquêtes leur ont été envoyées. Des contraintes institutionnelles dues à l'organisation de la mise en oeuvre du dispositif et des contraintes sanitaires dues au Covid-19 ont empêché une analyse significative des résultats à ces enquêtes. Nous en avons également proposé une aux assistants et collaborateurs didactiques des séances d'exercices de ce public test. Les réponses récoltées nous ont permis d'obtenir des avis positifs sur le projet de ce mémoire, de tirer des conclusions et de rassembler des pistes d'amélioration et des perspectives possibles.

Mots clés :

Algèbre linéaire, caractère unificateur, podcasts, changements de cadres, transition secondaire/université, praxéologies complètes.

Table des matières

Introduction **5**

1 Objectifs et motivations **7**
1.1 Pourquoi l'algèbre linéaire ? . . . 8
1.2 Quelques spécificités des notions d'algèbre linéaire . . . 9
1.3 Difficultés en algèbre linéaire repérées dans la littérature . . . 10
1.3.1 Les systèmes d'équations linéaires, y compris avec des nombres complexes 11
1.3.2 Les fonctions dans leur dimension "objet" . . . 12
1.4 Pourquoi le podcast ? . . . 12
1.5 Résumé et questions de recherche . . . 15

2 Cadres théoriques **16**
2.1 Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) . . . 16
2.1.1 Praxéologie . . . 17
2.1.2 Transposition didactique . . . 19
2.2 Changements de cadres . . . 20
2.3 Choix et variables didactiques . . . 21
2.4 Complétons nos questions de recherche... . . . 22

3 Conception du dispositif **24**
3.1 Description des cadres mobilisés dans le dispositif et des difficultés associées . . . 26
3.1.1 Cadres paradigmatiques . . . 27
3.1.2 Cadre polynomial . . . 29
3.1.3 Cadre matriciel . . . 30
3.1.4 Cadres fonctionnels . . . 30
3.1.5 Gradation dans les cadres et dans les difficultés prises en charge . . . 31
3.2 Structure générale des podcasts . . . 31
3.2.1 Page de garde . . . 31
3.2.2 Énoncé et définition . . . 32
3.2.3 Squelette de la résolution . . . 33
3.2.4 Conclusion . . . 34
3.2.5 Exercices supplémentaires . . . 34
3.3 Choix de variables didactiques pour les énoncés des illustrations et les exercices supplémentaires des podcasts . . . 40
3.4 Quelques considérations pédagogiques supplémentaires . . . 43
3.5 Prise en charge de l'obstacle du formalisme . . . 44

4 Mise en oeuvre du dispositif **49**
4.1 Public test et organisation 51
4.1.1 Étudiants en Informatique ayant testé le dispositif 51
4.1.2 Étudiants en Sciences Mathématiques et Sciences Physiques ayant testé le dispositif 54
4.2 Enquêtes 60
4.2.1 Description du questionnaire pour les étudiants en Informatique du public test 65
4.2.2 Description du questionnaire pour les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques du public test 70
4.2.3 Analyse des retours des étudiants du public test 71
4.2.4 Description du questionnaire pour les assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre du public test 76
4.2.5 Analyse des retours des assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre du public test 81

5 Conclusion et perspectives **86**

Annexes **92**

Introduction

Il existe de nombreux ouvrages concernant l'enseignement de l'algèbre linéaire et les particularités d'enseignement et d'apprentissage de ce domaine. Revuz [19] explique : "*Un préjugé courant chez les mathématiciens est que pour bien enseigner les mathématiques, il suffit de bien les connaitre. [...] l'algèbre linéaire apporte un contre-exemple : il y a matière mathématique résistante dont la difficulté ne cèdera pas à un savoir faire pédagogique, si élaboré soit-il, qui ne prenne appui sur le contenu mathématique, c'est-à-dire les idées, les concepts, les méthodes à l'oeuvre dans la théorie*". La transition entre enseignement secondaire et enseignement universitaire est également cruciale dans ce type d'apprentissages. La brusque augmentation de l'utilisation du formalisme et les difficultés fréquemment identifiées chez les débutants dans la littérature nous ont poussé à réfléchir à un dispositif qui faciliterait les apprentissages des étudiants en algèbre linéaire à l'entrée à l'université. Ce dispositif consiste en une proposition de podcasts illustrant la notion algébrique de combinaison linéaire dans différents cadres (au sens de Douady [21]), visant à identifier le caractère unificateur de cette notion, et qui prennent en charge des difficultés progressives. Ce complément au cours théorique et aux séances d'exercices pourrait également faciliter le travail de l'étudiant qui consiste à créer des liens entre la théorie concernant une notion et les problèmes qui l'utilisent ou qu'elle peut résoudre.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les objectifs et motivation du projet du mémoire. Nous motiverons le choix du domaine de l'algèbre linéaire en se basant sur l'ouvrage coordonné par Dorier [19]. Nous considérerons notamment les trois principes de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire définis par Harel [26] (concrétisation, nécessité et généralisabilité) et le caractère FUG des notions de ce domaine, introduit par Robert et Rogalski [32]. Ensuite, nous énoncerons certaines difficultés repérées chez les débutants en algèbre linéaire dans la littérature comme les difficultés à résoudre et interpréter des systèmes d'équations linéaires, à travailler avec les nombres complexes et à considérer les fonctions dans leur dimension objet (au sens de Douady [21]). Nous argumenterons et motiverons également le choix du podcasting qui facilite le travail en autonomie des étudiants. Enfin, trois questions de recherche qui ont guidé la conception du dispositif seront initiées.

Dans le second chapitre, nous prendrons appui sur des cadres théoriques de la didactique des mathématiques. Premièrement, nous aborderons la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard [11], et en particulier le concept de praxéologie, en lien avec les difficultés qu'ont les étudiants à rendre cohérentes les notions théoriques lors des séances d'exercices qui les mettent en oeuvre. Ensuite, nous aborderons les changements de cadre, introduits par Douady [21], qui facilitent, entre autres, l'identification du caractère unificateur de l'algèbre linéaire. Nous terminerons en abordant les choix et variables didactiques (au sens de Brousseau [7]). Enfin, les questions de recherche seront précisées et commentées.

Ensuite, la conception du dispositif sera décrite dans le troisième chapitre. Nous présenterons en détails la construction des podcasts et la réflexion à propos de la double gradation, dans les cadres (au sens de Douady [21]) et dans les difficultés prises en charge, à laquelle nous avons veillé. Les liens donnant accès aux podcasts seront fournis dans ce chapitre. Les cadres choisis pour chaque podcast et les difficultés associées seront également détaillés et nous présenterons la structure générale que nous avons tenté de conserver dans tous les podcasts. Ensuite, nous expliciterons les choix de variables didactiques et la réflexion sur leurs modifications. Certains détails à caractère pédagogique seront également évoqués et la prise en charge de l'obstacle du formalisme par nos créations sera décrite.

La mise en oeuvre de notre dispositif constituera le quatrième chapitre de ce mémoire. Dans un premier temps, nous détaillerons l'organisation mise en place pour tester notre projet auprès d'étudiants débutants en algèbre linéaire, à savoir les étudiants de première année universitaire en Informatique, Sciences Mathématiques et Sciences Physiques de l'Université de Namur. Nous décrirons les syllabi d'algèbre linéaire et la mise en oeuvre pour chaque sous-groupe de ce public test. Dans un second temps, nous présenterons les enquêtes proposées afin d'évaluer l'impact du dispositif et d'obtenir des avis sur notre projet. Des contraintes institutionnelles et sanitaires fortes seront décrites et les réponses des étudiants aux enquêtes seront analysées en conséquence. Enfin, nous analyserons les retours à l'enquête réalisée auprès des assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre linéaire du public test qui ont permis d'évaluer ce dispositif de manière significative et d'aboutir à des conclusions et des perspectives.

En conclusion, dans le dernier chapitre, nous reprendrons les questions de recherche et résumerons les apports de notre dispositif. Nous présenterons les pistes qui amélioreraient la mise en oeuvre du dispositif et les podcasts en particulier. Enfin, des perspectives possibles seront avancées.

Chapitre 1

Objectifs et motivations

Le projet de ce mémoire consiste à créer une série de podcasts en algèbre linéaire afin d'illustrer son caractère unificateur, c'est-à-dire de souligner qu'une même notion de ce domaine peut s'appliquer à plusieurs espaces vectoriels. Nous avons opté pour la notion de combinaison linéaire, un des concepts fondateurs en algèbre linéaire. Cette notion est en général enseignée aux débutants en algèbre linéaire, le public cible de nos podcasts. Chaque podcast créé illustrera cette notion dans un espace vectoriel permettant l'identification du caractère unificateur de cette notion algébrique. Dans ce chapitre, nous commencerons par motiver le choix de l'algèbre linéaire, notamment par l'obstacle du formalisme défini par Robert et Rogalski [32], et nous mettrons l'accent sur les spécificités d'enseignement et d'apprentissage de ce domaine dans la transition entre enseignements secondaire et universitaire. À cette fin, nous définirons trois principes avancés par Harel [26] à ce sujet et nous considérerons notamment le caractère FUG(S) des notions d'algèbre linéaire [19][32], dont la notion de combinaison linéaire.

Ensuite, nous présenterons certaines difficultés potentielles dans le début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire qui sont identifiées dans la littérature. Nous nous préoccuperons des difficultés ressenties face à la résolution et l'interprétation des solutions d'un système d'équations linéaires et les difficultés d'appréhension des fonctions dans leur dimension objet au sens de Douady [21].

Une autre utilité possible de ces podcasts serait de permettre aux étudiants de faire des liens entre un cours théorique et un cours d'exercices. En effet, en algèbre linéaire, les notions théoriques s'accumulent relativement rapidement et il n'est pas aisé de les rendre cohérentes, tant en termes de nouvelle matière qu'en termes de nouveau langage et de nouvelle façon de réfléchir, avec les exercices proposés qui semblent, à première vue, sortis du contexte théorique. Les débutants dans ce domaine sont souvent déstabilisés par l'introduction d'exercices de plus en plus formels et théoriques, dans lesquels il est possible que nous ne disposions plus de marche à suivre "toute faite" ou de plan d'exercices types. Nous aimerions que les podcasts fassent prendre conscience aux étudiants du passage nécessaire par la théorie et le formalisme pour accomplir un exercice et aboutir à un résultat, de manière certaine. Ce travail de transfert entre le cours théorique et les séances d'exercices est, de surcroît, généralement laissé à la charge de l'étudiant.

Nous terminerons ce chapitre en motivant le choix du podcasting, outil qui permet un apprentissage en autonomie et qui faciliterait potentiellement la création de liens entre la théorie et les exercices. Tout d'abord, nous définirons ce qu'est le podcasting et nous reprendrons certains de ses avantages. Nous expliquerons dans quelles conditions il peut être bénéfique dans l'apprentissage et les différents moments auxquels les podcasts de notre projet peuvent être proposés seront énumérés. Enfin, nous énoncerons les questions de recherche qui ont guidé la conception de notre dispositif.

1.1 Pourquoi l'algèbre linéaire ?

L'algèbre linéaire est, en général, un domaine abstrait dont l'apprentissage est considéré comme difficile. En effet, l'algèbre linéaire est généralement enseignée en début d'enseignement universitaire. Pour ce public novice, en dehors du fait de devoir trouver sa méthode de travail et de s'adapter à un nouveau type d'enseignement, l'abstraction et le recul qu'un domaine comme l'algèbre linéaire nécessite ne fait que renforcer la difficulté qu'un élève "moyen" rencontre pour l'aborder et le comprendre. En outre, dans la plupart des formations de type scientifique, l'algèbre linéaire constitue une partie du cursus de tronc commun. En général, en secondaire, l'accent n'est pas mis sur le côté théorique des mathématiques, ce qui rend quelque peu accessoire la théorie dans la résolution rigoureuse d'un problème. L'assimilation de certains concepts de base de l'algèbre linéaire constitue en quelque sorte les racines de la réussite de nombreux cours ultérieurs mais également de la mentalité à avoir pour aborder ces cours. En effet, comme le remarquent Arsac et Behaj dans leur article [2], les connaissances en algèbre sont remobilisées dans la suite des apprentissages et cela survient souvent lorsque l'étudiant travaille seul et dans des cadres éloignés du contexte de l'algèbre linéaire, comme en géométrie différentielle, en analyse fonctionnelle ou en mécanique.

Dans l'ouvrage coordonné par Dorier [19], Robert et Rogalski [32] nous expliquent que le concept de linéarité a permis, grâce à l'introduction des théories axiomatiques (1880-1930), l'émergence de celui d'espace vectoriel. Selon Dorier [18], "*L'enjeu de l'axiomatisation est une question de réorganisation du savoir mathématique, mais aussi une modification dans la façon d'appréhender les problèmes... C'est donc la prise en compte de la globalité des problèmes linéaires qui permet d'imposer l'approche axiomatique, qui vient fédérer, unifier en un point de vue formel*". Il affirme également que les enseignants s'accordent souvent pour dire que la résolution de problèmes d'algèbre linéaire nécessite un certain degré de formalisme. En effet, une des principales causes d'échec dans ce domaine est ce qui est appelé "obstacle du formalisme" par de nombreux auteurs. C'est la difficulté engendrée lorsqu'on désire se représenter un concept d'algèbre linéaire. De plus, en arrivant à l'université, les nouveaux étudiants sont rarement capables de manipuler le langage mathématique formel, aussi bien au niveau des connaissances en logique qu'en théorie des ensembles. Lorsqu'un certain seuil est atteint dans la capacité à manipuler et mobiliser les connaissances en logique de façon coordonnée et cohérente, l'acquisition réelle des concepts de l'algèbre linéaire est possible. Par exemple, Alves-Dias [1] met l'accent sur le fait que "*ces difficultés attestent l'existence d'un obstacle de nature conceptuelle et ne peuvent être réduites à des difficultés d'exécution d'une procédure, même si une telle procédure existe. [...] l'enseignement usuel de l'algèbre linéaire oblige très vite les étudiants à fonctionner à des niveaux structurels élevés*".

Le choix du domaine de l'algèbre linéaire nous paraissait donc propice à une expérience fructueuse, notamment en termes de créations de liens entre la théorie et les exercices par les étudiants, en autonomie. Nous avons décidé de nous concentrer sur le secteur des espaces vectoriels et en particulier sur la notion de combinaison linéaire. Comme le remarquent Arsac et Behaj [2], le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire est fréquemment centré sur le secteur des espaces vectoriels. Dans la plupart des manuels d'algèbre linéaire, ce secteur est articulé en plusieurs thèmes : la dépendance linéaire, les sous-espaces vectoriels, les types de familles (génératrices, libres, liées) et les bases en dimension finie. Pour tous ces thèmes, la notion de combinaison linéaire est primordiale. De plus, elle est fondatrice en algèbre et l'une des premières notions abordées. Elle participe donc à cette familiarisation avec le formalisme du domaine algébrique.

1.2 Quelques spécificités des notions d'algèbre linéaire

Dans l'ouvrage coordonné par Dorier, Harel [26] nous présente trois principes de l'apprentissage et de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Ces principes, propres à chaque étudiant, ont une nature très personnelle et individuelle. En effet, lors de son travail de création de liens entre théorie et exercices, l'étudiant tente inconsciemment de vérifier ces trois principes. Pour appliquer ces principes dans son enseignement, l'enseignant devrait s'adapter différemment à chaque élève. C'est pour ainsi dire impossible pour un enseignant. Selon Harel [26], dès l'ouverture à ce domaine, être intransigeant sur la rigueur des justifications théoriques des résultats mathématiques et convaincre réellement les étudiants des résultats théoriques enseignés sont deux éléments nécessaires pour que ces principes soient appliqués. Chaque individu (et donc chaque apprenant) appréhende chaque notion à sa manière et, par conséquent, remplit ces trois principes à des rythmes et dans des ordres différents. En cela, Harel considère que les principes de concrétisation et de nécessité définis ci-dessous sont quelque peu subjectifs.

- Le principe de concrétisation : "*Pour qu'un étudiant soit capable d'abstraire une structure mathématique d'un modèle donné de cette structure, les éléments de ce modèle doivent être des entités conceptuelles aux yeux de l'étudiant ; c'est-à-dire que l'étudiant doit posséder des procédures cognitives qui peuvent prendre ces objets comme des données*"[26]. Nous expliquerons plus loin dans ce mémoire qu'une des difficultés repérées en algèbre linéaire est de percevoir une fonction comme un élément d'un espace vectoriel et non plus seulement comme une relation entre deux variables.

- Le principe de nécessité : "*Pour qu'un étudiant apprenne, il doit sentir une nécessité pour ce qu'on veut lui enseigner. Par nécessité, nous entendons une nécessité intellectuelle, par opposition à une nécessité sociale ou économique*"[26]. L'objectif est qu'une notion théorique obtienne un sens pour l'étudiant et qu'il comprenne son utilité.

- Le principe de généralisabilité : "*Quand on a affaire à un modèle concret, c'est-à-dire un modèle qui satisfait le principe de concrétisation, les activités didactiques à l'intérieur de ce modèle doivent permettre et encourager la généralisabilité de ces concepts*"[26].

Dans ces trois principes de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, le principe de généralisabilité est celui qui est le moins subjectif (personnel, individuel, ...) et qui intervient dès le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Ce principe est en rapport avec ce que nous appellerons le caractère FUG(S) des notions, c'est-à-dire formalisateur, unificateur, généralisateur (et simplificateur). Ce type de notion n'apparait qu'à partir de l'enseignement universitaire. L'algèbre linéaire est un domaine dont beaucoup de notions, notamment celle de combinaison linéaire, ont le caractère FUG(S). Rogalski et Robert [19] définissent ce qu'est un savoir FUG(S).

- Le caractère **généralisateur** d'un savoir apparait quand cette nouvelle notion donne aux anciennes une portée plus large que le bagage déjà à disposition de l'apprenant.

- Le caractère **formalisateur** d'un savoir apparait quand un nouveau formalisme non limité à l'emploi de la symbolique mathématique survient et que l'apprenant prend totalement conscience de son utilité et de son sens.

- Le caractère **unificateur** d'un savoir apparait quand il joint et rend intelligible comme une unique notion, plusieurs notions jusque-là enseignées de manière isolée.

Un savoir FUG, s'il est perçu par l'apprenant, le mène à l'acceptation de la démarche mathématique algébrique et axiomatique. L'apprenant doit en déduire la richesse des symboles mathématiques en tant qu'objets mathématique riches et l'utilité d'un détour formel ayant pour but ultérieur le caractère **simplificateur**. Selon Robert et Rogalski [19], l'enseignement d'une notion nouvelle dépend du type de notion mais aussi des relations qui existent entre ce qui est acquis ou assimilé (bagage mathématique, d'abstraction, de recul, ... de l'apprenant au moment où l'enseignant veut lui inculquer les nouvelles notions), ce qui a déjà été enseigné et ce que l'enseignant doit ou veut ensuite enseigner. L'introduction d'une notion FUG n'est pas chose aisée étant donné la distance qu'il peut y avoir entre les anciens et les nouveaux savoirs. Les apprenants n'ont parfois pas, dans leur bagage mathématique, d'exemples sur lesquels se baser ou auxquels lier les nouvelles notions. Il n'est donc pas évident de trouver un problème initial sur lequel débuter et baser l'apprentissage d'une notion FUG de manière à ce qu'elle soit la réponse optimale à ce problème et que les apprenants aient un minimum de contrôle sur celle-ci. C'est d'ailleurs pour cela qu'au début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, les notions théoriques s'accumulent, et ralentissent la prise de cohérence globale réalisée par les étudiants. Robert et Rogalski [19] insistent à nouveau sur le fait qu'à aucun moment, l'étudiant n'a concrètement conscience que les notions possèdent le caractère FUG. C'est plutôt l'enseignant qui doit faire prendre conscience à l'apprenant de la réelle nécessité d'une justification formelle d'un résultat (discours sur la technique de la TAD de Chevallard que nous définirons dans le chapitre suivant en section 2.1). L'enseignant est alors amené à se questionner préalablement sur la genèse de la notion FUG qui l'intéresse, c'est-à-dire la nécessité de cette notion, les contextes dans lesquels elle survient et évolue ou a évolué. Des leviers sont à sa disposition comme les changements de cadres (au sens de Douady [21]) et de registres (au sens de Duval [23]) déclenchant le caractère unificateur, des commentaires métamathématiques, etc. L'apprenant ne peut pas trouver ou valider seul une notion FUG(S). Nos podcasts tenteront d'accompagner les étudiants dans la création de liens entre théorie et exercices concernant la notion de combinaison linéaire et de les aider à en percevoir le caractère unificateur.

Pour exposer les difficultés classiques déjà repérées en algèbre linéaire, nous aborderons brièvement la dialectique outil/objet introduite par Douady [21]. Elle définit le terme objet en didactique des mathématiques, indépendamment de son utilité, comme "*l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement*". Selon elle, percevoir la dimension objet d'un concept mathématique peut permettre d'accumuler et d'étendre les connaissances, et aussi de réinvestir cet objet dans d'autres domaines et contextes. Elle définit la dimension outil d'un concept mathématique par ses usages pour résoudre des problèmes. Par exemple, et nous l'expliquerons plus loin dans ce mémoire, le système d'équations linéaires ou la fonction sont perçus comme des outils en secondaire et ces concepts mathématiques prennent peu à peu le statut d'objets à l'université, dans des cours comme l'algèbre linéaire. Nous nous concentrerons sur la dimension objet de la combinaison linéaire dans ce mémoire afin de mettre en lumière le caractère unificateur de l'algèbre linéaire.

1.3 Difficultés en algèbre linéaire repérées dans la littérature

En dehors des obstacles que nous avons relevés, d'autres spécificités freinent l'apprentissage de l'algèbre linéaire. En lien avec le principe de concrétisation d'Harel [26], Arsac et Behaj [2] nous expliquent qu'en arrivant à l'université, les étudiants "*connaissent les fonctions, les polynômes, les suites, les n-uplets, les vecteurs géométriques, etc. mais ils n'ont pas l'habitude de penser ces* [concepts] *comme des éléments d'une structure linéaire*". En effet, la représentation que les étudiants se font du vecteur algébrique en début d'apprentissage de l'algèbre linéaire colle en fait généralement à ce qu'est un vecteur géométrique. La possibilité de noter un vecteur sous forme de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en ligne ou en colonne, ou de coordonnées $(x\ ;\ y)$, perturbe un peu plus les apprenants durant le processus d'abstraction et tout l'apprentissage. Leurs difficultés sont d'ailleurs flagrantes lorsqu'ils doivent percevoir une fonction, un polynôme ou une matrice comme élément d'un espace vectoriel. Nous allons approfondir quelques difficultés fréquemment repérées en algèbre linéaire : la maitrise de l'objet que constitue le système d'équations linéaires, de sa résolution et de son interprétation, la capacité à calculer dans l'ensemble des nombres complexes, les manipuler et pour finir, la capacité à appréhender les fonctions dans leur dimension objet. La façon d'utiliser les objets et les identifier comme des objets faisant partie d'une structure est nouvelle pour les étudiants. Leurs représentations sont même parfois des obstacles aux nouvelles tâches qu'on leur propose.

1.3.1 Les systèmes d'équations linéaires, y compris avec des nombres complexes

La notion de combinaison linéaire engage différentes procédures et différents concepts spécifiques. Par exemple, prouver qu'un élément est combinaison linéaire d'autres éléments nécessite régulièrement la résolution d'un système d'équations linéaires. Comme l'explique Coulange [14], la notion de système d'équations linéaires fait partie des programmes d'algèbre élémentaire de l'enseignement secondaire et succède aux équations à une inconnue. Étant donné qu'à ce stade-là, les élèves n'ont pas la maitrise du formalisme ni le bagage d'abstraction nécessaires, les enseignants ne peuvent pas communiquer la réelle genèse des méthodes de résolution d'un système d'équations ni la théorie (et le formalisme) démontrant leur validité. Cependant, les enseignants du supérieur considèrent souvent que ces concepts sont acquis dans leur ensemble. Que les étudiants ne maitrisent pas les systèmes d'équations n'est donc pas surprenant puisque leurs représentations ne coïncident pas toujours avec celles que les enseignants universitaires s'imaginent, une partie de l'institutionnalisation n'ayant pas été effectuée.

Dans leurs recherches au sein de plusieurs universités de Paris, Dorier et al. [19] constatent d'ailleurs que seulement un étudiant de deuxième année sur quatre parvient à répondre correctement à la question : "Trouvez les solutions, lorsqu'elles existent, du système réel suivant...", dont la solution est qu'il y a une infinité de solutions si une condition est remplie, et aucune solution sinon. Cette question demande la bonne maitrise d'au moins un algorithme de résolution **et** la réelle compréhension du sens de cet algorithme afin de poser correctement la condition et les possibilités de solutions. La plupart des étudiants ne livrent pas une résolution complète et sont bloqués à un moment de celle-ci.

En outre, l'interprétation des solutions d'un système d'équations linéaires n'est pas triviale pour les étudiants. En effet, au bout de la résolution (par une méthode devenue automatique) de ce qui était la modélisation du problème de départ, se remémorer quels éléments de la modélisation doivent être associés aux éléments du problème de départ et en tirer une conclusion répondant à la question posée n'est pas évident pour les étudiants. Dans nos podcasts, les difficultés relevées dans la littérature lors de la résolution et l'interprétation des systèmes d'équations linéaires seront prises en compte, de la manière la plus explicite et claire possible.

Nous avons également décidé de prendre en charge une difficulté supplémentaire qui concerne la résolution et l'interprétation de systèmes d'équations linéaires qui contiennent des nombres complexes. Il n'est pas évident pour les étudiants de travailler avec les nombres complexes en dehors du chapitre qui les introduit, enseigné en secondaire. Comme le développent Rosseel et Schneider [34], l'acceptation de nombres "imaginaires" et de l'existence d'un carré négatif bouleverse les connaissances de l'apprenant et le confronte à l'abstraction mathématique, au formalisme et à l'absence de représentation concrète ou géométrique, comme la droite graduée représentant les réels. De plus, lors de cette transition entre le secondaire et l'université, Ghedasmi et Tanazefti

[24] remarquent les difficultés des étudiants à considérer les nombres complexes comme éléments d'une structure algébrique relative à l'ensemble $\mathbb{C}$. Elles expliquent qu'en secondaire, "*seul un travail embryonnaire dans la structure de corps pourrait être envisageable*"[24]. Dans nos podcasts, nous avons également décidé de prendre en charge les difficultés des étudiants débutants à travailler avec les nombres complexes. Nous mettrons notamment l'accent sur l'obtention de la forme algébrique d'un nombre complexe, l'utilisation du conjugué d'un nombre complexe et la manipulation d'une égalité entre deux nombres complexes.

1.3.2 Les fonctions dans leur dimension "objet"

Comme l'explique Vandebrouck [36], la manipulation des fonctions comme objet (au sens de Douady [21]) n'est pas facile pour les apprenants. L'apprentissage des fonctions n'est pas terminé à l'entrée à l'université. En secondaire, les élèves sont confrontés, la plupart du temps, aux fonctions définies par une formule algébrique présentant une relation entre plusieurs variables et parfois le graphique y étant associé. Les tâches sur les fonctions sont explicites et les méthodes de résolution de ces tâches sont relativement systématiques. En secondaire, les fonctions sont donc vues comme des outils mettant des variables en relation ou modélisant un problème. À l'université, les étudiants sont confrontés aux fonctions comme objets, c'est-à-dire, comme éléments d'un espace vectoriel engagés dans des propriétés généralisées et communiquées grâce au formalisme mathématique. Dans l'ouvrage coordonné par Dorier, Harel [26] remarque également que les étudiants ne savent pas clairement ce qu'ils font lorsqu'ils cherchent, par exemple, à savoir si un système est libre. Il émet l'hypothèse que cela vient du fait qu'ils ont des difficultés à appliquer le concept d'indépendance linéaire à des fonctions. Le principe de concrétisation ne serait donc pas vérifié pour le concept de fonction en tant que vecteur, comme objet mathématique faisant partie d'un espace vectoriel. Il remarque également que les étudiants débutant à l'université ont des difficultés à traiter une équation comme une identité entre deux fonctions puisqu'ils se la représentent seulement comme une équation en x. C'est une de ses analyses qui l'ont mené à son principe de concrétisation. Vandebrouck [36] explique qu'à l'université, "*les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indication) et mises en fonctionnement de façon plus complexe, avec une augmentation des exigences en termes de raisonnements, preuves, formalisations et langage*". À l'université, les exercices deviennent également de plus en plus généraux et moins similaires. Par conséquent, comme nous l'avons expliqué, les routines et marches à suivre toutes faites se font de plus en plus rares. Repérer des procédures et avoir une vision plus globale des concepts est donc plus compliqué qu'en secondaire.

L'ensemble des registres de représentations d'une fonction (au sens de Duval [23]), les tâches variées les concernant et leur utilisation dans différents espaces vectoriels, comme outil **et** comme objet, en font des concepts mathématiques complexes. Dans nos podcasts, comme pour la notion de combinaison linéaire, nous ne considérerons les fonctions que dans leur dimension objet, comme éléments d'un espace vectoriel. Une attention particulière sera apportée à la gradation dans la difficulté.

1.4 Pourquoi le podcast ?

Comme l'explique Viau [37], le plaisir et la motivation sont deux composantes émotionnelles sur lesquelles est construite la relation pédagogique. En effet, aussi bien pour l'étudiant que pour l'enseignant, aimer ou continuer à aimer ce qu'on étudie ou ce qu'on enseigne est la base de toute bonne situation d'apprentissage. La passion, l'intérêt et la motivation pour une discipline sont des composantes qui semblent, pour beaucoup, incompatibles avec les mathématiques. C'est quand celles-ci prennent un sens que le plaisir, l'envie et la motivation naissent. Viau avance trois conditions nécessaires à la motivation qu'un élève peut avoir. Selon lui, un étudiant est motivé si ce que l'enseignant lui propose lui semble utile et/ou intéressant, s'il se sent capable de réaliser ce que l'enseignant lui demande et s'il se rend compte que c'est lui qui a le contrôle sur ses apprentissages, ses échecs et sa(ses) réussite(s). Il risquera d'être démotivé dans le cas où une des trois conditions n'est pas remplie.

Pour entretenir la motivation, les supports de cours se sont diversifiés au fil du temps grâce, notamment, au développement des technologies, et ont par conséquent modernisé et enrichi la pédagogie. Etymologiquement, Roland [33] explique que "*le terme* podcasting *est issu de la combinaison des termes* iPod *(le baladeur numérique d'Apple) et* broadcasting *("diffusion" en anglais). Il s'agit d'un système de diffusion et d'agrégation de contenus audio/vidéo destinés, dans un premier temps, aux baladeurs numériques tels que l'iPod. Un podcast est un fichier audio et/ou vidéo publié sur Internet et automatiquement téléchargeable sur un ordinateur ou un support mobile par l'intermédiaire d'un flux RSS pour une écoute ou un visionnement ultérieur*".

Au niveau didactique, Roland [33] avance également que le podcasting semble être une bonne option, dans le cas où il agit comme un complément à l'enseignement. Dans notre cas, un des objectifs des podcasts sera de créer un "pont", une prise de sens, entre la théorie et les exercices. Le choix du podcast, que nous allons argumenter, nous semble adéquat et pertinent.

Roland [33] remarque que les podcasts sont de plus en plus répandus et utilisés. Il constate que ceux-ci varient selon de nombreuses caractéristiques comme leur but, leur durée, leur format, le type de contenu (brut ou structuré), leur style (formel ou informel) ou même leurs buts pédagogiques. Cependant, il décèle deux grands types de podcasts. D'une part, les cours enregistrés ou les podcasts d'explication en détail d'un concept agissent plutôt comme des outils d'aide à la prise de notes ou de révision avant l'examen. D'autre part, les capsules ou séquences audiovisuelles courtes et ciblées par l'enseignant peuvent permettre aux apprenants d'approfondir, illustrer ou contextualiser un cours ou une partie d'un cours. C'est sur ce deuxième type de podcasts que nous nous dirigerons en tentant de permettre à la théorie de prendre sens dans les exercices. Ces podcasts pourraient également, en plus d'accroitre la motivation, réduire le stress et l'anxiété des étudiants. D'ailleurs, à l'université, les heures de cours sont en général partagées de manière égale entre la théorie et les exercices pour les cours de mathématiques. Nous opterons pour des podcasts vidéos pour la facilité de téléchargement et la portabilité.

Roland explique également que de nombreux enseignants ne trouvent pas le podcasting si bien pensé que cela et ne constatent qu'un faible impact sur la réussite des élèves. Rappelons que réussite ne signifie pas toujours apprentissage ou compréhension ! Roland [33] tente de répondre aux enseignants considérant les podcasts comme inutiles ou comme une perte de temps. Un travail poussé en amont est fondamental pour construire des podcasts. En effet, la préparation et la réflexion pédagogique et didactique du contenu, la transformation des idées en un double support cohérent (écrit à l'écran et oral dans les commentaires audio), l'enregistrement, le montage, etc. sont inévitables pour une plus-value dans l'apprentissage. Si ce travail préalable est complet, les podcasts seront réfléchis, clairs, concis, attrayants visuellement, complets, efficaces et pertinents. L'enseignant pourra alors constater que ceux-ci lui font gagner du temps, à condition qu'ils permettent aux apprenants de finaliser eux-mêmes la compréhension. En effet, si les podcasts jouent bien leur rôle, l'enseignant pourra se passer de trop répéter/rappeler les notions et réorienter les apprenants vers ces podcasts.

Roland [33] rappelle que la motivation et l'envie de comprendre et réussir de l'élève sont des conditions nécessaires à un bon apprentissage des notions. L'enthousiasme des apprenants face à une partie de l'apprentissage qui devient autonome ne peut que renforcer la conviction de l'enseignant que c'est un gain de temps et de motivation générale non négligeables. Dans ses recherches auprès d'étudiants auxquels il a soumis des capsules vidéos pour certains apprentissages, Roland [33] constate que "*les commentaires généraux des étudiants lors des séances de guidance furent particulièrement enthousiastes et positifs*". Comme expliqué précédemment, nous aimerions construire nos podcasts de manière à illustrer la notion de combinaison linéaire pour que les apprenants prennent conscience du caractère unificateur de l'algèbre linéaire et créent plus facilement des liens entre le cours de théorie et les séances d'exercices. Nous aimerions, de cette façon, permettre aux apprenants de se sentir acteurs de leurs apprentissages et de leur réussite ! En outre, chaque élève construit ses connaissances d'une manière qui lui est propre. Les podcasts auront donc un rôle légèrement différent pour chaque élève. Le travail précis de réflexion et de conception à réaliser en amont est d'autant plus important que chaque podcast doit convenir à un maximum de profils d'apprenants. Finalement, la mise à disposition de podcasts peut être utile à plusieurs moments de l'apprentissage. Les numéros visibles sur la figure 1.1 correspondent à ces moments que nous énumérons ici :

1) L'enseignant du cours théorique peut les proposer aux étudiants en amont du cours d'exercices. L'étudiant a alors à sa disposition un support visant à préparer la séance d'exercices qui lui semblera, si le podcast atteint son objectif, plus facilement compréhensible.

2) L'enseignant de la séance d'exercices peut, après que celle-ci ait été donnée, reproposer le podcast à l'étudiant. En effet, en cas d'incompréhension durant le premier visionnage, un deuxième peut faire évoluer la compréhension, faciliter l'apprentissage et faire prendre plus de sens à la notion enseignée. De cette façon, l'étudiant peut avoir toutes les cartes en main pour créer une vraie cohérence dans les notions algébriques qu'on lui enseigne.

3) Les podcasts peuvent rester à disposition des étudiants. En effet, certains concepts ne prennent du sens, pour certains étudiants, qu'à la fin de tout l'enseignement du cours d'algèbre de première année et même parfois dans les années ultérieures, lors de l'enseignement d'autres cours. De plus, les podcasts sont constamment disponibles et les apprenants sont libres de les consulter à leur guise. Roland [33] en déduit que l'utilisation de ceux-ci se fera donc obligatoirement à un moment où les étudiants seront vraiment motivés et qu'ils auront réellement envie de comprendre les notions. Les apprenants seront d'autant plus satisfaits de leur apprentissage s'ils ont été responsables de celui-ci, s'étant engagés eux-mêmes dans sa finalisation. En réalité, à tout moment de leur apprentissage ou de leurs études, les apprenants pourraient vouloir revoir le podcast pour se remémorer certains concepts ou subtilités.

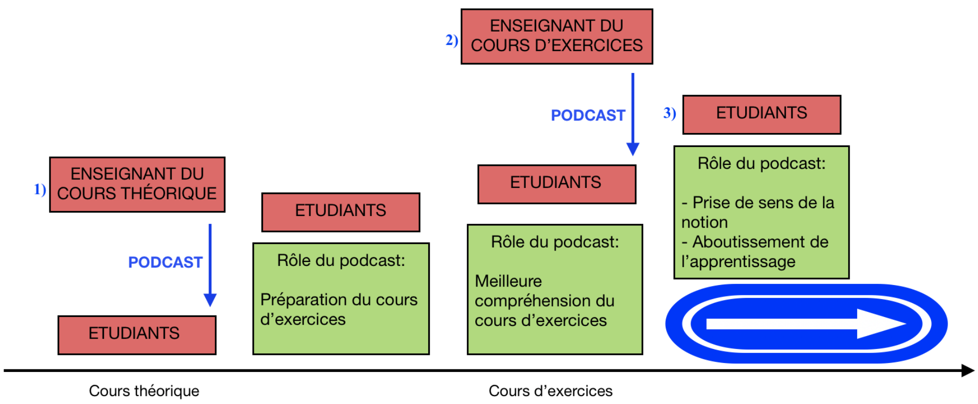


FIGURE 1.1 – Moments d'utilisation d'un podcast

1.5 Résumé et questions de recherche

Comme nous l'avons expliqué, notre projet de création de podcasts a plusieurs objectifs. Nous aimerions construire une série de podcasts qui mettent en lumière le caractère unificateur du domaine de l'algèbre linéaire. L'obstacle du formalisme, la capacité d'abstraction, les spécificités d'enseignement et d'apprentissage de ce domaine comme le principe de généralisabilité défini par Harel [26] ou le caractère FUG(S) des notions d'algèbre linéaire motivent le choix de ce domaine. De plus, nous avons décidé de nous concentrer sur la notion de combinaison linéaire. Cette notion, enseignée aux débutants en algèbre linéaire, est suffisamment élémentaire pour mettre facilement en lumière le caractère unificateur de l'algèbre linéaire à des débutants, en l'appliquant à un espace vectoriel différent par podcast. Ces changements d'espaces vectoriels constitueront, au sens de Douady [21], des changements de cadres que nous expliciterons à la du prochain chapitre, à la section 2.2, et qui facilitent généralement l'identification du caractère unificateur de l'algèbre linéaire. De plus, nous prendrons en compte les difficultés classiques repérées en algèbre linéaire, et notamment à la transition entre enseignement secondaire et université. En effet, l'appréhension des systèmes d'équations linéaires, y compris ceux qui contiennent des nombres complexes, l'interprétation de leur(s) solution(s), et la manipulation des fonctions en tant qu'objets, comme éléments d'un espace vectoriel, sont des freins à l'apprentissage de l'algèbre linéaire régulièrement repérés. Les trois conditions à la motivation définies par Viau [37], le sentiment de contrôlabilité des étudiants, les avantages des podcasts de courtes durées, la portabilité et la disponibilité à long terme de ce type de supports ont provoqué notre choix du podcasting. Il faciliterait également la création de liens entre théorie et exercices étant donné que ce travail doit généralement être effectué en autonomie par l'étudiant. De plus, tenter continuellement de justifier les techniques utilisées dans les exercices par un "discours" théorique permet de faire des liens et également, de souligner le caractère unificateur de l'algèbre linéaire. Cette réflexion nous mène aux trois questions de recherche suivantes :

1. **Comment montrer aux débutants le caractère FUG de l'algèbre linéaire ?**
2. **Comment prendre en compte les difficultés repérées chez les étudiants débutants en algèbre linéaire ?**
3. **Comment permettre aux débutants d'effectuer des liens entre la théorie et les exercices en algèbre linéaire ?**

Sur base des cadres théoriques que nous allons définir dans le chapitre suivant, nous préciserons la troisième question de recherche et tenterons de répondre à ces questions qui nous serviront de fil conducteur lors de la conception de nos podcasts.

Chapitre 2

Cadres théoriques

Comme Roland [33] le suggère, un *bon* podcast doit être pensé, réfléchi et construit avec précision. Nous nous sommes tournés vers la didactique des mathématiques pour nous aider à concevoir notre dispositif. Selon Bécu [4], la didactique des mathématiques est, lors d'une situation d'apprentissage, l'étude des processus de transmission (d'enseignant à apprenant) et d'acquisition des connaissances mathématiques (par l'apprenant). Elle ajoute que la didactique des mathématiques est une théorisation de ces processus qui vise à améliorer les conditions d'apprentissage de cette branche. La didactique des mathématiques est devenue, au fil du temps, un domaine de recherche à part entière, "*une science autonome, s'inspirant de la psychologie, de l'épistémologie, des sciences du langage, des sciences cognitives...*"[4]. Douady [3], elle, définit la didactique des mathématiques comme "*l'étude du processus de transmission et d'acquisition des différents contenus mathématiques, et qui propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et les apprentissages. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée*".

Nous allons expliciter certains cadres théoriques que nous avons suivis dans nos créations de podcasts, pour que ceux-ci révèlent le caractère unificateur de l'algèbre linéaire, prennent en compte les spécificités d'enseignement et d'apprentissage à l'entrée dans ce domaine, considèrent également les difficultés repérées dans la littérature et facilitent la création de liens entre la théorie et les exercices. Premièrement, nous définirons le concept de praxéologie et la transposition didactique de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard. Nous expliquerons également les changements de cadres de Douady et nous poursuivrons ce chapitre en définissant les choix et les variables didactiques au sens de Brousseau. Nous terminerons en précisant et complétant les questions de recherche énoncées précédemment.

2.1 Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

Chevallard [12] introduit la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Le monde que nous voulons étudier est socialement construit. Par conséquent, la TAD permet à tout chercheur d'**étudier** comment **étudier** tous les objets, puisque chaque objet est **étudiable**. Chaque science, y compris les mathématiques, peut ainsi trouver sa place parmi les activités humaines en refusant de respecter les frontières du monde social que dressent les institutions. La construction, la structure, le développement et le fonctionnement de chaque objet sont des questions à part entière, des objets d'étude eux-mêmes. Le rapport qu'un chercheur crée avec un objet est inédit et différent de tout autre rapport déjà créé et étudié. La TAD de Chevallard se concentre sur les contraintes et les conditions d'incorporation des objets, ici savoirs, au sein des institutions et du monde social. Selon lui, un savoir, et plus particulièrement un savoir mathématique, émerge, s'utilise, s'enseigne, s'apprend, et plus généralement, se transpose d'une institution à une autre.

Cependant, les mathématiques restent encore déstabilisantes lorsqu'il s'agit de considérer des abstractions comme des réalités. Bosch et Chevallard [5] affirment que "*ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation*". C'est alors que Chevallard introduit le concept d'organisation praxéologique (ou praxéologie) que nous allons définir.

2.1.1 Praxéologie

Comme la définit Chevallard [11], l'organisation praxéologique, ou praxéologie, permet de modéliser les pratiques sociales et en particulier, l'activité mathématique. Elle est définie comme

$$[T/\tau/\theta/\Theta],$$

et est composée de deux blocs en relation l'un avec l'autre : le bloc du savoir-faire $[T/\tau]$ et le bloc du savoir $[\theta/\Theta]$. L'agglomération des termes "praxis", signifiant pratique, et "logos", signifiant raison, discours raisonné/rationnel, a fait naitre le terme praxéologie. Nous allons définir les quatre membres d'une praxéologie.

- **Type de tâches T :** La souche de toute praxéologie est une tâche t ou un type de tâche T. Nous noterons également $t \in T$, toute tâche relevant du type T. Par exemple, *[calculer la valeur d'une fonction en un point]* est un type de tâche. Et *[calculer la valeur d'une fonction à l'origine]* serait une tâche de ce type de tâches. Dans le contexte praxéologique, la notion de tâche prend un sens plus large qu'en français courant. Les trois autres composants de la praxéologie permettront la compréhension de la résolution de cette tâche et donc ils dépendront de cette tâche. Toute tâche est vue comme un **construit** ou un **à (re)construire** institutionnel. C'est là qu'est l'objet même de la didactique, dans la (re)construction d'un cheminement jusqu'à une tâche pour qu'elle colle, dans son accomplissement, à l'institution dans laquelle on se trouve.

- **Technique τ :** En considérant un type de tâches donné T, la deuxième composante d'une praxéologie est la technique τ qui précise la façon d'accomplir les tâches t du type de tâches T. Du grec "tekhnê", technique signifie savoir-faire et constitue d'ailleurs, comme expliqué précédemment, couplé avec le type de tâches T auquel elle est relative, le bloc pratico-technique ou bloc du savoir-faire, $[T/\tau]$. Il est également important de préciser, même si ceci semble trivial, qu'une technique ne fonctionne que sur une partie des tâches du type de tâches T. Cette partie est notée $\mathcal{P}(\tau)$ et est appelée la portée de la technique τ. Par conséquent, la technique en question ne fonctionne pas pour résoudre/accomplir les tâches t appartenant à $T \setminus \mathcal{P}(\tau)$. En outre, une technique peut être supérieure à une autre sur T tout entier ou sur une partie de T. En effet, si une technique fonctionne sur un grand nombre de tâches du type de tâches T, elle surpasse une technique ne fonctionnant que pour quelques-unes de celles-ci. Enfin, dans une institution donnée I et pour un type de tâches T, une seule technique pourrait être considérée comme reconnue par l'institution I dans laquelle on se trouve. Cette caractéristique institutionnelle laisse les autres techniques alternatives pour compte même si ces techniques existent et fonctionnent mais dans d'autres institutions. Ces techniques alternatives pourraient même être plus efficaces que celle de l'institution I mais n'y sont pas (re)connues. Les sujets de I les ignorent donc ou les regardent comme contestables.

  Illustrons cela avec un exemple. Prenons le type de tâches T *[résoudre une équation du second degré]*. Nous aurons alors à notre disposition plusieurs techniques disponibles dans différentes institutions. Si nous nous plaçons dans l'institution I_1 *[classe de 3ème secondaire]*, la technique τ_1 de I_1 pour le type de tâches T sera *[les produits remarquables]*.

En revanche, si nous nous plaçons dans l'institution I_2 *[classe de 4ème secondaire]*, deux techniques sont disponibles pour ce type de tâches : τ_1 et τ_2 de I_2, *[la méthode du discriminant]*. Si nous nous concentrons sur la technique τ_1 et que nous recherchons sa portée $\mathcal{P}(\tau_1)$, nous nous rendons compte, par exemple, que ce n'est pas possible d'accomplir le type de tâches T par cette technique si l'équation ne comporte pas un carré parfait. La portée $\mathcal{P}(\tau_1)$ de τ_1 est moins élevée que celle de τ_2. De plus, la technique τ_2 étant nouvelle, elle sera plus travaillée que la technique τ_1.

- **Technologie θ :** La technologie est le discours rationnel (grec : logos) qui justifie la technique τ. Plaçons-nous dans une institution I choisie. La technologie a trois rôles à jouer envers la technique.

  1. Justification de la technique : Soit le type de tâches T, souvent, sa technique correspondante τ dans l'institution I contient ou est accompagnée d'une ébauche de la technologie θ ou d'éléments de la technologie. Ce discours sur la technique a donc une double fonction. Il permet d'une part d'accomplir une tâche du type de tâches T, de trouver le résultat (fonction technique) et d'autre part, il permet de justifier que c'est bien le résultat (fonction technologique). De plus, le fait qu'une technique τ justifiée par la technologie θ soit la seule (re)connue et employée dans I donne à τ la caractéristique d'auto-technologique. C'est la seule manière de faire et elle ne nécessite pas forcément de justification puisque c'est, dans I, la bonne façon de faire.
  2. Explication de la technique : La technologie θ a également pour but de rendre la technique intelligible. Le premier rôle étant de justifier la technique, ici, θ présente pourquoi cette justification est la bonne.
  3. Production de techniques : Il existe des technologies en attente d'utilisation, qui ne correspondent encore qu'à très peu de techniques. Cela met en évidence la sous-exploitation des discours technologiques disponibles.

- **La théorie Θ :** La théorie est ce qui justifie le discours technologique qui est réalisé sur le bloc pratico-technique. En fait, la théorie pousse la justification un cran plus loin en reprenant et précisant la justification réalisée par θ sur la technique. Cette dernière composante du bloc technologico-théorique la rend suffisante à analyser l'activité qu'on considère. À l'origine, du grec "theôros" qui signifie "spectateur qui observe sans participer", Platon réadapte son sens par "theôria" qui signifie "spéculation abstraite". La théorie Θ est en fait une réflexion abstraite justifiant l'utilisation du discours θ.

Nous avons désormais, autour de tout type de tâches T, un triplet (τ, θ, Θ) lui étant associé. Ce triplet permet de définir la tâche comme activité à part entière de l'institution dans laquelle l'acteur de cette tâche se trouve, comme activité humaine du monde social. Cependant, dans la description qui en est faite, la praxéologie ponctuelle (comme nous l'avons définie) ne laisse pas autant de place au savoir-faire qu'au savoir. De nombreuses technologies restent sans techniques et inutilisées. Cela empêche le savoir-faire d'avoir autant de place que le savoir dans une institution. Cependant, cela n'est pas un hasard. Nous avons défini le concept de praxéologie comme quelque chose de ponctuel mais en réalité, c'est rare qu'une praxéologie ne se concentre que sur un point en particulier. En effet, une théorie Θ peut souvent répondre à plusieurs technologies θ_j. Il en est de même pour chaque technologie θ_j qui peut rendre intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} et types de tâches correspondants T_{ij}. Nous pouvons alors dégager trois niveaux d'organisations praxéologiques : les organisations **locales** $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ se concentrant donc sur la technologie θ fixée, les organisations **régionales** $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ formées autour de la théorie Θ fixée, et les organisations **globales** $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ résultantes, pour une institution donnée I d'un regroupement de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

Lors du passage de praxéologie ponctuelle à locale, l'accent est mis sur la technologie ; lors du passage d'organisation locale à régionale, l'accent est mis sur la théorie. Par conséquent, dans ce processus, le bloc du savoir $[\theta/\Theta]$ est mis en évidence. Comme nous l'avons dit, ce déséquilibre n'est pas fortuit. Même si le savoir-faire $[T/\tau]$ précède le savoir dans notre définition de la praxéologie, c'est ce dernier qui justifie et produit le savoir-faire, celui-ci étant en réalité une application de savoir. Cependant, le choix et la compréhension du type de tâches T à partir duquel la praxéologie est édifiée, sont primordiaux. En effet, si ce type de tâches est mal identifié, la technique associée paraitra inaccessible et le bloc technologico-théorique semblera tout aussi énigmatique. À ce niveau, l'enseignant doit rester vigilant pour minimiser les incompréhensions et ne pas bloquer le processus d'apprentissage (savoir-apprenant). Dans l'enseignement secondaire, les notions algébriques sont généralement enseignées comme des praxéologies locales et incomplètes. Lorsque la recherche des racines d'une fonction est enseignée, les élèves sont amenés à faire de nombreux exercices leur demandant de trouver les racines de nombreuses fonctions dont l'expression est donnée et non contextualisée. Pour la plupart, à ce stade, ils ne perçoivent pas que trouver les racines d'une fonction peut permettre de faire une étude complète de la monotonie et de la concavité de cette fonction, ainsi que la recherche d'éventuelles asymptotes en calculant les limites en les racines de la fonction. Comme nous l'avons expliqué, à l'université, l'apprentissage de l'algèbre linéaire nécessite un certain recul et une certaine maitrise du formalisme. Des praxéologies complètes sont alors nécessaires pour un apprentissage optimal, notamment pour percevoir le caractère FUG de l'algèbre linéaire et surtout pour faciliter le travail autonome de l'étudiant consistant à créer des liens et une cohérence entre le bloc du savoir et le bloc du savoir-faire.

2.1.2 Transposition didactique

Comme l'explique Chevallard [13], un monde praxéologique parfait n'existe pas. C'est-à-dire qu'une institution dans laquelle les activités humaines, y compris les mathématiques, seraient explicitées par des praxéologies toujours bien adaptées et où les tâches sont toujours réalisées efficacement et intelligiblement, ne peut pas exister. En effet, les praxéologies vieillissent, se modernisent en rejetant des technologies et/ou en en accueillant de nouvelles. De nombreux nouveaux types de tâches, définis comme problématiques, obligent les institutions à construire de nouvelles praxéologies, les rendant dynamiques. C'est là qu'intervient la notion de transposition didactique. Des acteurs d'une institution didactique donnée I peuvent considérer qu'une praxéologie P d'une institution non savante I' est nécessaire à un meilleur fonctionnement de I. Dans ce cas, P est reproduite, adaptée et importée à leur institution I, donnant naissance, par la transposition didactique, à P', praxéologie de I. Chevallard vise la transformation d'un savoir savant brut, tel qu'un expert dans le milieu de ce savoir peut l'observer et le comprendre, en savoir **à enseigner**. L'objectif de l'enseignant est de finaliser la transformation du savoir à enseigner en savoir **enseigné**. La transposition didactique pousse l'enseignant à s'interroger sur la manière dont il va découper les savoirs à enseigner et la façon dont il va lier les savoirs avec les problèmes qui leur donnent naissance, mais également à leur conformité quant au niveau de compréhension et d'aptitude des apprenants. Chevallard s'attarde sur ce qui est factuel et ne prend donc pas en compte le cheminement que l'apprenant se doit de faire pour que ce savoir **enseigné** soit transposé en savoir **appris**. Travailler avec des praxéologies complètes dont les deux blocs sont indissociables facilite le travail de l'apprenant lorsqu'il est prêt à franchir cette dernière étape de la transposition. En figure 2.1, vous pouvez observer le schéma de la transposition didactique.

FIGURE 2.1 – Transposition didactique

2.2 Changements de cadres

Douady [21] considère que le but de tout mathématicien est d'interpréter des problèmes qu'il cherche à résoudre. Pour ce faire, il change de point de vue, reformule ces problèmes et les change de cadres pour enfin confronter les différentes traductions (le problème traduit dans les différents cadres). Le problème fait appel à des objets et des outils différents selon le cadre dans lequel il est traduit. Elle donne alors l'exemple simple de la racine carrée d'un nombre négatif qui n'existe pas dans le cadre numérique, mais qui peut prendre un sens dans le cadre géométrique. Douady décide d'introduire les changements de cadres en didactique des mathématiques et de les définir pleinement comme un élément théorique.

Un **cadre**, usuellement, précise l'environnement dans lequel un mathématicien veut se placer. Lors d'une discussion entre chercheurs, par exemple, ils discutent et se placent dans différents cadres (exemples : cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique, ...). Douady [21] définit un cadre comme constitué non seulement d'objets d'une branche des mathématiques mais également des relations qui existent entre eux, des différentes formulations qu'on peut en faire, ainsi que d'images mentales associées aux objets et leurs relations en question. Ces images mentales nous permettent de nous représenter les objets que nous considérons. C'est alors que les mêmes objets illustrés dans deux cadres différents peuvent se distinguer par les images mentales différentes qu'ils provoquent et ainsi différer également par le côté du problème qu'ils décident de traiter.

Douady [21] définit également un **changement de cadres** comme "*un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation*". En effet, rappelons-le, le but de tout chercheur, apprenant, enseignant, est de se forger des convictions menant à des conjectures et de "*se poser des jalons afin d'organiser des plans de démonstration*"[21], des marches à suivre et des méthodes. Le mot jalon est ici à considérer dans son sens commun, à savoir *ce qui sert de point de repère, d'étape dans un raisonnement, dans un processus* (Larousse, 2020). Nous savons qu'un premier plan de démonstration n'est pas toujours le bon. Des contre-exemples poussent le mathématicien à déplacer ses jalons et parfois même à écarter les conjectures qu'il a faites. Douady conclut sa définition en affirmant que les traductions d'un cadre dans un autre débouchent fréquemment sur des nouveaux objets, techniques et schémas mentaux, enrichissant ainsi les différents cadres dans lesquels le problème a été traduit. Elle insiste également sur le fait que sa définition englobe le mathématicien acteur du changement de cadres. La notion de cadre peut alors être décrite selon plusieurs dimensions évoluant avec le temps que nous explicitons ci-dessous.

- **La dimension mathématique**
  Cette dimension fait référence au fait qu'un cadre est constitué d'objets d'un même domaine, de différents niveaux de complexité, des différentes formulations de ces objets ainsi que des relations qui existent entre eux.

Le problème, c'est qu'il est rare de parvenir à énumérer ces objets et relations exhaustivement. C'est là qu'intervient la dimension socio-culturelle.

- **La dimension socio-culturelle**
  Selon l'expérience, le niveau et la culture du mathématicien, les relations qu'il connait et comprend entre les objets du cadre dans lequel il travaille seront plus ou moins abouties. Selon Douady [21], les acteurs de cultures différentes "*pourront communiquer grâce à leur bagage commun et enrichir les échanges de leurs diversités*".

- **La dimension individuelle**
  La culture d'un mathématicien va dépendre de son éducation sociale (qui comprend l'éducation qu'il reçoit chez lui, mais également à l'école) mais elle naitra aussi de l'interaction que produit le mathématicien avec son environnement social. Les schémas mentaux, les liens créés et les interprétations sont le fruit du vécu, des expériences cognitives ou autres auxquelles nous pouvons faire face. Tout en ayant un champ de connaissances commun, plus les mathématiciens auront de l'expérience, plus leurs changements de cadres seront riches, plus ils se les approprieront (individualisation) et plus leur culture sera enrichie par ceux-ci. La dimension individuelle d'un chercheur a beaucoup d'influence sur la façon dont il aborde, analyse et tente de résoudre les problèmes auxquels il est confronté.

En conclusion, d'après Douady [21], traduire un type de problèmes d'un cadre dans un autre permet une nouvelle approche de la difficulté du problème, de construire des outils et techniques n'ayant pas leur place dans le cadre d'origine et d'aboutir à de nouvelles connaissances. Ce travail de traduction permet à l'apprenant de créer lui-même les liens entre ses connaissances. Par exemple, s'il a appris à résoudre une équation dans l'ensemble des réels et qu'il a appris à résoudre des opérations sur les nombres complexes, il a les cartes en main pour transférer la résolution d'une équation dans un autre cadre que celui dans lequel il a appris à le faire. A posteriori, cette traduction d'un cadre à d'autres a un effet bénéfique sur le recul que peut avoir l'élève et sur sa capacité à reconnaitre le caractère unificateur et généralisateur des notions qu'on lui enseigne. On pourrait avancer que les changements de cadres répétés d'une notion tendent à révéler son caractère unificateur et permettent de créer plus de sens et de cohérence dans un domaine tel que celui de l'algèbre linéaire.

Remarquons qu'il ne faut pas confondre changement de cadres et changement de registres. Au sens de Duval [23], les registres sont les différents modes de représentation possibles d'une notion (y compris la langue naturelle). Les changements de registres consistent, par exemple, à traduire un énoncé dans différents langages pour résoudre un problème (français oral, français écrit, graphique, formule algébrique, ...). Pour notre projet, nous n'avons pas totalement pris en charge les changements de registres. Nos podcasts illustreront la notion de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels (nos cadres), mettant donc en jeu des objets différents (n-uplets, polynômes, matrices, applications...) selon l'espace vectoriel dans lequel l'illustration est réalisée. Ces changements d'espaces vectoriels permettent de mettre en lumière le caractère unificateur de la notion de combinaison linéaire.

2.3 Choix et variables didactiques

Brousseau [7] définit une connaissance comme ce que l'apprenant a retenu et compris d'un savoir, son appropriation personnelle d'une notion, ce qui correspond au savoir appris. Il définit ensuite un savoir comme ce qui est établi d'une notion dans les ouvrages de référence, la définition, les propriétés, les procédures et les résultats correspondant à la notion, ce qui correspond au savoir à enseigner ou enseigné. Brousseau explique que l'intervention de l'enseignant trafique parfois la construction de sens par l'étudiant, c'est-à-dire l'appropriation et la mise en rapport des connaissances associées à un savoir donné. Les situations obligent l'étudiant à faire évoluer son contrôle sur les notions, à adapter ses connaissances, à les lier. Un des objectifs des podcasts est de créer des liens entre le *praxis* et le *logos*. C'est en plaçant les étudiants novices en algèbre dans un éventail de situations engageant la notion de combinaison linéaire que nous tenterons de remplir cet objectif. Dans l'idéal, un savoir dont on vise l'apprentissage doit idéalement y prendre le plus de formes possibles. Les changements de cadres et de registres sont d'ailleurs des leviers à cet effet. Les enseignants peuvent jouer sur des variables didactiques, c'est-à-dire sur "*les éléments d'une situation qui peuvent être modifiés par le professeur et qui ont une incidence sur les procédures de résolution mises en oeuvre par les élèves. Elles peuvent être numériques (la taille des nombres en jeu ou leur nature, par exemple) ou non (les figures proposées, les instruments, les indications intermédiaires, l'ordre des questions posées, ...). La modification de ces variables permet d'engendrer à partir d'une situation initiale soit un ensemble de problèmes permettant une évolution des procédures des élèves, soit une famille de situations correspondant à divers aspects d'une même connaissance*"[20]. L'objectif est de permettre une production effective d'un savoir, c'est-à-dire une production de situations donnant des sens différents à ce savoir (différentes circonstances d'emploi ou de cohérence de ce savoir).

Ces changements de variables didactiques font partie des choix didactiques qu'un enseignant peut réaliser pour multiplier les situations engageant les connaissances ou le savoir d'une notion. Dans l'ouvrage coordonné par Brun [9], Artigue définit ces choix didactiques comme des interrupteurs activant des changements cognitifs chez l'étudiant et qui modifient quelque peu le sens et la fonction de la connaissance. Ces modifications donnent ainsi un nouveau savoir associé à cette connaissance et provoquent alors une relation assimilable à la praxéologie. Le cours théorique leur enseigne le "logos" de la praxéologie, le bloc du savoir $[\theta/\Theta]$, et les séances d'exercices leur enseignent le "praxis", le bloc du savoir-faire $[T/\tau]$. Si les choix didactiques sont stratégiques et progressifs, ils permettent d'évoluer dans le niveau de maitrise et de contrôle des notions et de créer une cohérence unifiant ces deux blocs. Artigue considère même que certains choix didactiques sont reconnus comme décisifs et cruciaux dans la transposition vers le savoir appris.

Brousseau [7][8] décrit l'équilibre idéal à atteindre dans une situation via ces choix. Il explique qu'un équilibre entre les niveaux de contrôle des notions est nécessaire. En effet, aucun apprenant n'est capable de traiter trop d'incertitudes et trop de situations lui étant problématiques. Ces dernières doivent être réparties et la nécessité d'adaptation doit être mesurée. De plus, un équilibre temporel et un rythme contrôlé dans la transmission de savoir sont essentiels. Cet équilibre en engendre un davantage psychologique chez l'apprenant. D'une part, il oscille entre accomplissement intellectuel et besoin de sécurité face à un niveau de maitrise. D'autre part, il tourne autour d'un équilibre entre la résolution de tâches difficiles et de tâches évidentes pour lesquelles les notions à activer sont acquises. La sécurité, la confiance en soi des étudiants et les sentiments de contrôlabilité et de compétence sont des conséquences pédagogiques des choix didactiques. Si ces choix sont intelligents et stratégiques, ils provoquent des situations adéquates et propices aux besoins de l'étudiant dans son apprentissage. Des choix didactiques redondants ou non-réfléchis peuvent faire stagner le processus de validation de l'apprentissage. Douady [22] insiste sur l'importance de la réflexion précédant ces choix didactiques et de la progressivité des difficultés. Dans sa théorie des changements de cadres, le choix de cadre peut en quelque sorte être aussi assimilé à un choix didactique. Si ces choix sont stratégiquement étudiés, ils provoquent une modification du rapport que les élèves entretiennent avec la notion considérée mais favorisent la prise de sens et font grandir le nombre d'outils sous le contrôle des apprenants. Le caractère progressif de ces choix est indispensable si on veut que les apprenants soient convaincus que l'activité intellectuelle en vaille la peine. De cette façon, les apprenants accepteraient plus facilement leur rôle d'acteur dans leurs apprentissages.

2.4 Complétons nos questions de recherche...

Ces cadres théoriques peuvent nous aider à réfléchir plus précisément à nos questions de recherche et la TAD permet notamment de préciser notre troisième question de recherche :

1. **Comment montrer aux débutants le caractère FUG de l'algèbre linéaire ?**
   Le caractère unificateur de l'algèbre linéaire sera mis en lumière dans notre projet via différents choix. Premièrement, nous avons fait le choix de créer, non pas un, mais une série de podcasts illustrant une même notion dans différents espaces vectoriels. De plus, nous avons veillé à prendre en considération les spécificités de l'enseignement et de l'apprentissage d'un domaine comme l'algèbre linéaire, notamment l'obstacle du formalisme et les trois principe d'Harel, dont le principe de généralisabilité. Nous avons également opté pour la notion de combinaison linéaire qui est relativement élémentaire et qui, par conséquent, permet une identification plus aisée du caractère unificateur de l'algèbre linéaire. L'illustration dans différents espaces vectoriels constitue des changements de cadres au sens de Douady que nous expliciterons et détaillerons dans le chapitre 3. Comme nous l'avons expliqué, les changements de cadres facilitent généralement fortement la détection des caractères unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire. Les podcasts, et donc les différents cadres choisis, seront proposés dans un certain ordre les rendant cohérents dans leur ensemble et prenant en charge les difficultés de manière progressive et réfléchie. Nous pensons également qu'une fois le caractère unificateur identifié, le caractère généralisateur est facilement compréhensible. De plus, le caractère formalisateur est inévitable en algèbre linéaire.

2. **Comment prendre en compte les difficultés repérées chez les étudiants débutants en algèbre linéaire ?**
   Premièrement, nous avons sélectionné la notion de combinaison linéaire car elle est enseignée au début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire et suffisamment élémentaire pour remplir les objectifs que nous nous sommes fixés. Nous tiendrons également compte des spécificités de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire comme l'obstacle du formalisme, les principes d'Harel et le caractère FUG des notions de ce domaine. De plus, les difficultés repérées dans la littérature comme la résolution et l'interprétation de systèmes d'équations linéaires, le travail avec les nombres complexes et l'appréhension des fonctions dans leur dimension objet constituent des points d'attention pour notre projet. Comme nous venons de l'expliquer, les podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels seront ordonnés de manière à graduer la difficulté dans ces changements de cadres mais également dans les difficultés prises en charge dans chacun d'entre eux.

3. **Comment permettre aux débutants en algèbre linéaire de construire des praxéologies complètes en algèbre linéaire ?**
   Une des difficultés majeures des apprenants débutants en algèbre linéaire est de pouvoir rendre cohérentes les notions enseignées au cours théorique avec les tâches proposées aux séances d'exercices. Dans nos podcasts, nous veillerons à toujours justifier les techniques utilisées par des technologies appropriées, c'est-à-dire par un discours théorique précis et adéquat. Ici, le podcasting favorisera l'utilisation constante des praxéologies complètes puisque le discours oral soutiendra les informations écrites tout au long des illustrations. En outre, la prise en charge des difficultés identifiées et précédemment citées sera renforcée par ces praxéologies dont les deux blocs (*praxis* et *logos*) sont indissociables. Nous avons également joué sur des variables didactiques afin de permettre aux apprenants de progresser et de créer ces liens.

Dans le prochain chapitre, sur base de ces questions de recherche, nous décrirons la conception de notre dispositif. Nous présenterons les changements de cadres choisis, les difficultés prises en charge dans chacun d'entre eux, la structure générale des podcasts, les choix de variables didactiques, la prise en charge de l'obstacle du formalisme et d'autres considérations.

Chapitre 3

Conception du dispositif

Après avoir visionné de nombreux podcasts, nous n'avons pas pu trouver de podcast remplissant les objectifs que nous visons et/ou répondant à l'ensemble de nos questions de recherche. Cependant, cette exploration nous a inspirées et nous a permis de dresser une liste de ce que nous voulions, ou pas, appliquer dans nos créations.

Comme nous l'avons expliqué, pour faciliter l'identification du caractère unificateur de l'algèbre linéaire, nous avons créé, non pas un, mais une série de huit podcasts de courte durée illustrant la notion de combinaison linéaire dans différents cadres (au sens de Douady [21]), s'assimilant à différents types d'espaces vectoriel définis par Lalaude dans sa thèse [27], en se basant sur les cadres définis par De Vleeschouwer. Quatre types de cadres illustreront la notion : des cadres paradigmatiques de la forme $\mathbb{K}^n$ et dont les éléments sont des n-uplets, un cadre polynomial, un cadre matriciel et des cadres fonctionnels. Dans cette succession de cadres, une gradation dans la difficultés des objets considérés a été stratégiquement réfléchie et nous avons abouti à un ordre conseillé pour visionner l'ensemble des podcasts. Nous commencerons par illustrer la notion dans des cadres paradigmatiques ($\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$) car les étudiants y ont été confrontés fréquemment (parfois implicitement) dans le secondaire. Étant donné que les étudiants ont également été confrontés aux polynômes avant l'université, le cadre polynomial viendra ensuite, suivi du cadre matriciel. Enfin, nous illustrerons la notion de combinaison linéaire dans le cadre fonctionnel, et en particulier dans des espace d'applications linéaires.

En parallèle de cette gradation dans les cadres choisis, et afin de pouvoir prendre en charge les difficultés identifiées dans la littérature pour les débutants en algèbre linéaire, ces dernières ont été réparties de manière à ce qu'une deuxième gradation s'opère. Chaque podcast prendra en charge une difficulté particulière. Tout d'abord, dans le cadre paradigmatique relativement bien connu des étudiants, $\mathbb{R}^n$, nous prendrons en charge les difficultés relatives à la résolution et à l'interprétation des systèmes d'équations linéaires. Ces difficultés sont assez conséquentes et nous voulions couvrir plusieurs types de systèmes (système à une solution, système sans solution et système à une infinité de solutions). Nous avons donc décidé de créer trois podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$. Ensuite, le podcast illustrant la notion dans le cadre paradigmatique $\mathbb{C}^n$ prend naturellement en charge les difficultés relatives aux systèmes d'équations linéaires mais, cette fois-ci, en travaillant avec des nombres complexes. Enfin, dans le cadre fonctionnel, les espaces vectoriels d'applications linéaires permettront de les percevoir dans leur dimension objet, comme éléments d'une structure algébrique et non plus comme une relation entre deux variables. Nous avons choisi de créer deux podcasts dans ce cadre. Dans le premier, la notion de combinaison linéaire sera illustrée dans un espace de formes linéaires et le deuxième considérera des applications linéaires qui ne sont pas des formes. Le tableau en figure 3.1 reprend la durée, le cadre et les difficultés prises en charge pour chaque podcast, dans l'ordre conseillé pour respecter les gradations énoncées. En outre, chaque podcast propose une praxéologie complète mettant en rapport des résultats théoriques (bloc technologico-théorique, "logos", $[\theta/\Theta]$) et une illustration semblable à un exercice (bloc pratico-technique, "praxis", $[T/\tau]$). De plus, chaque étape de chaque technique utilisée est justifiée par une technologie. À cette fin également, nous avons proposés deux exercices supplémentaires et leurs solutions à la fin de chaque podcast. Dans les illustrations explicitées au sein des podcasts et dans ces exercices supplémentaires, nous avons veillé à modifier les variables didactiques progressivement pour confronter les étudiants à un maximum de difficultés. Dans ces modifications stratégiques, nous avons veillé à ce que ces exercices puissent être résolus grâce au contenu du podcast à la fin duquel ils se trouvent et/ou grâce au contenu des podcasts précédents dans l'ordre de visionnage conseillé.

Podcast n° …	Durée	Cadre	Espace vectoriel	Difficultés prises en charge
1	3:30	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires à une solution • Praxéologies complètes
2	3:25	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires n'ayant pas de solution • Praxéologies complètes
3	4:28	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires ayant une infinité de solutions • Praxéologies complètes
4	6:44	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	• Systèmes d'équations linéaires contenant des nombres complexes • Praxéologies complètes
5	3:46	polynomial	$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$	• Espace vectoriel de polynômes • Praxéologies complètes
6	4:36	matriciel	$\mathscr{M}_{n\times n}$	• Espace vectoriel de matrices • Praxéologies complètes
7	5:02	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times 1}$	• Fonctions dans leur dimension objet • Espace vectoriel de formes linéaires • Praxéologies complètes
8	3:10	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times k}$	• Fonctions dans leur dimension objet • Espace vectoriel d'applications linéaires qui ne sont pas des formes linéaires • Praxéologies complètes

FIGURE 3.1 – Tableau des podcasts ordonnés selon la gradation dans les cadres et la gradation dans les difficultés prises en charges

Dans ce chapitre, nous commencerons par détailler les différents cadres et espaces vectoriels que nous avons choisis pour illustrer la notion de combinaison linéaire. Les énoncés des illustrations de chaque podcast seront présentés. Grâce à ces précisions, nous complèterons le tableau en figure 3.1. Ensuite, nous présenterons la structure générale que nous avons tenté de conserver pour l'ensemble des podcasts. Puis, nous poursuivrons en détaillant et en argumentant les choix de variables didactiques dans les illustrations des podcasts et dans les exercices supplémentaires proposés. Pour rendre compte de ces changements de variables didactiques, sur base de l'ordre conseillé et du tableau en figure 3.1, nous présenterons la table des variables didactiques que nous avons construite. Dans la suite, nous énoncerons quelques considérations pédagogiques supplémentaires. Enfin, nous préciserons d'autres choix concernant la prise en charge de l'obstacle du formalisme et le discours oral des podcasts.

En annexes, vous trouverez l'ensemble des diapositives de nos podcasts accompagnées du discours oral retranscrit. Si vous désirez consulter les diapositives en taille réelle, vous pouvez trouver les podcasts via les liens ci-après. Il vous suffit de cliquer ou de double-cliquer sur le lien de la version numérique de ce mémoire afin d'y accéder.

1. `https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-rn-video1_48053/`
2. `https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-rn-video2/`

3. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-rn-video-3/
4. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-cn/
5. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-les-polynomes/
6. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-les-matrices/
7. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-les-applications-video1/
8. https://medias.unamur.be/videos/combinaisons-lineaires-dans-les-applications-video2/

3.1 Description des cadres mobilisés dans le dispositif et des difficultés associées

Nous allons présenter ci-après les différents cadres de nos huit podcasts. Comme nous l'avons expliqué, chaque podcast illustre la notion de combinaison linéaire dans un espace vectoriel différent. Après cette description plus précise des cadres et des énoncés choisis pour les illustrations explicitées dans les podcasts, nous complèterons le tableau des cadres et difficultés prises en charge.

Tout d'abord, dans tous les podcasts, la définition de combinaison linéaire est donnée dans un cadre algébrique général défini par Lalaude [27] dans sa thèse. Comme le montre la figure 3.2, l'espace vectoriel est noté E et le champ scalaire sur lequel il est construit est noté $\mathbb{K}$. Nous présenterons cette définition dans la description de la structure générale des podcasts. Cette même définition guide la résolution de chaque illustration. Elle débute le podcast après la lecture de l'énoncé et elle le termine car chaque illustration est conclue en s'y ramenant, de manière à travailler avec des praxéologies complètes. Dans la même optique, nous avons veillé à croiser cette définition et la résolution de l'illustration, tout au long du podcast. Afin de contrer l'obstacle du formalisme constaté chez les apprenants débutants en algèbre linéaire, la définition est donnée en langage mathématique, dans un registre algébrique, et à l'oral, elle est explicitée dans le registre de la langue naturelle. De plus, pour que la définition soit la plus générale possible, nous avons choisi une définition différente de celles des syllabi du public test que nous présenterons dans le chapitre 4 concernant la mise en oeuvre du dispositif. Malheureusement, l'obstacle du formalisme n'est pas totalement pris en charge dans ce projet. En effet, nous ne contrôlons pas les écrits des apprenants. Par conséquent, le discours oral appuyant et/ou complétant les informations écrites sur les diapositives est la seule prise en compte de cet obstacle dans notre projet. Quelques considérations supplémentaires à cet égard seront présentées dans la suite du chapitre en section 3.5.

Combinaison linéaire : Définition

Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et $u, v_1, ..., v_p$, des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs $v_1, ..., v_p$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K} :$$

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p.$$

FIGURE 3.2 – Définition générale de combinaison linéaire proposée dans les podcasts

3.1.1 Cadres paradigmatiques

Par cadre paradigmatique, nous entendons les espaces vectoriels du type $\mathbb{K}^n$ dont les éléments sont des n-uplets. Les étudiants sont souvent rapidement familiarisés avec les n-uplets et ces éléments engendrent peu de difficultés dans les calculs. En général, avant de rentrer à l'université, les étudiants ont même déjà été confrontés à des exercices dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Il nous semblait donc judicieux de commencer par là.

Les trois premiers podcasts illustrent la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$. Le but du premier podcast est de commencer par un exemple simple dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$, sans particularités et qui fonctionne bien, dans le sens où la solution est unique. Cet exemple est présenté en figure 3.3. Nous visons la concentration des étudiants sur les étapes de résolution et les liens constants entre la définition algébrique de combinaison linéaire, les énoncés théoriques utilisés pour justifier les étapes de résolution et les techniques que cette dernière utilise. Ainsi, nous favorisons la construction de praxéologies complètes relatives à notre troisième question de recherche et controns ainsi le mieux possible l'obstacle du formalisme.

Le deuxième podcast traite un exercice simple dans le même espace vectoriel mais qui donne cette fois-ci lieu à un contre-exemple de la notion de combinaison linéaire. Les contre-exemples sont, en outre, très importants pour une compréhension globale de l'algèbre linéaire et le passage par la théorie et le formalisme y sont plus souvent utilisés. Pour ce contre-exemple dont l'énoncé est présenté en figure 3.4, nous avons veillé à ne pas considérer plus de trois triplets de $\mathbb{R}^3$ pour construire la combinaison linéaire du triplet initial afin que les étudiants ne fassent pas de raccourcis hâtifs. En effet, un contre-exemple de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^3$ sur base de 4 triplets pourrait paraitre logique d'emblée, 4 étant supérieur à 3. Certaines propriétés ou théorèmes concernant la dépendance linéaire, et enseignés presque simultanément à la notion de combinaison linéaire, permettent de conclure directement de tels exercices. Dans ce cas, le passage par la définition est un détour et une telle illustration n'irait pas dans le sens de notre première question de recherche concernant le caractère FUG de l'algèbre linéaire.

Le troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ propose un exemple dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ donnant lieu à une infinité de quadruplets solutions. Nous avons changé la dimension de l'espace vectoriel et ajouté une difficulté supplémentaire via le système indéterminé auquel la définition de combinaison linéaire donne lieu. Vous pouvez observer l'énoncé correspondant en figure 3.5. Comme nous l'avons expliqué dans les difficultés repérées chez les étudiants débutants en algèbre linéaire, les systèmes d'équations et l'interprétation de leurs solutions ne sont pas triviaux pour eux. Cette troisième illustration dans $\mathbb{R}^n$ vise donc à renforcer les connaissances des apprenants sur les systèmes d'équations vérifiées par une infinité de solutions et sur l'écriture de l'ensemble de ces solutions. Le formalisme et le langage mathématique prennent plus de place dans ce troisième podcast que dans les deux premiers. En effet, la gradation dans le degré d'utilisation du formalisme constitue un autre critère important pour nos créations.

Énoncé

Soient $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u = (5, 4, 1)$, $v_1 = (2, 2, 0)$ et $v_2 = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$.
Le triplet u est-il combinaison linéaire des triplets v_1 et v_2 ?

FIGURE 3.3 – Énoncé de l'exemple du premier podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Énoncé

Soient $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u = (1, 0, 3)$, $v_1 = (0, 4, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (3, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$.
Le triplet u est-il combinaison linéaire des triplets v_1, v_2 et v_3 ?

FIGURE 3.4 – Énoncé du contre-exemple du second podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Énoncé

Soient $\mathbb{R}^4$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et
$u = (1, 12, 8, 4)$, $v_1 = (0, 5, 4, 2)$, $v_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $v_3 = (-2, -5, 0, 0)$ et $v_4 = (-1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.
Le quadruplet u est-il combinaison linéaire des quadruplets v_1, v_2, v_3 et v_4 ?

FIGURE 3.5 – Énoncé de l'exemple du troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Afin de graduer l'évolution dans les cadres et de ne pas opérer de changements trop brusques, nous avons créé un podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$. Les éléments de cet espace vectoriel sont toujours des n-uplets, comme ceux de $\mathbb{R}^n$. Nous restons donc dans un cadre paradigmatique. Dans ce podcast, nous illustrons la notion de combinaison linéaire deux fois dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. Premièrement, un exemple est proposé dans cet espace vectoriel construit sur le champ scalaire $\mathbb{C}$. Ensuite, le même énoncé est donné mais l'espace vectoriel est, cette fois, construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et donne lieu à un contre-exemple. Ces énoncés, visibles en figures 3.6 et 3.7, sont proposés dans cet ordre-là pour deux raisons.

Premièrement, cela nous permet de prendre en charge une difficulté repérée dans la littérature, à savoir les calculs avec les nombres complexes. Dans la première illustration, durant la résolution du système d'équation, nous avons insisté sur la méthode qui consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur d'un nombre complexe par le conjugué de son dénominateur pour obtenir sa forme algébrique (une partie réelle et une partie imaginaire). Dans la deuxième illustration du podcast, nous explicitons deux méthodes qui rendent compte de l'absence de solution quand l'espace vectoriel est construit sur $\mathbb{R}$. La première consiste à repérer directement des impossibilités dans les équations. Par exemple, une équation du système force une inconnue à appartenir aux nombres complexes. La deuxième méthode transforme le système complexe en un système réel, par l'association des parties réelles et imaginaires des membres des équations. Une équation complexe donne alors deux équations réelles. Nous prenons donc en charge plusieurs difficultés relatives nombres complexes.

La deuxième raison du choix de traiter les énoncés dans cet ordre-là est que nous voulons que les étudiants se représentent bien le fait qu'une combinaison linéaire peut exister lorsqu'un espace vectoriel est construit sur un certain champ scalaire et être impossible si l'espace vectoriel est construit sur un autre champ scalaire. Nous voulons mettre en évidence que le champ auquel appartiennent les scalaires à trouver pour construire la combinaison linéaire influence l'existence de celle-ci entre des éléments de l'espace vectoriel considéré. En effet, comme $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$, les solutions valides quand $\mathbb{C}^3$ est construit sur $\mathbb{R}$ sont également des solutions quand $\mathbb{C}^3$ est construit sur $\mathbb{C}$. En dehors de ce podcast, les espaces vectoriels considérés sont tous construits sur le champ scalaire $\mathbb{R}$. En effet, les structures algébriques sont des notions enseignées, en général, avant les espaces vectoriels et considérer des espaces vectoriels construits sur un autre champ scalaire perturberait les étudiants. De plus, prendre en charge cette difficulté de changement de champ scalaire était inutile pour les objectifs que nous nous sommes fixés.

Énoncé n°1 : $\mathbb{C}^3$ construit sur $\mathbb{C}$

Soient $\mathbb{C}^3$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u = (1, -i, 2)$, $v_1 = (-i, i, 0)$ et $v_2 = (2, -1, i + 1) \in \mathbb{C}^3$.
Le triplet u est-il combinaison linéaire des triplets v_1 et v_2 ?

FIGURE 3.6 – Premier énoncé du podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$

Énoncé n°2 : $\mathbb{C}^3$ construit sur $\mathbb{R}$

Soient $\mathbb{C}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u = (1, -i, 2)$, $v_1 = (-i, i, 0)$ et $v_2 = (2, -1, i + 1) \in \mathbb{C}^3$.
Le triplet u est combinaison linéaire des triplets v_1 et v_2 ?

FIGURE 3.7 – Deuxième énoncé du podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$

3.1.2 Cadre polynomial

Nous avons considéré des espaces de polynômes de degré maximal inférieur à n du type $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, où $n + 1$ est la dimension de l'espace vectoriel. Le cinquième podcast traite une illustration de la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel des polynômes de degré maximal 3 à coefficients réels, noté $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ et construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$. Afin de ne pas perturber trop les étudiants et de rester raisonnables dans les difficultés traitées, nous avons choisi de considérer les éléments de cet espace vectoriel comme des polynômes du type $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et non comme des fonctions polynomiales. De cette façon, nous nous assurons que le public différencie bien ce podcast et ceux illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications (cadres fonctionnels). Les difficultés identifiées dans le premier chapitre en section 1.3 à propos des fonctions dans leur dimension objet (au sens de Douady [21]) seront prises en charge dans les deux derniers podcasts. L'énoncé choisi pour le cadre polynomial est donné en figure 3.8. En dehors du changement de cadre et du fait que les opérations sont effectuées sur des polynômes et plus des n-uplets, cet exemple ajoute également la difficulté engendrée par la présence de la variable x qui déstabilise parfois les étudiants. Prendre cela en charge permet de préparer l'illustration de la notion de combinaison linéaire dans les cadres fonctionnels des deux derniers podcasts que nous décrirons.

Énoncé

Soient $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré maximal 3 et
$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8$, $\quad P_1(x) = x^2 + 1$, $\quad P_2(x) = x^3 + x - 1 \quad$ et $\quad P_3(x) = x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
Le polynôme $P(x)$ est-il combinaison linéaire des polynômes $P_1(x), P_2(x)$ et $P_3(x)$?

FIGURE 3.8 – Énoncé de l'exemple du podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de polynômes

3.1.3 Cadre matriciel

Dans le cadre matriciel, nous avons considéré des espaces vectoriels de matrices carrées d'ordre n du type $\mathcal{M}_{n\times n}$, où $n \times n$ est la dimension de l'espace vectoriel. Le quatrième podcast propose un contre-exemple dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, noté $\mathcal{M}_{3\times 3}$ et construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$. Nous avons choisi de traiter un contre-exemple afin de ne pas présenter que des exemples, et pour respecter le critère de vidéos de courte durée. En effet, une illustration dans un espace de matrices d'ordre 3 peut donner lieu à des calculs plus fastidieux et les notations sont plus encombrantes.

Énoncé

Soient $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\sqrt{2} & 7 & 9 \\ 10/3 & 14 & -4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -\sqrt{2} & 5 & 9 \\ 10/3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

La matrice M est-elle combinaison linéaire des matrices M_1, M_2 et M_3?

FIGURE 3.9 – Énoncé du contre-exemple du podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices

3.1.4 Cadres fonctionnels

Afin d'aider les étudiants débutants en algèbre linéaire, nous avons également décidé de traiter des espaces vectoriels d'applications linéaires, du type $\mathcal{F}_{n\times k}$, où n est la dimension de l'espace de départ des applications linéaires et k est la dimension de leur espace d'arrivée. Dans le septième podcast, nous considérons un exemple de combinaison linéaire de formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Le huitième podcast illustre un exemple d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous avons choisi de garder $\mathbb{R}^3$ comme espace de départ pour les deux podcasts, afin que les étudiants puissent bien visualiser les différences entre les deux résolutions. Nous n'y avons pas pensé durant l'enregistrement des podcasts, mais il est peut-être préférable de ne pas utiliser l'indice $n \times k$. En effet, en général, la notation $n \times k$ est utilisée lorsque les applications considérées sont des couples d'applications dont les espaces de départ sont respectivement de dimension n et k.

Énoncé

Soient $\mathcal{F}_{3\times 1} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et
$f, f_1,$ et $f_2 \in \mathcal{F}_{3\times 1}$: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = x+y$, $f_1(x,y,z) = 3x+2y-z$, $f_2(x,y,z) = -y-z$.
L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1 et f_2 ?

FIGURE 3.10 – Énoncé de l'exemple du premier podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications

Énoncé

Soient $\mathcal{F}_{3\times 2} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ et } f \text{ est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et
$f, f_1,$ et $f_2 \in \mathcal{F}_{3\times 2}$ telles que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = (-3x+5z, -2x+5y)$,
$f_1(x,y,z) = (-3x+2y-z, y+2z)$ et $f_2(x,y,z) = (-3x+y+2z, 3y+z-x)$.
L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1 et f_2 ?

FIGURE 3.11 – Énoncé de l'exemple du second podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications

3.1.5 Gradation dans les cadres et dans les difficultés prises en charge

Comme annoncé, en figure 3.12, nous avons inséré d'autres difficultés prises en charges dans le tableau initié en début de chapitre.

Podcast n° …	Durée	Cadre	Espace vectoriel	Difficultés prises en charge
1	3:30	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires à une solution • Praxéologies complètes
2	3:25	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires n'ayant pas de solution • Praxéologies complètes
3	4:28	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	• Système d'équations linéaires ayant une infinité de solutions • Praxéologies complètes
4	6:44	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	• Systèmes d'équations linéaires contenant des nombres complexes • Calculs avec les nombres complexes (opérations, conjugué, forme algébrique, égalité entre deux nombres complexes, …) • Importance du champ scalaire considéré • Praxéologies complètes
5	3:46	polynomial	$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$	• Espace vectoriel de polynômes • Prise en compte d'une variable x • Praxéologies complètes
6	4:36	matriciel	$\mathscr{M}_{n\times n}$	• Espace vectoriel de matrices • Système d'équations linéaires n'ayant pas de solution • Praxéologies complètes
7	5:02	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times 1}$	• Fonctions dans leur dimension objet • Espace vectoriel de formes linéaires • Praxéologies complètes
8	3:10	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times k}$	• Fonctions dans leur dimension objet • Espace vectoriel d'applications linéaires qui ne sont pas des formes linéaires • Praxéologies complètes

FIGURE 3.12 – Tableau des podcasts ordonnés selon la gradation dans les cadres et la gradation dans les difficultés prises en charges

Afin de concrétiser cet ensemble de podcasts, nous allons désormais décrire leur structure générale conservée dans chacun d'entre eux.

3.2 Structure générale des podcasts

Le contenu des diapositives utilisées dans nos podcasts a été longuement réfléchi et des choix supplémentaires ont été réalisés afin de répondre à nos questions de recherche (caractère FUG, praxéologies complètes, difficultés repérées). Nous allons, ici, présenter la structure générale de l'ensemble de nos podcasts. Conserver cette structure dans chaque podcast est rassurant pour les étudiants. En effet, les sentiments de contrôlabilité et de compétence sont souvent suscités lorsque l'apprenant repère un schéma de résolution ou un raisonnement connu. Cette structure identique durant tout le projet, permet également de faciliter la construction de praxéologies complètes en autonomie par l'apprenant et de révéler le caractère unificateur et généralisateur de la notion de combinaison linéaire et implicitement de l'algèbre linéaire.

3.2.1 Page de garde

La page de garde est similaire pour tous les podcasts. Elle contient le titre "**Les combinaisons linéaires dans ...**" suivi du cadre considéré pour l'illustration du podcast, le logo de notre université et le nom et le prénom du créateur. Ce titre général exprime le type d'espace vectoriel dans lequel la notion de combinaison linéaire est illustrée. Par exemple, le cinquième podcast est intitulé "Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes", de manière à ce que ce titre comprenne l'espace vectoriel de l'illustration et les espaces vectoriels choisis pour les exercices supplémentaires. Nous avons décidé de ne pas y insérer la date de création afin de ne pas provoquer de biais chez le public. En effet, si nous voulons que ces podcasts soient réutilisés et proposés à long terme, il est nécessaire que l'intérêt des élèves ne soit pas trompé par une date qui leur paraitrait trop lointaine. C'est un détail, mais nous ne voudrions pas que le dispositif soit jugé "ancien" à tort, surtout que les illustrations des podcasts seront toujours valables et bénéfiques dans le contexte d'un cours d'algèbre linéaire.

3.2.2 Énoncé et définition

Comme vous avez pu le constater, la formulation de l'énoncé est similaire pour tous les podcasts :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\odot, \star_1, ..., \star_p \in E$. Le vecteur $\odot$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\star_1, ..., \star_p$?,

où le mot *vecteur* est remplacé par le nom des éléments de l'espace vectoriel considéré (n-uplets, polynômes, matrices, applications, ...) et $\odot, \star$ sont remplacés par les notations choisies pour appeler ces éléments. Nous avons également ajouté une remarque de vocabulaire sous l'énoncé rappelant l'équivalence entre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un espace vectoriel construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$, au moment où ce terme intervient la première fois. Cette remarque n'est pas reprise à l'oral car nous considérons que l'apprenant fera directement le lien entre ce qui est écrit, ce qui est dit et cette remarque. En effet, à l'écrit comme à l'oral, nous utilisons les deux façons de le dire, ce qui facilite donc les associations mentales qui se font quasi inconsciemment chez les apprenants. Insérer les deux appellations dans les diapositives permet de rendre la définition compréhensible au plus grand nombre d'apprenants possible, prenant aussi en charge l'obstacle du formalisme. Les étudiants ont appris avec des supports différents, comme nous le constaterons en analysant les syllabi du public ayant testé le dispositif. Pour conserver l'effet de surprise des exemples et contre-exemples, nous avons opté pour la formulation "Est-ce une combinaison linéaire ?" plutôt que "Montrez que c'est une combinaison linéaire" ou "Montrez que ce n'est pas une combinaison linéaire". De cette façon, nous espérons que le public s'intéressera à la totalité de la résolution puisqu'ils ne savent pas d'avance l'issue du problème. D'ailleurs, au fil de la résolution, dans le discours oral, nous conservons cette incertitude sur la solution, en annonçant, par exemple, que nous *essayons de trouver les scalaires* ou que nous *tentons de construire la combinaison linéaire.*

Afin d'éviter les déductions hâtives, nous avons veillé à considérer des vecteurs linéairement indépendants pour construire les combinaisons linéaires. Les étudiants ont tendance à conclure directement l'existence d'une combinaison linéaire si les vecteurs sont linéairement dépendants. Or, ce n'est pas toujours le cas. Les tâches proposées en perdraient leur intérêt et nous passerions à côté de notre première question de recherche concernant le caractère FUG de l'algèbre linéaire.

Dans tous les podcasts, la même définition suit directement l'énoncé. Vous avez pu la consulter en figure 3.2. Dans cette définition, nous avons opté pour l'appellation générale de *vecteurs* pour les éléments d'un espace vectoriel. De plus, le vecteur duquel on veut construire une combinaison linéaire est noté u afin de le distinguer des vecteurs utilisés pour construire la combinaison linéaire, notés $v_1, v_2, ..., v_p$. De cette façon, on peut s'assurer que les apprenants distingueront bien les vecteurs et qu'ils associeront bien les vecteurs v_i aux scalaires de mêmes indices. Nous avons d'ailleurs fait de même pour les énoncés. Le choix de l'indice final p empêche simplement le conflit avec le n généralement utilisé pour noter la dimension de l'espace vectoriel.

Cette première diapositive suivant la page de garde, dont un exemple est donné en figure 3.13,commence par un titre indiquant le cadre dans lequel la notion de combinaison linéaire est illustrée, et contient l'énoncé, la remarque et la définition. Nous avons décidé de ne plus mettre de titre sur les diapositives suivantes contenant la résolution pour un gain d'espace et pour que le rendu soit lisible, sans information redondante ou inutile.

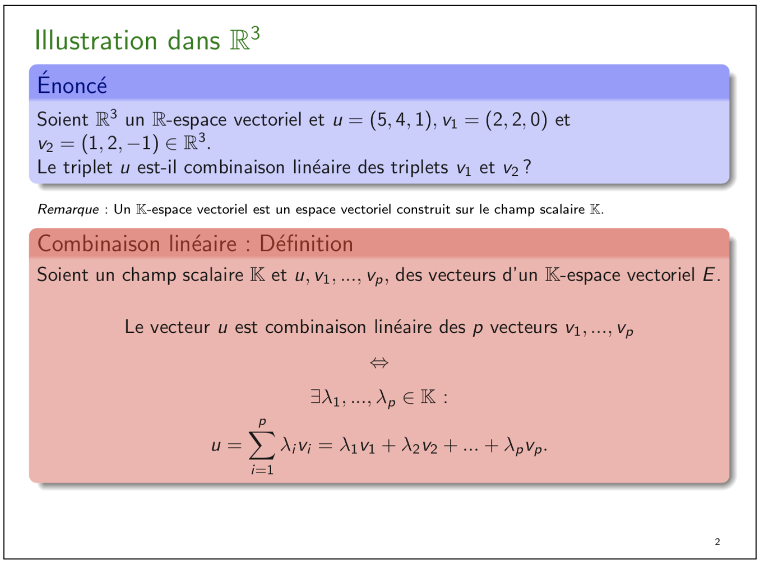


FIGURE 3.13 – Diapositive d'introduction du premier podcast illustrant le concept de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^3$

3.2.3 Squelette de la résolution

En rapport avec la formulation de l'énoncé que nous avons gardée dans tous les podcasts, le squelette de la résolution utilisé dans l'ensemble des podcasts est le suivant :

1. La définition de combinaison linéaire est appliquée à l'énoncé :

   $\odot$ est combinaison linéaire de $\star_1, \dots, \star_p \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \,:\, \odot = \lambda_1 \star_1 + \lambda_2 \star_2 + \dots + \lambda_p \star_p$.

2. L'égalité
$$\odot = \lambda_1 \star_1 + \lambda_2 \star_2 + \dots + \lambda_p \star_p$$
   est obtenue en appliquant la définition grâce aux lois associées à l'espace vectoriel considéré.

3. Une égalité entre deux objets de la même nature est alors obtenue et transformée en un système d'équations linéaires, grâce à la définition de l'égalité entre deux objets de cette nature.

4. Le système d'équations linéaires est résolu par la méthode de substitution dans les exemples. Dans les contre-exemples, la méthode n'est pas toujours la même.

Les puces définissant les différentes parties de la résolution ont été stratégiquement réparties. Une première puce applique la définition à l'illustration et une deuxième correspond au développement de l'égalité obtenue en appliquant la définition. Cette dernière puce comprend la mise en système de cette égalité ainsi que la résolution du système. Le dernier podcast, illustrant la notion dans des espaces d'applications linéaires n'étant pas des formes, fait exception à cette répartition des puces et en contient plus. Cet exemple nécessite plus d'explications et plus d'étapes pour assurer la compréhension. En effet, les applications considérées n'étant pas des formes, deux résolutions de systèmes sont nécessaires à la résolution, un pour développer l'égalité de la définition de combinaison linéaire et un deuxième pour le résoudre. Des confusions dans les dimensions des objets traités et dans les conditions à vérifier peuvent se produire. C'est la raison pour laquelle nous avons décidé d'augmenter le nombre de puces pour structurer la résolution.

3.2.4 Conclusion

Sur la diapositive de conclusion du podcast, le titre et la définition sont repris. En figure 3.14, vous pouvez consulter la diapositive de conclusion du troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans un espace de polynômes. Le bloc bleu de conclusion reprend la définition générale et l'applique aux éléments de l'énoncé et aux solutions obtenues. C'est donc l'interprétation du résultat de la résolution pour l'énoncé de départ ,en utilisant la définition formelle algébrique.

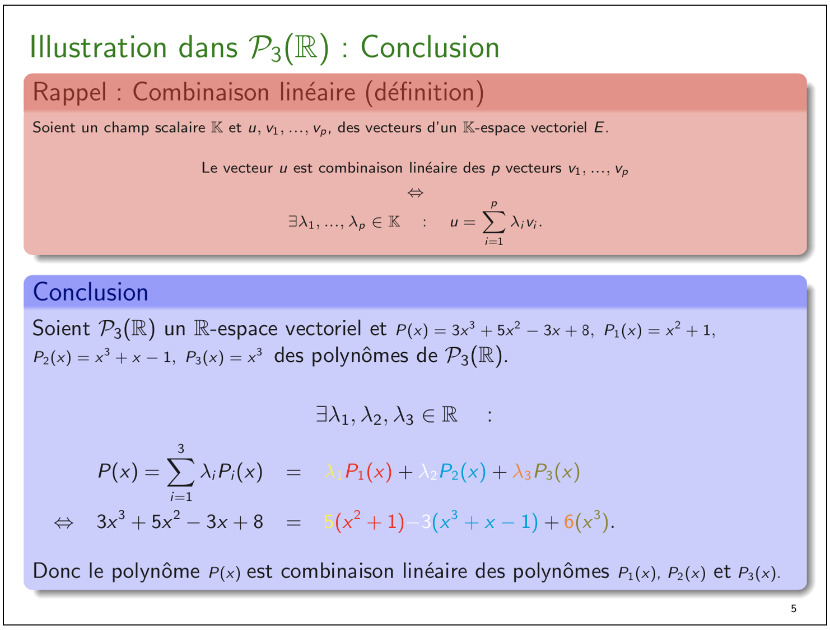


FIGURE 3.14 – Diapositive de conclusion du troisième podcast illustrant le concept de combinaison linéaire dans l'espace des polynômes de degré maximal 3 à coefficients réels

3.2.5 Exercices supplémentaires

À la fin de chaque podcast, nous avons proposé deux exercices supplémentaires que les étudiants peuvent réaliser seuls. Ces exercices et leurs solutions sont présentés dans l'ordre conseillé des podcasts en figures 3.15 à 3.30. La fin du discours oral est toujours la même : "*Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seuls. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez résoudre ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Je vais passer à la diapositive suivante donc si vous voulez réaliser ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de continuer par la suite*". Le choix des exercices a été motivé par un choix de variables didactiques considérées, développé à la section suivante.

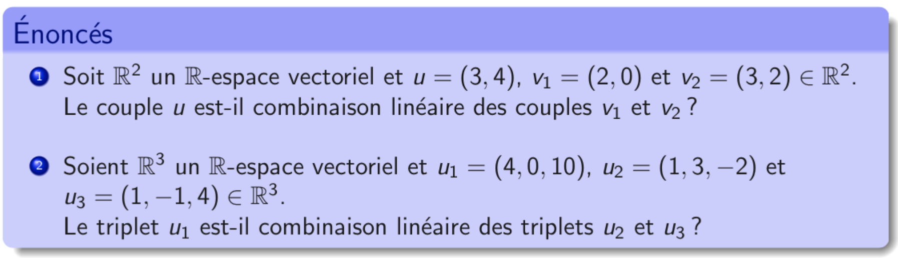


FIGURE 3.15 – Exercices supplémentaires proposés dans le premier podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Solutions

1. Soit $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le couple $u = (3,4) \in \mathbb{R}^2$ **est** combinaison linéaire des couples $v_1 = (2,0)$ et $v_2 = (3,2) \in \mathbb{R}^2$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ (3,4) = \lambda_{1_{\{=\frac{-3}{2}\}}}(2,0) + \lambda_{2_{\{=2\}}}(3,2).$$

2. Soit $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le triplet $u_1 = (4,0,10) \in \mathbb{R}^3$ **est** combinaison linéaire des triplets $u_2 = (1,3,-2)$ et $u_3 = (1,-1,4) \in \mathbb{R}^3$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ u_1 = \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_3$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ (4,0,10) = \lambda_{1_{\{=1\}}}(1,3,-2) + \lambda_{2_{\{=3\}}}(1,-1,4).$$

FIGURE 3.16 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le premier podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Énoncés

1. Soit $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A = (3,2,3)$, $B = (1,4,0)$, $C = (1,1,0)$ et $D = (2,3,0) \in \mathbb{R}^3$.
   Le triplet A est-il combinaison linéaire des triplets B, C et D ?

2. Soient $\mathbb{R}^4$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u = (5,-2,4,-7)$, $v_1 = (1,2,0,3)$ et $v_2 = (4,2,2,1) \in \mathbb{R}^4$.
   Le quadruplet u est-il combinaison linéaire des quadruplets v_1 et v_2 ?

FIGURE 3.17 – Exercices supplémentaires proposés dans le deuxième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Solutions

1. Soit $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le triplet $A = (3,2,3) \in \mathbb{R}^3$ **n'est pas** combinaison linéaire des triplets $B = (1,4,0)$, $C = (1,1,0)$ et $D = (2,3,0) \in \mathbb{R}^3$ car

$$\nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ A = \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_3 D$$
$$\Leftrightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ (3,2,3) = \lambda_1(1,4,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(2,3,0).$$

2. Soit $\mathbb{R}^4$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le quadruplet $u = (5,-2,4,-7) \in \mathbb{R}^4$ **est** combinaison linéaire des quadruplets $v_1 = (1,2,0,3)$ et $v_2 = (4,2,2,1) \in \mathbb{R}^4$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ (5,-2,4,-7) = \lambda_{1_{\{=-3\}}}(1,2,0,3) + \lambda_{2_{\{=2\}}}(4,2,2,1).$$

FIGURE 3.18 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le deuxième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Énoncés

1. Soient $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1 = (-1, 3, 2)$, $v_2 = (3, 6, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1)$ et $v_4 = (-2, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$.
   Le triplet v_1 est-il combinaison linéaire des triplets v_2, v_3 et v_4 ?

2. Soit $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W = (10, 6)$, $X = (6, 3)$, $Y = (-4, -2)$ et $Z = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.
   Le couple W est-il combinaison linéaire des couples X, Y et Z ?

FIGURE 3.19 – Exercices supplémentaires proposés dans le troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Solutions

- Soit $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le triplet $v_1 = (-1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ **est** combinaison linéaire des triplets $v_2 = (3, 6, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1)$ et $v_4 = (-2, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ v_1 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ (-1, 3, 2) = \lambda_{1_{\{=4\}}}(3, 6, 1) + \lambda_{2_{\{=2\}}}(1, -3, -1) + \lambda_{3_{\{=\frac{15}{2}\}}}(-2, -2, 0).$$

- Soit $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le couple $W = (10, 6) \in \mathbb{R}^2$ **est** combinaison linéaire des couples $X = (6, 3)$, $Y = (-4, -2)$, $Z = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ W = \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z$$

En effet, l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\lambda_1 \, , \, \frac{3\lambda_1 - 5}{2} \, , \, -1 \right) \text{ tq } \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$ donc

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ (10, 6) = \lambda_1 (6, 3) + \left(\frac{3\lambda_1 - 5}{2} \right) (-4, -2) + (-1)(0, 1).$$

FIGURE 3.20 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$

Énoncés

1. Soient $\mathbb{C}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T = (6 + \frac{i}{2}, 3 + 3i, \frac{5}{2} + 4i)$, $T_1 = (-i, 2, 3)$, $T_2 = (i, i, 1)$ et $T_3 = (3, i + 1, 2i) \in \mathbb{C}^3$.
   Le triplet T est-il combinaison linéaire des triplets T_1, T_2 et T_3 ?

2. Soient $\mathbb{C}^4$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $v_1 = (4 + i, 4 + 3i, 8 + i, 0)$, $v_2 = (1 + 2i, 3 + i, 9 - i, i)$ et $v_3 = (2, 4 + 3i, 7 + 2i, i) \in \mathbb{C}^4$.
   Le quadruplet v_1 est-il combinaison linéaire des quadruplets v_2 et v_3 ?

FIGURE 3.21 – Exercices supplémentaires proposés dans le quatrième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$

Solutions

1. Soit $\mathbb{C}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le triplet $T = (6 + \frac{i}{2}, 3 + 3i, \frac{5}{2} + 4i) \in \mathbb{C}^3$ **est** combinaison linéaire des triplets $T_1 = (-i, 2, 3)$, $T_2 = (i, i, 1)$ et $T_3 = (3, i + 1, 2i) \in \mathbb{C}^3$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad : \quad T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:\; (6 + \tfrac{i}{2}, 3 + 3i, \tfrac{5}{2} + 4i) = \underbrace{\lambda_1}_{\{=\frac{1}{2}\}}(-i, 2, 3) + \underbrace{\lambda_2}_{\{=1\}}(i, i, 1) + \underbrace{\lambda_3}_{\{=2\}}(3, i + 1, 2i).$$

2. Soit $\mathbb{C}^4$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Le quadruplet $v_1 = (4 + i, 4 + 3i, 8 + i, 0) \in \mathbb{C}^4$ **n'est pas** combinaison linéaire des quadruplets $v_2 = (1 + 2i, 3 + i, 9 - i, i)$ et $v_3 = (2, 4 + 3i, 7 + 2i, i) \in \mathbb{C}^4$ car

$$\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad : \quad v_1 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3$$

$$\Leftrightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \;:\; (4+i, 4+3i, 8+i, 0) = \lambda_1(1+2i, 3+i, 9-i, i) + \lambda_2(2, 4+3i, 7+2i, i).$$

FIGURE 3.22 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le quatrième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$

Énoncés

1. Soit $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré maximal 3 et $Q_1(x) = 2x^3 + \frac{5x^2}{3} - x + 2$, $Q_2(x) = 2x^2 - 2x$ et $Q_3(x) = 3x^3 + x^2 + 3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
Le polynôme $Q_1(x)$ est-il combinaison linéaire des polynômes $Q_2(x)$ et $Q_3(x)$?

2. Soit $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré maximal 4 et $P(x) = x^4 + 3x^3 - x + 2$, $P_1(x) = 3x^4 + 4x^2 + 2x$, $P_2(x) = 2x^2 + x$ et $P_3(x) = 4x^4 + x^3 - x^2 - 1 \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.
Le polynôme $P(x)$ est-il combinaison linéaire des polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

FIGURE 3.23 – Exercices supplémentaires proposés dans le cinquième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de polynômes

Solutions

1. Soit $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le polynôme $Q_1(x) = 2x^3 + \frac{5x^2}{3} - x + 2$ **est** combinaison linéaire des polynômes $Q_2(x) = 2x^2 - 2x$ et $Q_3(x) = 3x^3 + x^2 + 3$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;:\; Q_1(x) = \lambda_1 Q_2(x) + \lambda_2 Q_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;:\; 2x^3 + \frac{5x^2}{3} - x + 2 = \underbrace{\lambda_1}_{\{=\frac{1}{2}\}}(2x^2 - 2x) + \underbrace{\lambda_2}_{\{=\frac{2}{3}\}}(3x^3 + x^2 + 3).$$

2. Soit $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^3 - x + 2$ **n'est pas** combinaison linéaire des polynômes $P_1(x) = 3x^4 + 4x^2 + 2x$, $P_2(x) = 2x^2 + x$ et $P_3(x) = 4x^4 + x^3 - x^2 - 1$ car

$$\nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:\; P(x) = \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:$$

$$x^4 + 3x^3 - x + 2 \;=\; \lambda_1(3x^4 + 4x^2 + 2x) + \lambda_2(2x^2 + x) + \lambda_3(4x^4 + x^3 - x^2 - 1).$$

FIGURE 3.24 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le cinquième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de polynômes

Énoncés

1. Soient $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.
   La matrice M est-elle combinaison linéaire des matrices M_1, M_2 et M_3 ?

2. Soient $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.
   La matrice A est-elle combinaison linéaire des matrices B et C ?

FIGURE 3.25 – Exercices supplémentaires proposés dans le sixième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices

Solutions

1. Soit $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La matrice $M=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ **est** combinaison linéaire des matrices
   $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ : \ M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \ :$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \lambda_{1_{\{=10\}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_{2_{\{=-4\}}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{3_{\{=2\}}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **n'est pas** combinaison linéaire des matrices
   $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car

$$\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ : \ A = \lambda_1 B + \lambda_2 C.$$

FIGURE 3.26 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le sixième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices

Énoncés

1. Soient $\mathcal{F}_{3\times1} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et
   $f, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}_{3\times1} \ : \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) = x + y - z + 1,$
   $f_1(x,y,z) = x + 2 - 4y, \ \ f_2(x,y,z) = 9 + 3z, \ \ f_3(x,y,z) = -2z - 2.$
   L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1, f_2 et f_3 ?

2. Soient $\mathcal{F}_{2\times1} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et
   $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{2\times1} \ : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = 2x - 2y - 24, \ \ f_1(x,y) = -x - 2y, \ \ f_2(x,y) = y + 4.$
   L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1 et f_2 ?

FIGURE 3.27 – Exercices supplémentaires proposés dans le septième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications linéaires (formes linéaires)

Solutions

1. Soient $\mathcal{F}_{3\times 1} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}_{3\times 1}\ :\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ f(x,y,z) = x + y - z + 1$,
$f_1(x,y,z) = x + 2 - 4y,\quad f_2(x,y,z) = 9 + 3z,\quad f_3(x,y,z) = -2z - 2.$

   L'application f **n'est pas** combinaison linéaire des applications f_1, f_2 et f_3 car

$$\nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\ :\ f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

$$\Leftrightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ f(x,y,z) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x+y-z+1 = \lambda_1(x+2-4y) + \lambda_2(9+3z) + \lambda_3(-2z-2).$$

2. Soient $\mathcal{F}_{2\times 1} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{2\times 1}\ :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ f(x,y) = 2x - 2y - 24,\quad f_1(x,y) = -x - 2y,\quad f_2(x,y) = y + 4.$

   L'application f **est** combinaison linéaire des applications f_1 et f_2 car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ :\ f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

$$\text{En effet, } \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ f(x,y) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x,y)$$

$$\Leftrightarrow\quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x - 2y - 24 = \lambda_{1_{\{=-2\}}}(-x-2y) + \lambda_{2_{\{=6\}}}(y+4).$$

FIGURE 3.28 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le septième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications linéaires (formes linéaires)

Énoncés

1. Soient $\mathcal{F}_{4\times 2} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f, f_1, f_2 et $f_3 \in \mathcal{F}_{4\times 2}$ telles que $\forall (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$:
$f(w,x,y,z) = (7w - 6x + y + 2z, -3w + 5x + 3y - 11z)$,
$f_1(w,x,y,z) = (3w + 2y, x - z)$,
$f_2(w,x,y,z) = (y - 2x + 2z - 2w, w + 3y)$,
$f_3(w,x,y,z) = (2x + 3y, 4z - x + 2w)$.

   L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1, f_2 et f_3 ?

2. Soient $\mathcal{F}_{5\times 3} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f, f_1 et $f_2 \in \mathcal{F}_{5\times 3}$ telles que $\forall (t,w,x,y,z) \in \mathbb{R}^5$:
$f(t,w,x,y,z) = (2t - 2w + x + y, 2t + 3w + 6x + 2y - 2z, 6t + w + 3x + 3y)$,
$f_1(t,w,x,y,z) = (2t, 3x + y + z, 3t + w + x)$,
$f_2(t,w,x,y,z) = (x + y - 2t, 3w - 4z, x + 3y - w)$.

   L'application f est-elle combinaison linéaire des applications f_1 et f_2 ?

FIGURE 3.29 – Exercices supplémentaires proposés dans le huitième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications linéaires

Solutions

1. Soient $\mathcal{F}_{4\times 2} = \{f \text{ tq } f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \text{ et f est une appl. lin.}\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f, f_1, f_2 et $f_3 \in \mathcal{F}_{4\times 2}$ telles que $\forall (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$:
$f(w,x,y,z) = (7w - 6x + y + 2z, -3w + 5x + 3y - 11z)$,
$f_1(w,x,y,z) = (3w + 2y, x - z)$,
$f_2(w,x,y,z) = (y - 2x + 2z - 2w, w + 3y)$,
$f_3(w,x,y,z) = (2x + 3y, 4z - x + 2w)$.

L'application f **est** combinaison linéaire des applications f_1, f_2 et f_3 car

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:\; f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3.$$

En effet, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:\; \forall (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \;:\; f(w,x,y,z) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(w,x,y,z)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \;:\; \forall (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : (7w - 6x + y + 2z, -3w + 5x + 3y - 11z) = \ldots$

$\ldots\ \lambda_{1_{\{=3\}}}(3w+2y, x-z) + \lambda_{2_{\{=1\}}}(y-2x+2z-2w, w+3y) + \lambda_{3_{\{=-2\}}}(2x+3y, 4z-x+2w)$.

Figure 3.30 – Solutions des exercices supplémentaires proposés dans le huitième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications linéaires

3.3 Choix de variables didactiques pour les énoncés des illustrations et les exercices supplémentaires des podcasts

Dans les illustrations explicitées dans les podcasts et dans les exercices supplémentaires proposés, nous avons veillé à modifier les variables didactiques raisonnablement et stratégiquement, pour équilibrer les difficultés prises en charge. Ces variables ont été modifiées de manière à garder un contexte sécurisant pour l'étudiant mais à le perturber suffisamment pour qu'il entre en réflexion et fasse des liens. Dans la table en figure 3.31, nous avons repris les changements de cadres, les variables didactiques et leurs valeurs pour chaque podcast. Les lignes jaunes de la table correspondent aux illustrations résolues dans les podcasts et les lignes bleues correspondent aux exercices supplémentaires.

Nous avons décidé d'insérer des contre-exemples à partir du second podcast. En effet, comme cette difficulté est prise en charge dans cette deuxième illustration, nous partons du principe que les étudiants peuvent résoudre un contre-exemple sur base du contenu sensé être visionné (dans l'ordre conseillé). Nous allons énumérer les variables didactiques pour lesquelles une réflexion quant à leur modification a été menée. Vous pouvez lire la description qui suit en observant la table en figure 3.31 en parallèle.

Premièrement, la dimension n ou $n \times k$ de l'espace vectoriel constitue une variable didactique. Dans presque toutes les illustrations explicitées dans les podcasts, nous avons volontairement choisi $n = 3$ afin que les étudiants puissent repérer les différences et les points communs entre les résolutions dans les différents cadres, dans les différents espaces vectoriels, en ayant à l'esprit que n vaut 3 dans l'ensemble des illustrations explicitées dans les podcasts. Ce choix permet de souligner le caractère unificateur de l'algèbre linéaire. Pour les exercices supplémentaires, nous avons fait varier cette dimension. Ce critère didactique n'est parfois pas pris en compte et les dimensions dans lesquelles est illustrée une notion peuvent mettre en évidence des choses différentes, compliquer ou simplifier la compréhension, et même dissimuler des particularités.

Deuxièmement, le champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel ne change que dans le podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^3$. Comme nous l'avons expliqué, considérer des espaces vectoriels construits sur un autre champ scalaire compliquerait la résolution et ne serait pas bénéfique pour les objectifs que nous nous sommes fixés. Le seul point d'attention que nous visons, en modifiant cette variable, est de mettre en évidence que changer le champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel peut influencer l'existence d'une solution. Cela est pris en charge dans le quatrième podcast.

Troisièmement, p, le nombre de vecteurs dont on veut savoir si le vecteur initial est combinaison linéaire, fait l'objet d'une autre variable didactique. Nous avons fait varier p afin de familiariser les étudiants avec différentes "versions" de la définition de combinaison linéaire. Modifier cette variable permet l'identification des caractères unificateur et généralisateur de la notion de combinaison linéaire ainsi que la confrontation à l'obstacle du formalisme. En effet, selon le nombre de vecteurs à partir duquel on doit vérifier que le vecteur de départ est combinaison linéaire, la valeur de p change et, par conséquent, la définition également.

Les notations utilisées pour le vecteur initial et les vecteurs de la combinaison linéaire sont également des variables didactiques que nous avons veillé à modifier. Trois types de notations se dégagent. Ces types sont repris avec les symboles correspondants dans la table en figure 3.31. Tout d'abord, nous symbolisons, par (*), le fait que la notation soit du même type que dans les illustrations explicitées dans les podcasts, c'est-à-dire comme u, v_1, v_2, ..., v_p (et aussi avec toutes autres lettres que u et v). Comme nous l'avons expliqué dans la description de la structure générale des podcasts, ce type de notations permet d'associer directement et facilement les scalaires λ_i aux vecteurs de mêmes indices pour essayer de construire la combinaison linéaire. Ensuite, nous symboliserons, par (**), les notations qui attribuent l'indice 1 au vecteur initial et les indices 2, 3, ..., p aux autres vecteurs ; ces notations impliquent une association des scalaires et vecteurs moins évidente. Cette variable didactique est activée avec modération selon les autres difficultés prises en charge. Enfin, le dernier type de notations, symbolisé par (***), note les vecteurs par des lettres successives comme A, B, C ou W, X, Y, Z. Des changements dans les notations peuvent entrainer les étudiants à l'utilisation du formalisme et à travailler avec des praxéologies complètes, par associations entre les parties de l'énoncé et de la définition. Dans les deux derniers podcasts, comme la difficulté de considérer des fonctions à leur statut d'objets est prise en charge, et que nous considérons cette difficulté importante, nous n'avons pas fait varier les notations utilisées dans les exercices supplémentaires pour ne pas inclure inutilement une difficulté traitée dans les autres podcasts. En outre, dans ces deux derniers podcasts, la difficulté impliquée par le type de fonctions utilisées évolue. Nous considérons d'abord des formes linéaires puis des applications dont l'espace d'arrivée n'est pas de dimension 1.

En plus des changements de cadres, de l'ordre conseillé et des difficultés reprises en figure 3.12, des changements de variables didactiques repris dans la table en figure 3.31, et de tous les apports que nous venons citer, nous avons également réalisé d'autres choix à caractère pédagogique quant aux diapositives et à leur contenu. Nous reprenons ces choix dans la section suivante.

Podcast n° …	Cadre	Espace vectoriel	Dimension de l'espace vectoriel	Champ de scalaires	p	Exemple (e) ou contre-exemple (ce)?	Notations (symboles (*), (**) et (***) légendés dans le point 3.4 du mémoire).
1	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=3	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=2	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=3	$\mathbb{R}$	2	(e)	(**)
2	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=3	$\mathbb{R}$	3	(ce)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=3	$\mathbb{R}$	3	(ce)	(***)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=4	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
3	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=4	$\mathbb{R}$	4	(e)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=3	$\mathbb{R}$	3	(e)	(**)
	paradigmatique	$\mathbb{R}^n$	n=2	$\mathbb{R}$	3	(e)	(***)
4	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	n=3	$\mathbb{C}$	2	(e)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	n=6	$\mathbb{R}$	2	(ce)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	n=6	$\mathbb{R}$	3	(e)	(*)
	paradigmatique	$\mathbb{C}^n$	n=4	$\mathbb{C}$	2	(ce)	(**)
5	polynomial	$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$	n+1=4	$\mathbb{R}$	3	(e)	(*)
	polynomial	$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$	n+1=4	$\mathbb{R}$	2	(e)	(**)
	polynomial	$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$	n+1=5	$\mathbb{R}$	3	(ce)	(*)
6	matriciel	$\mathscr{M}_{n\times n}$	n=3	$\mathbb{R}$	3	(ce)	(*)
	matriciel	$\mathscr{M}_{n\times n}$	n=2	$\mathbb{R}$	3	(e)	(*)
	matriciel	$\mathscr{M}_{n\times n}$	n=3	$\mathbb{R}$	2	(ce)	(***)
7	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times 1}$	n=3	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times 1}$	n=3	$\mathbb{R}$	3	(ce)	(*)
	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times 1}$	n=2	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
8	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times k}$	n=3 k=2	$\mathbb{R}$	2	(e)	(*)
	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times k}$	n=4 k=2	R	3	(e)	(*)
	fonctionnel	$\mathscr{F}_{n\times k}$	n=5 k=3	R	2	(ce)	(*)

FIGURE 3.31 – Table des variables didactiques et leurs valeurs pour les différentes tâches proposées dans les podcasts (jaune : illustrations résolues dans les podcasts ; bleu : exercices supplémentaires ; (*)(**)(***) légendés dans le point 3.4 du mémoire)

3.4 Quelques considérations pédagogiques supplémentaires

Pour lire et comprendre les considérations reprises dans cette section, il est conseillé, encore une fois, de consulter les diapositives et leur discours oral associé en annexe. La qualité des diapositives utilisées dans nos podcasts ainsi que la résolution des enregistrements constituent des critères auxquels nous accorderons de l'importance. En effet, la qualité du son et de l'image sont, selon Roland [33], deux critères essentiels pour susciter l'intérêt des étudiants.

Dans le même sens, l'apparence des diapositives nous a semblé très importante. Des codes couleurs ont été utilisés afin de faciliter une visualisation rapide des points d'attention du discours oral. Premièrement, comme vous avez pu le constater, les blocs apparaissant sur les diapositives sont de couleurs différentes selon leur contenu. Les blocs théoriques sont rouges, les blocs d'énoncés et de conclusion de fin d'illustration sont bleus et les blocs contenant la résolution de l'illustration sont verts. De la même manière, les blocs d'énoncés des exercices supplémentaires sont bleus et les blocs contenant leurs solutions sont verts. Deuxièmement, ainsi que l'illustre la figure 3.32, lorsque le développement de l'égalité de la définition nous donne une égalité entre deux objets de même nature (deux triplets, deux matrices, deux polynômes, ...), des couleurs sont utilisées pour identifier directement les éléments de l'égalité à associer pour obtenir un système d'équations linéaires à résoudre.

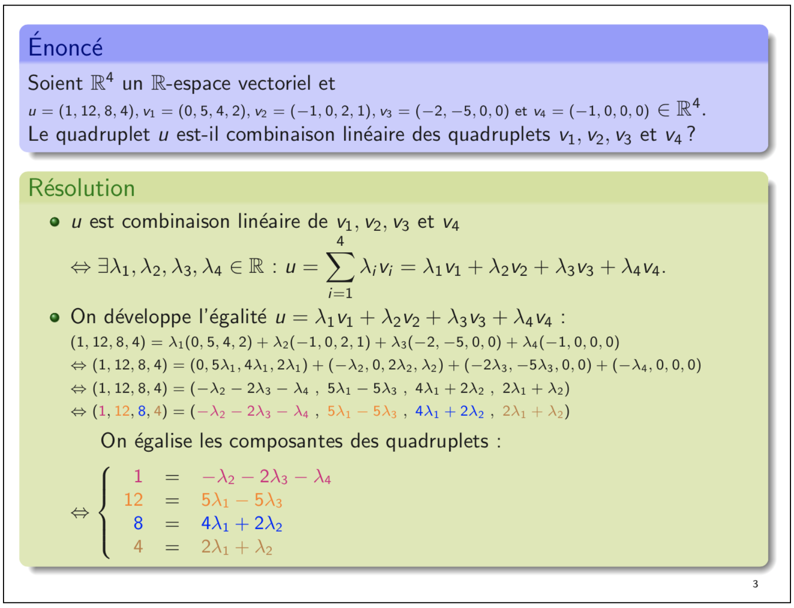


FIGURE 3.32 – Exemple de code couleur utilisé pour la mise en système d'équations linéaires (diapositive tirée du troisième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$)

Troisièmement, dans la conclusion de l'illustration du podcast, des couleurs sont utilisées pour associer les scalaires et les vecteurs à leurs expressions. Pour rappel, la diapositive de conclusion du cinquième podcast est donné comme exemple en figure 3.14. En outre, pour le podcast dans le cadre $\mathbb{C}^n$, comme le but est de mettre en évidence que les scalaires λ_i sont à trouver dans le champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, et que l'existence d'une solution dépend toujours du champ scalaire considéré, nous avons mis en évidence $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ grâce à une couleur différente. Vous pouvez l'observer en figures 3.6 et 3.7. Tous ces codes couleurs ont été réfléchis de manière à ce que le discours oral soit toujours utile à la compréhension. Par exemple, nous n'avons pas fait d'association de couleurs entre les éléments de l'énoncé et ceux de la définition car ces informations sont expliquées oralement. Des couleurs ont été utilisées uniquement si elles apportaient un complément d'information ou une aide à la compréhension de ce qui est dit à l'oral. Nous n'en avons pas utilisé si des explications étaient données dans une vidéo précédente ou si la difficulté n'était pas celle à cibler, en référence au tableau en figure 3.12.

En plus des couleurs, nous avons utilisé le curseur en parallèle du discours oral pour mettre certains éléments de calculs en évidence. Nous avons veillé à ne pas trop l'utiliser afin de ne pas perturber le public avec trop de mouvements à l'écran. À cette fin, nous nous sommes assurées que les diapositives soient assez complètes, concises et claires, dans un juste milieu. De cette manière, suffisamment d'informations sont disponibles à l'écrit pour fluidifier la compréhension, mais nous les avons limitées afin de ne pas perdre l'utilité et la plus-value du discours oral.

Nous avons fait le choix d'afficher les informations contenues sur les diapositives, étape par étape, au fur et à mesure du discours oral. Cela permet de gagner l'attention des étudiants uniquement sur ce qui est en train d'être communiqué, et de ne pas les "perdre" en soutenant visuellement l'évolution dans la résolution et le discours oral. De cette manière, nous nous assurons qu'ils associent les interventions orales et les étapes de résolution de manière adéquate. Afficher tout le contenu de chaque diapositive en une fois inciterait le public à toujours chercher où le narrateur en est et à quelle information écrite correspond un élément du discours oral.

La rapidité à laquelle sont expliquées les notions, le temps consacré à chacune d'entre elles et la longueur du podcast sont également pris en compte. En effet, un étudiant n'est pas capable de se concentrer trop longtemps sur un podcast qui lui est proposé. Le but est d'une part d'être concis dans les explications mais également d'être assez précis et clair pour que les notions soient comprises en une durée optimale. Pour ce faire, nous avons également veillé à ce que le discours oral répète le moins possible les informations écrites contenues sur les diapositives. Comme nous l'avons annoncé dans le tableau en figure 3.12, nos podcasts sont d'une durée allant de 3 minutes 10 secondes à 5 minutes 2 secondes, sauf le podcast concernant l'espace $\mathbb{C}^n$, effectuant une double illustration d'un énoncé qui considère un espace vectoriel construit sur deux champs scalaires différents, d'une durée de 6 minutes 44 secondes. En effet, comme l'explique la Cellule Tice de l'Unamur dans leur Kit de survie pédagogique [10], la durée conseillée pour des capsules vidéos est de 2 à 5 minutes afin de garder l'attention des apprenants. En dehors de la concision et de la complétude, la clarté dans les propos des podcasts comme le rappel de l'énoncé, l'annonce et l'explication de la marche à suivre, etc. sont très importants pour conserver une compréhension optimale du contenu par le public, comme le relèvent De Vleeschouwer et Remiche [17].

Sur les conseils d'une des enseignantes d'algèbre linéaire des étudiants ayant testé le dispositif, nous avons numéroté les diapositives. En effet, cela permet au public de se repérer et de pouvoir aisément prendre des notes ou revenir à une information d'une diapositive précise. Cela n'est pas indispensable mais une autre numérotation, correspondant à l'affichage des informations grisées et allant jusqu'à des nombres relativement élevés, s'affiche à l'écran. Par conséquent, numéroter les diapositives permet de ne pas démotiver le public dans son visionnage. De plus, dans l'élaboration de nos diapositives, cette numérotation a facilité la communication des recommandations et des changements à réaliser.

3.5 Prise en charge de l'obstacle du formalisme

Comme nous l'avons expliqué, l'obstacle du formalisme n'est pas totalement pris en charge dans notre projet. En effet, comme nous n'avons aucun contrôle sur le travail des étudiants ni sur leurs écrits, la répartition des informations à transmettre via le discours oral et le contenu des diapositives est le seul moyen que nous avions pour tenter de contrer cet obstacle. Nous avons déjà énoncé plusieurs considérations à ce sujet dans ce qui précède mais nous allons étendre cette réflexion. Certains exemples de diapositives seront donnés mais, pour rappel, les discours oraux associés aux diapositives des podcasts sont présentés en annexe.

Au niveau didactique, le discours oral correspond à la technologie de la praxéologie. Par exemple, dans l'introduction, nous varions les manières d'associer les éléments de la définition et ceux de l'énoncé. Dans certains podcasts, nous explicitons en détails que la raison pour laquelle nous devons trouver p scalaires est que nous tentons de construire une combinaison linéaire sur base de p vecteurs. Dans d'autres, nous associons de manière très concise ces éléments en annonçant que "*E sera égal à ..., $\mathbb{K}$ sera égal à ... et p sera égal à ...*". Ce choix met en évidence deux façons d'exprimer l'association entre l'énoncé et la définition.

Pour rappel, le quatrième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$ présente un exemple et un contre-exemple dans $\mathbb{C}^3$, respectivement construit sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ dans un second temps. Tout au long du discours oral, nous varions les appellations des champs scalaires entre "*C et R*" et "*les complexes et les réels*". Dans la deuxième illustration, le début de la résolution jusqu'à l'obtention du système d'équation n'est pas répété car il est identique à la première illustration. Dès le départ, nous annonçons oralement que la seule différence entre les deux énoncés est le champ scalaire sur lequel est construit $\mathbb{C}^3$. De plus, nous explicitons deux méthodes pour résoudre le système d'équations linéaires de cette deuxième question, visibles en figures 3.33 et 3.34. La première consiste à repérer directement des impossibilités dans les équations et la deuxième consiste à transformer le système complexe en un système réel, par l'association des parties réelles et imaginaires des membres des équations. Dans le discours oral associé à cette méthode, nous avons veillé à préciser que "1" est en fait le nombre complexe "$1 + 0 * i$", soulignant ainsi qu'un nombre complexe peut n'avoir qu'une partie réelle ou qu'une partie imaginaire. Nous explicitons aussi oralement le dédoublement de la première équation en deux équations réelles et celui-ci est toujours réalisé dans le même ordre (parties réelles puis parties imaginaires pour chaque équation).

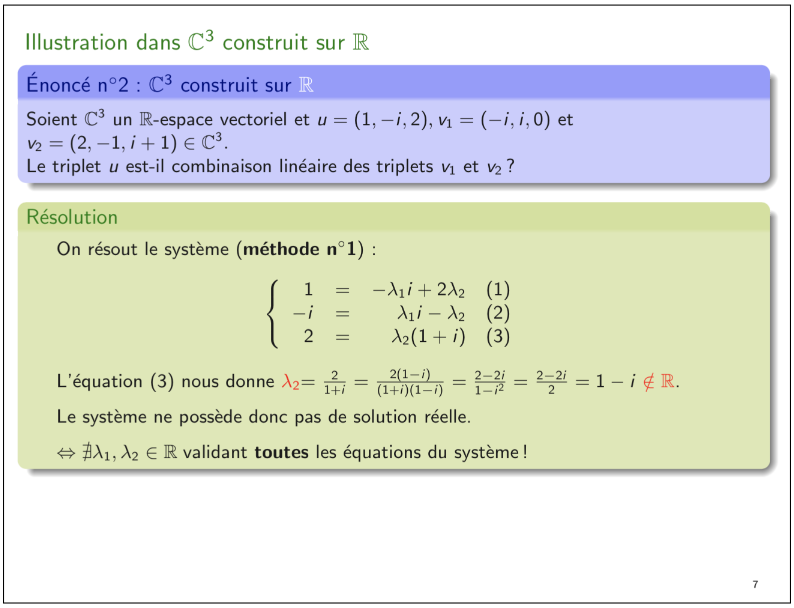


FIGURE 3.33 – Deuxième méthode de résolution du système d'équations linéaires du deuxième énoncé du quatrième podcast, illustrant la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ construit sur $\mathbb{R}$

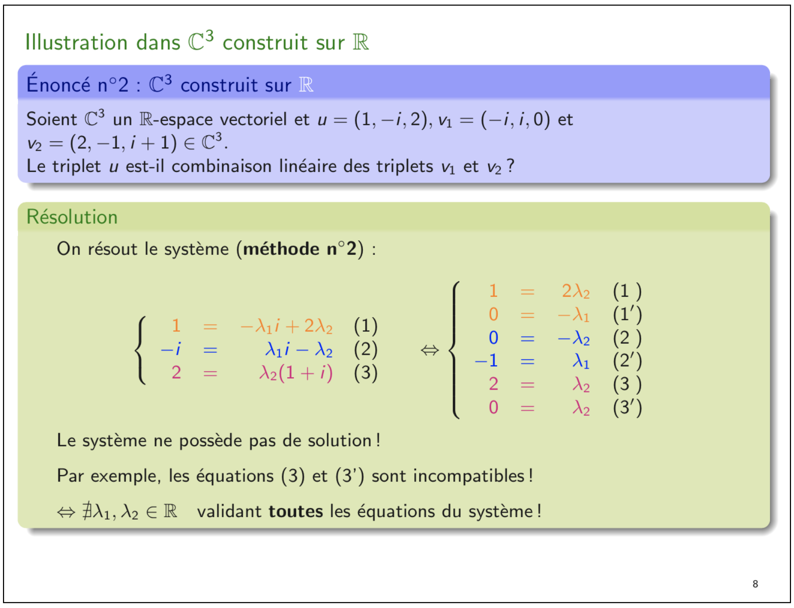


FIGURE 3.34 – Deuxième méthode de résolution du système d'équations linéaires du deuxième énoncé du quatrième podcast, illustrant la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ construit sur $\mathbb{R}$

De plus, régulièrement, certaines informations écrites mêlent français et langage mathématique quand cela apporte une plus-value dans la transmission de notre message. Nous avons fait ce choix pour que ce message soit plus lisible, moins chargé visuellement, directement parlant et compréhensible. Toutes ces spécificités sont des détails réfléchis pour assurer la compréhension du public et prendre l'obstacle du formalisme en charge, dans la mesure du possible.

Dans chaque podcast, nous travaillons avec des praxéologies complètes. Nous désignons les énoncés, définitions et propriétés qui justifient les étapes de résolution par des appellations théoriques, par des technologies. Les lois associées à l'espace vectoriel considéré sont notamment explicitées dans plusieurs des podcasts. De plus, comme expliqué précédemment et illustré en figure 3.14, la définition de combinaison linéaire est reprise sur la diapositive de conclusion du podcast, au-dessus du bloc de conclusion-solution de l'illustration. À l'oral, cette définition n'est pas rappelée. Ce choix de l'afficher sur la diapositive vise à ce que les étudiants fassent le parallèle visuel avec la conclusion. Lorsque la théorie est utilisée et mobilisée dans une tâche, les exercices semblent similaires, la structure générale des résolutions peut être identifiée. En d'autres termes, lorsqu'un apprenant fait face à des praxéologies complètes, il identifie plus facilement les caractères unificateur et généralisateur de la notion illustrée dans ces différents exercices.

La résolution des systèmes d'équations linéaires a été longuement réfléchie. Un exemple de cette étape des illustrations est donné en figure 3.35. Nous avons sélectionné la méthode de substitution mais il nous semblait important de communiquer que d'autres méthodes peuvent être utilisées et sont peut-être plus efficaces. À cette fin, l'information écrite "On résout le système, **par exemple**, par substitution" précède la résolution. Nous préférions prendre en charge la difficulté induite par différents types d'interprétations des systèmes (une seule solution, pas de solution ou une infinité de solutions). Nous avons également choisi de n'écrire qu'une succession de systèmes. Le discours oral contient toutes les explications théoriques des équivalences entre ces systèmes. De cette façon, nous pouvons mettre l'accent sur ce qui nous semble le plus important. Par exemple, nous insistons sur le fait que les inconnues λ_i du système sont les mêmes que celles de l'énoncé de départ. De plus, nous insistons sur le fait qu'une solution existe car "***toutes*** *les équations du système sont vérifiées* ***en même temps*** *par les inconnues* λ_i". Pour ce qui est des solutions, elles n'ont pas été données sous la forme d'un système. Nous voulions que le public distingue bien les équivalences entre systèmes et le système qui contiendrait les solutions λ_i obtenues. Nous préférions les exprimer sur une même ligne.

Pour ce qui est de l'illustration dans un espace vectoriel de matrices, lors de la mise en système d'équations linéaires, des équations du système sont redondantes. En effet, en les omettant, il est possible d'obtenir un système à six équations plutôt que neuf. Comme le montre la figure 3.36, les équations (2), (3), (8) et (9) donnent la même information et pourraient être regroupées en une équation, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Nous avons choisi de laisser l'ensemble des équations obtenues en égalisant les éléments des deux matrices. Cette association est facilement visualisée grâce au code couleur utilisé, assure la compréhension du public dans l'obtention du système d'équations, prend l'obstacle du formalisme en charge et maximise les chances d'identifier le caractère unificateur de la notion. Le fait que l'illustration soit un contre-exemple accentue la pertinence de conserver toutes les équations.

Dans les illustrations des deux derniers podcasts dans des espaces vectoriels d'applications linéaires, nous nous sommes assurées de conserver le "$\forall(x, y, z)$..." tout au long de la résolution pour que le public garde toujours bien à l'esprit que nous devons prouver l'égalité pour toutes valeurs des variables des applications linéaires considérées. À la fin des résolutions de ces deux derniers podcasts, nous veillons également à rappeler les trois conditions de l'égalité entre deux applications.

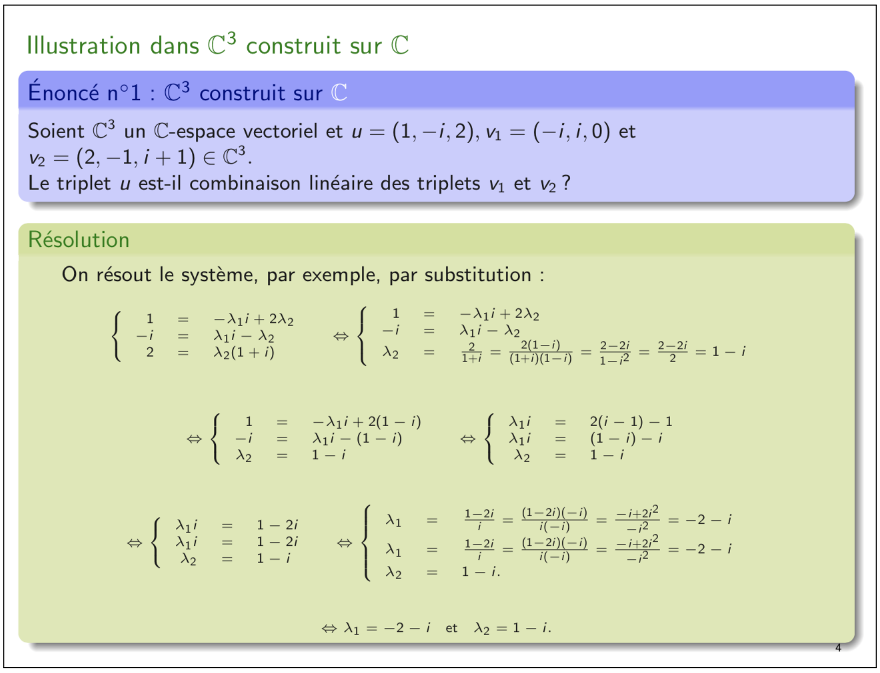


FIGURE 3.35 – Résolution par substitution du système d'équations linéaires du premier énoncé du quatrième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{C}$

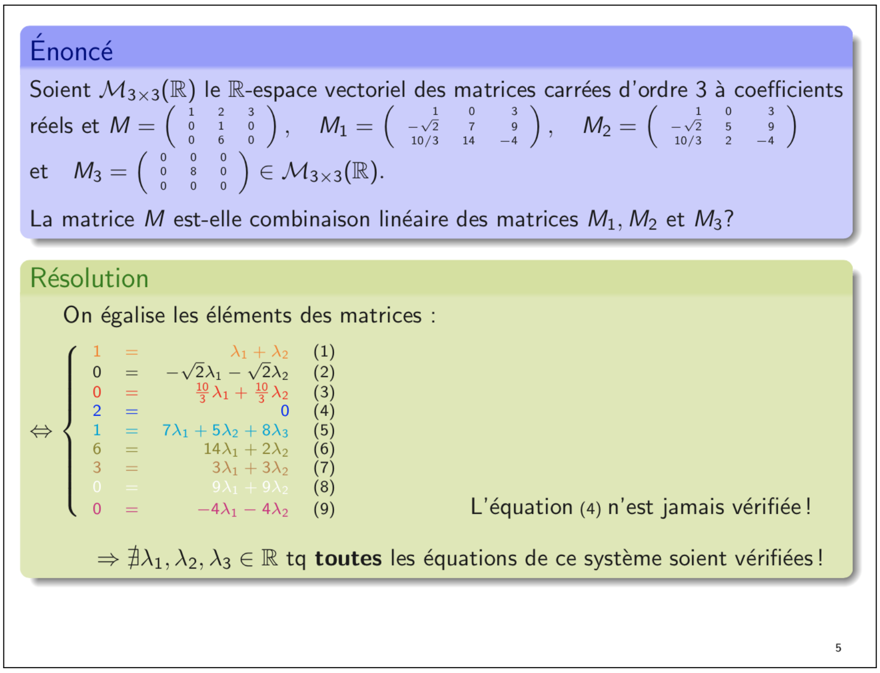


FIGURE 3.36 – Résolution du système d'équations linéaires du sixième podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels

Chapitre 4

Mise en oeuvre du dispositif

Afin de tester notre dispositif, les enseignantes des cours d'algèbre linéaire en première année en Informatique (enseignante I), Sciences Mathématiques et Sciences Physiques (enseignante MP) de l'Université de Namur nous ont aimablement permis de solliciter leurs étudiants. Le tableau de synthèse en figure 4.1 que nous allons décrire contient les principales informations à savoir sur les groupes d'étudiants ayant testé le dispositif. Tous les codes des cours donnés dans cette section sont les codes donnant accès à ces cours via la plateforme Webcampus de l'Université de Namur. Dans ce tableau, nous avons repris le nombre officiel d'inscrits dans chacun des groupes. Il est important de préciser que ces chiffres incluent également les étudiants ayant changé d'orientation ou ne fréquentant pas le cours régulièrement. Toutes les informations à transmettre sur le dispositif ont été données par les enseignantes I et MP.

Tous les étudiants à qui nous avons proposé nos podcasts n'ont pas tous reçu le même enseignement. Au premier quadrimestre (Q1), les étudiants inscrits en Informatique suivent le cours INFOB125 - Fondements des mathématiques pour l'informatique [31], visant la maitrise élémentaire du langage mathématique pour la compréhension de contenus théoriques et de modélisations et démonstrations formelles comme, notamment, la théorie des ensembles et relations. Ensuite, au second quadrimestre (Q2), ils suivent le cours INFOB123 - Algèbre linéaire (1$^{\text{ère}}$ partie) [35] donné par l'enseignante I. Les étudiants en Sciences Mathématiques ou Sciences Physiques suivent deux cours d'algèbre en première année : SMATB107 - Algèbre et géométrie analytique [28] au premier quadrimestre et SMATB101 - Algèbre linéaire I [29] au second, enseignés par l'enseignante MP. Le cursus des physiciens ne contient pas de cours introduisant le langage mathématique et le formalisme. Au premier quadrimestre, les mathématiciens, quant à eux, assistent au cours SMATB112 - Initiation à la démarche mathématique [30]. Celui-ci les familiarise avec le cadre logique de référence, le langage mathématique, ses formalismes spécifiques (sémantique et syntaxe) et l'élaboration de raisonnements mathématiques abstraits, opérés avec la bonne méthode, y compris les démarches classiques de démonstration. L'introduction au secteur des espaces vectoriels et l'enseignement de la notion de combinaison linéaire sont pris en charge dans les cours INFOB123 pour les informaticiens et SMATB107 pour les mathématiciens et les physiciens. Nous avons également inséré dans le tableau de synthèse, en figure 4.1, les dates clés de la proposition du dispositif aux groupes d'étudiants. Les premiers podcasts ont été proposés le 17 mars 2021 aux informaticiens et le 1er avril 2021 aux mathématiciens et physiciens.

Afin d'analyser l'impact de nos créations et de récolter des avis les concernant, nous avons réalisé trois questionnaires d'enquête Google Form. Le 19 avril 2021, nous en avons proposé un aux étudiants en Informatique et un aux étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques. Au moment de la mise en oeuvre du dispositif, ce deuxième groupe test n'était plus débutant en algèbre linéaire, ayant bénéficié de l'enseignement concerné au premier quadrimestre. En raison de ces contraintes institutionnelles et des contraintes sanitaires dûes au Covid-19 (enseignement à distance en visioconférence), les réponses à ces enquêtes n'ont pas été assez nombreuses que pour les analyser quantitativement. Par conséquent, en vue d'obtenir plus d'informations à propos des séances d'exercices d'algèbre linéaire et de pouvoir récolter de réels avis à propos de notre projet, nous avons réalisé une enquête auprès des assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre des groupes tests. Dans ce dernier questionnaire, des questions supplémentaires visent à prendre connaissance des représentations que se font les acteurs des séances d'exercices et travaux de groupes d'un cours d'algèbre linéaire. Ces questions ont également pour but d'estimer la place accordée à la combinaison linéaire durant ces séances.

Dans ce chapitre, nous donnerons tout d'abord un bref aperçu des syllabi des cours d'algèbre suivis par les étudiants à qui ont été proposés nos podcasts et prenant en charge l'enseignement de la notion de combinaison linéaire. Puis, nous préciserons l'organisation de la mise en oeuvre du dispositif. Ensuite, les questionnaires d'enquêtes envoyés aux étudiants seront décrits et nous analyserons les réponses de manière qualitative, étant donné qu'elles étaient peu nombreuses. Nous poursuivrons en décrivant le questionnaire envoyé aux assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre des groupes tests et analyserons leurs retours. Un dernier chapitre présentera alors les conclusions, les perspectives et les pistes d'amélioration du dispositif.

	Enseignante I Étudiants en Informatique	Enseignante MP Étudiants en Sciences Mathématiques et Sciences Physiques
Inscrits officiels aux cours d'algèbre linéaire en novembre 2020 *NB: Ces chiffres incluent les étudiants qui ne fréquentent pas régulièrement le cours et ceux ayant changé d'orientation.*	125 étudiants	37 étudiants en Sciences Mathématiques 37 étudiants en Sciences Physiques
Cours de première année prenant en charge l'obstacle du formalisme *NB: Ces cours ne sont pas enseignés par les enseignantes I et MP*	INFOB125 - Q1 - Fondements mathématiques pour l'informatique (1ère partie)	Uniquement pour les étudiants en Sciences Mathématiques: SMATB112 - Q1 - Initiation à la démarche mathématique
Cours d'algèbre du cursus de première année *NB: Les cours en italique prennent en charge l'enseignement de la notion de combinaison linéaire.*	*INFOB123 - Q2 - Algèbre linéaire (1ère partie)* *(30h cours théorique - 22.5h séances d'exercices)*	*SMATB107 - Q1 - Algèbre et géométrie analytique* *(30h cours théorique - 32.5h séances d'exercices)* SMATB101 - Q2 - Algèbre linéaire I (30h cours théorique - 32.5h séances d'exercices)
Dates clés de la mise en oeuvre du dispositif	• 17 mars 2021: - Proposition des cinq premiers podcasts sur le cours *INFOB123* de la plateforme Webcampus - Annonce orale de l'enseignante I lors de son cours théorique (les trois podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$, le podcast l'illustrant dans $\mathbb{C}^n$ et le podcast l'illustrant dans des espaces de polynômes) • 19 avril 2021: - Envoi de l'enquête aux étudiants via une annonce sur le cours *INFOB123* de la plateforme Webcampus - Annonce par mail - Annonce orale de l'enseignante I lors de son cours théorique • Ultérieurement: - Proposition des trois derniers podcasts le cours *INFOB123* de la plateforme Webcampus (le podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices et les deux podcasts l'illustrant dans des espaces d'applications linéaires)	• 01 avril 2021: - Proposition de tous les podcasts sur les cours *SMATB107* et SMATB101 la plateforme Webcampus - Annonce orale de l'enseignante MP lors de son cours théorique - Proposition des podcasts sur le cours SCMATT01-Ateliers de mathématiques de la plateforme Webcampus • 19 avril 2021: - Envoi de l'enquête aux étudiants par une annonce sur les cours *SMATB107*, SMATB101 et SCMAT01 de la plateforme Webcampus - Annonce par mail - Annonce orale de l'enseignante MP lors de son cours théorique

(Les codes utilisés sont les codes des cours en ligne accessibles uniquement via la plateforme Webcampus de l'Université de Namur ; Q1=premier quadrimestre ; Q2= second quadrimestre)

FIGURE 4.1 – Tableau de synthèse présentant les groupes ayant testé le dispositif

4.1 Public test et organisation

Dans cette section, nous présenterons brièvement les syllabi du public test, et, en particulier, ce qui englobe l'enseignement de la notion de combinaison linéaire. L'organisation de la mise en oeuvre de notre dispositif auprès de ces groupes sera également précisée.

4.1.1 Étudiants en Informatique ayant testé le dispositif

Le cours d'algèbre pour les informaticiens qui prend en charge l'enseignement de la notion de combinaison linéaire est le cours INFOB123 - Algèbre linéaire ($1^{\text{ère}}$ partie), dont la table des matières du syllabus de théorie est donnée en figure 4.3. Il contient quatre chapitres [35] :

1. *Les structures algébriques*
   Ce chapitre introduit de nombreuses notions fondatrices comme la notion d'ensembles et les relations existantes entre eux, la notion d'application qui débouche sur les concepts de bijection, d'homomorphisme et d'isomorphisme. Ensuite, la définition des lois de composition, de groupe, d'anneau et de champ sont données et, en particulier, le champ des nombres complexes est enseigné en détails. Ce chapitre occupe une part importante du cours. En effet, assimiler ces notions est primordial pour la compréhension de nombreux concepts ultérieurs du cours. Par exemple, les notions de lois associées, d'application bijective ou de champ sont essentielles à l'apprentissage des concepts d'espace vectoriel ou de base et de changements de coordonnées.

2. *Les espaces vectoriels*
   Ce chapitre est décomposé en six parties : la définition d'un espace vectoriel et de ses propriétés élémentaires, les sous-espaces vectoriels, les bases et la notion de dimension, le lien entre les notions de sous-espace vectoriel et de dimension, les espaces de coordonnées et le concept de champ scalaire. La notion de combinaison linéaire est introduite dans ce chapitre dans la partie concernant les bases et la dimension. Sa définition, visible en figure 4.2, est donnée en premier, avant celles de la notion de partie génératrice puis celles de partie libre ou liée, définies à partir de celle de combinaison linéaire. Outre son utilisation dans d'autres définitions qui suivent, la définition de combinaison linéaire intervient dans de nombreuses démonstrations de théorèmes du chapitre sur les espaces vectoriels.

Définition 2.5 *Soit E, un espace vectoriel sur K. Une combinaison linéaire de m vecteurs $V_1,\ V_2,\ \ldots,$ V_m de E est un vecteur $V \in E$ défini par :*

$$V = k_1\, V_1 + \cdots + k_m\, V_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\, V_i,$$

où $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$ sont des scalaires $\in K$.

FIGURE 4.2 – Définition de combinaison linéaire provenant du syllabus de théorie du cours INFOB123 - Algèbre ($1^{\text{ère}}$ partie) suivi par les étudiants en Informatique ayant testé le dispositif [35]

3. *Les applications linéaires*
   Ce chapitre prend en charge l'enseignement des notions d'application linéaire, de noyau et d'image, mais également des opérations sur les applications linéaires et des applications bijectives.

4. *Les matrices*
   Ce chapitre est composé de cinq parties : la représentation matricielle d'une application

linéaire, les généralités sur les matrices, les opérations matricielles, les notions de rang et de matrices inverses, et enfin, les changements de bases.

Les combinaisons linéaires sont également réinvesties dans ces deux derniers chapitres, notamment dans des démonstrations de théorèmes concernant les propriétés des applications linéaires et dans la représentation matricielle d'une application linéaire.

Table des matières

1 Structures algébriques **4**
- 1.1 Ensembles 4
- 1.2 Applications 5
- 1.3 Lois de composition 8
  - 1.3.1 Associativité 9
  - 1.3.2 Commutativité 10
  - 1.3.3 Elément neutre 11
  - 1.3.4 Elément symétrisable – élément symétrique 12
  - 1.3.5 Elément simplifiable 13
- 1.4 Homomorphisme et isomorphisme de $(E, \top)$ dans $(E', \top')$ 14
- 1.5 Groupe 15
- 1.6 Anneau 17
- 1.7 Corps – Champ 22
- 1.8 Le champ des nombres complexes 24

2 Espaces vectoriels **31**
- 2.1 Définition et propriétés élémentaires 31
- 2.2 Sous-espaces vectoriels 34
- 2.3 Base – Dimension 38
  - 2.3.1 Partie génératrice 38
  - 2.3.2 Partie libre – Partie liée 39
  - 2.3.3 Base – Dimension 42
- 2.4 Théorèmes relatifs aux notions de base et de dimension 45
- 2.5 Dimension et sous-espace vectoriel 47
- 2.6 L'espace des coordonnées K^n 50

3 Applications linéaires **53**
- 3.1 Définition et propriétés élémentaires 53
- 3.2 Image et noyau 56
- 3.3 Opérations sur les applications linéaires 60
- 3.4 Application linéaire bijective 64

4 Matrices **67**
- 4.1 Représentation matricielle d'une application linéaire 67
- 4.2 Généralités sur les matrices 69
- 4.3 Opérations matricielles 72
  - 4.3.1 L'addition matricielle et la multiplication scalaire 72
  - 4.3.2 La multiplication matricielle 75
- 4.4 Rang – Matrice inverse 79
- 4.5 Changement de bases – Matrices équivalentes et semblables 83

FIGURE 4.3 – Table des matières du syllabus théorique du cours INFOB123 - Algèbre linéaire ($1^{\text{ère}}$ partie) suivi par les étudiants en Informatique ayant testé le dispositif [35]

Pour les séances d'exercices des étudiants en Informatique [25], la place accordée à la notion de combinaison linéaire est similaire à celle accordée dans le cours théorique, c'est-à-dire qu'elle est plutôt vue comme un outil au service du reste du cours. Les séances d'exercices concernant le second chapitre sur les espaces vectoriels suivent en général la progression des cours théoriques. La définition de combinaison linéaire, quelque peu différente de celle du cours théorique, est reprise dans les rappels théoriques du chapitre et est visible en figure 4.4. Après deux exercices sur les espaces vectoriels et un exercice sur les sous-espaces vectoriels, trois exercices sur les combinaisons linéaires sont proposés aux étudiants. Les voici en figure 4.5. Le troisième exercice concerne la dépendance linéaire, fortement liée à la notion de combinaison linéaire mais est classé dans cette section du syllabus d'exercices [25]. Par la suite, les étudiants sont confrontés à des exercices sur les parties libres et génératrices puis sur les bases.

Combinaison linéaire

$v \in E$ est combinaison linéaire de m vecteurs $v_1, v_2 \; \cdots, v_m$ de E :

$$v = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \qquad \text{où } k_1, k_2, \cdots, k_m \in K$$

FIGURE 4.4 – Définition de combinaison linéaire provenant du syllabus d'exercices du cours INFOB123 - Algèbre linéaire ($1^{\text{ère}}$ partie) suivi par les étudiants en Informatique ayant testé le dispositif [25]

2.2.3 Combinaisons linéaires

Dans la suite des exercices et sauf mention explicite du contraire, un n-uplet est considéré comme un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur le champ $\mathbb{R}$.

2.4. Écrire si possible le triplet $(1, -2, 5)$ comme une *combinaison linéaire* des trois triplets :

$$(1, 1, 1), \qquad (0, 1, 1), \qquad (0, 0, 1).$$

2.5. Peut-on écrire le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ comme une *combinaison linéaire* des trois polynômes suivants :

$$1, \qquad 1 - x, \qquad (1 - x)^2.$$

2.6. Calculer toutes les valeurs de α et de β pour que les quadruplets suivants soient *linéairement indépendants* :

$$(1, 2, \alpha, 1), \qquad (\alpha, 1, 2, 3), \qquad (0, 1, \beta, 0).$$

FIGURE 4.5 – Exercices sur les combinaisons linéaires tirés du syllabus d'exercices du cours INFOB123 - Algèbre linéaire ($1^{\text{ère}}$ partie) suivi par les étudiants en Informatique ayant testé le dispositif [25]

L'enseignante I nous a expliqué la philosophie de ce cours. Pour illustrer les notions qu'elle enseigne, les exemples choisis sont des notions vues en secondaire ou des concepts déjà définis au cours d'algèbre linéaire. Par exemple, les notions théoriques ne sont illustrées dans des espaces de matrices qu'en fin de quadrimestre, dans le dernier chapitre sur les matrices, c'est-à-dire quand il est démontré que les matrices forment un espace vectoriel. Afin de respecter cette approche et de ne pas perturber les étudiants, l'enseignante I a adapté le rythme de proposition des podcasts.

Mise en oeuvre du dispositif pour les étudiants en Informatique

Comme nous l'avons expliqué, tous les podcasts n'ont pas pu être proposés simultanément, afin de suivre la philosophie du cours INFOB123 et de tenir compte des cadres déjà rencontrés dans les exercices à ce stade-là. Les podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{C}^n$ et dans des espaces de polynômes ont été diffusés sur le cours INFOB123 de la plateforme Webcampus dans un onglet séparé des cours, intitulé "Vidéos sur les combinaisons linéaires", le 17 mars 2021. De plus, l'enseignante I a signalé la présence des podcasts sur la plateforme lors de son cours théorique et les assistants ont envoyé un mail aux étudiants présenté en figure 4.6. Par mail et par une nouvelle annonce orale de l'enseignante I à son cours, nous avons fait parvenir une enquête aux étudiants le 19 avril 2021. Nous décrirons cette enquête à la section 4.2. Par la suite, suivant l'avancement dans le cours, les étudiants ont eu accès aux podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans les autres cadres.

Chers étudiants,

Lors du cours théorique, on vous a annoncé la mise en ligne de vidéos illustrant la notion de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels, tout à fait essentielle en algèbre.

La section "Vidéos Combinaisons linéaires" est maintenant disponible et met à votre disposition 5 vidéos réalisées par Célestine Hiernaux dans le cadre de son mémoire en didactique des mathématiques, ici à l'UNamur.

Evidemment, toute l'équipe enseignante vous encourage vivement à consulter et travailler ces (courtes) vidéos.
Ceci vous permettra sans aucun doute d'affiner votre maîtrise du sujet.

Par ailleurs, d'autres vidéos sur cette thématique mais dans d'autres espaces vectoriels suivront au fur et à mesure que le cours progressera.

Bon travail,

Pour toute l'équipe, Marvyn

FIGURE 4.6 – Mail envoyé aux étudiants en Informatique lors de la mise à disposition des podcasts

4.1.2 Étudiants en Sciences Mathématiques et Sciences Physiques ayant testé le dispositif

Au premier quadrimestre, les étudiants en Sciences Mathématiques ou Physiques suivent le cours SMATB107 - Algèbre et géométrie analytique dont la table des matières du syllabus de théorie est présentée en figures 4.10 et 4.11 [28]. Ce cours, prenant en charge l'enseignement de la notion de combinaison linéaire, est composé de dix chapitres. Vu l'ampleur de ce cours et la quantité de notions et concepts enseignés, nous ne décrirons brièvement que les quatre premiers chapitres. Ceux-ci incluent la matière vue par les informaticiens au cours INFOB123.

1. *Les espaces vectoriels*
   Ce chapitre est composé de trois parties : les structures algébriques, l'espace vectoriel des applications linéaires et l'anneau des transformations linéaires.

2. *Bases d'un espace vectoriel*
   C'est dans ce chapitre qu'intervient la notion de combinaison linéaire. Tout d'abord, dans une première partie concernant la dépendance linéaire, des précisions concernant le symbole

de sommation sont données. Ensuite, les définitions de vecteurs linéairement dépendants et indépendants sont présentées et des exemples les illustrent. La définition de combinaison linéaire est proposée juste après, sous la forme visible en figure 4.7. Puis, elle est directement utilisée dans un théorème et sa démonstration. La suite de cette partie concerne les bases et la notion de dimension. La deuxième partie du chapitre traite la notion d'isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 2.3 *x est combinaison linéaire des vecteurs $\{x_i\}_{i=1}^m$ si et seulement si il existe un ensemble fini de scalaires $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ tels que*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i.$$

FIGURE 4.7 – Définition de combinaison linéaire provenant du syllabus de théorie du cours SMATB107 - Algèbre et géométrie analytique suivi par les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques ayant testé le dispositif [28]

3. *Sous-espaces vectoriels*
   Ce chapitre concerne les sous-espaces vectoriels et les notions de noyau et d'image d'une application linéaire et en présente les définitions et les propriétés.
4. *Matrices*
   Ce chapitre est composé de 5 parties : les applications linéaires et les matrices (construction d'une matrice, opérations sur les matrices, changements de bases, matrice colonne associée à un vecteur, matrices des transformations linéaires), les permutations, les déterminants, la notion de matrice inverse et les similitudes.

Les six derniers chapitres sont intitulés : *Structure propre*, *Espaces métriques*, *Géométrie à trois dimensions*, *Géométrie locale des courbes et des surfaces*, *Coniques et quadriques*, *Compléments (Produit vectoriel, Première et seconde formes fondamentales d'une surface)*.

Pour les séances d'exercices du cours SMATB107, le syllabus [16] a la même structure que celui du cours théorique [28] mais ne contient pas d'exercices qui traitent exclusivement des combinaisons linéaires. La notion de combinaison linéaire est utilisée dans des exercices sur la dépendance linéaire et sur les bases. La définition de combinaison linéaire est tout de même reprise dans les rappels théoriques sous la forme visible en figure 4.8.

Le vecteur x est une **combinaison linéaire** (C.L.) des $\{x_i\}_{i=1}^n$ si et seulement si

$$\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

FIGURE 4.8 – Définition de combinaison linéaire provenant du syllabus d'exercices des étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques ayant testé le dispositif [16]

La table des matières du syllabus de théorie du cours SMATB101 - Algèbre linéaire 1 [29] suivi par ce groupe test au second quadrimestre est donnée pour information en figure 4.12.

Mise en oeuvre du dispositif pour les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques

Le 1^{er} avril 2021, les podcasts ont été mis à disposition des étudiants de Sciences Mathématiques et Sciences Physiques sur les cours SMATB107 et SMATB101 de la plateforme Webcampus dans un onglet séparé du contenu des cours intitulé "Vidéos de Célestine Hiernaux". Une annonce sur ces mêmes cours de la plateforme, présentée en figure 4.9, a été notifiée par mail aux étudiants. De plus, les podcasts ont été ajoutés dans un onglet du même titre sur le cours SCMAT01 (Ateliers de mathématiques) destiné aux étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques. Grâce à ce cours, les étudiants peuvent profiter, à leur guise et selon les besoins collectifs du groupe, de séances de questions/réponses sur ce qui a été enseigné ou d'exercices supplémentaires sur des concepts aux choix. Les étudiants de ce groupe du public test sont automatiquement inscrits à ce cours de la plateforme Webcampus et y diffuser nos podcasts ne pouvait qu'étendre l'impact de notre projet. L'enseignante MP a également annoncé oralement la présence des podcasts sur la plateforme lors de son cours théorique. L'enquête a été proposée à ce groupe test le 19 avril 2021, via un mail et une annonce orale au cours de l'enseignante MP.

Chères étudiantes, chers étudiants,

Dans cette section vous trouverez des vidéos que Célestine Hiernaux a réalisées dans le cadre de son mémoire en didactique des mathématiques.

Ces vidéos présentent le concept de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels. Elles peuvent donc vous être utiles pour...

- comprendre le concept de combinaison linéaire (lien entre la définition théorique et les exercices);
- résoudre et interpréter les solutions de systèmes d'équations linéaires;
- prendre conscience du *caractère unificateur* de l'algèbre linéaire (un même concept est présenté dans différents espaces vectoriels);
- appréhender des opérations dans l'ensemble des nombres complexes;
- appréhender le concept d'application (fonction) d'une manière *globale* (c'est-à-dire comme élément d'un espace vectoriel).

Nous espérons que ces vidéos vous aideront dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Après le blocus de Pâques, nous déposerons dans cette section un questionnaire permettant à Célestine de recueillir des informations et commentaires sur l'utilisation et l'utilité de ces vidéos. J'espère que vous pourrez consacrer un peu de temps à y répondre!

Bien cordialement,

Martine De Vleeschouwer, avec l'aimable accord de Anne Lemaître.

FIGURE 4.9 – Annonce envoyée aux étudiants de Sciences Mathématiques et Physiques lors de la mise à disposition des podcasts

Table des matières

1 Espaces vectoriels **6**
- 1.1 Structures algébriques . . . 6
  - 1.1.1 Groupe . . . 6
  - 1.1.2 Anneau . . . 7
  - 1.1.3 Corps . . . 7
  - 1.1.4 Espace vectoriel . . . 8
  - 1.1.5 Exemples . . . 9
- 1.2 Espace vectoriel des applications linéaires . . . 9
  - 1.2.1 Définition . . . 10
  - 1.2.2 Lois sur les applications linéaires . . . 10
- 1.3 Anneau des transformations linéaires . . . 11
  - 1.3.1 Définition . . . 11
  - 1.3.2 Produit de deux transformations linéaires . . . 12
  - 1.3.3 Inverses des transformations linéaires . . . 13

2 Bases d'un espace vectoriel **15**
- 2.1 Dépendance linéaire et dimension . . . 15
  - 2.1.1 Sommation . . . 15
  - 2.1.2 Dépendance linéaire . . . 15
  - 2.1.3 Bases et dimension . . . 17
- 2.2 Isomorphisme d'espaces vectoriels . . . 21

3 Sous-espaces vectoriels **24**
- 3.1 Sous-espaces vectoriels . . . 24
  - 3.1.1 Définition d'un sous-espace vectoriel . . . 24
  - 3.1.2 Dimension d'un sous-espace . . . 26
  - 3.1.3 Somme directe . . . 28
- 3.2 Noyau et image d'une application linéaire . . . 29
  - 3.2.1 Définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire . . . 29
  - 3.2.2 Propriétés du noyau et de l'image d'une APPLICATION linéaire . . . 30
  - 3.2.3 Propriétés du noyau et de l'image d'une TRANSFORMATION linéaire . . . 32

4 Matrices **34**
- 4.1 Applications linéaires et matrices . . . 34
  - 4.1.1 Construction d'une matrice . . . 34
  - 4.1.2 Opérations sur les matrices . . . 36
  - 4.1.3 Matrices et changements de bases . . . 39
  - 4.1.4 Matrice colonne associée à un vecteur . . . 41
  - 4.1.5 Matrices des transformations linéaires . . . 43
- 4.2 Permutations . . . 43
  - 4.2.1 Définition et propriétés élémentaires . . . 43
  - 4.2.2 Transpositions . . . 45
  - 4.2.3 Parité . . . 45
- 4.3 Déterminants . . . 46
  - 4.3.1 Définition . . . 46
  - 4.3.2 Mineurs et cofacteurs . . . 49
  - 4.3.3 Calcul des déterminants . . . 51
  - 4.3.4 Déterminant d'un produit de matrices . . . 52
- 4.4 Matrice inverse . . . 53
- 4.5 Similitude . . . 53

5 Structure propre **55**
- 5.1 Valeurs propres et vecteurs propres . . . 55
  - 5.1.1 Définition et invariance . . . 55
  - 5.1.2 Polynôme caractéristique . . . 57
- 5.2 Forme canonique de Jordan . . . 60
  - 5.2.1 Définition et construction . . . 60
  - 5.2.2 Interprétation géométrique de la forme de Jordan . . . 64
  - 5.2.3 Calcul des vecteurs propres généralisés . . . 66
- 5.3 Dominance diagonale et valeurs propres . . . 68

6 Espaces métriques **71**
- 6.1 Produit scalaire et métrique . . . 71
  - 6.1.1 Produit scalaire REEL . . . 71
  - 6.1.2 Produit scalaire COMPLEXE . . . 72
  - 6.1.3 Espace métrique . . . 73
  - 6.1.4 Changement de base . . . 74
- 6.2 Orthogonalité . . . 75
  - 6.2.1 Relations de Bessel, Parseval et Schwarz . . . 76
  - 6.2.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 78

FIGURE 4.10 – Table des matières du syllabus théorique du cours SMATB107 - Algèbre et géométrie analytique suivi par les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques ayant testé le dispositif (1) [28]

6.2.3 Structure propre et orthogonalité 80
6.2.4 Complémentaire orthogonal 80

7 Géométrie à trois dimensions **82**
7.1 Droites et plans vectoriels 83
7.2 Droites et plans affines 83
7.3 Equations des droites et plans 84
7.3.1 Equations paramétriques 84
7.3.2 Equations implicites 85
7.4 Parallélisme 86
7.5 Orthogonalité 87
7.5.1 Produit scalaire 87
7.5.2 Orthogonalité 88
7.5.3 Coordonnées contravariantes et covariantes 89

8 Géométrie locale des courbes et des surfaces **96**
8.1 Les courbes 96
8.1.1 Définition et points réguliers 96
8.1.2 Longueur d'une courbe 97
8.1.3 Trièdre de Frenet-Serret 98
8.1.4 Courbure et torsion d'une courbe 99
8.1.5 Cercle osculateur 101
8.2 Les surfaces 102
8.2.1 Représentation paramétrique ou explicite d'une surface 102
8.2.2 Points réguliers d'une surface 102
8.2.3 Représentation implicite d'une surface 104

9 Coniques et quadriques **106**
9.1 Formes quadratiques et changement de bases 106
9.2 Diagonalisation des quadriques 107
9.3 Symétries : centres et axes 108
9.3.1 3 valeurs propres non nulles. 109
9.3.2 Une valeur propre nulle : $\lambda_3 = 0$ 110
9.3.3 Deux valeurs propres nulles : $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 111
9.3.4 Les trois valeurs propres sont nulles 112
9.4 Classification des coniques 112
9.4.1 $\lambda_1\lambda_2 > 0$: Ellipse 113
9.4.2 $\lambda_1\lambda_2 < 0$: Hyperbole 114
9.4.3 $\lambda_2 = 0, c_2'' \neq 0$: Parabole 116
9.4.4 $\lambda_2 = 0, c_2'' = 0$: Droites parallèles 116
9.4.5 Classification des coniques réelles 117
9.5 Ellipsoïde et hyperboloïdes 117
9.5.1 $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1\lambda_3 > 0$: Ellipsoïde 117
9.5.2 $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1\lambda_3 < 0, \lambda_1 d' < 0$: Hyperboloïde à une nappe 118
9.5.3 $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1\lambda_3 < 0, d' = 0$: Cône 120
9.5.4 $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1\lambda_3 < 0, \lambda_1 d' > 0$: Hyperboloïde à deux nappes 121
9.6 Paraboloïdes et cylindres 122
9.6.1 $\lambda_1\lambda_2 > 0, c_3' \neq 0$: Paraboloïde elliptique 122
9.6.2 $\lambda_1\lambda_2 < 0, c_3' \neq 0$: Paraboloïde hyperbolique 123
9.6.3 $\lambda_1\lambda_2 > 0, c_3' = 0$: Cylindre elliptique 124
9.6.4 $\lambda_1\lambda_2 < 0, c_3' = 0$: Cylindre hyperbolique 124
9.6.5 $\lambda_1\lambda_2 < 0, c_3' = 0, d' = 0$: Paire de plans distincts 125
9.6.6 $\lambda_1 > 0, c_2'' \neq 0$: Cylindre parabolique 125
9.6.7 $\lambda_1 > 0, c_2'' = 0$: Paire de plans parallèles 125
9.7 Classification des quadriques. 126

10 Compléments **127**
10.1 Produit vectoriel 127
10.1.1 Définition 127
10.1.2 Propriétés du produit vectoriel 128
10.1.3 Application aux équations du plan 130
10.2 Première forme fondamentale d'une surface 131
10.2.1 Calcul de distance sur une surface 131
10.2.2 Calcul de l'angle entre deux courbes d'une même surface 132
10.2.3 Calcul d'un élément d'aire sur une surface donnée 133
10.3 Seconde forme fondamentale d'une surface 133
10.3.1 Indicatrice de Dupin 133
10.3.2 Définition de la matrice B_{ij} 134

FIGURE 4.11 – Table des matières du syllabus théorique du cours SMATB107 - Algèbre et géométrie analytique suivi par les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques ayant testé le dispositif (2) [28]

Table des matières

1 L'espace dual **4**
- 1.1 L'espace vectoriel dual 4
  - 1.1.1 Les formes linéaires sur un espace vectoriel 4
  - 1.1.2 L'espace vectoriel dual 6
  - 1.1.3 Bidual et réflexivité 10
  - 1.1.4 Transformations linéaires et transposées 12
- 1.2 L'espace dual métrique 14
  - 1.2.1 La représentation des formes linéaires dans un espace métrique 14
  - 1.2.2 La base conjuguée 16
  - 1.2.3 La réflexivité dans un espace métrique 17

2 Déterminants et multilinéarité **19**
- 2.1 La définition classique du déterminant 19
  - 2.1.1 Rappels 19
  - 2.1.2 Le théorème de Binet-Cauchy 20
- 2.2 La multilinéarité 22
  - 2.2.1 Le produit cartésien 22
  - 2.2.2 Les formes multilinéaires 22
  - 2.2.3 Les k-formes 23
  - 2.2.4 k-formes symétriques, antisymétriques et alternées 24
  - 2.2.5 Redéfinition du déterminant 27

3 Espaces métriques et transformations unitaires **29**
- 3.1 Orthogonalité 29
  - 3.1.1 Rappels 29
  - 3.1.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt 31
  - 3.1.3 Transformation adjointe 33
  - 3.1.4 Généralisation aux applications linéaires adjointes : noyau et image 35
- 3.2 Transformations unitaires 37
  - 3.2.1 Transformations unitaires 37
  - 3.2.2 Propriétés élémentaires des matrices unitaires 40
  - 3.2.3 Réflecteurs et réduction à la forme triangulaire 41
  - 3.2.4 Diagonalisation des matrices unitaires 43

4 Formes hermitiennes **45**
- 4.1 Transformations auto-adjointes 45
  - 4.1.1 Définition et matrice associée 45
  - 4.1.2 Structure propre 48
- 4.2 Classification des formes hermitiennes 50
  - 4.2.1 Congruence et inertie 50
  - 4.2.2 Matrices hermitiennes définies positives 52
  - 4.2.3 Matrices hermitiennes semi-définies positives 55
- 4.3 Valeurs propres et valeurs singulières 56
  - 4.3.1 Propriétés extrémales des valeurs propres d'une matrice hermitienne 56
  - 4.3.2 Valeurs singulières 57

5 Normes matricielles : Définitions et propriétés élémentaires **59**
- 5.1 Normes matricielles compatibles 59
- 5.2 Quelques normes matricielles usuelles 61
- 5.3 La trace d'une matrice 64
- 5.4 Propriétés élémentaires des normes matricielles 65

6 Projections et inverse généralisé **69**
- 6.1 Projections dans un espace vectoriel 69
- 6.2 Projections orthogonales dans un espace métrique 75
- 6.3 L'inverse généralisé 81
- 6.4 Moindres carrés 85
  - 6.4.1 Equations normales 85

FIGURE 4.12 – Table des matières du syllabus théorique du cours SMATB101 - Algèbre linéaire 1 suivi par les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques ayant testé le dispositif [29]

4.2 Enquêtes

Cette section concerne les questionnaires d'enquête Google Form envoyés aux étudiants selon l'organisation que nous venons d'expliciter. Pour commencer, en sous-sections 4.2.1 et 4.2.2, nous décrirons les questions posées et les réponses proposées grâce aux organigrammes des questionnaires en figures 4.14 et 4.15 et légendés en figure 4.13. Ensuite, nous analyserons les réponses à ces deux enquêtes. L'enseignement à distance provoqué en raison des mesures sanitaires relatives au Covid-19 n'ont pas rendu service à notre cause. Il est évident qu'en raison de cela, nous n'avions aucune prise sur les étudiants. De plus, l'auto-discipline exigée pour l'apprentissage en autonomie à domicile réduit la portée de notre projet. Il faut également tenir compte de l'anxiété des étudiants, comme nous l'explique en détails le professeur et psychiatre infanto-juvénile Emmanuel de Becker dans la revue LouvainMédical de l'UCLouvain [15], et du taux de décrochage scolaire relaté dans La Libre par le professeur au CORE de l'UCLouvain, Thierry Bréchet [6]. En outre, au moment où les podcasts ont été déposés sur la plateforme, les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques n'étaient plus réellement débutants en algèbre linéaire étant donné que le cours SMATB107 se donne au premier quadrimestre. Le dispositif a, de surcroît, été proposé à ces étudiants assez tard dans le second quadrimestre. Ces contraintes institutionnelles et sanitaires fortes n'ont pas favorisé une grande participation à l'enquête. Par conséquent, nous analyserons les réponses reçues de manière qualitative.

En amont des analyses, nous avons décidé de créer un troisième questionnaire d'enquête destiné aux assistants et collaborateurs didactiques des cours INFOB123, SMATB107 et SMATB101 et qui a été envoyé en même temps que les enquêtes destinées aux étudiants. Comme expliqué précédemment, ce questionnaire vise premièrement à connaitre les représentations que les intervenants se font d'un cours d'algèbre linéaire et la place qu'ils accordent à la notion de combinaison linéaire durant les séances d'exercices ou travaux de groupes. Deuxièmement, d'autres questions visent à rassembler des avis sur le dispositif en tant que tel et d'éventuelles pistes d'amélioration et perspectives. Les réponses à ce questionnaire ont été plus nombreuses. En effet, huit intervenants sur neuf y ont participé. En sous-section 4.2.4, nous commencerons par décrire les questions et propositions de réponses de l'enquête grâce à l'organigramme en figure 4.16 et légendé en figure 4.13. Nous poursuivrons en analysant les retours récoltés. Nous terminerons ce mémoire en présentant toutes les pistes d'amélioration et les perspectives possibles dans le chapitre 5.

Avant de poursuivre, il est important de préciser que les questionnaires pourraient être exploités ultérieurement avec d'autres groupes d'étudiants, à un moment où les contraintes institutionnelles et sanitaires seraient moins importantes, le dispositif étant désormais disponible pour les étudiants dès le début de leur apprentissage de l'algèbre linéaire. Pour cette raison, nous tenons tout de même à décrire les questionnaires envoyés aux étudiants. Dans la conception de ces enquêtes, pour chaque réponse possible, nous avons essayé que l'information soit recevable et utile pour l'analyse des retours au sujet du projet. De plus, les différents chemins possibles dans les questionnaires ont été conçus de manière à ce que l'étudiant soit toujours concerné par la question qui lui est posée. Par conséquent, les questions sont toutes à réponse obligatoire. Pour une question de compréhension optimale des étudiants, le vocabulaire a été adapté dans les questionnaires. Par exemple, nous avons remplacé le mot "podcast" par "vidéo". Les enquêtes ont été rédigées afin d'identifier également si les étudiants font implicitement les liens avec nos questions de recherche. Nous avons aussi veillé à récolter les avis des étudiants ou assistants qui n'auraient pas visionné de podcast. En figure 4.13, vous pouvez observer la légende correspondant aux types de réponses à donner selon le type de question, en référence au code couleur des organigrammes des figures 4.14, 4.15 et 4.16 que nous allons décrire.

Pour information, voici le nombre de fois que les podcasts ont été visionnés par les membres inscrits aux cours INFOB123, SMATB107, SMATB101 et SCMAT01 de la plateforme Webcampus. Ces informations ont été consultées le 21 mai 2021 sur le serveur "Média UNamur" vers lequel mènent les liens proposés précédemment dans le chapitre 3.

1. Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°1 : 49 vues
2. Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°2 : 20 vues
3. Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°3 : 19 vues
4. Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{C}^n$: 20 vues
5. Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes : 21 vues
6. Les combinaisons linéaires dans des espaces de matrices : 13 vues
7. Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications linéaires - vidéo n°1 : 9 vues
8. Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications linéaires - vidéo n°2 : 6 vues

Les nombres de vues des trois derniers podcasts sont naturellement moins élevés que ceux des autres podcasts, étant donné que les étudiants en Informatique les ont reçus plus tard, peu de temps avant la fin des cours du quadrimestre. Pour rappel, la figure 3.12 reprend les podcasts dans l'ordre conseillé, leur durée, le cadre y illustrant la notion, l'expression générale de l'espace vectoriel considéré et les difficultés qui y sont prises en charge (sous-section 3.1.5).

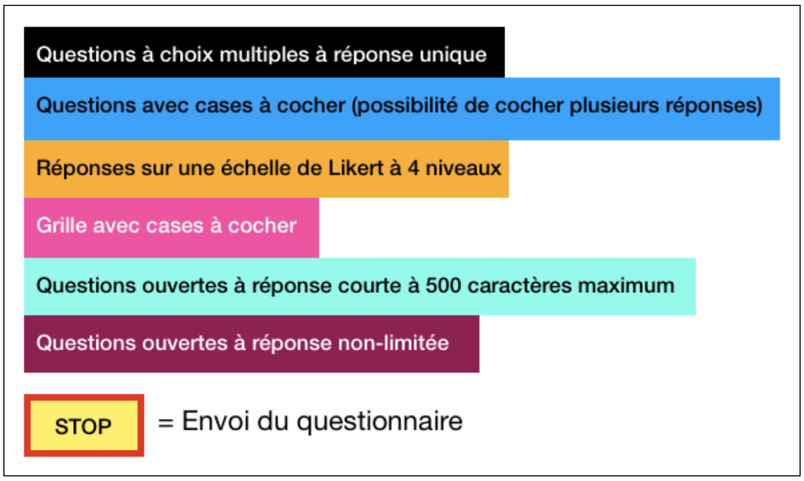


FIGURE 4.13 – Légende des organigrammes des questionnaires pour les étudiants et assistants donnés en figures 4.144.154.16

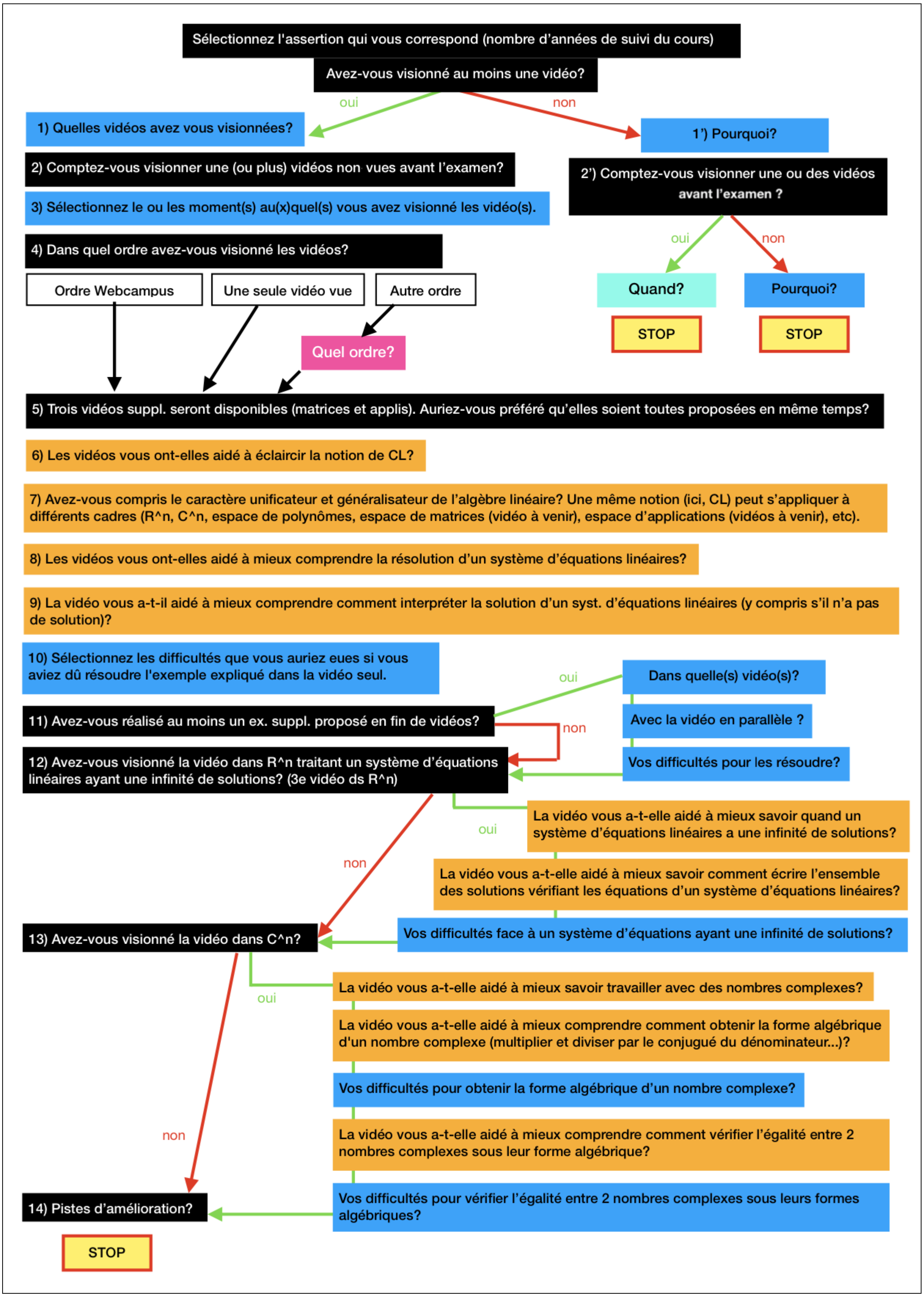


FIGURE 4.14 – Organigramme du questionnaire pour les étudiants en Informatique

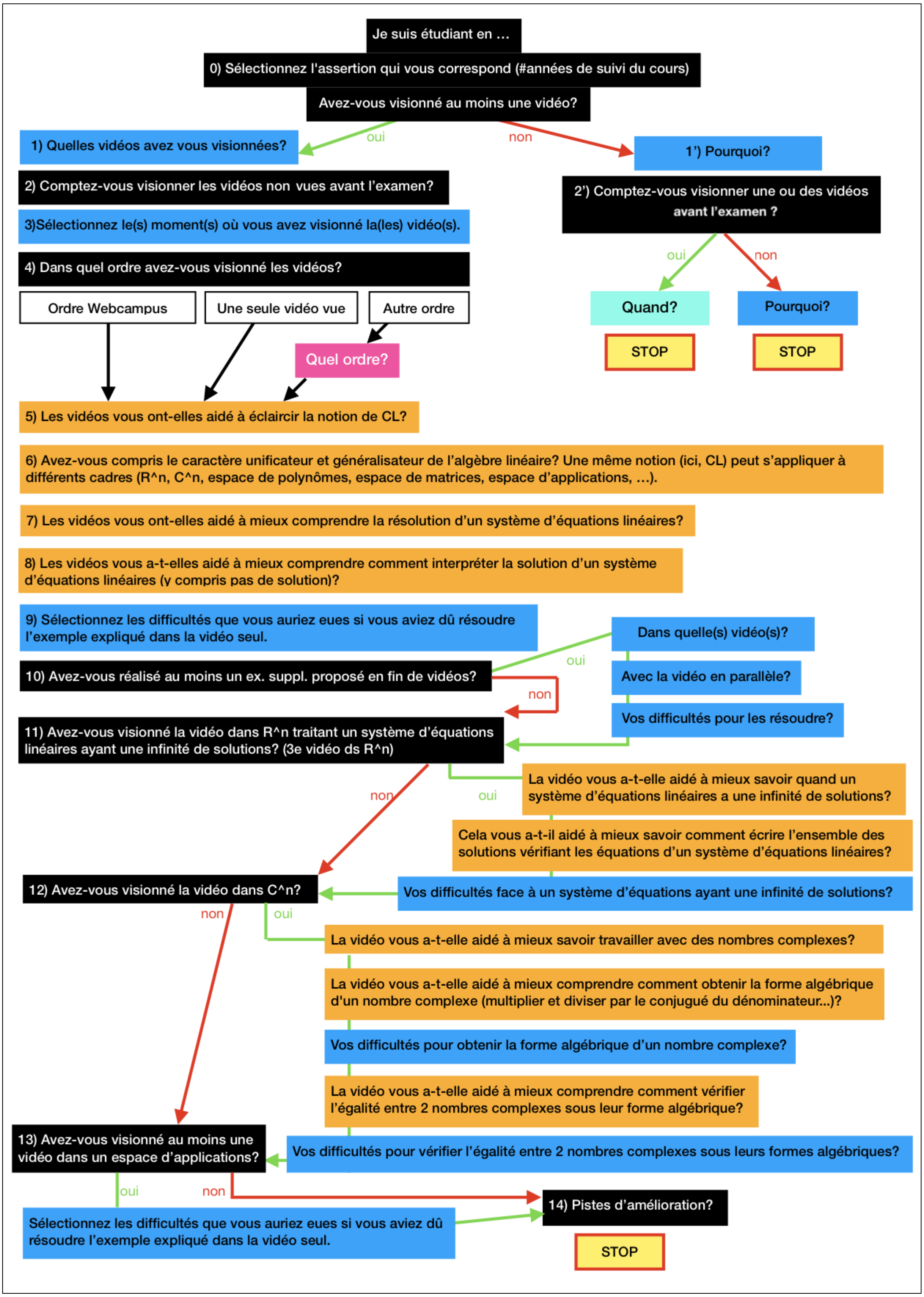


Figure 4.15 – Organigramme du questionnaire pour les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques

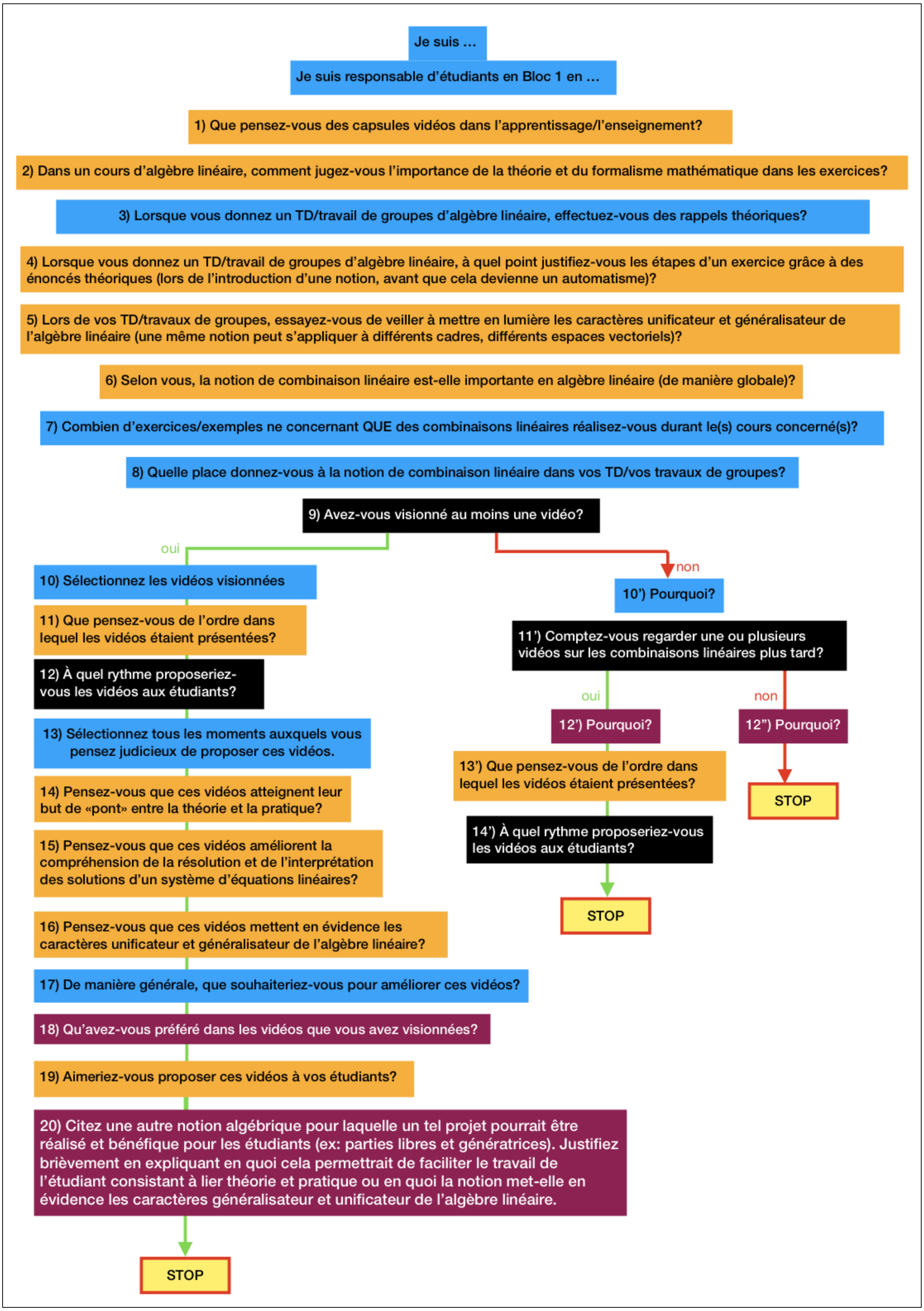


FIGURE 4.16 – Organigramme du questionnaire pour les assistants des cours d'algèbre linéaire

4.2.1 Description du questionnaire pour les étudiants en Informatique du public test

Nous basons cette description sur l'organigramme du questionnaire destiné aux étudiants en Informatique en figure 4.14. Nous ferons référence à la numérotation des questions de cet organigramme.

La première question consiste à savoir à quel niveau se situe l'étudiant. S'il a des difficultés, pour qu'il ne se sente pas dévalorisé, il lui est demandé de sélectionner l'assertion qui lui convient dans la réponse "`C'est la première/la deuxième/plus de la deuxième année que j'assiste au cours d'algèbre linéaire`".

Ensuite, la deuxième question demande à l'étudiant s'il a regardé au moins un des podcasts proposés. La réponse à cette question détermine la suite de l'enquête. Si l'étudiant répond '`oui`', il est dirigé vers les questions 1) à 14) de l'organigramme. Sinon, il est envoyé vers les questions 1') et 2'). La suite de la description du questionnaire se fera en faisant référence aux numéros des questions correspondants dans l'organigramme. Nous vous conseillons de lire cette description en parallèle de celui-ci et de sa légende, notamment pour savoir quelles questions sont à réponses multiples ou à réponse unique.

1) Il est demandé à l'étudiant de sélectionner les cadres dans lesquels il a visionné une vidéo.
   - ◇ `Les combinaisons linéaires dans` $\mathbb{R}^n$ `(au moins une des trois vidéos)`
   - ◇ `Les combinaisons linéaires dans` $\mathbb{C}^n$
   - ◇ `Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes`
2) L'étudiant répond si, '`oui`' ou '`non`', il compte regarder les podcasts non vus plus tard. Il peut également cocher la proposition '`J'ai visionné toutes les vidéos`'.
3) L'étudiant sélectionne tous les moments auxquels il a visionné le/les podcast(s). Dans l'idéal, la réponse à cette question donnera une idée du fonctionnement de l'étudiant quand il travaille et apprend, ainsi que de son intérêt pour le projet. Une case "`Autre...`" est proposée dans le cas où les réponses avancées ne conviennent pas. Si cette case est cochée, l'étudiant doit écrire lui-même sa réponse. Les propositions sont les suivantes :
   - ◇ `Après le cours théorique sur les combinaisons linéaires mais avant le TD sur les combinaisons linéaires`
   - ◇ `Juste après le TD sur les combinaisons linéaires`
   - ◇ `Plus de 3 semaines après le TD sur les combinaisons linéaires`
   - ◇ `Pendant le blocus de Pâques`
   - ◇ `Juste avant de/Pour répondre à cette enquête`
   - ◇ `Autre...` (à compléter)
4) Lorsque l'étudiant doit donner l'ordre dans lequel il a visionné les podcasts, il a le choix entre '`l'ordre conseillé`', '`un autre ordre que l'ordre conseillé`' et '`je n'ai visionné qu'une vidéo`'. Dans le cas où l'étudiant sélectionne la deuxième proposition, il est dirigé vers une question complémentaire lui demandant d'ordonner les podcasts selon son visionnage. Vous pouvez observer la grille à remplir en figure 4.17.

FIGURE 4.17 – Grille de réponse décrivant l'ordre de visionnage des podcasts

5) Après avoir annoncé à l'étudiant qu'il disposera plus tard de trois vidéos supplémentaires sur les combinaisons linéaires (en précisant dans quels cadres), il lui est demandé de dire si, '`oui`' ou '`non`', il aurait préféré que les huit podcasts soient présentés en même temps. Une case "`Autre...`" est également proposée dans le cas où l'étudiant veut étoffer sa réponse ou s'il est mitigé.

6) , 7), 8) et 9) La réponse à ces questions consiste à placer un curseur sur une échelle de Likert à quatre niveaux. Nous avons choisi un nombre pair et peu élevé de niveaux pour obliger l'étudiant à se positionner, à prendre clairement parti. Les extrémités de ces échelles sont désignées par '`Pas du tout`' et '`Complètement`'.

10) Afin de connaitre les difficultés globales de l'étudiant pour l'ensemble des podcasts qu'il a visionnés, nous lui demandons de sélectionner toutes celles qu'il aurait eues s'il avait dû résoudre, seul, l'exemple expliqué dans la vidéo. Les possibilités de réponses ont été rédigées en reprenant toutes les subtilités posant potentiellement problème, selon nous, dans les podcasts.

◇ `Appliquer la définition en langage mathématique à l'exemple de la vidéo`

◇ `Savoir combien de scalaires trouver pour savoir si le vecteur de départ est combinaison linéaire`

◇ `Transformer l'égalité entre 2 triplets en un système d'équations linéaires`

◇ `Transformer l'égalité entre 2 quadruplets en un système d'équations linéaires`

◇ Transformer l'égalité entre 2 polynômes en un système d'équations linéaires

◇ Résoudre un système d'équations linéaires

◇ Interpréter la solution d'un système d'équations linéaires pour l'exemple de la vidéo (c'est-à-dire conclure, après calculs, si oui ou non, c'est une combinaison linéaire)

◇ Aucune difficulté

◇ Autre... (à compléter)

11) L'étudiant répond ensuite si, oui ou non, il a tenté de résoudre au moins un exercice supplémentaire proposé en fin de vidéos. S'il répond négativement, il est envoyé à la question 12). S'il répond positivement, il est dirigé vers trois questions complémentaires. Tout d'abord, il lui est demandé de sélectionner les cadres dans lesquels il a réalisé un ou plusieurs exercices supplémentaires ('$\mathbb{R}^n$', '$\mathbb{C}^n$' et/ou 'dans des espaces de polynômes'). Ensuite, il lui est demandé de dire s'il a dû revisionner le podcast en parallèle. Il peut cocher plusieurs des propositions suivantes :

◇ Oui

◇ Non

◇ Seulement pour un exercice

◇ J'ai dû revisionner une autre vidéo pour résoudre l'exercice.

◇ Je retournais voir la vidéo au fur et à mesure pour me corriger.

◇ Autre... (à compléter)

Finalement, il lui est demandé de sélectionner toutes les difficultés qu'il a eues lorsqu'il a résolu le(les) exercice(s) supplémentaire(s). Voici les réponses proposées :

◇ C'était un contre-exemple alors que la vidéo traitait un exemple.

◇ C'était un exemple alors que la vidéo traitait un contre-exemple.

◇ Changement de notation des vecteurs (appellation u, v_1, v_2, ... remplacée par une autre)

◇ Changement de dimension de l'espace vectoriel (par ex., $\mathbb{R}^4$ au lieu de $\mathbb{R}^3$ qui est traité dans la vidéo)

◇ Changement du nombre de vecteurs (p) de la combinaison linéaire (et du nombre de scalaires à trouver pour savoir si c'est une combinaison linéaire)

◇ Transformer l'égalité développée en un système d'équations linéaires

◇ Interpréter la solution du système d'équations linéaires pour l'exercice considéré (conclure, après calculs, si oui ou non c'est une combinaison linéaire)

◇ `Aucune difficulté`

◇ `Autre...` (à compléter)

12) Il est demandé à l'étudiant de répondre si, '`oui`' ou '`non`', il a visionné le podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$ traitant un système ayant une infinité de solutions (troisième podcast). S'il répond négativement, il est directement envoyé à la question 13). S'il répond positivement, trois questions supplémentaires lui sont posées. Les deux premières questions demandent un placement sur une échelle de Likert, encore une fois à quatre niveaux allant de '`Pas du tout`' à '`Complétement`', indiquant si le podcast l'a aidé à mieux savoir, premièrement, quand un système d'équations linéaires est vérifié par une infinité de solutions, et deuxièmement, comment écrire l'ensemble des solutions vérifiant les équations d'un système d'équations linéaires. La troisième question supplémentaire demande à l'étudiant de sélectionner toutes les difficultés face à un tel système, parmi les propositions suivantes :

   ◇ `Exprimer les inconnues les unes en fonction des autres`

   ◇ `Comprendre qu'une infinité de solutions vérifie les équations du système d'équations linéaires`

   ◇ `Écrire l'ensemble de solutions d'un système d'équations linéaires sous la forme` "$S = \{...\}$"

   ◇ `Vérifier l'ensemble de la solution grâce à un exemple de valeurs`

   ◇ `Aucune difficulté`

   ◇ `Autre...` (à compléter)

13) L'étudiant répond si, '`oui`' ou '`non`', il a visionné le podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$. S'il répond négativement, il est directement envoyé à la question 14). S'il répond positivement, cinq questions complémentaires lui sont posées. Les deux premières questions demandent un placement sur une échelle de Likert, une fois de plus à quatre niveaux allant de '`Pas du tout`' à '`Complétement`', indiquant si le podcast l'a aidé à mieux...

   (a) savoir travailler avec des nombres complexes,
   (b) comprendre comment obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

   Pour la question (b), il est précisé à l'étudiant que, par *comment obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe*, nous faisons référence à la méthode qui consiste à multiplier et diviser par le conjugué du dénominateur du nombre complexe utilisée dans le podcast et permettant d'obtenir un nombre complexe de la forme "$a + bi$". La diapositive illustrant cette méthode a été présentée en figure 3.35. Pour la troisième question, l'étudiant doit sélectionner toutes les difficultés qu'il a quand il doit réaliser cette tâche (obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe). Il peut sélectionner les propositions suivantes :

   ◇ `Travailler avec des nombres complexes`

   ◇ `Calculer le conjugué d'un nombre complexe`

   ◇ `Appliquer la formule du binôme conjugué`

   ◇ `Savoir de quel nombre complexe je dois utiliser le conjugué`

- ◇ `Aucune difficulté`
- ◇ `Autre...` (à compléter)

La quatrième question complémentaire demande à l'étudiant, encore via la même échelle de Likert, si le podcast l'a aidé à mieux comprendre comment vérifier l'égalité entre deux nombres complexes donnés sous leur forme algébrique (égalités entre les parties réelles et imaginaires des deux nombres complexes).

La dernière question complémentaire demande enfin de sélectionner toutes les difficultés ressenties lorsque l'étudiant doit vérifier cette égalité. Les réponses proposées sont les suivantes :

- ◇ `Définir les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe`
- ◇ `Certains nombres complexes n'ont qu'une partie réelle ou qu'une partie imaginaire, je suis perdu!`
- ◇ `Associer les bonnes parties de chaque membre de l'égalité pour former un système d'équations linéaires`
- ◇ `Aucune difficulté`
- ◇ `Autre...` (à compléter)

14) Cette question vise à rassembler ce que les étudiants auraient préféré et par la suite, à réfléchir à des pistes d'amélioration. Pour répondre à la question, les étudiants peuvent sélectionner toutes les réponses qu'ils veulent parmi les propositions reprises ci-après. Nous avons précisé, dans l'énoncé de la question, que l'étudiant ne doit pas hésiter à cocher également la case '`Autre...`' pour y insérer toutes les autres idées d'amélioration qu'il pourrait avoir en tête.

- ◇ `Les vidéos me convenaient comme cela.`
- ◇ `Que les vidéos soient plus courtes`
- ◇ `Que les explications orales soient plus détaillées / Que les vidéos soient plus longues`
- ◇ `Que les explications orales soient plus claires`
- ◇ `Que les explications écrites soient plus détaillées (plus d'informations dans les diapositives)`
- ◇ `Que les diapositives soient moins chargées`
- ◇ `Que l'exemple traité dans la vidéo soit plus compliqué`
- ◇ `Que l'exemple traité dans la vidéo soit plus facile`
- ◇ `Que les vidéos contiennent plus d'exercices supplémentaires`
- ◇ `Autre...` (à compléter)

Si l'étudiant répond, au départ, qu'il n'a pas visionné de podcast, il est envoyé sur les trois questions décrites ci-après. Ces questions ont pour objectif de savoir pourquoi l'étudiant a porté peu d'intérêt au projet.

1′) Premièrement, parmi des propositions, il est demandé à l'étudiant de sélectionner toutes les raisons pour lesquelles il n'a pas visionné de podcast :

◇ `Les vidéos étaient trop longues.`

◇ `J'avais compris la notion de combinaison linéaire.`

◇ `Je ne savais pas que des vidéos étaient disponibles.`

◇ `Je n'aime pas regarder de vidéos pour apprendre.`

◇ `Je n'ai pas eu le temps.`

◇ `Autre...` (à compléter)

2′) Cette question demande si, '`oui`' ou '`non`', l'étudiant compte regarder un ou plusieurs podcasts plus tard avant l'examen d'algèbre linéaire. S'il répond positivement, on lui demande de répondre quand. S'il répond négativement, on lui demande d'encore une fois donner toutes les raisons pour lesquelles il ne compte pas le faire. Les réponses proposées sont les suivantes :

◇ `Je n'aurai pas le temps.`

◇ `J'ai compris la notion de combinaison linéaire.`

◇ `Les vidéos sont trop longues.`

◇ `Je n'aime pas regarder de vidéos pour apprendre.`

◇ `L'algèbre linéaire n'est pas un cours compliqué pour moi.`

◇ `Les vidéos ne traitent pas un sujet qui m'intéresse.`

◇ `Les vidéos ne traitent pas un sujet qui me pose problème.`

◇ `Autre...` (à compléter)

Grâce à ces deux dernières questions, nous pourrons peut-être comprendre pourquoi certains n'ont pas visionné de podcast. Nous saurons si le projet intéresse tout de même l'étudiant, s'il n'a juste pas eu le temps de s'intéresser au projet, ou s'il n'apprécie simplement pas les capsules vidéos pour apprendre.

4.2.2 Description du questionnaire pour les étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques du public test

Le questionnaire des étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques est similaire à celui des étudiants en Informatique. Dans cette description, nous ne développerons que les questions supplémentaires ou les nuances et différences entre les deux questionnaires. Tout ce qui ne sera pas relevé ici sera considéré comme identique au premier questionnaire.

Premièrement, une question initiale est ajoutée, demandant à l'étudiant s'il est en Sciences Mathématiques ou en Physiques. Ensuite, dans toutes les questions concernées, quand les cadres des podcasts sont énumérés ou proposés en solutions, les podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices et les deux illustrations dans des espaces d'applications interviennent, puisque ces derniers ont été proposés à ce groupe d'étudiants. De plus, les propositions de réponses aux questions sont adaptées à l'organisation de la filière. Par exemple, lorsqu'on demande les moments auxquels l'étudiant a visionné les podcasts, il a le choix parmi les propositions suivantes :

◇ `Quand elles ont été postées sur Webcampus/Teams`

◇ `Pendant le blocus de Pâques`

◇ `Juste avant de/Pour répondre à cette enquête`

◇ `Autre...` (à compléter)

Lorsqu'il doit sélectionner les difficultés qu'il aurait eues s'il avait dû résoudre les exemples expliqués dans les podcasts seul, nous avons ajouté les deux propositions suivantes :

◇ `Transformer l'égalité entre 2 matrices en un système d'équations linéaires`

◇ `Transformer l'égalité entre 2 applications en un système d'équations linéaires`

Les questions concernant les exercices supplémentaires, le système ayant une infinité de solutions et les nombres complexes, sont identiques à celles posées aux informaticiens. De plus, si l'étudiant a visionné au moins un des deux podcasts illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces d'applications, il lui est demandé de donner toutes ses difficultés s'il avait dû résoudre l'exemple seul. Les réponses proposées sont les suivantes :

◇ `Manipuler des applications comme éléments d'un espace vectoriel`

◇ `Me rappeler des 3 conditions de l'égalité entre 2 applications linéaires`

◇ `La dimension de l'espace vectoriel de la vidéo 2 (applications linéaires de` $\mathbb{R}^3$ `dans` $\mathbb{R}^2$`) qui complique les calculs`

◇ `Transformer l'égalité développée en un système d'équations linéaires`

◇ `Résoudre le système d'équations linéaires`

◇ `Interpréter la solution du système d'équations linéaires pour l'exemple de la vidéo (conclure, après calculs, si oui ou non c'est une combinaison linéaire)`

◇ `Aucune difficulté`

◇ `Autre...` (à compléter)

Le reste des questions est identique au premier questionnaire.

4.2.3 Analyse des retours des étudiants du public test

Avec l'accord des enseignantes I et MP, les enquêtes ont été envoyées aux étudiants concernés sur les cours Webcampus INFOB123, SMATB107 et SMATB101 via des annonces notifiées par mail, présentées en figures 4.18 et 4.19. Les enseignantes I et MP ont également annoncé cet envoi oralement lors de leurs cours théoriques. Pour rappel, en raison des contraintes sanitaires et institutionnelles auxquelles nous avons dû nous plier, les réponses ont été peu nombreuses.

Nous décrirons les résultats mais ils seront analysés qualitativement et l'accent sera mis sur les retours des assistants et collaborateurs didactiques en section 4.2.5. Notez que la date butoir du 28 avril 2021 indiquée dans ces annonces a été postposée d'une semaine.

Chères étudiantes, chers étudiants,

Dans le cadre de mon mémoire en Didactique des Mathématiques, 5 capsules vidéos illustrant la notion de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels ont été mises à votre disposition (3 vidéos illustrant la notion dans R^n, une dans C^n, une dans des espaces de polynômes). Normalement, 3 capsules vidéos supplémentaires vous seront proposées (une illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices et 2 dans des espaces d'applications).

J'espère que ces vidéos vous auront été bénéfiques et qu'elles vous auront aidé à mieux comprendre comment appréhender un cours comme l'algèbre linéaire!

Je vous propose maintenant de continuer à m'aider en répondant à une enquête (même si vous n'avez pas visionné les capsules vidéos) via le lien suivant: https://forms.gle/Eacy74neTJvq8Zz67

En effet, les réponses à cette enquête me permettront d'améliorer mon travail et de finaliser le projet de mon mémoire. Je compte donc sur votre franchise! Il vous sera possible de répondre à ce questionnaire jusqu'au ***mercredi 28 avril 2021***.

Un grand merci à toutes et à tous de me permettre d'exploiter mon travail,
Merci d'avance pour vos retours,
Bonne continuation pour cette année,
Célestine Hiernaux

FIGURE 4.18 – Message envoyé le 19 avril 2021 aux étudiants en Informatique concernant l'enquête

Chères étudiantes, chers étudiants,

Dans le cadre de mon mémoire en Didactique des Mathématiques, 8 capsules vidéos illustrant la notion de combinaison linéaire dans différents espaces vectoriels ont été mises à votre disposition (3 vidéos illustrant la notion dans R^n, une dans C^n, une dans des espaces de polynômes, une dans des espaces de matrices et 2 dans des espaces d'applications).

J'espère que ces vidéos vous auront été bénéfiques et qu'elles vous auront éclairé sur le point de vue que l'Algèbre Linéaire nécessite d'avoir.

Je vous propose maintenant de continuer à m'aider en répondant à une enquête (même si vous n'avez pas visionné les capsules vidéos) via le lien suivant:
https://forms.gle/z4LdayURr7QdpcvU7

En effet, les réponses à cette enquête me permettront d'améliorer mon travail et de finaliser le projet de mon mémoire. Je compte donc sur votre franchise! Il vous sera possible de répondre à ce questionnaire jusqu'au **mercredi 28 avril 2021**.

Un grand merci à toutes et à tous de me permettre d'exploiter mon travail,
Merci d'avance pour vos retours,
Bonne continuation pour cette année,
Célestine Hiernaux

FIGURE 4.19 – Message envoyé le 19 avril 2021 aux étudiants en Sciences Mathématiques et Physiques concernant l'enquête

Toutes disciplines confondues, treize réponses d'étudiants ont été reçues. Huit étudiants (quatre informaticiens , trois physiciens et un mathématicien) n'ont pas visionné de podcast et ont donné leurs raisons. Comme plusieurs réponses pouvaient être sélectionnées et qu'il n'y a donc pas une seule réponse par étudiant, ces raisons ont été reprises dans le tableau en figure 4.20. La deuxième colonne contient le nombre de fois que la réponse a été sélectionnée. De plus, parmi ces huit étudiants, sept ont répondu qu'ils regarderaient un ou plusieurs podcasts au moment où ils seraient réellement plongés dans le cours d'algèbre linéaire et l'étudieront. Nous pouvons déduire de ces réponses que laisser les podcasts à la disposition des étudiants jusqu'à la date de l'examen est judicieux. Nombreux sont les étudiants qui commencent à réellement chercher à comprendre l'algèbre linéaire au moment où ils préparent l'examen.

Deux étudiants en Informatique ont visionné un seul podcast, le premier illustrant la notion de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$, après le cours théorique sur les combinaisons linéaires mais avant le cours d'exercices. Dans le tableau en figure 4.21, certaines réponses de ces deux étudiants ont été résumées. Un seul de ces deux informaticiens a résolu un exercice supplémentaire proposé en fin de vidéo. Il l'a réalisé sans la vidéo en parallèle et sa difficulté a été de déduire le nombre p de scalaires λ_i à trouver pour savoir si c'est une combinaison linéaire ou non. Les réponses de ces étudiants ne sont pas significatives pour répondre à nos questions de recherche. En effet, en ne visionnant qu'un seul podcast, il est impossible d'en déduire le caractère unificateur ou généralisateur de la notion de combinaison linéaire et, par conséquent, encore moins de l'algèbre linéaire. De la même manière, un des objectifs des podcasts est de prendre en charge la résolution et l'interprétation de la solution d'un système d'équations linéaires. En référence à notre deuxième question de recherche, cet objectif ne peut être atteint en ne visionnant qu'un seul podcast. Cette série de podcasts a, en effet, plus d'intérêt lorsqu'elle est considérée dans son ensemble. Le fait que les étudiants aient visionné le podcast juste après le cours théorique mais avant la séance d'exercices concernant les combinaisons linéaires diminue également les chances que le projet éclaircisse réellement cette notion et aille dans le sens de nos questions de recherche. De plus, ce constat renforce encore notre avis de rendre les podcasts disponibles pendant tout l'apprentissage et jusqu'à l'examen.

Trois étudiants ont regardé presque tous les podcasts (un étudiant de chaque filière du public test). Ils ont tous visionné les deux premiers, le quatrième et le cinquième podcasts. Deux d'entre eux ont également visionné le troisième podcast. Ces deux étudiants répondent que le podcast les a aidés à mieux repérer quand un système d'équations linéaires a une infinité de solutions et à mieux savoir comment écrire l'ensemble de solutions. Les deux étudiants répondent que depuis qu'ils ont visionné ce podcast, ils ne ressentent plus de difficultés pour ce type de système. Le podcast traitant des espaces de matrices, quant à lui, a été visionné par un seul étudiant. Ces étudiants n'ont pas résolu d'exercices supplémentaires proposés à la fin des podcasts. Le reste des réponses de ces étudiants ont été résumées dans le tableau en figure 4.22. Dans les pistes d'amélioration sélectionnées par les étudiants, le besoin d'explications écrites plus détaillées revient à deux reprises. Nous pensons que cela doit être dû au fait que nous tenions à ce que les informations écrites et orales se complètent et ne soient pas redondantes. De plus, la durée des vidéos a été limitée volontairement.

L'apport de ces deux enquêtes est maigre en raison des contraintes sanitaires et institutionnelles énoncées précédemment. De plus, le concept de combinaison linéaire est un concept relativement basique intervenant au début du cours d'algèbre linéaire. En effet, c'était un choix de traiter une notion enseignée à l'entrée dans le domaine algébrique, au tout début du cursus mathématique universitaire. Cependant, comme les étudiants du public test ne sont, pour la plupart, plus débutants en algèbre linéaire, des podcasts sur une notion plus compliquée auraient peut-être eu plus de succès. De plus, l'identification du caractère unificateur de l'algèbre linéaire pourrait être facilitée par un projet similaire traitant d'autres notions. Ce sujet sera abordé ultérieurement, dans l'analyse des réponses à l'enquête destinée aux assistants et collaborateurs didactiques en section 4.2.5. Les contraintes institutionnelles sont aussi certainement la cause de la demande d'exemples plus compliqués explicités dans les podcasts.

Pourquoi n'avez-vous pas visionné de podcast?	Nombre de fois que la réponse à été sélectionnée
Je ne savais pas que des podcasts étaient disponibles.	3
J'avais compris la notion de combinaison linéaire.	4
Je n'ai pas eu le temps.	2
Je n'ai pas encore travaillé le cours d'algèbre linéaire.	2

FIGURE 4.20 – Réponses de huit étudiants à la question : "*Pourquoi n'avez-vous pas visionné de podcast ?*" (NB : plusieurs réponses pouvaient être sélectionnées)

Questions	1/4=Pas du tout, 4/4=Complètement
Le projet a-t-il éclairci la notion de combinaison linéaire?	2/4, 3/4
Le projet a-t-il aidé à mieux comprendre la résolution de systèmes d'équations linéaires?	3/4, 4/4
Le projet a-t-il aidé à mieux comprendre comment interpréter la solution d'un système d'équations linéaires?	3/4, 3/4
Le projet a-t-il aidé à mettre en évidence le caractère FUG de l'algèbre linéaire?	2/4, 2/4
Quelles auraient été vos difficultés si vous aviez dû résoudre l'exemple du podcast seul? (Plusieurs réponses acceptées)	**Nombre de fois que la réponse à été sélectionnée**
Appliquer la définition en langage mathématique à l'exemple du podcast	1
La résolution du système d'équations linéaires	1
Que souhaiteriez-vous pour améliorer les podcasts? (Plusieurs réponses acceptées)	**Nombre de fois que la réponse a été sélectionnée**
Discours oral plus détaillé / vidéos plus longues	1
Discours oral plus clair	1
Diapositives moins chargées	1
Exemple explicité plus compliqué	1

FIGURE 4.21 – Résumé de réponses des deux étudiants ayant visionné un seul podcast

Questions	1/4=Pas du tout, 4/4=Complètement
Le projet a-t-il éclairci la notion de combinaison linéaire?	3/4, 3/4, 4/4
Le projet a-t-il aidé à mieux comprendre la résolution de systèmes d'équations linéaires?	2/4, 3/4, 3/4
Le projet a-t-il aidé à mieux comprendre comment interpréter la solution d'un système d'équations linéaires?	2/4, 2/4, 3/4
Le projet a-t-il aidé à mettre en évidence le caractère FUG de l'algèbre linéaire?	2/4, 2/4, 2/4
Quelles auraient été vos difficultés si vous aviez dû résoudre l'exemple du podcast seul? (Plusieurs réponses acceptées)	**Nombre de fois que la réponse à été sélectionnée**
Appliquer la définition en langage mathématique à l'exemple explicité dans le podcast	1
Déterminer le nombre p de scalaires à trouver pour savoir si c'est une combinaison linéaire	2
Transformer l'égalité entre deux triplets/quadruplets/polynômes/matrices pour obtenir un système d'équations linéaires	2
Interpréter la solution du système d'équations linéaires pour l'exemple explicité dans le podcast	1
Que souhaiteriez-vous pour améliorer les podcasts? (Plusieurs réponses acceptées)	**Nombre de fois que la réponse a été sélectionnée**
Explications écrites plus détaillées	2
Exemple explicité plus compliqué	2

FIGURE 4.22 – Résumé de réponses des trois étudiants ayant visionné plusieurs podcasts

De manière générale, les étudiants relèvent fréquemment trois difficultés :

1. Appliquer la définition théorique en langage mathématique à l'exemple explicité dans le podcast
2. Déterminer le nombre p de scalaires à trouver pour construire la combinaison linéaire
3. Transformer l'égalité entre deux éléments de même nature en un système d'équations linéaires

Ces trois difficultés principales sont dues à l'obstacle du formalisme énoncé dans le chapitre 1 de ce mémoire, mais également aux problèmes du transfert de la théorie dans des exercices, c'est-à-dire l'identification de praxéologies complètes et l'utilisation de technologies pour justifier les techniques d'une tâche.

Dans la suite de ce chapitre, l'enquête proposée aux assistants et collaborateurs didactiques des cours INFOB123, SMATB107 et SMATB101 sera décrite. Les réponses récoltées seront analysées en vue d'aboutir à des conclusions et des perspectives.

4.2.4 Description du questionnaire pour les assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre du public test

Le 12 avril 2021, nous avons envoyé un mail aux assistants responsables des séances d'exercices et aux collaborateurs didactiques chargés des travaux de groupes pour les cours INFOB123, SMATB107 et SMATB101 de la plateforme Webcampus. Ce mail est présenté en figure 4.23. L'enquête décrite dans cette sous-section a été envoyée une semaine plus tard, le 19 avril 2021, Le questionnaire est divisé en deux parties. La première vise à rassembler les représentations de ces acteurs sur un cours d'algèbre linéaire et sur l'enseignement de ce domaine, en référence à nos cadres théoriques et à nos questions de recherche. Ensuite, la deuxième partie consiste à regrouper des avis généraux et d'autres plus précis à propos du projet et des podcasts en tant que tels. Comme précédemment, nous allons décrire les questions et propositions de réponses de l'enquête en nous référant à la numérotation des questions de l'organigramme en figure 4.16, à suivre en parallèle de cette description.

Avant toute chose, nous demandons à l'intervenant quel(s) rôle(s) il joue dans le cours d'algèbre linéaire parmi '`assistant au premier quadrimestre`' et/ou '`assistant au second quadrimestre`' et/ou '`collaborateur didactique au premier quadrimestre`' et/ou '`collaborateur didactique au second quadrimestre`' et/ou '`Autre...` (à compléter)'. Nous leur avons demandé auprès de quelle filière de notre public test ils interviennent ('`Informatique`' et/ou '`Sciences Mathématiques`' et/ou '`Sciences Physiques`'). Ces deux premières questions nous aideront à savoir comment analyser la suite des réponses de l'intervenant par rapport aux étudiants qu'il prend en charge, leur filière et le type d'intervention qu'il réalise pour le cours. Les questions 1) à 8), comme expliqué précédemment, visent à connaitre certaines représentations didactiques et pédagogiques de l'intervenant, en référence à nos cadres théoriques et à nos questions de recherche. Comme pour les étudiants, les échelles de Likert ont été définies à quatre niveaux de façon à ce que la réponse soit une réelle prise de parti. Lorsque plusieurs réponses peuvent être sélectionnées ou si une case '`Autre...` (à compléter)' est disponible, nous avons veillé à le mettre en évidence dans l'énoncé de la question.

1) Cette question a pour objectif de savoir d'emblée ce que l'intervenant pense des capsules vidéos dans l'enseignement et dans l'apprentissage, de manière globale. Il répond sur une échelle de Likert allant de '`Pas bien`' à '`Très bien`'. À partir de cette réponse, nous saurons si l'intervenant est friand des technologies ou pédagogies novatrices d'enseignement.

2) Aussi sur une échelle de Likert, une réponse allant de '`Pas importante`' à '`Indispensable`' nous permettra de savoir l'importance pour l'intervenant de travailler avec des praxéologies complètes, en référence à notre troisième question de recherche.

3) Dans la même optique que la question 2) visant à estimer l'importance des praxéologies complètes et du discours sur la technique, l'intervenant peut sélectionner toutes les réponses lui convenant parmi les suivantes :

    ◇ `J'effectue toujours un rappel théorique en début de TD/travail de groupe.`

    ◇ `J'effectue des rappels théoriques au fur et à mesure que les notions surviennent dans le TD/travail de groupes.`

    ◇ `Je n'effectue aucun rappel théorique.`

    ◇ `Autre...` (à compléter)

Bonjour à toutes et à tous,

Dans le cadre de mon mémoire, Madame De Vleeschouwer et moi-même avons réalisé des capsules vidéos illustrant le concept de combinaison linéaire dans différents cadres, en investissant des difficultés progressives.
Si vous avez reçu ce mail, c'est que vous intervenez, d'une manière ou d'une autre, comme assistants d'un cours pratique d'algèbre linéaire ou comme collaborateurs didactiques pour les travaux de groupes, et donc... Que vous pouvez m'aider!
Vous le savez peut-être déjà, les vidéos ont été proposées aux étudiants de bloc 1 informatique, sciences mathématiques et sciences physiques, dans les contenus Webcampus et/ou Teams des cours d'algèbre linéaire pour lesquels vous intervenez. Les étudiants mathématiciens et physiciens ont accès à toutes les vidéos. Pour les étudiants en informatique, elles sont activées progressivement selon la philosophie de cours de Madame Sartenaer. Ces vidéos ont pour buts...

- de comprendre le concept de combinaison linéaire (lien entre la théorie et la pratique),
- de comprendre le caractère unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire (une même notion peut s'appliquer à différents cadres, différents espaces vectoriels),
- de comprendre la résolution et l'interprétation de la / des solution(s) d'un système d'équations linéaires,
- d'appréhender des opérations dans l'ensemble des nombres complexes,
- d'appréhender le concept d'applications (fonctions) en tant qu'éléments d'un espace vectoriel (d'une manière globale).

Prochainement, j'aimerais vous faire parvenir une enquête qui ne vous prendrait que très peu de temps! Elle me permettra de comprendre votre vision d'un cours d'algèbre linéaire et d'avoir votre avis à propos des capsules vidéos afin d'améliorer mon travail. Je reviendrai très prochainement vers vous avec un lien Google Form anonyme pour récolter vos points de vue. Même si vous ne visionnez pas (toutes) les vidéos, votre réponse à l'enquête me sera utile et votre avis précieux pour la finalisation de mon mémoire!

C'est facultatif, mais l'ordre conseillé pour les visionner est le suivant:

- Les combinaisons linéaires dans R^n (vidéo n°1): exemple à une solution dans R^3;
- Les combinaisons linéaires dans R^n (vidéo n°2): contre-exemple dans R^3;
- Les combinaisons linéaires dans R^n (vidéo n°3): exemple à une infinité de solutions dans R^4;
- Les combinaisons linéaires dans C^n: double exemple dans C^3 construit sur C et puis sur R;
- Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes: exemple dans l'espace des polynômes de degré maximal 3;
- Les combinaisons linéaires dans des espaces de matrices: contre-exemple dans l'espace des matrices d'ordre 3 à coeff. réels;
- Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications (vidéo n°1): exemple (applications linéaires de R^3 dans R);
- Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications (vidéo n°2): exemple (applications linéaires deeR^3 dans R^2).

Si vous ne trouvez pas les vidéos sur Webcampus ou Teams, vous pouvez me prévenir par mail, je vous les enverrai.

En espérant que vous trouverez un moment pour m'aider dans ce projet,
Merci d'avance,
À très vite,

Célestine Hiernaux

FIGURE 4.23 – Mail envoyé aux aux assistants et collaborateurs didactiques lors de la mise en oeuvre du dispositif

4) Encore dans la même optique, sur une échelle de Likert allant de '`Jamais`' à '`Toujours`', nous demandons à l'intervenant à quel point il justifie les exercices grâce à la théorie, en leur précisant qu'il s'agit des moments où les notions ne sont pas devenues des automatismes et que leur apprentissage est en cours.

5) En référence à notre première question de recherche concernant l'identification du caractère FUG de l'algèbre linéaire, cette question vise à savoir comment les intervenants considèrent cette spécificité d'enseignement et d'apprentissage de ce domaine. La réponse est également à donner sur une échelle de Likert allant de '`Jamais`' à '`Toujours`'.

6) Cette question nous permet de savoir quelle place est à accorder à la notion de combinaison linéaire selon l'intervenant dans le domaine algébrique de manière globale. Encore une fois, une échelle de Likert, allant de '`Pas du tout`' à '`Tout à fait`', est proposée.

7) Afin d'avoir une idée plus précise sur la place accordée à la combinaison linéaire en tant que notion isolée, nous demandons à l'intervenant de cocher toutes les réponses correspondant à son profil d'enseignement parmi les propositions suivantes :

   ◇ `Je ne réalise pas d'exemple lors de rappels ou introductions théoriques.`

   ◇ `Je ne réalise qu'un exemple lors de rappels ou introductions théoriques.`

   ◇ `Je réalise plusieurs exemples lors de rappels ou introductions théoriques.`

   ◇ `Je ne réalise aucun exercice traitant uniquement des combinaisons linéaires.`

   ◇ `Je réalise un seul exercice traitant uniquement des combinaisons linéaires.`

   ◇ `Je réalise deux ou trois exercices traitant uniquement des combinaisons linéaires.`

   ◇ `Je réalise plus de trois exercices traitant uniquement des combinaisons linéaires.`

   ◇ `Je ne donne pas de cours pratique./Je m'occupe des travaux de groupes.`

   ◇ `Je donne un exemple si nécessaire.`

   ◇ `Autre...` (à compléter)

8) La question 7) est posée de manière différente. Cette question-ci vise à connaitre la place accordée à la théorie concernant la notion de combinaison linéaire, avec les propositions de réponses que voici :

   ◇ `Je la définis oralement durant des rappels ou introductions théoriques.`

   ◇ `Je la définis par écrit durant des rappels ou introductions théoriques.`

   ◇ `Je la définis oralement lorsqu'elle survient dans un exercice.`

◇ `Je la définis par écrit lorsqu'elle survient dans un exercice.`

◇ `Je l'utilise mais ne la définis pas.`

◇ `Je ne l'utilise pas.`

◇ `Je la définis si nécessaire.`

◇ `Autre...` (à compléter)

9) Cette question introduit la deuxième partie du questionnaire, concernant les podcasts et le projet global à proprement parler. L'intervenant répond si, '`oui`' ou '`non`', il a visionné au moins un podcast. S'il répond '`oui`', il est dirigé vers les questions 10) à 20) de l'organigramme. Sinon, il est dirigé vers les questions $10'$) à $14'$).

10) Après cette question, nous demandons précisément quels podcasts il a visionnés via une liste des huit podcasts et de leurs intitulés.

11) L'intervenant doit ensuite donner une appréciation de l'ordre dans lequel sont proposés les podcasts sur une échelle de Likert, allant de '`Pas bien`' à '`Très bien`'.

12) Ensuite, il est demandé à l'intervenant de cocher un rythme auquel il trouverait judicieux de proposer les vidéos (podcasts) parmi les propositions suivantes :

◇ `Une par une, espacées dans le temps`

◇ `Toutes en même temps au début du chapitre sur les espaces vectoriels (au moment où la notion de combinaison linéaire est enseignée)`

◇ `Toutes en même temps, à la fin du chapitre sur les espaces vectoriels`

◇ `Toutes en même temps à la fin du quadrimestre`

◇ `Autre...` (à compléter)

13) Ensuite, parmi les propositions énumérées ci-dessous, il lui est demandé de sélectionner tous les moments auxquels il pense judicieux de proposer les podcasts.

◇ `Avant le cours théorique sur les combinaisons linéaires`

◇ `Juste après le cours théorique sur les combinaisons linéaires`

◇ `Avant le TD sur les combinaisons linéaires`

◇ `Après le TD sur les combinaisons linéaires`

◇ `Laisser l'accès jusqu'à l'examen`

◇ `Autre...` (à compléter)

Ces trois dernières questions ($11, 12$ et 13) fournissent des précisions sur l'organisation qui semblerait optimale à l'assistant, dans le but de parfaire celle du projet.

14) , 15) et 16) Ces questions demandent une réponse sur des échelles de Likert allant de '`Pas du tout`' à '`Tout à fait`'. En référence à notre troisième question de recherche, la question

14) demande d'estimer le niveau auquel les podcasts atteignent le but de praxéologies complètes, en demandant à l'assistant de juger à quel point les podcasts créent un "pont" entre la théorie et les exercices. Ensuite, la question 15) concerne le niveau d'amélioration de la compréhension de la résolution et l'interprétation des solutions des systèmes d'équations linéaires. Enfin, la question 16) demande de déterminer à quel point les podcasts mettent en lumière les caractères unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, en précisant à l'assistant la définition de ces caractères.

17) L'assistant donne son opinion en sélectionnant tout ce qu'il souhaiterait pour améliorer les podcasts. Les propositions sont identiques à celles de la question 14) des enquêtes destinées aux étudiants.

18) Cette question ouverte est vaste et demande à l'assistant d'expliquer ce qu'il a préféré dans les podcasts.

19) Une échelle de Likert, allant de '`Pas du tout`' à '`Tout à fait`', demande à l'assistant s'il aimerait proposer ces vidéos aux étudiants.

20) La dernière question est ouverte et demande à l'assistant de donner une autre notion algébrique pour laquelle un tel projet pourrait être réalisé et bénéfique pour les étudiants. De plus, il leur est demandé de justifier en quoi cela permettrait de faciliter le travail de l'étudiant qui consiste à devoir lier les cours théoriques et les séances d'exercices, et en quoi cette notion faciliterait l'identification du caractère FUG de l'algèbre linéaire.

Comme expliqué précédemment, si l'assistant n'a pas visionné de podcasts, il est envoyé vers les questions $10'$) à $14'$) décrites ci-dessous, toujours en référence à la numérotation des questions utilisée dans l'organigramme en figure 4.16.

$12'$) Premièrement, il est demandé aux assistants de donner les raisons pour lesquelles il n'a pas visionné de podcasts parmi les propositions suivantes :

- ◇ `Les vidéos étaient trop longues.`
- ◇ `Je ne savais pas que des vidéos étaient disponibles.`
- ◇ `Je ne suis pas partisan des vidéos pour l'apprentissage.`
- ◇ `Je n'ai pas eu le temps.`
- ◇ `Autres...` (à compléter)

$13'$) Ensuite, il est demandé à l'assistant si, '`oui`' ou '`non`', il compte tout de même visionner un podcast plus tard.

$14'$) Il donne alors ses raisons quelle que soit la réponse qu'il donne. S'il a répondu '`oui`', il répond aux questions $12'$) à $14'$), et si '`non`', il répond à la question $12''$) et termine le questionnaire.

$15'$) et $14'$) Ces questions sont identiques aux questions 11) et 12) du questionnaire concernant l'ordre de proposition des podcasts et l'organisation.

Dans la sous-section suivante, nous allons désormais analyser les réponses reçues aux différentes enquêtes, tenter d'en tirer des conclusions et réfléchir à des pistes d'amélioration.

4.2.5 Analyse des retours des assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre du public test

Les assistants ont été contactés par mail, une semaine après avoir reçu les podcasts et le mail de présentation du projet (figure 4.23). Dans cette partie du mémoire, les réponses aux enquêtes reçues seront résumées et analysées en trois étapes.

Premièrement, nous analyserons les réponses aux questions nous permettant de faire des liens entre nos questions de recherche et les représentations que se font les intervenants de manière globale, correspondant aux questions 1) à 5) de l'organigramme en figure 4.16.

Ensuite, nous analyserons les réponses aux questions permettant de connaitre la place accordée à la notion de combinaison linéaire dans ces séances d'exercices, correspondant aux questions 6) à 8) de l'organigramme en figure 4.16.

Enfin, nous analyserons les réponses des intervenants aux questions restantes concernant le dispositif en tant que tel. Il est important de préciser que certains intervenants sont responsables de cours qui ne prennent pas en charge l'enseignement de la notion de combinaison linéaire. De plus, les travaux de groupes concernent rarement la notion de combinaison linéaire et, par conséquent, ne nécessitent pas de traitement particulier de cette notion. Dans cette analyse, nous veillerons à mettre l'accent sur les nuances que cela implique.

Les séances d'exercices d'algèbre linéaire

Les réponses concernant les séances d'exercices de manière globale sont reprises dans le tableau en figure 4.24. Ces réponses sont rassurantes dans le sens où les intervenants semblent accorder de l'importance aux objectifs principaux du dispositif, et donc à nos questions de recherche.

Tout d'abord, tous les assistants sont plutôt en faveur de l'utilisation de capsules vidéos pour l'enseignement et l'apprentissage. Les potentielles réserves des intervenants qui ont sélectionné le niveau "3/4" pourraient être expliquées par le fait que, comme l'analyse Roland [33] et comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, les capsules vidéos sont bénéfiques à l'apprentissage et l'enseignement si elles agissent comme complément au cours.

En référence à notre troisième question de recherche, les intervenants semblent sensibles à la justification théorique d'un exercice. Travailler avec des praxéologies complètes et justifier une technique par des technologies est en effet essentiel pour un bon apprentissage et les réponses des intervenants le confirment.

Notre première question de recherche concerne le caractère FUG de l'algèbre linéaire. Ce concept semble un peu flou pour certains intervenants qui sélectionnent le niveau "2/4", mais la plupart s'accordent pour dire qu'il faut veiller à mettre en évidence les caractères unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, et sélectionnent les niveaux "3/4" ou "4/4". Plus d'informations concernant cette question de recherche seront données plus loin dans cette analyse.

Enfin, lorsque nous avons demandé aux intervenants de sélectionner les méthodes de rappels théoriques qu'ils favorisent, la proposition "Pas de rappel théorique" n'a jamais été sélectionnée. Encore une fois, nous pouvons déduire que l'utilisation de praxéologies complètes et la mise en rapport de la théorie et des exercices résolus lors des séances de cours sont importantes pour les assistants et collaborateurs didactiques. Un assistant du cours SMATB101 étaye sa réponse et explique que cela dépend également des séances d'exercices concernées. Si la définition de combinaison linéaire est rappelée dans le syllabus d'exercices, seule la lecture de ce rappel avec les étudiants peut suffire, étant donné qu'ils peuvent consulter le syllabus quand ils le veulent durant la séances et en dehors.

Questions	Niveaux de Likert (.../4)	Nombre de sélections
Que pensez-vous des capsules vidéos dans l'apprentissage/l'enseignement?	3/4 4/4	7 1
De manière globale, comment jugez-vous l'importance de la théorie et du formalisme dans les exercices?	3/4 4/4	2 6
À quel point justifiez-vous les étapes d'un exercice grâce à des énoncés théoriques?	2/4 3/4 4/4	1 3 4
À quel point veillez-vous à mettre en lumière les caractères unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire?	2/4 3/4 4/4	3 2 3

Effectuez-vous des rappels théoriques lors de vos interventions? (Plusieurs réponses acceptées)	Nombre de fois que la réponse a été sélectionnée
Au début de la séance d'exercices	4
Au fur et à mesure que les notions interviennent	4
Pour les groupes qui en ont besoin	2
Pas de rappel	0

FIGURE 4.24 – Résumé des réponses aux questions 1) à 5) de l'organigramme du questionnaire des assistants et collaborateurs didactiques présenté en figure 4.16

La place accordée à la notion de combinaison linéaire

Comme nous l'avons expliqué, il est important de garder en tête que tous les intervenants ayant répondu à l'enquête ne se chargent pas de l'enseignement de la notion de combinaison linéaire. Certains sont chargés du cours SMATB101, pour lequel cette notion est un pré-requis du cours SMATB107. De plus, les collaborateurs didactiques sont rarement amenés à devoir traiter cette notion pour un travail de groupes. Pour ces raisons, les réponses à la question 7) de l'organigramme présenté (figure 4.16) ne sont pas significatives. Deux intervenants répondent tout de même qu'ils ne réalisent pas d'exercices traitant exclusivement des combinaisons linéaires mais plutôt des exercices sur la dépendance linéaire. Dans ces derniers, si les vecteurs sont linéairement dépendants, il est possible d'exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres. Sept intervenants sur huit répondent à cette question qu'ils n'effectuent un exemple isolé de cette notion que si c'est nécessaire ou que les étudiants le réclament.

De plus, pour les raisons que nous venons d'énoncer, à la première question du tableau en figure 4.25, certains intervenants sélectionnent les propositions "Je la définis si nécessaire" ou "Je l'utilise mais ne la définis pas". En dehors de ces réponses, les autres intervenants définissent tous la notion d'une manière ou d'une autre, durant les rappels théoriques ou lorsque c'est nécessaire à la résolution ou à la compréhension d'un exercice. En effet, ce rappel de la définition est tout de même primordial dans le secteur des espaces vectoriels étant donné qu'elle intervient dans de nombreux concepts, comme la dépendance linéaire que nous avons donnée comme exemple ci-avant ou la notion de base.

Enfin, tous les intervenants considèrent la notion comme importante dans le domaine de l'algèbre linéaire de manière générale, comme le montrent les réponses à la deuxième question du tableau en figure 4.25.

Quelle place donnez-vous à la notion de combinaison linéaire et sa définition lors de vos interventions? (Plusieurs réponses acceptées)	Nombre de fois que la réponse a été sélectionnée	
Je la définis oralement durant les rappels théoriques.	3	
Je la définis par écrit durant les rappels théoriques.	5	
Je la définis oralement si elle intervient dans un exercice.	3	
Je la définis par écrit si elle intervient dans un exercice.	2	
Je la définis si c'est nécessaire/si un groupe le réclame.	2	
Je l'utilise mais ne la définis pas.	2	
Question	**Niveaux de Likert (…/4)**	**Nombre de sélections**
De manière globale, la notion de combinaison linéaire est-elle importante en algèbre linéaire?	3/4 4/4	2 6

FIGURE 4.25 – Résumé des réponses aux questions 6) et 8) de l'organigramme du questionnaire des assistants et collaborateurs didactiques présenté en figure 4.16

Les avis à propos du dispositif

Parmi les huit intervenants ayant répondu à l'enquête, cinq ont visionné des podcasts. Tous ont répondu qu'ils aimeraient proposer les podcasts à leurs étudiants. Parmi eux se trouvent quatre assistants et un collaborateur didactique pour les travaux de groupes des étudiants en Sciences Mathématiques. C'est un avantage pour les résultats de cette partie de l'enquête, étant donné que les assistants sont les intervenants qui sont le plus en contact avec les étudiants et qui dirigent les séances d'exercices. Dans la partie supérieure du tableau de la figure 4.26, nous avons indiqué combien d'intervenants ont visionné chacun des podcasts.

Dans la partie centrale du tableau en figure 4.26, nous avons repris les niveaux sélectionnés sur les échelles de Likert indiquant si les intervenants pensent que le dispositif satisfait nos questions de recherche. Premièrement, lorsqu'il leur est demandé si les podcasts atteignent leur but de "pont" entre la théorie et les exercices, nous faisons implicitement référence au travail avec des praxéologies complètes et les technologies justifiant sans cesse les techniques. Les réponses semblent indiquer que le dispositif remplit assez bien l'objectif de lier la théorie et les exercices et de considérer des praxéologies complètes.

Deuxièmement, lorsqu'il leur est demandé si les podcasts améliorent la compréhension de la résolution et de l'interprétation d'un système d'équations linéaires, cela désigne une des difficulté repérées chez les débutants en algèbre linéaire dans la littérature, en rapport avec notre deuxième

Podcasts	Nombre d'intervenants sur 5 à avoir visionné les podcasts	
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°1	5	
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°2	3	
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°3	3	
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{C}^n$	4	
Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes	4	
Les combinaisons linéaires dans des espaces de matrices	4	
Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications - vidéo n°1	3	
Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications - vidéo n°2	3	
Questions	**Niveaux de Likert (…/4)**	**Nombre de sélections**
Les podcasts atteignent-ils leur but de «pont» entre la théorie et les exercices?	3/4 4/4	1 4
Les podcasts améliorent-ils la compréhension de la résolution et de l'interprétation des solutions d'un système d'équations linéaires?	2/4 3/4 4/4	2 2 1
Les podcasts mettent-ils en évidence les caractères unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire?	3/4 4/4	3 2
Pistes d'améliorations	**Nombre de fois que la piste d'amélioration a été proposée**	
Pas d'amélioration proposée / «Les podcasts m'ont plu comme cela.»	3	
Proposer plus d'exercices	2	
Réaliser des podcasts moins redondants	1	

FIGURE 4.26 – Résumé des réponses aux questions 10), 14), 15) et 16) de l'organigramme du questionnaire des assistants et collaborateurs didactiques présenté en figure 4.16

question de recherche. L'intervenant qui a sélectionné le niveau "2/4" ajoute en commentaire que si un des objectifs est de prendre en charge ces difficultés, il serait nécessaire d'insérer plus de systèmes ayant une infinité de solutions dans les podcasts. En effet, nous avons décidé de prendre en charge cette difficulté au sein des trois premiers podcasts. Son idée est pertinente étant donné que nous prenons également en charge la difficulté relatives aux systèmes sans solution dans le podcast illustrant la notion de combinaison linéaire dans des espaces de matrices. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 3, nous avons décidé de répartir les difficultés traitées dans les podcasts de façon à ce que chaque podcast ne prenne en charge trop de difficultés à la fois et que toutes les difficultés repérées soient illustrées dans au moins un podcast. Un débat similaire pourrait s'entamer concernant les espaces vectoriels construits sur d'autres champs scalaires que $\mathbb{C}$, mais comme nous l'avons dit dans le chapitre 3, cette difficulté concerne les structures algébriques, enseignées plus tôt dans le cours. De plus, elle compliquerait les calculs sans apporter une plus-value à nos questions de recherche.

Enfin, en référence à la première question de recherche, nous demandions si les podcasts mettent bien en lumière le caractère unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire en précisant qu'il s'agit du fait qu'une même notion peut être illustrée dans divers espaces vectoriels.

La série de podcasts illustrant chacun la notion de combinaison linéaire dans un cadre/espace vectoriel différent semble plaire au vu des réponses reçues à cette question.

Concernant l'organisation de la mise en oeuvre du dispositif, les cinq intervenants ont répondu que l'ordre conseillé était '`très bien`' choisi et qu'il serait bon de laisser les podcasts à disposition sur la plateforme Webcampus jusqu'à la date de l'examen. En outre, concernant le rythme de proposition des podcasts, trois intervenants sur cinq les proposeraient une par une, espacée dans le temps. Un assistant du cours INFOB123 a choisi cette proposition et l'a commentée en expliquant la philosophie de ce cours explicitée à la section 4.1. Les deux autres intervenants préfèreraient les proposer toutes en même temps au début du chapitre sur les espaces vectoriels.

Les cinq intervenants ont également répondu qu'ils aimeraient proposer les podcasts aux étudiants qu'ils prennent en charge. Nous leur avons également demandé ce qu'ils ont préféré dans les podcasts (question 18) de l'organigramme en figure 4.16). Les réponses à cette question sont en cohérence avec les questions de recherche de ce mémoire. Trois d'entre eux semblent sensibles à notre choix de mobiliser des praxéologies complètes et relèvent les commentaires théoriques constants soutenant chaque étape de la résolution. Deux intervenants semblent faire référence à l'obstacle du formalisme, spécificité de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Ils affirment que le détail des explications orales des podcasts montre que la rigueur est indispensable, même dans les exercices. Quatre intervenants sur cinq relèvent d'ailleurs la clarté des explications écrites et orales. En outre, selon deux intervenants sur cinq, l'identification des caractères unificateur et généralisateur semble être favorisée par le dispositif. Ceux-ci apprécient l'illustration de la même définition théorique d'une notion dans plusieurs espaces vectoriels et donc à des objets mathématiques différents. Un des deux projette même que "*ce dispositif serait un bon complément à proposer aux étudiants étant donné que, par manque de temps, il n'est pas possible le faire beaucoup*".

La question 20) de l'organigramme en figure 4.16 demandait aux intervenants de citer une autre notion pour laquelle un tel projet pourrait être réalisé et de justifier sa réponse. Les idées sont multiples mais voici quatre réponses particulièrement intéressantes :

- "*La construction de la représentation d'une application pour des bases données et le changement de base mériteraient un tel projet. Cela rassemble pratiquement toutes les notions vues au cours d'Informatique et reste indispensable en Sciences Mathématiques et en Sciences Physiques. Pour l'unification, on pourrait faire le lien avec la base des vecteurs propres qui simplifie souvent les choses, dans bien des domaines différents des mathématiques.*"
- "*La représentation matricielle d'une application est une notion fondamentale en algèbre linéaire qui pose souvent problème aux étudiants dans la mise en pratique aux séances d'exercices. Leur permettre de voir des vidéos à leur aise et en dehors du cours théorique des séances d'exercices leur serait bénéfique.*"
- *La Span est une notion qu'on utilise souvent et, pourtant, elle reste assez abstraite aux yeux des étudiants. Cela mériterait un tel projet l'illustrant pour divers espaces.*"
- "*Les étudiants ont du mal avec le concept de base duale. De plus, il peut s'appliquer à tous les espaces vectoriels, comme dans ce projet.*"

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Le projet de ce mémoire consistait à créer un dispositif de proposition de podcasts vidéos destinés aux débutants en algèbre linéaire et qui mettent en lumière le caractère unificateur de ce domaine. Afin de répondre à la première question de recherche, à savoir

Comment montrer aux débutants en algèbre linéaire
le caractère FUG de l'algèbre linéaire ?,

nous avons décidé de créer huit podcasts, chacun illustrant la notion de combinaison linéaire dans un cadre différent (au sens de Douady [21]), c'est-à-dire dans un espace vectoriel différent. La notion de combinaison linéaire est suffisamment élémentaire pour des débutants et permet de facilement varier les cadres. La structure générale de nos créations à laquelle nous sommes restées fidèles dans toutes les résolutions permet également de souligner cette répétition schématique quel que soit le cadre investi. Les podcasts ont été ordonnés de façon à graduer l'évolution dans les cadres considérés ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ... , applications linéaires), ce qui favorise l'identification du caractère unificateur de l'algèbre linéaire. Les avis recueillis lors de l'enquête réalisée auprès des assistants et collaborateurs didactiques des cours d'algèbre linéaire estiment positivement l'illustration de ce caractère dans notre dispositif. Le caractère formalisateur ne peut être évité dans un domaine comme celui de l'algèbre linéaire et le caractère généralisateur est souvent facilement identifiable lorsque le caractère unificateur est mis en évidence.

Nous avons également tenu compte des spécificités d'enseignement de l'algèbre linéaire comme l'obstacle du formalisme, relevé par Dorier [19] empêchant les apprenants de pouvoir se représenter les concepts d'algèbre linéaire, en raison de l'utilisation du formalisme qui augmente brusquement à l'entrée à l'université et devient peu à peu inévitable. Cet obstacle a été constaté dans les difficultés repérées lors de l'enquête auprès des étudiants mais sa prise en charge dans nos podcasts a été jugée positivement dans l'enquête destinée aux intervenants des séances des exercices et travaux de groupes. De plus, nous avons considéré le principe de généralisabilité des concepts, défini par Harel [26], qui est en rapport avec le caractère FUG des notions d'algèbre linéaire.

En parallèle de la gradation dans les cadres visant à révéler le caractère unificateur de la notion de combinaison linéaire, une deuxième question s'est posée :

Comment prendre en compte les difficultés repérées
chez les étudiants débutants en algèbre linéaire ?

Des difficultés repérées en algèbre linéaire dans la littérature, comme la résolution et l'interprétation des systèmes d'équations linéaires, et en particulier lorsqu'ils contiennent des nombres complexes, et les opérations sur les nombres complexes ont été prises en compte. Les difficultés à appréhender les fonctions dans leur dimension objet (au sens de Douady [21]), en tant qu'éléments d'un espace vectoriel, constitue également une difficulté repérée que nous avons tenté de prendre en charge dans nos podcasts et qui est en lien avec le principe de concrétisation d'Harel [26]. En plus de la gradation dans les cadres, nous avons donc veillé à ce qu'une deuxième gradation s'opère dans les difficultés prises en charge dans les podcasts, en les répartissant de manière progressive selon l'ordre conseillé pour visionner le dispositif.

Une difficulté supplémentaire pour les étudiants novices, à la transition secondaire/université, est de pouvoir rendre cohérentes les notions enseignées au cours théoriques lorsqu'elles sont mises en pratique lors des séances d'exercices. Dans nos enquêtes auprès des étudiants, nous avons pu vérifier cette difficulté. Notre troisième question de recherche

Comment permettre aux débutants en algèbre linéaire de construire des praxéologies complètes en algèbre linéaire ?

se pose alors, en référence à la TAD de Chevallard [11]. Dans les podcasts, nous avons veillé à toujours justifier les techniques engagées dans une tâche par des technologies, c'est-à-dire par un discours théorique sur la technique, joignant le bloc du savoir (*logos*) et le bloc du savoir-faire (*praxis*) de la praxéologie. Les retours des intervenants aux séances d'exercices et travaux de groupes du public ayant testé le dispositif montrent une évaluation positive des apports des podcasts au sujet de cette troisième question de recherche. Dans ce sens également, le choix du podcasting permet un travail en autonomie pour chaque apprenant, au rythme qui lui convient. En fin de podcasts, nous avons également proposé des exercices supplémentaires dans lesquels nous avons veillé à modifier les variables didactiques (au sens de Brousseau [7]) de manière stratégique et progressive. Ces modifications ont pour buts de rendre les illustrations et exercices les plus exhaustifs possibles et de prendre l'obstacle du formalisme en charge.

Ce dispositif a ensuite été mis en oeuvre auprès d'étudiants débutants en algèbre linéaire. Les contraintes institutionnelles dues à la proposition tardive du dispositif et au fait qu'un des groupes du public test n'était plus débutant dans ce domaine à ce moment-là, se sont ajoutées à l'impact des mesures sanitaires mises en place en raison du Covid-19. Par conséquent, les retours des étudiants aux enquêtes n'ont pas permis une réelle évaluation de notre dispositif dans cette mise en oeuvre en 2021. Il serait favorable de proposer les podcasts (ou une partie, selon la philosophie du cours) dés le début de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, surtout pour répondre à la première question de recherche concernant le caractère unificateur de l'algèbre. Il pourrait être présenté à un Atelier de mathématique organisé dans le cadre du cours SCMAT01, par exemple. Les étudiants auront alors plus de temps pour les consulter à leur aise, en fonction de leur propre rythme d'apprentissage et leurs besoins.

De plus, il serait nécessaire d'être plus explicite dans les informations et consignes fournies pour présenter le dispositif. Les podcasts pourraient être intitulés avec des titres plus parlants. Une vidéo introductive d'une minute ou un bref fichier écrit introduisant les objectifs du dispositif, les gradations dans les cadres et dans les difficultés prises en charge dans chaque podcast, permettrait certainement de susciter plus d'intérêt pour le dispositif. Indiquer aussi qu'en cas de difficultés d'interprétation des solutions d'un système d'équations linéaires, il est conseillé aux étudiants de visionner les trois premiers podcasts qui prennent en charge ces difficultés. Ou bien si un étudiant a des difficultés à travailler avec les nombres complexes ou les espaces vectoriels de fonctions, on peut lui conseiller de visionner les podcasts correspondant à ces difficultés. Le tableau en figure 3.12 pourrait être peaufiné et rendu compréhensible pour les élèves. En bref, le contenu des podcasts mis davantage en valeur permettrait peut-être aux étudiants d'en tirer des bénéfices dans leurs apprentissages. Après une mise en oeuvre adaptée et améliorée, il pourrait être judicieux de soumettre de nouvelles enquêtes auprès du nouveau public test.

Nous pourrions également illustrer la notion dans davantage d'espaces vectoriels, comme par exemple, des espaces de matrices rectangulaires. De plus, multiplier les difficultés prises en charge relatives aux systèmes d'équations pourrait être envisagé, pour améliorer les apports à notre deuxième question de recherche. Le projet pourrait également prendre plus d'ampleur et être appliqué à d'autres notions au fur et à mesure de l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Les retours des assistants et collaborateurs didactiques ont d'ailleurs été riches à ce sujet. La dépendance linéaire, la représentation d'une application linéaire dans une base et les changements de bases semblent notamment correspondre à un tel projet. De plus, nous n'avons considéré que des praxéologies locales dans ces podcasts, c'est-à-dire que nos praxéologie ne concernent qu'un seul type de tâche. Il n'est cependant pas exclu de travailler avec des praxéologies plus régionales, comme par exemple, déterminer si un ensemble donné est une base, tâche qui utilise la notion de combinaison linéaire. Enfin, l'illustration de notions intervenant davantage dans le contenu des séances d'exercices du public test permettrait également d'élargir la portée du dispositif et d'enrichir les liens avec nos questions de recherche.

En complément, lors d'un échange par mail avec un assistant du cours d'algèbre linéaire pour les étudiants en Informatique, il nous a suggéré un podcast supplémentaire illustrant la notion de combinaison linéaire grâce au système de couleur RGB utilisé par les ordinateurs et les imprimantes. Cet assistant réalise cet exemple concret lors de ses séances d'exercices. Cette idée est en lien avec le principe de nécessité d'Harel [26] qui souligne le besoin des étudiants de sentir la nécessité intellectuelle de ce qu'on lui enseigne. Nous avons tenu compte du principe de généralisabilité, en lien avec le caractère FUG des notions d'algèbre linéaire, et du principe de concrétisation, notamment en considérant les fonctions dans leur dimension objet. L'idée de cet assistant permettrait de tenir compte du troisième principe d'Harel pour une potentielle perspective. Cette considération nécessiterait d'introduire une quatrième question de recherche, à savoir "Comment montrer aux débutants en algèbre linéaire l'utilité des notions de ce domaine ?", et de considérer la dimension outil (au sens de Douady [21]) des concepts mathématiques.

Bibliographie

[1] ALVES DIAS M., *Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris, 1998

[2] ARSAC G., BEHAJ A., *La conception d'un cours d'algèbre linéaire*, La pensée sauvage - Recherche en didactique des mathématiques, vol.18, n°3, 333-370, 1998

[3] ARTIGUE M., DOUADY R., *Note de synthèse : Revue française de pédagogie*, volume 76, 69-88, 1986,
www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1986_num_76_1_1503, consulté le 2 mai 2020

[4] BÉCU-ROBINAULT K., *Support de cours - Didactique des Mathématiques*, Licence : Sciences de l'éducation, 3,
http://christian.schultz.free.fr/formationTICE/KBR_DidactikMaths.pdf , consulté le 4 mai 2020

[5] BOSCH M., CHEVALLARD Y., *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs*, La pensée sauvage - Recherches en didactique des mathématiques, vol.19, n°1, 77-124, 1999,
https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/, consulté le 8 mai 2020

[6] BRÉCHET T., *Covid-19 et décrochage scolaires : une bombe à retardement*, La Libre,
https://www.lalibre.be/debats/opinions/covid-19-et-decrochage-scolaire-une-bombe-a-retardement-6023ada1d8ad5844d1093d33 consulté le 24 avril 2021

[7] BROUSSEAU G., *Le contrat didactique : le milieu*, La pensée sauvage - Recherche en didactiques des mathématiques, 9 (9.3), 309-336, 1990, hal-00686012

[8] BROUSSEAU G., *La théorie des situations didactiques*, Conférence à Montréal, Université de Montréal, 1997,
http://math.unipa.it/g̃rim/brousseau_montreal_03.pdf, consulté le 24 avril 2021

[9] BRUN J., *Didactique des mathématiques*, Textes de base en pédagogie, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996

[10] CELLULE TICE, *Kit de survie pédagogique*, Modules 5 et 6, Cours en ligne, Université de Namur, Namur, 2021

[11] CHEVALLARD Y., *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique*, IUFM d'Aix-Marseille,
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf, consulté le 23 mars 2020

[12] CHEVALLARD Y., *La didactique, dites-vous ?*, Education et didactique, vol.4 - n°1, 139-148, 2010

[13] CHEVALLARD Y., *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Recherche en didactique des mathématiques, 1991

[14] COULANGE L., *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième*, Université de Grenoble, Education, Grenoble, 2000, tel-00624286

[15] DE BECKER E., *La grande menace : Le Covid-19 et l'angoisse des jeunes*, LouvainMedical, n°139, 355-359, Revue de la Faculté de Médecine et Médecine dentaire de l'Université catholique de Louvain, Louvain, 2020

[16] DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES (rédaction collective), *Syllabus d'exercices d'algèbre et géométrie analytique*, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[17] DE VLEESCHOUWER M., REMICHE M., *La création de vidéos par des groupes d'étudiants : vers un meilleur apprentissage ? - Illustration sur des concepts mathématiques*, Colloque Actes QPES, Grenoble, 2017

[18] DORIER J-L., *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire - Perspectives théorique sur leurs interactions*, Laboratoire Leibniz-IMAG, n°12, Grenoble, 2000

[19] DORIER J-L. et al., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage - Recherches en didactique des mathématiques, Grenoble, 1997

[20] DORIER J-L. et al., *Enseigner les mathématiques : Didactique et enjeux de l'apprentissage*, glossaire, pp.498-508, Guide de l'enseignement, Belin Éducation, Paris, 2018

[21] DOUADY R., *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, REPERES, IREM, n°6, 132-158, Paris, 1992

[22] DOUADY R., *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*, Repères IREM, n°15, Topiques Edition, IREM Paris-VII, Paris, 1994

[23] DUVAL R., *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°5, 37-65, IREM de Strasbourg, 1993, `https://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf`, consulté le 24 avril 2021

[24] GHEDASMI I., TANAZEFTI R., *Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de secondaire*, Petit x, n°68, 29-52, Université de Tunis, Tunis, 2015
`https://www.researchgate.net/publication/328080322_Difficultes_d%27apprentissage_des_nombres_complexes_en_fin_de_secondaire` consulté le 24 mars 2021

[25] GULINA M., EVRARD T., *Algèbre Linéaire : Recueil d'exercices*, syllabus, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[26] HAREL G., *Sur trois principes d'apprentissage et d'enseignement : le cas de l'algèbre linéaire* dans [19], La pensée sauvage - Recherches en didactique des mathématiques, 215-230, Grenoble, 1997

[27] LALAUDE-LABAYLE M., *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*, Thèse en didactique des mathématiques, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, 2016,
`https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01419021/document` consulté le 20 mars 2021

[28] LEMAITRE A. *Géométrie analytique et algèbre : 1er Baccalauréat en mathématique et physique*, syllabus, Département de Mathématiques, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[29] LEMAITRE A. *Algèbre linéaire I : 1er Baccalauréat en mathématique et physique*, syllabus, Département de Mathématiques, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[30] LIBERT A-S., *Initiation à la démarche mathématique*, syllabus, Département de Mathématiques, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[31] REMICHE M-A., *Fondements mathématiques pour l'informatique (première partie)*, syllabus, Faculté d'Informatique, Université de Namur, Namur, 2020-2021

[32] ROBERT A., ROGALSKI M., *L'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille* et *À propos du levier "méta"* dans [19], La pensée sauvage - Recherches en didactique des mathématiques, 149-213, Grenoble, 1997

[33] ROLAND N., EMPLIT P., *Enseignement transmittif, apprentissage actif : usages du podcasting par les étudiants universitaires*, Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur, 31(1), Bruxelles, 2015

[34] ROSSEEL H., SCHNEIDER M., *Ces nombres que l'on dit « imaginaires »*, Petit x, n°63, Ladimath, Université de Namur, Namur, 2003
`https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/177961/1/PETIT%20X%2063.complexes.pdf` consulté le 24 mars 2021

[35] SARTENAER A., *Algèbre (première partie) : Baccalauréat en sciences informatiques (Bloc 1)*, syllabus, Université de Namur, Namur, 2020-2021

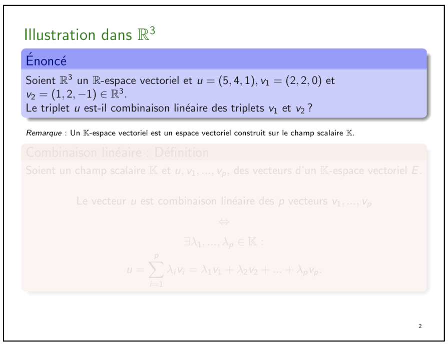
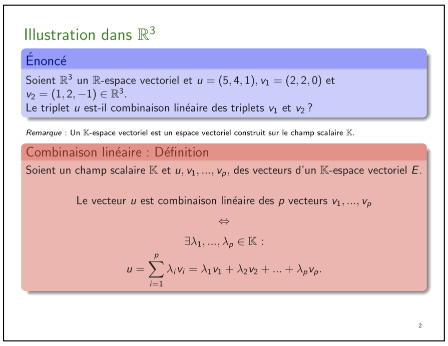
[36] VANDEBROUCK F., *Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions*, Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, n°16, 149-185, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), Paris, 2011, hal-00654184

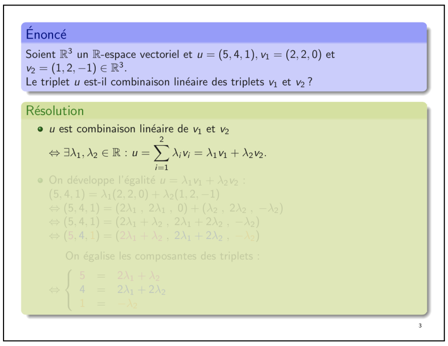
[37] VIAU R., *La motivation : condition au plaisir d'apprendre et d'enseigner en contexte scolaire*, 3e congrès des chercheurs en Éducation, Bruxelles, 2004

Annexes

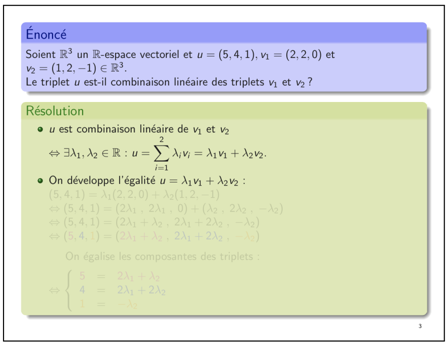
Nous reprenons ci-dessous, pour chaque podcast, les diapositives et le discours oral associé.

Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°1

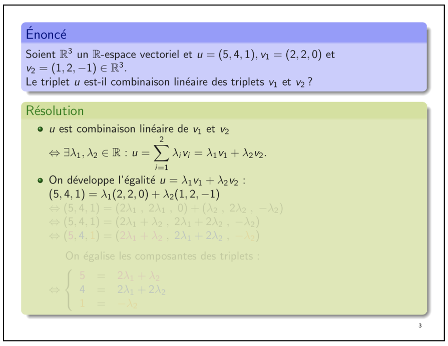
Diapositives	Discours oral
	Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$.
	Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et u, v_1 et v_2 des triplets de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si le triplet u est combinaison linéaire des deux autres triplets v_1 et v_2.
	Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc. jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, pour savoir si u est combinaison linéaire des deux autres triplets, nous allons essayer de trouver deux scalaires λ_1 et λ_2 qui appartiennent au champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, et tels que nous avons cette égalité (le curseur indique l'égalité à l'écran).



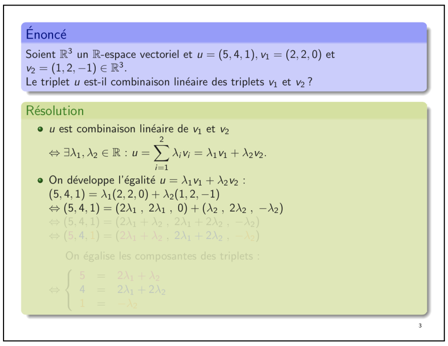
Donc u sera combinaison linéaire de v_1 et v_2 si et seulement si nous parvenons à trouver ces deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.



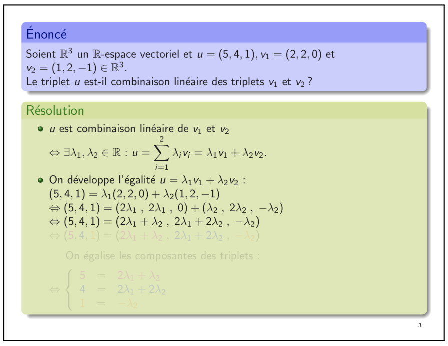
On va donc développer cette égalité.



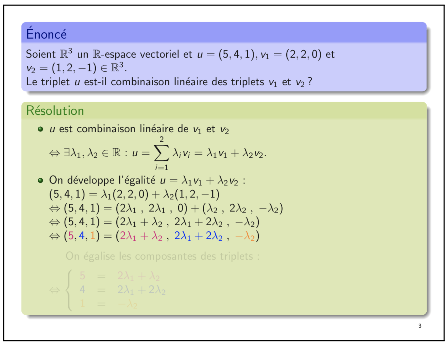
Premièrement, on remplace les triplets par leurs composantes données dans l'énoncé.



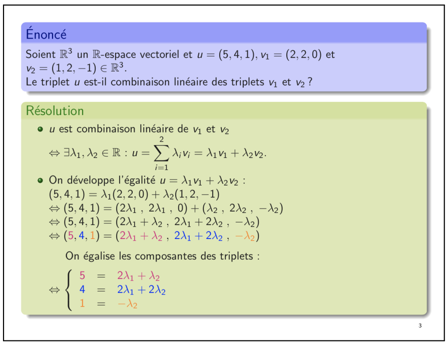
Ensuite, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par un triplet. C'est-à-dire que multiplier un scalaire par un triplet revient à multiplier chacune des composantes de ce triplet par le scalaire.



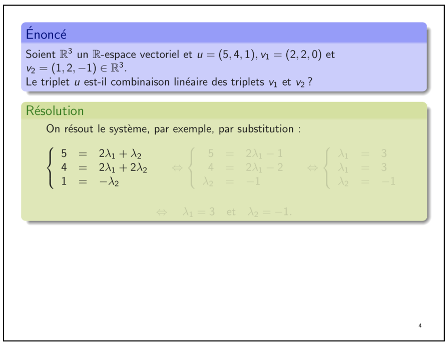
Puis, on utilise la définition de la somme de deux triplets. C'est-à-dire que sommer deux triplets revient à sommer leurs composantes deux à deux. On obtient donc une égalité entre deux triplets.



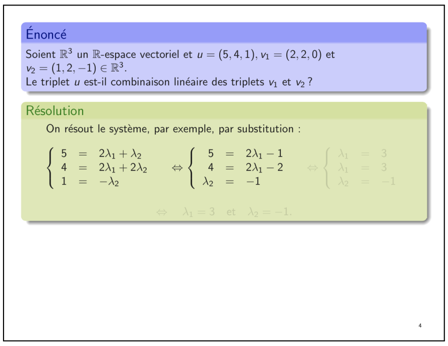
Or, on sait que deux triplets sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux. On va donc égaliser les composantes des deux triplets ...



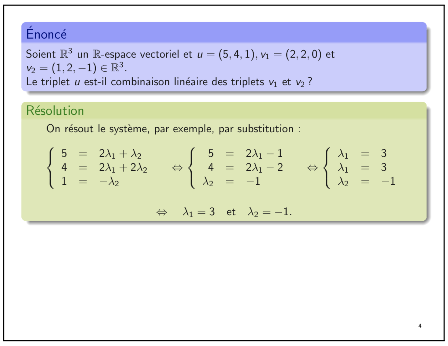
... pour obtenir un système de trois équations à deux inconnues. Les deux inconnues sont λ_1 et λ_2.



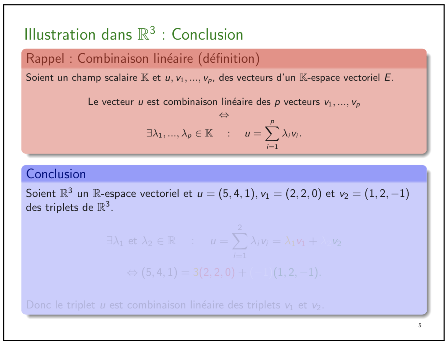
On peut résoudre ce système, par exemple, par substitution.



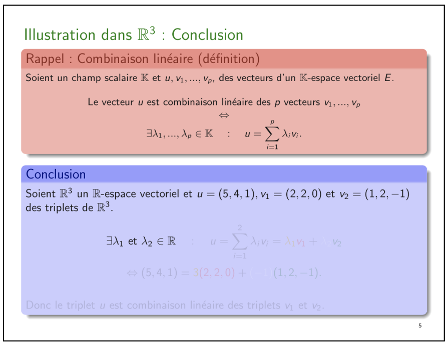
Tout d'abord, on repère que la dernière équation nous donne $\lambda_2 = -1$. On peut substituer ce λ_2 dans les deux autres équations qui contiennent du λ_2. À ce stade, on se rend compte qu'on n'a plus aucune inconnue à exprimer en fonction d'autres.



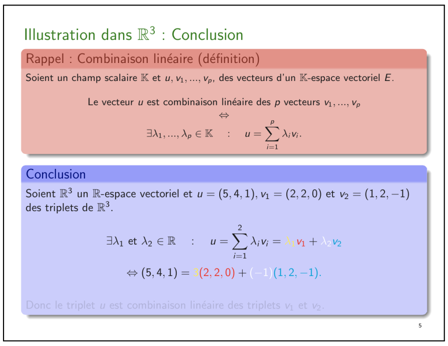
On isole donc λ_1 dans les deux premières équations et on se rend compte que toutes les équations du système sont vérifiées pour $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.



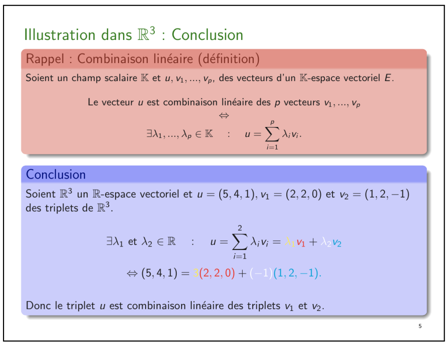
Donc, si on reprend la définition de départ, ...



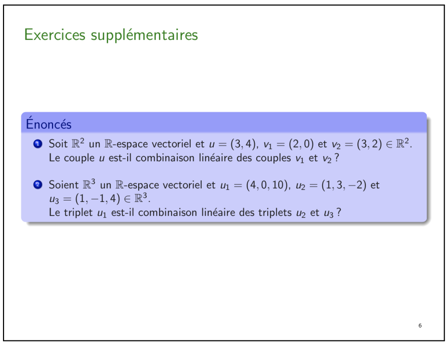
... on a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ ...



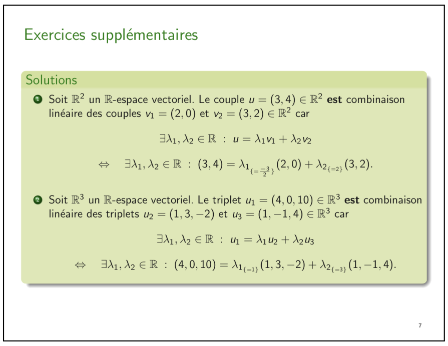
... tels que le triplet u est égal "au premier scalaire λ_1 fois le premier triplet v_1, plus le deuxième scalaire λ_2 fois le deuxième triplet v_2".



Donc, on peut conclure que le triplet u est bien combinaison linéaire des deux autres triplets v_1 et v_2.



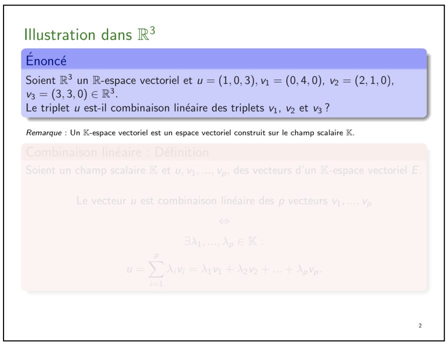
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



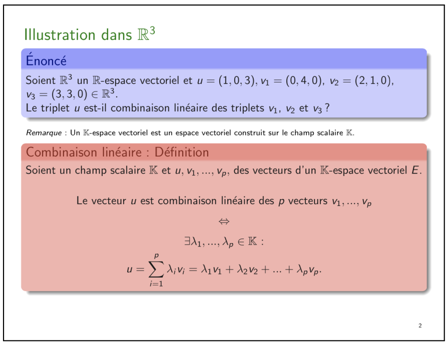
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°2

Diapositives | Discours oral

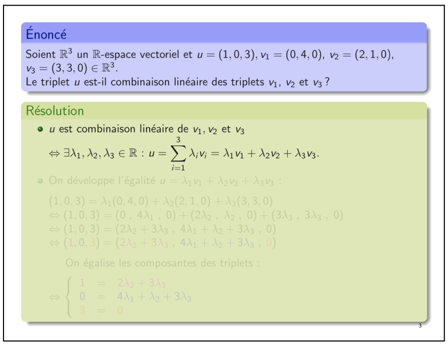
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$.



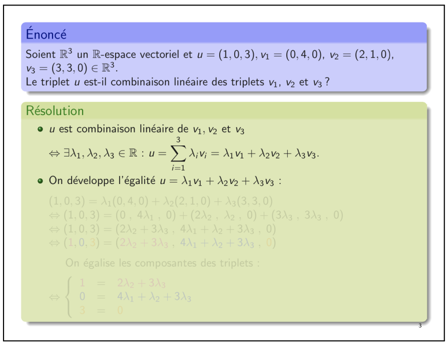
Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et u, v_1, v_2 et v_3 des triplets de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si le triplet u est combinaison linéaire des trois autres triplets.



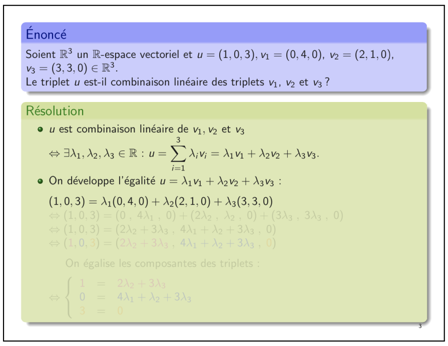
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, pour savoir si u est combinaison linéaire des trois autres triplets, nous allons essayer de trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 qui appartiennent au champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, et tels que nous avons cette égalité (le curseur indique l'égalité à l'écran).



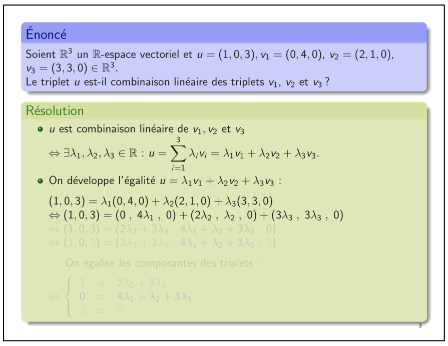
Donc u sera combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 si et seulement si nous parvenons à trouver ces trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.



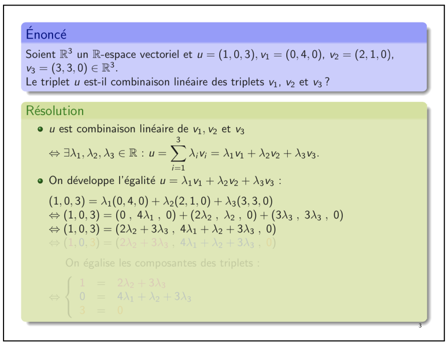
On va donc développer cette égalité.



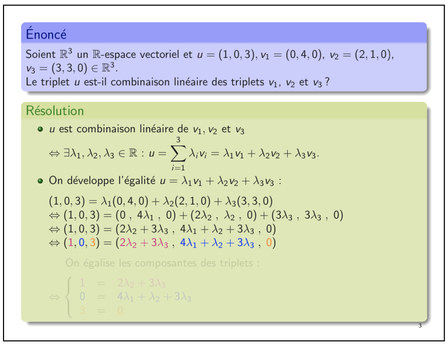
Premièrement, on remplace les triplets par leurs composantes données dans l'énoncé.



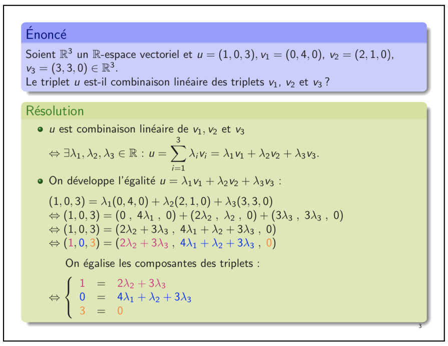
Ensuite, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par un triplet. C'est-à-dire que multiplier un scalaire par un triplet revient à multiplier chacune des composantes de ce triplet par le scalaire.



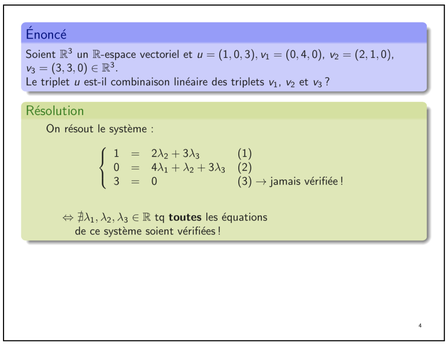
Puis, on utilise la définition de la somme de plusieurs triplets. C'est-à-dire que sommer plusieurs triplets revient à sommer leurs composantes correspondantes. On obtient donc une égalité entre deux triplets.



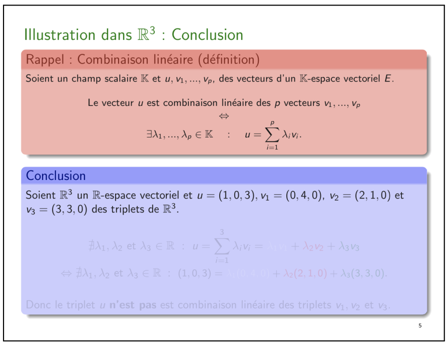
Or, on sait que deux triplets sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux. On va donc égaliser les composantes des deux triplets ...



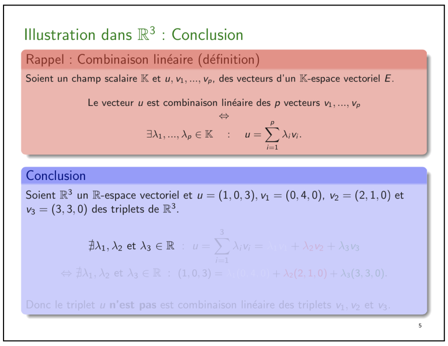
... pour obtenir un système de trois équations à trois inconnues. Les trois inconnues sont λ_1, λ_2 et λ_3.



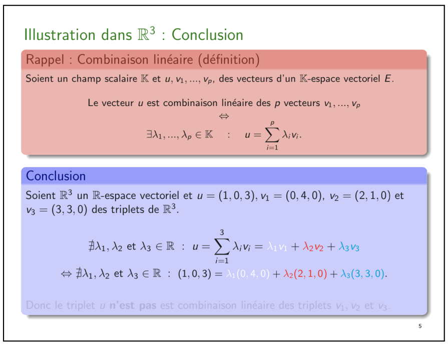
Quand on veut résoudre le système, on se rend compte directement que l'équation (3) n'est jamais vérifiée. On n'a jamais "3=0". On peut donc conclure qu'on ne parviendra jamais à trouver λ_1, λ_2 et λ_3, dans l'ensemble des réels, qui vérifient toutes les équations du système.



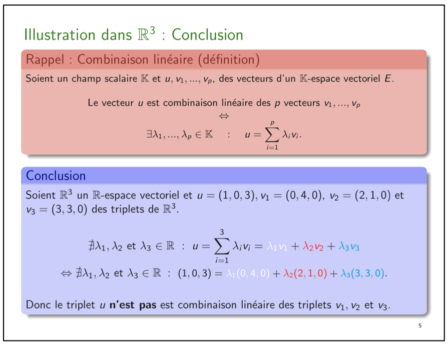
Donc, si on reprend la définition de départ, ...



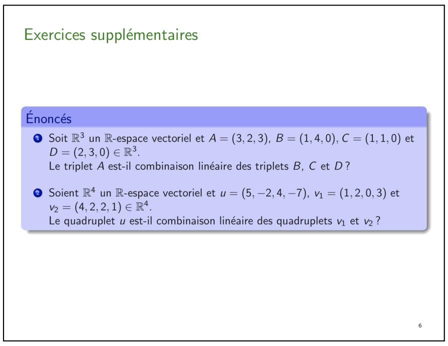
… nous n'avons pas pu trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ …



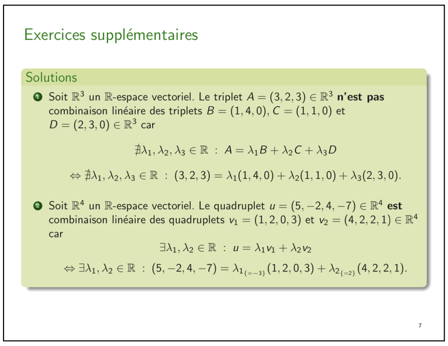
… tels que le triplet u soit égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.



Donc, comme nous n'avons pas pu trouver ces λ tels que nous avons cette égalité, nous pouvons conclure que le triplet u n'est pas combinaison linéaire des trois autres triplets.



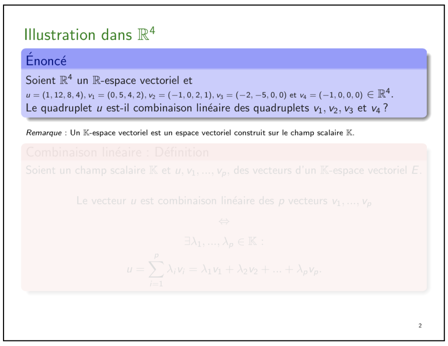
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



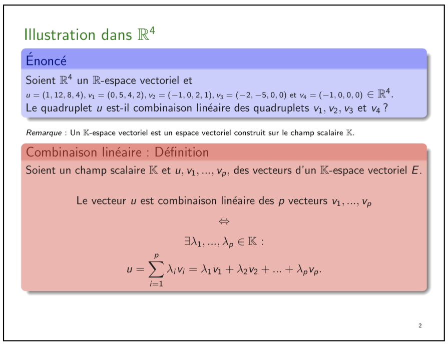
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^n$ - vidéo n°3

Diapositives	Discours oral

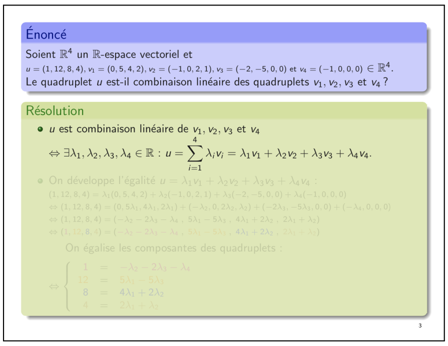
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans $\mathbb{R}^n$.



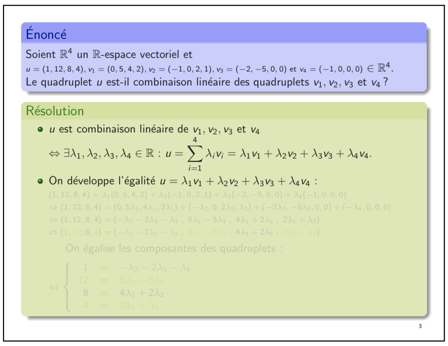
Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et u, v_1, v_2, v_3 et v_4 des quadruplets de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si le quadruplet u est combinaison linéaire des quatre autres quadruplets.



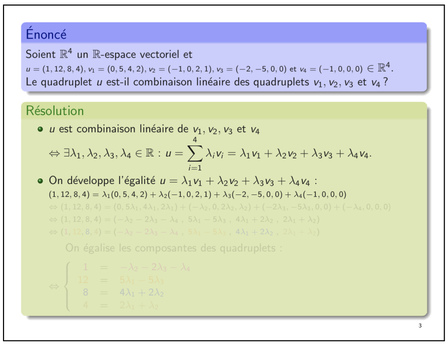
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, les scalaires seront des réels, le champ $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$. L'espace vectoriel E sera $\mathbb{R}^4$ muni de l'addition classique définie sur les quadruplets et de la multiplication d'un scalaire par un quadruplet. Et p sera égal à 4 étant donné que nous voulons savoir si u est combinaison linéaire de quatre autres quadruplets.



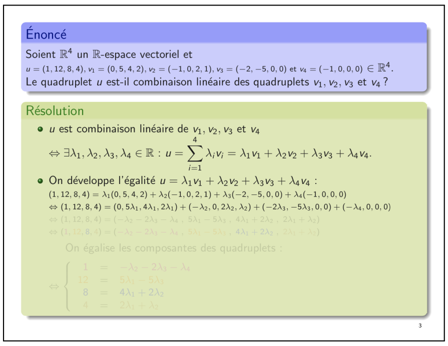
Donc u sera combinaison linéaire des quatre autres quadruplets si et seulement si nous parvenons à trouver quatre scalaires λ_i dans $\mathbb{R}$ tels que u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$.



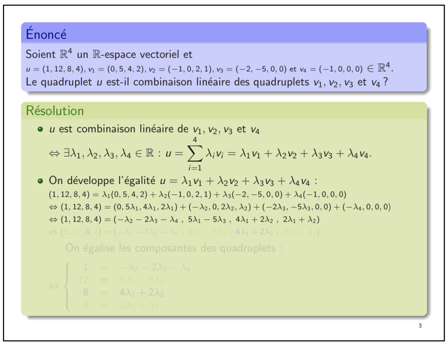
On va donc développer cette égalité.



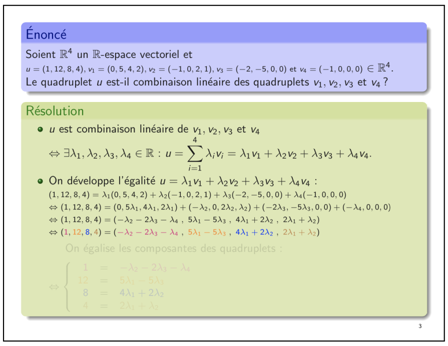
Premièrement, on remplace les quadruplets par leurs composantes données dans l'énoncé.



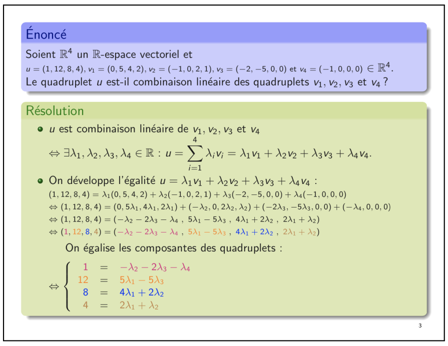
Ensuite, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par un quadruplet.



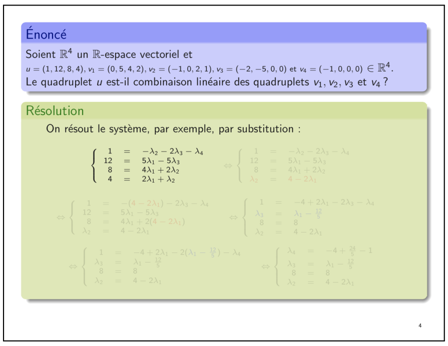
Puis, on utilise la définition de la somme de plusieurs quadruplets. C'est-à-dire que sommer plusieurs triplets revient à sommer leurs composantes correspondantes. On obtient donc une égalité entre deux quadruplets.



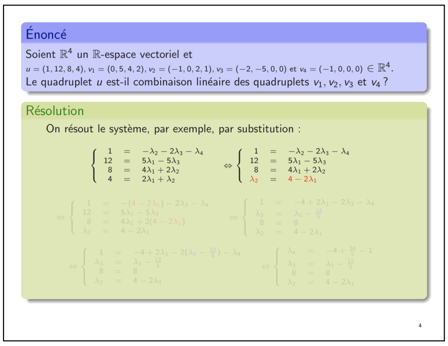
Or, on sait que deux quadruplets sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux. On va donc égaliser les composantes des deux quadruplets ...



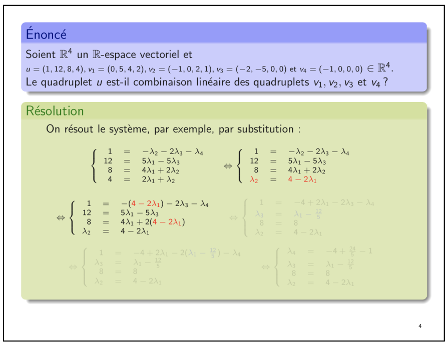
... pour obtenir un système de quatre équations à quatre inconnues.



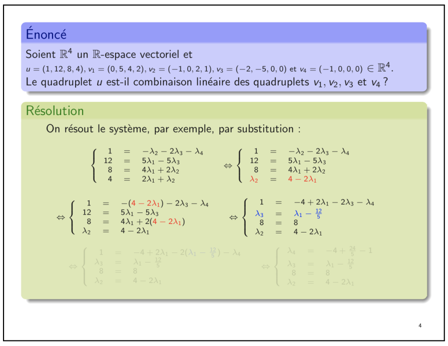
Ce système, on peut le résoudre, par exemple, par substitution. Tout d'abord, on repère que la dernière équation est celle avec laquelle on peut isoler des inconnues le plus facilement. En effet, dans cette équation, on isole facilement λ_2 étant donné que son coefficient est 1. On aurait pu aussi commencer par une autre équation comme la deuxième ou la troisième dans lesquelles on aurait pu isoler λ_1 ou λ_3, donc c'est un choix. Grâce à la dernière équation, on trouve facilement $\lambda_2 = ...$



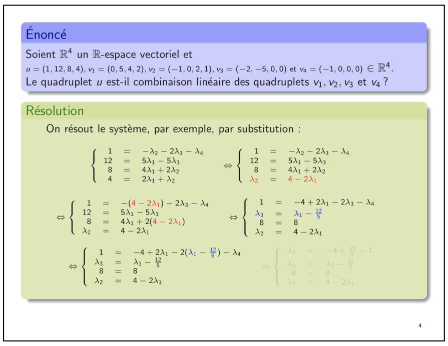
...$4 - 2\lambda_1$.



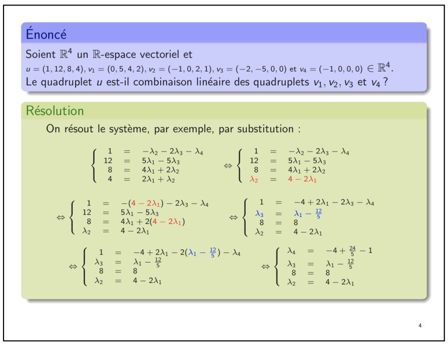
On va pouvoir substituer ce $lambda_2$ dans les équations qui contiennent du λ_2.



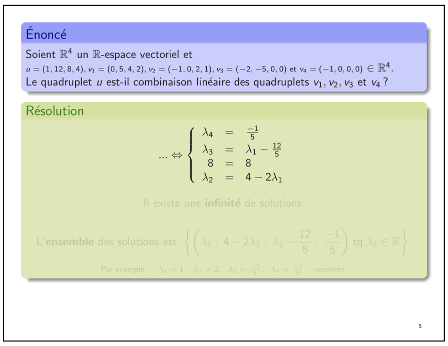
Ensuite, on isole λ_3 dans la deuxième équation et on obtient $\lambda_3 = \lambda_1 - \frac{12}{5}$.



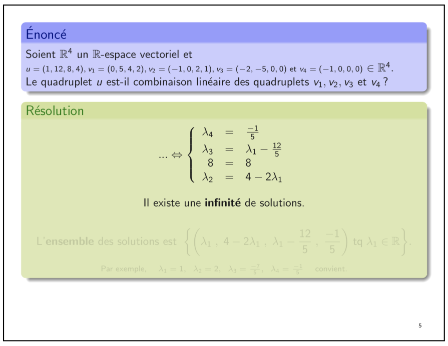
On peut substituer ce λ_3 dans la première équation.



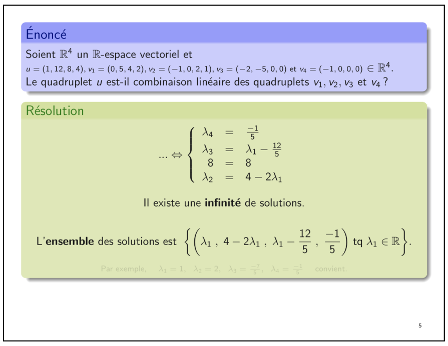
Et enfin, on peut isoler λ_4 dans la première équation.



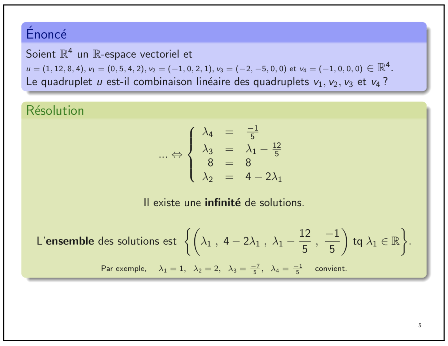
On remarque que le système ne peut pas être plus simplifié et que λ_2 et λ_3 sont exprimés en fonction de λ_1.



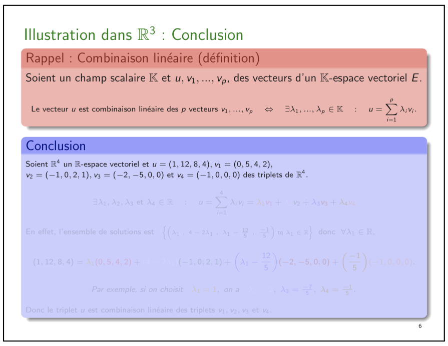
En fait, le système admet une infinité de solutions, c'est-à-dire que quel que soit le λ_1 qu'on choisisse dans l'ensemble des réels, on aura une solution dépendant de ce λ_1.



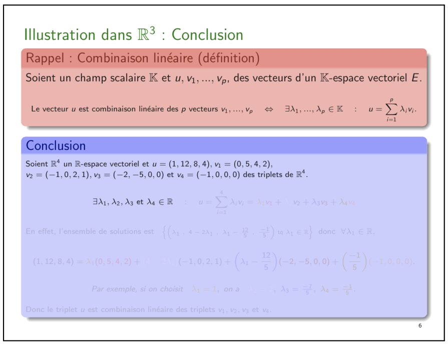
On a donc un ensemble de solutions qui vérifient toutes les équations du système.



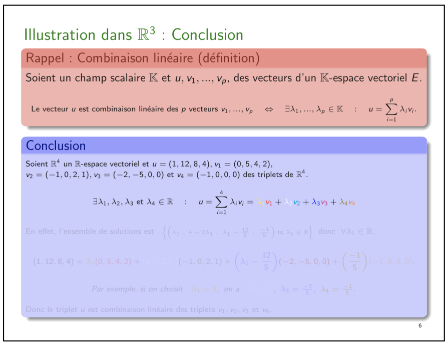
Par exemple, si on prend λ_1 qui vaut 1, on a une des solutions possibles aux équations du système avec λ_2 qui vaut 2, λ_3 qui vaut $\frac{-7}{5}$ et λ_4 qui est toujours fixé et qui vaut $\frac{-1}{5}$.



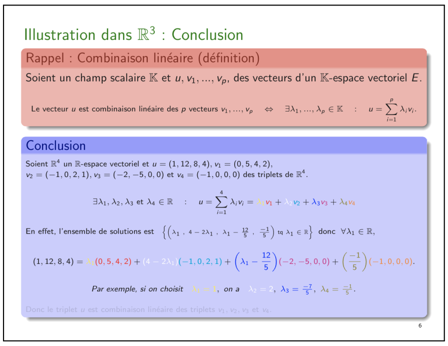
Donc, si on reprend la définition de départ, ...



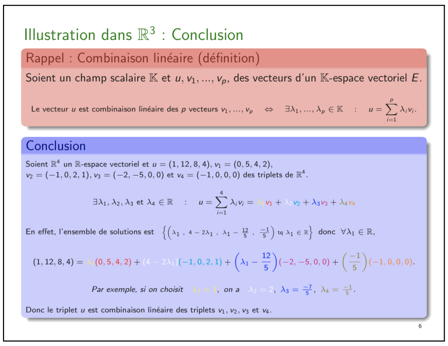
... on a bien trouvé quatre scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 dans $\mathbb{R}$ ...



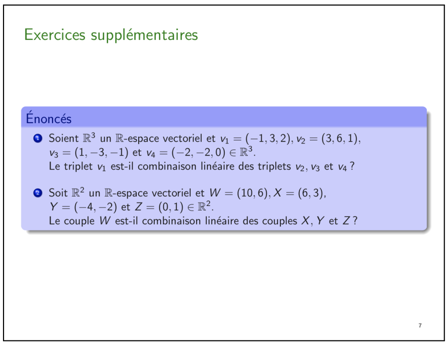
... tels que le quadruplet u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$.



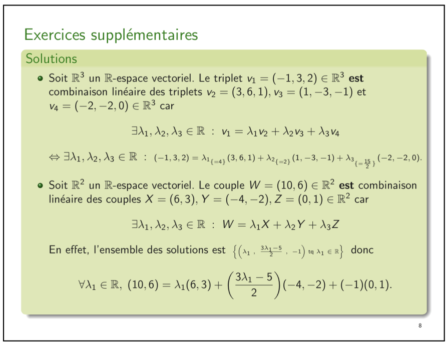
En fait, on a même trouvé une infinité de solutions telles que cette égalité est vérifiée.



On peut donc conclure que le quadruplet u est combinaison linéaire des quatre autres quadruplets.



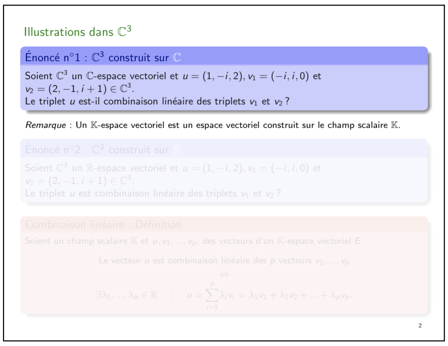
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



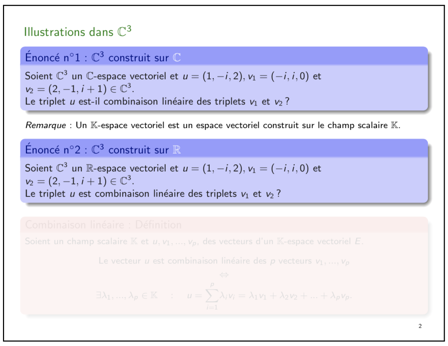
Les combinaisons linéaires dans $\mathbb{C}^n$

Diapositives	Discours oral

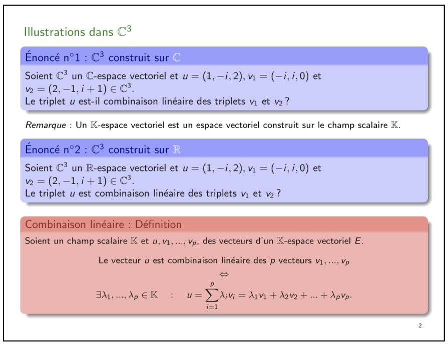
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans $\mathbb{C}^n$.



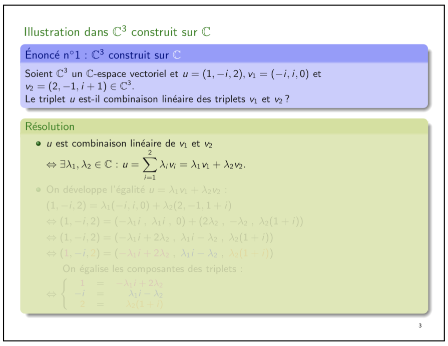
Voici les deux questions que nous allons nous poser : Pour la première, nous considérerons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{C}$ et u, v_1 et v_2 des triplets de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si le triplet u est combinaison linéaire des deux autres triplets v_1 et v_2.



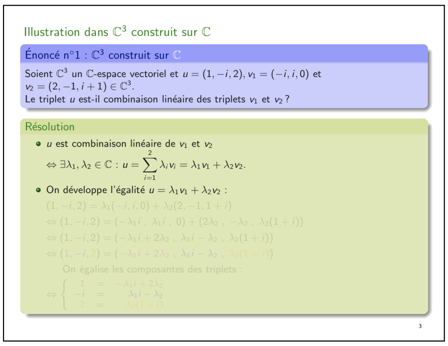
Pour la deuxième question, nous prendrons les même triplets mais nous considérerons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ cette fois construit sur $\mathbb{R}$ et non plus sur $\mathbb{C}$.



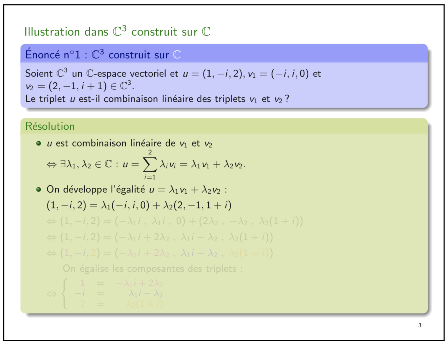
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour nos exemples, pour savoir si u est combinaison linéaire des deux autres triplets, nous allons essayer de trouver deux scalaires λ_1, λ_2 qui valident cette égalité (le curseur indique l'égalité à l'écran) et qui appartiennent au champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, c'est-à-dire les complexes (le curseur indique $\mathbb{C}$ à l'écran) pour la première question et les réels (le curseur indique $\mathbb{R}$ à l'écran) pour la deuxième.



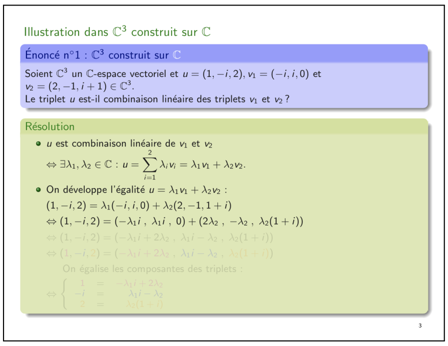
Donc pour la première question, u sera combinaison linéaire de v_1 et v_2 si et seulement si nous parvenons à trouver deux scalaires λ_1 et λ_2 dans les complexes tels que u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.



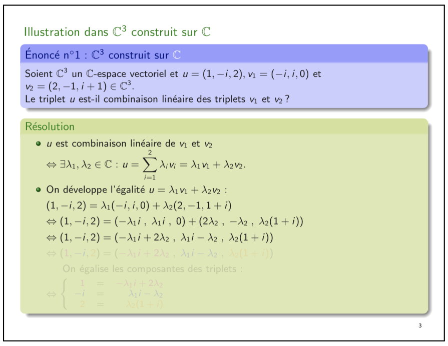
On va développer cette égalité.



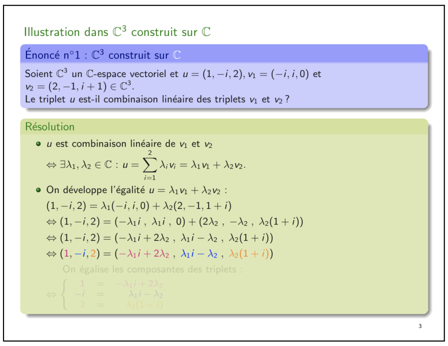
Premièrement, on remplace les triplets par leurs composantes données dans l'énoncé.



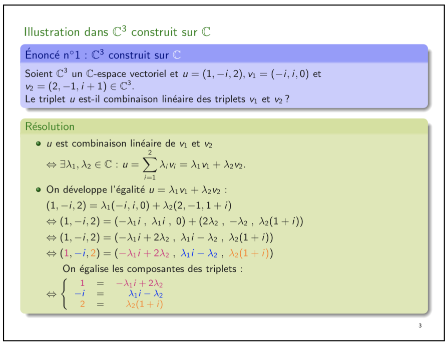
Ensuite, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par un triplet.



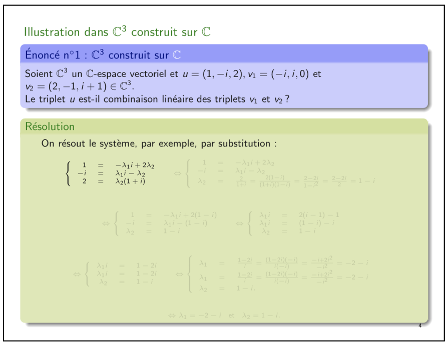
Puis, on utilise la définition de la somme de deux triplets. On obtient, à ce stade, une égalité entre deux triplets.



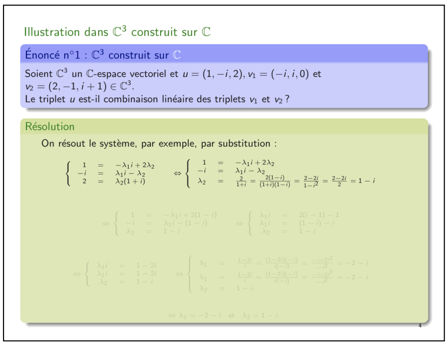
Or, on sait que deux triplets sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux.



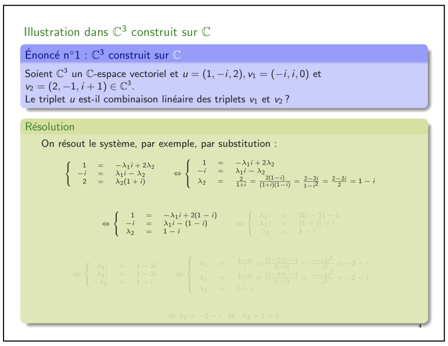
On va donc égaliser les composantees des deux triplets pour obtenir un système de trois équations à deux inconnues : λ_1 et λ_2.



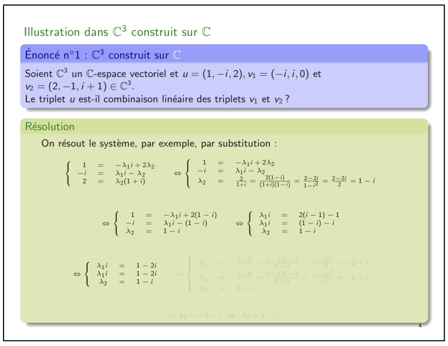
On peut résoudre ce système, par exemple, par substitution.



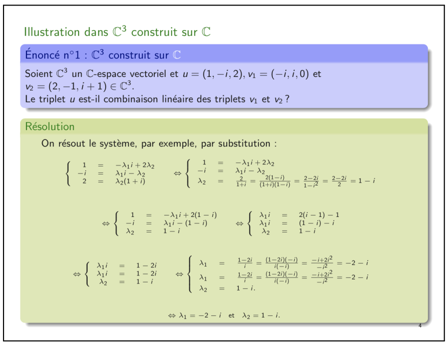
Tout d'abord, on repère que la dernière équation ne contient que du λ_2. On peut donc isoler λ_2 et obtenir $\frac{2}{1+i}$. Pour obtenir λ_2 sous sa forme algébrique, avec une partie réelle et une partie imaginaire (le curseur les indique à l'écran), il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur (le curseur les indique à l'écran) par $(1-i)$ qui est le conjugué du dénominateur $(1+i)$ obtenu en changeant le signe de sa partie imaginaire (le curseur indique tout à l'écran).



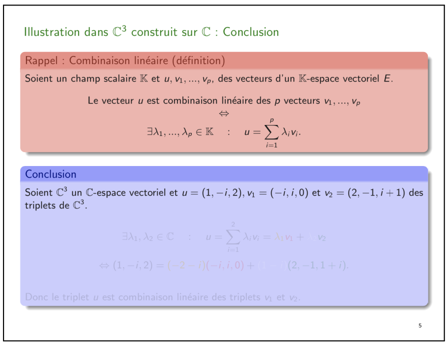
On va pouvoir substituer λ_2 dans les deux premières équations (le curseur indique les substitutions à l'écran). À ce stade, on n'a plus aucune inconnue à exprimer en fonction d'autres.



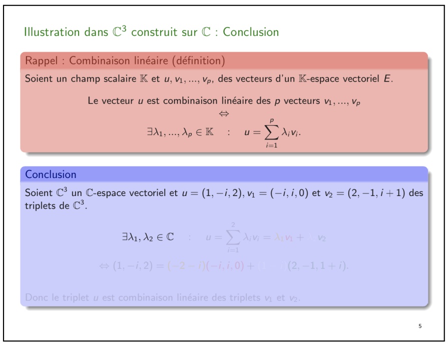
On peut alors isoler λ_1 dans les deux premières équations.



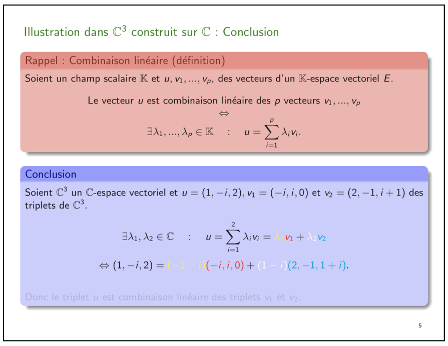
Et pour obtenir λ_1 sous sa forme algébrique, on multiplie de nouveau le numérateur et le dénominateur par $(-i)$ qui est le conjugué du dénominateur i, obtenu en changeant le signe de sa partie imaginaire (le curseur indique tout à l'écran). On se rend compte que toutes les équations du système sont bien vérifiées pour $\lambda_1 = -2 - i$ et $\lambda_2 = 1 - i$.



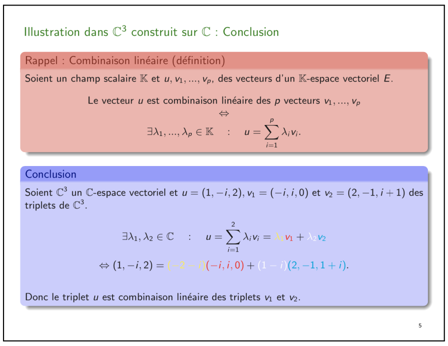
Si on reprend la définition de départ, ...



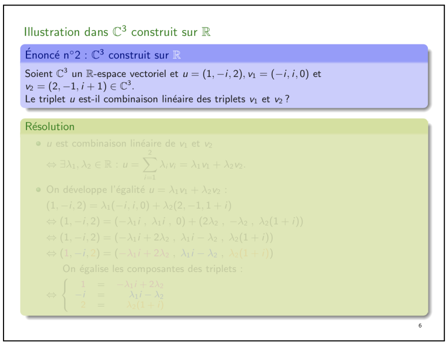
On a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans les complexes ...



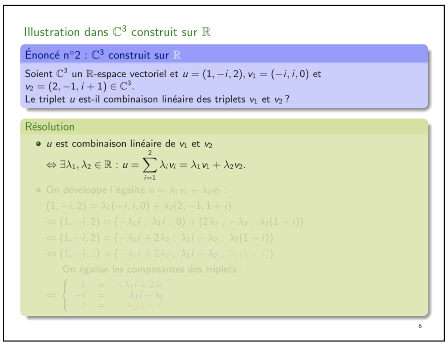
... tels que le triplet u est égal "au premier scalaire λ_1 fois le premier triplet v_1, plus le deuxième scalaire λ_2 fois le deuxième triplet v_2".



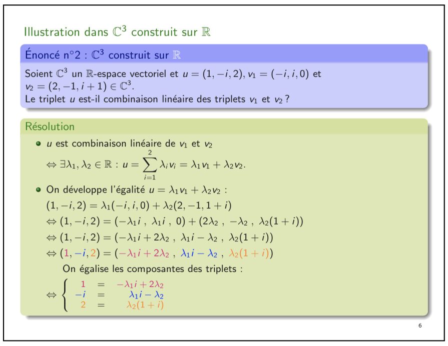
On peut donc conclure que le triplet u est bien combinaison linéaire des deux autres triplets v_1 et v_2.



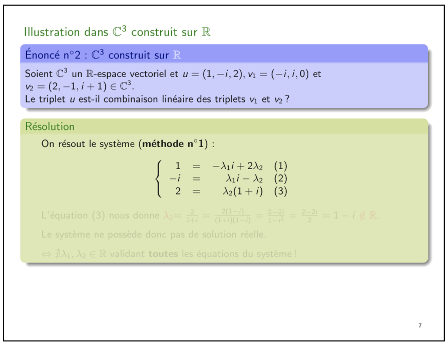
Pour la deuxième question, comme expliqué précédemment, ...



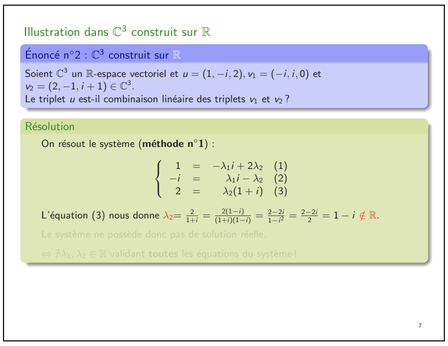
... u sera combinaison linéaire de v_1 et $v°2$ si et seulement si nous parvenons à trouver λ_1 et λ_2 cette fois-ci dans $\mathbb{R}$ tels que u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Par rapport à la question précédente, nous n'avons changé que le champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel. Par conséquent, la résolution est identique à la première question ...



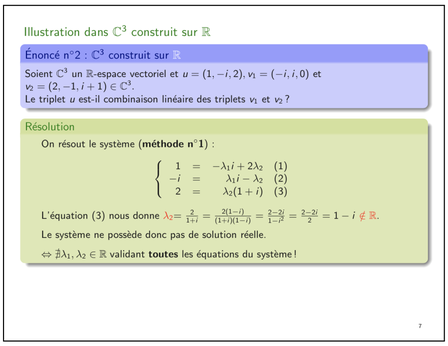
... jusqu'à ce qu'on obtienne le système d'équations en égalisant les composantes des triplets. Pour résoudre ce système, deux méthodes s'offrent à nous.



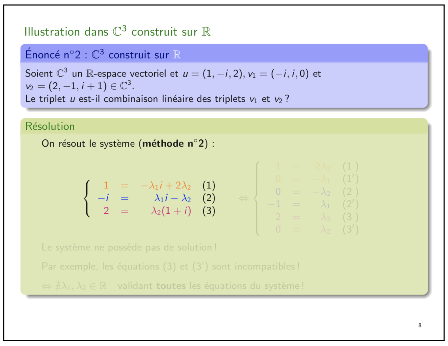
La première consiste à repérer directement que la troisième équation ...



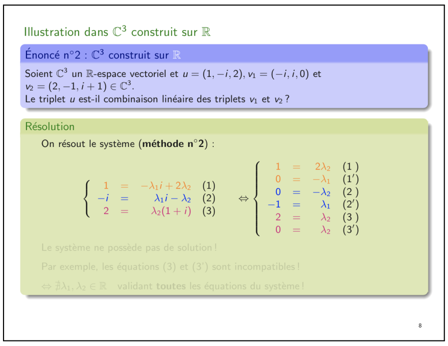
... nous donne $\lambda_2 = 1 - i$. Or, $(1 - i)$ est un nombre complexe avec une partie réelle et une partie imaginaire et n'appartient donc pas à $\mathbb{R}$.



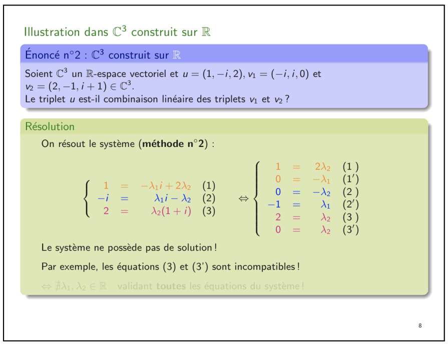
On peut donc conclure qu'on ne parviendra jamais à trouver λ_1 et λ_2 dans les réels, tels que toutes les équations du systèmes seront vérifiées.



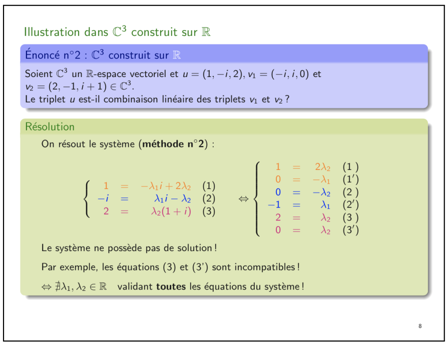
La deuxième méthode pour résoudre le système utilise la définition de l'égalité entre deux nombres complexes donnés sous leur forme algébrique. Deux nombres complexes donnés sous leur forme algébrique sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et si leurs parties imaginaires sont aussi égales. En fait, chaque équation du système est une égalité entre deux nombres complexes. Par exemple, la première équation (le curseur montre tout à l'écran) est l'égalité entre le nombre complexe $(1 + 0i)$ et le nombre complexe $-\lambda_1 i + 2\lambda_2$. On va donc dédoubler chaque équation du système en deux équations réelles.



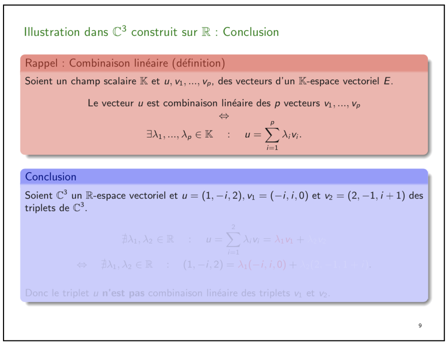
Par exemple, pour la première équation, on égalise la partie réelle du membre de gauche qui vaut 1 à la partie réelle du membre de droite qui vaut $2\lambda_2$. On obtient la première équation du nouveau système (le curseur montre tout à l'écran sur les deux systèmes). Ensuite, on égalise la partie imaginaire du membre de gauche qui vaut 0 à la partie imaginaire du membre de droite qui vaut $-\lambda_1$ et on obtient la seconde équation du nouveau système (le curseur montre tout à l'écran sur les deux systèmes). Et ainsi de suite pour chaque équation du système. On obtient donc un système de 6 équations à 2 inconnues (λ_1 et λ_2) et au moment de le résoudre, on se rend compte qu'il n'a pas de solution.



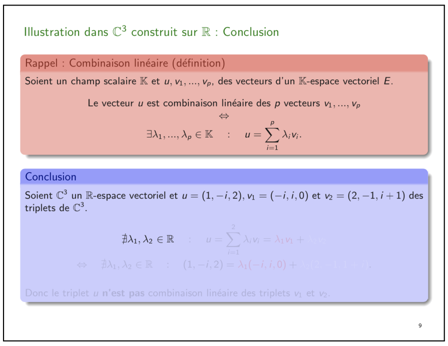
Par exemple, on remarque que les équations (3) et (3') sont incompatibles, elles ne peuvent jamais être vérifiées en même temps. On aurait aussi pu justifier cela en remarquant, par exemple, que les équations (1') et (2') sont aussi incompatibles.



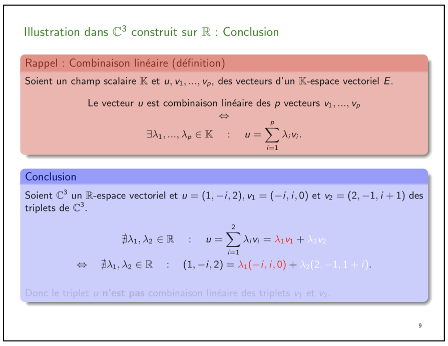
On peut donc en conclure qu'on ne pourra jamais trouver λ_1 et λ_2 dans les réels tels que toutes les équations du système seront vérifiées.



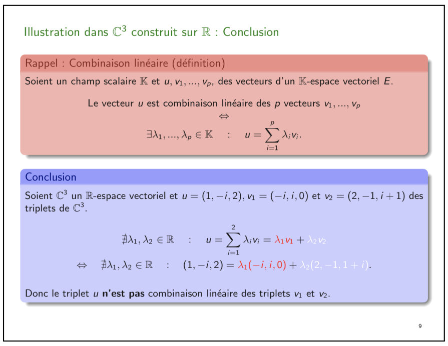
Donc, si on reprend la définition de départ,



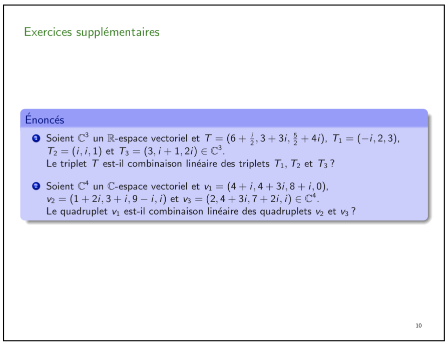
Comme nous n'avons pas pu trouver deux scalaire λ_1, λ_2 dans les réels ...



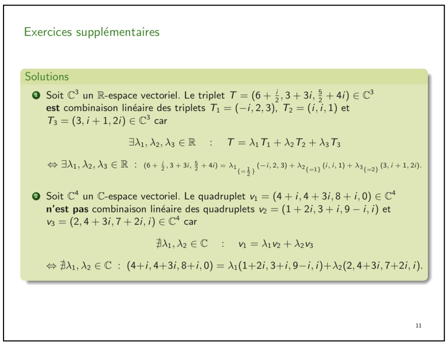
... tels que le triplet u est égal à $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, ...



... on peut conclure que le triplet u n'est pas combinaison linéaire des deux autres triplets v_1 et v_2.



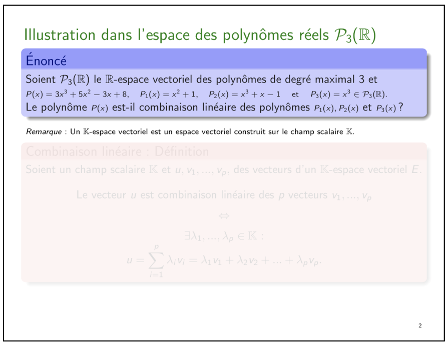
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



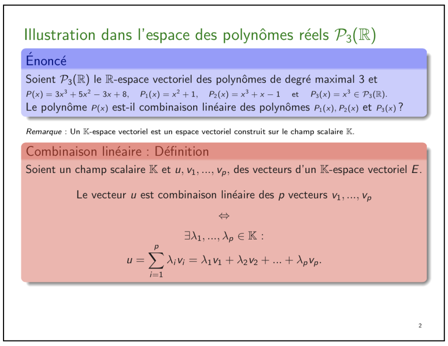
Les combinaisons linéaires dans des espaces de polynômes

Diapositives	Discours oral

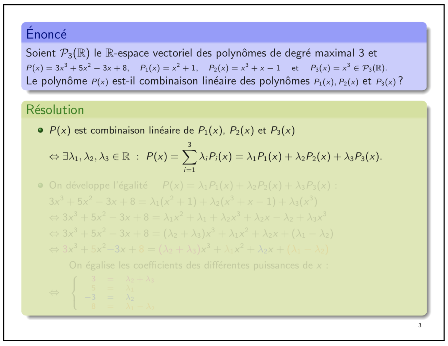
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans un espace de polynômes.



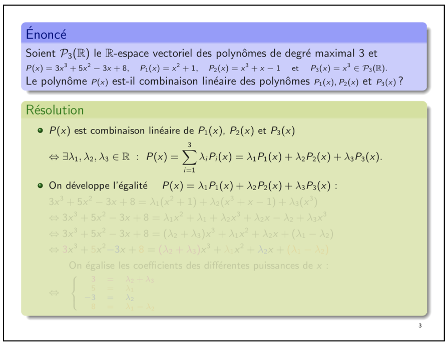
Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel des polynômes de degré maximal 3 construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$ des polynômes de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si le polynôme $P(x)$ est combinaison linéaire des trois autres polynômes.



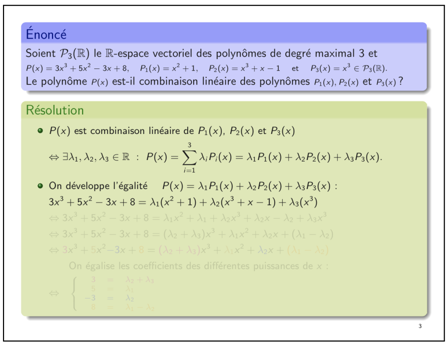
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, pour savoir si le polynôme $P(x)$ est combinaison linéaire des trois autres polynômes, nous allons essayer de trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 qui appartiennent au champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, et tels que nous avons cette égalité (le curseur indique l'égalité à l'écran).



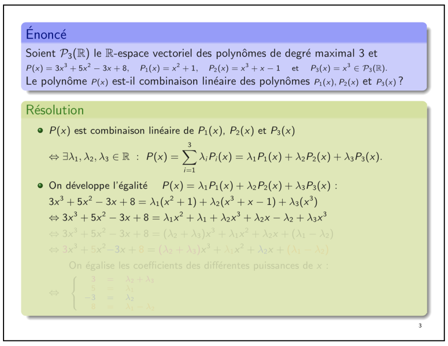
Donc $P(x)$ sera combinaison linéaire de P_1, P_2 et $P_3(x)$ si et seulement si nous parvenons à trouver ces trois scalaires dans $\mathbb{R}$ tels que $P(x)$ est égal à $\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x)$.



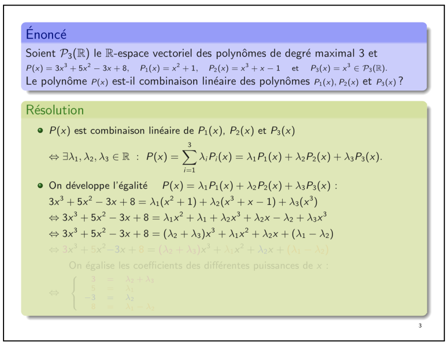
On va donc développer cette égalité.



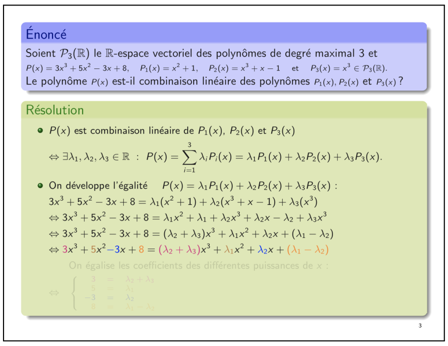
Premièrement, on remplace les polynômes par leurs expressions données dans l'énoncé.



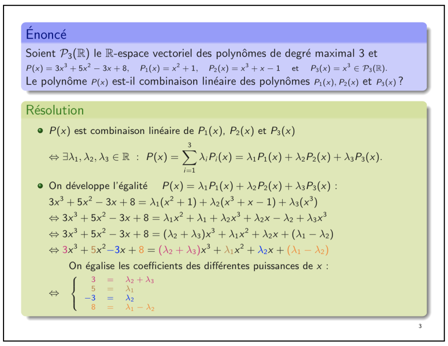
Ensuite, on distribue les λ_i sur les termes des polynômes.



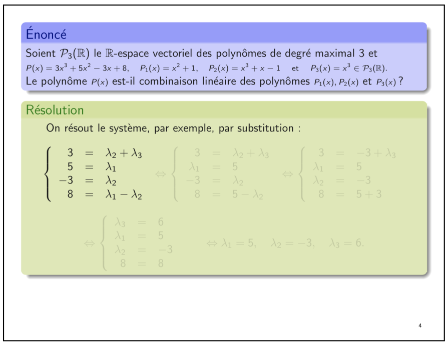
Puis, on regroupe les coefficients des différentes puissances de x. On obtient donc une égalité entre deux polynômes.



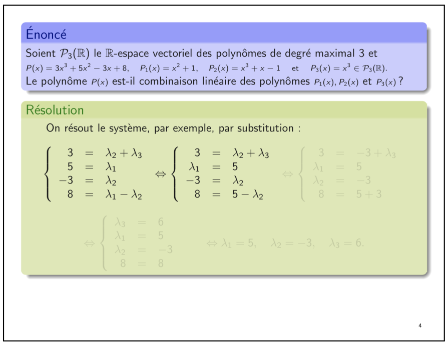
Or, on sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de leurs différentes puissances sont égaux deux à deux. On va donc égaliser les coefficients des différentes puissances ...



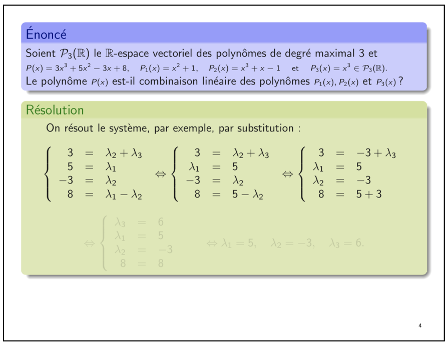
... pour obtenir un système de quatre équations à trois inconnues : λ_1, λ_2 et λ_3.



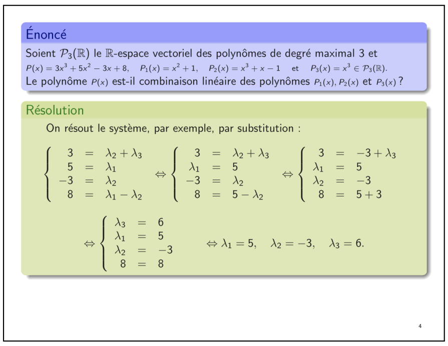
On peut résoudre ce système, par exemple, par substitution.



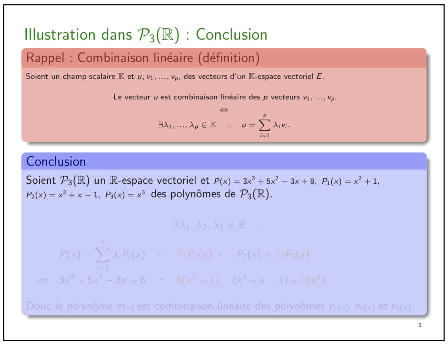
Tout d'abord, on repère que la deuxième équation nous donne $\lambda_1 = 5$. On peut substituer ce λ_1 dans la dernière équation qui contient du λ_1.



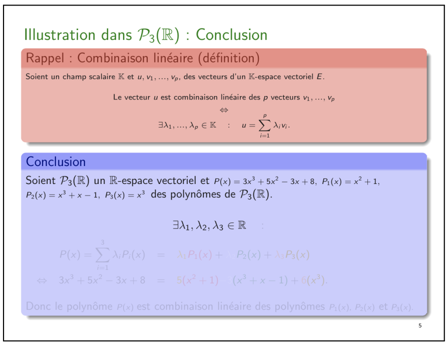
Ensuite, la troisième équation nous donne $\lambda_2 = -3$ et on peut le substituer dans la première et la dernière équation qui contiennent du λ_2. À ce stade, on repère qu'on n'a plus d'inconnues à exprimer en fonction d'autres.



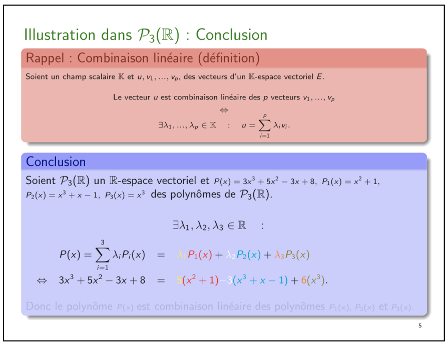
On isole donc λ_3 dans la première équation et on remarque que toutes les équations du système sont vérifiées pour $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$ et $\lambda_3 = 6$.



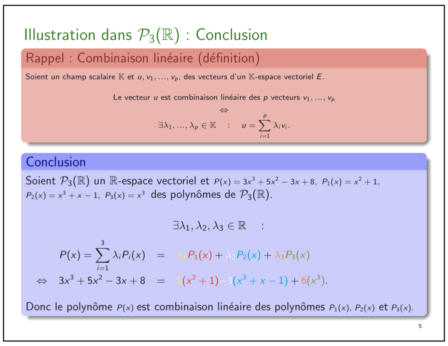
Donc, si on reprend la définition de départ, ...



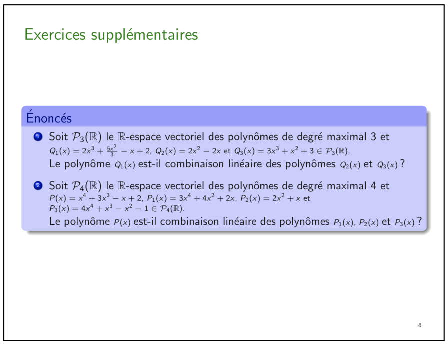
... on a bien trouvé trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ ...



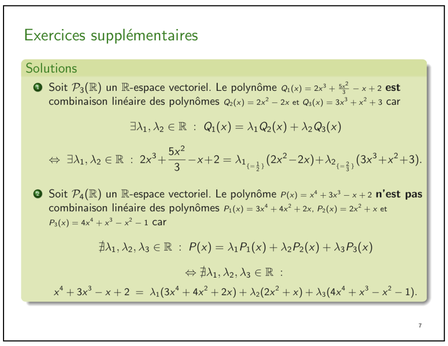
... tels que le polynôme $P(x)$ est égal "au premier scalaire λ_1 fois le premier polynôme $P_1(x)$, plus le deuxième scalaire λ_2 fois le deuxième polynôme $P_2(x)$, plus le troisième scalaire λ_2 fois le troisième polynôme $P_3(x)$".



Donc, on peut conclure que le polynôme $P(x)$ est combinaison linéaire des trois autres polynômes.



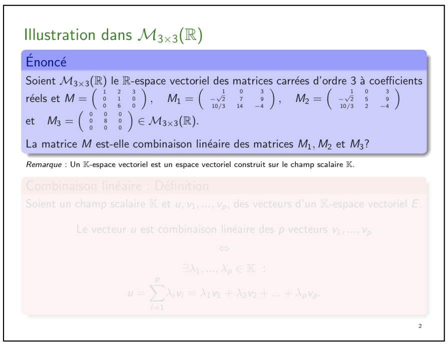
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



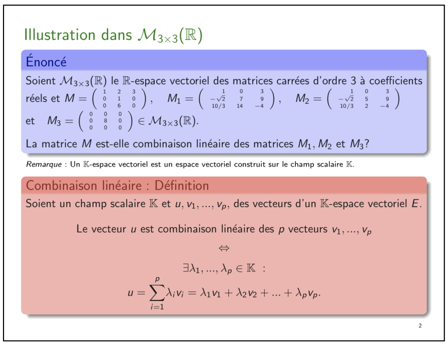
Les combinaisons linéaires dans des espaces de matrices

Diapositives | Discours oral

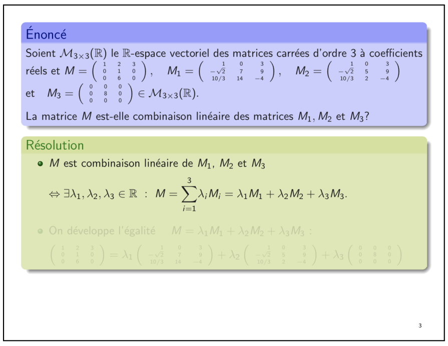
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans un espace de matrices.



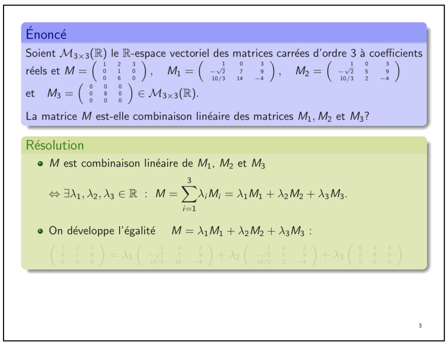
Voici la question que nous allons nous poser : Soient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et M, M_1, M_2 et M_3 des matrices de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si la matrice M est combinaison linéaire des trois autres matrices M_1, M_2 et M_3.



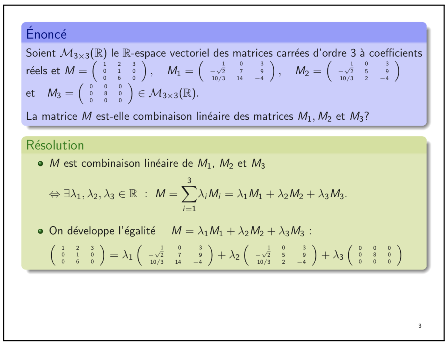
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, pour savoir si M est combinaison linéaire des trois autres matrices, nous allons essayer de trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 qui appartiennent au champ scalaire sur lequel est construit l'espace vectoriel, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, et tels que nous avons cette égalité (le curseur indique l'égalité à l'écran).



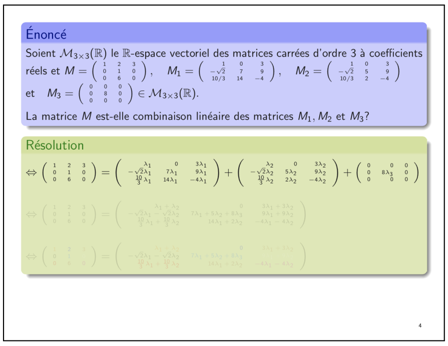
Donc M sera combinaison linéaire de M_1, M_2 et M_3 si et seulement si nous parvenons à trouver ces trois scalaires dans $\mathbb{R}$ tels que M est égale à $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$.



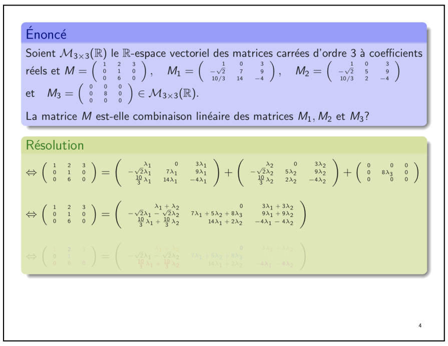
On va donc développer cette égalité.



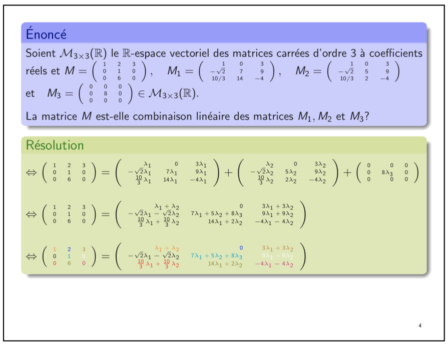
Premièrement, on remplace les matrices par leurs expressions données dans l'énoncé.



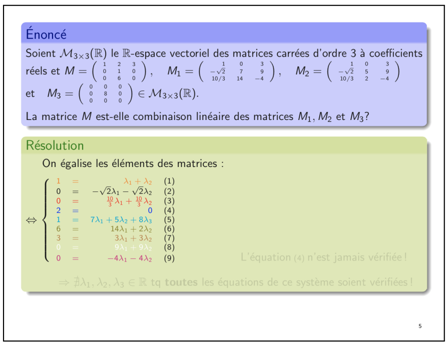
Ensuite, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par une matrice. C'est-à-dire que multiplier un scalaire par une matrice revient à multiplier chacun des éléments de la matrice par ce scalaire.



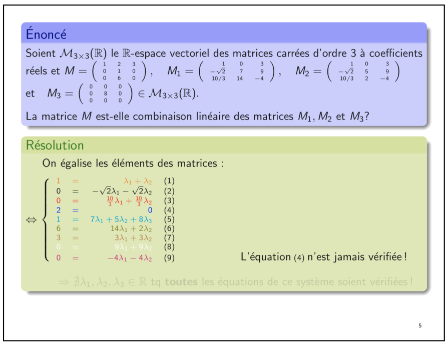
Puis, utilise la définition de la somme de deux matrices. C'est-à-dire que sommer deux matrices revient à sommer leurs éléments deux à deux. On obtient donc une égalité entre deux matrices.



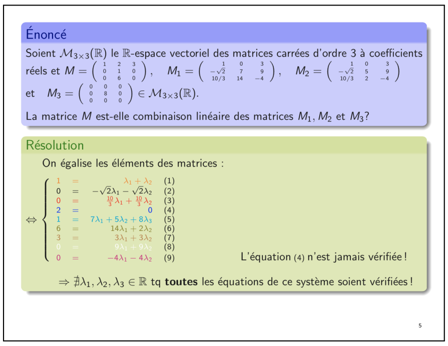
Or, on sait que deux matrices sont égales si et seulement si leurs éléments sont égaux deux à deux. On va donc égaliser les éléments des deux matrices ...



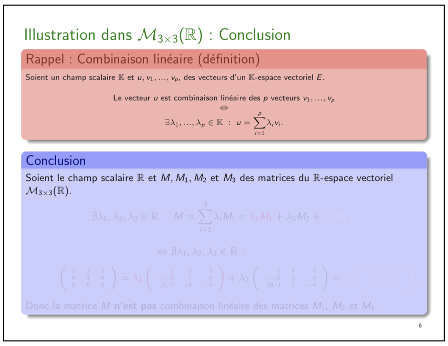
... pour obtenir un système de neuf équations à trois inconnues : λ_1, λ_2 et λ_3.



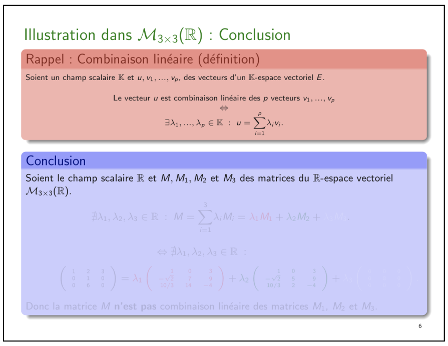
On remarque directement que l'équation (4) n'est jamais vérifiée. On n'a jamais $2 = 0$.



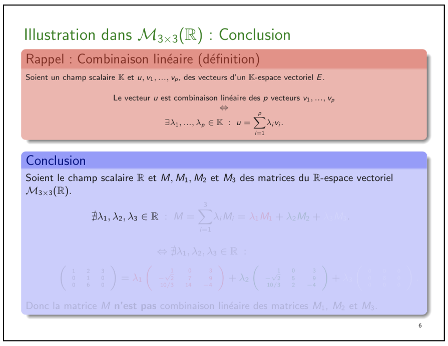
Tout d'abord, on repère que la deuxième équation nous donne $\lambda_1 = 5$. On peut substituer ce λ_1 dans la dernière équation qui contient du λ_1.



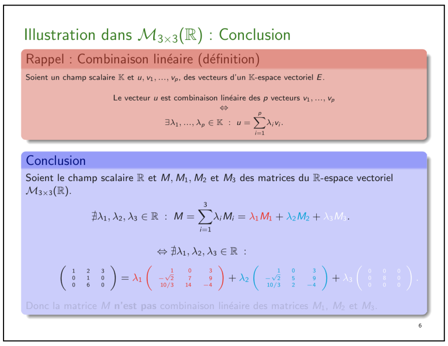
On peut donc conclure qu'on ne parviendra jamais à trouver λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ qui vérifient toutes les équations du système.



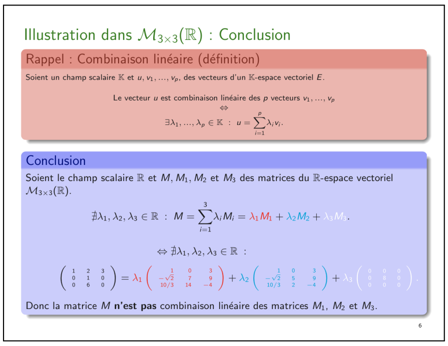
Donc, si on reprend la définition de départ, ...



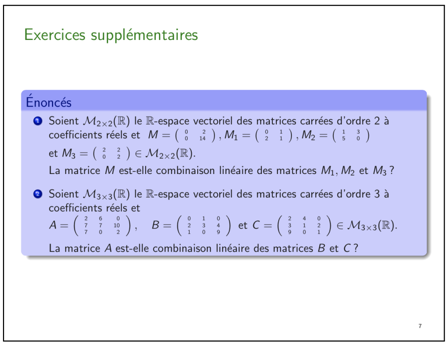
Comme nous n'avons pas pu trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ ...



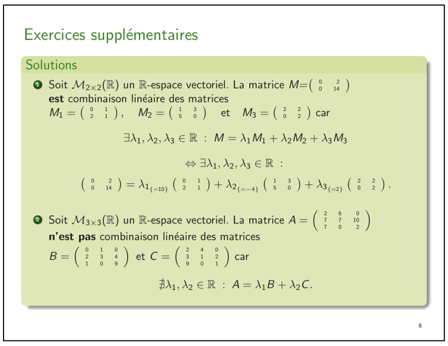
... tels que la matrice M est égale à $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, ...



... nous pouvons conclure que la matrice M n'est pas combinaison linéaire des trois autres matrices M_1, M_2 et M_3.



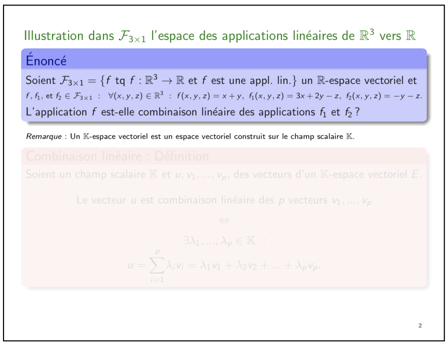
Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.



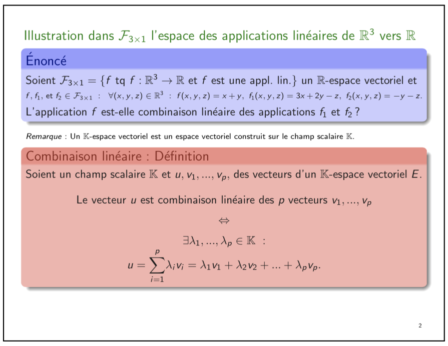
Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications - vidéo n°1

Diapositives	Discours oral

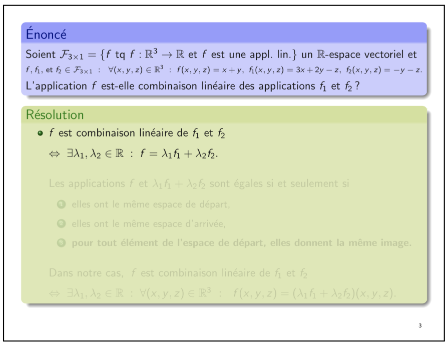
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans un espace d'applications.



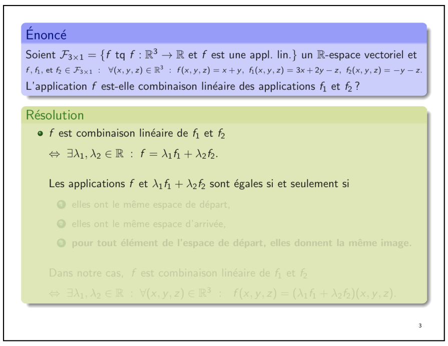
Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et f, f_1 et f_2 des applications de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si l'application f est combinaison linéaire des deux autres applications.



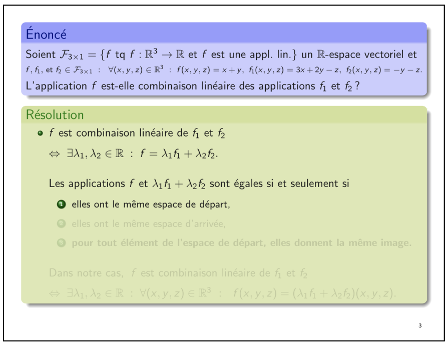
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ scalaire $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc. jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ scalaire $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans le champ scalaire $\mathbb{K}$ tels que le vecteur u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, le champ scalaire sera $\mathbb{R}$, les réels. L'espace vectoriel sera $\mathcal{F}_{3\times1}$ muni de l'addition définie sur les applications linéaires et de la multiplication d'un scalaire par une application linéaires. Et p sera égal à 2 car nous voulons savoir si f est combinaison linéaire de deux autres applications.



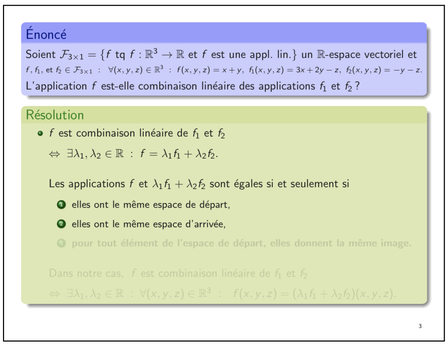
Donc f sera combinaison linéaire de f_1 et f_2 si et seulement si nous parvenons à trouver ces deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que f est égal à $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On a donc une égalité entre deux applications : l'application f (le curseur l'indique à l'écran) et l'application $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ (le curseur l'indique à l'écran).



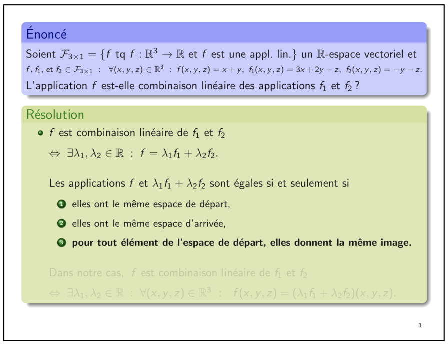
Or on sait que deux applications sont égales si et seulement si ...



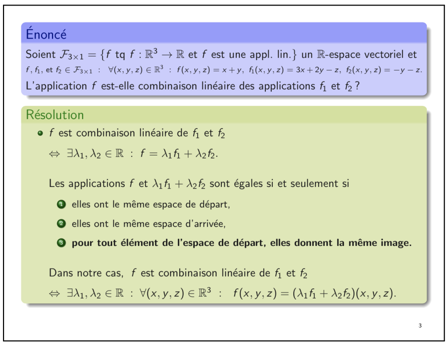
Premièrement, elles ont le même espace de départ.



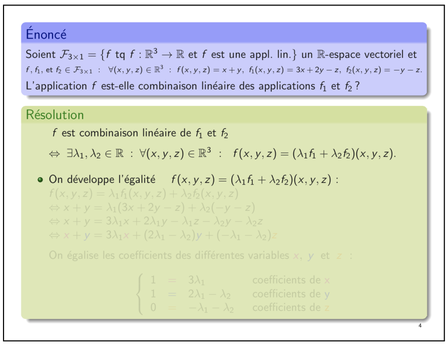
Deuxièmement, elles ont le même espace d'arrivée. Comme nous considérons un espace vectoriel d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, elles ont bien le même espace de départ, $\mathbb{R}^3$, et le même espace d'arrivée, $\mathbb{R}$.



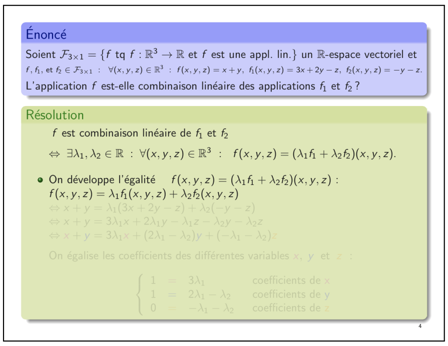
Et troisièmement, pour que les deux applications soient égales, il faut que pour tout élément de l'espace de départ, les deux applications nous donnent la même image. C'est cette troisième condition qu'on va tenter de vérifier pour notre exemple.



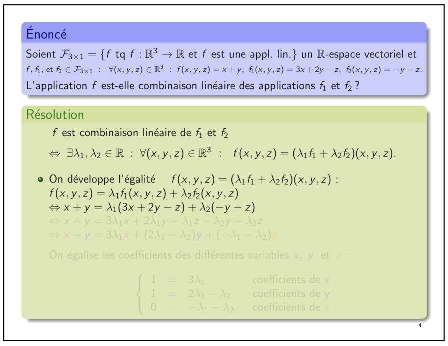
Donc, f sera combinaison linéaire de f_1 et f_2, si et seulement si on parvient à trouver deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, tels que, pour tout élément de l'espace de départ, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$, l'image que nous donne l'application f est la même que l'image que nous donne l'application $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$.



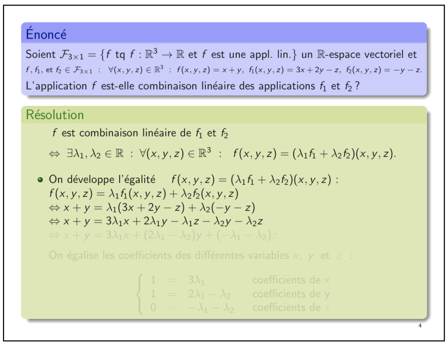
On va développer cette égalité.



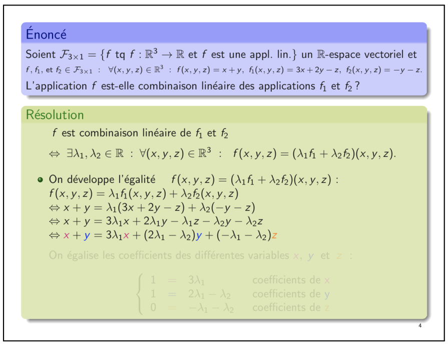
Premièrement, on utilise la définition des lois associées, c'est-à-dire la définition de la somme de deux applications linéaires et la définition de la multiplication d'un scalaire par une application linéaire.



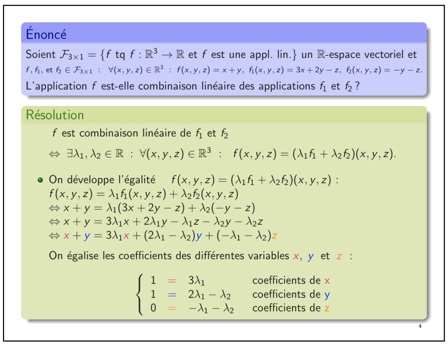
Ensuite, on remplace les applications par leurs expressions données dans l'énoncé.



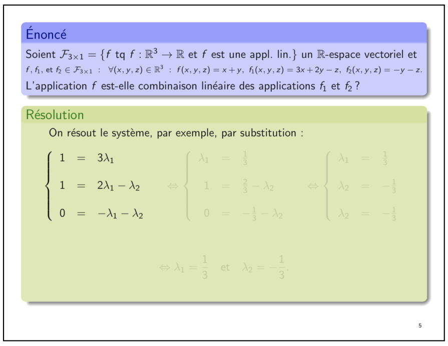
Puis, on distribue les scalaires λ_i.



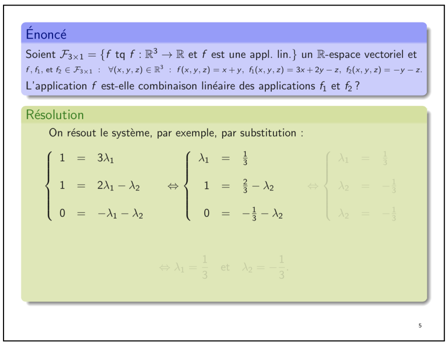
Et enfin, on met les coefficients des différentes variables x, y et z en évidence car l'égalité doit être vérifiée pour toutes valeurs des variables x, y et z (le curseur indique le $\forall(x, y, z)$ à l'écran, en haut de la diapositive). Or, cette égalité sera vérifiée, si et seulement si les coefficients des différentes variables x, y, z sont égaux deux à deux.



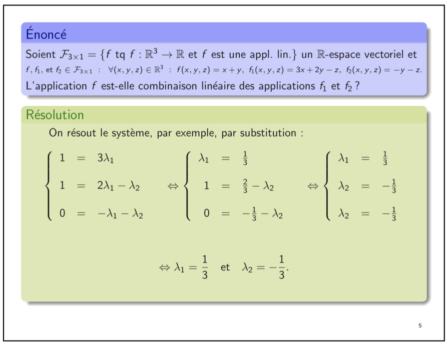
On égalise alors les coefficients des différentes variables et on obtient un système de trois équations à deux inconnues.



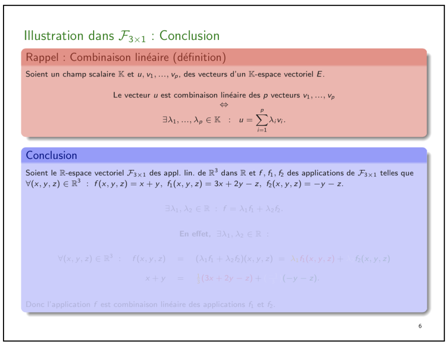
On peut résoudre ce système, par exemple, par substitution.



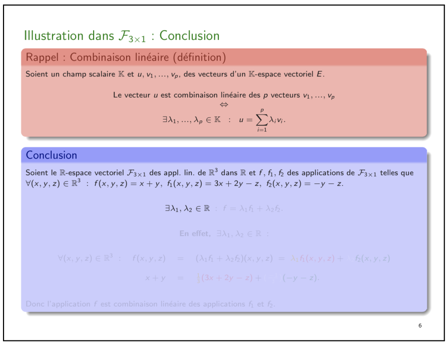
La première équation nous donne $\lambda_1 = \frac{1}{3}$. On peut le substituer dans les deux autres équations qui contiennent du λ_1. À ce stade, on n'a plus d'inconnues à exprimer en fonction d'autres.



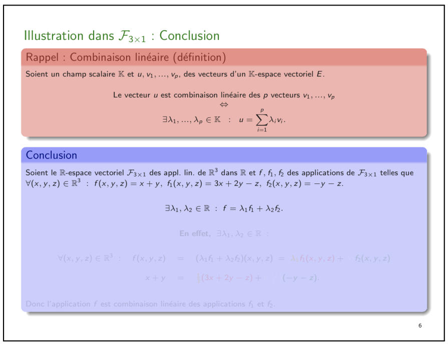
Donc on peut isoler λ_2 dans les deux dernières équations. On remarque que toutes les équations du système sont vérifiées pour $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$.



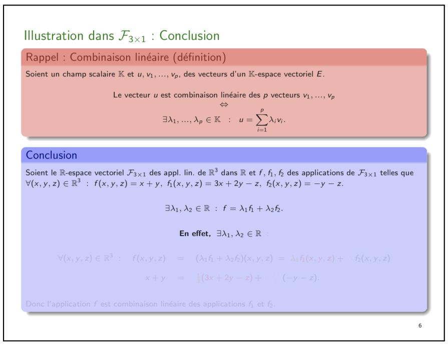
Donc si on reprend la définition de départ, ...



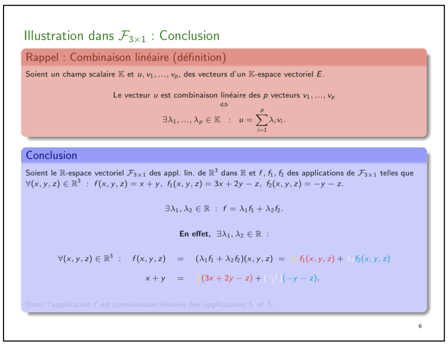
... on a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, ...



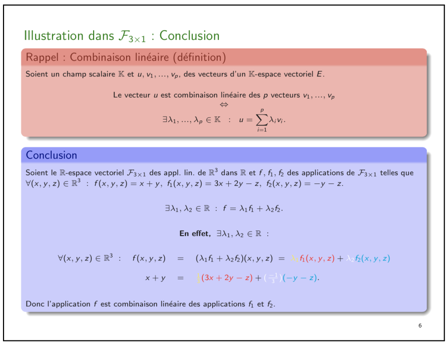
tels que l'application f est égale à l'applicaiton $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. En effet, les deux applications ont les mêmes espaces de départ et d'arrivée ...



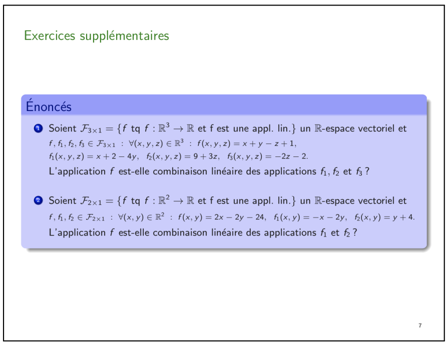
... et on a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, ...



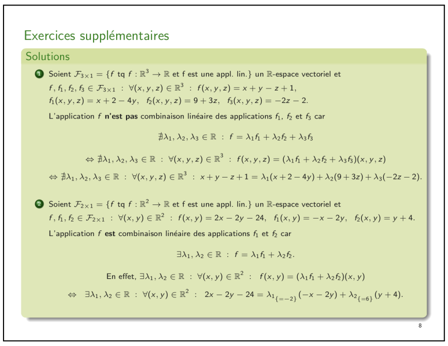
... tels que, pour tout élément de l'espace de départ, l'image donnée par l'application f est égale "au premier scalaire λ_1 fois l'image donnée par l'application f_1, plus le deuxième scalaire λ_2 fois l'image donnée par l'application f_2.



On peut donc conclure que l'application f est combinaison linéaire des deux autres applications.



Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositives suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.

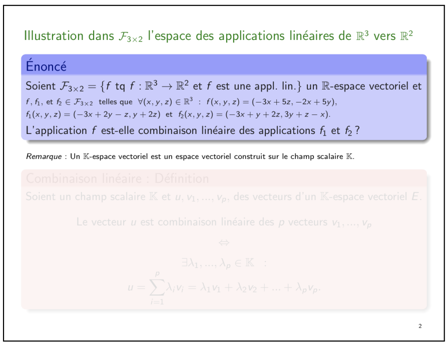


Les combinaisons linéaires dans des espaces d'applications - vidéo n°2

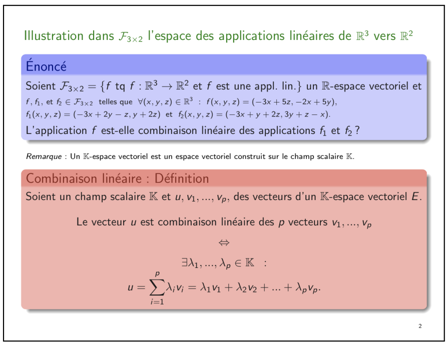
Diapositives

Discours oral

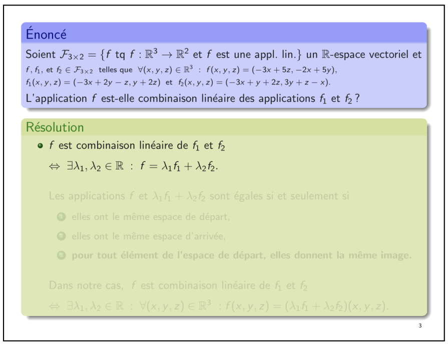
Bonjour à tous, dans cette vidéo, nous allons illustrer le concept de combinaison linéaire dans un espace d'applications.



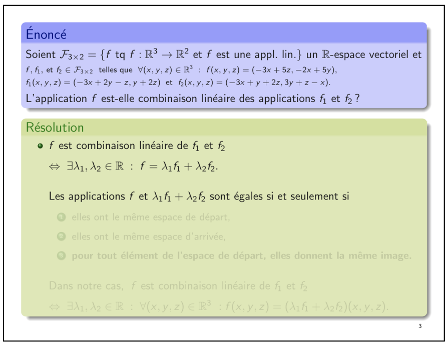
Voici la question que nous allons nous poser : Soient l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ construit sur le champ scalaire $\mathbb{R}$ et f, f_1 et f_2 des applications de cet espace vectoriel. Nous allons nous demander si l'application f est combinaison linéaire des deux autres applications.



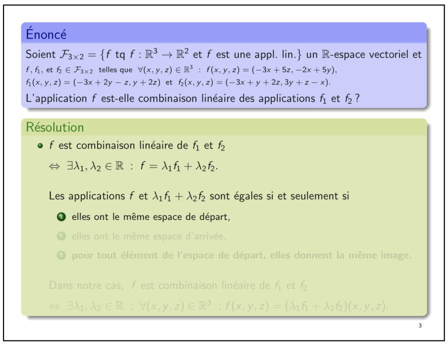
Tout d'abord, rappelons la définition de combinaison linéaire. Soient un champ de scalaires $\mathbb{K}$ et u, v_1, ... etc. jusque v_p des vecteurs d'un espace vectoriel E construit sur le champ $\mathbb{K}$. Nous dirons que le vecteur u est combinaison linéaire des p vecteurs v_1 à v_p si et seulement si nous parvenons à trouver p scalaires dans $\mathbb{K}$ tels que u est égal à la somme de 1 à p des scalaires λ_i fois les vecteurs v_i. Donc, pour notre exemple, le champ scalaire sera $\mathbb{R}$, les réels. L'espace vectoriel sera $\mathcal{F}_{3\times 2}$ muni de l'addition définie sur les applications linéaires et de la multiplication d'un scalaire par une application linéaire. Et p sera égal à 2, car nous voulons savoir si f est combinaison linéaire de deux autres applications.



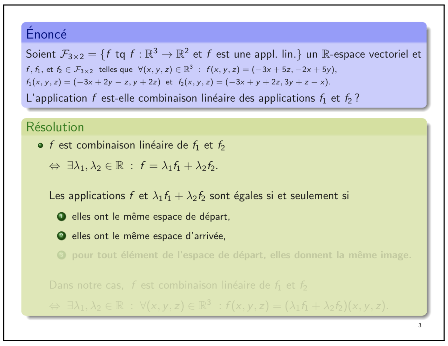
Donc f sera combinaison linéaire de f_1 et f_2 si et seulement si nous parvenons à trouver ces deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que f est égal à $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On a donc une égalité entre deux applications : l'application f (le curseur l'indique à l'écran) et l'application $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ (le curseur l'indique à l'écran).



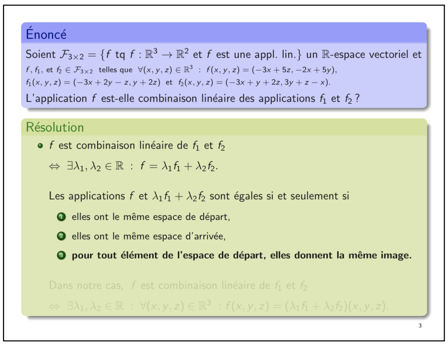
Or on sait que deux applications sont égales si et seulement si ...



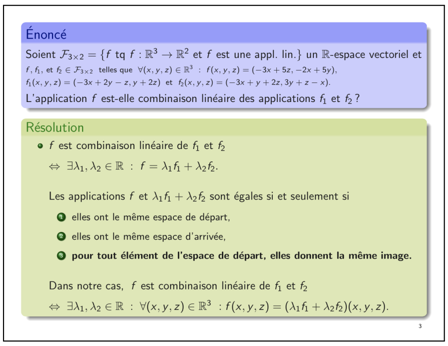
Premièrement, elles ont le même espace de départ.



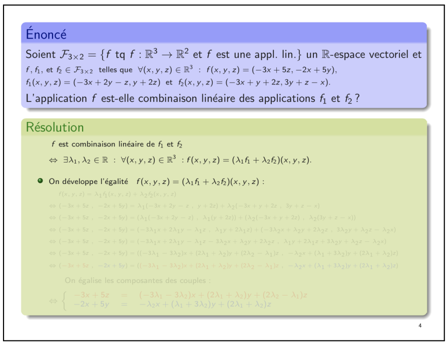
Deuxièmement, elles ont le même espace d'arrivée. Comme nous considérons un espace vectoriel d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, elles ont bien le même espace de départ, $\mathbb{R}^3$, et le même espace d'arrivée, $\mathbb{R}^2$.



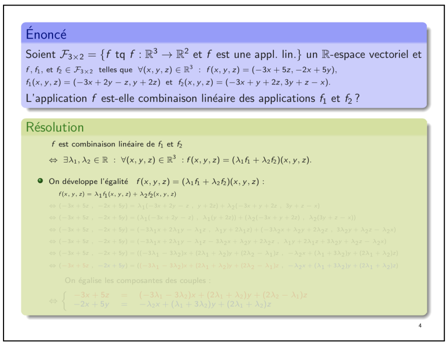
Et troisièmement, pour que les deux applications soient égales, il faut que pour tout élément de l'espace de départ, les deux applications nous donnent la même image. C'est cette troisième condition qu'on va tenter de vérifier pour notre exemple.



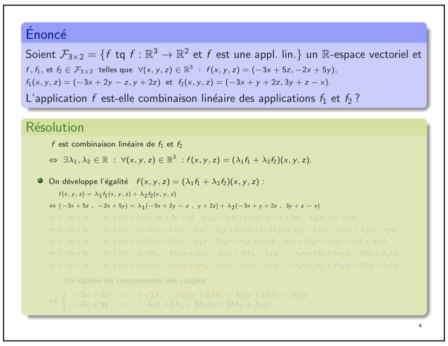
Donc, f sera combinaison linéaire de f_1 et f_2, si et seulement si on parvient à trouver les deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, tels que pour tout élément de l'espace de départ, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$, l'image que nous donne l'application f est la même que l'image que nous donne l'application $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$.



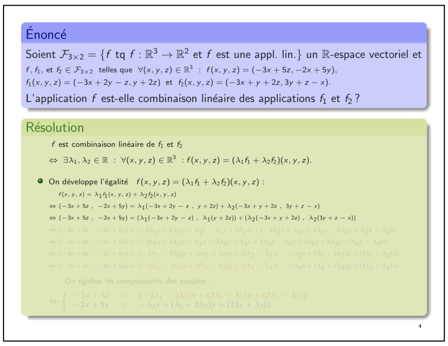
On va développer cette égalité.



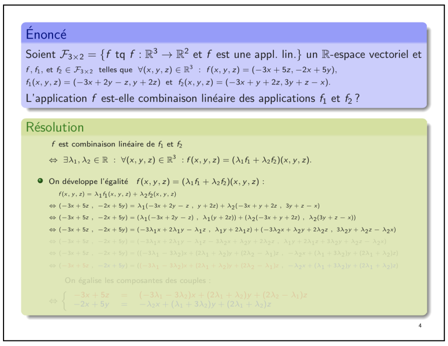
Premièrement, on utilise la définition des lois associées, c'est-à-dire la définition de la somme de deux applications linéaires et la définition de la multiplication d'un scalaire par une application linéaire.



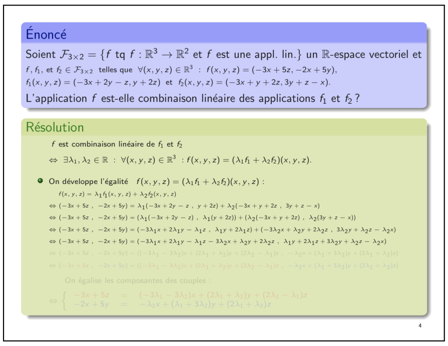
Ensuite, on remplace les applications par leurs expressions données dans l'énoncé.



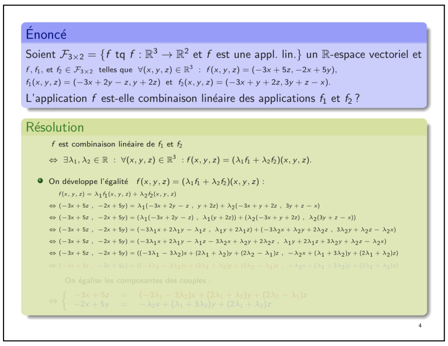
Pour obtenir l'égalité suivante, on utilise la définition de la multiplication d'un scalaire par un couple.



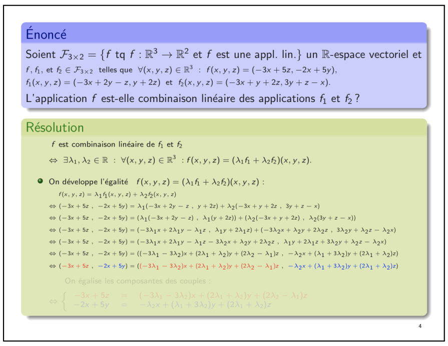
Ensuite, on distribue les λ_i.



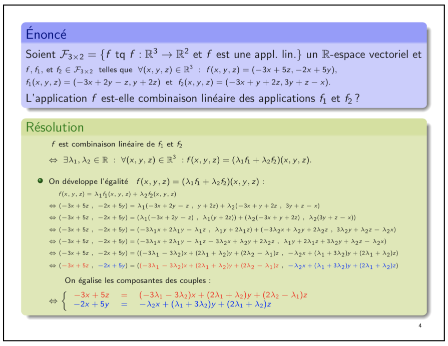
Puis, on utilise la définition de la somme de deux couples.



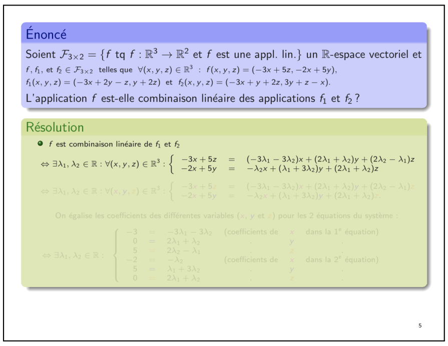
Et enfin, on regroupe les coefficients des différentes variables x, y et z car l'égalité doit être vérifiée pour toutes valeurs de x, y et z (le curseur indique le $\forall(x, y, z)$ à l'écran, en haut de la diapositive). On obtient donc une égalité entre deux couples.



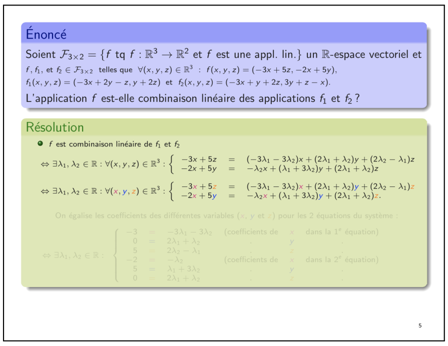
Or, on sait que deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux.



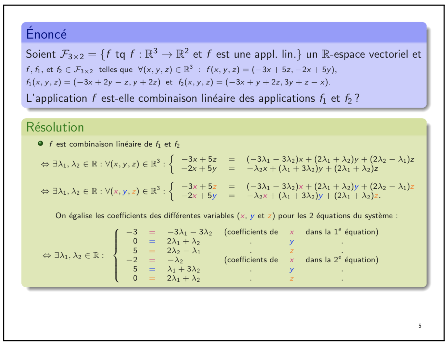
On va donc égaliser les composantes des deux couples et obtenir un système de deux équations.



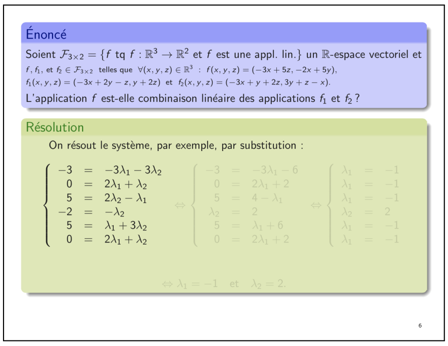
Rappelons-nous que f sera combinaison linéaire de f_1 et f_2 si et seulement si pour tout élément de l'ensemble de départ, les deux équations de ce système sont vérifiées.



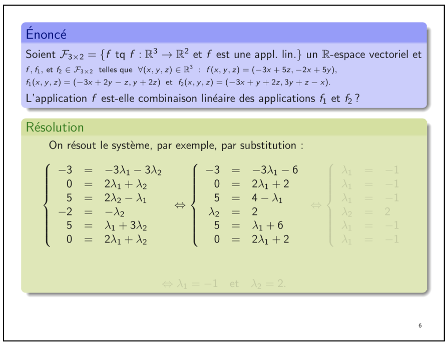
Or, les deux équations de ce système seront vérifiées si et seulement si les coefficients des différentes variables sont égaux deux à deux dans chaque équation.



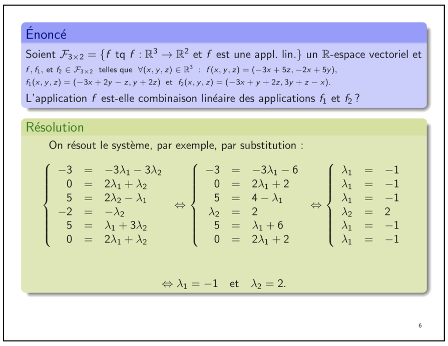
On égalise alors les coefficients des variables pour les deux équations et on obtient un système de six équations à deux inconnues.



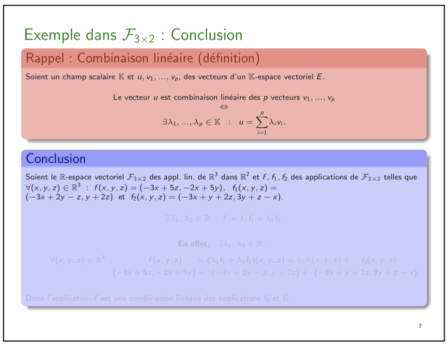
On peut résoudre ce système, par exemple, par substitution.



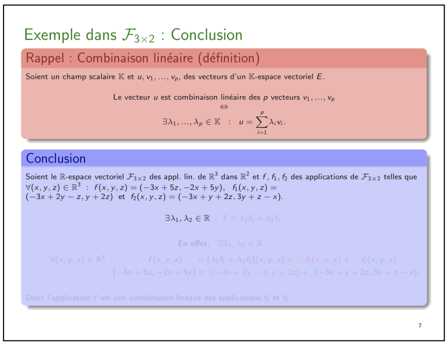
La quatrième équation nous donne $\lambda_2 = 2$. On peut le substituer dans les autres équations qui contiennent du λ_2. À ce stade, on n'a plus d'inconnues à exprimer en fonction d'autres.



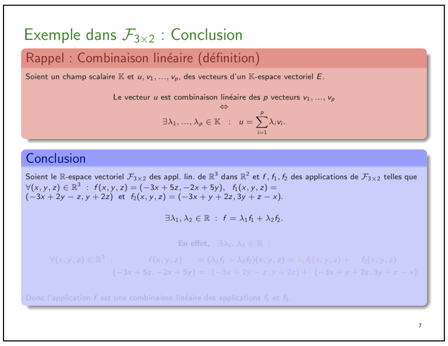
Donc on peut isoler λ_1 dans les équations. On remarque que toutes les équations du système sont vérifiées pour $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=2$.



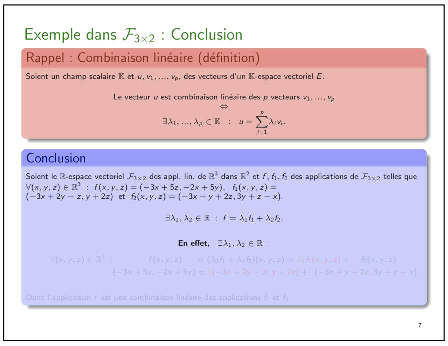
Donc si on reprend la définition de départ, ...



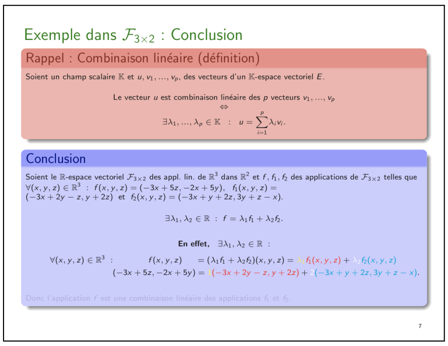
... on a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, ...



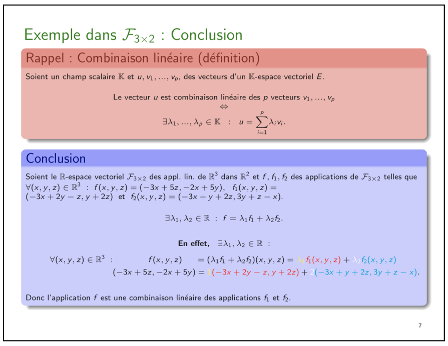
tels que l'application f est égale à l'application $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$. En effet, les deux applications ont les mêmes espaces de départ et d'arrivée ...



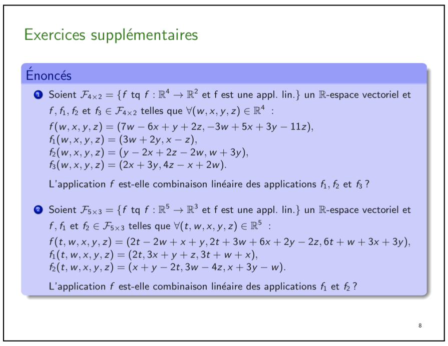
... et on a bien trouvé deux scalaires λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$, ...



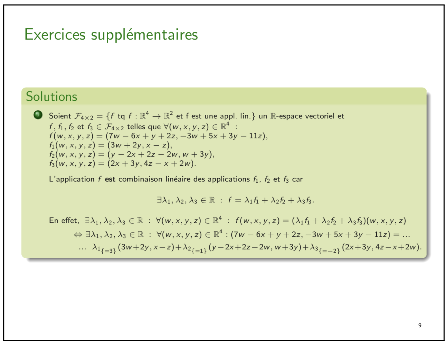
... tels que pour tout élément de l'espace de départ, l'image donnée par l'application f est égale "au premier scalaire λ_1 fois l'image donnée par l'application f_1, plus le deuxième scalaire λ_2 fois l'image donnée par l'application f_2.

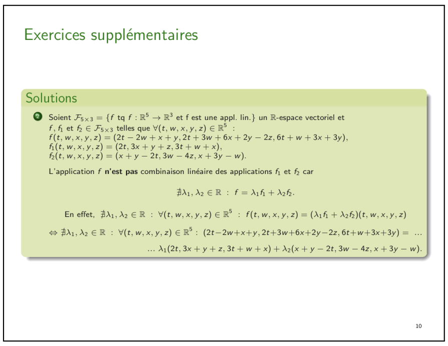


On peut donc conclure que l'application f est combinaison linéaire de f_1 et f_2.



Voici deux exercices supplémentaires que vous pouvez réaliser seul. Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez réaliser ces exercices en revisionnant la vidéo en parallèle, étape par étape. Maintenant, je vais passer à la diapositive suivante qui contient les solutions. Donc, si vous voulez résoudre ces exercices avant de voir les solutions, je vous conseille de mettre la vidéo sur pause et de poursuivre par la suite.





Ceci termine la description du discours oral des podcasts du dispositif de ce mémoire.