Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Phénomènes de capture en résonance géostationnaire des débris très légers

Gramme, Maxime

Award date:
2018

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 19. Apr. 2024

UNIVERSITÉ DE NAMUR

FACULTÉ DES SCIENCES

Phénomènes de capture en résonance géostationnaire des débris très légers

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique de master en "Sciences mathématiques en finalité spécialisée en perspectives professionnelles des mathématiques appliquées"

Maxime GRAMME
Promoteur : Anne LEMAITRE

Juin 2018

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont aidé et qui m'ont accompagné lors de la réalisation de ce mémoire. La remise de ce dernier n'aurait pu se concrétiser sans leur précieuse contribution, chaleureuse et constructive.

La première personne que j'aimerais remercier est Anne Lemaître, ma promotrice. Malgré de nombreuses responsabilités et un emploi du temps chargé, elle a toujours su faire preuve de disponibilité et d'engagement. Sa confiance et ses remarques pertinentes m'ont permis de gérer au mieux mes différentes recherches. Je retiendrai d'excellents souvenirs de nos multiples discussions.

Je remercie également Anne-Sophie Libert, André Hardy et Benoît Noyelles d'avoir accepté d'être les membres du jury de mon mémoire.

J'adresse une attention particulière à Katrien Duyck et Amandine Mathy pour leur regard extérieur, leur esprit critique et la multitude de bons conseils qu'elles m'ont apportée au terme de ma rédaction.

Enfin, je pense évidement à tous mes proches, aux étudiants de ma classe et à mes parents qui m'ont conseillé au mieux pour la formulation et la mise en page. Leur soutien est un apport inestimable que je garderai longtemps en mémoire.

Résumé

Depuis le lancement du premier satellite dans l'espace, le nombre de débris spatiaux ne cesse d'augmenter chaque année. Ces fragments se concentrent à certaines distances de la Terre en occupant des orbites spécifiques telles que l'orbite géostationnaire. L'étude des résonances se couple aux différentes perturbations environnantes pour décrire la dynamique de ces débris. En modifiant un modèle conservatif, il est possible d'introduire certains effets de dissipation influençant la variabilité des paramètres du système, comme l'effet Poynting-Robertson et les vents solaires. De plus, le premier modèle fondamental de la résonance est une référence pour comprendre les potentielles transitions des trajectoires entre les zones de circulation et de libration dues aux effets. Ce mémoire a donc pour but de déterminer les probabilités de capture en résonance géostationnaire des débris très légers subissant certains effets de décroissance du demi-grand axe.

Mots-clés : résonance géostationnaire, effet Poynting-Robertson, vent solaire, capture, dissipation, débris spatiaux.

Abstract

Since the launch of the first satellite in space, the number of space debris has been increasing every year. These fragments are concentrated at certain distances from the Earth by occupying specific orbits such as the geostationary orbit. The study of resonances is coupled with different surrounding disturbances to describe the dynamics of these debris. By modifying a conservative model, it is possible to introduce some dissipation effects that influence the variability of the system parameters, such like Poynting-Robertson effect and solar wind. In addition, the first fundamental model of resonance is a reference to understand the potential transitions of trajectories between the circulation and libration zones due to the effects. This master's thesis therefore aims to determine the probabilities of geostationary resonance capture of very light debris undergoing some decay effects of the semi-major axis.

Keywords : ground-track resonance, Poynting-Robertson effect, solar wind, capture, dissipation, space debris.

Table des matières

Page

Introduction **1**

I Notions et rappels théoriques **3**

1 Généralités **4**

1.1 Contexte des satellites 4
1.2 Orbite géostationnaire 5
1.3 Théorie d'Hamilton 6
1.4 Transformations canoniques 7
1.4.1 Fonctions génératrices 10
1.4.2 Illustrations 12
1.5 Variables angle-action 15
1.6 Description des éléments orbitaux 16
1.6.1 Eléments elliptiques 16
1.6.2 Problème des deux corps 17

2 Théorie des perturbations **22**

2.1 Concepts 22
2.2 Problème des $(N+1)$ corps 23
2.3 Potentiel de gravitation d'un corps de forme quelconque 25
2.4 Phénomène de résonance 28
2.5 Potentiel terrestre 29

II Résonance géostationnaire **32**

3 Résonance et rotation terrestre **33**

3.1 Expression du modèle conservatif 33
3.1.1 Stabilité et équilibres 35
3.2 Développement du changement de coordonnées 38
3.2.1 Caractéristiques de l'orbite 41
3.3 Représentation numérique 43

4 Captures en résonance **46**
4.1 Premier modèle fondamental de la résonance 46
4.2 Développement en variables angle-action 49
4.2.1 Cas de circulation 50
4.2.2 Cas de résonance 52
4.3 L'oscillateur harmonique 54
4.4 Introduction des effets de dissipation 55
4.4.1 Présentation 55
4.4.2 Effet Poynting-Robertson et vent solaire 56
4.4.3 Coefficient de dissipation PR/SW 58

5 Probabilité de capture **60**
5.1 Présentation 60
5.2 Variation de c 63
5.2.1 Lien avec PR/SW 67
5.2.2 Investigations numériques 69
5.3 Variation de c et b 74
5.3.1 Investigations numériques 77

Conclusion - Perspectives **80**

Bibliographie **82**

A Graphiques - Résultats de l'effet PR/SW **84**
A.1 Coefficient de dissipation $C = 10^{-4}$ 84
A.2 Variabilité des paramètres b et c ($\dot{b} < 0$ et $\dot{c} > 0$) 86

B Codes Matlab© **87**
B.1 Modèle conservatif dans les coordonnées (x, y) 87
B.2 c variable 88
B.3 b et c variables 90

C Echelle d'unité **92**

Introduction

Actuellement, la dynamique et l'activité dans l'espace ont pour conséquence que le nombre de débris spatiaux a drastiquement augmenté. A chaque lancement de fusée, le satellite qui gravitera autour de la Terre ne représente qu'une partie de la masse totale du satellite. Pour optimiser ses performances, une fusée doit être multi-étages : chaque étage est doté de son ou de ses propre(s) moteur(s)-fusée(s) et est largué lorsque le carburant est épuisé. Le moteur de l'étage suivant est alors allumé. C'est pourquoi les parties détachées restantes deviennent des débris spatiaux. Seulement 7% des satellites artificiels sont actifs sur l'ensemble des objets artificiels d'au moins 10 cm de large dans l'espace. C'est une réelle problématique car de nombreuses collisions surviennent et créent de nouveaux débris. Sur la figure 1 se trouve un graphique reprenant la densité de population de débris dans l'espace depuis le lancement du premier satellite. Cette partie introductrice est inspirée de la référence [12].

Les scientifiques estiment le nombre de débris spatiaux d'au moins 10 cm à approximativement 21 000. De surcroit, nous détenons pour 17 000 d'entre eux les caractéristiques spécifiques de leur orbite. En ce qui concerne les fragments ayant une taille comprise entre 1 et 10 cm, leur nombre est estimé à 500 000. Finalement, plus de 100 millions de débris de plus de 1 mm se retrouvent dans l'espace. La plupart des débris spatiaux se situent à une distance de moins de 2000 km de la Terre. Les figures 2 et 3 témoignent d'ailleurs du nombre de débris dans le voisinage terrestre. La densité la plus remarquable se situe à une distance comprise entre 750 et 800 km. Les débris spatiaux circulant en orbite basse circulent à une vitesse moyenne de 8 km/s.

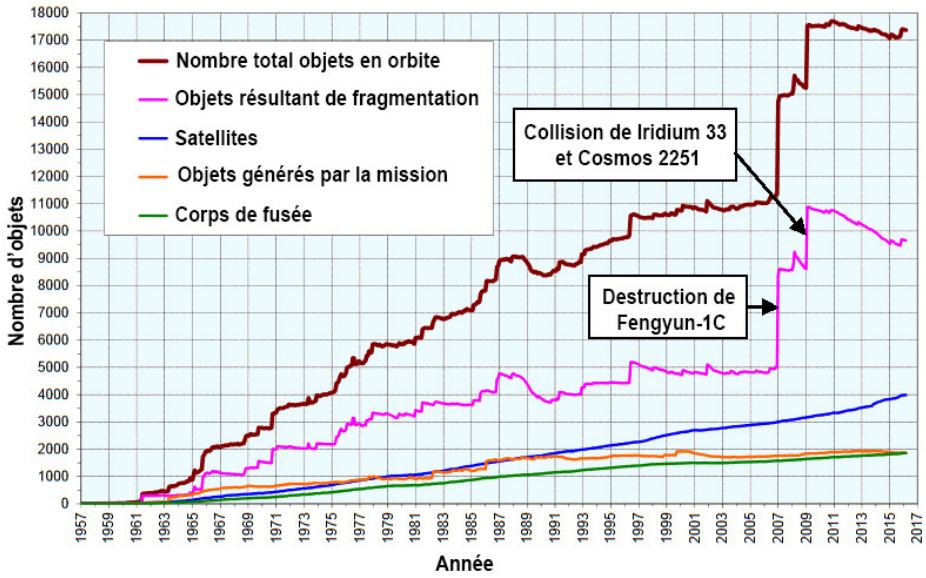

FIGURE 1 – Graphique reprenant le nombre d'objets répertoriés orbitant autour de la Terre. Issu de la référence [4].

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les déchets spatiaux ne demeurent pas éternellement en orbite. En effet, une atmosphère dite résiduelle persiste dans un espace relativement proche de la Terre. Cette atmosphère freine lentement les objets spatiaux. C'est pourquoi leur altitude dans l'espace diminue jusqu'à se situer au niveau des couches plus denses de l'atmosphère, i.e. à une distance proche des 100 km, où les frottements de l'air les désintègrent. Cependant, certains fragments peuvent parvenir entiers jusqu'à la surface terrestre.

Ces objets chutent d'autant plus rapidement que la surface de contact avec l'air est grande. De plus, l'altitude initiale a aussi un impact : une altitude basse mène à une orbite dont la distance de la Terre diminuera plus vite car l'atmosphère est plus épaisse. Pour un débris se trouvant à 600 km d'altitude, il retombera sur Terre en quelques années. A une altitude de 800 km, il lui faudra plusieurs décennies avant de toucher le sol terrestre. Au-dessus de 1 000 km d'altitude le débris spatial reste en orbite plusieurs siècles. L'augmentation ininterrompue du nombre de débris spatiaux est due à la durée de vie particulièrement élevée de ces derniers et à un rythme de lancement persistant. La population de débris a fortement crû à la fin des années 2000 à la suite de deux collisions majeures (destruction volontaire du satellite chinois Fengyun-1C et collision accidentelle de Iridium 33 et Cosmos 2251) qui ont accru d'environ 30% le nombre de débris de plus de 10 cm. Au travers de ce mémoire, nous tenterons de déterminer les probabilités de capture en résonance géostationnaire de ces débris très légers subissant certains effets de décroissance du demi-grand axe.

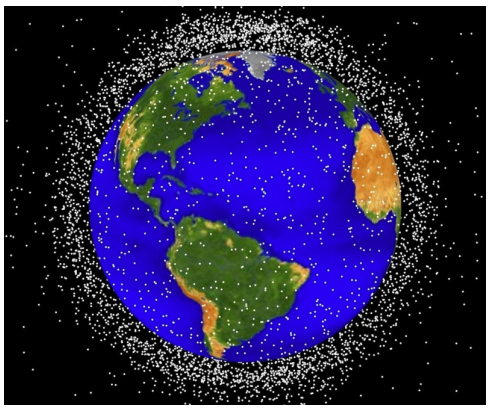

FIGURE 2 – Cartographie des principaux débris spatiaux en orbite terrestre basse. Issu de la référence [2].

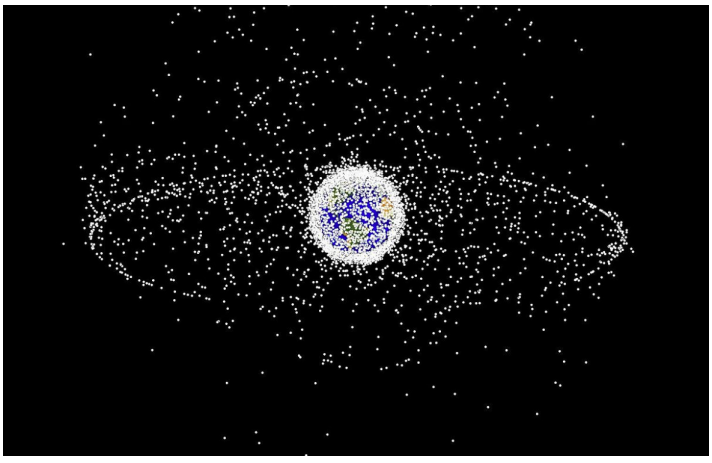

FIGURE 3 – Cartographie au-delà de l'orbite géostationnaire. Issu de la référence [2].

Première partie

Notions et rappels théoriques

Chapitre 1

Généralités

Ce premier chapitre a pour but de présenter les notions théoriques essentielles à la construction d'un premier modèle physique. La présentation générale de différentes orbites précéde la mise en place des éléments de référence en dynamique céleste telle que la théorie d'Hamilton, les transformations canoniques et la description des éléments orbitaux.

1.1 Contexte des satellites

La distribution des orbites des débris spatiaux est loin d'être uniforme. En effet, il est clair sur la figure 3 que seules certaines zones sont utilisées par les satellites. En se basant sur la référence [12], nous dénombrons principalement trois régions : l'orbite terrestre basse, l'orbite terrestre moyenne et enfin l'orbite géostationnaire. Détaillons, à présent, ces différentes régions :

— L'orbite terrestre basse (LEO : Low Earth Orbit) est une région de l'espace terrestre pouvant aller jusqu'à une altitude de 2000 km de la surface de la Terre. Théoriquement, la sensibilité des capteurs est limitée aux objects de 5 à 10 cm se trouvant sur le sol terrestre. Actuellement, nous pouvons identifier les objets de plus de 20 cm. Ceci prouve l'efficacité des radars à cette distance.

— L'orbite terrestre moyenne (MEO : Medium Earth Orbit) est une région de l'espace terrestre utilisée entre autres pour les satellites GPS (Global Position System) et comprise entre 20 000 km et 22 000 km.

— L'orbite terrestre géostationnaire (GEO : Geostationary Earth Orbit) et ses environs sont une région de l'espace terrestre situé au-delà de 36 000 km. Un satellite mis en orbite géostationnaire aura une période de révolution en moyenne égale à la période de rotation de la Terre, dans le but de se focaliser en permanence sur la même surface terrestre. Cette région est énormément sollicitée pour entre autres la télécommunication et les observations météorologiques, elle est situé à approximativement 42 000 km.

Il existe un cas particulier d'orbite appelée GTO (Geostationary Transfer Orbits) qui est caractérisée par une trajectoire très excentrique, ce qui implique une position au périgée dans la région LEO et une position à l'apogée sur l'orbite géostationnaire. En considérant les objets spatiaux de plus de 10 cm, nous pouvons montrer que 70% d'entre eux se trouvent en orbite terrestre basse (LEO), i.e. à une distance inférieure à 2000 km. De plus, 9% sont présents sur l'orbite géostationnaire (GEO) et 8% au-delà. Il y a également près de 10% d'objets ayant une orbite très excentrique comme les GTO. Le reste est à classer dans l'orbite terrestre moyen (MEO). Le questionnement autour des débris spatiaux est sensiblement identique dans toutes les régions spatiales précédemment présentées. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux orbites géostationnaires et à leurs propriétés dynamiques.

1.2 Orbite géostationnaire

Une des caractéristiques principales des objets situés sur une orbite géostationnaire est qu'ils statuent constamment sur la même zone de la surface de la Terre. En plus de cette propriété, il est possible de décrire une orbite géostationnaire en la comparant à une orbite terrestre basse. En effet, il n'y a pas de mécanisme naturel de dissipation énergétique tel que les frottements de l'air dus à l'atmosphère terrestre qui concernent les altitudes situées entre 600 et 800 km de la Terre, où les objets "tombent" s'ils sont dépourvus de système de propulsion quelconque. A l'opposé, le frottement présent dans la région des orbites géostationnaires est si faible que la durée de vie de ces satellites est considérable. Depuis le premier lancement d'un satellite géostationnaire en 1964 [1] le nombre d'objets en GEO ne cesse d'augmenter à raison de 25-30 satellites par an. Cette section est inspirée à nouveau de la référence [12].

D'un point de vue complètement utopique et théorique, la trajectoire d'une orbite géostationnaire idéale aurait la particularité d'être totalement circulaire, i.e. d'excentricité nulle. De plus, elle serait située sur le plan équatorial, i.e. d'inclinaison nulle. Dans ces conditions particulières, le rayon d'une telle région serait de 42 164 km dans le but de garantir une période de révolution identiquement à la période de la rotation terrestre. Dans la pratique, de nombreuses perturbations entrent en compte et compliquent quelque peu le modèle. ll faut perpétuellement corriger certaines anomalies du mouvement afin de s'assurer que le satellite soit toujours fixer sur la même région de la Terre. C'est pourquoi la région des GEO idéale ayant le moins de contraintes opérationnelles se restreint à une zone très réduite. L'orbite de "repos" des satellites arrivés en fin de vie est en réalité différente des orbites utilisables, approximativement situées à 300 km de ces dernières dans le but de ne pas interférer avec les objets toujours opérationnels.

Lorsqu'un satellite n'est plus fonctionnel, les scientifiques n'ont plus aucun contrôle. Sa trajectoire dépend alors uniquement des perturbations du milieu. Tout d'abord, la Terre n'est pas parfaitement sphérique contrairement à ce que l'on pourrait croire. Les premières approximations réalisées considèrent la Terre en tant qu' ellipsoïde [2], i.e. aplatie en ayant un rayon équatorial sensiblement supérieur au rayon polaire. La perturbation due au potentiel terrestre est directement liée à l'asymétrie du champ gravitationnel de la Terre. Ceci sera explicité plus tard, toutefois nous pouvons déjà préciser que ces termes sont appelés des harmoniques sphériques. De plus, les harmoniques du second degré sont considérées comme des coefficients d'aplatissement représentant majoritairement les perturbations du potentiel terrestre obligeant le plan orbital à se calquer sur le plan équatorial. Dans l'ordre des perturbations, notons également l'influence gravitationnelle de la Lune et du Soleil sur les orbites ainsi que l'influence du rapport surface de contact et masse de l'objet.

Insistons sur l'influence de la perturbation luni-solaire. Cette dernière augmente de manière linéaire la distance qui sépare la Terre de ces débris spatiaux. C'est pourquoi dans la zone des orbites géostationnaires, les perturbations luni-solaires sont du même ordre que les perturbations dues à l'aplatissement de Terre. Une autre conséquence de la combinaison de ces deux phénomènes est la précession du plan orbital avec une période de 54 ans.

Sur la figure 1.1, deux aspects des éléments orbitaux nous sont présentés. En ce qui concerne l'inclinaison, nous remarquons un placement des satellites sur le plan équatorial, i.e. avec un plan orbital à inclinaison nulle. Cependant, une variation de plus ou moins 15 degrés est également représentée. Les objets fonctionnels se trouvent presque sur le plan équatorial où leur place est attribuée afin de résister aux différentes perturbations qui pourraient modifier leur situation. Les variations de l'inclinaison concernent les emplacements des débris spatiaux. En considérant l'excentricité, l'essentiel des objets est situé sur

1. Il s'agissait d'un satellite géostationnaire expérimental pour la communication, placé à l'équateur à 180 degrés de longitude dans l'océan pacifique.
2. Comparable à un ballon de rugby.

une trajectoire quasi-circulaire. De légères fluctuations de l'excentricité sont causées par l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil ainsi que par les radiations solaires. Ces variations sont estimées à plus ou moins 75 km d'une orbite géostationnaire ayant une excentricité de 0.0017.

1.3 Théorie d'Hamilton

En dynamique céleste, le formalisme d'Hamilton s'impose très souvent pour exprimer les équations du mouvement des corps célestes et les perturbations influençant leur mouvement. C'est pourquoi nous rappellerons quelques notions élémentaires de ce formalisme. Cette section est tirée en grande partie des références [6], [7] et [8].

Définition 1.3.1. *Une fonction $\mathcal{H}$ dépendant de la variable q, du moment associé p et du temps t*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$$

permet d'établir un système hamiltonien à un degré de liberté.

De cette définition découlent directement les équations d'Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(q, p, t), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(q, p, t). \end{aligned}$$

Une des caractéristiques d'un système hamiltonien est qu'il peut être appelé *autonome* pour autant qu'il ne dépende pas explicitement du temps. L'hamiltonien est alors appelé *intégrale première*

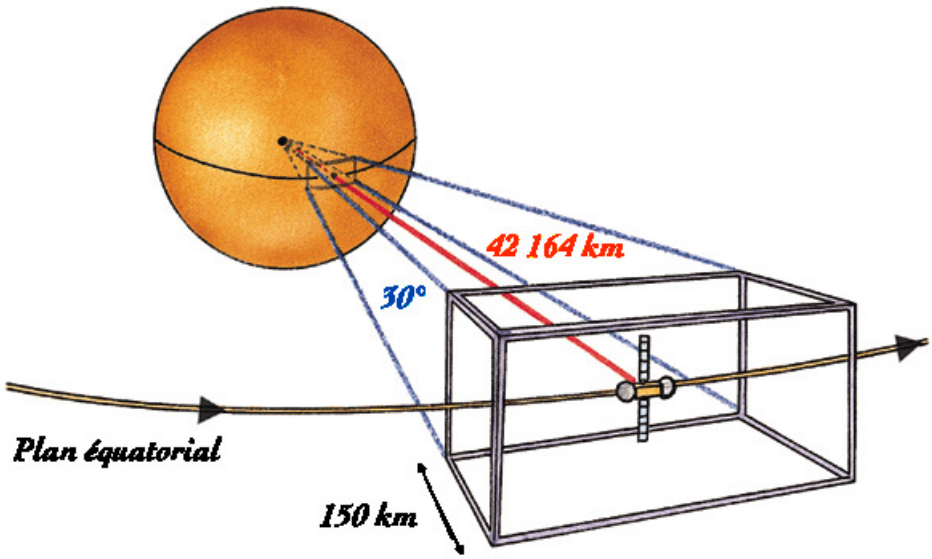

FIGURE 1.1 – Partition d'une orbite géostationnaire où se trouvent les débris spatiaux. Issu de la référence [9].

ou une constante du mouvement ou

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot{p} = 0.$$

Il est également possible d'établir un changement de coordonnées en définissant deux nouvelles variables $Q = Q(q, p, t)$ et $P = P(q, p, t)$. Cette relation peut être définie réciproquement telle que $q = q(Q, P, t)$ et $p = p(Q, P, t)$. Cette transformation est dite canonique uniquement si pour tout hamiltonien $\mathcal{H}(q, p, t)$, il existe une fonction $\mathcal{K}(Q, P, t)$ telle que les équations de l'Hamilton $\mathcal{H}$ suivent le même changement de coordonnées, avec $\mathcal{K}$ dérivable en les nouvelles variables correspondantes

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P}(Q, P, t), \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q}(Q, P, t). \end{aligned}$$

Toutefois, les nouvelles variables que nous venons d'introduire ne sont pas toujours explicitées directement en fonction de q, p et t. Il est cependant possible de les exprimer en utilisant la relation implicite d'une fonction génératrice $\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, P, t)$. Nous pouvons remarquer la dépendance des anciennes variables q et le nouveau moment P. La transformation canonique peut être définie par les équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}, \\ Q &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P}. \end{aligned}$$

Nous pouvons, en guise d'exemple, définir la transformation identité par la fonction génératrice $\mathcal{S}(q, P) = qP$. Cette forme à un degré de liberté peut être étendue à n degrés de liberté, l'espace de phase étant alors de dimension $2n$, n dimensions pour les variables q_i et Q_i ou n dimensions pour les moments p_i ou P_i.

1.4 Transformations canoniques

L'utilisation de différents formalismes, tous plus sophistiqués les uns que les autres, ne signifient pas forcément qu'il sera plus facile d'obtenir ni de résoudre certaines équations dynamiques. Il est même très fréquent que l'expression de la situation dans le formalisme hamiltonien requiert quelques astuces mathématiques, tout est une affaire de concession. Pourtant, malgré la complexification et l'abstraction qu'impose la méthode hamiltonienne, elle apporte certains avantages. Nous détaillons plus amplement les éléments issus de la référence [14].

Nous pouvons facilement l'observer, en comparant la dynamique d'Hamilton à celle de Lagrange, il y deux fois plus de variables canoniques indépendantes (q, p) que de coordonnées généralisées, nous profitons de ce constat pour rappeler que q et $\dot{q}$ ne sont pas indépendants. Nous appellerons *transformations canoniques* l'ensemble des transformations conservant la structure des équations du mouvement. Il s'avère que les possibilités de ces transformations sont plus nombreuses en ce qui concerne les équations

d'Hamilton. Cet atout sera fortement exploité dans le cadre de ce mémoire afin de faciliter la manipulation des équations dynamiques sous forme canonique. En réalité, le formalisme hamiltonien permet d'exprimer de manière très large tout un potentiel de la mécanique.

Les transformations canoniques font partie de la classe des transformations de coordonnées. Ces transformations servent à simplifier drastiquement l'expression ainsi que la résolution des équations canoniques pour une multitude de situations en mécanique. Nous pouvons trouver une famille de problèmes dont la solution des équations hamiltoniennes est évidente. Imaginons, par exemple, un problème où le système hamiltonien est indépendant d'une certaine coordonnée que nous noterons q_k. Nous dirons que ce problème est *cyclique*. Nous exprimons l'équation hamiltonienne associée

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = 0.$$

Ceci implique que nous avons p_k constante, nous noterons donc

$$p_k = \alpha_k, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Nous obtenons le système canonique suivant

$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_{k-1}, q_{k+1}, ..., q_f, p_1, ..., p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, ..., p_f, t),$$

il s'agit d'un système à $f-1$ degrés de liberté exprimé par $2f-2$ équations différentielles du premier ordre, où f représente le nombre de variables canoniques indépendantes. Considérons le cas tel que toutes les coordonnées généralisées q_i sont cycliques, i.e.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p_1, ..., p_f, t).$$

Dans ce cas, la solution des équations canoniques correspondantes est triviale. En effet, nous trouvons

$$\dot{p}_i = 0 \Longleftrightarrow p_i = \alpha_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } i = 1, ..., f. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) implique donc

$$\dot{q}_i = \left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\right|_{p_i=\alpha_i} = v_i(t). \tag{1.2}$$

Il suffit, dès lors, d'intégrer la relation (1.2) pour obtenir les solutions des équations différentielles correspondantes, i.e.

$$q_i = \int_{t_0}^{t} v_i(t')dt' + \beta_i, \tag{1.3}$$

tel que les constantes d'intégration β_i sont les α_i déterminées par les conditions initiales. Remarquons que si les équations d'Hamilton ne sont pas dépendantes directement du temps, les fonctions $v_i(t)$ sont fixées comme constantes. Nous écririons, dès lors, les coordonnées cycliques q_i linéairement dépendantes du temps de la manière suivante

$$q_i = v_i t + \beta_i.$$

Notons que l'expression canonique de l'hamiltonien est par conséquence un excellent ajustement des situations comportant une ou plusieurs coordonnées cycliques. Il est évident que la résolution la plus simpliste réside dans le problème de mécanique où toutes les coordonnées sont cycliques. L'évolution dynamique des coordonnées d'un tel système est exprimée par (1.3).

Naturellement, nous pourrions nous demander s'il est possible de transformer les variables (q, p) de telle manière que la structure canoniques des équations de mouvement soit conservée ? De plus, serait-il possible de rendre une partie ou l'ensemble des coordonnées cycliques ? C'est justement de ces questions qu'émane l'apparition des transformations canoniques. Rappelons-nous que dans le cadre lagrangien, les transformations étaient simplement de la forme

$$Q_i = Q_i(q, t) \qquad i = 1, ..., f, \tag{1.4}$$

tel que $q = \{q_1, ..., q_f\}$ et $Q = \{Q_1, ..., Q_f\}$ représentent conjointement les anciennes et les nouvelles coordonnées généralisées. Nous appelons régulièrement ce type de transformation, une transformation ponctuelle. Dans notre environnement hamiltonien, les moments constituent aussi des variables indépendantes que l'on doit adapter de manière adéquate aux coordonnées généralisées. Il faut donc exploiter davantage le principe des transformations de coordonnées de telle sorte qu'il soit possible de transformer automatiquement les coordonnées et les moments associés, i.e. l'ensemble (q, p) ou tout autre ensemble de variables canoniques (Q, P) avec $P = \{P_1, ..., P_f\}$, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Q_i & = & Q_i(q, p, t) & \\ P_i & = & P_i(q, p, t) & i = 1, ..., f. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Nous supposerons que ces transformations sont toujours inversibles. Ces dernières déterminent certaines transformations de *l'espace de phase*, tandis que les relations (1.4) sont des transformations restreintes à *l'espace de configuration*.

Définition 1.4.1. *Les transformations (1.5) sont dites canoniques, si elles préservent la structure des équations canoniques, ce qui implique*

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \qquad i = 1, ..., f,$$

où $\mathcal{K}(Q, P, t)$ correspond à l'hamiltonien des variables ainsi construites.

Lorsque $\mathcal{H}(q,p)$ exprime bien le hamiltonien en variables canoniques, nous savons que le principe variationnel d'Hamilton modifié est respecté. Rappelons brièvement cette notion.

Définition 1.4.2. *Le principe d'Hamilton modifié est caractérisé par l'exigence que la variation de l'intégrale suivante soit nulle, i.e.*

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q,p,t))dt = 0,$$

où δ désigne la variation infinitésimale de t_1 à t_2.

Il est évident qu'il en est de même pour le système $\mathcal{K}$ exprimé dans les nouvelles variables canoniques (Q,P), i.e.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K}(Q,P,t))dt = 0.$$

La vérification simultanée de ces deux dernières intégrales ne signifie pas que l'argument de ces intégrales soit nécessairement égal. Les intégrands sont susceptibles d'être différents d'un terme possédant au plus la dérivée totale temporelle d'une fonction $\mathcal{S}$ des anciennes et des nouvelles variables (sauf leur dérivée temporelle) et potentiellement du temps. La relation la plus commune entre les arguments se traduira de la manière suivante

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d\mathcal{S}}{dt}. \tag{1.6}$$

En réalité, le terme ajouté $\frac{d\mathcal{S}}{dt}$ n'influence la variation de l'intégrale qu'aux bornes de l'intervalle temporel, i.e. en t_1 et t_2. Cette apport s'annule car $\mathcal{S}$ dépend de (q,p,t) et de (Q,P,t) ou d'un couplage des coordonnées de l'espace de phase. En appliquant le principe de Hamilton modifié, ces coordonnées sont caractérisées par une variation nulle en t_1 et t_2.

1.4.1 Fonctions génératrices

Nous allons présenter les quatre façons d'établir cette fonction $\mathcal{S}$ liées aux quatre choix de couples des variables canoniques dans les anciennes et nouvelles variables.

- 1er choix d'association :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1(q,Q,t).$$

Nous pouvons, dès lors, exploiter l'expression (1.6) de la façon suivante

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} &= P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d\mathcal{S}_1}{dt} \\ &= P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i. \end{aligned}$$

Etant donné que les anciennes et les nouvelles coordonnées q_i et Q_i sont indépendantes, l'égalité ne peut être vérifiée que dans le cas où les coefficients de $\dot{q}_i$ et $\dot{Q}_i$ s'annulent. Cela a pour conséquence

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial Q_i}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer qu'il y a donc f relations qui déterminent les p_i comme des fonctions de q, Q et t. En prenant comme hypothèse que ces équations peuvent être inversées, il est possible de les résoudre pour les f variables Q_i en q, p et t. De même, en remplaçant les expressions pour les Q_i ainsi résolues, nous obtenons f P_i dépendant de q, p et t. Enfin, la dernière équation met en lien le nouvel hamiltonien $\mathcal{K}$ et l'ancien $\mathcal{H}$.

Nous appellerons la fonction $\mathcal{S}_1$ *fonction génératrice*. En effet, elle permet d'exprimer explicitement les équations de la transformation canonique.

- 2ème choix d'association :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2(q, P, t) - Q_i P_i.$$

En remplaçant cette relation dans l'expression (1.6), nous obtenons

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = -Q_i \dot{P}_i - \mathcal{K} + \frac{d\mathcal{S}_2}{dt}.$$

En effectuant à nouveau le développement de la dérivée totale temporelle et en identifiant les coefficients de $\dot{q}_i$ et $\dot{P}_i$, nous avons

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial P_i}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer la similitude de calcul avec la première association, à ceci près qu'il faut inverser la résolution des relations pour obtenir la deuxième et la première moitié des équations de transformation.

- 3ème choix d'association :

$$\mathcal{S} = q_i p_i \mathcal{S}_3(p, Q, t).$$

En remplaçant une nouvelle fois cette relation dans l'expression (1.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial p_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial Q_i}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

- 4ème choix d'association :

$$\mathcal{S} = q_i p_i - Q_i P_i + \mathcal{S}_4(p, P, t).$$

En remplaçant encore une fois cette relation dans l'expression (1.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}_4}{\partial p_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_4}{\partial P_i}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{S}_4}{\partial t}. \end{aligned}$$

La catégorisation que nous venons d'effectuer au sujet des différentes fonctions génératrices peut sembler complexe à première vue. En fait, il est évident que les quatre classes de transformations canoniques qui viennent d'être décrites sont étroitement liées et peuvent être considérées de façon unie. Cela est du à la symétrie jouée par les coordonnées et leurs moments associés qui ont la faculté d'être transformés les uns en les autres.

1.4.2 Illustrations

Afin d'illustrer les diverses fonctions génératrices, nous allons présenter plusieurs exemples explicites pour déboucher sur une application qui nous intéressera dans la suite de ce mémoire : l'oscillateur harmonique.

- Pour ce premier exemple, nous allons nous inspirer de la deuxième classe de fonction génératrice. Particulièrement

$$\mathcal{S}_2(q, P) = q_i P_i$$

A l'aide de cette expression, nous obtenons de l'équation (1.6), les résultats suivants

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial q_i} = P_i, \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial P_i} = q_i, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Nous remarquons trivialement que les nouvelles et les anciennes variables canoniques sont les mêmes. C'est pourquoi la fonction $\mathcal{S}_2$ génère la transformation identique. Le deuxième type de transformation canonique contient à elle seule la transformation identique.

- En ce qui concerne le deuxième exemple, nous allons prendre en considération une fonction génératrice de première classe $\mathcal{S}_1(q, Q, t)$ avec le format suivant

$$\mathcal{S}_1 = q_k Q_k.$$

En injectant cette relation dans l'équation (1.6), nous obtenons les résultats suivants

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_i} = Q_i, \\ P_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial Q_i} = -q_i, \\ \mathcal{K}(Q, P) &= \mathcal{H}(-P, Q). \end{aligned}$$

Nous notons assez rapidement que la transformation donnée inverse donc les coordonnées et les moments associés canoniques. En effet, nous remarquons que les nouvelles coordonnées sont les anciens moments et que les nouveaux moments associés sont les anciennes coordonnées. Il s'agit là d'une preuve supplémentaire de l'indépendance des coordonnées et des moments associés. La démarcation que nous leur appliquons n'est qu'une question de terminologie.

- Enfin, clôturons nos exemples avec le problème de l'oscillateur harmonique. Cette illustration est une bonne raison pour introduire certaines notions qui nous seront utiles par la suite. Repartons du système hamiltonien associé (avec $\dot{q} = \frac{p}{m}$)

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

En appliquant la transformation canonique de première classe, nous mobilisons la fonction génératrice $\mathcal{S}_1$ de la forme donnée :

$$\mathcal{S}_1 = \frac{m\omega q^2}{2}\cot(Q).$$

Les équations de la transformation s'obtiennent alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q} = m\omega q \cot(Q), \\ P &= -\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2(Q)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons résoudre ces équations pour q et p en fonction de P et Q

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin(Q), \\ p &= \sqrt{2m\omega P}\cos(Q). \end{aligned}$$

En ce qui concerne le nouvel hamiltonien, écrit dans les nouvelles variables

$$\mathcal{K} = \omega P,$$

nous remarquons clairement que $\mathcal{K}$ ne dépend pas de la nouvelle variable Q, cette dernière est donc bien une coordonnée cyclique.

Nous pouvons, dès lors, écrire les nouvelles équations d'Hamilton associées

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = 0, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = \omega. \end{aligned}$$

Nous pouvons observer que :

— $P = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$,

— $Q = \omega t + \beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

Nous trouvons facilement la relation de $q(t)$:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta).$$

Nous retrouvons les éléments évidents de l'oscillateur harmonique, à savoir α que nous supposons positif qui représente l'amplitude de l'oscillation et β qui, quant à lui représente la phase. Quand le nouveau moment P est constant et que la nouvelle coordonnée Q est linéairement fonction du temps, nous dénommerons P comme étant la variable *action* et Q la variable *angle*.

1.5 Variables angle-action

Dans cette section, repartons d'un système hamiltonien à un degré de liberté autonome $\mathcal{H}(q,p) = h$. La fréquence définie par la variable q n'est jamais constante, même dans un modèle simple car cela dépend à la fois du moment associé p et de $\dot{q}$. Comme nous l'avons vu précédemment, il existe une multitude de transformations canoniques dont la transformation *angle-action*. Explicitons les développements de la référence [6]. Partons de nos variables (q,p) et écrivons les nouvelles variables correspondantes

$$(\Psi, J),$$

où Ψ est appelé l'angle et J l'action. Dès lors, déduisons un nouvel hamiltonien qui dépend du seul moment associé J tel que

$$\mathcal{H}(q,p) = \mathcal{K}(\bullet, J) = \mathcal{K}(J). \tag{1.7}$$

Définition 1.5.1. *Nous définissons la fonction d'Hamilton-Jacobi*

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,J)\right) = \mathcal{K}(J).$$

Cette relation est établie à l'aide de la fonction génératrice S(q, J) telle que $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$ *et* $\Psi = \dfrac{\partial S}{\partial J}$.

Dans le cadre de la mécanique céleste, il est pertinent d'identifier Ψ comme variable angulaire, i.e. parcourant une période 2π lorsque la particule effectue un tour complet de son orbite. Le moment associé J est alors considéré comme l'aire sous-tendue par la trajectoire de la particule

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \tag{1.8}$$

1.6 Description des éléments orbitaux

A présent, décrivons et explicitons les différents éléments orbitaux qui nous seront utiles pour représenter et comprendre de futurs concepts. Cette section est tirée en grande partie des références [6], [7] et [8].

1.6.1 Eléments elliptiques

Présentons à présent la mécanique du problème des deux corps qui est à la base des différentes modélisations qui suivront dans ce travail. En considérant une masse centrale $\mathcal{M}$, nous nous intéressons au mouvement d'une masse m orbitant autour cette masse centrale, typiquement le cas d'un satellite tournant autour de la Terre. Nous pouvons caractériser la trajectoire du satellite comme une ellipse dont la Terre (et le centre de masse du système) occuperait l'un des foyers. Considérons également le plan équatorial terrestre comme le plan de référence et modélisons la situation en détaillant les éléments elliptiques de la figure 1.2.

— a : le demi-grand axe, il joint le centre à un bord de l'ellipse le long de la ligne des foyers,

— e : l'excentricité, elle représente l'écart de forme entre l'orbite et le cercle parfait où $e = 0$,

— i : l'inclinaison, elle décrit l'angle entre le plan de l'orbite et le plan équatorial,

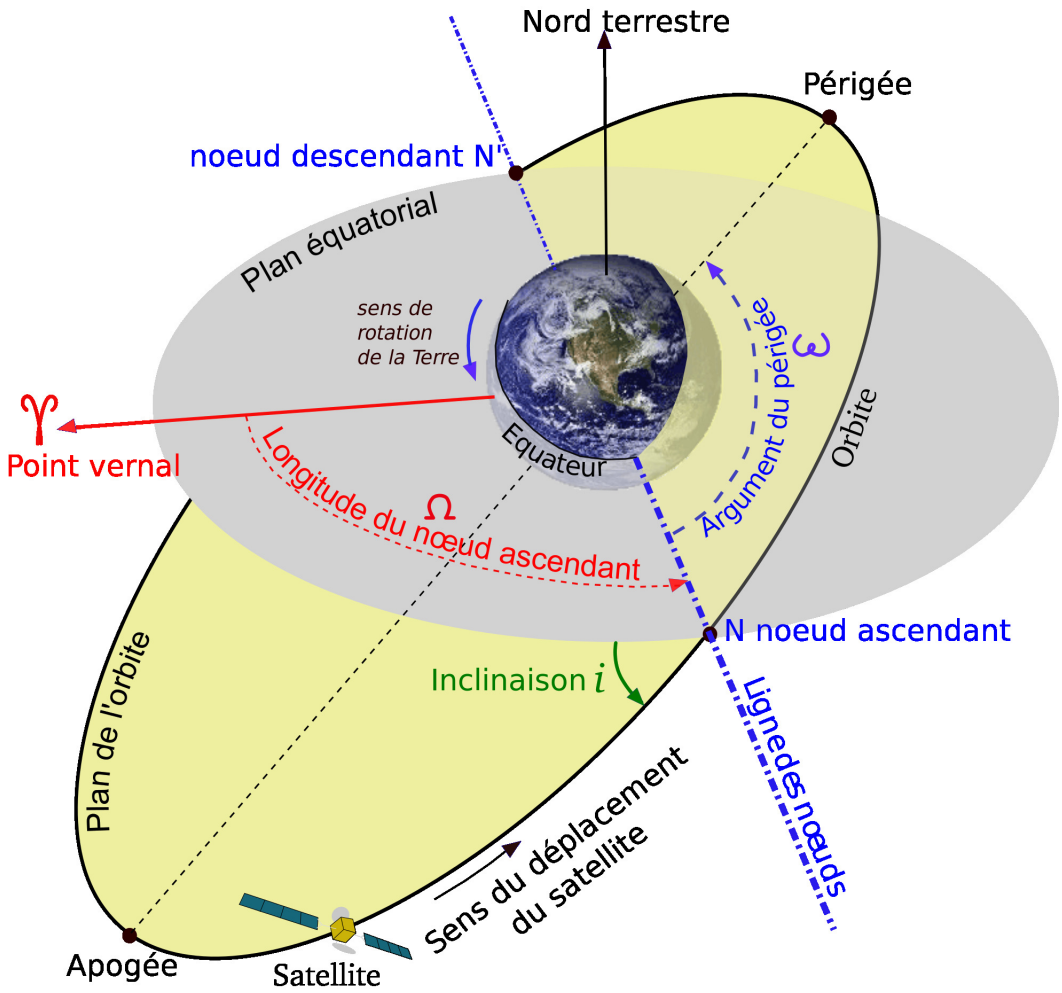

FIGURE 1.2 – Présentation théorique des éléments orbitaux. Issu de la référence [10].

— γ : point vernal, point où le plan équatorial et l'écliptique se croisent. Il s'agit du point où le soleil passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord au moment de l'équinoxe de printemps,

— ω : l'argument du péricentre, il représente l'angle entre la direction du nœud ascendant et celle du périgée de cette orbite. Il est défini dans le plan orbital et dans la direction du mouvement du corps,

— Ω : la longitude du noeud ascendant, il correspond à l'angle entre la direction du point vernal et la ligne des nœuds, situé dans le plan équatorial et mesuré dans le sens direct. Elle est également associée à l'angle de précession du plan orbital,

— M : anomalie moyenne, c'est un angle qui parcourt l'orbite à vitesse constante, il est donc proportionnel à la fraction de période écoulée depuis le dernier passage au périgée.

— f : anomalie vraie, elle désigne l'angle entre la direction du périgée et la position d'un objet sur son orbite, déterminée au foyer de l'ellipse.

La ligne des noeuds est la droite reliant les points d'intersection entre le plan orbital et le plan équatorial. Le noeud ascendant N est le noeud se trouvant sur la trajectoire ascendante du satellite et à l'inverse le noeud descendant N' est le noeud se trouvant sur la trajectoire descendante du satellite.

1.6.2 Problème des deux corps

Comme illustré dans la figure 1.2, considérons un corps central (représenté par la Terre) de masse $\mathcal{M}$ et un corps (représenté par le satellite) de masse m orbitant autour du corps central. Dans le cadre du problème des deux corps, considérons la Terre comme origine du repère et $\vec{r}$ comme le vecteur position du satellite par rapport à la Terre. La vitesse du satellite est égale à la dérivée du vecteur de position. Nous savons également que ces vecteurs se décomposent selon la base fixe de cet espace

$$\begin{cases} \vec{r} &= x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}, \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}. \end{cases}$$

Ecrivons le système hamiltonien correspondant au problème des deux corps

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \text{Energie cinétique} + \text{Energie potentielle} \\ &= m\frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}m}{r}. \end{aligned}$$

Afin d'établir nos variables et les moments associés, nous posons

$$\begin{aligned} q_1 &= x, & p_1 &= m\dot{x}, \\ q_2 &= y, & p_2 &= m\dot{y}, \\ q_3 &= z, & p_3 &= m\dot{z}. \end{aligned}$$

Détaillons les équations d'Hamilton qui en découlent

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, & m\ddot{x} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2}, & m\ddot{y} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_3}, & m\ddot{x} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_3}. \end{aligned}$$

En rappelant la définition de la quantité de mouvement, nous pouvons directement la mettre en lien avec le choix de nos moments associés

$$\vec{p} = m\vec{v} = p_1\vec{e_x} + p_2\vec{e_y} + p_3\vec{e_z}.$$

Nous pouvons dès lors interpréter notre hamiltonien sous une autre forme, grâce à laquelle découlent trivialement toutes les équations d'Hamilton

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}m}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}.$$

Les variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ sont appelées les variables canoniques hamiltoniennes. Mais ces éléments présentent un inconvénient : ils ne sont pas exprimés en fonction des éléments elliptiques. Travaillons par rapport au plan orbital et effectuons certaines rotations à l'aide des angles d'Euler pour déterminer autrement le vecteur position ($\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = r\vec{e_r}$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(h)R_1(i)R_3(\theta) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où R_1 et R_3 définissent des matrices de rotation par rapport à l'origine du repère respectivement sur la première et la troisième composante

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est pourquoi nous conserverons uniquement trois angles (communs aux éléments elliptiques et aux angles d'Euler) en tant que nouvelles variables

— $Q_1 = M$,
— $Q_2 = \theta \ (= f + \omega)$,
— $Q_3 = h \ (= \Omega)$.

et nous allons définir leurs moments associés à l'aide de la transformation de Mathieu.

Définition 1.6.1. *La transformation de Mathieu permet de décrire, à partir de nouvelles variables, les nouveaux moments associés. Nous supposons qu'il y a m relations ou liaisons entre anciennes et nouvelles variables, i.e. $f_k(q_i, Q_i) = 0$ où $k = 1, ..., m$. Si le système de $(2n + m)$ équations*

$$\begin{aligned} f_k(q_i, Q_i) &= 0 && k = 1, ..., m, \\ p_i &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} && i = 1, ..., n, \\ P_i &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} && i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

en les $(2n + m)$ variables λ_k, Q_i, P_i peut être résolu en fonction des paramètres p_i et q_i et ce de telle sorte que le jacobien

$$\frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(q_i, p_i)}$$

soit régulier, alors la transformation $(q_i, p_i) \rightsquigarrow (Q_i, P_i)$ est symplectique.

Dans notre cas, nous cherchons donc $(6 + m)$ relations. Nous résumerons les différentes étapes de calculs afin de nous concentrer sur l'essentiel du développement. A l'aide de l'expression des rotations, nous exprimons les coordonnées du système comme

$$\begin{cases} x &= r(\cos(h)\cos(\theta) - \sin(h)\sin(\theta)\cos(i)), \\ y &= r(\sin(h)\cos(\theta) + \cos(h)\sin(\theta)\cos(i)), \\ z &= r\sin(\theta)\sin(i). \end{cases}$$

En utilisant l'expression du moment cinétique ($\vec{\sigma} = \vec{r} \times m\vec{v}$) et quelques simplifications concernant l'anomalie vraie f dans l'expression de Q_2, nous obtenons dès lors les *éléments de Delaunay*.

Définition 1.6.2. *Les éléments de Delaunay sont définis*

- $l = M$,
- $g = \omega$,
- $h = \Omega$,
- $L = \sqrt{\mu a}$,
- $G = L\sqrt{1-e^2}$,
- $H = G\cos(i)$,

où l, g et h sont les variables et L, G, H sont les moments associés.

Ecrivons les équations d'Hamilton correspondantes

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, & \dot{L} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}, \\ \dot{g} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, & \dot{G} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, \\ \dot{h} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}, & \dot{H} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}^3}{(\mathcal{M}+m)^2} \\ &\simeq \mathcal{G}\mathcal{M}. \end{aligned}$$

En effet, nous avons considéré dans la section 1.6.1 que le centre de masse du système se trouvait sur la masse centrale $\mathcal{M}$, car $\mathcal{M} >> m$. De plus, G correspond à la constante gravitationnelle. Rappelons que l'hamiltonien décrit l'énergie du système. Dans notre cas, le problème des deux corps peut être décrit par

$$\mathcal{H}_{2C} = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2}. \tag{1.9}$$

En se référant aux équations d'Hamilton, L, G, H, ω et Ω sont constants au cours du temps, ceci implique que a, e et i le sont aussi. Toutefois, l'anomalie moyenne M varie en cours du temps en vertu du fait qu'elle localise à chaque instant le satellite par rapport au périgée. Nous pouvons la définir en fonction du temps

$$M = \dot{M}t + M_0,$$

où M_0 est la position initiale et $\dot{M}$ est le mouvement moyen

$$\dot{M} = \frac{\partial \mathcal{H}_{2C}}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3}.$$

Les éléments de Delaunay tels qu'ils ont été présentés sont sensibles à certaines contraintes : nous observons que les variables deviennent dégénérées si $e = 0$, dans ce cas ω est indéterminé et si $i = 0$, Ω n'est pas défini. Nous présentons donc les *éléments de Delaunay modifiés*.

Définition 1.6.3. *Les éléments de Delaunay modifiés sont définis*

- $\lambda = M + \omega + \Omega$,
- $p = -\omega - \Omega = -\varpi$,
- $q = -\Omega$,
- L,
- $P = L - G$,
- $Q = G - H$,

où λ, p et q sont les variables et L, P, Q sont les moments associés. λ est aussi appelé longitude moyenne.

Ecrivons les équations d'Hamilton correspondantes

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, & \dot{L} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \\ \dot{p} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, & \dot{P} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, & \dot{Q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \end{aligned}$$

L'enjeu est de maintenir les nouveaux moments P et Q positifs pour une ellipse, i.e. ayant une excentricité $e < 1$. En conséquence, les angles p et q sont le signe opposé aux premières définitions afin de préserver le caractère canonique de la transformation.

Ce premier chapitre nous a permis de rappeler les notions importantes et essentielles de la dynamique céleste. A l'aide des concepts vus au cours de ce chapitre, nous construirons, dans le chapitre 3, un modèle physique conservatif. Toutefois, afin de tenir compte de l'influence gravitationnelle de la Terre et de certains autres corps célestes, nous verrons dans le chapitre 2 une approche de la théorie des perturbations.

Chapitre 2

Théorie des perturbations

La théorie du problème des deux corps présente un aspect plutôt utopique du problème. Il est question d'un cas simple où l'on considère uniquement les interactions de deux corps sans aucune intervention extérieure. Qui plus est, l'un des corps est tellement massif que son centre de masse peut être confondu avec celui du système. Dans cette partie, nous présenterons théoriquement l'effet d'une perturbation sur le problème des deux corps que nous venons de rappeler. Cette perturbation dépend du modèle que l'on considère : en ajoutant l'attraction de la Lune, du Soleil, d'une autre planète ou d'objets célestes, nous complexifions notre système. Cette perturbation dépend aussi de la forme que nous considérons pour la Terre, par exemple. En effet, cette dernière n'est pas une sphère parfaite, certains modèles envisagent que la Terre soit seulement aplatie aux pôles. Dans ce travail, en plus de l'aplatissement des pôles, l'équateur est elliptique. Ce chapitre est fortement inspiré de la référence [8].

2.1 Concepts

Définition 2.1.1. *L'hamiltonien d'un système perturbé s'écrit*

$$\mathcal{H}(q,p) = \mathcal{H}_{2C}(q,p) + \epsilon\mathcal{H}_{pot}(q,p,t).$$

Le premier terme correspond à l'énergie totale du système au problème des deux corps, i.e. faisant référence à l'équation (1.9). La correction due à la perturbation est décrite par le deuxième terme lorsque cette perturbation dérive d'un potentiel.

Une fois de plus, le but va être de représenter cette perturbation à l'aide d'éléments elliptiques qui dépendent du temps. Les éléments *képlériens osculateurs* sont les éléments képlériens que le système aurait à un instant donné s'il n'était plus perturbé. Pour la suite des développements, nous prendrons

1. Eléments osculateurs :
   - a : demi-grand axe,
   - e : excentricité,
   - i : inclinaison,
   - λ : longitude moyenne,
   - ϖ : somme de l'argument du péricentre et de la longitude du noeud ascendant,
   - Ω : noeud ascendant.
2. Eléments de Delaunay : l, g, h, L, G, H.

L'hamiltonien du système perturbé s'écrit alors

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \mathcal{U}(l,g,h,L,G,H,t).$$

2.2 Problème des $(N+1)$ corps

Représentons schématiquement le problème à $(N+1)$ corps sur la figure 2.1 en n'omettant pas d'afficher l'origine O du repère. Considérons le corps M_0 comme étant l'élément central du système, tentons de revenir à un problème à N corps en effectuant quelques rappels nécessaires. Nous observons donc bien M_i corps de masse m_i où $i = 0, ..., N$. Repartons des lois de Newton pour déterminer les équations du mouvement du problème des deux corps

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}.$$

Généralisons, à présent, à N+1 corps

$$\begin{aligned} m_i\frac{d^2\overrightarrow{OM_i}}{dt^2} &= -\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}\frac{\mathcal{G}m_im_j}{\|\overrightarrow{M_iM_j}\|^3}\overrightarrow{M_jM_i}, \\ \iff \quad \frac{d^2\overrightarrow{OM_i}}{dt^2} &= -\mathcal{G}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}\frac{m_j}{\|\overrightarrow{M_iM_j}\|^3}\overrightarrow{M_jM_i}. \end{aligned}$$

Travaillons sur le centre de masse, appelé aussi le barycentre (nous le noterons K). Ce dernier obéit aux lois de la mécanique dans le cadre des $N+1$ corps.

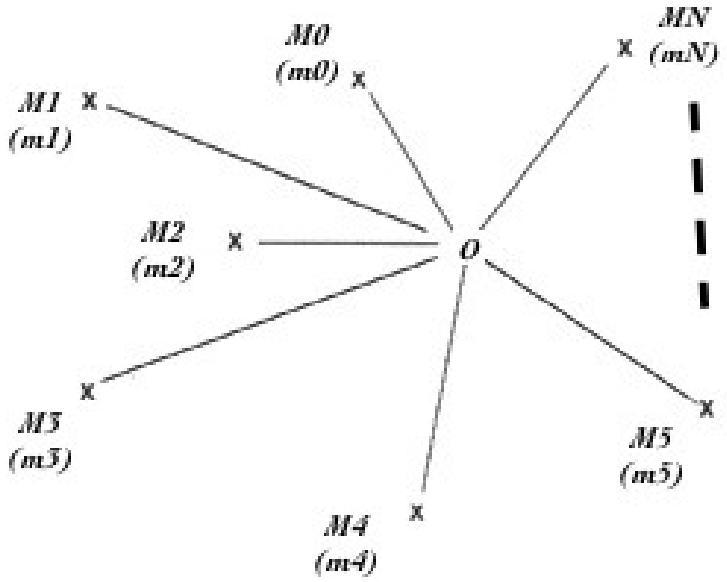

FIGURE 2.1 – Représentation du problème à $N+1$ corps.

Débutons par la formule de détermination du barycentre

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \frac{\sum_{i=0}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=0}^{N} m_i},\\ M\,\overrightarrow{OK} &= \sum_{i=0}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i},\end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=0}^{N} m_i$. Exploitons et déterminons une propriété importante du centre de masse

$$\begin{aligned}M\,\frac{d^2\overrightarrow{OK}}{dt^2} &= \sum_{i=0}^{N} m_i \frac{d^2\overrightarrow{OM_i}}{dt^2}\\ &= -\mathcal{G}\sum_{i=0}^{N} m_i \sum_{j=0}^{N} m_j \frac{\overrightarrow{M_jM_i}}{\|M_jM_i\|^3}\\ &= -\mathcal{G}\sum_{0\le i<j}^{N} m_i m_j \frac{\overrightarrow{M_jM_i} + \overrightarrow{M_iM_j}}{\|M_jM_i\|^3}\\ &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Ceci implique directement que l'accélération du barycentre est nulle et donc qu'il est en mouvement rectiligne uniforme.

Attelons-nous à réduire notre problème. Tout d'abord, nous nous centrons sur le corps M_0

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM_0}}{dt^2} = -\mathcal{G}\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\overrightarrow{M_jM_0}}{\|\overrightarrow{M_jM_0}\|^3}.$$

Explicitons les équations de mouvement entre un corps quelconque M_i et le corps M_0. Elles sont constituées d'une part de l'attraction gravitationnelle de l'une sur l'autre et inversement, ainsi que de l'influence des autres corps respectivement

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overrightarrow{M_0M_i}}{dt^2} &= \mathcal{G}\left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_j \frac{\overrightarrow{M_0M_j}}{\|M_0M_j\|^3} - m_0\frac{\overrightarrow{M_0M_i}}{\|M_0M_i\|^3} + m_i\frac{\overrightarrow{M_iM_0}}{\|M_iM_0\|^3} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_j \frac{\overrightarrow{M_jM_i}}{\|M_jM_i\|^3}\right)\\ &= -\mathcal{G}(m_0+m_i)\frac{\overrightarrow{M_0M_i}}{\|M_0M_i\|^3} + \mathcal{G}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_j\left(\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{\|M_iM_j\|^3} - \frac{\overrightarrow{M_0M_j}}{\|M_0M_j\|^3}\right).\end{aligned}$$

En posant $\overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{M_0M_i}$ et $\overrightarrow{M_{ij}} = \overrightarrow{M_iM_j}$, nous obtenons finalement

$$\frac{d^2\overrightarrow{M_i}}{dt^2} = -\mathcal{G}(m_0+m_i)\frac{\overrightarrow{M_i}}{\|M_i\|^3} + \mathcal{G}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_j\left(\frac{\overrightarrow{M_{ij}}}{\|M_{ij}\|^3} - \frac{\overrightarrow{M_j}}{\|M_j\|^3}\right).$$

Nous avons donc bien réduit notre problème à N corps, où nous pouvons distinguer

— $-\mathcal{G}(m_0+m_i)\dfrac{\overrightarrow{M_i}}{\|M_i\|^3}$: terme képlérien,

— $\mathcal{G}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_j\left(\dfrac{\overrightarrow{M_{ij}}}{\|M_{ij}\|^3} - \dfrac{\overrightarrow{M_j}}{\|M_j\|^3}\right)$: perturbations.

Dans le terme des perturbations, nous pouvons dissocier à la fois les perturbations directes (qui lient directement les corps M_i et M_j) et les perturbations indirectes (qui s'appliquent indirectement par les corps M_j).

2.3 Potentiel de gravitation d'un corps de forme quelconque

Nous abordons une partie essentielle où les éléments théoriques qui vont y être abordés seront repris dans le cas des satellites géostationnaires. Sur la figure 2.2, nous pouvons observer un corps quelconque, sans forme impliquant une distribution non homogène de sa masse. C'est pourquoi nous ne représenterons pas le centre de masse au centre géométrique de l'objet. Nous introduisons les coordonnées sphériques

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos(\lambda)\cos(\phi),\\ y &=& r\sin(\lambda)\cos(\phi),\\ z &=& r\sin(\phi), \end{array}\right.$$

où λ dénotera ici la longitude et ϕ la latitude. Nous cherchons un développement du potentiel en puissance de $1/r$. Le potentiel s'exprime

$$U(P) = U(r,\lambda,\phi) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_n(\lambda,\phi)}{r^n} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n,$$

où $V_n = \dfrac{W_n}{r^{n+1}}$. Nous admettons que $\Delta U(P) = 0$ pour tout point P en dehors du solide. Rappelons que l'opérateur ΔU désigne le laplacien du potentiel.

Définition 2.3.1. *Le terme $W_n^{(m)}(\lambda,\phi)$ est appelé une harmonique sphérique d'ordre n. Il s'agit d'une fonction harmonique particulière car son laplacien est nul.*

Repartons du laplacien du potentiel en coordonnées sphériques. Nous considérons cette formule théorique connue

$$\Delta U(r,\lambda,\phi) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - \frac{\tan(\phi)}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \phi}. \tag{2.1}$$

Par similarité, nous savons que $\Delta V_n = \Delta\left(\frac{W_n(\lambda,\phi)}{r^{n+1}}\right)$. Nous allons donc y appliquer la formule (2.1) en identifiant terme à terme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} &= (n+1)(n+2)\frac{W_n(\lambda,\phi)}{r^{n+3}},\\ \frac{2}{r}\frac{\partial V_n}{\partial r} &= -2(n+1)\frac{W_n(\lambda,\phi)}{r^{n+3}},\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Delta V_n = \frac{1}{r^{n+3}}\left(n(n+1)W_n + \frac{1}{\cos^2(\phi)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \phi^2} - \tan(\phi)\frac{\partial W_n}{\partial \phi}\right). \tag{2.2}$$

Cette dernière équation (2.2) est égale à 0 en vertu des équations de Poisson. Etant donné que nous considérons le potentiel 2π-périodique en λ, notre harmonique sphérique s'exprime

$$W_n^{(m)}(\lambda,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n^m(\phi)e^{im\lambda}.$$

En calculant la dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 W_n(\lambda,\phi)}{\partial \lambda^2} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 C_n^{(m)} e^{ip\lambda},$$

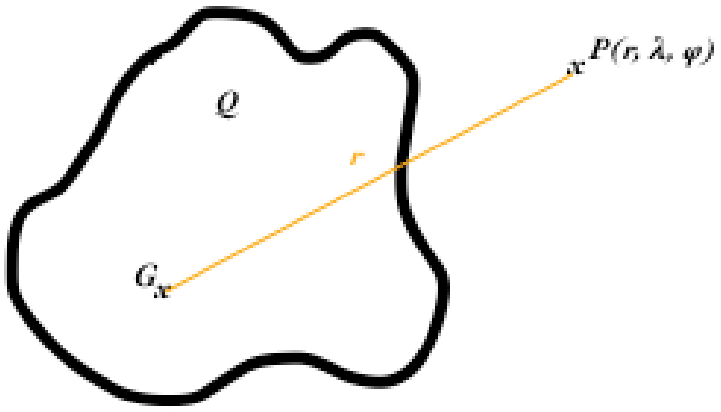

FIGURE 2.2 – Représentation d'un corps de forme quelconque où le centre de masse n'est pas confondu avec le centre géométrique.

l'équation aux dérivées partielles devient

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[\left(n(n+1)-\frac{m^2}{\cos^2(\phi)}\right)C_n^{(m)}(\phi)-\tan(\phi)\frac{dC_n^{(m)}}{d\phi}+\frac{d^2C_n^{(m)}}{d\phi^2}\right]e^{im\lambda}=0.$$

Nous posons $s=\sin(\phi)$ et nous associons $C_n^{(m)}(\phi)$ aux fonctions de Legendre $P_n^{(m)}(s)$. Si m = 0, nous noterons simplement P_n qui désigne les polynômes de Legendre

$$\begin{aligned}\frac{dC_n^{(m)}}{d\phi} &= \frac{P_n^{(m)}}{ds}\frac{ds}{d\phi}=\sqrt{1-s^2}\frac{dP_n^{(m)}}{ds},\\ \frac{d^2C_n^{(m)}}{d\phi^2} &= -s\frac{P_n^{(m)}}{ds}+(1-s^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{ds^2}.\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-s^2}\right)P_n^{(m)}(s)-2s\frac{dP_n^{(m)}}{ds}+(1-s^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{ds^2}=0.$$

Attardons-nous, à présent, aux développements et aux propriétés des polynômes de Legendre.

Définition 2.3.2. *Les fonctions de Legendre associées sont définies*

$$P_n^{(m)}(s)=\frac{(1-s^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}(s^2-1)^n}{ds^{n+m}},$$

telles que $m=0,...,n$. *Les fonctions sont nulles pour* $m>n$.
Pour $m=0$, *nous obtenons les polynômes de Legendre*

$$P_n^{(0)}(s)=P_n(s)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(s^2-1)^n}{ds^n}.$$

Dans notre cas, nous trouvons $(2n+1)$ fonctions de Legendre non nulles et $(2n+1)$ fonctions harmoniques sphériques indépendantes d'ordre n :

— $P_n(\sin(\phi)), P_n^{(1)}(\sin(\phi))\cos(\lambda), ...$
— $P_n^{(n)}(\sin(\phi))\cos(n\lambda), P_n^{(n)}(\sin(\phi))\sin(n\lambda), ...$

Détaillons l'expression des fonctions génératrices des fonctions de Legendre permettant de retrouver l'équation aux dérivées partielles ainsi que les relations de récurrence

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}P_n(s)t^n,\\ \frac{(2m)!(1-s^2)^{m/2}t^m}{2^m m!(1-2st+t^2)^{m+1/2}} &= \sum_{n=m}^{\infty}P_n^{(m)}(s)t^n.\end{aligned}$$

La formule d'addition des polynômes de Legendre peut s'avérer utile lors de certains développements futurs

$$P_n(\sin(\theta)\sin(\phi)+\cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\lambda)) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{nm} P_n^{(m)} \sin(\theta) P_n^{(m)}(\sin\phi)\cos(m\lambda),$$

avec

$$\alpha_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 2\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

Le potentiel de gravitation d'un corps quelconque en un point P extérieur à ce corps et exprimé en fonction des coordonnées sphériques de P s'écrit

$$U(r,\lambda,\phi) = \mathcal{G}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n+1} P_n^{(m)}(\sin(\phi))(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)). \tag{2.3}$$

où C_{nm} et S_{nm} dépendent de la distribution de la masse du corps Q considéré.

2.4 Phénomène de résonance

La résonance est un phénomène physique qui se rapporte aux systèmes dynamiques, lorsque la fréquence d'oscillation propre est un multiple de la fréquence de forçage, il y a alors augmentation de la réponse. En ce qui concerne les résonances orbitales, elles sont nombreuses dans le Système Solaire et provoquent des effets dynamiques importants. Les résonances sont souvent exprimées $q_1 : q_2$, où q_1 et q_2 sont deux entiers naturels. Elles sont de plusieurs types :

— Résonance *Spin-orbite* : un astre orbitant autour d'un autre est en résonance spin-orbite si sa période de rotation et sa période de révolution sont commensurables, i.e. que leur rapport est un nombre rationnel.

La rotation synchrone est le cas le plus courant des résonances spin-orbite, il s'agit d'une résonance $1:1$. Un exemple concret est le cas de la Lune. En effet, sa période de rotation et sa période de révolution sont exactement égales, ce qui explique que nous voyons toujours la même face de la Lune depuis la Terre. Un deuxième exemple qui concerne le cas de Mercure illustre la résonance $3:2$, i.e. qu'elle effectue trois rotations sur elle-même tandis qu'elle réalise deux révolutions autour du Soleil.

— Résonance de *moyen-mouvement* : deux astres orbitant autour d'un corps central ayant le même centre de masse sont en résonance de moyen-mouvement si leur révolution respective autour du corps central est commensurable.

Prenons l'exemple des satellites naturels dans le système de Saturne : Janus et Epiméthée sont en résonance $1:1$. Le cas des astéroïdes troyens fait également partie des résonances de moyen-mouvement. Il faut savoir que leur orbite partage celui de Jupiter autour du Soleil. La particularité est qu'ils se trouvent à $60°$ avant et après Jupiter sur cette orbite.

— Résonance *gravitationnelle* : un astre orbitant autour d'un corps central est en résonance gravitationnelle (ou *groundtrack*) si sa période de révolution est commensurable avec la période de rotation du corps central, i.e. que leur rapport est un nombre rationnel.

Nous allons présenter plusieurs exemples qui seront repris dans la suite du travail. Nous trouvons tout d'abord la résonance $2:1$, typique des satellites GPS et de communication qui utilisent l'orbite terrestre moyenne. Ce genre de satellite effectue deux fois le tour de la Terre en une journée. Il y a aussi la résonance $1:1$, caractéristique des satellites géostationnaires qui utilisent l'orbite haute. Ces satellites se fixent sur une surface bien précise de la Terre tout le long de leur utilisation.

2.5 Potentiel terrestre

A présent, nous avons rappelé toutes les notions théoriques dont nous avions besoin afin de traiter un cas particulier des éléments présentés. En effet, il faut se mettre dans un contexte particulier où le champ gravitationnel de la Terre influence les objets proches des orbites géostationnaires au travers des harmoniques sphériques. Le terme marquant la plus grande influence du potentiel terrestre est noté J_2, il est dû à l'aplatissement des pôles et ne provoque pas de résonance. Nous trouvons un terme du second ordre J_{22} qui est dû, en plus, à l'équateur elliptique provoquant une résonance. Il s'agit du terme qui considère que la Terre a une légère forme d'ellipsoïde comme présenté sur la figure 2.3. En réalité, considérer la Terre comme un ellipsoïde est la meilleure modélisation que l'on puisse lui administrer afin de pouvoir calculer certaines solutions. Cette partie est inspirée des références [1], [3] et [12].

Si la période de révolution des débris spatiaux est proportionnelle avec la période de rotation de la Terre (aussi appelée période sidérale), les termes d'ordre supérieur du potentiel terrestre provoqueront une perturbation résonante, dans le cas où les amplitudes peuvent devenir des ordres de grandeur plus grands que les perturbations ordinaires. Les perturbations résonantes sont également très longues,

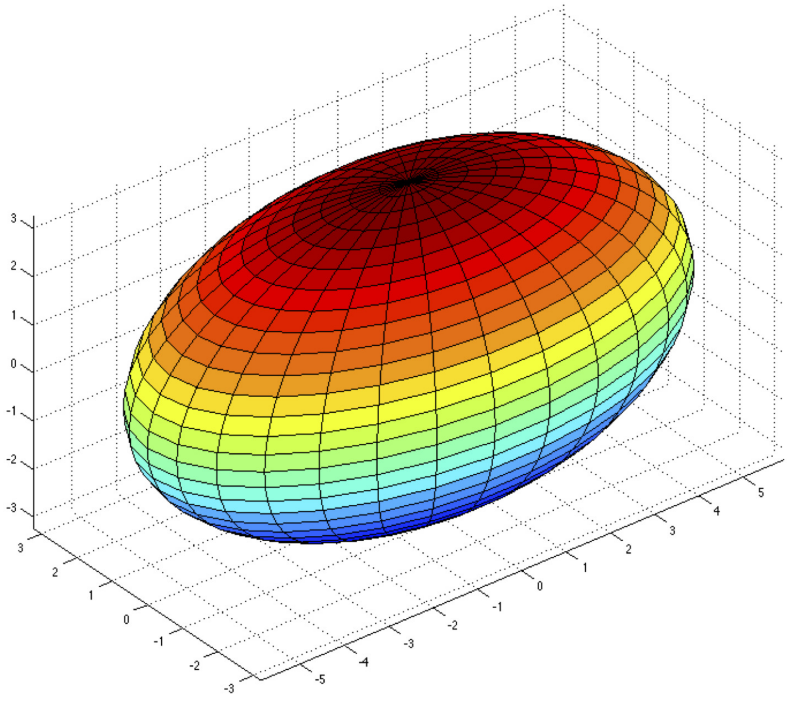

FIGURE 2.3 – Forme de la Terre comparable à un ellipsoïde.

i.e. qu'elles se comportent comme des mouvements séculaires. Les perturbations résonantes sont donc inévitables dans le cas particulier des orbites presque géostationnaires.

Reprenons l'équation (2.3) et adaptons-là au potentiel de perturbation terrestre

$$U(r,\lambda,\phi) = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^{(m)}(\sin(\phi))(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)), \tag{2.4}$$

où R_e désigne le rayon équatorial terrestre et rappelons que les termes C_{nm} et S_{nm} sont les harmoniques sphériques. Une autre forme du potentiel de perturbation terrestre existe en mobilisant la variable J_{nm} dépendant de C_{nm} et S_{nm}

$$U(r,\lambda,\phi) = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^{(m)}(\sin(\phi))J_{nm}\cos(m)(\lambda - \lambda_{nm}),$$

tel que pour $n \geq m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
C_{nm} &= -J_{nm}\cos(m\lambda_{nm}),\\
S_{nm} &= -J_{nm}\sin(m\lambda_{nm}),\\
J_{nm} &= \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2},\\
m\lambda_{nm} &= \arctan\left(\frac{-S_{nm}}{-C_{nm}}\right).
\end{aligned}$$

Pour ce travail, nous repartirons toutefois de l'équation (2.4) dans le cas d'un ellipsoïde. Dans notre cas, $n = 2$ et $m = 2$. Développons donc le potentiel de perturbation qui sera utilisé ultérieurement en faisant référence aux définitions des polynômes de Legendre

$$\begin{aligned}
U(r,\lambda,\phi) &= -\frac{\mu}{r}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2 P_2^{(2)}(\sin(\phi))(C_{22}\cos(2\lambda) + S_{22}\sin(2\lambda)),\\
P_2(\sin(\phi)) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{d\sin(\phi)^2}(\sin^2(\phi) - 1)^2\\
&= \frac{1}{8}(12\sin^2(\phi) - 4)\\
&= \frac{3}{2}\sin^2(\phi) - \frac{1}{2},\\
P_2^2(\sin(\phi)) &= (1 - \sin^2(\phi))\frac{d^2}{d\sin(\phi)^2}(P_2(\sin(\phi)))\\
&= 3(1 - \sin^2(\phi)),
\end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} U(r,\lambda,\phi) &= -3\frac{\mu}{r}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2(1-\sin^2(\phi))(C_{22}\cos(2\lambda)+S_{22}\sin(2\lambda)) \\ &= -3\frac{\mu}{r}\frac{R_e^2}{r^2}(\cos^2(\phi))(C_{22}(\cos^2(\lambda)-\sin^2(\lambda))+S_{22}2\sin(\lambda)\cos(\lambda)) \\ &= -3\frac{\mu}{r}R_e^2(C_{22}(\bar{x}^2-\bar{y}^2)+S_{22}2\bar{x}\bar{y}) \\ &= 3\frac{\mu^4 R_e^2}{L^6}(C_{22}(\bar{x}^2-\bar{y}^2)+S_{22}2\bar{x}\bar{y}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les variables $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ sont les coordonnées normalisées (application d'une division par r). Le potentiel peut être aussi exprimé en utilisant les éléments orbitaux (a,e,i,Ω,ω,M) et le temps sidéral θ. D'après la référence [5], *Kaula* représente le potentiel terrestre

$$U=-\frac{\mu}{r}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\frac{\mu}{a}\left(\frac{R_e}{a}\right)^n F_{nmp}(i)G_{npq}(e)S_{nmpq}(\Omega,\omega,M,\theta),$$

où S_{nmpq} est fonction de C_{nm} et S_{nm} :

$$S_{nmpq}(\Omega,\omega,M,\theta)=\begin{pmatrix}C_{nm}\\-S_{nm}\end{pmatrix}\cos\Theta_{nmpq}(\Omega,\omega,M,\theta)+\begin{pmatrix}S_{nm}\\C_{nm}\end{pmatrix}\sin\Theta_{nmpq}(\Omega,\omega,M,\theta),$$

où n,m,p,q sont des entiers. $F_{nmp}(i)$ et $G_{npq}(e)$ sont respectivement des fonctions de l'inclinaison et de l'excentricité.

Définition 2.5.1. *L'argument gravitationnel de Kaula est défini*

$$\Theta_{nmpq}(\Omega,\omega,M,\theta)=(n-2p)\omega+(n-2p+q)M+m(\Omega-\theta).$$

Au terme de cette première partie de mémoire, nous disposons de tous les éléments théoriques nécessaires à la construction d'un hamiltonien modélisant le mouvement d'un débris orbitant autour de la Terre. Le modèle qui sera présenté dans la seconde partie utilisera toutes les notions décrites précédemment, dans une plus ou moins grande mesure. Une étude rigoureuse peut alors être effectuée pour déterminer les équilibres et la stabilité de la dynamique soulevée.

Deuxième partie

Résonance géostationnaire

Chapitre 3

Résonance et rotation terrestre

Dans ce chapitre, nous tenterons, à l'aide des différentes notions théoriques explicitées dans la première partie, de construire le modèle conservatif présenté dans la référence [12]. Ce modèle tiendra compte du phénomène de résonance géostationnaire dont nous exposerons les caractéristiques.

3.1 Expression du modèle conservatif

Comme nous l'avons déjà évoqué, un objet orbitant autour de la Terre est en résonance si sa période de révolution est commensurable avec la période de rotation terrestre. Cela signifie qu'un entier q_1 représentant le jour sidéral est égal à un entier q_2 représentant la période de révolution de l'objet spatial. Dans le cas d'une résonance $1:1$, $q_1 = q_2 = 1$. D'une autre manière

$$\frac{P_\oplus}{P_{obj}} = \frac{q_1}{q_2} = 1,$$

où $P_\oplus$ désigne la période de rotation terrestre qu'on exprime à

$$\frac{2\pi}{n_\oplus} = 1 \text{ jour},$$

où $n_\oplus = \dot{\theta}$ qui est la vitesse angulaire de la Terre. P_{obj} est la période orbitale de l'objet que l'on considère en résonance. La particularité de cette résonance géostationnaire est que l'objet emprunte toujours le même chemin spatial ou du moins en est proche afin de cibler toujours la même partie terrestre. Ceci implique que la répétition du même mouvement orbital géostationnaire influence périodiquement l'objet spatial. La variation qui découle de ce phénomène s'opère donc sur de très longues périodes, de l'ordre de plusieurs mois voire plusieurs années. La résonance s'applique dès qu'elle agit sur un élément orbital. Si nous précisons notre analyse, après une révolution complète de notre satellite, tous les éléments ne sont pas revenus à zéro ou à leur état d'origine avant la révolution. Nous observons un effet d'accumulation sur un angle de très longue période le long du mouvement. Aidons-nous, à présent, de la définition 2.5.1 pour illustrer l'apparition d'une résonance lorsque les dérivées des arguments gravitationnels de Kaula sont proches de zéro. Notons que les fréquences associées sont considérées

$$\dot{\Theta}_{nmpq}(\dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M}, \dot{\theta}) = (n-2p)\dot{\omega} + (n-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \simeq 0.$$

En imposant la condition $q = 0$, nous obtenons

$$(n-2p)(\dot{\omega} + \dot{M}) \simeq m(\dot{\theta} - \dot{\Omega}).$$

En nous basant sur les différents éléments orbitaux présentés précédemment, nous avançons que

$$\frac{\dot{\omega} + \dot{M}}{\dot{\theta} - \dot{\Omega}} \simeq \frac{q_1}{q_2}.$$

En effet, la période de révolution du satellite correspond au mouvement moyen $\dot{M}$ corrigé par la dérivée de l'argument du péricentre $\dot{\omega}$. La période de rotation de la Terre est bien définie comme étant sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ corrigée par la dérivée de l'angle de précession du plan orbital $\dot{\Omega}$; néanmoins ces corrections sont faibles. Nous considérons donc

$$\frac{\dot{M}}{\dot{\theta}} \simeq \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}} \simeq \frac{q_1}{q_2}.$$

Le cas est semblable pour les débris spatiaux où nous considérons les deux fréquences comme identiques. La résonance géostationnaire augmente l'amplitude des harmoniques en produisant des diviseurs proches de zéro dans les coefficients trigonométriques, ce qui implique une augmentation de l'excentricité de l'orbite.

Utilisons la dernière expression de l'équation (2.5) du potentiel terrestre pour exprimer l'hamilitionien des perturbations

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{J_{22}} &= 3\frac{\mu^4 R_e^2}{L^6}(C_{22}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + S_{22} 2\bar{x}\bar{y}) \\ &= \mathcal{H}_{J_{22}}(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \Lambda, \lambda, L, \theta) + \dot{\theta}\Lambda. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{J_{22}}$ peut être exprimé à l'aide de variables de Poincaré. Nous ne développerons pas davantage cet aspect étant donné que ces variables sont utiles pour effectuer certaines moyennisations et changements de coordonnées dont nous ne détaillerons pas les calculs. Notons tout de même que Λ désigne le moment associé au temps sidéral θ.

Détaillons brièvement quelques changements de variables ainsi que le principe de moyennisation. Nous définissons tout d'abord un angle résonant σ

$$\sigma = \lambda - \theta.$$

Pour préserver notre ensemble de variables canoniques, nous utilisons la transformation symplectique suivante

$$d\sigma L' + d\theta' \Lambda' = d\lambda L + d\theta \Lambda.$$

Nous obtenons dès lors un nouvel ensemble de variables canoniques

$$L' = L, \qquad \theta' = \theta, \qquad \Lambda' = \Lambda + L.$$

Ecrivons l'hamiltonien résultant avec l'angle résonant

$$\mathcal{H}_{J_{22}}(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \sigma, L', \theta) + \dot{\theta}(\Lambda' - L').$$

L'introduction de l'angle résonant σ permet la moyennisation de l'hamiltonien obtenu $\mathcal{H}_{J_{22}}$. Le principe de la moyennisation est d'éliminer les petites variations, i.e. celles se produisant sur de courtes périodes. Cela permet de conserver uniquement le mouvement sur de plus longues périodes. Dans ce cas, nous moyennisons sur le temps sidéral afin de nous concentrer sur le mouvement de la résonance. Par conséquent, nous obtenons une expression adaptée de l'hamiltonien résonant

$$\mathcal{H}(L,\sigma,\Lambda) = -\frac{\mu^2}{2L^2} + \dot{\theta}(\Lambda - L) + \frac{1}{L^6}(\alpha_1 cos(2\sigma) + \alpha_2 sin(2\sigma)). \tag{3.1}$$

3.1.1 Stabilité et équilibres

Nous allons repartir de l'équation (3.1) pour calculer nos points d'équilibre. La valeur des coefficients α_1 et α_2 est donnée à la page 54 de la référence [12], nous trouvons $\alpha_1 \simeq -0.1077\text{x}10^{-6}$ et $\alpha_2 \simeq 0.6204\text{x}10^{-7}$. Nous trouvons les solutions des points d'équilibre en calculant

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = 0.$$

Détaillons les différentes étapes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{L^6}(-2\alpha_1 \sin(2\sigma) + 2\alpha_2 \cos(2\sigma)) &&= 0 \\
\iff \quad -2\alpha_1 \sin(2\sigma) + 2\alpha_2 \cos(2\sigma) &&&= 0 \\
\alpha_1 \sin(2\sigma) &&&= \alpha_2 \cos(2\sigma) \\
\tan(2\sigma) &&&= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\
\tan(2\sigma) &&&= -0.5760.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
2\sigma &\simeq -29.94° + k180° \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\
\sigma &\simeq -14.97° + k90°.
\end{aligned}$$

En calculant tous les décalages de l'angle σ, nous obtenons les points d'équilibres stables et instables de résonance

$$\begin{aligned}
\sigma^*_{11} &\simeq 75°, \qquad \sigma^*_{12} \simeq 255°, \\
\sigma^*_{21} &\simeq 165°, \qquad \sigma*_{22} \simeq 345°.
\end{aligned}$$

Faisons de même pour déterminer les équilibres de la variable L. Notons toutefois que nous poserons à l'unité la longueur du demi-grand axe géostationnaire ainsi que le mouvement moyen terrestre. Ceci implique entre autres que nous poserons la constante gravitationnelle μ à l'unité.

Détaillons les différentes étapes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} &= \frac{\mu^2}{L^3} - \dot{\theta} - \frac{6}{L^7}(\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma)) &= 0 \\
\iff \frac{1}{L^3} - 1 - \frac{6}{L^7}\underbrace{(\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma))}_{A} &= 0 \\
\frac{1}{L^3} - \frac{6A}{L^7} &= 1 \\
-L^7 + L^4 &= 6A.
\end{aligned}$$

Déterminons les différentes valeurs de L :

- Pour $\sigma^* = 75°$ ou $\sigma^* = 255°$, nous avons $A > 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L^3} - 1 = \frac{6A}{L^7} > 0 \\
\iff & \frac{1}{L^3} > 1 \\
\implies & L^3 < 1 \\
\implies & L = 0.99999971.
\end{aligned}$$

- Pour $\sigma^* = 165°$ ou $\sigma^* = 345°$, nous avons $A < 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L^3} - 1 = \frac{6A}{L^7} < 0 \\
\iff & \frac{1}{L^3} < 1 \\
\implies & L^3 > 1 \\
\implies & L = 1.00000029.
\end{aligned}$$

En injectant les valeurs d'équilibre de l'angle σ^* dans l'expression de A, nous associons les valeurs suivantes de L

$$\begin{aligned}
L_{11}^* &\simeq 0.99999971, \qquad & L_{12}^* &\simeq 0.99999971, \\
L_{21}^* &\simeq 1.00000029, \qquad & L_{22}^* &\simeq 1.00000029.
\end{aligned}$$

Poursuivons, en établissant la stabilité des équilibres trouvés, en effectuant un développement en série. Rappelons certaines relations

$$\begin{cases} \dot{\sigma} &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, \\ \dot{L} &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}, \\ \Delta\sigma &= \sigma - \sigma^*, \\ \Delta L &= L - L^*. \end{cases}$$

Le développement en série se présente sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}\sigma &= \dot{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L*} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^* \partial L^*}\Delta\sigma + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}}\Delta L + \epsilon(\sigma) \\ \dot{\Delta}L &= \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma*} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^* \partial \sigma^*}\Delta L - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}}\Delta\sigma + \epsilon(L) \end{aligned}$$

En sachant que les dérivées premières et les dérivées croisées s'annulent aux équilibres, nous nous focalisons donc sur l'expression des dérivées secondes du développement en série

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} &= \frac{-3}{L^4} + \frac{42}{L^7}(\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma)), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}} &= \frac{-4}{L^6}(\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma)). \end{aligned}$$

Ecrivons nos simplifications sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} \\ -\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta L \end{pmatrix}$$

.

Afin de déterminer la stabilité du système, nous allons déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne :

$$\lambda^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}}\,\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}} = 0.$$

- Pour $\sigma^* = 75°$ ou $\sigma^* = 255°$: $\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma) > 0$,

  — $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}} < 0$,

  — $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} < 0$

  $$\Longrightarrow \lambda^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}}}_{\beta^2 > 0} = 0,$$

  $\Longrightarrow \lambda = \pm i\beta$, cela correspond dynamiquement à un centre.

- Pour $\sigma^* = 75°$ ou $\sigma^* = 255°$: $\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma) < 0$,

  — $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}} > 0$,

  — $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} < 0$,

  $$\Longrightarrow \lambda^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial L^{*2}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^{*2}}}_{\beta^2 < 0} = 0,$$

  $\Longrightarrow \lambda = \pm\beta$, cela correspond dynamiquement à un point de selle.

  Nous conclurons donc que :

— $(\sigma^*_{11}, L^*_{11})$ et $(\sigma^*_{12}, L^*_{12})$ sont des positions de stabilité,
— $(\sigma^*_{21}, L^*_{21})$ et $(\sigma^*_{22}, L^*_{22})$ sont des positions d'instabilité.

3.2 Développement du changement de coordonnées

La découverte de ces quatre points d'équilibre est cohérente en avançant plusieurs arguments. D'abord, en prenant une orbite parfaitement géostationnaire, la période orbitale est précisément égale à la rotation journalière de la Terre. Ensuite, si nous considérons un modèle où la Terre est représentée avec un rayon équatorial elliptique, le champ gravitationnel terrestre dépend uniquement de la longitude. Sur la Figure 3.1, nous illustrons les quatre points d'équilibres ainsi que les forces agissantes issues du potentiel de la Terre. Effectuons, à présent, le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x &= \sqrt{2L}\cos(\sigma), \\ y &= \sqrt{2L}\sin(\sigma). \end{cases}$$

Il s'agit de coordonnées cartésiennes résonantes qui nous seront utiles lors de la phase de représentation.

Nous pouvons également les écrire pour chaque équilibre

$$\begin{cases} x^* &= \sqrt{2L^*}\cos(\sigma^*), \\ y^* &= \sqrt{2L^*}\sin(\sigma^*). \end{cases}$$

Nous allons exprimer notre hamiltonien en le développant en série de Taylor autour d'un point d'équilibre (x^*, y^*). Nous nous permettons une précision jusqu'au second ordre où nous omettons l'écriture du terme d'erreur.

$$\mathcal{H}^*(X, Y, \Lambda) = \dot{\theta}\Lambda + \frac{1}{2}(aX^2 + 2bXY + cY^2), \tag{3.2}$$

où les variables X et Y sont bien définies autour de l'équilibre

$$X = (x - x^*) \quad \text{et} \quad Y = (y - y^*).$$

De plus, nous exprimons a, b et c comme

- $a = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}\right|_{(L^*,\sigma^*)}$,
- $b = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial y}\right|_{(L^*,\sigma^*)}$,
- $c = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2}\right|_{(L^*,\sigma^*)}$.

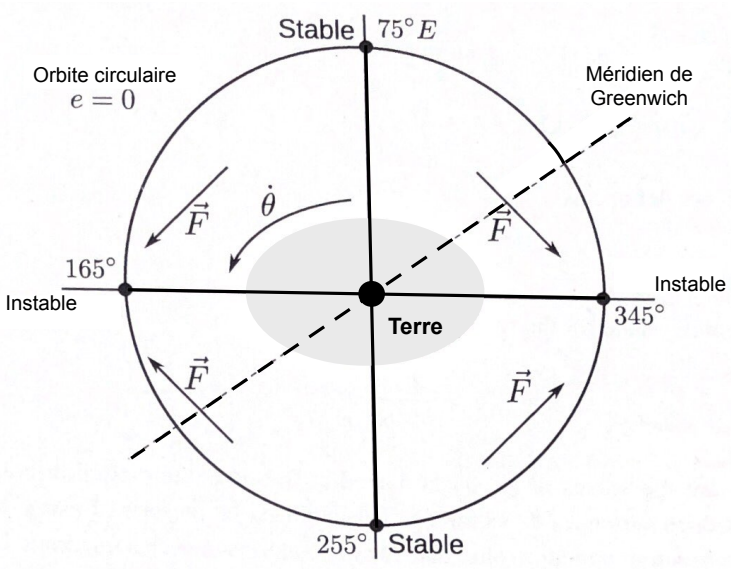

FIGURE 3.1 – Illustration des équilibres stables et instables. Issu de la réference [12].

Notons que (L^*, σ^*) correspond au premier équilibre stable pour (L, σ). Une brève introduction des variables angle-action nous permettra de déterminer facilement certaines caractéristiques de notre modèle. Nous posons

$$\begin{cases} X &= p\cos(\Psi) + q\sin(\Psi), \\ Y &= -p\sin(\Psi) + q\cos(\Psi). \end{cases}$$

où la variable angle Ψ vérifie la relation suivante

$$(a-c)\sin(2\Psi) + 2b\cos(2\Psi) = 0. \tag{3.3}$$

Repartons du second terme de (3.2) et simplifions l'expression à l'aide de la transformation en variable angle-action et de la relation (3.3).

$$\begin{aligned} (aX^2 + 2bXY + cY^2) &= a(p^2\cos^2(\Psi) + q^2\sin^2(\Psi) + 2pq\cos(\Psi)\sin(\Psi)) \\ &\quad + 2b(-p^2\cos(\Psi)\sin(\Psi) + pq\cos^2(\Psi) - pq\sin^2(\Psi) + q^2\cos(\Psi)\sin(\Psi)) \\ &\quad + c(p^2\sin^2(\Psi) + q^2\cos^2(\Psi) - 2pq\cos(\Psi)\sin(\Psi)), \\ &= (a\cos^2(\Psi) - 2b\sin(\Psi)\cos(\Psi) + c\sin^2(\Psi))p^2 \\ &\quad + (a\sin^2(\Psi) + 2b\sin(\Psi)\cos(\Psi) + c\cos^2(\Psi))q^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique une nouvelle forme de notre hamiltonien

$$\mathcal{H}(p, q, \Lambda) = \dot{\theta}\Lambda + \frac{1}{2}(Ap^2 + Cq^2),$$

où

$$A = a\cos^2(\Psi) - 2b\sin(\Psi)\cos(\Psi) + c\sin^2(\Psi) \text{ et } C = a\sin^2(\Psi) + 2b\sin(\Psi)\cos(\Psi) + c\cos^2(\Psi).$$

En introduisant une dernière transformation canonique de mise à l'échelle, obtenue en vérifiant l'équation suivante

$$A\alpha^2 = \frac{C}{\alpha^2}.$$

Nous obtenons la forme

$$p = \alpha p' \text{ et } q = \frac{1}{\alpha}q',$$

où

$$\begin{cases} p' &= \sqrt{2J}\cos(\phi), \\ q' &= \sqrt{2J}\sin(\phi). \end{cases}$$

Nous trouvons dès lors, l'hamiltonien exprimé en ces dernières variables angle-action

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Ap^2 + Cq^2) &= \frac{1}{2}(A\alpha^2 p'^2 + C\frac{1}{\alpha^2}q'^2) \\ &= \frac{1}{2}(A\alpha^2 2J\cos^2(\phi) + C\frac{1}{\alpha^2}2J\sin^2(\phi)) \\ &= A\alpha^2 J\cos^2(\phi) + \frac{C}{\alpha^2}J\sin^2(\phi) \\ &= A\alpha^2 J\cos^2(\phi) + A\alpha^2 J\sin^2(\phi) \\ &= A\alpha^2 J(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \\ &= \sqrt{A^2\alpha^4}J \\ &= \sqrt{AC}J, \\ \implies \mathcal{H}(J,\phi,\Lambda) &= \dot{\theta}\Lambda + \sqrt{AC}J. \end{aligned}$$

Ces considérations momentanées vont nous permettre de trouver deux fréquences. D'une part, celle du temps sidéral et d'autre part la fréquence fondamentale de résonance à l'équilibre, noté ν_f,

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} \text{ et } \nu_f = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \sqrt{AC}.$$

3.2.1 Caractéristiques de l'orbite

Des résultats tirés de la référence [12] nous indique une fréquence de résonance

$$\nu_f = 7.674 \times 10^{-3}/\text{jour}.$$

Afin de retrouver la période, calculons l'inverse de la fréquence et corrigeons-la d'un coefficient 2π. Ceci correspond à une période de 818.7 jours.

Les investigations numériques de la référence [12] nous permettent d'établir la largeur des zones de résonance grâce aux courbes de niveaux de l'hamiltonien (3.1) évaluées à un équilibre instable (σ_i, L_i). Cette largeur Δ, évaluée à 69 km, peut être approximée à l'aide des expressions suivantes

$$\Delta = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 8\delta\beta}{\beta^2}}, \quad \delta = \frac{\alpha_1}{L_i^6 \cos(2\sigma_i)}, \quad \beta = \frac{-3\mu^2}{2L_i^4} \text{ et } \gamma = \frac{\mu^2}{L_i^3} - \dot{\theta}.$$

C'est en trouvant les maxima et les minima des équilibres stables, représentés par ces courbes en forme de banane, que nous pouvons en déterminer la largeur. Prouvons ce résultat en considérant toujours notre nouvelle échelle d'unité. Focalisons nous sur un équilibre instable $(\sigma_{21}^*, L_{21}^*)$ où

$$\begin{cases} \sigma_{21}^* & \simeq & 165°, \\ L_{21}^* & \simeq & 1.00000029. \end{cases}$$

Calculons les différents éléments nécessaires :

- $\delta = \dfrac{\alpha_1}{L_i^6 \cos(2\sigma_i)} = -1.24361032 \times 10^{-6}$,
- $\beta = \dfrac{-3\mu^2}{2L_i^4} = -1.49999826$,
- $\gamma = \dfrac{\mu^2}{L_i^3} - \dot{\theta} = -0.29 \times 10^{-6}$,

$$\Longrightarrow \Delta = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 8\delta\beta}{\beta^2}} = 8.14407540 \times 10^{-4}.$$

Pour terminer, il suffit de nous replacer dans les unités physiques, en considérant la distance de l'orbite géostationnaire i.e. 42164.17 km. En effet, étant donné nos différentes simplifications en début de développement, il est nécessaire de remettre les unités dans les échelles adéquates afin d'obtenir une réponse en kilomètre, par exemple. Ceci implique donc

$$\begin{aligned} \Delta &= 8.14407540 \times 10^{-4} \times 42164.17, \\ &= 34,3388. \end{aligned}$$

Enfin, la largeur recherchée de l'île de résonance correspondant à l'ouverture de cette zone de flottement en forme bananée, est égale à 2Δ, soit

$$2\Delta = 68,6776.$$

Nous exprimons cette largeur approximativement à 69 km.

3.3 Représentation numérique

Comme cela vient d'être expliqué, nous nous permettrons d'exprimer, dorénavant, notre système en coordonnées cartésiennes. Repartons de l'équation (3.1) et mettons en évidence quelques résultats découlant de certaines relations :

- $x^2 + y^2 = 2L$,
- $2L\cos(2\sigma) = x^2 - y^2$,
- $2L\sin(2\sigma) = 2xy$.

Nous obtenons dès lors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,y) &= \frac{-4\mu^2}{2(x^2+y^2)^2} + \dot{\theta}\left(\Lambda - \frac{(x^2+y^2)}{2}\right) + \frac{64}{((x^2+y^2))^6}\left(\alpha_1\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + \alpha_2\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\right) \\ &= \frac{-2\mu^2}{(x^2+y^2)^2} + \dot{\theta}\left(\Lambda - \frac{(x^2+y^2)}{2}\right) + \frac{64}{((x^2+y^2))^7}\left(\alpha_1(x^2-y^2) + \alpha_2(2xy)\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ecrivons ensuite les équations d'Hamilton correspondantes :

$$\begin{cases} \dot{y} &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ &= \dfrac{8\mu^2 x}{(x^2+y^2)^3} - \dot{\theta}x - \dfrac{896x}{((x^2+y^2))^8}\left(\alpha_1(x^2-y^2) + \alpha_2(2xy)\right) + \dfrac{64}{((x^2+y^2))^7}(2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y), \\ \dot{x} &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ &= -\dfrac{8\mu^2 y}{(x^2+y^2)^3} + \dot{\theta}y + \dfrac{896y}{((x^2+y^2))^8}\left(\alpha_1(x^2-y^2) + \alpha_2(2xy)\right) - \dfrac{64}{((x^2+y^2))^7}(-2\alpha_1 y + 2\alpha_2 x). \end{cases} \tag{3.5}$$

C'est à partir des équations (3.5) que nous établissons nos premiers modèles conservatifs. Toutefois, avant de pouvoir représenter certains phénomènes, il est nécessaire, dans un premier temps, d'effectuer certaines mises à l'échelle. Ce que nous obtenons est dès lors purement mathématique. Un tableau récapitulatif est disponible dans l'annexe C. Voici le système d'unité choisi :

- Masse de la Terre : $M_t = 1$ qui donne l'unité de masse 1 UM = 5.9722 $\times 10^{24}$ kg,
- Longueur du demi-grand axe géostationnaire : $a_{geo} = 1$ qui fixe l'unité de longueur 1 UL = 42164.17 km,
- Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 1$ qui donne l'unité de temps 1 UT $= 1/2\pi \times$ jour [1].

Ceci implique entre autres que $\mu = \mathcal{G}M_t = 1$ et donc que $L = \sqrt{\mu a} = 1$. De plus, dans ces modèles, nous avons également multiplié α_1 et α_2 par 10^5.

1. Nous exprimons le temps en secondes, suivant le système international.

Il est à présent possible de représenter numériquement le mouvement d'un débris spatial géostationnaire. Les codes Matlab© sont visibles dans l'annexe B.1 et les unités utilisées qui viennent d'être établies sont présentées dans l'annexe C. Dans le tableau C.1, nous présentons les ordres de grandeur physique des différents paramètres et variables de notre système. Toutefois, dans un but de faciliter la représentation du mouvement, nous avons été contraints dans un premier temps de multiplier par 10^5 les paramètres α_1 et α_2. Enfin, le tableau C.2 est un tableau récapitulatif des zones d'équilibre stables et instables en fonction des anciennes et des nouvelles échelles d'unités en coordonnées cartésiennes.

La figure 3.2 illustre numériquement l'espace de phase $(\sqrt{2L}\cos(\sigma), \sqrt{2L}\sin(\sigma))$ issu des équations hamiltoniennes (3.5). Elle est obtenue en partant de plusieurs conditions initiales caractéristiques des différents comportements présents. De plus, chacun d'entre eux requiert une représentation duale afin d'avoir une illustration globale sur tous les équilibres stables et instables. Détaillons les différentes régions en fonction de leurs conditions initiales.

— En vert : il s'agit de circulations externes. Aucun mouvement de variation n'est observé, au-delà des zones de résonance, ce qui résulte d'un modèle conservatif,

— En bleu : il s'agit des zones de résonance sur les orbites géostationnaires, obtenues en prenant des conditions initiales proches des équilibres stables. Nous observons un phénomène d'oscillations qui traduit un mouvement de longue période autour de l'équilibre,

— En rouge : il s'agit de circulations internes. Cela correspond aux mouvements orbitaux ayant une période inférieure à la période orbitale terrestre,

— En cyan : il s'agit de circulations internes, démontrant les limites du modèles. En effet, en choisissant des conditions initiales suffisamment proches de la Terre, des anomalies apparaissent,

— En noir : il s'agit des points d'équilibre stable.

Terminons ces explications en observant que le point $(0, 0)$ représente en quelque sorte le centre de la Terre.

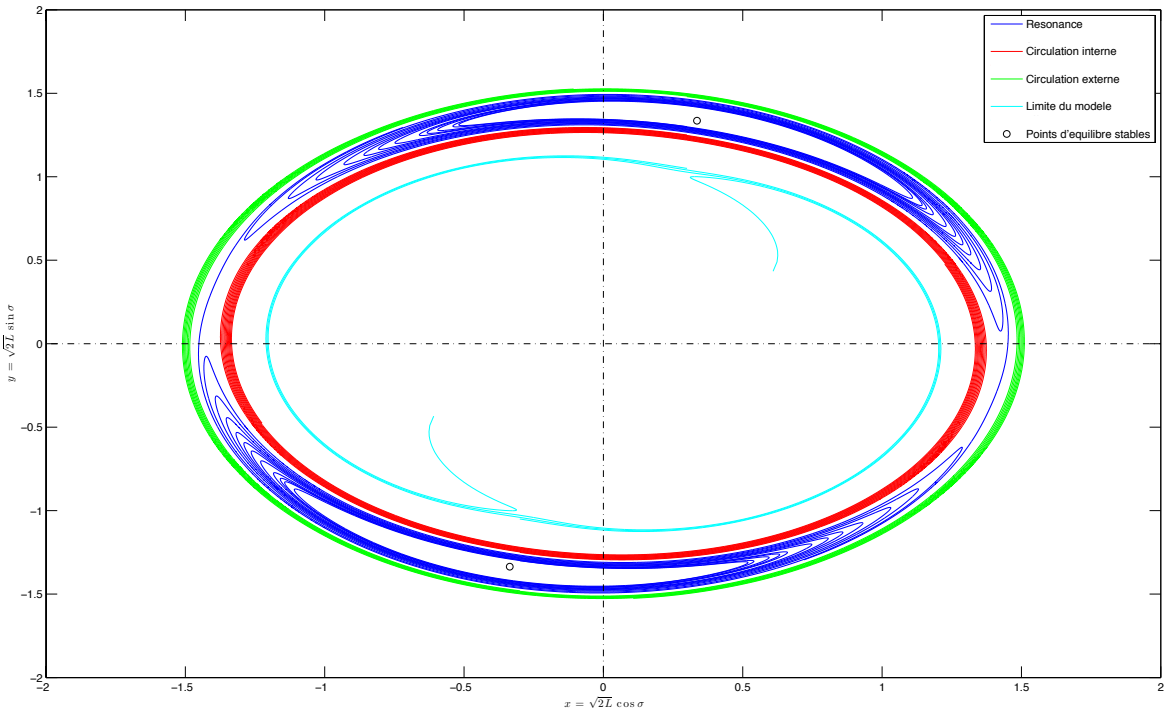

FIGURE 3.2 – Représentation des mouvements d'un débris spatial géostationnaire.

Nous conclurons ce chapitre en illustrant la variation des variables cartésiennes en fonction du temps. Nous considérons diverses conditions initiales pour la variable y en partant de la circulation interne ($y(0) = 1.2$), en passant par les zones de résonance pour terminer en circulation externe ($y(0) = 1.5$). Dans tous les cas, nous fixons $x(0) = 0.3$. Pour y, nous remarquons clairement sur la figure 3.3 un comportement significatif de la résonance entre $y(0) = 1.3$ et $y(0) = 1.45$, i.e. proche de l'équilibre. Ce comportement est toutefois moins significatif pour la variable x, présentée à la figure 3.4.

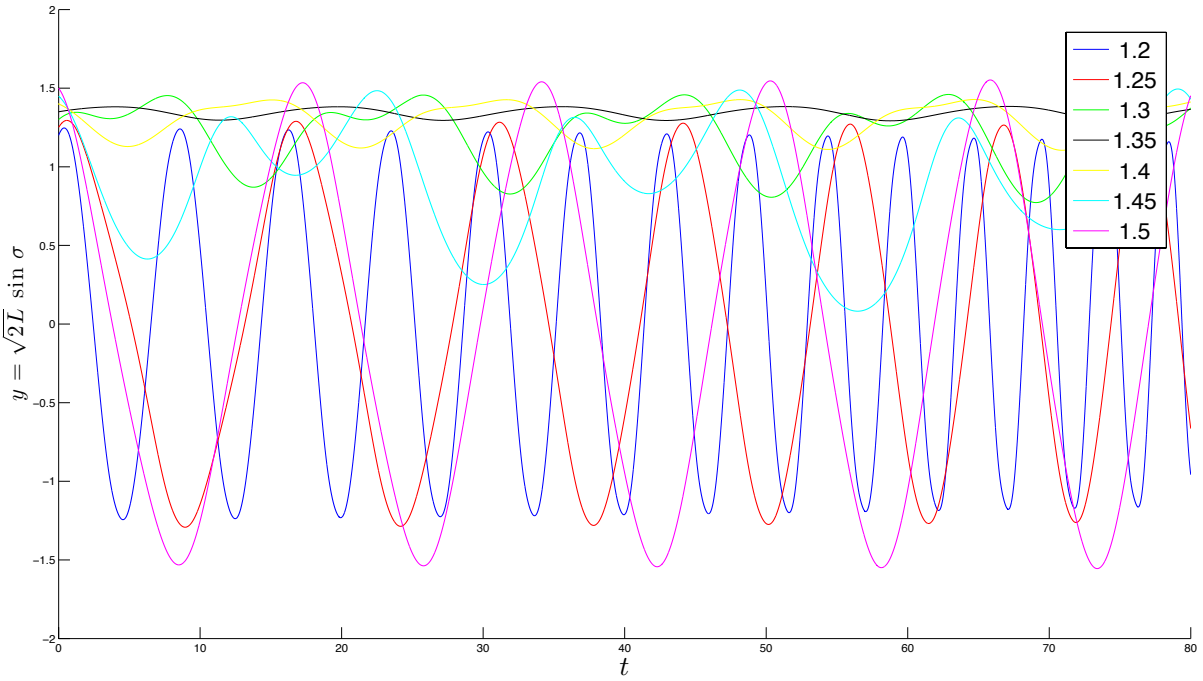

FIGURE 3.3 – Variation de la variable y en fonction du temps en coordonnées cartésiennes.

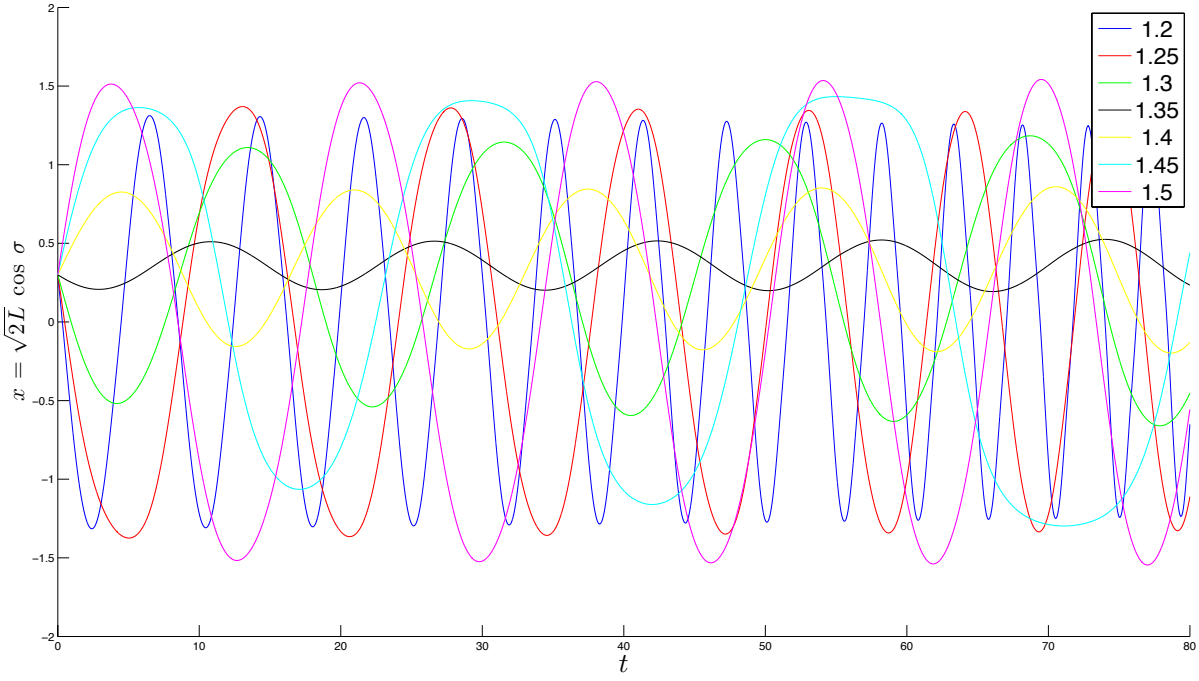

FIGURE 3.4 – Variation de la variable x en fonction du temps en coordonnées cartésiennes.

Chapitre 4

Captures en résonance

A l'issue du premier chapitre, nous avons présenté un modèle de résonance géostationnaire sur les débris très légers. Il était question d'un modèle purement conservatif et donc peu réaliste dans l'espace. Nous allons dès lors, progressivement, envisager un modèle introduisant des effets de dissipation. Tout d'abord, il nous faut expliquer certains concepts d'objets en circulation capturés en résonance suite à l'introduction d'une force perturbatrice. Dans ce chapitre, nous exposerons les principales caractéristiques des captures en résonance. A l'aide du modèle du pendule simple, nous illustrerons différents phénomènes et comportements généraux que nous pourrons, par la suite, extrapoler à notre cas des débris géostationnaires. Il s'agit d'un chapitre plus théorique en vue de l'appliquer à nos premiers modèles qui seront ensuite adaptés. Ce chapitre s'inspire essentiellement de la référence [6].

4.1 Premier modèle fondamental de la résonance

Repartons du modèle du pendule qui illustre de manière plutôt simple une résonance. Le mouvement ainsi que son expression dans le formalisme hamiltonien sont considérés comme connus.

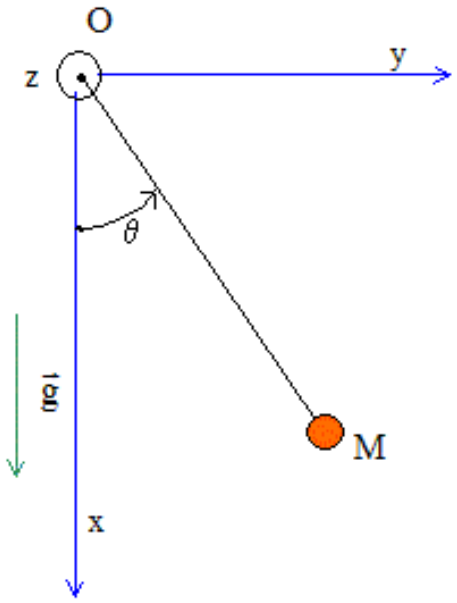

FIGURE 4.1 – Modèle du pendule simple. Issu de la référence [11].

Repartons de l'hamiltonien du pendule simple illustré sur la figure 4.1. Nous savons que l'hamiltonien d'un système exprime l'énergie totale de ce dernier, i.e. la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. De plus, elle est constante car seules des forces conservatrices interviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mgl(1-\cos(\theta)).\end{aligned}$$

La vitesse linéaire étant bien égale au produit de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et de la longueur l de la tige, la conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = Ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgl\dot{\theta}\sin(\theta) = 0,$$

effectuons ensuite une division par $Ml^2\dot{\theta}$ et utilisons la notation de la pulsation $w_0^2 = \frac{g}{l}$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \ddot{\theta} + w_0^2\sin(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - w_0^2\cos(\theta).$$

En identifiant la partie angulaire comme variable ($q = \theta$) et la vitesse angulaire comme moment ($p = \dot{\theta}$), nous obtenons

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2} - w_0^2\cos(q).$$

où,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial p} = p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial q} = -w_0^2\sin(q).\end{aligned}$$

Sur la figure 4.2, nous présentons le portrait de phase du pendule simple en posant $w_0 = 1$. Nous remarquons deux comportements distincts, scindés par la séparatrice en vert. A l'extérieur de la séparatrice, nous observons un comportement de circulation, i.e. physiquement, le pendule possède une vitesse suffisante pour effectuer des révolutions complètes autour de son point d'attache. A l'intérieur de la séparatrice, il est question de libration ou d'oscillation, i.e. le pendule effectue des balancements entre de sa position d'équilibre stable avec plus ou moins d'amplitude.

De manière générale, il existe un l'hamiltonien résonant dépendant d'un argument σ et de son moment associé δ, ainsi que de 3 paramètres α, β et ϵ. En effectuant des simplifications, il est possible de revenir à la première formulation présentée

$$\mathcal{H}(\sigma,\delta) = \alpha\delta^2 + \beta\delta + \epsilon\cos(\sigma - \sigma_0).$$

Posons $r = \sigma - \sigma_0$ et $R = \delta - \delta_0$ et développons l'hamiltonien obtenu

$$\mathcal{H}(r,R) = \alpha R^2 + R(2\alpha\delta_0 + \beta) + \alpha\delta_0^2 + \beta\delta 0 + \epsilon\cos(r).$$

Nous pouvons simplifier le troisième et le quatrième terme. En effet, il s'agit de constantes et seule la dérivée de l'hamiltonien nous intéresse pour exprimer les équations d'Hamilton. De plus, pour annuler le deuxième terme, nous allons poser $\delta_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Il nous reste comme termes

$$\mathcal{H}(r, R) = \alpha R^2 + \epsilon \cos(r).$$

Nous terminons, en effectuant une mise à l'échelle et en introduisant l'unique paramètre du modèle $b = -\frac{\epsilon}{2\alpha}$. Nous noterons $\mathcal{K}$, l'hamiltonien final du pendule simple

$$\mathcal{K}(r, R) = \frac{R^2}{2} - b\cos(r), \tag{4.1}$$

où la dynamique du système est donnée par les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial R} = R, \\ \dot{R} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial r} = -b\sin(r). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Afin de trouver les équilibres, nous annulons les équations (4.2). Ceci implique que nous trouvons deux équilibres :

- L'équilibre stable en $r = 2k\pi$ et $R = 0$,
- L'équilibre instable en $r = (2k + 1)\pi$ et $R = 0$,

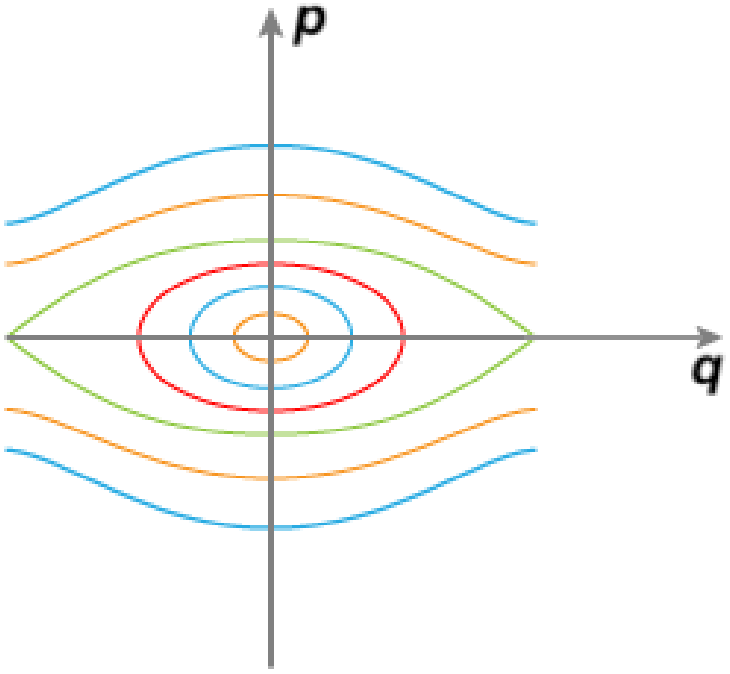

FIGURE 4.2 – Plan de phase d'un pendule simple. Issu de la référence [20].

où $k \in \mathbb{Z}$. En ce qui concerne la représentation du mouvement périodique, nous choisissons l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En partant de $-\pi$ à π nous avons $R > 0$ et de π à $-\pi$, $R < 0$. Dans les deux cas, il faut un temps infini pour que les séparatrices, appelées C_1 et C_2 (en vert sur la figure 4.3) séparent l'espace de phase en trois régions distinctes déjà mentionnées :

— Circulation positive,

— Circulation négative,

— Résonance.

Nous allons mettre en évidence l'équation des séparatrices. Ces dernières correspondent aux courbes de niveau d'équation $K = b$. Ces équations sont données par

$$\begin{aligned} b &= \frac{R^2}{2} - b\cos(r) \\ \frac{R^2}{2} &= b(1+\cos(r)) \\ R^2 &= 4b\cos^2\left(\frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

L'aire comprise entre les deux séparatrices C_1 et C_2, i.e. l'action J correspondante peut être calculée en vertu de l'équation (1.8)

$$\begin{aligned} J_{Sep} &= \frac{1}{2\pi}\int_{C_1 \cup C_2} R dr \\ &= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} R dr \\ &= \frac{4\sqrt{b}}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{r}{2}\right) dr \\ &= \frac{8\sqrt{b}}{\pi}. \end{aligned}$$

4.2 Développement en variables angle-action

Comme nous l'avons déjà vu précédemment, le passage aux variables angle-action permet facilement de mettre en évidence certaines propriétés de la dynamique étudiée. Dans le cas que nous voulons étudier, ces variables peuvent être utilisées pour décrire les circulations et les résonances. L'équation implicite des courbes est caractérisée en attribuant la valeur $K = h$,

$$h = \frac{R^2}{2} - b\cos(r) \text{ ou } R^2 = 2(h + b\cos(r)).$$

Nous adoptons une transformation canonique

$$(r, R) \Longleftrightarrow (\Psi, J),$$

pour chaque courbe de niveau. Comme nous l'avons présenté à l'équation (1.7), l'hamiltonien sera uniquement fonction de J, étant donné que Ψ dépendra linéairement du temps. Nous allons, à présent, détailler les deux cas de la dynamique.

4.2.1 Cas de circulation

Commençons par traiter le cas où $h > b$, i.e. le cas de la circulation. Rappelons, encore une fois, que l'action J représente l'aire comprise entre la courbe de niveau h et l'axe horizontal. Nous délimitons notre domaine de $-\pi$ à π. Ce cas est représenté sur la figure 4.4, avec en bleu les courbes de circulation, en rouge les séparatrices et en vert l'aire considérée. La symétrie au sein du portrait de phase va nous permettre d'établir certaines simplifications. Par exemple, nous calculerons notre intégrale d'aire seulement de 0 à π en considérant deux fois l'aire sous la courbe h en vertu de la symétrie par rapport à l'axe vertical.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
2\pi J &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(h + b\cos(r))}dr \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2\left(h + b - 2b\sin^2\left(\frac{r}{2}\right)\right)}\,dr \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(h + b - 2b\sin^2(u))}\,du \quad \text{avec} \quad r = 2u \\
&= 4\sqrt{2(h+b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - k^2\sin^2(u))}\,du \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2b}{h+b} \\
&= 4\sqrt{2(h+b)}\,\mathbb{E}(k).
\end{aligned}$$

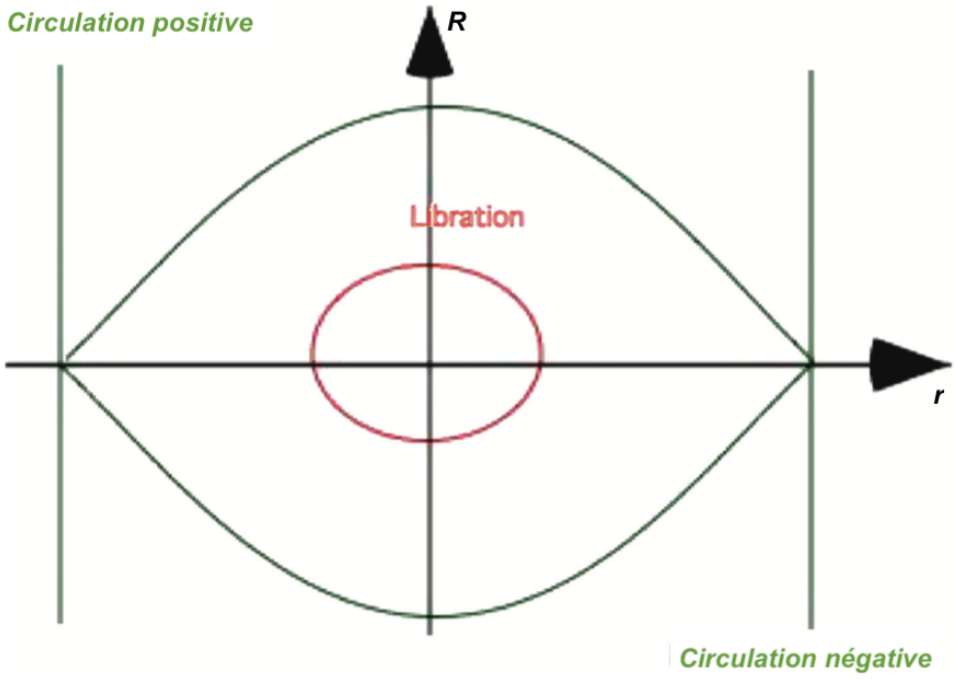

FIGURE 4.3 – Illustration des trois régions distinctes d'un pendule. Issu de la référence [6].

Nous isolons donc $\mathbb{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2(u))}\, du$ qui est identifiable à une intégrale elliptique complète.

Nous pouvons, toutefois, développer aisément $\dfrac{\partial J}{\partial h}$

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial J}{\partial h} &= \frac{4}{\sqrt{2(h+b)}} \mathbb{E}(k) + 4\sqrt{2(h+b)} \frac{d\mathbb{E}(k)}{dk} \frac{dk}{dh} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2(h+b)}} \mathbb{E}(k) + 4\sqrt{2(h+b)} \left(\frac{\mathbb{E}(k) - \mathbb{K}(k)}{k} \right) \frac{-b}{k(h+b)^2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2(h+b)}} \mathbb{K}(k). \end{aligned}$$

Nous isolons donc $\mathbb{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2(u))}}\, du$ qui est également identifiable à une intégrale elliptique complète.

Ajoutons quelques détails de calcul, en particulier ceux qui concernent le calcul de la dérivée de $\mathbb{E}(k)$.

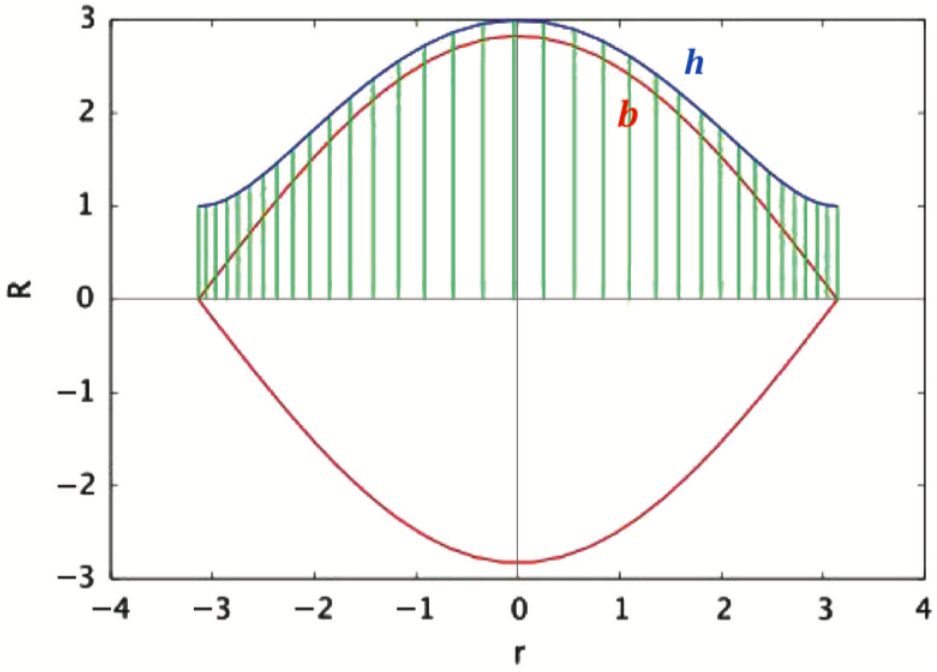

FIGURE 4.4 – Représentation du cas de circulation positive. Issu de la référence [6].

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{E}(k)}{dk} &= \frac{d}{dk}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-k^2\sin^2(u))}\, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k\sin^2(u)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2(u))}} du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2\sin^2(u))-1}{k\sqrt{(1-k^2\sin^2(u))}} du \\
&= \frac{\mathbb{E}(k)-\mathbb{K}(k)}{k}.
\end{aligned}$$

La fréquence propre de chaque trajectoire est donc exprimée par

$$\omega = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial h}}.$$

Terminons cette partie en exprimant l'angle Ψ

$$\begin{aligned}
\Psi - \Psi_0 = \frac{\partial K}{\partial J} t &= \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial h}} \int_0^t dt \\
&= \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial h}} \int_0^r \frac{dt}{dr} dr \\
&= \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial h}} \int_0^r \frac{1}{\dot{R}} dr \\
&= \frac{\pi}{\mathbb{K}(k)} \mathbb{F}\left(\frac{r}{2}, k\right).
\end{aligned}$$

Nous isolons donc $\mathbb{F}(x,k) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2(u))}}\, du$ qui est identifiable à une intégrale elliptique incomplète où $\mathbb{F}\left(\frac{r}{2}, k\right) = \mathbb{K}(k)$.

4.2.2 Cas de résonance

Poursuivons en traitant le cas où $|h| < b$, i.e. le cas de la résonance. Dans ce cas, l'aire exprimée par l'action J est comprise au sein de la courbe h en bleu sur la figure 4.5. Pour des raisons de symétrie, nous multiplierons par quatre l'aire comprise entre $r = 0$ et $r = r_0$, i.e. lorsque $R = 0$.

Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
2\pi J &= 4\int_0^{r_0} \sqrt{2(h+b\cos(r))}dr \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{r_0} \sqrt{h+b-2b\sin^2\left(\frac{r}{2}\right)})dr \\
&= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{r_0}{2}} \sqrt{h+b-2b\sin^2(u)}\,du \qquad \text{avec } \; r=2u \\
&= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{h+b-2b\sin^2(\frac{r_0}{2})\sin^2(v)}\,\frac{du}{dv}dv \quad \text{avec } \; \sin(u)=\sin\left(\frac{r_0}{2}\right)\sin(v).
\end{aligned}
$$

Nous détaillons certaines étapes de calculs. D'une part,

$$
\begin{aligned}
cos(u)du &= \sin\left(\frac{r_0}{2}\right)\cos(v)dv \\
\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{r_0}{2}\right)\sin^2(v)}du &= \sin\left(\frac{r_0}{2}\right)\cos(v)dv \\
\frac{du}{dv} &= \sin\left(\frac{r_0}{2}\right)\frac{\cos(v)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{r_0}{2}\right)\sin^2(v)}}dv.
\end{aligned}
$$

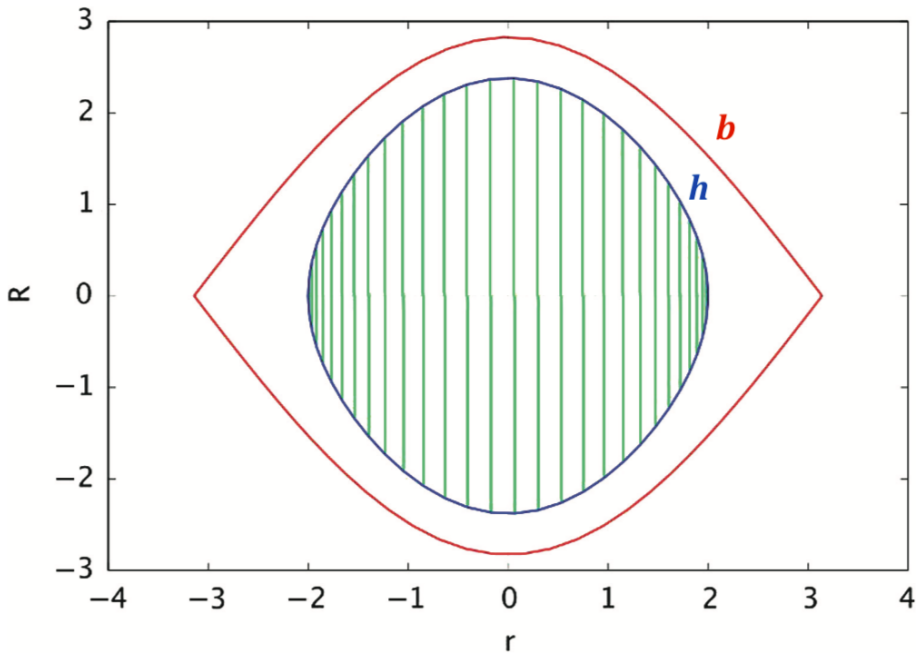

FIGURE 4.5 – Représentation du cas de résonance. Issu de la référence [6].

D'autre part, en vertu du fait que $\cos(r_0) = \dfrac{-h}{b}$

$$h + b - 2b\sin^2\left(\frac{r_0}{2}\right)\sin^2(v) = h + b - 2b\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)\sin^2(v).$$

Cela nous permet de donner la forme finale de l'action J

$$2\pi J = \frac{8}{\pi}\sqrt{b}(\mathbb{K}(k)(k^2 - 1) + \mathbb{E}(k)).$$

Nous pouvons isoler l'inverse de la fréquence

$$\frac{\partial J}{\partial h} = \frac{2\mathbb{K}(k)}{\pi\sqrt{b}}.$$

Terminons cette partie en exprimant l'angle Ψ

$$\begin{aligned} \Psi - \Psi_0 = & \quad \frac{\partial K}{\partial J}t \\ = & \quad \frac{\pi}{2\mathbb{K}(k)}\mathbb{F}(s,k) \quad \text{avec} \quad \sin(s) = k\sin\left(\frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

4.3 L'oscillateur harmonique

Lorsque nous considérons h proche de $-b$, nous nous trouvons dans le puit de potentiel où les courbes sont proches de l'équilibre stable. Dans ce cas, notre pendule simple peut être comparé à un oscillateur harmonique simple. Tout d'abord, nous allons pouvoir exprimer en série $cos(r) = 1 - \frac{r^2}{2}$. L'équation (4.1) devient alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{R^2}{2} - b(1 - \frac{r^2}{2}) \\ K + b &= \frac{R^2}{2} + b\frac{r^2}{2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dans ce cas simple, le passage aux variables angle-action (Ψ, J) ne requiert pas l'introduction d'intégrales elliptiques mais uniquement d'une constante ν

$$\begin{cases} R &= \nu\sqrt{2J}\cos(\Psi), \\ r &= \dfrac{1}{\nu}\sqrt{2J}\sin(\Psi). \end{cases}$$

L'hamiltonien (4.3) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = K + b &= \frac{R^2}{2} + b\frac{r^2}{2} \\ &= \nu^2 J\cos^2(\Psi) + b\frac{1}{\nu^2}J\sin^2(\Psi) \\ &= \nu^2 J \text{ si } \nu^2 = b\frac{1}{\nu^2} \\ &= \sqrt{b}J.\end{aligned}$$

Ceci nous permet de trouver directement la fréquence fondamentale de résonance :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial J} = \omega = \sqrt{b}.$$

4.4 Introduction des effets de dissipation

Dans cette section, nous allons dépasser le cadre purement théorique de notre modèle conservatif. En effet, nous allons dans un premier temps présenter un véritable effet de dissipation : l'effet Poynting-Robertson ainsi que les vents solaires, présentés dans les références [13] et [16]. Ensuite, nous verrons comment l'introduire dans le modèle conservatif sur lequel nous travaillons dans ce mémoire. Enfin, nous effectuerons certains tests numériques en vue de mettre en évidence les phénomènes mathématique qui en découlent.

4.4.1 Présentation

Comme nous l'avons compris dans les premières parties de ce travail, la variété des débris ainsi que leur taille et leur localisation nous obligent à prendre en compte une multitude de modèles différents en fonction des forces intervenant dans la dynamique. A titre d'exemple, certains chercheurs ont déjà longuement montré que l'effet de la pression des radiations solaires sur les objets en GEO et MEO était davantage perceptible pour un ratio *aire/masse* plus important. Dans le cas qui nous occupe, l'effet dissipatif de Poynting-Robertson et les vents solaires sont vraiment considérés comme beaucoup moins significatifs. Néanmoins, il est intéressant d'ajouter que certains effets dissipatifs deviennent plus conséquents sur des microparticules, entre autres sur des débris spatiaux avec un grand ratio *aire/masse*.

L'objectif de cette section est de tenter de mettre en évidence la contribution de l'effet Poynting-Robertson (PR) et des vents solaires (SW : *Solar Wind*) sur la dynamique des débris spatiaux. Parmi tous les comportements observables, nous tenterons, en particulier d'observer le phénomène de capture en résonance géostationnaire. L'intérêt des études concernant ces effets de dissipation est qu'ils provoquent la dérive de certains débris au travers de différentes régions spatiales sur lesquels les satellites sont en orbite. Afin d'éviter les collisions et donc de créer de nouveaux débris, il est impératif d'avoir un contrôle absolu sur la dynamique des débris spatiaux. Sur de grands intervalles de temps, il est nécessaire de considérer les faibles (mais non négligeables) effets PR/SW.

D'un point de vue historique, les premières études sur l'effet Poynting-Robertson remontent aux années 1980. L'auteur de ces premières investigations a constaté que le demi grand axe d'un satellite

presque synchrone (avec un petit ratio *aire/masse*) pouvait décroître jusqu'à 1 mètre par an. Plus récemment, des simulations numériques de résonance $1:1$ ont avancé que l'effet séculaire causé par PR pour un ratio *aire/masse* variable était de l'ordre de centaines de mètres par an. Il a été prouvé que le taux de dérive dans les environs des orbites géostationnaires pouvait différer de différents ordres de magnitude. Cela est dû aux effets de la résonance : la dérive du demi grand axe est sensible aux conditions initiales, i.e. la distance du point d'équilibre dans la résonance qui dépend du ratio *aire/masse*.

4.4.2 Effet Poynting-Robertson et vent solaire

Nous allons, à présent, expliciter l'origine des différents effets dont il est question. En effet, le coefficient de dissipation que nous allons intégrer dans notre modèle a principalement deux natures. Nous avons d'une part l'effet Poynting-Robertson mis en évidence par les deux scientifiques. D'autre part, l'importance des vents solaires qui peuvent avoir un effet non négligeable sur certains mouvements spatiaux. Après une description historique des deux effets, nous énoncerons l'expression mathématique les mêlant ensemble en explicitant ses différents composants. Nous verrons qu'il sera nécessaire, dans un premier temps, d'effectuer certaines simplifications mathématiques.

Poynting-Robertson (PR)

En plus d'exercer une certaine attraction gravitationnelle sur les corps célestes l'avoisinant, le Soleil provoque une seconde force connexe à la pression de radiation, c'est ce que nous appelons l'effet Poynting-Robertson. Les explications suivantes sont basées sur la référence [17]. Cet effet concerne la liaison de deux paramètres influençant le déplacement des débris légers (également poussières) spatiaux. Le premier phénomène correspond à la pression de radiation solaire, i.e. les photons dégagés par le Soleil dévient la trajectoire des débris légers. Ensuite, nous ajoutons l'aberration de la lumière [1] qui a pour conséquence que les collisions entre les photons et les débris n'ont pas une direction perpendiculaire à l'orbite, mais oblique. Il en découle le fait que les corpuscules de photons font barrage aux débris légers. Ces derniers influencés par l'effet Poynting-Robertson rapprochent dès lors leur orbite autour de la Terre en s'entrainant vers cette dernière jusqu'à leur désintégration. En réalité, nous pouvons dire qu'ils tombent jusqu'à ce que l'atmosphère de la Terre les décompose. L'augmentation de l'excentricité et de l'inclinaison des orbites des débris spatiaux est également une conséquence du Poynting-Roberston.

Nous pouvons considérer l'effet de deux façons, en fonction du référentiel retenu, comme l'illustre la figure 4.6. Sur l'image de gauche (a), nous nous trouvons dans le repère du débris où le rayonnement du Soleil semble émis de manière inclinée par rapport à la verticale rejoignant le centre de l'orbite. Ceci est dû au fait que le débris se déplace de manière perpendiculaire à la direction de diffusion de la lumière. Nuançons toutefois le phénomène en rappelant que cet angle d'aberration est particulièrement petit étant donné que la radiation circule à la vitesse de la lumière et que le déplacement du débris est bien moins rapide, de plusieurs ordres de grandeur. Sur l'image de droite (b), nous nous trouvons dans le repère du Soleil au repos où le débris assimile les radiations solaires perpendiculairement à sa trajectoire. En considérant le mouvement du débris avec la position du Soleil, la ré-émission de l'énergie n'est pas identiquement distribuée. En effet, nous pouvons remarquer une ré-émission plus importante vers l'avant que vers l'arrière. Ceci engendre donc un changement d'orientation du moment angulaire à l'instar du recul d'une arme à feu.

1. Phénomène optique selon lequel la direction apparente d'une source de lumière est fonction de la vitesse de l'observateur de la même manière que pour un passager dans un véhicule qui se déplace selon un axe à l'horizontal. En effet, la pluie peut sembler tomber depuis une direction inclinée et non verticalement.

Nous présentons brièvement la force de Poynting-Robertson

$$F_{PR} = \frac{Wv}{c^2} = \frac{r^2}{4c^2}\sqrt{\frac{GM_S L_S^2}{R^5}}.$$

Nous trouvons dans cette expression :

— W est la puissance irradiée par la particule (égale au rayonnement incident),
— v est la vitesse de la particule,
— c est la vitesse de la lumière,
— r est le rayon de l'objet,
— G est la constante de gravitation universelle,
— M_s est la masse du Soleil,
— L_s est la luminosité solaire,
— R est le rayon orbital de l'objet.

Etant donné que la force gravitationnelle est fonction du cube du rayon de l'objet, mais la puissance qui l'irradie est fonction du carré de ce même rayon, nous pouvons conclure que l'effet Poynting-Robertson est accentué pour les petits objets célestes. De plus, comme la gravité du Soleil dépend de l'inverse de R^2 et que F_{PR} dépend de l'inverse de $\sqrt{R^5}$, celle-ci est alors plus importante à mesure que l'objet se rapproche du Soleil.

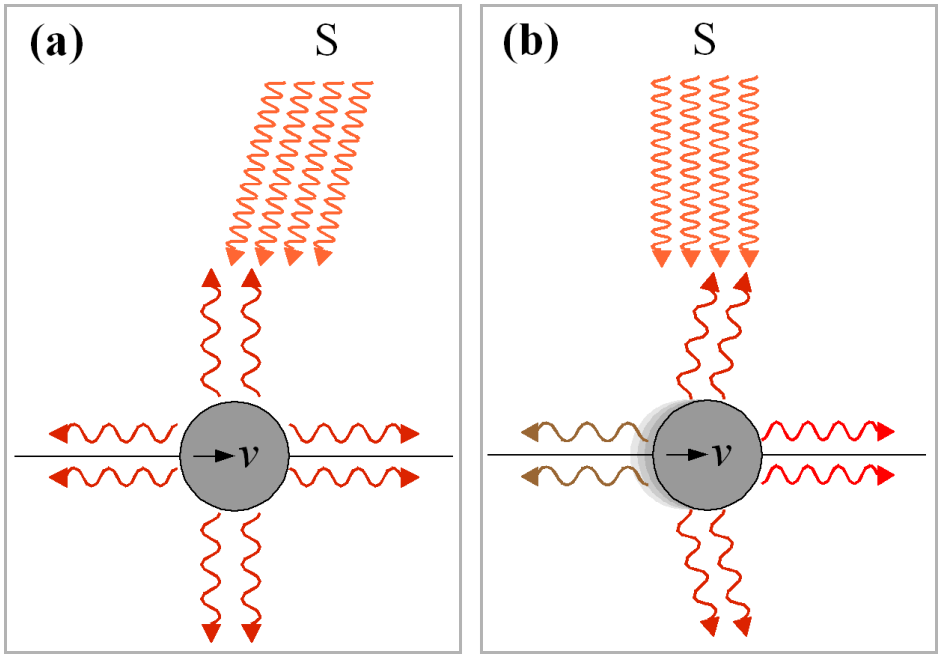

FIGURE 4.6 – Rayonnement émis par le Soleil (S) et ré-émission thermique d'une particule vues (a) par un observateur se déplaçant avec la particule et (b) par un observateur au repos dans le repère du Soleil. Issu de la référence [18].

Vent solaire (SW)

Au sein de notre système solaire, notre étoile expulse chaque seconde une quantité proche d'un million de tonnes de matière dans le milieu interplanétaire. Il s'agit d'un gaz extrêmement chaud composé essentiellement d'électrons et de protons mais aussi d'ions. Ce gaz est appelé plasma et il est responsable des vents solaires. La vitesse et la température de ce plasma dépendent au cours du temps de l'activité solaire. Nous distinguons deux types de vents solaires :

— Les vents solaires lents : ils se situent essentiellement sur le plan de l'écliptique durant les faibles activités solaires. Ces vents solaires lents peuvent atteindre la vitesse de 300 km/s, ils sont peu influencés par le cycle solaire et l'activité du Soleil.

— Les vents solaires rapides : ils se situent sur des latitudes plus élevées (généralement situées au niveau des pôles où les lignes de champ magnétique sont ouvertes). Ces vents solaires rapides atteignent une vitesse variant de 500 km/s à 800 km/s, ils sont très influencés par le cycle solaire et l'activité du Soleil. Ces vents sont responsables de certaines perturbations sur Terre.

Le champ magnétique solaire est causé par ces corpuscules du vent solaire. Ce champ demeure toutefois attaché au Soleil et il est alimenté par la rotation du Soleil. Dans le milieu interplanétaire, les lignes du champ magnétique sont remarquables par leur forme en spirale causée par la combinaison du mouvement radial des corpuscules et de la rotation solaire. Cette présentation est tirée de la référence [19].

4.4.3 Coefficient de dissipation PR/SW

En nous basant sur l'article [13], nous allons formuler le coefficient de dissipation de l'effet PR/SW. Comme nous l'avons expliqué au début de cette section, cet effet est responsable de la diminution de l'énergie orbital et du demi-grand axe a. C'est à travers ce constat que l'on formule l'effet PR/SW qui est donc intrinsèquement mêlé à la variation du demi-grand axe

$$a(t) = a(0)e^{-Ct},$$

avec un coefficient de dissipation ayant la forme suivante

$$C = \frac{2\mathcal{G}m_S}{a_S^2}\frac{\beta}{c}\left(1+\frac{\eta}{Q}\right)\left[1+\frac{e_S^2}{2}-\cos(i)\cos(i_S)\left(1-\frac{e^2}{2}+\frac{5e_S^2}{2}\right)\frac{n_S}{n}\right]. \tag{4.4}$$

Lorsque $0 < C << 1$, la variation du demi-grand axe peut s'exprimer sous la forme linéaire

$$a(t) \simeq a(0)(1-Ct). \tag{4.5}$$

Nous explicitons les différentes variables et paramètres de l'expression (4.4), ainsi que leur valeur et leur approximation :

— $\mathcal{G}$: Constante gravitationnelle = 6.67408 $\times$ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2},

— m_S : Masse du Soleil = 1.9891 $\times$ 10^{30} kg,

— $a(0)$: Demi grand de l'orbite géostationnaire = 42164.17 km,

— a_S : Demi-grand de l'orbite solaire = 3550 $\times a(0)$,

— $\frac{A}{m}$: Rapport air/masse moyen du débris considéré = 1 m^2 / kg,

— c : Vitesse de la lumière = 300 000 km/s,

— η : Facteur d'efficacité de l'effet du vent solaire = 0,

— Q : Facteur d'efficacité de la pression de radiation = 1,

— β : Rapport entre la magnitude de la force de radiation et l'attraction gravitationnelle solaire = $7.6 \times 10^{-4} Q \frac{A}{m}$,

— e : Excentricité de l'orbite géostationnaire = 0.1,

— e_S : Excentricité de l'orbite terrestre autour du soleil = 0.02,

— i : Inclinaison de l'orbite géostationnaire = $2°$,

— i_S : Inclinaison de la Terre par rapport au plan solaire = $23.45°$,

— n : Mouvement moyen d'un débris considéré en orbite géostationnaire = 7.292115 $\times$ 10^{-5} rad/s,

— n_S : Mouvement moyen de la Terre autour du Soleil = 1/365 jour.

Il est clair que ce coefficient de dissipation dépend de nombreux paramètres. Lors de nos vérifications numériques, nous considérerons $C = 10^{-3}$ afin d'accentuer l'effet du à la dissipation.

Ce chapitre nous aura permis, à partir du premier modèle fondamental de la résonance, d'étudier les propriétés des différents domaines du plan de phase de la dynamique étudiée. Au travers d'un développement en variables angle-action, la formalisation hamiltonienne du mouvement d'un pendule simple permet de comprendre les phénomènes de transition entre les zones du plan de phase. L'étude est davantage pertinente en introduisant des effets de dissipation pouvant potentiellement perturber un système particulier. L'application de ces effets au sein de notre modèle ainsi que les résultats de leur perturbation sont explicités dans le cinquième et dernier chapitre.

Chapitre 5

Probabilité de capture

Dans ce chapitre, inspiré de la référence [15], nous débuterons par exposer théoriquement les différents scénarii de capture en résonance au départ d'un pendule simple. Tout d'abord, nous allons repartir de l'équation (4.1), cette relation étant la référence de tous nos développements. En effet, de nombreux problèmes physiques complexes et variés peuvent être facilement conceptualisés suivant le modèle d'un pendule. Ce dernier comprend des paramètres à lente variation.

5.1 Présentation

Comme nous l'avons déjà initié dans la section précédente, nous utiliserons donc le modèle du pendule pour les modèles de résonance. Au terme de cette section, nous énoncerons des formules génériques qui nous permettrons de déterminer, suivant différents cas, s'il y a une possibilité de capture en résonance. Ces formules nous confirmeront certains résultats numériques, par la suite. Rappelons donc le modèle du pendule simple (4.1)

$$\mathcal{H} = \frac{R^2}{2} - b\cos(\phi).$$

L'objectif va être de déterminer l'effet du paramètre b qui varie lentement au cours du temps. De plus, en formulant les équations d'Hamilton, nous pouvons également tenir compte de l'introduction d'un paramètre extérieur $\dot{c}$

$$\begin{cases} \dot{R} &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -b\sin(\phi) + \dot{c}, \\ \dot{\phi} &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = R. \end{cases}$$

Nous pouvons, dès lors, considérer l'équation différentielle suivante

$$\ddot{\phi} = \dot{R} = -b\sin(\phi) + \dot{c},$$

grâce à laquelle nous définissons le moment

$$\begin{aligned} I &= \dot{\phi} + c \\ &= R + c, \\ R &= I - c. \end{aligned}$$

Nous obtenons dès lors une fonction hamiltonienne dépendant de deux paramètres lents

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(I-c)^2 - b\cos(\phi). \tag{5.1}$$

En utilisant les formules de Carnot, nous pouvons adapter l'expression (5.1) afin de pouvoir annuler l'hamiltonien aux postions d'équilibre

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(I-c)^2 + 2b\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right), \tag{5.2}$$

où b et c sont dépendants du temps. A présent, en reprenant les résultats des sections 4.2.1 et 4.2.2 et en nous basant sur les résultats de l'article [15], nous définissons trois paramètres qui seront utiles lors du calcul de probabilités :

— $J_1^* = \frac{4}{\pi}\sqrt{b} + c$,

— $J_2^* = \frac{4}{\pi}\sqrt{b} - c$,

— $J_3^* = \frac{8}{\pi}\sqrt{b}$.

Sur la figure 5.1, nous pouvons observer trois domaines différents dans l'espace de phase du pendule

- Zone D_1 : circulation externe positive : $\mathcal{H}_1 > 0$,
- Zone D_2 : circulation externe négative : $\mathcal{H}_2 > 0$,
- Zone D_3 : libration : $\mathcal{H}_3 < 0$.

Les paramètres b et c ont une représentation concrète sur l'espace de phase. En effet, respectivement ils correspondent à la déformation de la séparatrice et la translation sur l'axe vertical. Afin de calculer les probabilités de transition entre les différents domaines, nous définissons les deux paramètres :

$$\begin{cases} B &= \frac{2}{\pi}\frac{\dot{b}}{\sqrt{b}}, \\ C &= \frac{\pi}{2}\sqrt{b}\frac{\dot{c}}{\dot{b}}. \end{cases}$$

Les probabilités de transition sont illustrées sur la figure 5.2. Elles sont calculées à partir de la fonction de probabilité suivante

$$F_{Pr}(i,j) = -sgn(\mathcal{H}_i\mathcal{H}_j)\frac{\partial J_j^*}{\partial \lambda}/\frac{\partial J_i^*}{\partial \lambda}, \tag{5.3}$$

pour une transition de la zone i à la zone j. La variable λ désigne de manière générale une variable à variation lente en fonction du temps. Insistons sur le fait que certains résultats peuvent donner une valeur négative, nous dirons alors que la probabilité est nulle. Dans le cas où le résultat est supérieur à 1, nous dirons que la capture est certaine. Calculons, à présent, les dérivées des aires critiques :

— $J_1^* = +$Aire 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4}{\pi}\sqrt{b}+c\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\dot{b}}{\sqrt{b}}+\dot{c}\\ &= B(1+C),\end{aligned}$$

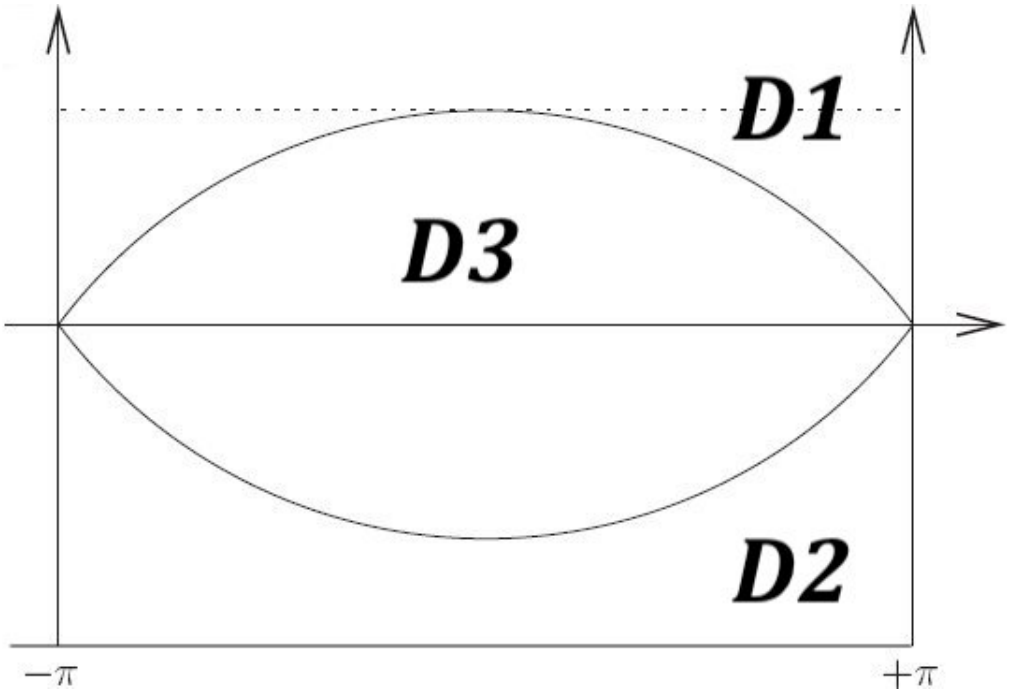

FIGURE 5.1 – Plan de phase du pendule simple avec les trois domaines.

— $J_2^* = -$Aire 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_2^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4}{\pi}\sqrt{b} - c\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\dot{b}}{\sqrt{b}} - \dot{c}\\ &= B(1-C),\end{aligned}$$

— $J_3^* = +$Aire 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_3^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{8}{\pi}\sqrt{b}\right)\\ &= \frac{4}{\pi}\frac{\dot{b}}{\sqrt{b}}\\ &= 2B.\end{aligned}$$

En observant la figure 5.2 et à titre d'exemple, dans le cas où $B > 0$ et $-1 < C < 1$, il y a une probabilité de 1 si $j = 3$. Par contre, si $C = 1$, alors la probabilité est nulle si $j = 2$.

5.2 Variation de c

Repartons de l'équation (3.1) et effectuons un développement local autour des différents points d'équilibre. Nous allons appliquer les principes présentés précédemment à notre cas de résonance. Nous allons débuter en acceptant plusieurs approximations :

- $L^* = 1$. Simplifications des équilibres,
- $L = 1 + p'$ où $0 < p' \ll 1$ quel que soit l'angle résonant.

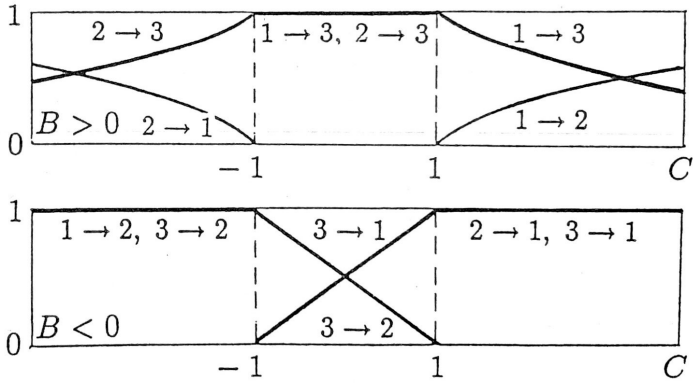

FIGURE 5.2 – Probabilités de transition entre les trois domaines. En haut pour $B > 0$; en bas pour $B < 0$. Issu de la référence [15].

L'hamiltonien (3.1) devient alors

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{2(1+p')^2} + \dot{\theta}(\Lambda - (1+p')) + \frac{1}{(1+p')^6}(\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma)). \tag{5.4}$$

Nous allons développer l'expression $(1+p')^{-2}$ et négliger le terme $(1+p')^{-6}$. D'un point de vue théorique, la fonction $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ avec un rayon de convergence 1 :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + ...$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{-(1 - 2p' + \frac{6p'^2}{2} + ...)}{2} + \dot{\theta}\Lambda - \dot{\theta} - \dot{\theta}p' + (\alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma)) \\
&= C^{ste} + \dot{\theta}\Lambda + p' - \frac{3}{2}p'^2 - \dot{\theta}p' + \alpha_1 \cos(2\sigma) + \alpha_2 \sin(2\sigma).
\end{aligned}$$

En choisissant l'unité $\dot{\theta} = 1$, nous obtenons certaines simplifications. Aucune constante n'interviendra lors du calcul des équations du système. De plus, nous posons

- $\alpha_1 = A' \cos(2\sigma^*)$,
- $\alpha_2 = A' \sin(2\sigma^*)$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(p,\sigma) &= \frac{-3p'^2}{2} + A' \cos(2\sigma - 2\sigma^*) \\
&= \frac{-3}{2}(p'^2 - \frac{2}{3}A' \cos(2\sigma - 2\sigma^*)).
\end{aligned}$$

Nous effectuons la transformation canonique suivante

$$\begin{cases}
p &= \dfrac{p'}{2}, \\
q &= 2\sigma - 2\sigma^*.
\end{cases}$$

Nous trouvons finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(p,q) &= \frac{-3}{2}\left(4p^2 - \frac{2}{3}A'\cos(q)\right)\\ &= -12\left(\frac{p^2}{2} - \frac{2}{24}A'\cos(q)\right)\\ &= -12\left(\frac{p^2}{2} - A\cos(q)\right)\\ &= -12\,\mathcal{K}(q,p).\end{aligned}$$

En ayant posé $\frac{A'}{12} = A$, nous nous ramenons à une expression basique du pendule simple

$$\mathcal{K}(q,p) = \frac{p^2}{2} - A\cos(q).$$

Nous trouvons également quatre équilibres très proche de la stabilité que les équations du système non développé 3.1. A l'aide de cette expression plus simple, nous pouvons introduire un effet quelconque de dissipation dépendant du temps. Nous détaillerons plus amplement les conséquences de cette dissipation dans le chapitre suivant. Nous la noterons arbitrairement $c(t)$, elle intervient sur le moment du système, i.e. le demi-grand axe

$$\begin{cases}\dot{p} &= \dfrac{-\partial K}{\partial q} = -A\sin(q) + \dot{c},\\ \dot{q} &= \dfrac{\partial K}{\partial p} = p.\end{cases}$$

Nous allons à présent effectuer plusieurs manipulations en vue d'obtenir un hamiltonien interprétable par la suite exprimant la dissipation introduite. Nous avons

$$\begin{aligned}&\ddot{q} = \dot{p} = -A\sin(q) + \dot{c},\\ \iff\quad &\dot{c} = \ddot{q} + A\sin(q).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Nous allons poser $I = \dot{q} + c(t)$, nous trouvons donc en négligeant les constantes

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(q,I) &= \frac{1}{2}(I - c(t))^2 - A\cos(q)\\ &= \frac{1}{2}(I - c(t))^2 - A(1 - 2\sin^2(\tfrac{q}{2}))\\ &= \frac{1}{2}(I - c(t))^2 + 2A\sin^2(\tfrac{q}{2})\\ &= \frac{1}{2}(I - c(t))^2 + 2b\sin^2(\tfrac{q}{2})\end{aligned}$$

Identifions $A = b$ comme présenté dans l'expression (5.2). Rappelons que dans ce cas c varie lentement en fonction du temps et b est constant, ceci implique que $\dot{b} = 0$. Passons aux calculs des probabilités de transition entre les différents domaines. Nous allons nous concentrer essentiellement sur deux comportements intéressants et calculer leur fonction de probabilité :

— La transition de la zone 1 à 3 correspond au cas où un objet en circulation externe est capturé en résonance. Dans ce cas, il entre en libration et passe à l'intérieur de la séparatrice. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,3) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3)\frac{\partial J_3^*}{\partial c}/\frac{\partial J_1^*}{\partial c} \\ &= \frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{8}{\pi}\sqrt{b}\right)}{\partial c}}{\dfrac{\partial\left(\dfrac{4}{\pi}\sqrt{b}+c\right)}{\partial c}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce résultat implique incontestablement qu'aucune capture en résonance n'est possible dans le cas étudié, i.e. en considérant c variable et b constant.

— La transition de la zone 1 à 2 correspond au cas où un objet en circulation externe positive passe en circulation externe négative. Nous pouvons également envisager une traversée la zone de résonance et rester en circulation. Dans notre cas physique, rappelons-nous qu'il y a une zone de circulation externe et interne, entre lesquelles se trouve la zone de libration. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,2) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)\frac{\partial J_2^*}{\partial c}/\frac{\partial J_1^*}{\partial c} \\ &= -\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{4}{\pi}\sqrt{b}-c\right)}{\partial c}}{\dfrac{\partial\left(\dfrac{4}{\pi}\sqrt{b}+c\right)}{\partial c}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ce résultat révèle qu'il est certain qu'un objet en circulation restera en circulation en cours du temps dans le cas étudié. Au travers de différentes investigations numériques, nous constatons deux comportements. Tout d'abord, le cas où l'objet reste en circulation externe au cours du temps. Ensuite, en adaptant le coefficient de dissipation, nous observons des cas de brèves traversées de la résonance pour finalement demeurer en circulation interne.

5.2.1 Lien avec PR/SW

Après une section entière d'explications théoriques sur les phénomènes de capture en résonance, nous allons revenir à notre modèle (3.4) en l'adaptant à notre étude dans le but d'illustrer et de confirmer les attentes conceptuelles. En repartant des coordonnées (L, σ), nous allons ajouter l'effet de dissipation PR/SW de la relation (4.4) en modifiant l'expression du demi-grand axe. En effet, dans nos premiers modèles, il s'avère que le demi-grand axe varie faiblement de manière périodique. Or, nous pouvons considérer qu'il évolue de façon non périodique au cours du temps en fonction de l'effet de dissipation, comme le montre la relation (4.5). Nos résultats vont se baser sur une simplification mathématique (de l'ordre de C) dans le but d'accentuer les effets ou du moins de pouvoir les détecter. Malgré la complexité de la formule purement physique, nous nous contenterons de résultats mathématiques en posant $C = 10^{-3}$. Comme nous l'avons expliqué dans les équations d'Hamilton (5.5), nous ajoutons le coefficient de l'effet de dissipation sur la dérivée du moment à savoir L dans notre cas

$$\dot{L} = \dot{L}_{Con} + \dot{L}_{PR/SW},$$

où $\dot{L}_{Con}$ correspond simplement à la dérivée du moment du modèle conservatif. C'est typiquement l'ajout de $\dot{L}_{PR/SW}$ qui va nous intéresser. Repartons de la définition du moment L qui est aussi l'un des éléments de Delaunay. De plus, nous marquons la dépendance en temps

$$\begin{aligned} L_{PR/SW} &= \sqrt{\mu a(t)}, \\ \Longrightarrow \dot{L}_{PR/SW} &= \frac{\sqrt{\mu}\dot{a}}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Nous savons que $a(t) = a(0)(1 - Ct)$. La variation du demi-grand axe est donc donnée par la dérivée : $\dot{a} = -Ca(0) < 0$. La dérivée négative implique bien une décroissance du demi-grand axe a. Ceci implique, en adaptant l'expression de $\dot{a}$,

$$\begin{aligned} \dot{L}_{PR/SW} &= \frac{-Ca(0)\sqrt{\mu}}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{-C}{2\sqrt{1 - Ct}}. \end{aligned}$$

En rappelant le changement de variables qui nous permet d'obtenir des coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x &= \sqrt{2L}\cos(\sigma), \\ y &= \sqrt{2L}\sin(\sigma), \end{cases}$$

nous obtenons les équations d'Hamilton uniquement pour la partie perturbée

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{\dot{L}_{PR/SW}\cos(\sigma)}{\sqrt{2L_{PR/SW}}} + \sqrt{2L_{PR/SW}}\sin(\sigma)\dot{\sigma}, \\ \dot{y} &= \dfrac{\dot{L}_{PR/SW}\sin(\sigma)}{\sqrt{2L_{PR/SW}}} - \sqrt{2L_{PR/SW}}\cos(\sigma)\dot{\sigma}. \end{cases} \tag{5.6}$$

A ce stade, nous avons uniquement considéré la forme des équations d'Hamilton pour la partie perturbée par l'effet PR/SW. Par abus de langage et afin d'alléger la notation, nous utiliserons L pour désigner le moment résultant de l'effet. Du système d'équations (5.6), nous pouvons simplifier les deuxièmes termes respectifs dans chaque équation car nous ne considérons ici pas la variation dans angles résonants (σ) dans l'effet PR/SW. Afin de revenir à un système complet, il faut encore ajouter les parties du modèles conservatif

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{\dot{L}\cos(\sigma)}{\sqrt{2L}} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \dfrac{\dot{L}\sin(\sigma)}{\sqrt{2L}} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \end{cases}$$

Utilisons les simplifications suivantes

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2L\cos(\sigma)}{\sqrt{2L}} \iff \dfrac{x}{2L} = \dfrac{\cos(\sigma)}{\sqrt{2L}}, \\ y &= \dfrac{2L\sin(\sigma)}{\sqrt{2L}} \iff \dfrac{y}{2L} = \dfrac{\sin(\sigma)}{\sqrt{2L}}. \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les équations d'Hamilton qui seront utilisées numériquement dans le but de représenter l'espace de phase dans les coordonnées (x, y)

$$\begin{cases} \dot{y} &= \dfrac{\dot{L}y}{2L} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \dot{x} &= \dfrac{\dot{L}x}{2L} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}. \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y} &= \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \dfrac{\dot{L}y}{2}, \\ \dot{x} &= -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \dfrac{\dot{L}x}{2}. \end{cases}$$

Au terme de cette partie, nous avons pu adapter notre modèle conservatif en ajoutant un terme responsable de l'effet de dissipation PR/SW. Le point qui suivra aura pour but de confirmer les résultats théoriques à l'aide d'investigations numériques.

5.2.2 Investigations numériques

Enfin, nous clôturons cette partie en illustrant différents tests numériques qui viendront confirmer les premiers résultats théoriques, les codes Matlab© sont visibles dans l'annexe B.2. Pour cela, nous allons reprendre le même schéma que la figure 3.2. Rappelons que, sur cette figure, est illustré notre premier modèle conservatif, i.e. la dynamique donnée par les conditions initiales conserve son comportement. Par exemple, une condition initiale située dans l'île de résonance, la dynamique du modèle étant conservative, elle restera dans l'île de résonance en libration. Une condition initiale située en circulation, la dynamique du modèle étant conservative, elle restera en circulation.

Dans les illustrations qui vont suivre, nous ne traiterons plus de modèle conservatif, suite à l'introduction d'un effet de dissipation PR/SW. Comme nous l'avons dit, nous présentons des résultats en posant l'effet de dissipation $C = 10^{-3}$. D'autres résultats (avec $C = 10^{-4}$) sont visibles dans l'annexe A.1. Une multitude de tests ont été effectués en variant l'ordre de l'effet de dissipation et en adaptant la précision (intervalle et pas). Nous retenons les cas les plus intéressants où l'effet a un impact visible. Nous présenterons différents cas pour des conditions initiales spécifiques :

— En circulation externe : nous considérons un débris spatial dont l'orbite est suffisamment éloignée des îles de résonance. Nous représenterons le mouvement dans le plan (x, y),

— En circulation externe : nous considérons un débris spatial dont l'orbite est proche des îles de résonance. Il s'agit du cas le plus intéressant, sur lequel, il y aura plusieurs résultats à analyser : nous illustrerons le phénomène dans le plan (x, y), mais aussi (t, x) et (t, y),

— Dans l'île de résonance : nous considérons un débris spatial dont l'orbite se trouve capturée en résonance. Nous représenterons le mouvement dans le plan (x, y),

— En circulation interne : nous considérons un débris spatial dont l'orbite se trouve au-delà des zones de résonance. Nous illustrerons le phénomène dans le plan (x, y).

A noter que, comme nous avons déjà pu le remarquer en cyan sur la figure 3.2, des cas d'anomalies peuvent apparaître dans les limites du modèle (visible en couleur cyan). Premièrement, sur la figure 5.3 est illustrée la dynamique du mouvement dans le plan cartésien (x, y) au départ de conditions initiales se trouvant en circulation externe. Le comportement peut être découpé en trois phases :

— Premièrement, les conditions initiales placent l'orbite en circulation externe. La zone est particulièrement dense, ceci est causé par le nombre important d'itérations au sein d'une l'orbite peu influencée par la perturbation. Nous remarquons que plusieurs révolutions ont été effectuées en dehors des îles de résonance,

— Ensuite, nous constatons subitement un changement de comportement dans le voisinage $(-1.4; 0)$. Ce comportement est caractéristique d'une brève traversée en résonance. En effet, le mouvement ne prend que quelques itérations pour former le coin d'une île de résonance, sans pour autant y demeurer,

— Enfin, le mouvement aboutit en circulation interne suite au changement de comportement. La zone est également dense, marquée par la stabilité de l'orbite en circulation.

Sur la figure 5.4 est également illustrée la dynamique du mouvement dans le plan cartésien (x, y) au départ de conditions initiales se trouvant en circulant externe, tout comme la figure 5.3, à ceci près que l'on se trouve initialement à la frontière de l'île de résonance. Ce schéma renforce le fait que l'effet de dissipation a très peu d'influence sur le mouvement. Au départ d'une condition initiale éloignée de l'île de résonance, de nombreuses itérations sont nécessaires avant d'observer un changement de comportement. Pour l'observer directement, il faut donc se placer suffisamment proche de la zone de résonance pour que la perturbation ait un effet presque instantané. Le mouvement du débris spatial en orbite peut être découpé en trois phases distinctes :

— Premièrement, les conditions initiales placent l'orbite en circulation externe. La zone est extrêmement fine. En effet, nous remarquons une unique révolution effectuée en dehors des zones de capture. Ceci témoignage de la proximité avec les îles de résonance,

— Ensuite, nous remarquons un changement de comportement dans le voisinage $(1.4; 0)$. Ce comportement est caractéristique d'une brève traversée en résonance. En effet, le mouvement ne prend que quelques itérations pour former le coin d'une île de résonance, sans pour autant y demeurer,

— Enfin, le mouvement aboutit en circulation interne suite au changement de comportement. La zone est dense, marquée par la stabilité de l'orbite en circulation, plus éloignée qu'à l'origine des îles de résonance.

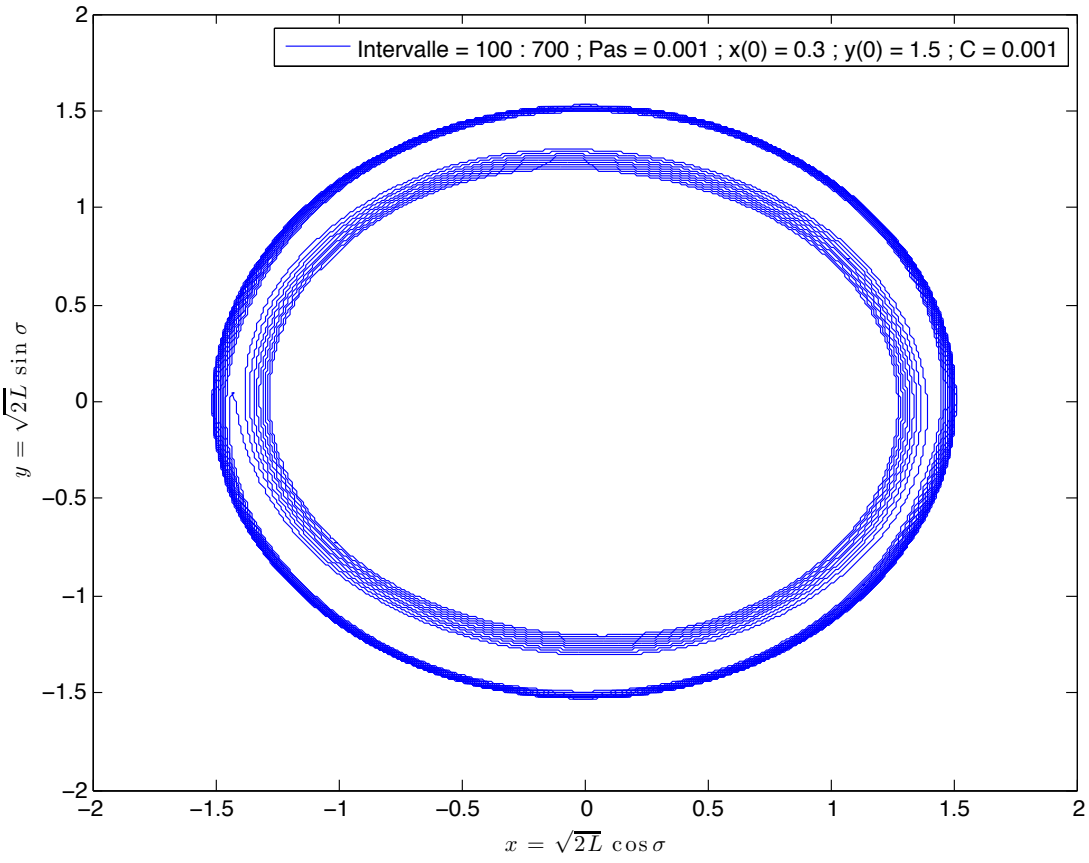

FIGURE 5.3 – Dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec CI = (0.3 ; 1.5).

La figure 5.4 est un cas intéressant que nous avons davantage exploité car elle représente le cas limite de la circulation externe avant la traversée de la résonance. Nous avons illustré cette situation à la fois dans le plan (t, x) sur la figure 5.5 et dans le plan (t, y) sur la figure 5.6. Dans les deux cas, nous retrouvons évidemment le découpage en trois phases :

— De l'itération 100 à 140 : nous distinguons des oscillations de grandes amplitudes, caractéristiques des circulations complètes que nous pouvons observer.

— Entre l'itération 140 et 160 : traversée de la résonance. Sur la figure 5.5, nous remarquons un amortissement quasi complet de l'oscillation et sur la figure 5.6, une oscillation de moindre amplitude.

— Au-delà de l'itération 160 : retour aux oscillations de grande amplitude, ce qui témoigne un retour à une dynamique de circulation stable.

La figure 5.7, nous testons la situation où la condition initiale est située dans la zone de résonance. Nous pouvons facilement distinguer la zone de libration en forme de croissant de lune allongée. Après une douzaine d'oscillations, le mouvement revient à une circulation interne aux îles de résonance. Enfin, sur la figure 5.8, nous considérons directement le cas où le mouvement démarre en circulation interne. Aucun phénomène particulier n'est détecté, la dynamique demeure en circulation interne au cours du temps. Notons que les limites du modèle sont visibles sur ces deux dernières figures.

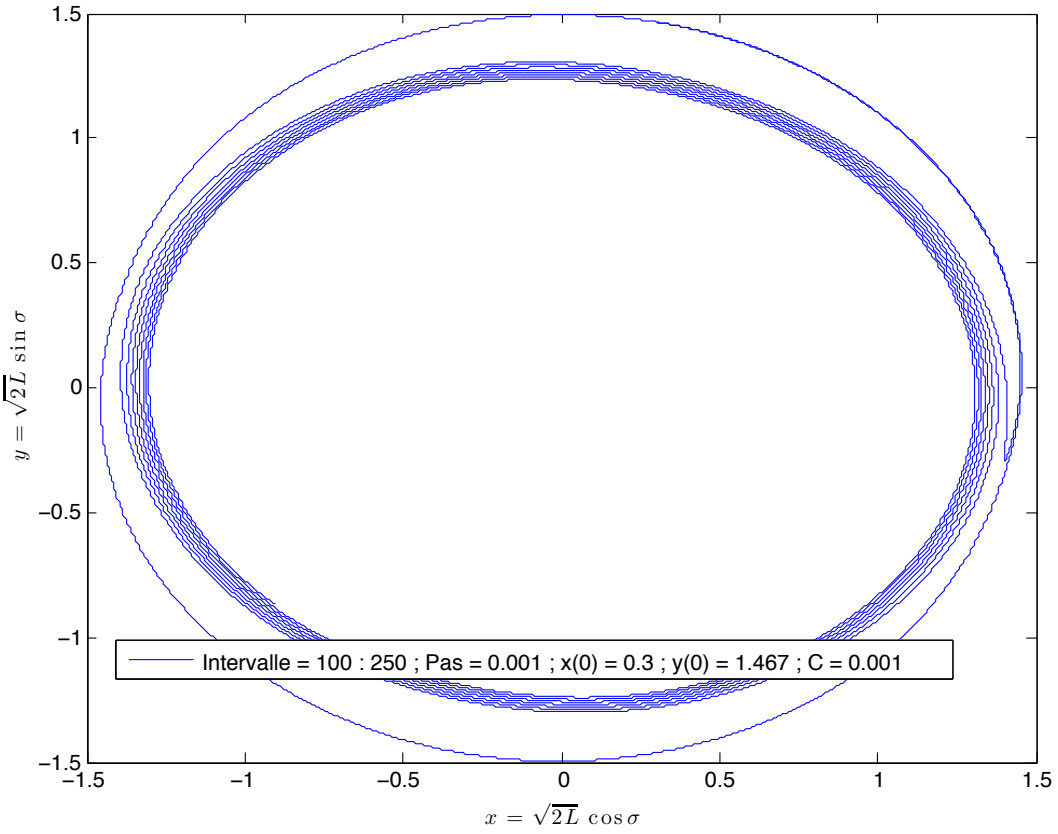

FIGURE 5.4 – Dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec CI = (0.3 ; 1.467).

Sur les figures 5.5 et 5.6 est respectivement représentée la dynamique du mouvement dans le plan (t, x) et (t, y) avec pour conditions initiales (0.3 ; 1.467).

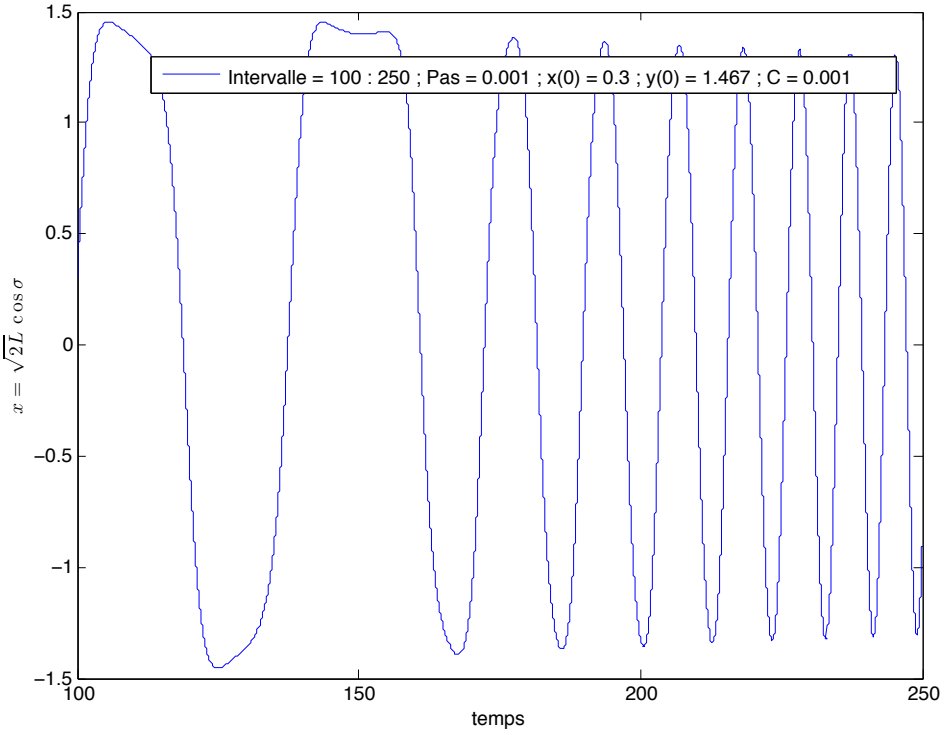

FIGURE 5.5 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, x) avec CI = (0.3 ; 1.467).

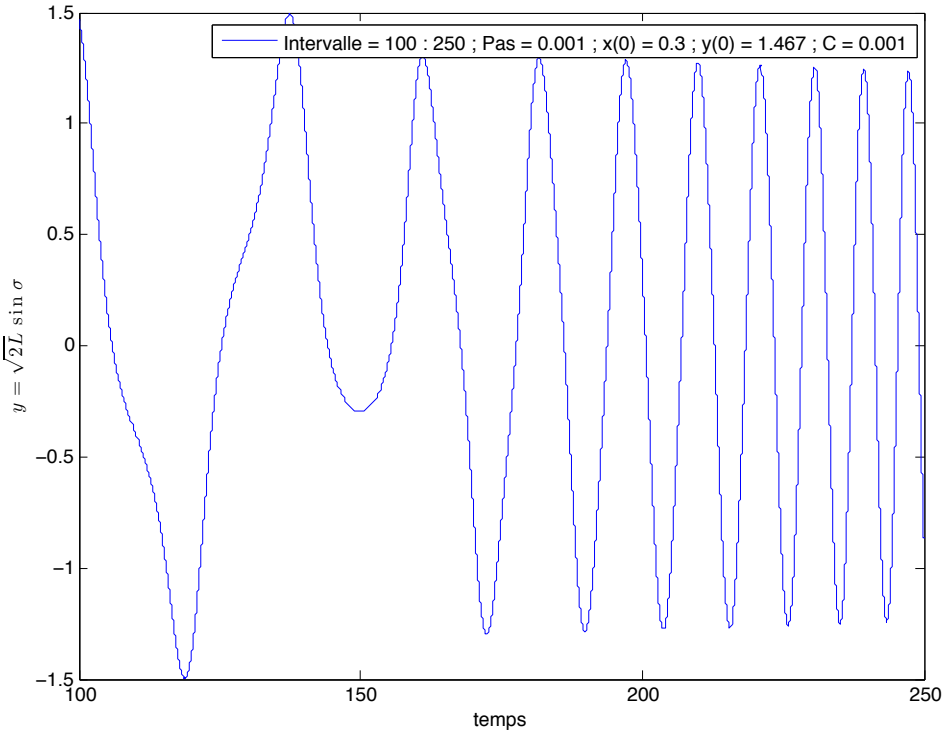

FIGURE 5.6 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, y) avec CI = (0.3 ; 1.467).

Sur les figures 5.7 et 5.8 est respectivement représentée la dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec pour conditions initiales (0.3 ; 1.3) et (0.3 ; 1.2) .

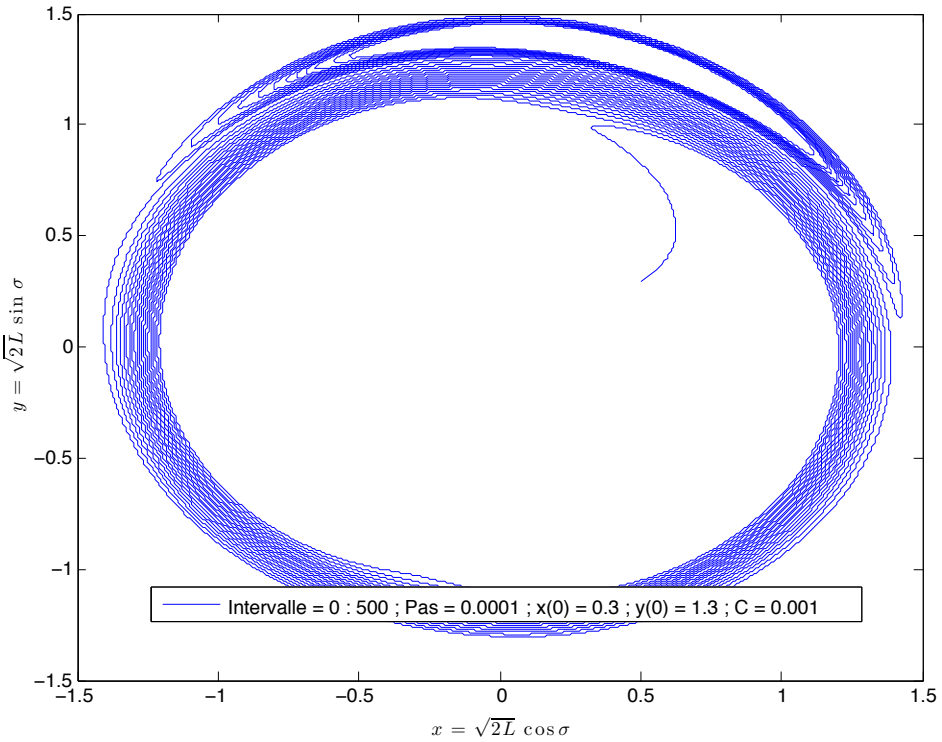

FIGURE 5.7 – Dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec CI = (0.3 ; 1.3).

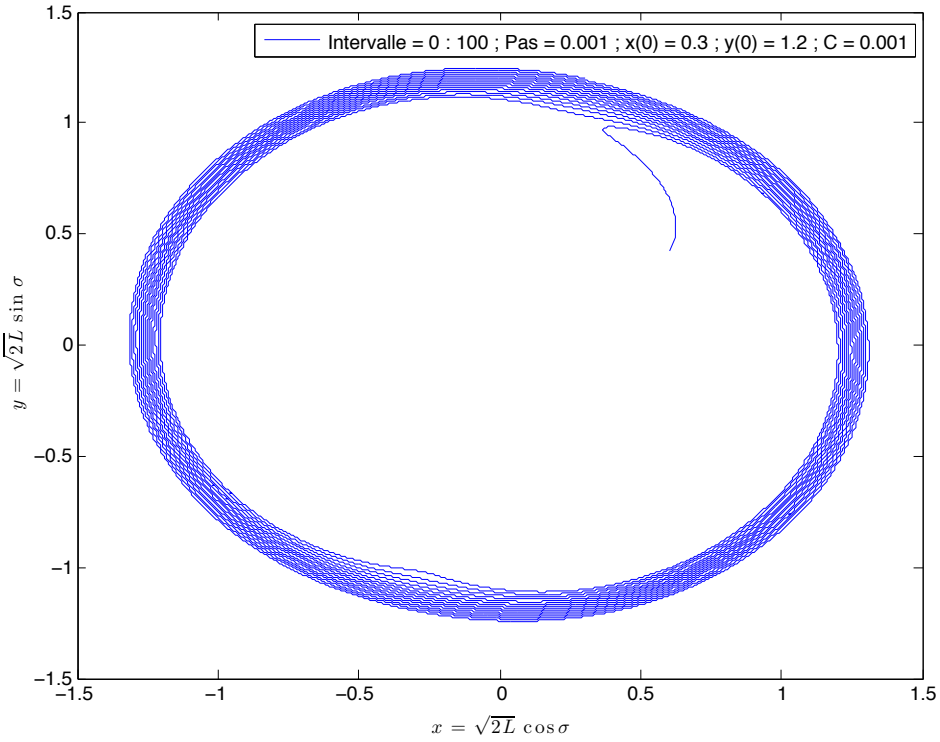

FIGURE 5.8 – Dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec CI = (0.3 ; 1.2).

5.3 Variation de c et b

Finalement, nous terminons notre étude en considérant la variabilité des paramètres c et b, i.e. compte tenu du fait qu'ils dépendent du temps. Dans cette étude où les deux paramètres varient simultanément, il est intéressant de comprendre leurs rôles au sein des domaines de transition. Comme nous l'avons expliqué précédemment, ces paramètres c et b correspondent respectivement à la translation de la séparatrice sur l'axe vertical et à sa déformation. Sur la figure 5.9 est présentée l'influence de c sur la séparatrice des domaines. Enfin, la figure 5.10 illustre l'évolution de la séparatrice en fonction de b.

Pour comprendre l'évolution de la séparatrice en fonction de ces paramètres, attardons-nous à l'analyse de leur dérivée :

- Translation de la séparatrice, i.e. analyse du paramètre c (figure 5.9) :
  - Si $\dot{c} > 0$, alors il y a une translation positive (déplacement vers le haut),
  - Si $\dot{c} < 0$, alors il y a une translation négative (déplacement vers le bas).
- Déformation de la séparatrice, i.e. analyse du paramètre b (figure 5.10) :
  - Si $\dot{b} > 0$, alors il y a une déformation positive (grossissement de la zone de libration),
  - Si $\dot{b} < 0$, alors il y a une déformation négative (aplatissement de la zone de libration).

L'enjeu sera donc de déterminer le cas dans lequel nous nous trouvons (avec notre modèle) et ce qu'il implique théoriquement. Comme pour la section précédente, des tests numériques sont présentés dans le but de confirmer les premiers résultats annoncés.

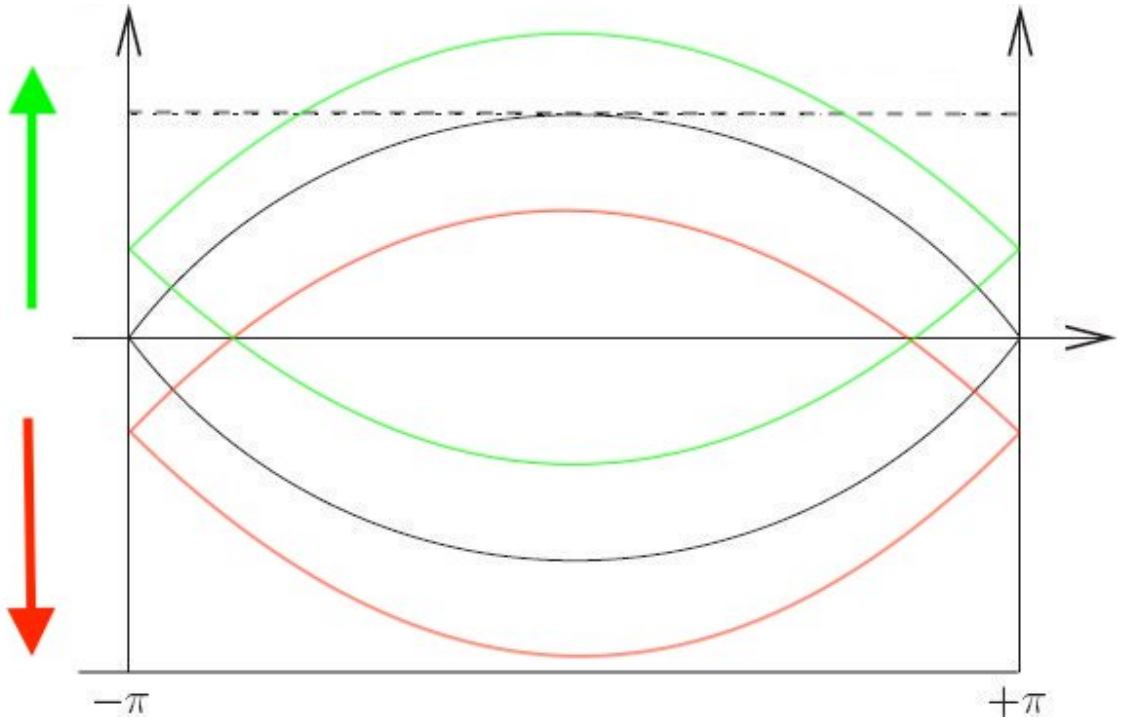

FIGURE 5.9 – Translation de la séparatrice des domaines de transition.

Il semble évident que quatre cas sont possibles si nous envisagions tous les scénarii en combinant les différentes possibilités de signes de b et c. Les probabilités de capture que nous expliciterons se basent intuitivement sur les conséquences physiques des paramètres b et c. Par exemple, prenons le cas où $\dot{b} > 0$ et $\dot{c} < 0$. Si nous voulons nous donner une intuition sur le potentiel comportement de capture, il faut se demander si la croissance de b est plus importante que la décroissance de c pour envisager une capture des débris se trouvant en circulation positive. Dans le cas contraire, si nous considérons $\dot{b} < 0$ et $\dot{c} > 0$, est-ce que b décroit suffisamment vite pour que la croissance de c ne donne pas lieu à une capture en résonance ? C'est justement à ces différentes questions que nous allons tenter de répondre.

Afin d'établir une seconde fois notre raisonnement, repartons de l'équation (5.2) en mettant en évidence la dépendance en temps des paramètres c et b. De plus, comparons-la à la relation 5.4 pour déterminer le signe de la dérivée de chaque paramètre. Rappelons que nous avons posé $L = p' + 1$, donc $\dot{L} = \dot{p'}$. Nous distinguons :

— $\dot{c} = \dot{I} < 0$. En effet, au paramètre c correspond à l'effet de dissipation. A cause de l'effet du drag, nous considérons une décroissance du demi-grand axe,

— $\dot{b} = \dfrac{-6\dot{p'}}{(1+p')^7} > 0$. Le paramètre b joue le rôle d'un coefficient devant les termes trigonométriques, ce qui suppose un élargissement de l'amplitude de la séparatrice.

A partir de ce constat, nous pouvons isoler l'un des quatre cas possibles et y analyser certaines probabilités de transition. De plus, nous ajusterons notre modèle numérique en vue d'établir différents tests s'y rapportant.

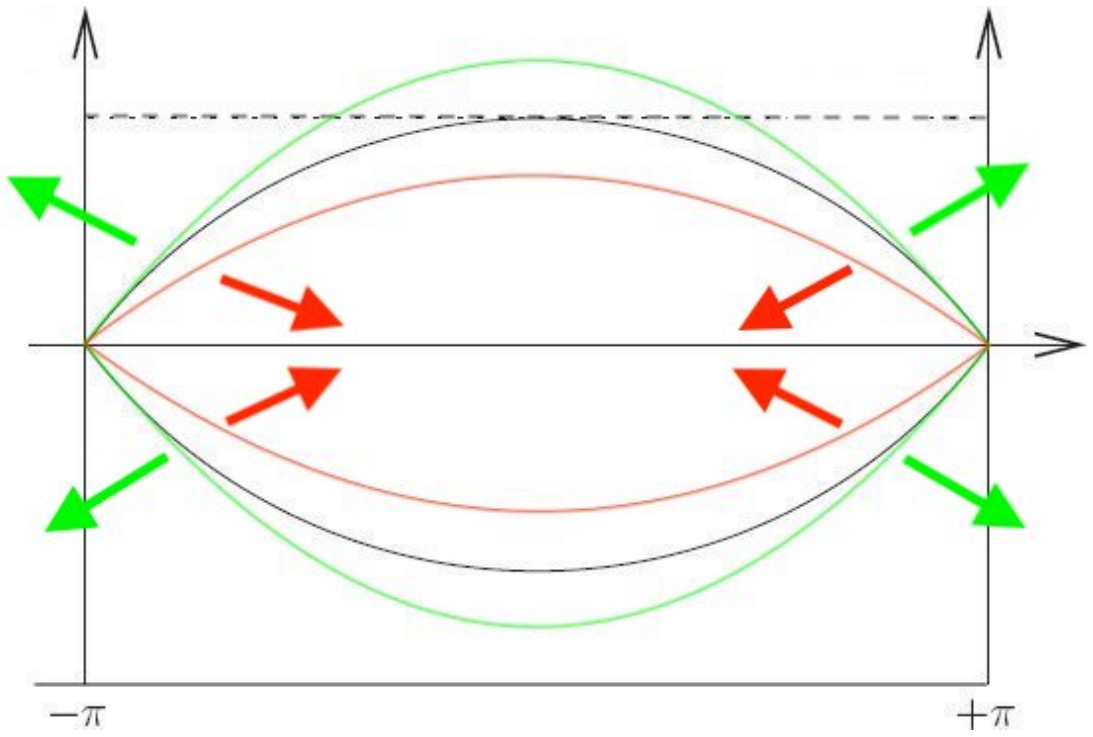

FIGURE 5.10 – Déformation de la séparatrice des domaines de transition.

Traitons donc le cas qui coïncide physiquement avec notre modèle. Il s'agit de considérer $\dot{c} < 0$ et $\dot{b} > 0$

$$\begin{cases} \dot{c} &= \dot{L} = -\epsilon, \\ \dot{b} &= \epsilon\alpha, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} c(0) &= 0, \\ b(0) &= b_0, \end{cases}$$

où nous posons α comme constante positive. Les conditions initiales dénotent le comportement d'un pendule fixe. En connaissant les signes de $\dot{b}$ et $\dot{c}$, nous pouvons avancer que

$$\begin{cases} B &= \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\dot{b}}{\sqrt{b}} > 0, \\ C &= \dfrac{\pi}{2}\sqrt{b}\dfrac{\dot{c}}{\dot{b}} = \dfrac{-\pi\sqrt{b}}{2\alpha} < 0. \end{cases}$$

En vertu de l'équation (5.3), nous pouvons calculer, à l'instar du cas précédent, les fonctions de probabilité de transition entre les différents domaines :

— La transition de la zone 1 à 3 correspond au cas où un objet en circulation positive est capturé en résonance. Dans ce cas, il entre en libration et passe à l'intérieur de la séparatrice. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,3) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3)\frac{\partial J_3^*}{\partial\lambda}/\frac{\partial J_1^*}{\partial\lambda} \\ &= \frac{2B}{B(1+C)} \\ &= \frac{2}{1+C} > 1. \end{aligned}$$

Pour $0 > C > -1$, ce résultat implique qu'il est certain qu'il y ait une capture en résonance dans le cas étudié.

— La transition de la zone 2 à 3 correspond au cas où un objet en circulation négative est capturé en résonance. Dans ce cas, il entre en libration et passe à l'intérieur de la séparatrice. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(2,3) &= -sgn(\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3)\frac{\partial J_3^*}{\partial\lambda}/\frac{\partial J_2^*}{\partial\lambda} \\ &= \frac{2B}{B(1-C)} \\ &= \frac{2}{1-C} > 1. \end{aligned}$$

Pour $0 > C > -1$, ce résultat implique qu'il est certain qu'il y ait une capture en résonance dans le cas étudié.

— La transition de la zone 1 à 2 correspond au cas où un objet en circulation externe positive passe en circulation externe négative. Nous pouvons également envisager une traversée de la zone de résonance et rester en circulation. Dans notre cas physique, rappelons-nous qu'il y a une zone de circulation externe et interne, entre lesquelles se trouve la zone de libration. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,2) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)\frac{\partial J_2^*}{\partial \lambda}/\frac{\partial J_1^*}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{B(1-C)}{B(1+C)} \\ &= -\frac{1-C}{1+C} < 0. \end{aligned}$$

Pour $0 > C > -1$, ce résultat implique qu'il est impossible de rester en circulation dans le cas étudié.

En conclusion, nous pouvons avancer, grâce aux résultats théoriques, que dans le cas où $\dot{c} < 0$ et $\dot{b} > 0$, la capture en résonance est un évènement certain pour $0 > C > -1$. Il est même prouvé qu'il est improbable de rester en circulation. Ceci est évidemment un résultat intéressant dans notre étude. En effet, nous avons réussi à isoler un cas mathématique où le cas de résonance pouvait être observé. Cependant, les paramètres physiques sont tellement petits que ce cas est peu réaliste. Nous finalisons ce chapitre en présentant plusieurs investigations numériques qui permettront de valider les résultats théoriques, les codes Matlab© sont visibles dans l'annexe B.3. Dans le but d'étoffer notre recherche, l'étude du cas $\dot{c} > 0$ et $\dot{b} < 0$ est présenté dans l'annexe A.2.

5.3.1 Investigations numériques

Pour cette dernière série de tests, nous analyserons l'hamiltonien 5.2, sur lequel nous analyserons l'évolution du moment I et de l'angle ϕ durant la transition des domaines. A priori, en constatant les résultats théoriques, nous nous trouvons dans le cas où la séparatrice s'élargit et s'abaisse par rapport à sa position initiale. Les résultats suivants sont attendus :

— Condition initiale en circulation positive : la trajectoire se trouve au-dessus de la séparatrice au sein du plan de phase. Le moment est positif et les ondulations de l'angle sont serrées avec de grandes amplitudes. Après quelques itérations, nous devrions observer un passage en résonance, le moment passera alors d'une zone positive à une zone négative et inversement. La période deviendra plus espacée et les amplitudes seront moins grandes.

— Condition initiale en circulation négative : la trajectoire se trouve en-dessous de la séparatrice au sein du plan de phase. Le moment est négatif et les ondulations de l'angle sont serrées et de grandes amplitudes. Après quelques itérations, nous devrions observer un passage en résonance, le moment passera alors d'une zone positive à une zone négative et inversement. La période deviendra plus espacée et les amplitudes seront moins grandes.

Les figures 5.11 et 5.12 nous illustrent le premier cas d'une circulation positive. La figure 5.11 présente l'évolution de l'angle en fonction du temps, tandis que la figure 5.12 présente l'évolution du moment en fonction du temps. Au départ d'un cas de circulation, nous observons sur ces deux graphiques le passage en résonance autour de $t = 320$. D'une part, nous voyons l'angle décrire des ondulations de moindre amplitude de plus en plus lisses. D'autre part, le moment parcourt à la fois la partie négative et positive du plan de phase.

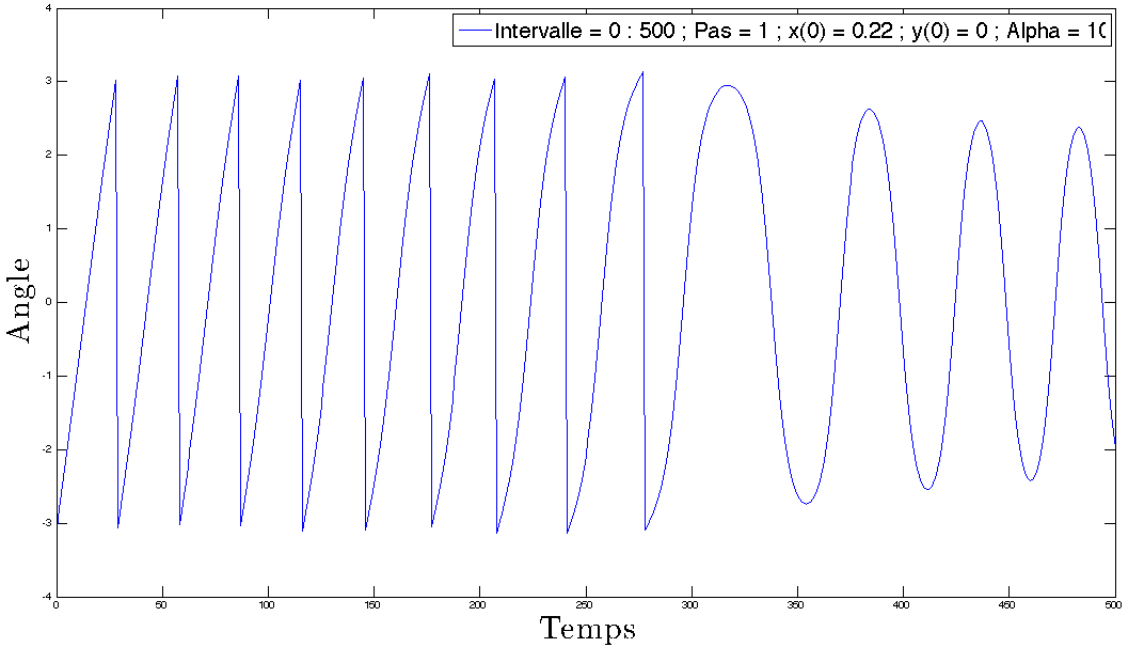

FIGURE 5.11 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, ϕ) avec CI = (0.22 ; 0).

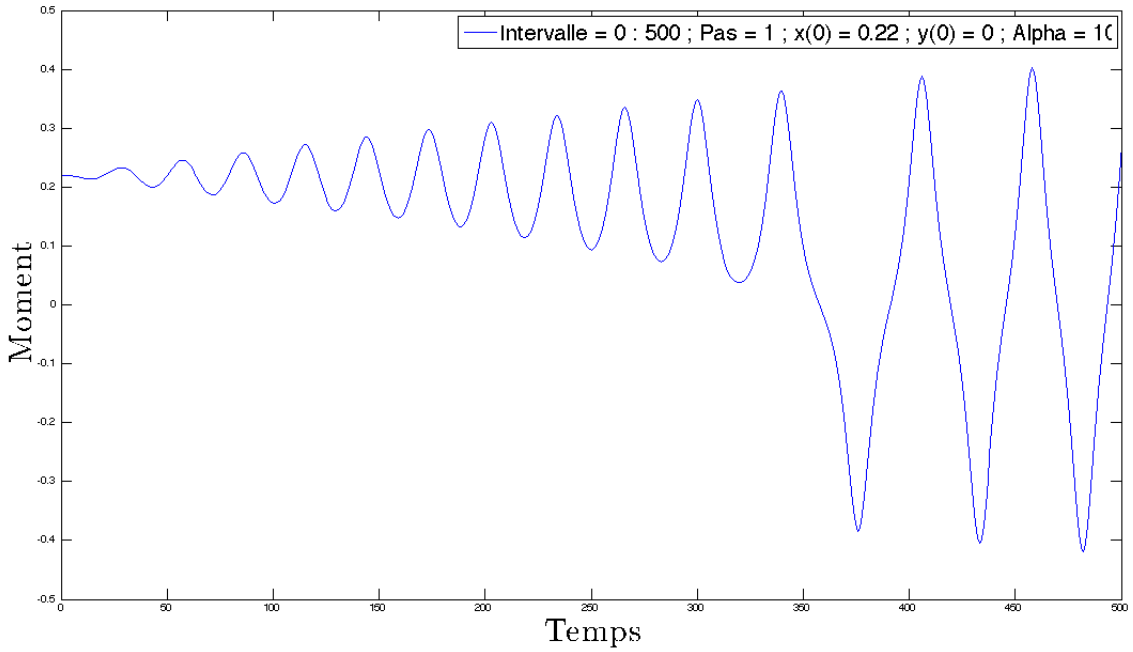

FIGURE 5.12 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, I) avec CI = (0.22 ; 0).

Les figures 5.13 et 5.14 nous illustrent le premier cas d'une circulation négative. La figure 5.13 présente l'évolution de l'angle en fonction du temps, tandis que la figure 5.14 présente l'évolution du moment en fonction du temps. Au départ d'un cas de circulation, nous observons sur ces deux graphiques le passage en résonance autour de $t = 320$. D'une part, nous voyons l'angle décrire des ondulations de moindre amplitude de plus en plus lisses. D'autre part, le moment parcourt à la fois la partie positive et négative du plan de phase.

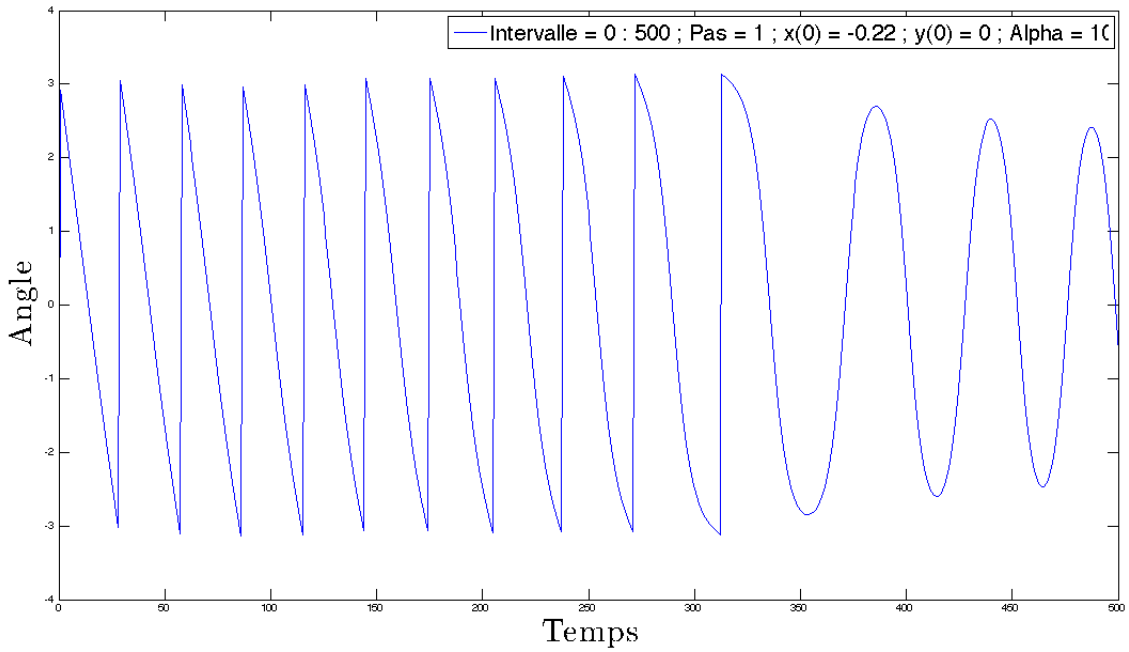

FIGURE 5.13 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, ϕ) avec CI = (-0.22 ; 0).

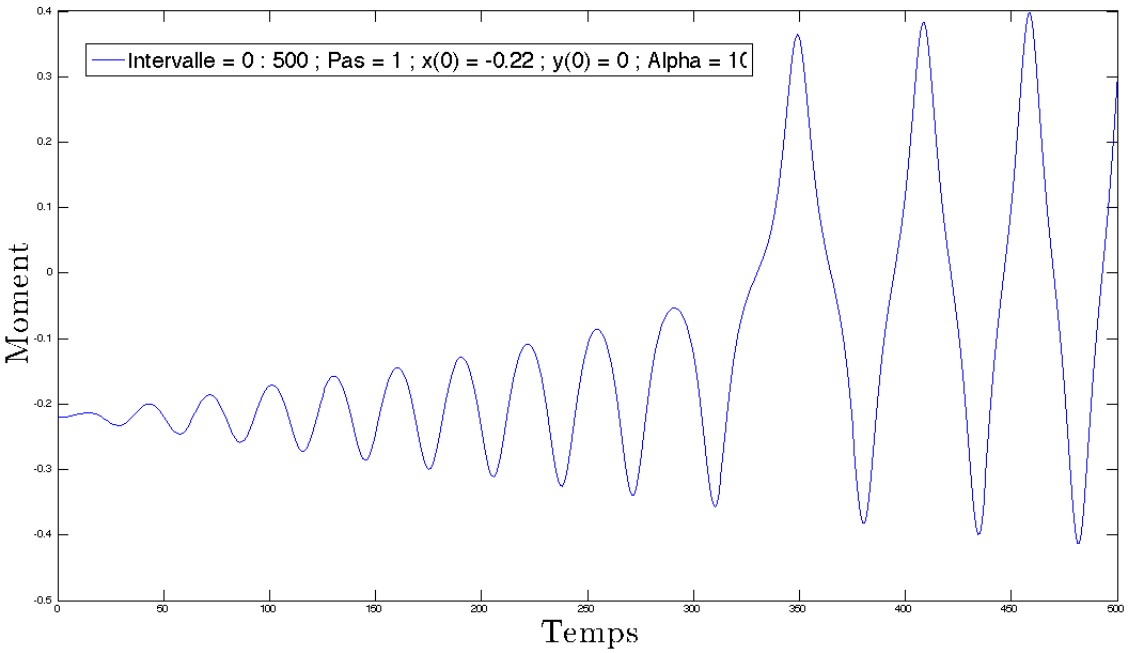

FIGURE 5.14 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, I) avec CI = (-0.22 ; 0).

Conclusion - Perspectives

Au terme de ce mémoire, nous avons pu mettre en évidence certaines conditions mathématiques afin d'observer certains cas de capture en résonance. Cette étude s'est réalisée sur base de la construction d'un système hamiltonien modélisant le mouvement d'un débris spatial en orbite géostationnaire. Comme nous l'avons développé dans la première partie de ce rapport, de nombreuses notions transversales mais aussi propre à la dynamique céleste ont été essentielles à la compréhension et à l'élaboration d'un premier modèle physique.

En exposant la problématique des satellites et des fragments qu'ils génèrent dans l'espace, l'étude des débris spatiaux devient alors aussi intéressante qu'elle n'est préoccupante. En effet, depuis le lancement du premier satellite, *Souptnik*, le 4 octobre 1957, le nombre de débris en expansion dans le voisinage terrestre n'a cessé d'augmenter ... drastiquement. La position des débris spatiaux n'est bien sûr pas uniforme et se concentre à certaines distances de la Terre, en occupant des orbites particulières. Parmi les différentes orbites existantes, nous nous sommes préoccupés des orbites géostationnaires. Les objets se trouvant sur ce type d'orbite suivent toujours la même surface terrestre. Les frottements de l'air présents dans la région des orbites géostationnaires sont si faibles que la durée de vie des satellites est considérable. De plus, en ajoutant le rythme soutenu de lancement, le nombre d'objets ne cesse d'augmenter dans cette région.

Dans un premier temps, les développements des notions théoriques nécessaires à l'élaboration de notre modèle physique ont été présentés. Deux aspects ont été abordés dans cette partie. D'une part, nous explicitons les généralités au sein de la dynamique céleste. Sur base de la théorie d'Hamilton et des transformations canoniques, nous pouvons d'ores et déjà construire une multitude de situations physiques. C'est à partir de la description des éléments orbitaux que nous pouvons adapter notre modèle en tenant compte du problème des deux corps, qui est une problématique récurrente en dynamique céleste. D'autre part, nous avons adapté nos modèles théoriques primitifs en introduisant la théorie des perturbations. Ce chapitre peut complexifier le système hamiltonien purement conservatif que nous présentons comme base de la dynamique observée. En tenant compte de l'influence gravitationnelle de plusieurs corps célestes (en plus de la Lune ou du Soleil) et en sachant que la Terre n'est pas une sphère parfaite ayant une répartition de masse homogène, le modèle obtenu est alors plus fidèle à la réalité qu'aux idées simplistes préconçues.

Ensuite, nous nous sommes cantonnés aux phénomènes de résonance, ces phénomènes physiques se rapportant aux systèmes dynamiques lorsque la fréquence d'oscillation propre est commensurable à la fréquence de forçage. Nous distinguons trois types, mais dans notre cas, nous nous sommes limités aux résonances géostationnaires, typiques du comportement des satellites météorologiques, ils surveillent une surface bien déterminée de la Terre et s'y calent durant leur utilisation. Au milieu de toutes ces notions bien distinctes se trouve un modèle hamiltonien conservatif les exprimant dans une plus ou moins grande mesure. Les rappels laissent alors place aux calculs d'équilibres et de stabilité de la dynamique observée. De plus, plusieurs changements de variables sont nécessaires afin de représenter graphiquement les zones de résonance en forme de croissant mis précédemment en évidence.

Le premier modèle fondamental de la résonance est une excellente base pour modéliser de nombreux problèmes physiques. En s'intéressant à la dynamique du pendule simple (modélisant fidèlement notre situation physique du débris en résonance), nous avons pu exposer le plan de phase s'y référant en distinguant ses différentes zones. Les parties supérieures et inférieures représentent le mouvement en circulation, tandis que la zone centrale correspond au mouvement en libration. Ces deux parties fondamentales sont scindées par une séparatrice. Ces domaines sont d'une importance capitale pour décrire l'apport de certaines perturbations, pouvant causer le passage de l'une à l'autre zone à travers le temps. L'introduction de certains effets de dissipation ajoute une nouvelle dimension à notre étude. L'effet Poynting-Robertson ainsi que les vents solaires ont depuis longtemps montré leur influence sur la trajectoire des débris spatiaux. En isolant une formule spécifique pour les objets célestes ayant un haut ratio aire/masse, comme les débris très légers dans notre cas, nous avons pu tester l'influence de ces effets à la dynamique que nous étudions. Pour des raisons de simplification, nous nous sommes attardés sur un coefficient purement mathématique afin de mettre en évidence certains phénomènes.

Dans le dernier chapitre consacré aux probabilités de capture, nous sommes repartis de la formulation hamiltonienne du pendule simple. En introduisant théoriquement un effet de dissipation, un deuxième paramètre doit être pris en compte. Nous avons effectué une analyse en deux temps. Tout d'abord, en posant le paramètre responsable des déformations de la séparatrice comme constant, pour pouvoir se focaliser uniquement sur l'influence de l'effet de dissipation. Ensuite, nous avons pris en compte la variation des deux paramètres simultanément. Dans ce cas, nous devions exprimer les paramètres en fonction de notre modèle pour déterminer leur dynamique. Dans le premier cas, nous avons clairement conclu à l'indifférence du modèle concernant l'effet de dissipation. En testant plusieurs ordres de grandeurs et échelles de temps, nous arrivions toujours à la même conclusion quelles que soient les conditions initiales considérées : la trajectoire du débris demeure en circulation sans probabilité de capture en résonance. Par contre, dans le cas où les deux paramètres variaient simultanément, nous observions toujours une capture en résonance.

Pour terminer, ce mémoire soulève différentes perspectives. Il serait tout à fait envisageable de revenir progressivement à des échelles physiques réelles en réhabilitant les premières valeurs des paramètres présentés dans la littérature. A partir de là, constater si les résultats mathématiques sont toujours observables. De plus, notre analyse s'est largement concentrée sur l'évolution du demi-grand axe de l'orbite étudiée. Des investigations pourraient également tester l'évolution de l'excentricité et de l'inclinaison au cours du temps, en mettant en évidence l'influence de la variabilité des paramètres présentés.

Bibliographie

[1] Celletti, A., et Gales, C., *Dynamical investigation of minor resonances for space debris*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol. 123, no 2, Springer, pp. 203-222, 2015.

[2] Cnes., *Débris spatiaux : le Cnes veut un espace "propre"*, https://cnes.fr/fr/web/CNES-fr/9531-gp-debris-spatiaux-le-cnes-aux-nations-unies.php, (pages consultées le 18 mai 2018).

[3] Delsate, N., *Analytical and numerical study of the ground-track resonances of Dawn orbiting Vesta*, Planetary and Space Science, vol 59, no 13, Elsevier, pp. 1372-1383, 2011.

[4] Jean, B., *Pollution partout, même dans l'espace !*, http://unpeudecologiedanslenord.fr/2016/06/24/la-pollution-est-partout-meme-dans-lespace/, (pages consultées le 10 mai 2018).

[5] Kaula, W. M., *Development the Lunar and the Solar Disturbing Functions for a Close Satellite*, The Astronomical Journal, vol 67, ADS, p. 300, 1962.

[6] Lemaître, A., *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*, The Lecture Notes in Physics, vol 790 (J. Souchay and R. Dvorak eds.), Springer, 2010.

[7] Libert, A.S., *Géométrie symplectique*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2016.

[8] Noyelles, B., *Dynamique Céleste*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2017.

[9] Penot, J.P., *Un peu de vulgarisation : les manoeuvres orbitales*, https://cnes.fr/fr/un-peu-de-vulgarisation-les-manoeuvres-orbitales, (pages consultées le 30 avril 2018).

[10] Pline, *Coordonnées de l'orbite d'un satellite artificiel terrestre*, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coordonnees_satellite.svg?uselang=fr, (pages consultées le 30 mars 2018).

[11] Raclot C., *CAPES physique chimie : Etude d'un pendule simple*, http://www.chimix.com/an6/sup/phy0.htm, (pages consultées le 17 janvier 2018).

[12] Valk, S., *Global dynamics of geosynchronous space debris with high area-to-mass ratios*, Thèse de doctorat, Presses Universitaires de Namur, Belgique, 2008.

[13] Lhotka, C., Celleti, A., et Gales, C., *Poynting-Roberston drag and solar wind in the space debris problem*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol 460, no 1, Oxford University Press, pp. 802-815, 2016.

[14] Surdej, J., *Mécanique hamiltonienne*, Extragalactic Astrophysics and SpaceObservations, http://www.aeos.ulg.ac.be/upload/Hamilton_2012_13.pdf, (pages consultées le 17 mai 2018).

[15] Henrard. J., *The Adiabatic Invariant in Classical Mechanics*, Dynamics Reported , 2 new series (C.K.R.T. Jones, U. Kirchgraber and H.O. Walther eds.), Springer-Verlag, pp. 117-235, 1993.

[16] Jancart, S., *Résonances et dissipations*, Thèse de doctorat, Presses Universitaires de Namur, Belgique, 2002.

[17] Poitou, D., *L'effet Poynting-Robertson*, https://nanopdf.com/download/leffet-poynting-roberston-bienvenue-sur-le-site-de-damien-poitou_pdf, (pages consultées le 17 mai 2018).

[18] Schmid, M., *Poynting-Robertson effect*, https://wikimonde.com/article/Effet_Poynting-Robertson, (pages consultées le 10 mai 2018).

[19] Issautier, K., *Caractéristiques générales du vent solaire*, http://lesia.obspm.fr/Caracteristiques-generales-du-vent.html, (pages consultées le 18 mai 2018).

[20] Zeghlache, H., *Le principe de moindre action ou de Lagrange-Hamilton*, http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M03_G03/co/Contenu_22.html, (pages consultées le 2 janvier 2018).

Annexe A

Graphiques - Résultats de l'effet PR/SW

Dans cette annexe se trouvent des résultats secondaires en ce qui concerne la variabilité des paramètres b et c. L'effet de dissipation PR/SW sur le modèle conservatif (variabilité de c) de l'ordre de 10^{-4} est illustré dans l'annexe A.1. Enfin, de plus amples résultats sur l'effet causé par la variabilité des paramètres b et c sur notre modèle sont visibles dans l'annexe A.2.

A.1 Coefficient de dissipation $C = 10^{-4}$

Sur la figure A.1 se trouve une représentation de la dynamique du mouvement des débris orbitaux dans le plan (x, y) avec un coefficient de dissipation $C = 10^{-4}$ et les conditions initiales suivantes : (0.3 ; 1.467). Elles correspondent à la frontière entre les îles de résonance à la circulation externe. Nous observons de premières itérations en circulation externe, une traversée en résonance en (1.4 ; 0). Enfin, un retour presque instantané en circulation interne.

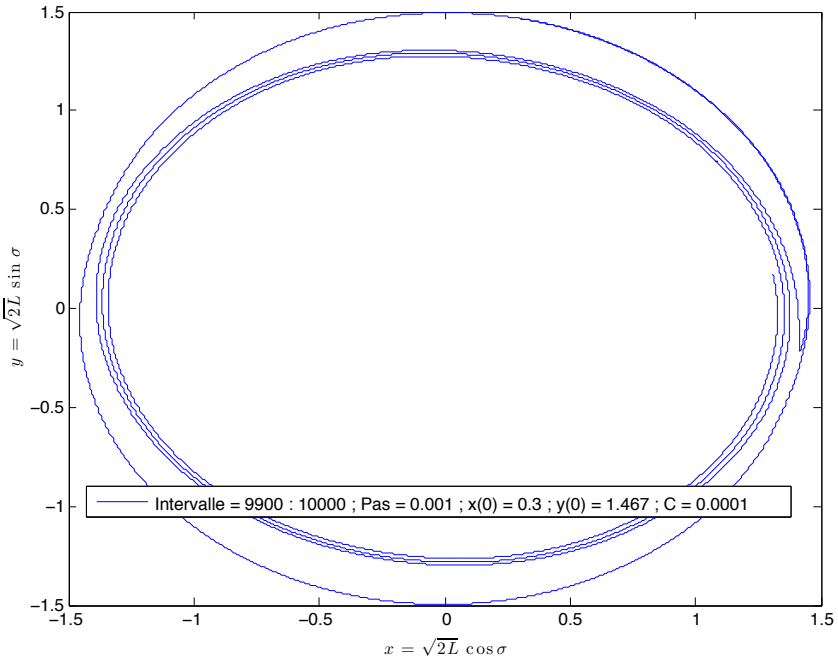

FIGURE A.1 – Dynamique du mouvement dans le plan (x, y) avec $C = 10^{-4}$.

Notons que les figures A.1, A.2 et A.3 ont toutes été générées avec une précision d'un pas égal à 0.001, dans le but d'observer au mieux le phénomène avec un temps de calcul raisonnable.

Sur la figure A.2 et A.3 sont présentées respectivement la dynamique dans le plan (t, x) et (t, y). Dans les deux, nous observons de longues oscillations caractéristiques de la circulation. Entre le pas 9970 et 9980, une perturbation survient, caractérisée par une oscillation amortie typique de l'entrée en résonance. Ensuite, des oscillations de grandes amplitudes réapparaissent témoins d'une stabilité en circulation.

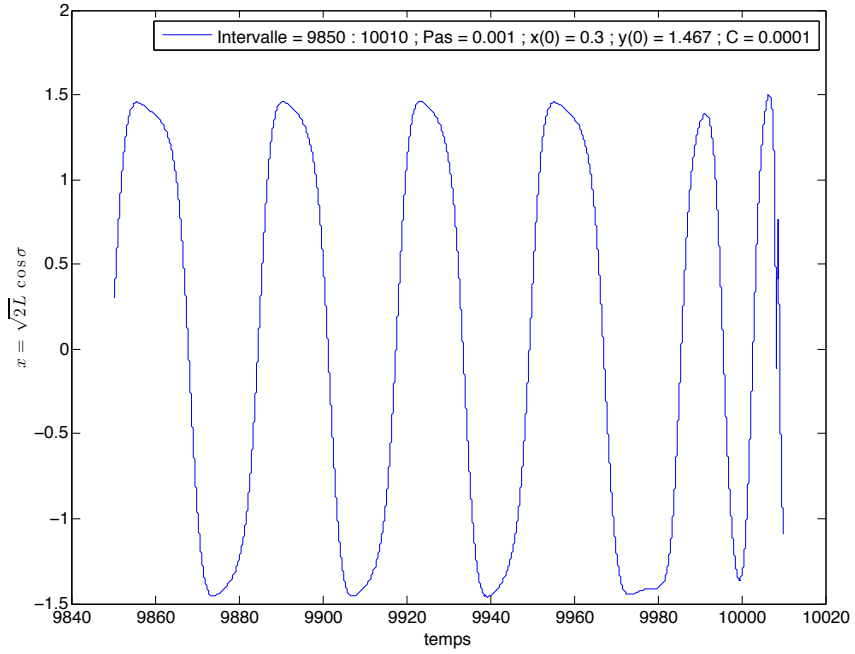

FIGURE A.2 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, x) avec $C = 10^{-4}$.

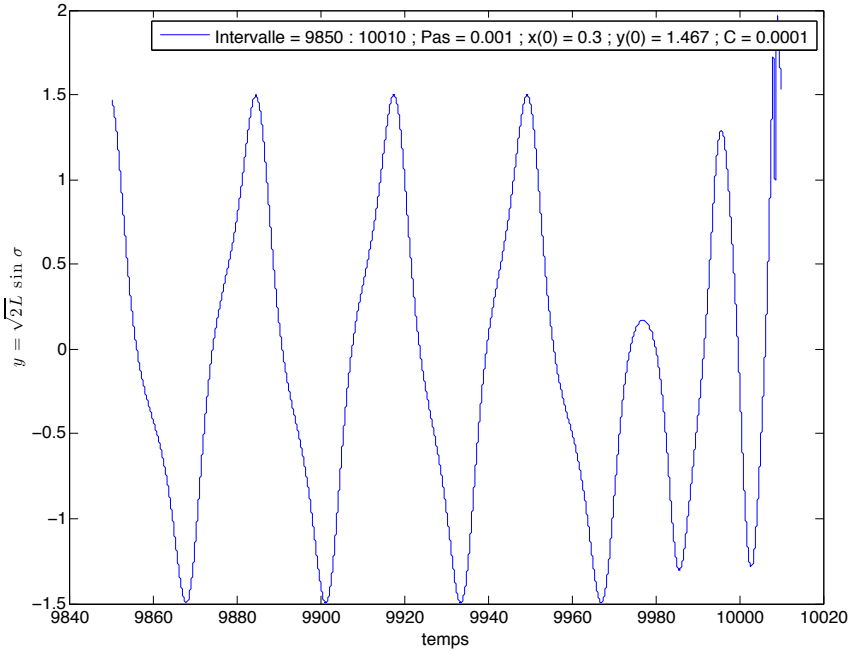

FIGURE A.3 – Dynamique du mouvement dans le plan (t, y) avec $C = 10^{-4}$.

A.2 Variabilité des paramètres b et c ($\dot{b} < 0$ et $\dot{c} > 0$)

Considérer $\dot{c} > 0$ et $\dot{b} < 0$ où nous posons α comme constante positive. En connaissant les signes de $\dot{b}$ et $\dot{c}$, nous pouvons avancer que :

$$\begin{cases} B &= \frac{2}{\pi}\frac{\dot{b}}{\sqrt{b}} < 0, \\ C &= \frac{\pi}{2}\sqrt{b}\frac{\dot{c}}{\dot{b}} = \frac{-\pi\sqrt{b}}{2\alpha} < 0. \end{cases}$$

En vertu de l'équation (5.3), nous pouvons calculer, à l'instar du cas précédent, les probabilités de transition entre les différents domaines :

— La transition de la zone 1 à 3 correspond au cas où un objet en circulation positive est capturé en résonance. Dans ce cas, il entre en libration et passe à l'intérieur de la séparatrice. Calculons la fonction de probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,3) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3)\frac{\partial J_3^*}{\partial\lambda}/\frac{\partial J_1^*}{\partial\lambda} \\ &= \frac{2B}{B(1+C)} \\ &= \frac{2}{1+C} < 0. \end{aligned}$$

Pour $C < -1$, ce résultat implique qu'il est impossible qu'il y ait une capture en résonance dans le cas étudié.

— La transition de la zone 1 à 2 correspond au cas où un objet en circulation externe positive passe en circulation externe négative. Nous pouvons également envisager une traversée la zone de résonance et rester en circulation. Dans notre cas physique, rappelons-nous qu'il y a une zone de circulation externe et interne, entre lesquelles se trouve la zone de libration. Calculons la probabilité qu'un tel évènement se produise

$$\begin{aligned} F_{Pr}(1,2) &= -sgn(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)\frac{\partial J_2^*}{\partial\lambda}/\frac{\partial J_1^*}{\partial\lambda} \\ &= -\frac{B(1-C)}{B(1+C)} \\ &= -\frac{1-C}{1+C} > 1. \end{aligned}$$

Pour $C < -1$, ce résultat implique qu'il est certain de rester en circulation dans le cas étudié.

En conclusion, dans le cas où $\dot{c} > 0$ et $\dot{b} < 0$, la capture en résonance est un évènement impossible mais il est certain de rester en circulation pour $C < -1$.

Annexe B

Codes Matlab©

Dans cette annexe se trouve les différents codes implémentés en Matlab©. Ces codes nous ont permis à la fois d'illustrer nos modèles mais également de pouvoir confirmer des résultats théoriques au travers d'investigations numériques.

B.1 Modèle conservatif dans les coordonnées (x, y)

L'implémentation suivante nous a permis de construire nos premiers modèles conservatifs suivant différents plans en coordonnées cartésiennes.

```
clear all
close all

%-------------------------------------------------------------------------%
%
%  y(1) : y = sqrt(2L)*sin(sigma) Il s agit du moment
%  y(2) : x = sqrt(2L)*cos(sigma) Il s agit de la variable
%
%-------------------------------------------------------------------------%

%--- Temps final ---%

pas = 0.001;

intervalle = [0:pas:260];

%--- Conditions initiales ---%

y01 = 1.3; % pour sigma = 5pi/12 on a 1.366 choisir 1.3
y02 = 0.3; % pour sigma = 5pi/12 on a 0.366 choisir 0.3

[t,y] = ode45('Hamiltonien_chgt_variable', intervalle, [y01 y02]); %
    Resolution

y1 = y(:,1);    %Extraction de y1 et y2
y2 = y(:,2);

```

```
27 plot (y2,y1) % Plan de phase plot(y2,y1)
28
29 %-----------------------------------%
30
31 y01 = -1.3; % pour sigma = 17pi/12 on a -1.366 choisir -1.3
32 y02 = -0.3; % pour sigma = 17pi/12 on a -0.366 choisir -0.3
33
34 [t,y] = ode45('Hamiltonien_chgt_variable', intervalle, [y01 y02]); %
    Resolution
35
36 y1 = y(:,1);    %Extraction de y1 et y2
37 y2 = y(:,2);
38
39 hold on
40
41 plot (y2,y1) % Plan de phase
42
43 %-----------------------------------%
44
45 function ypoint = Hamiltonien_chgt_variable(t,y, alpha_1, alpha_2)
46
47     alpha_1 = -1.077*10^(-2);
48     alpha_2 = 0.6204*10^(-2);
49
50     L = (1/2)*(y(2)^2 + y(1)^2);
51     y1sq = y(1)^2;
52     y2sq = y(2)^2;
53
54     ypoint(1) = y(2)/L^3 - y(2) - ((7*y(2))/(2*L^8))*(alpha_1*(y2sq -
         y1sq) + alpha_2*2*y(1)*y(2)) + (1/L^7)*(alpha_1*y(2) +
        alpha_2*y(1));
55     ypoint(2) = -y(1)/L^3 + y(1) + ((7*y(1))/(2*L^8))*(alpha_1*(y2sq
       - y1sq) + alpha_2*2*y(1)*y(2)) - (1/L^7)*(-1*alpha_1*y(1) +
        alpha_2*y(2));
56
57     ypoint = ypoint(:);
58
59 end
```

B.2 c variable

L'implémentation suivante nous a permis d'introduire la variabilité d'un paramètre c permettant d'ajouter l'effet de dissipation PR/SW.

```
1 clear all
2 close all
3
4 %-------------------------------------------------------------------------%
5 %
```

```
%  y(1) : y = sqrt(2L)*sin(sigma) Il s agit du moment
%  y(2) : x = sqrt(2L)*cos(sigma) Il s agit de la variable
%
%-------------------------------------------------------------------------%

%--- Temps final ---%

pas = 0.001;

intervalle = [0:pas:260];

%--- Conditions initiales ---%

C = 10^(-3); % Dans nos premiers tests, on pose C = 10^(-3)

y01 = 1.465; % pour sigma = 5pi/12 on a 1.366 choisir 1.3
y02 = 0.3; % pour sigma = 5pi/12 on a 0.366 choisir 0.3

[t,y] = ode45('Hamiltonien_x_y_PR', intervalle, [y01 y02]); % Resolution

y1 = y(:,1);    %Extraction de y1 et y2
y2 = y(:,2);

plot (y2,y1) % Plan de phase plot(y2,y1)
xlabel('$x = \sqrt{2L}\ \cos\ \sigma$', 'Interpreter', 'Latex')
ylabel('$y = \sqrt{2L}\ \sin\ \sigma$', 'Interpreter', 'Latex')
legend(['Intervalle = ' num2str(intervalle(1)) ' : ' num2str(intervalle(length(intervalle))) ' ; Pas = ' num2str(pas) ' ; x(0) = ' num2str(y02) ' ; y(0) = ' num2str(y01) ' ; C = ' num2str(C)]);

%-------------------------------%

function ypoint = Hamiltonien_x_y_PR(t,y, alpha_1, alpha_2)

    alpha_1 = -1.077*10^(-2);
    alpha_2 = 0.6204*10^(-2);

    L = (1/2)*(y(2)^2 + y(1)^2); %
    y1sq = y(1)^2;
    y2sq = y(2)^2;

    %-------- PR --------%

    C = 10^(-3);

    %--Eq. Hamilton--%

    ypoint(1) = y(2)/L^3 - y(2) - ((7*y(2))/(2*L^8))*(alpha_1*(y2sq - y1sq) + alpha_2*2*y(1)*y(2)) + (1/L^7)*(alpha_1*y(2) + alpha_2*y(1)) + (L_PR*y(1))/2;
```

```
52      ypoint(2) = -y(1)/L^3 + y(1) + ((7*y(1))/(2*L^8))*(alpha_1*(y2sq
            - y1sq) + alpha_2*2*y(1)*y(2)) - (1/L^7)*(-1*alpha_1*y(1) +
            alpha_2*y(2)) + (L_PR*y(2))/2;
53
54      ypoint = ypoint(:);
55
56  end
```

B.3 b et c variables

L'implémentation suivante nous a permis de tester numériquement la variabilité des paramètres b et c au sein de notre modèle.

```
1   clear all
2   close all
3
4   %-------------------------------------------------------------------------%
5   %
6   %  y(1) : q = variable angulaire Phi
7   %  y(2) : p = moment I
8   %
9   %-------------------------------------------------------------------------%
10
11  %--- Temps final ---%
12
13  pas = 1;
14  intervalle = [0:pas:500];
15
16  %--- Conditions initiales ---%
17
18  Alpha = 10; % Alpha permet d accentuer le phenomene
19  epsilon = 10^(-5)
20
21  y01 = 0; % On demarre en position d equilibre quel que soit le cas
        traite
22  y02 = 0.2; % p = 0.229 pour la circulation positive
23
24  [t,y] = ode45('Hamiltonien_Fct_var', intervalle, [y01 y02]); %
        Resolution
25
26  y1 = mod(y(:,1), 2*pi) - pi   %Extraction de y1 et y2
27  y2 = y(:,2);
28
29  plot (t,y2) % Plan de phase plot(t,y1)
30  xlabel('temps', 'Interpreter', 'Latex')
31  ylabel('Moment', 'Interpreter', 'Latex')
32  legend(['Intervalle = ' num2str(intervalle(1)) ' : ' num2str(
        intervalle(length(intervalle))) ' ; Pas = ' num2str(pas) ' ; x(0)
        = ' num2str(y02) ' ; y(0) = ' num2str(y01) ' ; Alpha = ' num2str(
        Alpha)]);
```

```
33
34 %-----------------------------------%
35
36 function ypoint = Hamiltonien_Fct_var(t,y)
37
38     alpha_1 = -1.077*10^(-2);
39     alpha_2 = 0.6204*10^(-2);
40
41     Alpha = 10;
42     epsilon = 10^(-5)
43
44     c = epsilon*t;
45     b = - epsilon*Alpha*t;
46
47     %--Eq. Hamilton--%
48
49     ypoint(1) = y(2) - c;
50     ypoint(2) = -b*sin(y(1));
51
52     ypoint = ypoint(:);
53
54 end
```

Annexe C

Echelle d'unité

	Valeurs	*Unité*
α_1	-1.077 $\times 10^{-7}$	/
α_2	0.6204 $\times 10^{-7}$	/
$\mathcal{G}$	6.67408 $\times 10^{-11}$	$m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$
M_t	5.9722 $\times 10^{24}$	kg
μ	3.98600442 $\times 10^{14}$	$m^3\ s^{-2}$
a_{geo}	4.2164170 $\times 10^{7}$	m
L	1.29640490 $\times 10^{11}$	$m^2\ s^{-1}$
$\dot{\theta}$	7.292115 $\times 10^{-5}$	rad s^{-1}

TABLE C.1 – Tableau d'unités des variables et des paramètres de l'équation (3.1).

	Valeurs de σ	*Stabilité*	*Variables brutes*	*Variables simplifiées*
$x = \sqrt{2L}\cos(\sigma)$	$5\pi/12$	Stable	131789.7276	0.336
	$11\pi/12$	Instable	-491845.9593	-1.336
	$17\pi/12$	Stable	-131789.7276	-0.336
	$23\pi/12$	Instable	491845.9593	1.336
$y = \sqrt{2L}\sin(\sigma)$	$5\pi/12$	Stable	491845.9593	1.336
	$11\pi/12$	Instable	131789.7276	0.336
	$17\pi/12$	Stable	-491845.9593	-1.336
	$23\pi/12$	Instable	-131789.7276	-0.336

TABLE C.2 – Tableau de valeurs en coordonnées cartésiennes suivant les zones d'équilibre.